TÉCNICAS MULTICRITERIO PARA LA ELECCIÓN DE DESTINOS TURÍSTICOS

Trabajo Fin de Máster

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

VITALI ONOPKO ONOPKO

JULIO 2019

Máster de Análisis de Datos para Inteligencia de Negocios

Resumen

En este trabajo se ha diseñado un modelo matemático para ordenar un conjunto de hoteles atendiendo a múltiples criterios de evaluación y según las preferencias de un viajero particular. Para ello, se ha utilizado un operador de agregación: la integral de Choquet que presenta buenas propiedades para asignar utilidades globales a cada una de las alternativas (hoteles) a valorar. La mayor dificultad que supone la aplicación de la integral de Choquet es la identificación de la función de conjunto que contiene la información sobre la importancia de las coaliciones de criterios. Hemos propuesto una combinación de metodologías para llevar a cabo esta identificación de la medida *fuzzy* y hemos comparado nuestros resultados con otras metodologías. Nuestra aplicación empírica trabaja sobre una base de datos construido a partir de visitas a páginas web donde se recogen información sobre hoteles en la isla de Tenerife. Hemos trabajado con 97 hoteles que han sido valorados en 6 criterios de elección incluyendo una etiqueta sobre el comportamiento responsable con el medio ambiente del establecimiento hotelero.

Abstract

In this work a mathematical model has been designed to ranking a group of hotels according to multiple evaluation criteria and according to the preferences of a particular traveler. For this, an aggregation operator has been used: the integral of Choquet that has good properties to assign global utilities to each of the alternatives (hotels) to be valued. The greatest difficulty involved in the application of the Choquet integral is the identification of the set function that contains the information on the importance of the coalitions of criteria. We have proposed a combination of methodologies to carry out this identification of the fuzzy measure and we have compared our results with other methodologies. Our empirical application works on a database built from visits to web pages where information about hotels on the island of Tenerife is collected. We have worked with 97 hotels that have been rated on 6 criteria of choice including a label on responsible behavior with the environment of the hotel establishment.

Índice de Contenido

Índice de figuras y tablas.

Introducción

Los procesos de toma de decisiones considerando varios criterios son complejos y han sido objeto de múltiples estudios desde épocas tempranas con importantes aportaciones de Ramón Llull (1232-1316), Ignacio de Loyola (1491-1556), Marqués de Condorcet (1743-1794), Benjamin Franklin (1706-1790), Wilfredo Pareto (1848-1923), entre otros. Sin embargo, no es hasta fechas recientes (*The First International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, 1972) cuando la Decisión Multicriterio se presenta oficialmente a la comunidad científica.

Aunque existen varias tipologías de modelos multicriterio atendiendo a los diversos elementos que configuran el problema, podemos definir un proceso de toma de decisiones multicriterio como una situación donde uno o varios decisores deben elegir (u ordenar) una alternativa en un conjunto, finito o no, de ellas atendiendo a la *performance* de dichas alternativas bajo varios criterios a menudo en conflicto. En este trabajo nos centraremos en la ordenación/elección de un número finito de alternativas con información precisa y cuantitativa sobre los valores que alcanza cada criterio en cada una de las alternativas consideradas. Matemáticamente, cada alternativa vendrá determinada por un vector en el espacio real n-dimensional (siendo $n > 1$ el número de criterios). Puesto que la extensión del orden usual en el espacio real no produce un orden completo en el espacio real n-dimensional la mayoría de las técnicas multicriterio abordan un proceso de agregación de los criterios que sitúa la comparación y ordenación de las alternativas en el conjunto de los números reales. Para llevar a cabo un proceso de agregación es necesario abordar tres cuestiones, la primera sería la evaluación de las alternativas sobre cada criterio, la segunda sería la asignación de pesos de importancia a los criterios y, por último hay que decidir la forma de agregar. La elección de un operador de agregación conveniente es una cuestión de máxima importancia en cualquier modelo multicriterio.

La selección de un conjunto de criterios para evaluar las alternativas que se pretenden ordenar es una de las tareas más importantes y complejas en cualquier problema de toma de decisiones multicriterio. Dicha selección es importante no solamente porque definirá qué criterios van a determinar las mejores y peores alternativas, sino también en qué medida son capaces de recoger los aspectos más relevantes del problema de decisión/elección a resolver.

Sin embargo, no basta únicamente con seleccionar independientemente cada uno de los criterios y estudiar su comportamiento en cada una de las alternativas que estamos analizando. Para que el modelo de toma de decisiones sea lo más realista posible hay que estudiar también la interacción entre los diferentes criterios.

Grabisch (1996) presenta un ejemplo, que ya es clásico en la literatura, donde un centro educativo quiere seleccionar a los estudiantes y utiliza, para ello, sus calificaciones en 3 materias: Matemáticas, Física y Literatura. Se puede esperar que un buen alumno en Matemáticas lo sea también en Física y viceversa. Por tanto, si no se tiene en cuenta esta interacción y se asume la independencia de los criterios, se puede sobrevalorar o infravalorar a algunos estudiantes. La idea es sencilla: *si tenemos dos criterios positivamente correlacionados entonces la importancia de que se presenten conjuntamente debería ser estrictamente menor que la suma de las importancias de los dos criterios individualmente* (Marichal, 2004).

Los métodos de agregación más empleados en Teoría de Decisión Multicriterio se basan en medidas aditivas como son la media aritmética simple o ponderada de todos los criterios suponiendo la independencia de los mismos. En las últimas décadas se han desarrollado metodologías que tratan de solucionar el problema de no aditividad en los modelos de toma de decisiones multicriterio, permitiendo agregar adecuadamente aquellos criterios que interaccionan entre sí. Las medidas *fuzzy*, llamadas también medidas no-aditivas, en problemas de decisión multicriterio se definen sobre el conjunto (finito) de criterios, y modelizan la importancia relativa de los criterios, así como sus interacciones. Asociadas a las medidas *fuzzy* aparecen las integrales *fuzzy* (Sugeno introduce en 1974 esta terminología) como operadores de agregación capaces de tener en cuenta las interacciones entre criterios (ver e.g. Grabisch, 1996 y 1997 y Marichal, 2004 para un estudio de la aplicación de las medidas e integrales *fuzzy* en el campo de la Decisión Multicriterio).

Un caso particular entre las integrales *fuzzy* de especial relevancia en Teoría de Decisión Multicriterio es la integral de Choquet (Choquet, 1953). Se basa en medidas no-aditivas y, por tanto, puede usarse como operador de agregación cuando dos o más criterios interaccionan. La integral de Choquet reemplaza el vector de pesos por una medida *fuzzy* que modeliza la importancia de cada subconjunto o coalición de criterios, en lugar de solamente la importancia de cada criterio individual.

Sin embargo, la aplicación de la integral de Choquet presenta problemas en la práctica, cuando el número de criterios es moderadamente alto debido a la dificultad de identificar la medida no-aditiva asociada a las preferencias del decisor. En principio sería necesario determinar tantos parámetros como el cardinal del conjunto de partes del conjunto de criterios. Existe una amplia y pujante literatura donde se proponen soluciones de distinta naturaleza para abordar este problema. De forma resumida, se pueden distinguir métodos no supervisados y supervisados. En este trabajo utilizaremos algunas de estas metodologías para resolver nuestro problema.

Además de las interacciones cuya naturaleza está vinculada a la correlación, se han discutido otros tipos de interacción entre los criterios.

Por una parte, estarían los conceptos de sustituibilidad y complementariedad. Dos criterios serán sustitutivos si la satisfacción que produce uno de ellos es la misma que producirían los dos juntos, serían dos criterios que añaden la misma información. En contraposición, dos criterios son complementarios si la ausencia de uno de los dos criterios implica que el criterio presente no produzca ningún efecto en la decisión, serían dos criterios que necesariamente deben estar presentes para dar alguna información relevante en la decisión. Este tipo de interacciones entre criterios, a diferencia de las interacciones por correlación que se pueden ver simplemente observando los valores, dependen del punto de vista subjetivo del decisor. Será el decisor el que decida como de complementarios o de sustitutivos serán los criterios estudiados.

Por otra parte, existe otro tipo de interacción basada en la dominancia entre criterios. Aquí es donde se presentan los conceptos de criterio *veto* y criterio *favor*. Un criterio es un *veto* (resp. un *favor*) si la puntuación parcial de cualquier alternativa sobre este criterio acota superiormente (resp. inferiormente) la evaluación global obtenida por agregación. Por ejemplo, consideramos el problema de evaluar estudiantes con respecto a varias asignaturas (criterios) y suponemos que existe una asignatura *veto* (resp. *favor*). Esto significa que la calificación global obtenida por cualquier estudiante no puede ser mayor que (resp. menor que) la nota obtenida en esta asignatura. Podemos ver que los criterios *veto* presentan una naturaleza intolerante y los *favor* tolerante. Incluso aunque es difícil que en aplicaciones prácticas se presente un comportamiento tan extremo sí que es posible que algunos criterios tengan un cierto grado de comportamiento *veto* o *favor*.

El objetivo de este trabajo es el de diseñar un sistema de ayuda a la decisión en el ámbito turístico, concretamente, se trataría de ofrecer un ranking de hoteles ajustado a las preferencias del viajero en cuanto a las características que presentan los establecimientos hoteleros a elegir. Para ello nos hemos decidido por una técnica de agregación, la integral de Choquet, que puede superar algunos inconvenientes de la clásica media ponderada. Los resultados obtenidos muestran las mejoras y también las debilidades de la propuesta.

En el capítulo 1 se recogen las bases metodológicas del trabajo, empezando por la definición de las medidas *fuzzy* y sus índices asociados. Se presenta la integral de Choquet como un índice de utilidad global que requiere la identificación de la medida *fuzzy* subyacente. A esa tarea se dedican los siguientes apartados del capítulo, donde se recogen dos metodologías clasificadas como supervisadas, es decir, utilizan algún tipo de información preferencial y una no supervisada que se basa en un método de reducción de la dimensionalidad como es el Análisis de Componentes Principales.

En el capítulo 2 se presenta la aplicación empírica. Hemos construido una base de datos recogiendo características de 97 hoteles en Tenerife. Se ha usado el paquete *kappalab* (Grasbisch et al. 2015) de R para llevar a cabo la implementación de algunas de las técnicas de identificación de la medida *fuzzy*. La aplicación del método basado en Análisis de Componentes Principales ha requerido programación propia puesto que esté método no está implementado en el paquete *kappalab*.

Los resultados, conclusiones y bibliografía finalizan el trabajo.

1. LA INTEGRAL DE CHOQUET EN MODELOS MULTICRITERIO

En este capítulo se presenta la base metodológica del trabajo, la Integral de Choquet como operador de agregación en modelos de decisión multicriterio. Estudiaremos sus propiedades más importantes. El concepto de medida *fuzzy* y los índices asociadas a ella son elementos imprescindibles en la agregación basada en Choquet. La determinación de estos inputs necesarios es una cuestión crucial y en la literatura se presentan varios enfoques para llevarla a cabo, que se diferencian en varios aspectos. Presentamos tres métodos. Los dos primeros utilizan información preferencial del decisor expresadas por relaciones lineales sobre los índices asociados a la medida *fuzzy* que se quiere determinar. Por tanto, a diferencia del tercer método presentado, los dos primeros son métodos supervisados. La diferencia entre el primer y el segundo método es que en el primero no es necesario disponer de una medida a priori sino que el método identifica aquella que verifica una propiedad deseada. Sin embargo, la segunda metodología trata de determinar la medida de mínima distancia (se utilizan tres distancias) a una dada. El último enfoque presentado sólo utiliza la información proveniente de los datos, es decir, el comportamiento de las alternativas sobre los criterios en consideración. En el siguiente capítulo aplicamos los procedimientos aquí expuestos y proponemos una combinación de la metodología basada en la minimización de distancias con la basada en el análisis de componentes principales propuesta por Rowley et al. (2015). Por tanto, proponemos un método en dos pasos, en el primero se aplica la propuesta de Rowley et al. (2015) y en la segunda se encuentra la medida *fuzzy* más cercana a la solución de Rowley et al. verificando ciertas relaciones preferenciales.

1.1. La integral de Choquet

Sea un conjunto finito de alternativas $X = \{a_1, \dots, a_m\}$ y un conjunto finito de criterios $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ sobre los que se evalúan las alternativas.

Cada alternativa $a_k \in X$ se asocia con un *perfil* de *puntuaciones parciales* $p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k) \in \mathbb{R}^n$ donde, para cada $i = 1, \dots, n,$ p_i^k es la evaluación de la alternativa a_k respecto al criterio c_i, con $p_i^k \in P_i \subseteq \mathbb{R}$.

Suponemos que las valoraciones son definidas de acuerdo a la misma escala intervalar, es decir, $P_i = P$, para todo $i = 1, \ldots, n$, siendo habitual escalar las evaluaciones en el intervalo $[0,1]$ aplicando una transformación lineal a los datos originales. Esta hipótesis implica que todos los criterios son comparables.

En decisión multicriterio se trata de obtener una *puntuación global* $M(p^k)$ para cada alternativa $a_k \in X$, que tenga en cuenta todas las puntuaciones parciales $p^k = (p_1^k, \ldots, p_n^k)$ y atendiendo a los *pesos* representando la importancia de los criterios. Un operador de agregación $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asocia un número real a cada perfil resolvería el problema.

Uno de los operadores de agregación más utilizado es la media aritmética ponderada. Este operador proporciona una puntuación global $M(p)$ asociada con el perfil $p = (p_1, \ldots, p_n)$ como

$$M_\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i p_i \qquad (1)$$

donde, para todo $i = 1, \ldots, n$, ω_i es el *peso* del criterio c_i con $\omega_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

No obstante, y tal como comentamos anteriormente, la media ponderada no es capaz de modelizar las interacciones entre criterios. En general, los operadores de agregación basados en medidas aditivas no se adecúan a situaciones de interdependencia e interacción. Son caracterizados por un axioma de independencia que raramente se verifica en la realidad (Grabisch, 1996; Keeney & Raiffa, 1976).

Para poder representar las preferencias en caso de interacción entre criterios, se debe emplear un modelo de preferencias más general que el de la media ponderada.

Es aquí donde ha sido propuesto por muchos autores el uso de la integral de Choquet (Choquet, 1953) como una herramienta sustitutiva de la media ponderada que es capaz de agregar esa interacción entre criterios. La integral de Choquet es una extensión de la media ponderada para los casos en los que varios criterios interactúan. Cuando los criterios pueden ser dependientes, el modelo de la integral de Choquet emplea una medida *fuzzy* (o también llamada *capacidad*) que define la importancia (peso) de cada subconjunto de criterios, haciendo posible modelizar esa interacción.

Presentamos a continuación la definición de medida *fuzzy* como una función de conjunto con la propiedad de monotonía respecto de la inclusión.

Definición 1 (medida *fuzzy*). *Sea $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ un conjunto de n elementos y denotamos por $\mathcal{P}(C)$ el conjunto de partes C cuyo cardinal es 2^n, una medida fuzzy sobre el conjunto C es una función $\mu: \mathcal{P}(C) \to [0,1]$ verificando:*

- *Es no es decreciente respecto a la inclusión de conjuntos, es decir, si $S \subseteq T$ entonces*

$$\mu(S) \leq \mu(T),$$

- $\mu(\emptyset) = 0,$
- $\mu(C) = 1.$

Para cualquier $S \subseteq C$, $\mu(S)$ puede interpretarse como una medida de la importancia de la combinación de criterios incluidos en S. De esta forma, reemplazando el vector de pesos ω con una medida *fuzzy* μ es posible representar la importancia de cada subconjunto de criterios, en vez de trabajar únicamente con la importancia individual de los criterios.

Si no hay interacción entre los criterios considerados, se tiene que $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$, para cualquier $S, T \subseteq G$ tal que $S \cap T = \emptyset$ y la capacidad será entonces aditiva. Si la capacidad es aditiva entonces $\mu(T) = \sum_{i \in T} \mu(\{i\})$ y como consecuencia de ello, los valores $\mu(\{1\}), \mu(\{2\}), \dots, \mu(\{n\})$ que se corresponden a los pesos ω_i de la suma ponderada, son suficientes para reconstruir toda la capacidad μ.

Es también importante considerar la magnitud de la interacción entre criterios. Para cualquier pareja de criterios $\{c_i, c_j\} \in C$, la diferencia entre $\mu(c_i, c_j)$ y $\mu(c_i) + \mu(c_j)$ refleja el grado de interacción entre c_i y c_j. Si $\mu(c_i, c_j) > \mu(c_i) + \mu(c_j)$, entonces hay una interacción positiva. Si $\mu(c_i, c_j) < \mu(c_i) + \mu(c_j)$, entonces la interacción será negativa. Si $\mu(c_i, c_j) = \mu(c_i) + \mu(c_j)$, en este caso no habrá interacción entre criterios.

En el contexto de la toma de decisiones multicriterio (MCDM, por sus siglas en inglés) la integral de Choquet tiene especial relevancia dada su capacidad de considerar cualquier tipo de interacción entre criterios. Se distinguen tres tipos diferentes de interacciones: correlación, sustituibilidad/complementariedad y dependencia preferente. Como ya comentamos anteriormente, es un operador de agregación adecuado para la interacción de criterios y generaliza la media ponderada.

Definición 2 (medida *fuzzy*). *Sea μ una medida fuzzy, la integral de Choquet de $p^k \in \mathbb{R}^n$ respecto a μ es definida como*

$$C_\mu(p^k) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_{(i)}^k - p_{(i-1)}^k\right)\mu\left(A_{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{(i)}^k \left(\mu\left(A_{(i)}\right) - \mu\left(A_{(i+1)}\right)\right) \quad (2)$$

Donde $p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$ es el perfil de las puntuaciones parciales normalizadas de la alternativa a_k sobre n criterios; y donde el subíndice (i) indica la permutación de los índices $i = 1, \dots, n$ de tal forma que $0 \leq p_{(1)}^k \leq \cdots \leq p_{(n)}^k$ y $p_{(0)}^k = 0$; y donde $A_{(i)} = \left\{c_{(i)}, \dots, c_{(n)}\right\} \subseteq C$ indica el subconjunto de criterios $(i), \dots, (n)$.

Obsérvese que si la medida *fuzzy* μ es aditiva, implicará que $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$, entonces la integral de Choquet coincide con la media ponderada (integral de Lesbesgue discreta).

En base a esta definición se puede ver que la integral de Choquet presenta buenas propiedades de agregación. Es continua, no decreciente, comprendida entre un mínimo y un máximo, invariable ante un cambio de escala y coincide con la media ponderada en caso de aditividad de la medida *fuzzy*.

Presentamos a continuación algunos índices asociados a una medida *fuzzy* que son útiles en la interpretación de las interacciones entre criterios y permiten formulaciones alternativas de la integral de Choquet.

Los índices de Shapley

La importancia de un criterio no depende solamente de ese criterio a nivel individual, sino que también es importante la contribución que hace dicho criterio al resto de criterios en los que participa. La relevancia del criterio $c_i \in C$ no es determinado solamente por $\mu(c_i)$, sino también por todos los $\mu(S)$ tales que $c_i \in S$.

Por esta razón es necesario introducir las definiciones de la importancia de un criterio y del índice de interacción para cada pareja de criterios. Shapley (1953) propuso un coeficiente que mide dicha importancia.

Definición 3 (valor de Shapley). *Sea μ una medida fuzzy, el valor de Shapley* S_μ *de un criterio* c_i *respecto a μ se define como*

$$S_\mu(c_i) = \sum_{A \subseteq C \setminus \{i\}} \frac{(|C| - |A| - 1)!\,|A|!}{|C|!} [\mu(A \cup \{c_i\}) - \mu(A)] \qquad (3)$$

Donde A es cualquier conjunto de criterios que no contiene c_i*;* $|C|$ *es el cardinal de* C*; y* $|A|$ *es el cardinal de A. El factorial normaliza la función, de tal forma que* $\sum_{i=1}^{n} S_\mu(c_i) = 1$.

El valor de Shapley se puede interpretar como un valor medio de la contribución marginal $\mu(A \cup \{c_i\}) - \mu(A)$ del criterio c_i a un subconjunto *A* que no lo contiene. Una propiedad importante es que los valores $S_\mu(c_i)$ para *i=1,2,…,n* forman una distribución de probabilidad sobre *C*.

Definición 4 (índice de interacción de Shapley). *Sea μ una medida fuzzy, el índice de interacción de Shapley* I_μ *del par de criterios* c_i, c_j *respecto a μ se define como*

$$I_\mu(c_i, c_j) = \sum_{A \subseteq C \setminus \{i,j\}} \frac{(|C| - |A| - 2)!\,|A|!}{(|C| - 1)!} [\mu(A \cup \{c_i, c_j\}) - \mu(A \cup \{c_i\}) - \mu(A \cup \{c_j\}) + \mu(A)] \qquad (4)$$

Análogamente al valor de Shapley, el índice de interacción de Shapley entre dos criterios c_i, c_j pueden interpretarse como un valor medio de su interacción marginal

$$\mu(A \cup \{c_i, c_j\}) - \mu(A \cup \{c_i\}) - \mu(A \cup \{c_j\}) + \mu(A)$$

en presencia de un subconjunto *A* de criterios que no contiene al par en consideración. Es importante observar que el índice de interacción de Shapley toma valores entre -1 y 1 siendo el valor 1 (resp. -1) el correspondiente a la máxima complementariedad (resp. redundancia).

Transformación de Möbius de una medida *fuzzy*

A pesar de que la ecuación (2) resulta sencilla de entender, trabajar posteriormente con ella en casos prácticos puede ser complicado. Sin embargo, tanto las medidas *fuzzy* como la integral de Choquet pueden ser reformuladas de forma más útil y sencilla mediante la transformación de Möbius de la capacidad μ (Shafer, 1976).

Definición 5. *La transformación de Möbius m asociada a la medida fuzzy* $\mu: \mathcal{P}(C) \to \mathbb{R}$ *se define como una función de conjunto mediante la siguiente expresión:*

$$m(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \mu(T). \qquad (5)$$

Las propiedades que tienen que cumplir una función de conjunto para ser una transformación de Möbius de una medida *fuzzy* se heredan de las condiciones de frontera de μ y de su monotonía, así *m* debe verificar:

- $m(\emptyset) = 0, \sum_{T \subseteq C} m(T) = 1$
- $\forall i \in C$ y $\forall R \subseteq C \setminus \{i\}, m(\{i\}) + \sum_{T \subseteq R} m(T \cup \{i\}) \geq 0.$

Sea μ una medida *fuzzy* su representación en términos de la transformación de Möbius, *m*, viene dada por

$$\mu(S) = \sum_{T \subseteq S} m(T). \qquad (6)$$

Si $S = \{c_i\}$ con $i = 1,2, \dots, n,$ entonces $\mu(\{c_i\}) = m(\{c_i\}),$ mientras que si $S = \{c_i, c_j\}$, entonces $\mu(\{c_i, c_j\}) = m(\{c_i\}) + m(\{c_j\}) + m(\{c_i, c_j\})$.

La integral de Choquet también puede ser reformulada llevando a cabo la transformación de Möbius, lo que permitirá simplificar considerablemente las operaciones en los casos prácticos.

Sea $m(T)$ la transformada de Möbius de la medida *fuzzy* μ, la integral de Choquet del perfil p^k con respecto de μ en términos de su transformada de Möbius, viene dada por la siguiente expresión

$$C_\mu(p^k) = \sum_{T \subseteq C} m(T)\, min_{i \in T}\, p_i^k. \qquad (7)$$

A partir de las definiciones anteriores se puede observar que la determinación de una medida *fuzzy* (o equivalentemente su transformada de Möbius) sobre un conjunto de cardinal *n* requiere la determinación de $2^n - 2$ coeficientes, esto puede ser inabordable y, por ello, se ha introducido el concepto de *k*-aditividad que rebaja la complejidad manteniendo el poder de modelización.

Definición 6 (medida *fuzzy* k-aditiva).

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ *una medida fuzzy* μ *se dice que es* k*-aditiva si su representación de Möbius satisface* $m(T) = 0$ *para todo* $T \subseteq C$ *tal que* $t > k$ *y existe al menos un subconjunto* T *de cardinalidad* k *tal que* $m(T) \neq 0$

En las siguientes secciones se presentan varios métodos para encontrar una medida *fuzzy*, que serán aplicados en este trabajo.

1.2. Identificación de medidas *fuzzy* de varianza mínima

Como se ha comentado en la Introducción, la aplicación de la integral de Choquet como operador de agregación requiere la determinación de una medida *fuzzy* o capacidad. Existe una extensa literatura sobre el tema y puede considerarse un problema abierto en la comunidad multicriterio. En esta sección recogemos las propuestas de Kojadinovic (2007) para determinar, si existe, una medida difusa "lo menos específica" posible compatible con las preferencias iniciales del decisor. El autor utiliza la estrecha relación entre medida *fuzzy* y distribución de probabilidad para extender el concepto de entropía al campo de las medidas *fuzzy*. A partir de esta generalización se plantea un modelo de programación matemática cuadrático que en caso de factibilidad permite determinar la medida "menos comprometida" verificando ciertas relaciones de preferencia expresadas por el decisor. A continuación, se recoge un resumen de la propuesta de Kojadinovic (2007).

Para simplificar la notación y sin pérdida de generalidad identificamos a partir de aquí, el conjunto de criterios *C* con el conjunto de los *n* primeros números naturales

Entropía y varianza de una medida *fuzzy*

El concepto de *entropía de una distribución de probabilidad* fue propuesto por Shannon en 1948. La entropía de Shannon de una distribución de probabilidad p definida sobre un conjunto no vacío y finito $C = \{1, \ldots, n\}$ se define como

$$H_S(p) = -\sum_{i \in C} p(i) \ln p(i), \qquad (8)$$

fijándose por convenio que si $p(i)$ toma el valor 0, el valor de la expresión (1) es 0 y, por tanto, $H_S(p)$ es siempre no negativa y cero si y sólo si p es una masa de Dirac, es decir, concentra la probabilidad en un solo punto. Como función de p, H_S, es estrictamente cóncava y alcanza el valor máximo ($\ln n$) sí y sólo si, p representa una distribución uniforme.

En un escenario general no probabilístico, $H_S(p)$ es simplemente una medida de la uniformidad de p. En un contexto probabilístico, cuando p se asocia a un sistema estocástico discreto de n-estados, se interpreta como una medida de su imprevisibilidad y esto refleja la incertidumbre asociada con el estado futuro del sistema.

Puesto que una medida *fuzzy* o capacidad es una generalización de una distribución de probabilidad discreta, es natural considerar la evaluación de la "uniformidad" e "incertidumbre" de una capacidad mediante una generalización de la entropía de Shannon.

El retículo relativo al conjunto potencia de C bajo la relación de inclusión puede ser representado por el gráfico $\mathcal{H}_C$, llamado diagrama de Hasse, cuyos nodos corresponden al subconjunto $S \subseteq C$ y cuyos arcos se representan añadiendo un elemento al subconjunto inferior para obtener el subconjunto superior.

Una *cadena máximal* m de $\mathcal{H}_C$ es una colección ordenada de $n+1$ subconjuntos anidados distintos denotados como

$$m = (\emptyset \subsetneq \{i_1\} \subsetneq \{i_1, i_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{i_1, \ldots, i_n\} = C).$$

Denotado por $\mathcal{M}_C$ el conjunto de cadenas maximales $\mathcal{H}_C$ y por Π_C el conjunto de permutaciones en C. Se puede observar que a cada permutación $\pi \in \Pi_C$ le corresponde una *cadena máximal* única $m^\pi \in \mathcal{M}_C$ definida por

$$m^\pi \coloneqq (\emptyset \subseteq \{\pi(n)\} \subsetneq \{\pi(n-1), \pi(n)\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{\pi(1), \dots, \pi(n)\} = C).$$

A partir de estas observaciones, es posible asociar medidas *fuzzy* con distribuciones de probabilidad. Así dada una medida *fuzzy* μ sobre C, con cada permutación $\pi \in \Pi_C$ se puede asociar a una distribución de probabilidad discreta p_π^μ sobre C definida por

$$p_\pi^\mu(i) \coloneqq \mu(\{\pi(i), \dots, \pi(n)\}) - \mu(\{\pi(i+1), \dots, \pi(n)\}), \qquad \forall i \in C.$$

De la monotonía de μ se deduce fácilmente la no negatividad de p_π^μ y, por la propia construcción es fácil verificar que la suma sobre todos los elementos de C es igual a 1. Si μ es aditiva entonces lo que se obtiene simplemente es que $p_\pi^\mu(i) = \mu\big(\pi(i)\big)$ para todo $i \in C$.

De forma equivalente, a cada *cadena maximal* $m^\pi \in \mathcal{M}_C$ se asocia la distribución de probabilidad $p_{m^\pi}^\mu \coloneqq p_\pi^\mu$.

Una capacidad μ sobre C puede ser representada por el conjunto $P_C^\mu = \{p_m^\mu\}_{m \in \mathcal{M}_C}$ de $n!$ distribuciones de probabilidad sobre C. Tal y como comentaron Kojadinovic et. al (2005): "*de forma intuitiva la uniformidad de una capacidad μ sobre C puede ser definida como el promedio de los valores uniformes de las distribuciones de probabilidad $p_m^\mu(m \in \mathcal{M}_C)$.*" A mayor uniformidad en promedio de las distribuciones de probabilidad, mayor será la uniformidad de la capacidad μ.

Definición 7 (entropía de una medida *fuzzy*).

Sea μ la capacidad sobre C, la entropía de μ será definida como

$$H_M(\mu) \coloneqq \sum_{i \in C} \sum_{S \subseteq C \setminus i} \gamma_S(n)[\mu(S \cup i) - \mu(S)]\, ln[\mu(S \cup i) - \mu(S)]. \qquad (9)$$

siendo $\gamma_S(n)$ el coeficiente del valor de Shapley (Definición 3) de la medida μ.

Una propiedad importante de H_M es que puede ser reescrita en términos de *cadenas maximales* del diagrama de Hasse de C. Se obtiene entonces

$$H_M(\mu) = \frac{1}{n!} \sum_{m \in \mathcal{M}_C} H_S\left(p_m^\mu\right), \qquad (10)$$

O de forma equivalente,

$$H_M(\mu) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_C} H_S\left(p_\pi^\mu\right).$$

El valor de $H_M(\mu)$ se puede interpretar, por tanto, como un promedio de los valores de uniformidad de las distribuciones de probabilidad $p_m^\mu (m \in \mathcal{M}_C)$ calculados mediante la entropía de Shannon.

Otra forma sencilla de medir la uniformidad de la distribución de probabilidad p sobre C es calcular su varianza

$$V(p) \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i \in C} \left[p(i) - \frac{1}{n}\right]^2,$$

que se puede reescribir como

$$V(p) = \frac{1}{n} \sum_{i \in C} p(i)^2 - \frac{1}{n^2}.$$

En la expresión se verifica que $V(p) = 0$ si y sólo si p es uniforme sobre C y que $V(p)$ alcanza su valor máximo $(n-1)/n^2$ sí y sólo si p es una masa de Dirac. El valor $V(p)$ no es más que el cuadrado de la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ entre p y el vector

$\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 8 (varianza de una medida *fuzzy*). *Si se emplea la misma lógica que en la ecuación* (10)*, la varianza de una capacidad* μ *sobre* C *puede ser definida como*

$$\bar{V}(\mu) := \frac{1}{n}\sum_{i\in C}\sum_{S\subseteq C\setminus i}\gamma_S(n)\left(\mu(S\cup i)-\mu(S)-\frac{1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i\in C}\sum_{S\subseteq C\setminus i}\gamma_S(s)\big(\mu(S\cup i)-\mu(S)\big)^2-\frac{1}{n^2}. \qquad (11)$$

Con esta última expresión se puede ver que para cualquier medida μ sobre C, la entropía propuesta por Havdra y Charvat (1967) de orden 2 y la varianza están relacionadas de la siguiente manera:

$$\bar{H}_{HC}^2(\mu)=\frac{n-1}{n}-n\bar{V}(\mu). \qquad (12)$$

Principio de máxima entropía para medidas *fuzzy*

Para las distribuciones de probabilidad, la concavidad estricta de la entropía de Shannon y su conveniencia como medida de incertidumbre dio lugar al principio de máxima entropía, que fue indicado en 1957 por Jaynes. Este principio establece que, cuando uno tiene solo información parcial sobre los posibles resultados de una variable aleatoria, debe elegir su distribución de probabilidad para maximizar la incertidumbre sobre la información faltante. En otras palabras, se debe usar toda la información disponible, pero uno debe estar lo menos comprometido posible con la información faltante. En términos más matemáticos, este principio significa que entre todas las distribuciones de probabilidad que están de acuerdo con el conocimiento previo disponible (es decir, un conjunto de restricciones), se debe elegir la que tenga la máxima incertidumbre (Kojadinovic, 2007, p. 506).

La estricta concavidad de $H_M(\mu)$ sugiere extender dicho principio de inferencia a las medidas *fuzzy* (Kojadinovic et al., 2005). En el contexto de la agregación mediante la integral de Choquet con respecto a una medida μ sobre C en presencia de restricciones lineales, $H_M(\mu)$ se puede interpretar como una medida del valor promedio sobre todas las alternativas del grado en que los argumentos $a_1, \ldots, a_n$ de un perfil contribuyen al cálculo del valor agregado $C_\mu(a)$. En este entorno de trabajo, el principio de máxima entropía podría establecerse de la siguiente manera: Supongamos que se nos da un conjunto de restricciones lineales sobre el comportamiento de una integral de Choquet C_μ, es decir, restricciones que son lineales con respecto de la medida correspondiente μ . Entonces, entre todas las integrales de Choquet factibles, elegir la integral de Choquet con respecto a la medida de máxima entropía equivale a elegir la integral de Choquet que tenga el mayor grado de contribución media de sus argumentos en la fase de agregación. En otras palabras, podríamos decir que la integral de Choquet con respecto a la medida de máxima de entropía es la que más explotará en media sus argumentos.

Las restricciones que se consideran se basan en los índices expuestos en la Sección 1.1, que son todos lineales respecto a la medida subyacente. Además, debido a las relaciones estudiadas en la literatura (ver, p.e., Kojadinovic, 2007) entre entropía y varianza, es equivalente maximizar la entropía a minimizar la varianza $\bar{V}(\mu)$.

Restricciones lineales para el problema de optimización

Las preferencias iniciales pueden ser expuestas en diversos formatos:

- Orden parcial débil sobre el conjunto de alternativas: $\succ_{\mathcal{A}}$
- Orden parcial débil sobre el conjunto de criterios (ranking de la importancia de los criterios).
- Importancia relativa de algunos criterios.
- Magnitud de la interacción entre algunos criterios.
- Comportamiento de algún criterio como *veto* o *favor*.
- Etc.

Que se traducen en relaciones como las siguientes:

- Si la alternativa a es preferida a la alternativa b implica que

$$C_\mu(a) - C_\mu(b) \geq \delta_C$$

- Si la alternativa a es semejante a la alternativa b implica que

$$-\delta_C \leq C_\mu(a) - C_\mu(b) \leq \delta_C$$

- Si el criterio i es preferido al criterio j implica que sus valores de Shapley verifican la desigualdad

$$S_\mu(i) - S_\mu(j) \geq \delta_\phi$$

- Si el criterio i tiene similar importancia al criterio j implica que

$$-\delta_\phi \leq S_\mu(i) - S_\mu(j) \leq \delta_\phi$$

- Si el conjunto de criterios ij se prefiere al conjunto de criterios kl implica que

$$I_\mu(ij) - I_\mu(kl) \geq \delta_I$$

- Si el conjunto de criterios ij es semejante al conjunto de criterios kl implica que

$$-\delta_I \leq I_\mu(ij) - I_\mu(kl) \leq \delta_I$$

Donde δ_C, δ_ϕ y δ_I son umbrales de preferencia fijos, determinados por el decisor.

En resumen, el principio de máxima entropía/mínima varianza se puede utilizar para identificar una medida *fuzzy* que sea compatible con las preferencias iniciales del decisor. Por lo tanto, la integral de Choquet resultante puede considerarse como un modelo del razonamiento del decisor. Hemos expuesto un método supervisado, en el sentido de que utiliza *preferencias iniciales* del decisor, para identificar una medida *fuzzy* que utilizaremos en el siguiente capítulo.

1.3. Identificación de una medida *fuzzy* mediante distancias cuadráticas

Kojadinovic (2007b) generaliza el enfoque de varianza mínima para la identificación de una medida *fuzzy* utilizando un principio de mínima distancia entre medidas *fuzzy*. A diferencia del enfoque anterior aquí se dispone de una medida *fuzzy* inicial μ y se quiere encontrar la medida más cercana verificando ciertas restricciones lineales tanto técnicas como preferenciales del tipo de las expuestas en la sección anterior. Por tanto, se trataría de una metodología supervisada que admite imposiciones sobre la complejidad del modelo, por ejemplo, exigiendo una medida k-aditiva como solución del problema de minimización. Una elección frecuente para la medida μ a ajustar sería fijarla como la medida uniforme que mide cada subconjunto por el cociente entre su cardinal y el cardinal del total. Esta medida uniforme no tiene en cuenta las preferencias del decisor ni la matriz de decisión (formada por los perfiles de las alternativas). Por ello, nuestra propuesta es utilizar esta metodología con una elección de la medida inicial que tenga en cuenta la información aportada por la matriz de decisión.

Exponemos a continuación, brevemente, el instrumental matemático propuesto por Kojadinovic (2007b) para construir su metodología.

Para definir las distancias cuadráticas sobre el conjunto de medidas *fuzzy* sobre *C*, $\mathcal{G}_C$, se consideran tres funciones reales sobre $\mathcal{G}_C \times \mathcal{G}_C$, para todo $\mu, v \in \mathcal{G}_C$

$$\langle \mu, v \rangle_1 \coloneqq \frac{1}{2^n - 1} \sum_{\substack{T \subseteq C \\ T \neq \emptyset}} \mu(T) v(T), \qquad (13)$$

$$\langle \mu, v \rangle_2 \coloneqq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi_C} \frac{1}{n} \sum_{i \in C} \omega_\sigma^\mu(i) \omega_\sigma^v(i), \qquad (14)$$

$$\langle \mu, v \rangle_3 \coloneqq \int_{[0,1]^n} C_\mu(x) C_v(x) dx. \qquad (15)$$

siendo $\omega_\sigma^\mu(i), \omega_\sigma^v(i)$ los coeficientes de la integral de Choquet:

$$\omega_\sigma^\mu(i) = \left(\mu\left(A_{\sigma(i)}\right) - \mu\left(A_{\sigma(i+1)}\right)\right)$$

Las distancias cuadráticas entre medidas *fuzzy* obtenidas a partir de los productos internos anteriores (ver detalles en Kojadinovic, 2007b) se obtienen, para todo $\mu, v \in \mathcal{G}_C$, como

$$d_1^2(\mu, v) \coloneqq \frac{1}{2^n - 1} \sum_{\substack{T \subseteq C \\ T \neq \emptyset}} [\mu(T) - v(T)]^2, \qquad (16)$$

$$d_2^2(\mu, v) \coloneqq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi_C} \frac{1}{n} \sum_{i \in C} \left[\omega_\sigma^\mu(i) - \omega_\sigma^v(i)\right]^2, \qquad (17)$$

$$d_3^2(\mu, v) \coloneqq \int_{[0,1]^n} \left[C_\mu(x) - C_v(x)\right]^2 dx. \qquad (18)$$

En el contexto de la integral de Choquet, $d_1(\mu, v)$ puede ser interpretada como la diferencia cuadrática media entre las puntuaciones globales de alternativas binarias $(1_T, 0_{C\setminus T})$, $T \subseteq C$, $T \neq \emptyset$, medida por μ y por v.

La segunda distancia mide la diferencia cuadrática media entre los coeficientes de las integrales de Choquet C_μ y C_v. La idea de la distancia d_2 es recoger la diferencia cuadrática media entre los pesos de la integral de Choquet $\left[\omega_\sigma^\mu(i) - \omega_\sigma^v(i)\right]^2, i \in C, \sigma \in \Pi_C$, para poder evaluar la diferencia entre μ y v o, de forma equivalente, entre C_μ y C_v.

La última distancia se puede interpretar como la diferencia cuadrática media entre las puntuaciones globales recogidas por C_μ y C_v asumiendo que las alternativas se distribuyen uniformemente en todo $[0,1]^n$.

Planteamiento del modelo de optimización para la identificación de una medida *fuzzy* basada en distancias cuadráticas

Para determinar la medida más cercana a μ se debe resolver el siguiente programa cuadrático estrictamente convexo:

$$\min_{v \in \mathcal{G}_C} d^2(\mu, v)$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \text{restricciones de monotonía sobre } v, \\ \text{posibles restricciones adicionales,} \end{cases}$$

donde d es una distancia cuadrática sobre $\mathcal{G}_C$ y μ es una medida *fuzzy* sobre C y las restricciones lineales

Se puede demostrar que la identificación de la medida más cercana a la medida uniforme con respecto a la distancia d_2 coincide con el enfoque de varianza mínima comentado en la sección anterior.

1.4. Identificación de una medida *fuzzy* mediante Análisis de Componentes Principales

Exponemos a continuación, un procedimiento no supervisado para determinar la medida *fuzzy*, es decir, un método que no se basa en la información preferencial. En un enfoque no supervisado, el concepto de *importancia de los criterios* se reemplaza por el concepto alternativo de la cantidad de información única que mide cada criterio, es decir, su *contenido de información* que puede ser estimado a partir de las evaluaciones de las alternativas sobre los criterios. Rowley, Geschke y Lenzen (2015) presentan una metodología basada en el Análisis de Componentes Principales que supera algunas de las dificultades de otros enfoques no supervisados (ver más detalles en Rowley et al. 2015). La idea del método es asignar a cada subconjunto de criterios el cociente entre el *índice de no interacción* (una medida del número de criterios independientes) de ese subconjunto y el *índice de no interacción* del conjunto completo de criterios.

El Análisis de Componentes Principales (ACP) es un método de análisis multivariante que se emplea para interpretar conjuntos de datos, reduciendo la dimensionalidad de estos.

Las componentes principales (CPs) de un conjunto de evaluaciones sobre cualquier subconjunto de criterios $A \subseteq C$ se calculan encontrando una base ortonormal de tal forma que cada componente principal sucesiva captura la varianza máxima restante presente en las evaluaciones, manteniéndose independiente de la componente principal anteriormente determinada. El vector z de las componentes principales, donde z_k es la componente principal relativa al k-ésimo elemento de la base, se define como:

$$z = \Phi^T A$$

donde Φ es una matriz cuadrada ortogonal siendo su k-ésima columna el vector propio correspondiente al k-ésimo valor propio más grande λ_k de la matriz de correlaciones R (o matriz de covarianzas) de las evaluaciones.

A partir del conocimiento de las componentes principales, se puede determinar cuánta varianza es capturada separadamente por cada una.

El método propuesto por Rowley et al. (2015)

Los principios del ACP pueden ser utilizados para calcular el equivalente no interactivo, J^*, para cada caso de x donde x es tanto el conjunto completo de C o un subconjunto relevante A.

Antes de implementar el ACP, Rowley et al. (2015) ajustan los datos. Primero, para evitar la influencia de criterios con varianzas largas, los perfiles se escalan a una varianza unidad dividiendo cada puntuación por la desviación estándar del criterio asociado. Luego, para evitar que la primera componente principal fuera simplemente una representación de la posición de un centroide de perfiles relativos al origen, los datos se transformarán en centrados en media sustrayendo la media de cada criterio escalado de cada puntuación sobre ese criterio.

La matriz de correlaciones de los criterios se calcula en base a los perfiles. Se calculan los valores propios de la matriz de correlación R y se ordenaron en orden descendente. La proporción de varianza V_k capturada por la componente principal k-ésima pudo ser calculada dividiendo el k-ésimo vector propio más grande λ_k por la suma de los vectores propios

$$V_k = \frac{\lambda_k}{\sum_k \lambda_k}$$

El siguiente paso es calcular J^*, el número equivalente de criterios que no interaccionan, basado en este ACP. Las reglas tradicionales que seleccionan un número suficiente de CPs todas devuelven un valor natural de J^*. Por ejemplo, se seleccionaron aquellas CPs que correspondan a los valores propios $\lambda_k \geq 1$. La aplicación descrita por Rowley et al. (2015) permite flexibilidad para escoger un valor real del índice J^* y, por lo tanto, presentan un nuevo método de "selección" apropiado a esta situación. J^* es definido como

$$J^*(A_i) = \sum_{k;\lambda_k<1} \lambda_k + |\{\lambda_k | \lambda_k \geq 1\}| \qquad (19)$$

Donde $||$ indica el cardinal de un conjunto finito. Los λ_k son los valores propios de la matriz de covarianzas asociadas a los criterios en el conjunto A_i. Con la fórmula (19) no es necesario imponer un punto de corte arbitrario (valores propios mayores que 1, cota para la varianza, etc.) y, por tanto, permite extraer la máxima información posible de cada conjunto de datos.

Definición 9 (medida *fuzzy* basada en ACP)

Se define para cada subconjunto A_i de criterios

$$\mu(A_i) = \frac{J^*(A_i)}{J^*(C)} \qquad (20)$$

Y se puede demostrar, como se verá a continuación, que esta expresión determina efectivamente una medida *fuzzy* μ sobre el conjunto de criterios *C*.

Proposición 1

La expresión (20) define una medida *fuzzy* sobre el conjunto *C*.

<u>Demostración</u>

Las dos primeras propiedades (condiciones de frontera) son evidentes a partir de (20) y con el convenio $J^*(\emptyset)$=0.

Sea R_I la matriz formada por las filas y columnas de la matriz de covarianzas asociadas a los criterios en A_I, y sea $\lambda^I_{l,l=1,\ldots,i}$ los valores propios de la matriz de R_I, que es semi-definida positiva, y, por tanto, todos sus valores propios son reales y positivos. Ordenados en orden creciente los valores propios

$$\lambda_1^I \leq \lambda_2^I \leq \cdots \leq \lambda_i^I,$$

y suponiendo que los primeros M valores propios son menores que 1. Entonces

$$J^*(A_I) = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l^I + (i - M + 1) \qquad (21)$$

Sea R_J la matriz formada por las filas y columnas de la matriz de covarianzas que está asociada con los criterios en A_J, y sean $\lambda^J_{k,k=1,\ldots,i,i+1}$ los valores propios de la matriz R_J, podemos observar que R_I se puede obtener de R_J eliminando la fila y la columna asociada con los criterios c_{i+1}. R_J también es semi-definida positiva, y de acuerdo al Teorema de Cauchy (ver p.e. Hwang, 2004), los valores propios de R_I y R_J pueden ser ordenados de la siguiente forma:

$$\lambda_1^J \leq \lambda_1^I \leq \lambda_2^J \leq \lambda_2^I \leq \cdots \leq \lambda_M^I \leq \lambda_{M+1}^J \leq \lambda_{M+1}^I \leq \cdots \leq \lambda_i^I \leq \lambda_{i+1}^J$$

Por lo tanto, los $(i-M+1)$ mayores valores propios de R_J (índices $k=M+2,\dots,i+1$) son mayores que la unidad. La suma del resto de valores propios de R_J (índices $k=1,\dots,M+1$) es mayor que la suma $\sum_{l=1}^{M}\lambda_l^I$. Por tanto

$$J^*(A_J)=\sum_{k=1}^{M}\lambda_k^J + \min(\lambda_M^J,1)+(i-M+1) \geq \sum_{k=1}^{M+1}\lambda_k^J+(i-M+1)\geq \sum_{l=1}^{M}\lambda_l^I+(i-M+1)=J^*(A_I) \qquad (22)$$

Esto demuestra la monotonía de la medida definida por (20).

En el siguiente capítulo aplicaremos las metodologías aquí recogidas para diseñar un sistema de ayuda a la elección de un hotel cuando se decide teniendo en cuenta múltiples criterios. Nuestra propuesta es aplicar un método supervisado combinado con el método no supervisado basado en ACP. En todo caso se aplicarán también las otras técnicas con el objetivo de comparar los resultados.

2. ORDENACIÓN DE ESTABLECIMIENTOS HOTELEROS UTILIZANDO LA INTEGRAL DE CHOQUET

Introducción

En este capítulo se va a desarrollar un modelo multicriterio que permite ordenar y, por tanto, elegir la mejor opción hotelera para un huésped que expresa ciertas preferencias iniciales sobre las características del establecimiento en el que quiere alojarse. Se utiliza como operador de agregación la Integral de Choquet que permite interacción entre los criterios. Los inputs necesarios para la aplicación de Choquet son las evaluaciones de las alternativas (hoteles) sobre los criterios, esta información ha sido recogida mediante la búsqueda en páginas web de los diversos establecimientos. Para ello, trabajamos con una base de elaboración propia que recoge las características que consideramos relevantes a la hora de seleccionar un hotel. Además, Choquet requiere disponer de una *función de importancia*, que matemáticamente es una medida *fuzzy* o *capacidad*. Algunas metodologías que permiten identificar/estimar medidas *fuzzy*, se han revisado en el capítulo anterior y su aplicación práctica en un contexto de elección de establecimientos hoteleros se presenta en este capítulo. Exponemos los resultados de la aplicación de estas metodologías y la comparación entre ellas.

El software utilizado para el desarrollo de la aplicación es principalmente el paquete Kappalab (Grabisch, Kojadinovic, Meyer, 2015), "laboratorio para capacidades'', que es un toolbox de R para capacidades (o medidas no-aditiva, medidas *fuzzy*) y manipulación de integrales en un entorno finito. Contiene funciones para manejar varios tipos de funciones de conjunto, como juegos o capacidades. Puede utilizarse para calcular varias integrales no aditivas: la integral de Choquet, la integral de Sugeno y las integrales de Choquet simétrica y asimétrica.

2.1. Descripción de la Base de Datos

La base de datos se construye en colaboración con la profesora Celia Bilbao de la Universidad de Oviedo. La información se obtuvo de los sitios web de los hoteles y alojamientos, así como también en buscadores de hoteles, tales como *HolaIslasCanarias*, *TripAdvisor*, *trivago* y *Booking*.

Disponemos de un total de 97 complejos hoteleros pertenecientes a Tenerife (Islas Canarias) y cada complejo está caracterizado por seis criterios que seleccionamos como los más relevantes para los huéspedes a la hora de decidir sobre su alojamiento. En la base de datos original se recogieron más criterios que podrían ser explotados en trabajos posteriores.

Los criterios incluidos en la base de datos son:

1. **Estrellas:** Indica la categoría que ocupa cada uno de los diferentes alojamientos, tomando valores entre 1 y 5, siendo 1 el valor menos deseable (el alojamiento

cumple requisitos poco estrictos) y 5 el valor más deseable (cumple requisitos más estrictos). Dentro de esta variable se hace, de forma genérica, una valoración, a nivel global, de las infraestructuras que puedan presentar los alojamientos.

2. **Distancia a la playa:** Recoge la distancia a la playa más cercana de los respectivos alojamientos. Al tratarse de complejos hoteleros ubicados en las Islas Canarias, la distancia a la playa resulta ser un criterio de peso. La variable fue medida en metros.

3. **Precio:** Recoge el precio diario de cada uno de los hoteles estudiados en temporada alta. Para la determinación de este criterio, hizo falta tomar en consideración algunos aspectos clave, para asegurarse en la recolección de datos que tendría lógica este criterio:

    - Se tomó de referencia la primera semana de agosto del año 2019 al ser este mes en el de más demanda. Si no se encontraba hoteles para estas fechas, siempre se trataba de encontrar una combinación de días cercana a esas fechas, para que los precios estuvieran bajo condiciones similares.

    - En todos los casos se tomó como referencia la habitación doble al ser el tipo de alojamiento más económico.

    - El régimen alimenticio escogido en todos los alojamientos fue alojamiento y desayuno, al ser régimen que habitualmente se escoge.

    - La modalidad de reserva escogida para todos los casos ha sido la más económica, mayoritariamente sin reembolso.

4. ***Tenerife Select*:** Recoge si el alojamiento posee la marca *Tenerife Select*, una marca creada por Turismo de Tenerife que ofrece los “mejores” hoteles (según el criterio de Turismo) de dentro de la isla. Los valores que toma son, 1 si el alojamiento tiene esta marca y 0 si el alojamiento no dispone de esta marca.

5. **Accesibilidad:** Indica si las instalaciones del hotel disponen de la infraestructura necesaria para poder alojar huéspedes con necesidades especiales. Además de aquellos hoteles que indican específicamente que tienen las instalaciones adaptadas con dichas infraestructuras, también se han considerado que poseen esta característica aquellos hoteles que disponen de, al menos, una habitación para discapacitados. Los valores que toma esta variable son, 1 si el alojamiento posee alguna de estas infraestructuras para discapacitados y 0 si no las posee.

6. **Biosfera:** Indica si los alojamientos poseen un Certificado de *Biosphere*. Estos certificados fueron creados por el Responsible Tourism Institute (RTI) a fin de promover actividades y programas sostenibles en compañías y destinos turísticos. El objetivo fundamental de estos certificados es conseguir en el largo plazo equilibrio a nivel económico, socio-cultural y ambiental en el sector turístico. Este criterio resulta de especial importancia para aquellos huéspedes que están más a favor de medidas sostenibles. Los valores que toma este criterio son 1, si el alojamiento posee un Certificado de Biosfera y 0 si no lo posee.

Tabla 1: Resumen de la base de datos

Nombre variable	Descripción variable
Estrellas	Valoración global de las condiciones que ofrece el hotel. Toma valores **1**, **2**, **3**, **4** y **5**.
Precio	Precio que deben pagar los clientes por una **habitación doble** en el hotel por **día** en temporada alta. Incluyendo desayuno.
Distancia Playa	Número de **metros** desde el hotel hasta la playa más cercana.
Tenerife Select	Indica los hoteles más "selectos" de Tenerife (según Turismo de Tenerife). Toma valores **0** (no es *Select*) y **1** (es *Select*).
Accesibilidad	Indica si el hotel posee infraestructuras adaptadas para personas con discapacidad. Toma valores **0** (no tiene) y **1** (tiene).
Biosfera	Indica si el hotel lleva a cabo iniciativas para fomentar un "turismo sostenible", mediante un Certificado de Biosfera. Toma valores **0** (no tiene certificado) y **1** (tiene).

Fuente: Elaboración propia

Si hacemos un análisis exploratorio de la base de datos, tenemos que por una parte las variables cuantitativas, **Precio** y **Distancia a la playa**:

Tabla 2: Estadísticos descriptivos (1).

	Precio	*Distancia Playa*
Min.	62,62	0
1st Qu.:	120	50
Median:	158,42	300
Mean:	169,9	1045
3rd Qu.:	198	600
Max.:	531,07	31000

Fuente: Elaboración propia

Para las variables cualitativas estudiamos las frecuencias con las que se repiten cada uno de sus niveles, a fin de tener una imagen general de si la base de datos es homogénea o hay variedad. También realizamos una representación gráfica para completar el análisis exploratorio.

Tabla 3: Estadísticos descriptivos (2).

	Estrellas	*Porcentaje*
2	2	*2,0619%*
3	16	*16,4948%*
4	54	*55,6701%*
5	25	*25,7732%*

	Accesibilidad	*Porcentaje*
0	44	*45,3608%*
1	53	*54,6392%*

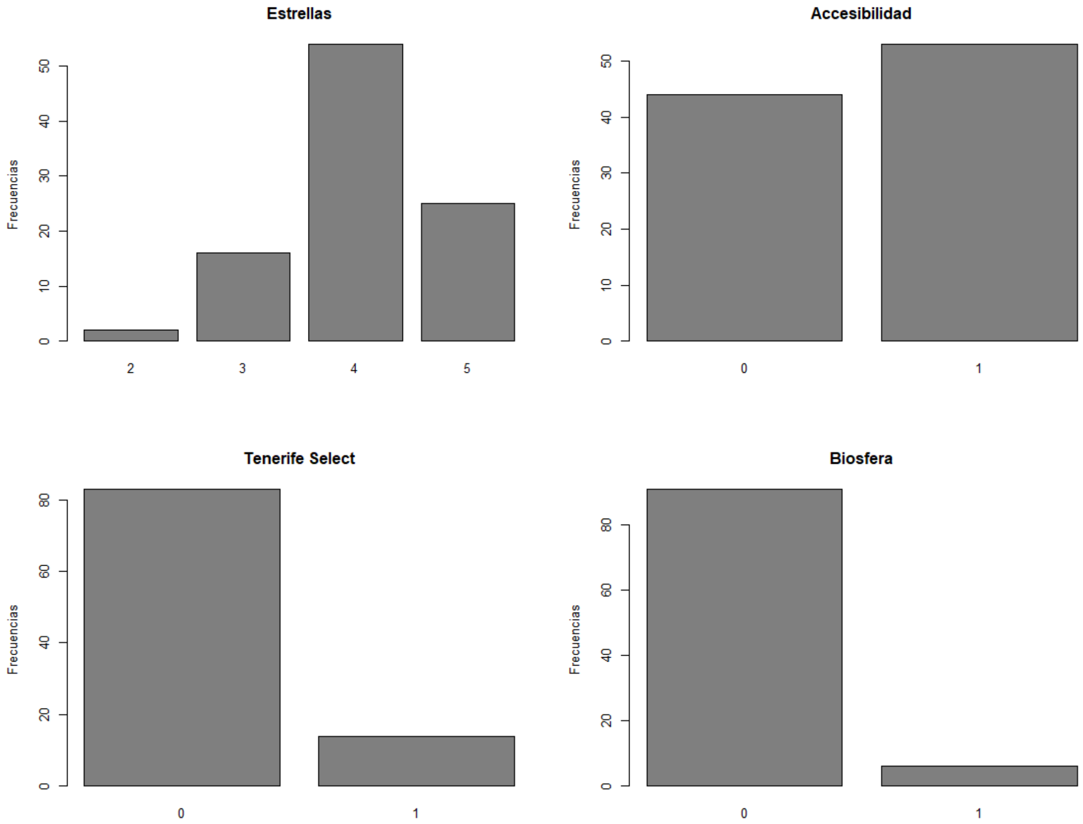
	Tenerife Select	*Porcentaje*
0	83	*85,5670%*
1	14	*14,4330%*

	Biosfera	*Porcentaje*
0	91	*93,8144%*
1	6	*6,1856%*

Fuente: Elaboración propia

En el caso de las Estrellas y la Accesibilidad, vemos que hay bastante diversidad. Las marcas *Tenerife Select* y Biosfera, son muy escasas en nuestra base de datos. Acompañamos el análisis numérico con uno gráfico (**Figura** 1) en el que se puede ver mejor las diferencias de los niveles de cada variable.

Figura 1: Variables cualitativas.



Fuente: Elaboración propia

2.2. Desarrollo del Método Mixto

El objetivo del trabajo es diseñar un sistema de ayuda a la decisión de elegir un establecimiento hotelero.

Para determinar la medida *fuzzy* que interviene en el cálculo de la utilidad de Choquet se utilizan métodos supervisados, revisados en el capítulo anterior, a partir de preferencias iniciales del viajero combinados con el método no supervisado propuesto por Rowley et al. (2015). Esta combinación metodológica se compararía con métodos supervisados de identificación pura.

Previo a la aplicación de cualquier método de identificación de la medida no-aditiva se realizó una normalización de las diferentes puntuaciones en los criterios para solucionar problemas de varianzas grandes o que los criterios no se encontrasen en la misma escala. Optamos por llevar a cabo una *normalización max-min* para tener los valores comprendidos entre $[0,1]$. Dependiendo de si era un criterio positivo o negativo, empleamos diferentes fórmulas:

$$\frac{X_{max} - X}{X_{max} - X_{min}} \qquad (23)$$

$$\frac{X - X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \qquad (24)$$

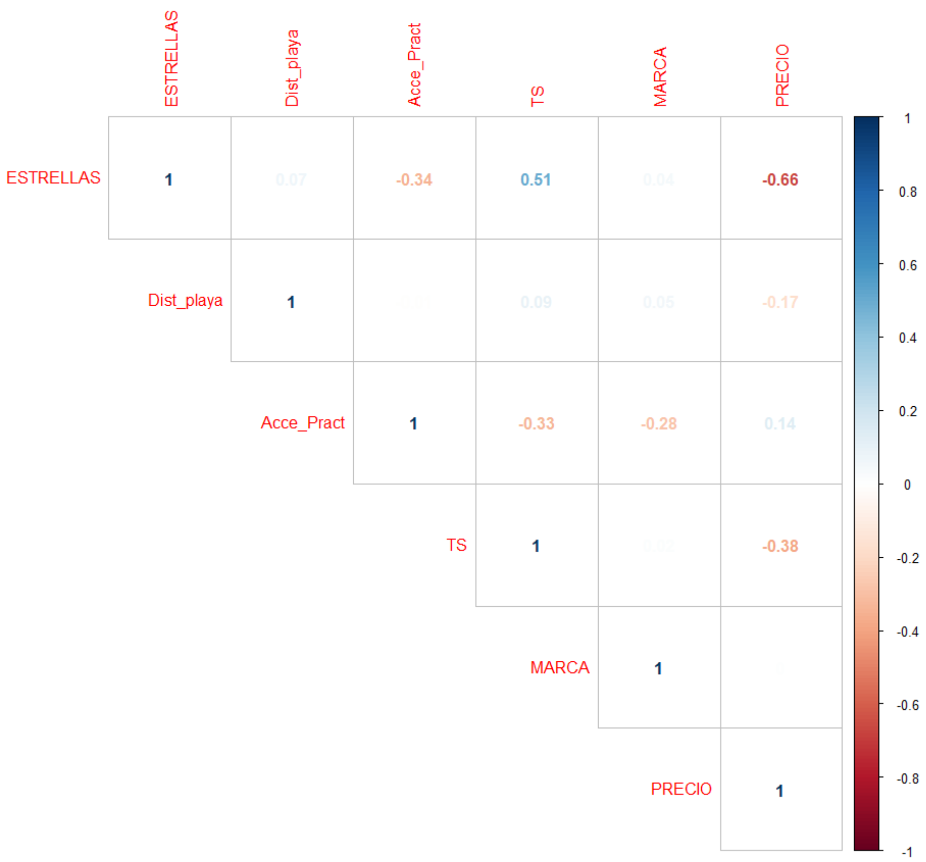
Usando la formula (23) para los casos de *cuanto menos mejor* y la (24) para los casos de *cuanto más mejor*. Con esta normalización se consigue que todos los criterios tengan el mismo sentido de optimización (*más es mejor*) y, por tanto, un valor 1 indica la mejor situación y el valor 0 la peor.

Tras preparar la base de datos, calculamos el índice de J^* (19) de Rowley et al. (2015) que se corresponde al número de criterios independientes. Para hacerlo calculamos los vectores propios de la matriz de correlaciones R de los criterios normalizados:

$$R = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.0682 & -0.3427 & 0.5081 & 0.0417 & -0.6601 \\ 0.0682 & 1.00 & -0.0067 & 0.0914 & 0.0529 & -0.1706 \\ -0.3427 & -0.0067 & 1.00 & -0.3329 & -0.2818 & 0.1351 \\ 0.5081 & 0.0914 & -0.3329 & 1.00 & 0.0163 & -0.3834 \\ 0.0417 & 0.0529 & -0.2818 & 0.0163 & 1.00 & 0.0002 \\ -0.6601 & -0.1706 & 0.1351 & -0.3834 & 0.0002 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Al aplicar la fórmula (19) obtenemos un valor $J^* = 4.5154$. Este valor quiere decir que aproximadamente 5 criterios que no interaccionan.

Figura 2: Matriz de correlaciones.



Fuente: Elaboración propia

A continuación, desarrollamos los 3 pasos del método mixto propuesto.

PRIMER PASO: Identificar la medida inicial aplicando la propuesta de Rowley et al. (2015).

Calculamos las medidas de cada subconjunto de $C = \{1, \ldots, 6\}$ aplicando la fórmula (20) del Capítulo 1. De esta forma, determinamos la importancia de cada subconjunto de criterios:

Tabla 4: Medida fuzzy a partir de un método no supervisado (Rowley et al. 2015).

Subconjunto	*µ de cada coalición*
{1}	0.220003872005389
{2}	0.220003872005389
{3}	0.220003872005389
{4}	0.220003872005389
{5}	0.220003872005389
{6}	0.220003872005389
{1,2}	0.424999117512188
{1,3}	0.364608050690894
{1,4}	0.328218430841269
{1,5}	0.430833504547698
…	…
{2,3,4,6}	0.737078754057728
{2,3,5,6}	0.778841576793213
{2,4,5,6}	0.774349197465045
{3,4,5,6}	0.713424846453262
{1,2,3,4,5}	0.89426229588371
{1,2,3,4,6}	0.818757500365471
{1,2,3,5,6}	0.870123365674082
{1,2,4,5,6}	0.855778482277314
{1,3,4,5,6}	0.787153192822436
{2,3,4,5,6}	0.920036800332896
{1,2,3,4,5,6}	1

Fuente: Elaboración propia

En la **Tabla 4**, cada uno de los diferentes valores entre 0 y 1 miden la fuerza que tienen las diferentes combinaciones de los criterios considerados. De tal que forma que los primeros seis valores de la segunda columna representa la importancia de cada uno de los criterios individuales. Se puede observar que el método basado en ACP asigna el mismo peso a cada uno de los 6 criterios. Sin embargo, no se mantiene esta uniformidad cuando los subconjuntos de criterios no son unitarios. Entre las coaliciones binarias, véase, por ejemplo, la coalición entre 'Estrellas' y '*Tenerife Select*' ({1,4}) que alcanza un valor bastante menor que la suma de los criterios componentes, es decir, el método detecta una apreciable redundancia entre estos dos criterios.

A partir de esta medida calculamos los valores y los índices de interacción de Shapley y su transformada de Möbius.

Tabla 5: Transformada de Möbius de la medida de Rowley et al. (2015).

Subconjunto	*Transformada de Möbius*
{}	0.000000
{1}	0.220004
{2}	0.220004
{3}	0.220004
{4}	0.220004
{5}	0.220004
{6}	0.220004
{1,2}	-0.015009
{1,3}	-0.075400
{1,4}	-0.111789
{1,5}	-0.009174
…	…
{2,3,4,6}	-0.036030
{2,3,5,6}	-0.023538
{2,4,5,6}	-0.013350
{3,4,5,6}	-0.041138
{1,2,3,4,5}	0.019706
{1,2,3,4,6}	0.043782
{1,2,3,5,6}	0.033439
{1,2,4,5,6}	0.019425
{1,3,4,5,6}	0.051842
{2,3,4,5,6}	0.031156
{1,2,3,4,5,6}	-0.035414

Fuente: Elaboración propia

El índice de Shapley nos muestra la contribución marginal de cada uno de los criterios. En la **Tabla 6** vemos que el valor de Shapley más elevado lo alcanza el criterio **2** ('Distancia a la playa'), mientras que el más bajo lo tiene el **1** ('Estrellas'). Esto quiere decir, a priori, que el criterio 'Distancia a la playa' contribuye más que el criterio 'Estrellas', en subconjuntos en los que no estén presentes ninguno de los dos criterios.

Tabla 6: Valores de Shapley asociados a la medida de Rowley et al. (2015).

Criterios	*Valor de Shapley*
1(Estrellas)	0,1267118
2(Di-playa)	0,2099872
3(Acc)	0,1672337
4(TS)	0,1533389
5(Biosfera)	0,1986087
6(Precio)	0,1441197

Fuente: Elaboración propia

Con el objetivo de comparar resultados también se ha calculado la integral de Choquet asociada a esta medida y, por tanto, disponemos de una ordenación de los hoteles.

Tabla 7: Resultados aplicando el método de Rowley.

	Media Aritmética	*Integral de Choquet*
Bahía del Duque	1º	1º
Grand Muthu Golf Plaza Hotel and Spa	4º	2º
The Ritz-Carlton, Abama	2º	3º
Hotel Europe Villa Cortes	7º	4º
Iberostar Hotel Anthelia	3º	5º
Catalonia Punta del Rey	13º	6º
Grand Hotel Callao & Spa	14º	7º
Bahía Princess	15º	8º
Hotel Tigotan Lovers and Friend	21º	9º
Spring Hotel Vulcano	18º	10º
Sol Tenerife	24º	11º
Vanilla Garden	23º	12º
Allegro Isora	20º	13º
Hotel Riu Arecas	25º	14º
Guayarmina Princess	30º	15º
…	…	…
Colón Guanahani	83º	83º
Gala Tenerife	84º	84º
Hotel Aguamarina Golf	87º	85º
Gran Oasis Resort	85º	86º
Hotel Paradise Park	89º	87º
Green Garden Resort	86º	88º
GF Isabel	90º	89º
Meliá Jardines Teide	91º	90º
Hotel Riu Palace Tenerife	92º	91º
GF Victoria	88º	92º
Hotel Hovima La Pinta Beachfront	93º	93º
Sunlingt Bahía Principe Tenerife Resort	94º	94º
Hotel Playa Sur Tenerife	95º	95º
Hotel Spa Villalba	96º	96º
Hotel Ucanca	97º	97º

Fuente: Elaboración propia

Lo que se aprecia en la **Tabla 7** son los quince mejores y los quince peores hoteles puntuados empleando la metodología de Rowley et al. (2015), con la media aritmética para comparar. En base a esta tabla podemos decir que los hoteles que ocupan altas puntuaciones son hoteles que están muy cerca de la playa y además un precio adecuado dado el número de estrellas que poseen. Un caso especial sería el hotel que ocupa el cuarto puesto (**Grand Muthu Golf Plaza Hotel and Spa**) ya que a diferencia del resto de hoteles que obtuvieron altas puntuaciones, este hotel está lejos de la playa. Sin embargo, sigue ocupando un puesto tan alto porque su relación estrellas-precio es muy favorable (es el hotel cinco estrellas más barato de la lista). Esto se reafirma con los hoteles peor puntuados. Los quince peores hoteles presentan un perfil de hoteles con bajo número de estrellas. Además, aquellos hoteles peor puntuados con bastantes estrellas (Cuatro), suelen ser hoteles que tienen una distancia a la playa grande.

Respecto a la programación utilizada, hay que tener en cuenta que la propuesta de Rowley et al. (2015) no está implementada en el paquete Kappalab, por tanto, ha sido necesario programar este procedimiento, para ello generamos el conjunto potencia aplicando la función *powerset* del paquete *ggm* de R y calculamos los valores propios de cada subconjunto de criterios. También ha sido necesaria una reordenación de los subconjuntos generados por la función *powerset* para adecuarla a las funciones de Kappalab que utilizan el orden natural en la enumeración de los subconjuntos de C.

El cálculo de la medida basada en ACP, nos permite aplicar, a continuación, un método supervisado que tiene en cuenta las preferencias del cliente particular. Se dispone, en la literatura de varios esquemas supervisados en las que es posible introducir una medida *fuzzy* inicial. Utilizaremos dos de ellos.

SEGUNDO PASO: Identificar la medida final mediante la minimización de distancias cuadráticas considerando preferencias del viajero.

Una vez determinada la medida *fuzzy* inicial que tiene en cuenta exclusivamente la información proporcionada por la matriz de decisión, estamos en disposición de identificar la medida final que se introduce en la agregación basada en la integral de Choquet. Utilizamos métodos supervisados de detección de la medida para poder recoger las preferencias del cliente, pero con la condición de que también se tenga en cuenta la información de los datos. Esto nos hace restringirnos a metodologías que vamos a llamar *métodos de ajuste de datos* puesto que tratan de ajustar la información de la matriz de decisión a una medida que verifica ciertas condiciones preferenciales. Este ajuste se lleva a cabo utilizando distancias convenientes.

Para poder aplicar estos métodos necesitamos determinar previamente las preferencias de los criterios. Partimos de un supuesto en el que el huésped posee un perfil comprometido con el medio ambiente. Así suponemos las siguientes preferencias sobre la importancia de los criterios:

- El criterio 4: **Biosfera** es más importante que el criterio 6: **Precio.**
- El criterio 4: **Biosfera** es más importante que el criterio 5: ***Tenerife Select***.
- El criterio 2: **Distancia a la playa** es más importante que el criterio 1: **Estrellas**.
- El criterio 5: ***Tenerife Select*** es más importante que el criterio 1: **Estrellas**.

Que vendrán expresadas mediante relaciones de desigualdad entre los valores de Shapley de los criterios correspondientes así se pide que la medida *fuzzy* ν buscada verifique que sus valores Shapley correspondientes:

$$S_\nu(4) > S_\nu(6)$$
$$S_\nu(4) > S_\nu(5)$$
$$S_\nu(2) > S_\nu(1)$$
$$S_\nu(5) > S_\nu(1)$$

Además, el cliente manifiesta ciertas interacciones entre criterios, así:

- los criterios 1 (**Estrellas) y** 6 (**Precio**) presentan interacción positiva, es decir, la combinación Estrellas y Precio es más valorada que la suma de las importancias de ambos criterios,
- los criterios 4 (**Bioesfera) y** 5 (***Tenerife Select***) presentan interacción positiva, es decir, la combinación Biosfera y *Tenerife Select* es más importante que la suma de las importancias de ambos criterios.

Que vendrán expresadas mediante cotas para los coeficientes de interacción:

$$0.1 < I_\nu(1,6) < 1$$
$$0.1 < I_\nu(4,5) < 1$$

Es de observar que en la propuesta basada en ACP la interacción del par (1,6) es igual a -0.07726 y la del par (4,5) 0.004394.

Minimización de distancias

Aplicamos la metodología propuesta por Kojadinovic (2007b) consistente en determinar la medida no-aditiva que minimiza la distancia entre las puntuaciones globales obtenidas aplicando la integral de Choquet (distancia d_3) verificando las restricciones preferenciales indicadas.
En este caso empleamos una función del paquete Kappalab, que nos permite calcular las medidas *fuzzy* mediante el método de minimización de las distancias. Para aplicar el algoritmo es necesario fijar el grado de aditividad de la medida, es decir a partir de qué valor *k* la transformada de Möbius de coaliciones con cardinal mayor que *k* se anula. En esta aplicación se ha fijado *k=3*. Se tomó como base los valores de la **Tabla 5** para poder determinar estos nuevos valores de la medida *fuzzy*. Con este método obtenemos como output el valor de la nueva transformada de Möbius, por ello, es necesario, aplicar la inversa de la función de Möbius para localizar la medida *fuzzy* asociada.

Tabla 8: Medida fuzzy mediante minimización de distancias.

Subconjuntos	*Medida fuzzy*
{}	0
{1}	0,220004
{2}	0,220004
{3}	0,220004
{4}	0,220004
{5}	0,220004
{6}	0,220004
{1,2}	0,424999
{1,3}	0,364608
{1,4}	0,328218
{1,5}	0,430834
{1,6}	0,294773
{2,3}	0,438536
{2,4}	0,419896
{2,5}	0,428379
…	…
{1,3,4,6}	0,611028
{1,3,5,6}	0,657813
{1,4,5,6}	0,650296
{2,3,4,5}	0,777082
{2,3,4,6}	0,737079
{2,3,5,6}	0,778842
{2,4,5,6}	0,774349
{3,4,5,6}	0,713425
{1,2,3,4,5}	0,894262
{1,2,3,4,6}	0,818758
{1,2,3,5,6}	0,870123
{1,2,4,5,6}	0,855778
{1,3,4,5,6}	0,787153
{2,3,4,5,6}	0,920037
{1,2,3,4,5,6}	1

Fuente: Elaboración propia

Las interacciones entre el par de criterios 1 y 6 (Estrellas y Precio) y el par 4 y 5 (TS y Biosfera) se mantienen en su cota inferior fijada, es decir 0.1. El resto de las interacciones son negativas a excepción del par (2,3) que presenta un pequeño valor positivo de 0.0025.

Tabla 9: Transformada de Möbius obtenida minimizando distancia.

Subconjuntos de criterios	*Transformada de Möbius*
{}	0.000000
{1}	0.172737
{2}	0.254400
{3}	0.249294
{4}	0.210048
{5}	0.215392
{6}	0.171217
{1,2}	-0.025681
{1,3}	-0.072849
{1,4}	-0.119913
{1,5}	-0.031885
{1,6}	0.074639
{2,3}	0.000681
{2,4}	-0.022627
{2,5}	-0.025054
…	**…**
{1,3,5}	0.018409
{1,3,6}	0.009501
{1,4,5}	-0.001294
{1,4,6}	0.056386
{1,5,6}	-0.018202
{2,3,4}	-0.002227
{2,3,5}	0.002891
{2,3,6}	-0.001768
{2,4,5}	0.000163
{2,4,6}	0.013416
{2,5,6}	0.002111
{3,4,5}	0.009396
{3,4,6}	0.011999
{3,5,6}	-0.006669
{4,5,6}	-0.005795

Fuente: Elaboración propia

También calculamos para este caso los valores de Shapley para tener información de las contribuciones marginales de los criterios.

Tabla 10: Valores de Shapley método de mínima distancia.

Criterios	*Valor de Shapley*
1(Est.)	0.1276634
2(D-playa)	0.2101228
3(Acc)	0.1673179
4(TS)	0.1534453
5(Bios)	0.1987315
6(Precio)	0.142719

Fuente: Elaboración propia

Al igual que en el método de Rowley et al. (2015), en este método los valores de Shapley indican conclusiones similares. Tanto la 'Distancia a la playa', como la marca de 'Biosfera' de los hoteles son los criterios que más influyen. Mientras que las 'Estrellas' de los establecimientos hoteleros es el criterio de menor contribución.

Ajuste por mínimos cuadrados

Otra alternativa cercana a la anterior para determinar una medida *fuzzy* que tenga en cuenta las preferencias del viajero y en la que podamos incorporar los resultados de la medida obtenida aplicando ACP es la basada en la optimización mínimo-cuadrática (ver, por ejemplo, Grabisch y Roubens, 2000). En su formato original se parte de una matriz de decisión con el resultado global asociado a cada alternativa y también de restricciones lineales adicionales que expresan preferencias, importancia de los criterios, etc., el método determina, si existe, una capacidad que minimiza la suma de los errores cuadráticos entre los puntuaciones globales, según la información de entrada, y los resultados de la integral de Choquet para esa matriz de decisión, y compatibles con las restricciones lineales adicionales. La existencia está asegurada si no se añade ninguna restricción adicional. Nuestra propuesta es generar las puntuaciones globales obtenidas mediante el método propuesto por Rowley et al. (2015) e introducirlas como entradas en el modelo, de esa forma nuevamente combinamos un método no supervisado con uno supervisado.

Como en la metodología anterior es necesario fijar el grado de aditividad k de la medida *fuzzy*. En este caso también buscamos una medida 3-aditiva.

Tabla 11: Comparación medida fuzzy por Rowley et al. (2015) y Mínimos Cuadrados.

Subconjuntos de criterios	*Capacidad Mínimos Cuadrados*	*Capacidad Rowley*
{}	0	0
{1}	0.174875	0.220004
{2}	0.219935	0.220004
{3}	0.219278	0.220004
{4}	0.223074	0.220004
{5}	0.221636	0.220004
{6}	0.209345	0.220004
{1,2}	0.426749	0.424999
{1,3}	0.346726	0.364608
{1,4}	0.308448	0.328218
{1,5}	0.221682	0.430834
{1,6}	0.302857	0.294773
{2,3}	0.437821	0.438536
{2,4}	0.465849	0.419896
{2,5}	0.440422	0.428379
…	**…**	**…**
{1,3,4,6}	0.581329	0.611028
{1,3,5,6}	0.662775	0.657813
{1,4,5,6}	0.918987	0.650296
{2,3,4,5}	0.718387	0.777082
{2,3,4,6}	0.689697	0.737079
{2,3,5,6}	0.715969	0.778842
{2,4,5,6}	0.676495	0.774349
{3,4,5,6}	0.655094	0.713425
{1,2,3,4,5}	0.718468	0.894262
{1,2,3,4,6}	0.824562	0.818758
{1,2,3,5,6}	0.853877	0.870123
{1,2,4,5,6}	0.91917	0.855778
{1,3,4,5,6}	0.972503	0.787153
{2,3,4,5,6}	0.718544	0.920037
{1,2,3,4,5,6}	1	1

Fuente: Elaboración propia

Lo que podemos ver en la capacidad determinada por mínimos cuadrados es que a diferencia de la determinada por el método de Rowley et al. (2015) los subconjuntos unitarios de criterios toman valores diferentes.

A partir de esta medida calculamos los valores y los índices de interacción de Shapley y su transformada de Möbius.

Tabla 12: Transformada de Möbius por Mínimos Cuadrados.

Subconjuntos de criterios	*Transformada de Möbius*
{}	0
{1}	0.174875
{2}	0.219935
{3}	0.219278
{4}	0.223074
{5}	0.221636
{6}	0.209345
{1,2}	0.031939
{1,3}	0.047427
{1,4}	0.089501
{1,5}	0.174829
{1,6}	0.081363
{2,3}	0.001392
{2,4}	0.02284
{2,5}	0.001149
…	…
{1,3,5}	0.068482
{1,3,6}	0.041116
{1,4,5}	0.089614
{1,4,6}	0.192787
{1,5,6}	0.152774
{2,3,4}	0.089461
{2,3,5}	0.064875
{2,3,6}	0.018392
{2,4,5}	0.201425
{2,4,6}	0.034247
{2,5,6}	0.041161
{3,4,5}	0.052262
{3,4,6}	0.002418
{3,5,6}	0.007743
{4,5,6}	0.008273

Fuente: Elaboración propia

Las interacciones entre el par de criterios 1 y 6 (Estrellas y Precio) y el par 4 y 5 (TS y Biosfera) son ligeramente superiores a su cota inferior fijada (0.1).

Tabla 13: Valores de Shapley mediante mínimos cuadrados.

Criterios	Valor de Shapley
1	0.1502051
2	0.1602869
3	0.1363455
4	0.1806175
5	0.1912889
6	0.1812561

Fuente: Elaboración propia

En la **Tabla 13** el valor de Shapley nos indica que el criterio que más influye en los subconjuntos en los que no está presente es la marca *Tenerife Select*, mientras que el criterio que menos contribuye a las decisiones es la Accesibilidad de las instalaciones. Biosfera y Precio también son criterios que tienen bastante importancia a nivel individual.

TERCER PASO: Calcular la integral de Choquet de cada hotel con la medida *fuzzy* determinada en el SEGUNDO PASO.

Una vez determinadas las medidas *fuzzy* por cada uno de los dos métodos ya estamos en disposición de calcular las puntuaciones globales de cada hotel.

La utilidad global de cada hotel se calcula aplicando Choquet y, a continuación presentamos los resultados para las dos metodologías consideradas: Minimización de Distancias y Ajuste por Mínimos Cuadrados.

Tabla 14: Integral de Choquet: Método Mínima Distancia y Método Mínimos Cuadrados.

	Choquet Mínima Distancia	*Choquet Mínimos Cuadrados*
Bahía del Duque	1º	1º
The Ritz-Carlton, Abama	3º	2º
Iberostar Hotel Anthelia	5º	3º
Grand Muthu Golf Plaza Hotel and Spa	2º	4º
Hotel Europe Villa Cortes	4º	5º
H10 Gran Tinerfe	35º	6º
H10 Big Sur	36º	7º
Catalonia Punta del Rey	6º	8º
Grand Hotel Callao & Spa	7º	9º
H10 Costa Adeje Palace	43º	10º
H10 las palmeras	39º	11º
Bahía Princess	8º	12º
H10 Conquistador	47º	13º
Kn Hotel Arenas Del Mar Beach & Spa	16º	14º
Spring Hotel Vulcano	10º	15º
…	…	…
Iberostar Bouganville Playa	82º	83º
Colón Guanahani	83º	84º
Gala Tenerife	84º	85º
Gran Oasis Resort	86º	86º
Green Garden Resort	88º	87º
Hotel Aguamarina Golf	85º	88º
Hotel Paradise Park	87º	89º
GF Isabel	89º	90º
Meliá Jardines Teide	90º	91º
Hotel Playa Sur Tenerife	95º	92º
Hotel Riu Palace Tenerife	91º	93º
Hotel Hovima La Pinta Beachfront	93º	94º
Sunlingt Bahía Principe Tenerife Resort	94º	95º
Hotel Ucanca	97º	96º
Hotel Spa Villalba	96º	97º

Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, si nos fijamos en el método de Mínima Distancia lo que podemos ver es que los hoteles con mayores puntuaciones son aquellos que tienen fundamentalmente las instalaciones adaptadas a clientes con necesidades especiales, exceptuando el que ocupa el primer (**Bahía del Duque**) que no posee estas facilidades, pero es el único de los que se encuentran mejor puntuados que posee la marca de Biosfera. También es interesante ver que si con la propuesta de Rowley et al. (2015) la mayoría de hoteles mejor puntuados estaban cerca de la playa, ahora vemos que los huéspedes tendrían que desplazarse un poco más. Aquellos hoteles peor puntuados no poseen ni marca de Biosfera, ni tienen instalaciones "adaptadas", y además tienen una distancia a la playa importante.

Si observamos los resultados obtenidos aplicando el ajuste de Mínimos Cuadrados la importancia de tener la marca de Biosfera se vuelve más relevante. Con este ajuste se ve más claro que el perfil de los huéspedes que se pretende reflejar es más respetuoso con el medio ambiente y criterios tales como la 'Distancia a la playa' y la 'Accesibilidad' de las instalaciones pierden impacto. Respecto a los peor valorados, siguen presentando el mismo tipo de perfil que en ajustes anteriores: hoteles a una distancia media-alta de la playa más cercana y que no poseen ninguno de los atributos de Accesibilidad o Biosfera.

2.3. Comparación con métodos supervisados "puros".

Una vez vistas las propuestas metodológicas basadas en la minimización de distancias y ajuste por mínimos cuadrados combinadas con un enfoque no supervisado, presentamos, con el fin de comparar, métodos supervisados "puros" que no admiten una medida *fuzzy* inicial. Por tanto, son métodos capaces de recoger la información preferencial pero no se basan en "acercarse" a una medida dada *a priori* sino que utilizan principios generales para determinar la medida no-aditiva. Concretamente, se buscarán medidas de máxima entropía y de máxima separación.

2.3.1. Minimización de la varianza

En primer lugar, utilizaremos el principio de máxima entropía, equivalente a mínima varianza, según lo expuesto en la sección 1.2 del Capítulo 1. Por tanto, se trata de encontrar la medida de varianza mínima compatible con las restricciones lineales que expresan las preferencias del cliente. En la aplicación presentada se utilizarán las preferencias expresadas en la sección anterior y el mismo grado de aditividad ($k=3$).

Tabla 15: Medida *fuzzy* con mínima varianza.

Subconjuntos de Criterios	*Medida fuzzy*
{}	0
{1}	0.134928
{2}	0.175362
{3}	0.175362
{4}	0.144928
{5}	0.154928
{6}	0.144928
{1,2}	0.303768
{1,3}	0.303768
{1,4}	0.258116
{1,5}	0.268116
{1,6}	0.379855
{2,3}	0.35942
{2,4}	0.313768
{2,5}	0.323768
…	…
{1,3,4,6}	0.637101
{1,3,5,6}	0.647101
{1,4,5,6}	0.692754
{2,3,4,5}	0.733188
{2,3,4,6}	0.601449
{2,3,5,6}	0.611449
{2,4,5,6}	0.657101
{3,4,5,6}	0.657101
{1,2,3,4,5}	0.811594
{1,2,3,4,6}	0.801594
{1,2,3,5,6}	0.811594
{1,2,4,5,6}	0.842029
{1,3,4,5,6}	0.842029
{2,3,4,5,6}	0.821594
{1,2,3,4,5,6}	1

Fuente: Elaboración propia

La capacidad obtenida con el ajuste minimizando la varianza nos indica que los criterios que tienen mayor impacto a nivel individual son la ‘Distancia a la playa’ y la ‘Accesibilidad’, a diferencia del ajuste por mínimos cuadrados que indicaba mayor impacto de las marcas Biosfera y *Tenerife Select*. Las interacciones entre el par de criterios 1 y 6 (Estrellas y Precio) y el par 4 y 5 (TS y Biosfera) se mantienen en su cota inferior fijada, es decir 0.1. El resto de las interacciones son negativas a excepción del par (2,3) que presenta un pequeño valor positivo de 0.0087.

Al calcular la integral de Choquet, con el método de la mínima varianza (ver **Tabla 16**) volvemos a ver un patrón parecido al ajuste presentado por minimización de la distancia. Los hoteles mejor puntuados son, por norma general, hoteles ubicados a mayor 'Distancia de la playa' que los que obtuvimos en la **Tabla 14**. El criterio predominante sigue siendo la 'Accesibilidad' de las instalaciones, pero cobra fuerza el criterio de '*Tenerife Select'*.

Tabla 16: Resumen de resultados.

	Media Aritmética	*Método de Rowley*	*Minimización de la Distancia*	*Distancia por mínimos cuadrados*	*Mínima varianza*
Allegro Isora	20º	17º	13º	17º	12º
Annapurna Tenbel Tenerife	53º	32º	37º	32º	46º
Bahía del Duque	1º	1º	1º	1º	1º
Bahía Flamingo	55º	36º	38º	36º	48º
Bahía Princess	15º	11º	8º	12º	8º
Baobab Suites	48º	40º	44º	41º	39º
Barceló Royal Hideaway Corales Beach Adults Only	32º	27º	33º	26º	33º
Barceló Royal Hideaway Corales Suites	52º	44º	55º	44º	47º
Barceló Santiago	46º	46º	29º	46º	29º
Be Live Experience La Niña	50º	55º	31º	55º	32º
Be Live Family Costa los Gigantes	49º	54º	32º	54º	31º
Catalonia Punta del Rey	13º	8º	6º	8º	6º
Cleopatra Palace	80º	81º	79º	81º	80º
ClubHotel Riu Buena Vista	27º	21º	17º	21º	16º
Colón Guanahani	83º	84º	83º	84º	83º
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
Palia Don Pedro	60º	49º	54º	49º	59º
Regency Country Club, Apartements Suites	61º	68º	42º	68º	38º
Roca Nivaria Gran Hotel	72º	72º	72º	72º	72º
Royal Hideway Corales Resort	45º	67º	71º	67º	67º
Royal Sun Resort	26º	25º	26º	25º	20º
Sandos San Blas	10º	58º	62º	58º	40º
Sensimar Arona Gran Hotel and Spa	37º	31º	20º	31º	24º
Sheraton la Caleta Resort and Spa	5º	41º	57º	40º	34º
Sir Anthony	12º	57º	63º	57º	43º
Sol Tenerife	24º	19º	11º	19º	13º
Spring Hotel Bitácora	40º	34º	24º	34º	26º
Spring Hotel Vulcano	18º	15º	10º	15º	9º
Sunlingt Bahía Principe Tenerife Resort	94º	95º	94º	95º	93º
The Ritz-Carlton, Abama	2º	2º	3º	2º	2º
Vanilla Garden	23º	18º	12º	18º	14º

Fuente: Elaboración propia

Si tenemos en cuenta la imagen general que nos da la **Tabla 16**, podemos ver que realmente no ha habido, en general, cambios muy significativos en las posiciones utilizando una metodología u otra. La mayoría de hoteles se encuentran en un rango aceptable de variación y podría decirse que la interacción entre los criterios no es decisiva para muchos de ellos.

No obstante, nos encontramos casos como los hoteles **Sandos San Blas** y **Sheraton la Caleta Resort Spa**, que sí que han tenido una variación significativa de posiciones de emplear una medida aditiva como es la media aritmética, a utilizar cualquiera de los métodos no-aditivos que hemos propuesto. Ambos hoteles presentan una variación de más de 30 posiciones respecto a la posición obtenida en la media aritmética y lo común que tienen ambos establecimientos es que siendo hoteles de cinco estrellas no disponen ni de espacios “accesibles”, ni presentan la marca de la ‘Biosfera’, aunque si pertenecen a la marca ‘*Tenerife Select’*. Esta afirmación nos lleva a pensar que la marca ‘*Tenerife Select’* es menos importante para un cliente solidario con el medio ambiente de lo que son la ‘Accesibilidad’ y la marca de ‘Biosfera’, como es de esperar, en base a las preferencias iniciales que establecimos.

También hay casos en los que las posiciones mejoran al incluir la interacción entre variables. Un caso puede ser el hotel **Catalonia Punta del Rey**, que mejoró 5 o 7 posiciones (dependiendo del ajuste) y que se diferencia de los hoteles anteriormente mencionados en que no dispone de ‘*Tenerife Select’*, pero en cambio si que tiene infraestructuras “adaptadas” para personas con discapacidad. Esto nos reafirma que la ‘Accesibilidad’ de los complejos hoteleros es más importante que la marca ‘*Tenerife Select’* y resulta relevante para que un huésped escoja un hotel u otro.

También hay que tener presente que el precio es un factor a tener en cuenta. En esta aplicación no se le dio especial importancia a este criterio, pero es innegable que en situaciones en los que haya hoteles que presentan características muy parejas resulta crucial. Se aludió a él para explicar el por qué hoteles como el **Grand Muthu Golf Plaza Hotel and Spa**, a pesar de tener una distancia a la playa tan grande, ocupaba posiciones tan altas en el ranking. Podría decirse que el criterio ‘Precio’ funciona como condición última para que los huéspedes se decidan a escoger un hotel u otro.

2.3.2. Maximización de la Separación

El último método empleado consiste en resolver un modelo de programación lineal (ver Marichal y Roubens, 2000) para determinar una medida *fuzzy*, si existe, compatible con las restricciones lineales propuestas y que "separe" lo más posible los hoteles bajo consideración. En nuestra aplicación usamos las preferencias expuestas en la sección anterior y el grado de aditividad igual a k=2. Los valores de la medida *fuzzy* obtenida con esta metodología son iguales a 10^{-6} para todos los subconjuntos unitarios excepto para el criterio 5 (Biosfera) que alcanza un valor iguala a 0.325. El resultado es congruente con la filosofía del método que trata de separar y el criterio más 'separador' es la etiqueta de respeto al medio ambiente. Los valores de Shapley, recogidos en la **Tabla 17**, refuerzan esta idea. Además, se verifican las relaciones preferenciales entre las importancias de los criterios. También se verifican las relaciones preferenciales relativas a las interacciones entre pares de criterios alcanzándose las cotas inferiores (iguales a 0.1) para las interacciones (1,6) y (4,5). El resto de los coeficientes de interacción son nulos salvo el par (3,2) que alcanza una interacción positiva iguala 0.0087.

Tabla 17: Valores de Shapley con máxima separabilidad.

Criterios	*Valor de Shapley*
1	0.0500
2	0.2375
3	0.000001
4	0.2375
5	0.4250
6	0.0500

Fuente: Elaboración propia

La siguiente tabla recoge los quince mejores hoteles y los quince peores aplicando esta metodología supervisada.

Tabla 18: Ordenación con máxima separabilidad.

Hoteles	I. Choquet
Bahía del Duque	0.956369574
H10 Gran Tinerfe	0.491667186
H10 las palmeras	0.491667103
H10 Big Sur	0.491215569
H10 Costa Adeje Palace	0.489731628
H10 Conquistador	0.489086452
Sheraton la Caleta Resort and Spa	0.452219259
Jardines de Nivaria	0.446271926
Hard Rock Hotel Tenerife	0.443761495
Hotel Jardín Tropical	0.441667123
Sir Anthony	0.440025733
Sandos San Blas	0.438789028
La Plantación del Sur Vincci	0.43687917
The Ritz-Carlton, Abama	0.431304263
…	…
Hotel Sol Arona Tenerife	0.033336558
Oro Negro Catalonia	0.033336546
Hotel Médano	0.033336544
Palia Don Pedro	0.033336535
Hotel Apartamentos Panorama Hovima	0.033336529
Hotel Apartamentos Santa María Hovima	0.033336522
Hotel apartamentos Jardín Caleta Hovima	0.033336518
Ona Sueño Azul	0.033336503
Hotel apartamentos Parque la Paz	0.033336492
Hotel Europea Park Club	0.033336396
Hotel Playa Sur Tenerife	0.033335544
Barceló Royal Hideaway Corales Suites	0.031447437
Iberostar Grand Salomé	2.99194E-06
Hotel Apartamentos Atlantic Holiday Center	2.89414E-06
Hotel Ucanca	1.80645E-06

Fuente: Elaboración propia

Nuevamente la primera posición la ocupa el hotel **Bahía del Duque** que no posee el atributo ‘Accesibilidad’, pero es el único de los que se encuentran mejor puntuados que posee la marca de Biosfera. Además, la diferencia entre la puntuación mayor y la siguiente es muy grande como era de prever por el método usado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado un problema multicriterio como es la obtención de una ordenación de las mejores alternativas hoteleras atendiendo a múltiples criterios de valoración. Para ello, se ha utilizado una metodología basada en una generalización de la media aritmética ponderada que permite modelizar la interacción entre criterios. Hemos presentado los fundamentos matemáticos de la integral de Choquet y puesto de manifiesto la mayor dificultad que supone su aplicación: la identificación de la función de conjunto que contiene la información sobre la importancia de las coaliciones de criterios. Es necesario estimar los "pesos" que acompañan a las puntuaciones de las alternativas sobre los criterios pero siendo conscientes que ahora la presencia conjunta de varios criterios puede no tener una importancia aditiva de cada una de las importancias individuales. Se han propuesto muchos métodos para estimar esta función, llamada capacidad, medida no-aditiva o medida *fuzzy* según su ámbito de aplicación, Teoría de Juegos, Decisión Multicriterio, Teoría de la Medida, etc. Una primera clasificación divide a los métodos en supervisados, cuando utilizan información preferencial para ajustar la medida, y no supervisados, imponiendo ciertas condiciones a la medida buscada que parecen convenientes (mínima varianza, máxima separabilidad) pero sin relaciones de preferencia. Nuestra propuesta es combinar un método no supervisado con uno que sí lo es. Concretamente, pretendemos diseñar un método supervisado que ajuste una medida obtenida a partir de la matriz de decisión. Se trata de combinar información objetiva obtenida de los datos con información subjetiva proporcionada por el decisor. En el primer paso, se localiza una medida aplicando la propuesta no supervisada de Rowley et al. (2015) que es computacionalmente más eficiente que otras metodologías y utiliza la información contenida en la matriz de decisión. En el segundo paso, se pueden aplicar cualquier método supervisado que ajuste una medida inicial. En este trabajo se han utilizado algunos (mínima distancia, ajuste cuadrático, etc.) pero cualquier otro método que admita como inputs relaciones de preferencia y una medida inicial también se ajustaría a nuestro marco de trabajo.

Nuestra aplicación empírica trabaja sobre una base de datos que hemos construido específicamente para esta investigación. No se dispuso de una ya construida sobre la que implementar el modelo. Por supuesto, esta base admite ampliaciones y mejoras que quizás puedan llevarse a cabo posteriormente. Es de esperar que la etiqueta *Biosphere* se generalice en establecimientos hoteleros de todo el mundo y personas comprometidas con la sostenibilidad puedan elegir opciones responsables con el medio ambiente en sus vacaciones.

Respecto de los resultados obtenidos son coherentes con la teoría matemática subyacente, así hemos observado la total concordancia entre los resultados de la media aritmética ponderada y la propuesta basada en ACP, y este hecho no es sorprendente debido al alto coeficiente de no interacción que presentan nuestros datos. Esta situación no se mantiene cuando el viajero introduce interacción en sus preferencias, en este caso el ranking ya presenta mayores diferencias con el obtenido bajo la hipótesis de independencia de los criterios. Por tanto, el modelo es sensible a los gustos del huésped. Consideramos que la herramienta propuesta es de interés tanto para clientes como para las empresas del sector turístico.

Finalmente, nos gustaría comentar algunas ampliaciones del trabajo que nos hemos planteado. Sería interesante abordar el *problema inverso*, es decir, dado un ranking de establecimientos hoteleros obtener la integral de Choquet (y su medida *fuzzy*) asociada y si, como parece lo más probable, no existe, encontrar una que aproxime (en un sentido fijado) el ranking de partida. La solución a este problema inverso proporcionaría un sistema de aprendizaje automático puesto que se podrían incorporar nuevos hoteles y el modelo lo ordenaría a partir de la integral de Choquet detectada. También serían posibles añadir nuevos criterios de evaluación y con otros formatos para sus puntuaciones (intervalos, números difusos, etc.).

A nivel de mi formación académica, este trabajo me ha permitido poner en práctica competencias y habilidades desarrolladas en el máster y ampliar algunos conocimientos que fueron estudiados en asignaturas del máster.

REFERENCIAS

J. Aczél, Z. Daróczy (1975): On Measures of Information and their Characterizations, Academic Press, New York, San Francisco, London.

J. Choquet (1953): Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier, 5, pp. 131-295.

M. Grabisch (1995): A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition, Int. Joint Conf. of the 4th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems and the 2nd Int. Fuzzy Engineering Symposium, Yokohama, Japan, 145-150.

M. Grabish (1996): The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making, European Journal Operational Research, 89, pp. 445-456.

M. Grabisch (1997): Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making, International Journal of Uncertainty, Fuzziness, Knowledge Based Systems, 5, 587-607.

M. Grabisch, I. Kojadinovic, P. Meyer (2015): Non-Additive Measure and Integral Manipulation Functions. Package 'kappalab'.

M. Grabisch, M. Roubens (2000): Application of the Choquet Integral in Multicriteria Decision Making, in: Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno Eds, Physica Verlag, pages 415-434.

J. Havrda, F. Charvat (1967): Quantification method in classification processes: Concept of structural α-entropy, Kybernetika 3 (1967), pp. 30-35.

S.G. Hwang (2004): Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of Hermitian matrices, Am. Math. Mon. 111 pp. 157–159.

E.T. Jaynes (1957): Information theory and statistical mechanics, Physical Review 106 620-630.

R.L. Keeney, H. Raiffa (1976): Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Tradeoffs. John Wiley & Sons, New York.

A. Khinchin (1957): Mathematical Foundations of Information Theory, Dover.

I. Kojadinovic, J.L. Marichal, M. Roubens (2005): An axiomatic approach to the definition of the entropy of a discrete Choquet capacity, Information Sciences 172, pp. 131–153.

I. Kojadinovic (2006): Quadratic objective functions for capacity and bi-capacity identification and approximation, A Quarterly Journal of Operations Research (40R)

I. Kojadinovic (2007): Minimum variance capacity identification, European Journal of Operational Research 177, pp. 498–514.

J.L. Marichal (1998): Aggregation operators for multicriteria decison aid, Ph.D. thesis, University of Liège, Liège, Belgium.

J.L. Marichal (2000): An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (6) 800-807.

J.L. Marichal (2002): Entropy of discrete Choquet capacities, European Journal of Operational Research 3 (137) 612–624.

J.L. Marichal (2004): Tolerant or intolerant character of interacting criteria in aggregation by the Choquet integral, European Journal of Operational Research 155 (3), pp. 771–791.

J.L. Marichal, M. Roubens (2000): Entropy of discrete fuzzy measures, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 8 (6) 625–640.

J.L. Marichal, M. Roubens (2000b): Determination of weights of interacting criteria from a reference set, European Journal of Operational Research 124, pages 641-650.

H.V. Rowley, A. Geschke, M. Lenzen (2015): A practical approach for estimating weights of interacting criteria from profile sets. Fuzzy Sets and Systems 272 (2015) pp. 70–88.

G. Shafer (1976): A Mathematical Theory of Evidence. Princenton University Press.

C.E. Shannon (1948): A mathematical theory of communication, Bell Systems Technical Journal 27, pp. 379-623.

L.S. Shapley (1953): A value for n-person games, in: H.W. Kuhn, A.W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games, Princeton University Press, Princeton, NJ, pp.307–317.

M. Sugeno (1974): Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo.