

# RESOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PÉNDULO DE WILBERFORCE

R. Caballero-Flores, V. M. Prida

Dpto. de Física, Universidad de Oviedo

<https://www.unioviedo.es/rafaelcaballero/>

El péndulo de Wilberforce es un dispositivo experimental muy útil en docencia que permite verificar el principio de conservación de la energía, estudiar las oscilaciones acopladas y sus modos normales de vibración, y presentar los fenómenos de pulsación y resonancia. Consta de un cuerpo que cuelga de un muelle helicoidal y que a su vez puede rotar en torno al eje de éste. Se puede observar que la energía, manteniéndose constante, se transfiere entre los dos grados de libertad del péndulo: el longitudinal del muelle y el torsional del cuerpo que cuelga. En este trabajo se presenta una nueva descripción analítica del péndulo de Wilberforce en la que las ecuaciones de movimiento se expresan explícitamente en función de las condiciones iniciales y en función sólo de una constante por determinar, y no de dos como generalmente se expresan en la literatura. A partir de ellas será, por tanto, mucho más sencillo obtener las ecuaciones en los casos particulares del movimiento del péndulo, a saber: modos normales de vibración, situación de resonancia, o situación en la que uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo.

## 1. Descripción del péndulo de Wilberforce

El péndulo de Wilberforce<sup>1</sup> [1, 2, 3] consta de un muelle helicoidal de constante elástica longitudinal  $k$  y masa  $m_m$ , de cuyo extremo cuelga una pesa que además puede girar en torno al eje  $z$  con una constante elástica de torsión  $\delta$  (Fig. 1). La pesa está constituida por un cuerpo cilíndrico de masa  $m_c$  atravesado por una varilla de masa  $m_v$ , sobre la que se pueden enroscar dos deslizadores de masa  $m_d$ .

---

<sup>1</sup> Recibe este nombre en honor a Lionel Robert Wilberforce (1861-1944), *lecturer* del Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde trabajó con J. J. Thomson, y profesor de la Universidad de Liverpool. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lionel\\_Wilberforce](https://en.wikipedia.org/wiki/Lionel_Wilberforce)

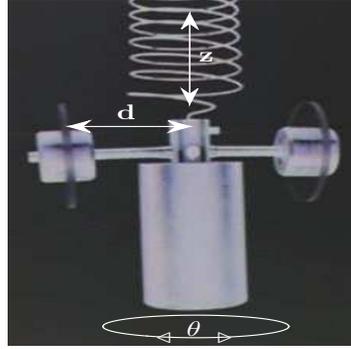


Figura 1: Esquema del péndulo de Wilberforce y sus dos grados de libertad: el longitudinal ( $z$ ) y el torsional ( $\theta$ ), junto con sus dos deslizadores colocados simétricamente en la varilla a una distancia  $d$  del eje de simetría. Fuente: Imagen modificada del Instituto de Física, Universidade de Brasília. <http://www.fis.unb.br/>

Si, partiendo de la posición de equilibrio, se desplaza la pesa verticalmente, la giramos un cierto ángulo, y se deja el sistema en libertad, el movimiento comienza generalmente con una oscilación vertical simple que se va amortiguando a la vez que la oscilación torsional se hace mayor. Posteriormente, se observa que la amplitud de la oscilación vertical aumenta de nuevo cuando la oscilación torsional comienza a debilitarse, y así, de manera sucesiva, el movimiento del péndulo se repetirá hasta pararse debido al rozamiento con el aire.

Se dice que el movimiento vibratorio del péndulo es un movimiento compuesto por dos oscilaciones: la longitudinal del muelle y la torsional de la pesa que cuelga; y que ambas oscilaciones están acopladas, esto es, existe una transferencia de energía entre ellas y, en general, no se puede perturbar un grado de libertad sin perturbar el otro.

Asumimos que la energía de acoplamiento, o energía potencial de interacción, entre estas oscilaciones viene dada por la función  $E_A = \frac{1}{2}\epsilon z\theta$ , donde  $z$  es el desplazamiento vertical de la pesa con respecto a su centro de masas, y  $\theta$  el ángulo girado por la varilla, tomadas ambas variables con respecto a su posición de equilibrio (Fig. 1). La expresión anterior indica que los dos grados de libertad contribuyen por igual en el intercambio de energía entre ellos, y que intercambiarán más o menos dependiendo de la constante de acoplamiento,  $\epsilon$ .

Con esta configuración, el momento de inercia total del sistema con respecto al eje  $z$  de simetría vertical, resulta:

$$I(d) = I_m + I_c + I_v + I_d = I_0 + 2m_d d^2, \quad (1)$$

donde  $I_0$  es una constante que agrupa los momentos de inercia del muelle  $I_m$ , del cuerpo

cilíndrico  $I_c$ , y de la varilla  $I_v$ . El momento de inercia del sistema  $I(d)$  puede, por tanto, variar al desplazar ambos deslizadores (considerados como masas puntuales) a lo largo de la varilla y situarlos a una distancia  $d$  respecto al eje vertical.

La energía del sistema,  $E$ , viene dada por la suma de las energías cinética y potencial de cada grado de libertad, más la energía potencial de interacción:

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}\delta\theta^2 + \frac{1}{2}\epsilon z\theta, \quad (2)$$

con  $m$  la masa total del sistema:

$$m = fm_m + m_c + m_v + 2m_d, \quad (3)$$

donde se ha tenido en cuenta que al tratarse de un muelle real y, por tanto, de masa no despreciable, al hacer oscilar la pesa suspendida de su extremo debemos considerar una fracción  $f$  de su masa  $m_m$ , cuyo valor teórico es  $f = 1/3$ .

Se observa, una vez reagrupados los términos de la Ec. (2), que la energía  $E$  se puede expresar como la suma de las energías asociadas a cada uno de los dos grados de libertad, el longitudinal de frecuencia natural  $\omega_z^2 = k/m$  y energía  $E_z(z)$ , y el torsional de frecuencia natural  $\omega_\theta^2 = \delta/I$  y energía  $E_\theta(\theta)$ , más la energía de interacción  $E_A(\epsilon, z, \theta)$  que da cuenta del intercambio de energía entre ellos. Cuando, en ausencia de rozamiento, el valor de la constante de acoplamiento  $\epsilon$  es nulo, las energías de cada grado de libertad  $E_z$  y  $E_\theta$  son constantes. En caso contrario, la energía total  $E$  es constante.

Con todo ello, y en términos de energía, si se desplaza la pesa de su posición de equilibrio (desplazamiento vertical y giro), y se deja en libertad, el péndulo comenzará un movimiento vibratorio compuesto de tal forma que la energía de cada grado de libertad no queda confinada en él sino que, manteniéndose constante la energía  $E$  del sistema, parte de ella, como consecuencia de la energía potencial de interacción  $E_A$ , puede transferirse al otro.

En general, el movimiento vibratorio longitudinal  $z(t)$  y el torsional  $\theta(t)$  son movimientos no periódicos y, además, se puede observar que la energía potencial de interacción  $E_A(t)$  también es no periódica. En la situación concreta en la que las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$  sean parecidas, se tendrá que  $z(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $E_A(t)$  serán funciones periódicas.

La energía transferida entre los dos grados de libertad será máxima cuando las frecuencias naturales coincidan  $\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$ , es la denominada situación de resonancia. Asimismo, es posible conseguir que la energía transferida sea nula si se desplaza y se gira la pesa unos determinados valores. En esta última situación, se dice que el sistema oscila en uno de sus

modos normales<sup>2</sup> de vibración, en el que la amplitud de las dos oscilaciones permanece constante, no hay transferencia de energía entre ellas, y  $z(t)$  y  $\theta(t)$  son también funciones periódicas.

El objetivo de este trabajo consiste en presentar una nueva descripción analítica del péndulo de Wilberforce en la que se muestran las ecuaciones de movimiento de una forma más compacta, cubriendo de una forma más directa la casuística del movimiento del péndulo. Un sencillo análisis dimensional nos permitirá cuantificar el grado de acoplamiento entre los dos grados de libertad, y definir cuándo éste es débil o fuerte.

## 2. Ecuaciones de movimiento y frecuencias propias

Las ecuaciones de movimiento del sistema son [2]:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m} \theta = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\delta}{I} \theta + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{I} z = 0. \quad (5)$$

Eliminando la variable  $z$  en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, y suponiendo una solución del tipo  $\theta(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ , se puede obtener la ecuación bicuadrada:

$$\omega^4 - (\omega_z^2 + \omega_\theta^2) \omega^2 + \left[ \omega_z^2 \omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI} \right] = 0, \quad (6)$$

cuyas soluciones son las frecuencias propias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del movimiento vibratorio [2]:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_z^2 + \omega_\theta^2 + \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (7)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_z^2 + \omega_\theta^2 - \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (8)$$

con  $\omega_1 > \omega_2$ , y ambas dependientes de las constantes  $k$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  y  $m$ , y del parámetro variable  $I$ .

A partir de las propiedades de las raíces de la ecuación bicuadrada  $\omega^4 - b\omega^2 + c = 0$  (Ec. (6)), se pueden obtener las siguientes relaciones entre las frecuencias naturales ( $\omega_z$  y

---

<sup>2</sup> Decimos ‘normal’ en el sentido de que cada grado de libertad se comporta como lo haría *normalmente* un oscilador desacoplado.

$\omega_\theta$ ) y las frecuencias propias<sup>3</sup> ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ):

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = b = \omega_z^2 + \omega_\theta^2, \quad (9)$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = c = \omega_z^2 \omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI}, \quad (10)$$

y restando las ecuaciones (7) y (8):

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}}. \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que la solución general para la variable  $\theta$  es una combinación de las dos frecuencias propias:  $\theta(t) = A \text{sen}(\omega_1 t) + B \text{cos}(\omega_1 t) + C \text{sen}(\omega_2 t) + D \text{cos}(\omega_2 t)$ ; y considerando las siguientes condiciones iniciales: posiciones  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $z(0) = z_0$ ; y velocidades  $\dot{\theta}(0) = 0$  y  $\dot{z}(0) = 0$ , resulta:

$$\theta(t) = B \text{cos}(\omega_1 t) + D \text{cos}(\omega_2 t), \quad (12)$$

con  $A = C = 0$ .

Haciendo lo propio con la variable  $z$ :

$$z(t) = B' \text{cos}(\omega_1 t) + D' \text{cos}(\omega_2 t), \quad (13)$$

donde las constantes  $B$ ,  $D$ ,  $B'$  y  $D'$ , tienen los siguientes valores que dependen de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , y de una forma muy particular, como se verá a continuación, de las condiciones iniciales<sup>4</sup>  $\theta_0$  y  $z_0$ :

$$B = -\frac{\frac{\epsilon z_0}{2I} - (\omega_2^2 - \omega_\theta^2) \theta_0}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad ; \quad D = \frac{\frac{\epsilon z_0}{2I} - (\omega_1^2 - \omega_\theta^2) \theta_0}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad (14)$$

$$B' = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_1^2 - \omega_\theta^2) B \quad ; \quad D' = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_2^2 - \omega_\theta^2) D. \quad (15)$$

### 3. Estudio analítico del movimiento del péndulo

Los movimientos vibratorios torsional  $\theta(t)$  (Ec. (12)) y longitudinal  $z(t)$  (Ec. (13)) son, en general, funciones no periódicas que dependen de las constantes  $k$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  y  $m$ , del parámetro variable  $I$ , y de las condiciones iniciales  $\theta_0$  y  $z_0$ .

En las situaciones en las que las condiciones iniciales del movimiento cumplan unas determinadas relaciones  $z_0 = f(\theta_0)$  (que son, como se verá, las correspondientes a los dos

---

<sup>3</sup> Véase que  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq 0$  si  $c \neq 0$ . Si  $c = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  y  $\omega_1 = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2} = \sqrt{b}$ .

<sup>4</sup> Véase también que las frecuencias propias, Ecs. (7) y (8), no dependen de las condiciones iniciales.

modos normales de vibración), o las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$  sean parecidas, se tendrá que  $\theta(t)$  y  $z(t)$  serán funciones periódicas. Es cierto también que serán periódicas cuando las frecuencias propias sean conmensurables, esto es, en el caso en que la razón  $\omega_1/\omega_2$  sea un número racional, relación que, en principio, no tiene por qué ocurrir.

Teniendo en cuenta relaciones trigonométricas sencillas<sup>5</sup>, y que las constantes  $B$  y  $D$ , y  $B'$  y  $D'$  cumplen las siguientes relaciones:

$$D + B = \theta_0, \quad (16)$$

$$D' + B' = z_0, \quad (17)$$

las ecuaciones de movimiento (12) y (13) pueden reescribirse de una forma más completa, como sigue:

$$\theta(t) = (\theta_0 - 2B) \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t) + \theta_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t) = \theta_1(t) + \theta_2(t), \quad (18)$$

$$z(t) = (z_0 - 2B') \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t) + z_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t) = z_1(t) + z_2(t), \quad (19)$$

donde  $\omega_+ = (\omega_1 + \omega_2)/2$  y  $\omega_- = (\omega_1 - \omega_2)/2$ .

Escritas así, las ecuaciones de movimiento (18) y (19), que sólo dependen de una constante por determinar y no de dos, como en el caso de las ecuaciones (12) y (13), cubren de una forma más directa la casuística del movimiento del péndulo. A partir de ellas será, por tanto, mucho más sencillo obtener las ecuaciones de los casos particulares del movimiento, a saber: modos normales de vibración, situación de resonancia, o situación en la que uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo ( $\theta_0 = 0$  o  $z_0 = 0$ ).

Cuando las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$  sean parecidas, se observa que las funciones  $\theta(t)$  y  $z(t)$  son funciones periódicas, como puede verse en las representaciones de la figura 2 (curva azul), que presentan el fenómeno de amplitud modulada o pulsación<sup>6</sup> (envolvente de las oscilaciones, curva roja).

El fenómeno de la amplitud modulada de  $\theta(t)$ , dado por la Ec. (18), puede entenderse como la suma de dos movimientos también modulados,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , ambos de frecuencia angular  $\omega_+$  y amplitudes moduladas, respectivamente,  $(\theta_0 - 2B) \operatorname{sen}(\omega_- t)$  y  $\theta_0 \cos(\omega_- t)$ , desfasados  $\pi/2$  o un cuarto de sus periodos moduladores  $T_- = 2\pi/\omega_-$ . Las curvas envolventes de las oscilaciones  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  se han representado en el panel superior de la figura 2 (curvas negra discontinua y negra continua, respectivamente).

De forma análoga, el movimiento de  $z(t)$ , dado por la Ec. (19), puede entenderse como la superposición de dos movimientos modulados,  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ , ambos de frecuencia  $\omega_+$

---

<sup>5</sup>  $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ;  $-\cos\alpha + \cos\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}$ .

<sup>6</sup> También se conoce con el nombre de batimiento.

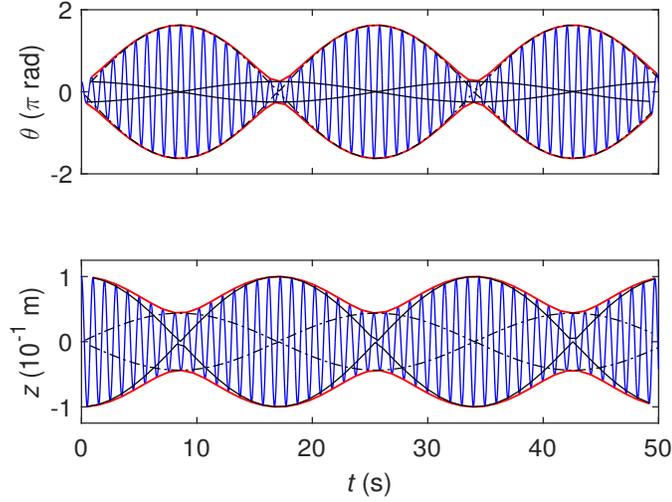


Figura 2: Posición de la pesa  $\theta(t)$  y  $z(t)$  con frecuencias naturales parecidas ( $\omega_z \simeq \omega_\theta$ ), y condiciones iniciales  $\theta_0 = \pi/4$  rad y  $z_0 = 0,1$  m.

y amplitudes moduladas, respectivamente,  $(z_0 - 2B') \text{sen}(\omega_- t)$  y  $z_0 \text{cos}(\omega_- t)$ , desfasados, igualmente, un cuarto de sus periodos  $T_-$ . Las curvas envolventes de las oscilaciones  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  se han representado en el panel inferior de la figura 2 (curvas negra discontinua y negra continua, respectivamente).

Comparando las dos representaciones de  $\theta(t)$  y  $z(t)$  (Fig. 2), se observa que sus respectivas amplitudes moduladas están desfasadas un cuarto de  $T_-$ , lo que provoca que haya una transferencia de energía entre los dos osciladores [4]. Durante un cuarto del periodo  $T_-$  la amplitud modulada de uno de ellos disminuye y la del otro aumenta, dando lugar a una transferencia de energía del primero al segundo. Durante el siguiente cuarto del periodo  $T_-$ , la situación se invierte y la energía se transfiere del segundo al primero. El proceso se repite de forma periódica con un periodo  $T_p = T_-/2$ , por lo que la frecuencia de transferencia de energía entre los dos osciladores, conocida como frecuencia de pulsación o batimiento<sup>7</sup>, será  $w_p = \omega_1 - \omega_2$ .

Se observa que la diferencia de amplitud máxima de  $\theta(t)$  (Ec. (18)), se corresponde con la diferencia de las amplitudes máximas de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , esto es,  $|\theta_0 - (\theta_0 - 2B)| = |2B|$ , lo que indica que la energía intercambiada por el grado de libertad torsional será mayor cuanto mayor sea el valor de la constante  $|B|$ . Por el mismo razonamiento físico, la energía intercambiada por el grado de libertad longitudinal (Ec. (19)), será mayor cuanto mayor sea el valor de la constante  $|B'|$ .

---

<sup>7</sup> También se conoce con el nombre de frecuencia de batido.

### 3.1. Modos normales de vibración

En las situaciones en las que las condiciones iniciales del movimiento cumplan unas determinadas relaciones<sup>8</sup>  $z_0 = f_i(\theta_0)$ , con  $i = 1$  y  $2$ , el movimiento periódico de los osciladores  $\theta(t)$  y  $z(t)$  se realiza sin transferencia de energía entre ellos. A estos modos de vibrar se les denominan modos normales de vibración.

El primer modo normal de vibración, denominado MN1 por tener frecuencia  $\omega_1$ , se obtiene cuando  $D = D' = 0$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre el ángulo inicial  $\theta_0 = B$  (de la Ec. (16)), y la posición inicial  $z_{01} = B'$  (de la Ec. (17)), resulta:

$$z_{01} = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_1^2 - \omega_\theta^2) \theta_0, \quad (20)$$

como puede verse en la primera de las ecuaciones de (15).

Las ecuaciones de movimiento (12) y (13), o las (18) y (19) teniendo en cuenta la relación trigonométrica mencionada anteriormente, se transforman en:

$$\theta(t)_{MN1} = \theta_0 \cos(\omega_1 t), \quad (21)$$

$$z(t)_{MN1} = z_{01} \cos(\omega_1 t), \quad (22)$$

que no presenta el fenómeno de amplitud modulada (Fig. 3, paneles izquierdos), por lo que no hay transferencia de energía de un grado de libertad al otro. En esta situación, los dos osciladores vibran con igual frecuencia  $\omega_1$  (mayor que las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$ ), en fase ya que  $\text{sgn}(z_{01}) = \text{sgn}(\theta_0)$ , y lo hacen, en términos de energía, como lo harían normalmente dos osciladores desacoplados de constantes elásticas efectivas:  $k_1 = k + \epsilon\theta_0/(2z_{01})$  y  $\delta_1 = \delta + \epsilon z_{01}/(2\theta_0)$ ; energías efectivas:  $E_{\theta_1} = \frac{1}{2}\delta_1\theta_0^2$  y  $E_{z_1} = \frac{1}{2}k_1 z_{01}^2$  (con  $\omega_1^2 = \delta_1/I = k_1/m$ ); y energía total:  $E_1 = E_{\theta_1} + E_{z_1}$ , manteniéndose constante la energía de cada grado de libertad.

El segundo modo normal de vibración, denominado MN2 por tener frecuencia  $\omega_2$ , se obtiene cuando  $B = B' = 0$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre el ángulo inicial  $\theta_0 = D$  (de la Ec. (16)), y la posición inicial  $z_{02} = D'$  (de la Ec. (17)), resulta:

$$z_{02} = \frac{2I}{\epsilon} (\omega_2^2 - \omega_\theta^2) \theta_0, \quad (23)$$

como puede verse en la segunda de las ecuaciones de (15).

Las ecuaciones de movimiento (12) y (13), o (18) y (19), de forma análoga a como se ha

---

<sup>8</sup> Tantas relaciones como grados de libertad presente el sistema.

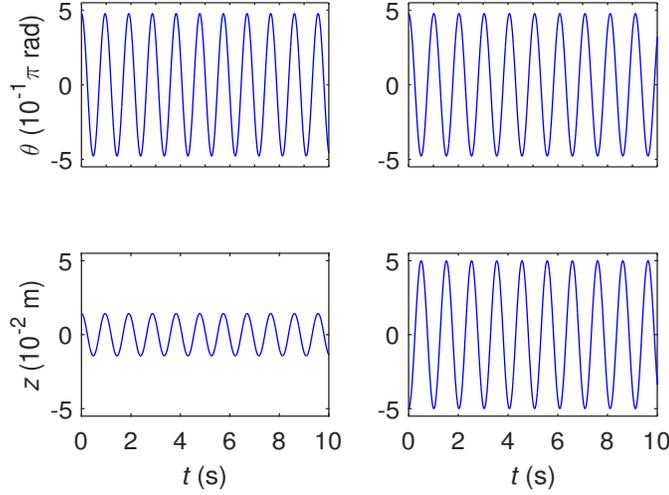


Figura 3: MN1 (paneles izquierdos, en fase) y MN2 (paneles derechos, en contrafase), obtenidos con las condiciones iniciales  $z_{01}$  y  $z_{02}$  con un mismo valor de  $\theta_0 = 1,5$  rad.

procedido con el MN1, se transforman para el MN2 en:

$$\theta(t)_{MN2} = \theta_0 \cos(\omega_2 t), \quad (24)$$

$$z(t)_{MN2} = z_{02} \cos(\omega_2 t), \quad (25)$$

que tampoco presenta el fenómeno de amplitud modulada (Fig. 3, paneles derechos), ni hay transferencia de energía. En esta situación, los dos osciladores vibran con igual frecuencia  $\omega_2$  (menor que las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$ ), en oposición de fase ya que  $\text{sgn}(z_{02}) \neq \text{sgn}(\theta_0)$ , y lo hacen, en términos de energía, como lo harían normalmente dos osciladores desacoplados de constantes elásticas efectivas:  $k_2 = k + \epsilon\theta_0/(2z_{02})$  y  $\delta_2 = \delta + \epsilon z_{02}/(2\theta_0)$ ; energías efectivas:  $E_{\theta_2} = \frac{1}{2}\delta_2 \theta_0^2$  y  $E_{z_2} = \frac{1}{2}k_2 z_{02}^2$  (con  $\omega_2^2 = \delta_2/I = k_2/m$ ); y energía total:  $E_2 = E_{\theta_2} + E_{z_2}$ , manteniéndose constante, igualmente, la energía de cada grado de libertad.

Obsérvese que las ecuaciones de movimiento (12) y (13), o las (18) y (19), se pueden expresar como combinación lineal de los modos normales de vibración, y que mientras no se conozca la constante de acoplamiento  $\epsilon$  no podremos obtener, en función de  $\theta_0$ , las condiciones iniciales  $z_{01}$  o  $z_{02}$  a partir de las ecuaciones (20) o (23), respectivamente, y reproducir experimentalmente uno cualquiera de dichos modos normales.

### 3.2. Movimiento del péndulo cuando $\theta_0 = 0$ o $z_0 = 0$

Cuando uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo ( $\theta_0 = 0$  o  $z_0 = 0$ ), las ecuaciones de movimiento (18) y (19) se simplifican mucho, y es en esta situación en la

que la descripción analítica presentada en este trabajo, expresada explícitamente en función de las condiciones iniciales, es más completa que la dada por las ecuaciones (12) y (13). Es importante indicar, que la clave de esta nueva descripción analítica radica en las relaciones presentadas entre las constantes de las ecuaciones de movimiento ( $B$ ,  $D$ ,  $B'$  y  $D'$ ), y las condiciones iniciales ( $\theta_0$  y  $z_0$ ), dadas por las Ecs. (16) y (17).

Cuando  $\theta_0 = 0$  y  $z_0 \neq 0$  (desplazamiento vertical de la pesa sin girar la varilla), las ecuaciones de movimiento (18) y (19) se expresan en función de  $z_0$ :

$$\theta(t)_{\theta_0=0} = B_0 \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t), \quad (26)$$

$$z(t)_{\theta_0=0} = \frac{\omega_z^2 - \omega_\theta^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} z_0 \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t) + z_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t), \quad (27)$$

con  $B_0 = -2B(\theta_0 = 0) = \frac{\epsilon}{I(\omega_2^2 - \omega_1^2)} z_0$ , que expresadas como combinación lineal de los modos normales, resultan:

$$\theta(t)_{\theta_0=0} = -\frac{B_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)), \quad (28)$$

$$z(t)_{\theta_0=0} = \frac{\omega_\theta^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} z_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{\omega_2^2 - \omega_\theta^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} z_0 \cos(\omega_2 t). \quad (29)$$

Análogamente, cuando  $\theta_0 \neq 0$  y  $z_0 = 0$  (giro de la varilla sin desplazar la pesa), las ecuaciones de movimiento (18) y (19) quedan en función de  $\theta_0$ :

$$\theta(t)_{z_0=0} = \frac{\omega_\theta^2 - \omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \theta_0 \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t) + \theta_0 \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t), \quad (30)$$

$$z(t)_{z_0=0} = B'_0 \operatorname{sen}(\omega_- t) \operatorname{sen}(\omega_+ t), \quad (31)$$

con  $B'_0 = -2B'(z_0 = 0) = \frac{\epsilon}{m(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \theta_0$ , que expresadas como combinación lineal de los modos normales, resultan:

$$\theta(t)_{z_0=0} = \frac{\omega_2^2 - \omega_\theta^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \theta_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{\omega_\theta^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \theta_0 \cos(\omega_2 t), \quad (32)$$

$$z(t)_{z_0=0} = -\frac{B'_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)). \quad (33)$$

### 3.3. Resonancia

Nótese que al ser el momento de inercia total del sistema  $I$  función de la distancia  $d$  (Ec. (1)), también lo será  $\omega_\theta(d) = \delta/I$ , y que, por tanto, las frecuencias naturales serán iguales ( $\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$ ) para una determinada posición  $d_r$  de los deslizadores:  $d_r =$

$\sqrt{\left(\frac{\delta m}{k} - I_0\right) / (2m_d)}$ . Cuando esto ocurre se dice que el sistema está en resonancia.

En esta situación, las expresiones (7) y (8) para obtener las frecuencias propias se simplifican sobremanera:

$$\omega_{1r}^2 = \omega_r^2 + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4mI_r}}, \quad (34)$$

$$\omega_{2r}^2 = \omega_r^2 - \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4mI_r}}, \quad (35)$$

donde  $I_r$  es el momento de inercia en resonancia. Esta simplificación se traduce en expresiones más sencillas para las constantes (que no dependen de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ ):

$$B_r = \sqrt{\frac{m}{I_r}} \frac{z_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} \quad ; \quad D_r = -\sqrt{\frac{m}{I_r}} \frac{z_0}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \quad (36)$$

$$B'_r = \sqrt{\frac{I_r}{m}} B_r = \sqrt{\frac{I_r}{m}} \frac{\theta_0}{2} + \frac{z_0}{2} \quad ; \quad D'_r = -\sqrt{\frac{I_r}{m}} D_r = -\sqrt{\frac{I_r}{m}} \frac{\theta_0}{2} + \frac{z_0}{2}, \quad (37)$$

y para los coeficientes de las ecuaciones de movimiento (18) y (19):  $\theta_0 - 2B_r = -\sqrt{m/I_r} z_0$ , y  $z_0 - 2B'_r = -\sqrt{I_r/m} \theta_0$ , que se transforman en:

$$\theta(t)_r = -\sqrt{\frac{m}{I_r}} z_0 \text{sen}(\omega_- t) \text{sen}(\omega_+ t) + \theta_0 \text{cos}(\omega_- t) \text{cos}(\omega_+ t) = \theta_1^{(r)}(t) + \theta_2^{(r)}(t), \quad (38)$$

$$z(t)_r = -\sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0 \text{sen}(\omega_- t) \text{sen}(\omega_+ t) + z_0 \text{cos}(\omega_- t) \text{cos}(\omega_+ t) = z_1^{(r)}(t) + z_2^{(r)}(t), \quad (39)$$

cuya dependencia temporal se ha representado en la figura 4.

Obsérvese que en la situación en la que uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo ( $\theta_0 = 0$  o  $z_0 = 0$ ), las ecuaciones de movimiento (38) y (39) se simplifican significativamente, lo que indica que nuestra descripción analítica es más completa que la presentada generalmente en la literatura [2, 3].

De acuerdo con la Ec. (11), la diferencia  $\omega_1^2 - \omega_2^2$  se hace mínima en resonancia, lo que hace que, para unos valores dados de las condiciones iniciales, las constantes  $B$  (Ec. (14)), y  $B'$  (Ec. (15)), que son proporcionales al cambio de amplitudes en  $\theta(t)$  y  $z(t)$ , alcancen sus valores máximos,  $B_r$  y  $B'_r$ , respectivamente, cuando  $\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$ . Se tiene, por tanto, que la energía transferida alcanza también su valor máximo en resonancia.

En esta situación de resonancia, el primer modo normal de vibración se obtiene cuando  $D_r = D'_r = 0$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre el ángulo inicial

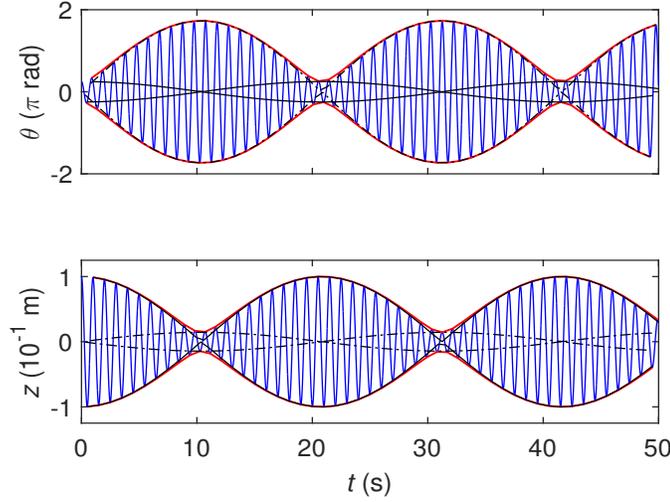


Figura 4: Posición de la pesa  $\theta(t)$  y  $z(t)$  en la situación de resonancia con condiciones iniciales  $\theta_0 = \pi/4$  rad y  $z_0 = 0,1$  m. El código de colores es el mismo que en la figura 2.

$\theta_0 = B_r$  (de la Ec. (16)), y la posición inicial  $z_{01}^{(r)} = B_r'$  (de la Ec. (17)), resulta:

$$z_{01}^{(r)} = \sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0. \quad (40)$$

como puede verse en la primera ecuación de (37). Las ecuaciones de movimiento del MN1r se obtienen sustituyendo  $z_{01}$  por  $z_{01}^{(r)}$  en las ecuaciones (21) y (22).

El segundo modo normal de vibración se obtiene cuando  $B_r = B_r' = 0$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, la relación entre el ángulo inicial  $\theta_0 = D_r$  (de la Ec. (16)), y la posición inicial  $z_{02}^{(r)} = D_r'$  (de la Ec. (17)), resulta:

$$z_{02}^{(r)} = -\sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0. \quad (41)$$

como puede verse en la segunda ecuación de (37). Las ecuaciones de movimiento del MN2r se obtienen sustituyendo  $z_{02}$  por  $z_{02}^{(r)}$  en las ecuaciones (24) y (25).

Nótese que no es necesario conocer la constante de acoplamiento  $\epsilon$  para obtener las condiciones iniciales, a partir de las ecuaciones (40) o (41), y observar experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales de vibración.

La figura 5 muestra la situación de resonancia cuando  $\theta_0 = 0$  (paneles izquierdos) y cuando  $z_0 = 0$  (paneles derechos), donde se puede observar claramente la transferencia periódica de energía entre los dos modos de vibración. La varilla, inicialmente en su posición de equilibrio  $\theta_0 = 0$  (paneles izquierdos), comienza a rotar y alcanza su giro máximo  $|\theta_{max}| =$

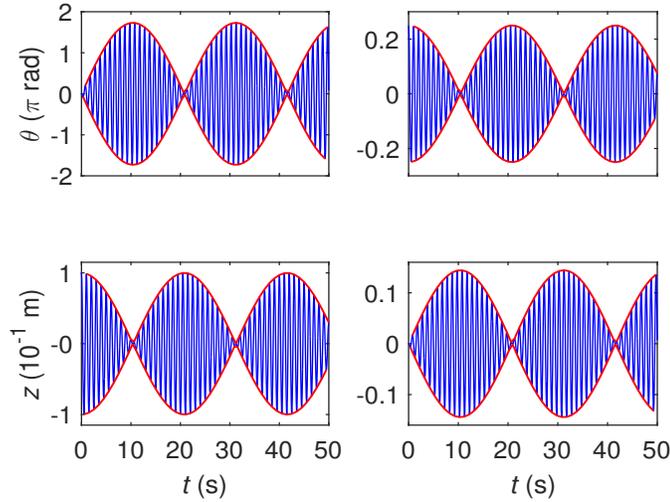


Figura 5: Posición de la pesa  $\theta(t)$  y  $z(t)$  en resonancia con condiciones iniciales  $\theta_0 = 0$  y  $z_0 = 0,1$  m (paneles izquierdos),  $\theta_0 = \pi/4$  rad y  $z_0 = 0$  (paneles derechos).

$|2B_r| = \sqrt{\frac{m}{I_r}} z_0$ , cuando la pesa no se desplaza. Por otro lado, la pesa, que inicialmente está en su posición de equilibrio  $z_0 = 0$  (paneles derechos), comienza a desplazarse hasta alcanzar su desplazamiento máximo  $|z_{max}| = |2B'_r| = \sqrt{\frac{I_r}{m}} \theta_0$ , cuando la varilla no gira.

## 4. Conclusiones

En la descripción realizada del péndulo de Wilberforce se ha tratado el principio de conservación de la energía y los fenómenos de pulsación y resonancia en oscilaciones acopladas. Se ha estudiado, asimismo, una descripción analítica en la que las ecuaciones de movimiento se expresan explícitamente en función de las condiciones iniciales, lo que nos permite obtener de forma inmediata las ecuaciones en los casos particulares del movimiento del péndulo, a saber: modos normales de vibración, situación de resonancia, o situación en la que uno de los dos valores de las condiciones iniciales sea nulo.

La naturaleza nos muestra múltiples sistemas de osciladores acoplados como, por ejemplo, la molécula de agua que presenta una configuración triangular y tres modos normales; o la molécula de dióxido de carbono, con una configuración lineal y cuatro modos normales. De acuerdo con la descripción estudiada en este trabajo, el movimiento de los osciladores acoplados está caracterizado por una transferencia de energía entre ellos.

Podemos, por tanto, definir un parámetro adimensional que nos indique cuándo dicho acoplamiento es fuerte o débil. En el caso particular del péndulo de Wilberforce, la energía transferida entre los dos osciladores será pequeña o grande cuando lo sea en relación a la energía de cada uno de los osciladores desacoplados, esto es,  $E_\theta = \frac{1}{2} \delta \theta_0^2$  y  $E_z = \frac{1}{2} k z_0^2$ . Con

ello en mente, se puede definir el parámetro adimensional  $\xi = \epsilon^2 / (k\delta)$ , que nos da cuenta del grado de acoplamiento entre ellos: fuerte, cuando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_{max} = 2\sqrt{k\delta}$  o  $\xi \rightarrow 4$ ; y débil, cuando  $\xi \rightarrow 0$ . El valor de  $\epsilon_{max}$  es aquel que hace que el parámetro  $c$  de la ecuación bicuadrada (Ec. (6)) sea nulo.

Es necesario, por tanto, desarrollar un análisis que nos permita determinar el parámetro de acoplamiento  $\xi$  entre los distintos grados de libertad del sistema, y realizar un estudio del movimiento de osciladores acoplados en función de su grado de acoplamiento, esto es, haciendo que el parámetro de acoplamiento  $\xi$  sea un parámetro variable.

Una interfaz de libre acceso ha sido creada para los lectores interesados [5]. En ella se reproduce teóricamente el movimiento del péndulo de Wilberforce en función de los parámetros  $k, m, \delta, I_0, m_d, d, \epsilon, z_0$  y  $\theta_0$ .

## Referencias

- [1] L. R. WILBERFORCE, On the vibrations of a loaded spiral spring. *Philos. Mag.* 38, 386 (1894).
- [2] R. E. BERG, T. S. MARSHALL, Wilberforce pendulum oscillations and normal modes. *Am. J. Phys.* 59, 32 (1991);
- [3] ÁNGEL FRANCO GARCÍA, Departamento de Física Aplicada I. Universidad del País Vasco. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/wilberforce/wilberforce.html>
- [4] M. ALONSO, E. J. FINN, *Fundamental University Physics, Vol. 1, Mechanics*. Ed. Addison-Wesley Publishing Co. ISBN: 0-201-00227-2.
- [5] RAFAEL CABALLERO FLORES, Departamento de Física. Universidad de Oviedo. <https://www.unioviado.es/rafaelcaballero/>