

ANÁLISIS DE ERRORES EN LAS MEDIDAS

R. Caballero-Flores
Dpto. de Física, Universidad de Oviedo
<https://www.unioviedo.es/rafaelcaballero/>

Índice

1. Introducción	3
2. Precisión y exactitud	5
3. Errores sistemáticos y aleatorios	7
4. Error absoluto y error relativo	9
4.1. Error absoluto	9
4.2. Error relativo	10
5. Cifras significativas	10
5.1. Cifras significativas de las operaciones matemáticas	12
6. Redondeo de números	13
7. Estimación de la incertidumbre en medidas directas	15
7.1. Una sola medida de la magnitud X	15
7.2. N medidas de la magnitud X	16
8. Estimación de la incertidumbre en medidas indirectas: propagación de errores	24
8.1. Todas las variables primarias proceden de una sola medida o un número pequeño de ellas	24
8.2. Todas las variables primarias son obtenidas por procedimientos estadísticos . .	26
8.3. Algunas de las variables primarias proceden de una sola medida o un número pequeño de ellas, y otras han sido obtenidas por procedimientos estadísticos .	30

9. Estimación de la incertidumbre debida a los errores sistemáticos	30
Apéndice: Simulación de \bar{x} , $\sigma(x)$ y $\sigma(\bar{x})$	32
Bibliografía	33

R. Caballero-Flores. 1era Versión (2019)

1. Introducción

La importancia del análisis de errores en las medidas radica en que las ciencias experimentales basan sus leyes en la medida de las magnitudes que les son propias. En el caso particular de la Física, el estudio de cualquier fenómeno físico involucra el cambio de una magnitud que, tras medirla y encontrar una relación con las demás, nos permite establecer la correspondiente ley fenomenológica.

Toda medida (o determinación cuantitativa) de una magnitud X conlleva la comparación con un patrón de referencia al que denominamos unidad. El resultado de dicha comparación se expresa de forma conjunta como:

$$\text{medida de } X : x = x_{opt} + \text{unidad}, \tag{1}$$

donde x_{opt} es el resultado numérico considerado como óptimo tras el proceso de medida, obtenido, bien de forma directa a partir de la realización de una sola o varias medidas, bien de forma indirecta a partir de una otra o varias magnitudes (Fig. 1).

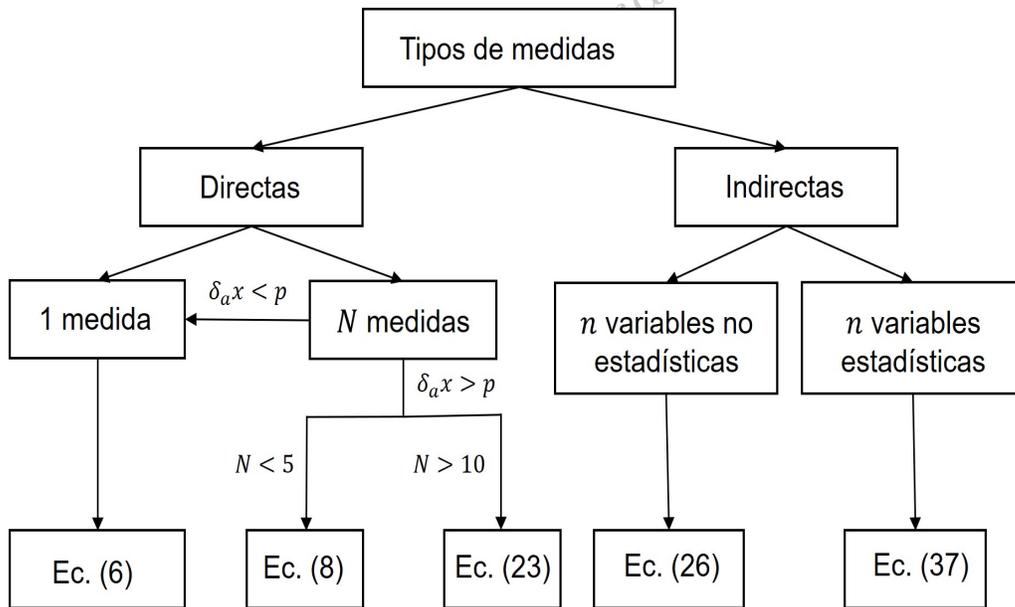


Figura 1: Tipos de medidas experimentales y las ecuaciones correspondientes para estimar su incertidumbre δx . El significado de $\delta_a x$ y p se verá en los siguientes epígrafes.

Es importante reseñar que el valor numérico x_{opt} de la expresión (1) depende de la unidad utilizada. Por ejemplo, en la medida de un ángulo, $\alpha_{opt} = 180^\circ = \pi$ rad, los valores 180 o π por sí solos no indican nada y, por tanto, no indicar la unidad de la medida equivale a no mencionar qué magnitud estamos midiendo.

Decimos que la medida de la magnitud X es directa cuando se obtiene por comparación directa con el patrón elegido, leyendo la escala analógica o digital del instrumento utilizado.

Ej.: la longitud de un objeto medida con una regla, la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos medida con un voltímetro, o la masa de un cuerpo medida con una balanza.

En muchas ocasiones no es posible realizar una medida directa de una magnitud, sino que es necesario medir otras magnitudes y utilizar alguna relación matemática entre ellas. Se dice entonces que la medida es indirecta. Ej.: el volumen de una esfera a partir de su radio y la aplicación de la relación $V = 4/3\pi r^3$, o la densidad de un objeto a partir de las medidas de su masa y su volumen, y la relación $\rho = m/V$.

De acuerdo con ello, el resultado numérico considerado como óptimo tras el proceso de la medida x_{opt} , puede obtenerse, bien de forma directa a partir de la realización de una o N medidas x_i (con $i = 1, 2, \dots, N$); bien de forma indirecta a partir de una o n magnitudes primarias z_j (con $j = 1, 2, \dots, n$), que previamente han sido obtenidas de forma directa (procedentes de una o N medidas), y la utilización de la relación matemática entre ellas $x = f(z_j)$.

Como veremos más adelante, si N es lo suficientemente grande para poder usar la Estadística Matemática, consideraremos a la magnitud X , o a las magnitudes z_j , como una variable estadística, en caso contrario, como una variable no estadística. Nótese que en función de si la medida es directa (medida una o N veces) o indirecta (dependiente de n variables estadísticas o no estadísticas), podremos diferenciar 5 tipos de medidas tal como se refleja en la figura 1, cuyo organigrama es el que seguiremos en este texto.

En cualquier caso, es válido aceptar que la medida nunca nos permite obtener el valor “verdadero” de la magnitud que se mide. El valor numérico resultante x_{opt} no es un número exacto, sino que conlleva, inevitablemente, cierta incertidumbre δx que depende del proceso de medida. A δx se le denomina también indeterminación, imprecisión, o simplemente error de la medida de X .

Al no ser posible conocer el valor verdadero, se opta por expresar el resultado de una medida como:

$$\text{medida de } X : x = x_{opt} \pm \delta x + \text{unidad}, \quad (2)$$

indicando así que el experimentador está “razonablemente seguro” de que el valor verdadero x_v de la medida de la magnitud X está en el intervalo definido por $x_{opt} - \delta x$ y $x_{opt} + \delta x$, denominado margen de incertidumbre o margen de error, esto es, $x_v \in [x_{opt} - \delta x, x_{opt} + \delta x]$.

Por conveniencia, la magnitud expresada por δx se define siempre positiva, tiene la misma dimensión que la magnitud medida y se refiere a la misma unidad. Por ahora nos quedamos con que el valor relativo de δx comparado con x_{opt} debe ser pequeño ($\delta x \ll x_{opt}$), y su valor absoluto de unas cuantas unidades o fracciones, expresadas con una sola cifra diferente de cero¹, de la unidad empleada en la medida.

Es importante indicar que si queremos realizar una medida más “fina” de la magnitud X , esto es, una medida con un valor relativo de δx más pequeño, tendremos que cambiar el

¹ Más adelante veremos que δx se puede expresar con dos cifras (si las hay) cuando la primera sea un 1, o, siendo un 2, la segunda no es mayor que 5.

proceso de medida, no vale con cambiar la unidad de medida empleada. Cambiar el proceso de medida conlleva, bien cambiar el instrumento de medida, bien las operaciones experimentales realizadas en él. Por ejemplo, podemos obtener una medida más "fina" del diámetro de un cilindro $\phi = 14.5 \pm 0.5$ cm, medido con una regla graduada en cm, cambiando el instrumento de medida y obtener, por ejemplo, $\phi = 14.315 \pm 0.005$ cm, medido con un calibre. No indicar δx en el resultado de la medida equivale a no especificar el proceso de medida utilizado.

Vemos, pues, que en las ciencias experimentales el concepto de "error en las medidas" no es sinónimo de "equivocación" sino que, más bien, refleja la inevitable incertidumbre de cualquier medida, que no puede eliminarse totalmente pero sí puede minimizarse optimizando el proceso de medida.

Por tanto, cuando medimos una magnitud física X , la cantidad numérica que la describe depende de la unidad empleada, del instrumento de medida utilizado, del tipo (directa o indirecta) y del número N de medidas realizadas, y del método matemático usado para obtener el valor x_{opt} . Todo ello constituye el proceso de medida y es éste el que determina su incertidumbre δx . Cómo determinar la incertidumbre δx de una medida es el objetivo principal de estas notas de clase.

2. Precisión y exactitud

Generalmente las palabras precisión y exactitud tienen el mismo significado pero en la teoría de errores son dos conceptos bien diferenciados. Para aclarar estos conceptos imaginemos el siguiente experimento mental. Pensemos en el juego de los dardos (Fig. 2), y consideremos una jugada (medida) de un mismo tirador (experimentador), que consiste en realizar N tiradas (repeticiones de la misma medida) usando cuatro técnicas (procesos de medidas) diferentes. ¿Cómo podemos cuantificar la calidad de las técnicas (los procesos de medidas) usadas(os) por el tirador (experimentador)?

Si tenemos en cuenta que el objetivo de la tirada (medida) consiste en alcanzar el centro de la diana (conocer el valor x_v , *a priori* desconocido), podemos cuantificar la calidad de cada técnica de lanzamiento (proceso de medida) atendiendo, por un lado, a la proximidad al centro de la diana (valor verdadero x_v), y, por otro, a la proximidad entre sí (reproducibilidad) de las N tiradas (medidas).

Como se observa en la figura 2, por definición, la exactitud de una medida es una indicación de la proximidad al valor verdadero, y la precisión de la misma es una indicación de su reproducibilidad (independientemente de su proximidad al valor verdadero). Volveremos a discutir la figura 2 en breve.

De acuerdo con lo anterior (véase la figura 3), para describir cuantitativamente una medida es necesario, por un lado, definir la circunferencia de radio $\delta_a x$ y centro x_{opt} , que encierre todos los valores x_i y que dé cuenta de la dispersión de los valores x_i respecto del valor

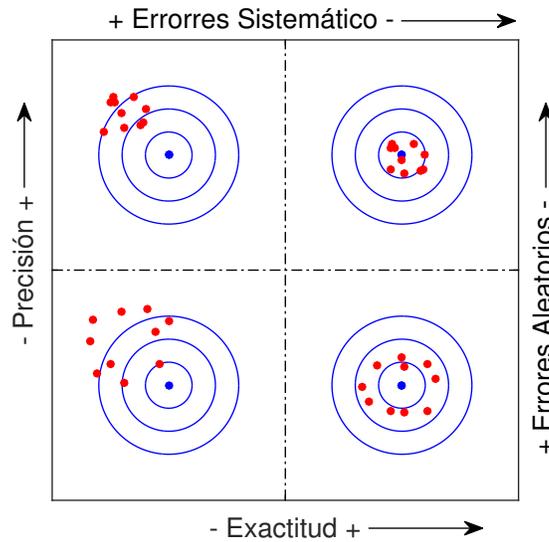


Figura 2: Ilustración cualitativa de la precisión, exactitud, errores aleatorios y sistemáticos en las medidas experimentales.

óptimo x_{opt} (que obtendremos mediante algún método matemático), y, por otro, definir la desviación $\delta_s x = |x_{opt} - x_v|$ del resultado obtenido x_{opt} respecto del valor verdadero x_v (que no conocemos). Las magnitudes $\delta_s x$ y $\delta_a x$ se definen siempre positiva, tienen la misma dimensión y la misma unidad que la magnitud medida.

La desviación $\delta_s x$ es una indicación de la exactitud de una medida (de la proximidad de x_{opt} a x_v), y la dispersión $\delta_a x$ es una indicación de la precisión de la medida (de la proximidad de los valores x_i entre sí o a x_{opt}). En la teoría de errores es esencial conocer cuál de las dos incertidumbres recién definidas, $\delta_s x$ o $\delta_a x$, es mayor (Fig. 3).

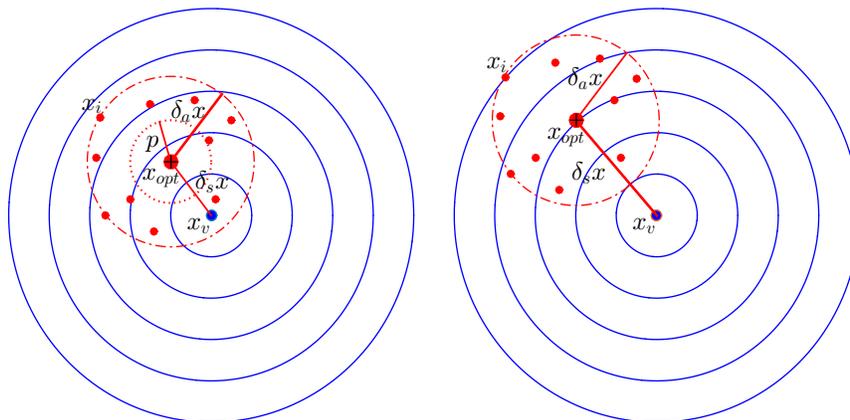


Figura 3: Dispersión de los valores x_i respecto del valor óptimo x_{opt} ($\delta_a x$), y desviación de x_{opt} respecto del valor verdadero x_v ($\delta_s x$). Consideramos los casos en que $\delta_a x > \delta_s x$ (izquierda), y $\delta_a x < \delta_s x$ (derecha).

3. Errores sistemáticos y aleatorios

Entre los posibles errores que afectan a las medidas suelen distinguirse principalmente dos grupos: errores sistemáticos², que son los que afectan a la desviación $\delta_s x$; y los errores aleatorios³, que son los que afectan a la dispersión $\delta_a x$.

Errores sistemáticos $\delta_s x$

Son los errores debidos a factores que permanecen constantes en el transcurso del experimento afectando a los resultados, por tanto, siempre en el mismo sentido: o bien siempre sobrestiman el valor verdadero x_v , o bien siempre lo subestiman. Son difíciles de detectar ya que sus efectos se repiten constantemente al repetir la medida.

Se pueden distinguir varias fuentes: errores de calibración (la aguja de un aparato analógico no marca 0 inicialmente), condiciones experimentales distintas de las usadas en la calibración de los aparatos electrónico, métodos de medida inadecuados, aproximaciones indebidas en las expresiones matemáticas, uso de patrones no fiables, etc. Estos errores se detectan repitiendo la medida con diferentes instrumentos o repitiendo los cálculos, por lo que siempre es posible reducir esta fuente de indeterminación utilizando instrumentación de mejor calidad o mejorando el procedimiento seguido. No se reducirá por el simple hecho de repetir la medida muchas veces.

Por definición, una medida es tanto más exacta cuanto menor sean los errores sistemáticos. Los errores sistemáticos afectan directamente a la exactitud de la medida, por lo que si se evitan o reducen el resultado será mejor: más exacto. El objetivo de las comparaciones de los resultados de un experimento realizado en diferentes laboratorios, en las mismas condiciones y utilizando estándares definidos, es incrementar la exactitud del resultado de la medida.

Errores aleatorios $\delta_a x$

Son incertidumbres provenientes de causas diversas e imprevisibles que hacen que al repetir una medida en condiciones idénticas se obtengan diferentes resultados. Estos errores suelen deberse al azar, de ahí su nombre, y se analizan por métodos estadísticos. Sólo se pueden eliminar parcialmente repitiendo las medidas o aumentando el tiempo de observación (número de cuentas).

Es lógico pensar que la repetición de una medida puede disminuir la incertidumbre debida a los errores aleatorios ya que, en principio, en toda medida existe la misma probabilidad de obtener un valor mayor o menor que el valor verdadero x_v , por lo que un promedio de los

² También llamados sesgos (término más usado en Estadística Matemática).

³ También llamados errores accidentales o casuales.

diferentes valores obtenidos será una mejor aproximación de x_v . Siendo esto cierto, veremos que el efecto beneficioso de la repetición de medidas tiene también sus limitaciones.

Se pueden distinguir varias fuentes: cambio de las condiciones durante el experimento, falta de definición de la cantidad a medir (el diámetro de una esfera metálica no está definido perfectamente porque la esfera no es perfecta, medir la distancia focal desde el centro de una lente hasta la posición de la imagen enfocada, etc.), errores de apreciación, errores de precisión debidos a la sensibilidad del aparato de medida, etc.

Por definición, una medida es tanto más precisa cuanto menor sean los errores aleatorios. Los errores aleatorios afectan directamente a la precisión de la medida, por lo que si se reducen el resultado será más reproducible y mejor: más preciso. El objetivo de cualquier investigador o de cada laboratorio por separado debe ser, por tanto, reducir los errores aleatorios para aumentar la precisión de sus medidas.

Los errores aleatorios sólo serán detectados si son mayores que la precisión p del instrumento de medida, que es el factor que determina su cota inferior (Fig. 3). Para la determinación de la cota superior $\delta_a x$, es necesario, como hemos dicho anteriormente, la realización de un número grande de medidas N , y el uso de la Estadística Matemática.

La precisión de un instrumento de medida (no confundir con su sensibilidad⁴ s), es el valor más pequeño de la magnitud física que se puede medir con dicho instrumento. Si la escala del instrumento utilizado es lineal, su precisión coincide con el intervalo dado por dos de sus divisiones contiguas, que será constante. La precisión del instrumento no será constante si su escala no es lineal.

En resumen, toda medida es inexacta y ha de estimarse cuál de su incertidumbre es mayor, $\delta_s x$ o $\delta_a x$. Mientras que las incertidumbres debidas a errores sistemáticos deben ser evaluadas por el experimentador y están sujetas, por tanto, a cierta subjetividad, las originadas por errores aleatorios pueden estimarse objetivamente mediante métodos estadísticos. En general, mientras no digamos lo contrario, consideraremos que la incertidumbre debida a errores aleatorios es mayor que la incertidumbre debida a errores sistemáticos ($\delta_s x < \delta_a x$, Fig. 3, izquierda). También estudiaremos el caso en que la incertidumbre debida a errores sistemáticos sea mayor que la incertidumbre debida a errores aleatorios ($\delta_s x > \delta_a x$, Fig. 3, derecha. Véase la sección §9).

La figura 2 describe cualitativamente todos los conceptos vistos hasta ahora. El resultado de una medida es más exacto (tiradas más próximas al blanco) cuanto menor sean los errores sistemáticos (eje de abscisas \rightarrow), y tanto más preciso (tiradas próximas entre sí) cuanto menor sean los errores aleatorios (eje de ordenadas \uparrow). Se pretende, por tanto, medidas exactas y precisas, libres de errores sistemáticos y aleatorios.

⁴ La sensibilidad de un instrumento de medida es la relación entre la variación de la respuesta del aparato y el incremento de la magnitud a medir. Por ejemplo, en una balanza es la relación entre la variación angular del fiel y el incremento de masa que ha producido dicha variación, $s = \Delta\alpha/\Delta m$.

Para la reducción de los errores sistemáticos (aleatorios) es importante disponer de datos con pequeños errores aleatorios (sistemáticos), que posean una precisión (exactitud) relativamente elevada. Si uno de los errores es grande, puede ser una pérdida de tiempo invertir esfuerzos en disminuir el otro.

4. Error absoluto y error relativo

Como ya se ha indicado anteriormente, el resultado de una medida no es exacto ni preciso por lo que, al expresar el resultado de la medida de una magnitud X , es necesario indicar, junto al valor numérico x_{opt} , las incertidumbres δx asociada a este valor. Para cuantificar esta incertidumbre podemos utilizar diferentes indicadores.

4.1. Error absoluto

Se suele definir como la diferencia entre el valor considerado como óptimo y el valor verdadero (que no conocemos) de la cantidad que se mide, esto es, se suele definir como la incertidumbre debida a los errores sistemáticos $\delta_s x = |x_{opt} - x_v|$. Esta definición, no obstante, no es adecuada para cuantificar la incertidumbre de la medida porque el valor de $\delta_s x$ puede ser menor que el correspondiente debido a los errores aleatorios $\delta_a x$. La definición indicada ha de hacerse más rigurosa.

Por consiguiente, definimos el error absoluto de una medida, δx , como el valor máximo de las estimaciones de las incertidumbres debidas tanto a los errores sistemáticos $\delta_s x$ como a los errores aleatorios $\delta_a x$, indicando que estamos “razonablemente seguro” de que el valor verdadero de la medida x_v está en el intervalo:

$$x_{opt} - \delta x < x_v < x_{opt} + \delta x. \quad (3)$$

En la medida de lo posible, hemos de especificar el porcentaje de confianza que tenemos en nuestra aseveración. Volveremos a este concepto de porcentaje de confianza más adelante.

El error absoluto de una cantidad, en sí mismo, no indica la calidad de la medida. No es lo mismo, por ejemplo, una incertidumbre de 3 m en la longitud de una pista de atletismo ($l = 400 \pm 3$ m), que esa misma incertidumbre en la distancia entre dos capitales de provincia ($l = 777625 \pm 3$ m). El error absoluto se define siempre positivo, tiene la misma dimensión y unidad que la magnitud medida, y por tener dimensión no resulta muy útil para cuantificar la incertidumbre de las medidas.

4.2. Error relativo

Lo que realmente indica la calidad de una medida es la incertidumbre fraccional o relativa, denominada error relativo de la medida y entendida como cociente entre el error absoluto y el valor absoluto de la medida:

$$\epsilon(x) = \frac{\delta x}{|x_{opt}|}, \quad (4)$$

y que, por tanto, es positivo, adimensional y sin unidades. Su valor suele ser muy pequeño por lo que frecuentemente se expresa en tanto por ciento (%), tanto por mil (‰) o partes por millón (ppm).

El error relativo resulta útil como criterio de calidad de una medida y, aunque no puede darse una regla de carácter general para clasificar las medidas en buenas y malas, ya que hay magnitudes de fácil medida mientras que otras, en cambio, son muy difíciles de medir, como regla aceptada suele considerarse: medida precisa cuando $\epsilon < 0,1\%$, medida aceptable cuando $0,1\% < \epsilon < 5\%$, y medida grosera cuando $\epsilon > 5\%$.

La propiedad fundamental del error relativo es que, por ser relativo, es independiente del orden decimal, esto es, es independiente de la posición de la coma decimal. Ej.: Las siguientes medidas de longitud (cada una de ellas realizadas con un instrumento distinto) tienen igual error relativo: $l_1 = 17,45 \pm 0,05$ dm, $l_2 = 174,5 \pm 0,5$ cm, $l_3 = 1745 \pm 5$ mm. Hemos de recordar que un cambio del valor de δx es consecuencia de un cambio del proceso de medida, esto es, en el resultado de una medida no podemos cambiar de ligero la posición de la coma decimal o la unidad de medida empleada.

Otra cuestión importante es: ¿Tenemos que expresar el error relativo de la medida con todas las cifras que nos dé la calculadora, $\otimes \epsilon(l) = 0,286532951289398\%$?

5. Cifras significativas

Decimos que en una medida una cifra es significativa cuando da a entender qué dígito(s) representa. Ej.: $\otimes 61,872 \pm 0,09$ m indica que el valor verdadero de la longitud medida está acotado en el intervalo $[61,782, 61,962]$. Decimos que el 6 del orden de las decenas es una cifra significativa porque estamos seguro⁵ de que el dígito de las decenas del valor verdadero es un 6, y no otro, porque todos los números del intervalo de error comienzan por 6. De la misma forma el 1 del orden de las unidades es una cifra significativa porque estamos seguro de que en todos los números del intervalo de error el dígito de las unidades es un 1, y no otro. Con los otros órdenes decimales podemos operar de igual manera como indica la tabla 1. Así, vemos que el dígito de las décimas de los números del intervalo de error puede ser un 7, un 8 o un 9 (pero no otro).

⁵ Se insiste, con el porcentaje de confianza que en la medida de lo posible hemos de especificar.

Tabla 1: Determinación del número de cifras significativas de $\otimes 61,872 \pm 0,09$ m.

Orden decimal	Dígito de x_{opt}	Posible dígito de x_v	Cifra significativa
Decenas (10^1)	6	6 (y no otro)	Sí
Unidades (10^0)	1	1 (y no otro)	Sí
Décimas (10^{-1})	8	7, 8, 9 (y no 1, 2, 3, 4, 5 o 6)	Sí
Centésimas (10^{-2})	7	Cualquier dígito	No Sí
Milésimas (10^{-3})	2	Cualquier dígito	No

Por convenio, el número de cifras significativas es el número de dígitos, contados desde la izquierda, hasta el primero afectado por el error (inclusive). En otras palabras, las cifras significativas de una cantidad son todos los dígitos medidos con certeza (sabemos qué dígitos representa), más la primera cifra estimada o dígito dudoso (que representa cualquier dígito).

El ejemplo anterior tenemos cuatro cifras significativas: 6, 1, 8 y 7. Dado que el 2 no es cifra significativa, no tiene sentido expresarlo y, por tanto, escribiremos $61,87\cancel{2} \pm 0,09$ m. El orden decimal de la última cifra del error absoluto (contada desde la izquierda, el 9) marca el orden decimal de la última cifra significativa de la medida (el 7).

Si la medida se expresa en otra unidad submúltiplo decimal de la anterior ($0,6187 \pm 0,0009$ hm), esta regla sigue siendo válida indicando que los ceros a la izquierda del primer dígito no nulo de la medida (el 6), no son significativos; si se expresa en otra unidad múltiplo decimal de la anterior⁶ (61870 mm o 61870000 μ m), hemos de indicar si los ceros a la derecha del último dígito no nulo de la medida (el 7), son significativos o no. Para evitar esta ambigüedad usamos la notación científica.

En esta notación, el valor numérico se escribe como producto de un número decimal que contenga una sola cifra entera (la de las unidades) seguida de la parte decimal, y una potencia de 10 (de exponente positivo o negativo). Al primer factor de esta notación se le denomina mantisa. Todas las cifras de la mantisa son significativas y, por tanto, los ceros situados a la derecha en esta notación sí son cifras significativas. Ej.: $6,1870 \cdot 10^3 = 6187,0$ y $6,1870 \cdot 10^{-3} = 0,0061870$, ambos resultados tienen cinco cifras significativas. El número de cifras significativas no tiene, por tanto, ninguna relación con la posición de la coma decimal.

Puede ocurrir que en ciertas ocasiones una medida no se exprese de acuerdo con lo indicado en la expresión 2. Imaginemos un cierto experimento en el que la medida de una temperatura es $T = 531$ K, sin la expresión explícita del error asociado, δT . A esta forma de expresar una medida se le denomina forma implícita para diferenciarla de la anterior.

Al escribir $T = 531$ K, queremos significar que el valor de T está más próximo a 531 que a 530 o a 532, es decir: el valor 531, de acuerdo al convenio aceptado, con cuatro dígitos signifi-

⁶ Lo que implica, inevitablemente, un cambio del proceso de medida.

cativas (tres medidos con certeza + uno dudoso), significa $T = 531,0 \pm 0,5$ K, y si hubiéramos escrito 531.0, con cinco cifras significativas, querríamos indicar $T = 531,00 \pm 0,05$ K.

Esta forma implícita presenta, sin embargo, deficiencias en sus posibilidades de expresar la incertidumbre. Así, por ejemplo, la forma explícita, $5,31 \pm 0,02$ podría representarse como 5,3 (aumentando la incertidumbre de 0,02 a 0,05), o como 5,31 (disminuyendo la incertidumbre de 0,02 a 0,005). La forma explícita 531 ± 2 , podría representarse como $5,3 \cdot 10^2$ (aumentando la incertidumbre de 2 a 5), o como 531 (disminuyendo la incertidumbre de 2 a 0,5). Por otro lado, 531 ± 5 , podría representarse como $5,3 \cdot 10^2$ (con la misma incertidumbre de 5), o como 531 (disminuyendo la incertidumbre de 5 a 0,5).

Existe una forma abreviada de expresar el resultado de las medidas. Por ejemplo, se suele expresar 1,85(7) en lugar de $1,85 \pm 0,07$, o 2,179(24) en lugar de $2,179 \pm 0,024$, donde la cifra (las dos cifras, si la primera es un 1, o, siendo un 2, la segunda no es mayor que 5) entre paréntesis indica(n) el error absoluto en unidades del último dígito del valor. Veremos que la regla que indica el número de dígitos con los que se ha de expresar δx tiene su razón matemática.

5.1. Cifras significativas de las operaciones matemáticas

Cuando se opera con valores numéricos es necesario conocer el número de cifras significativas del resultado de la operación para que no tenga más de las que le corresponde. Aunque la determinación precisa del número de cifras significativas de una magnitud calculada a partir de otras se estudiará en la Sec. §8 mediante la técnica de propagación de errores, podemos, no obstante, estimar el número de cifras significativas en algunas operaciones sin necesidad de conocer previamente el error de su resultado:

► **Sumas y restas:** La suma o resta de dos medidas no debe ser más precisa que la menos precisa de las medidas. Por ello, el resultado debe tener el mismo número de decimales que tenga el dato con menos decimales. Ej.: $5,2 + 1,234 = 6,4$ (y no 6,434). En el caso de la resta de dos números muy parecidos, suele ocurrir que el resultado tiene menos cifras significativas que cada uno de ellos. Ej.: $0,2581 - 0,257 = 0,001$.

► **Multiplicaciones y divisiones:** La multiplicación o división de dos medidas no debe tener más cifras significativas que la medida con el menor número de ellas. Ej.: $1,3249 \times 7,85 \times 0,5 = 5$ (y no 5,2002).

► **Potencias y raíces:** Al elevar una medida a un exponente n , o al extraer su raíz enésima, el resultado mantiene tantas cifras significativas como tenga la medida. Ej.: $\sqrt{2,1} = 1,4$ (y no 1,4491).

► **Constantes:** Cuando en una operación interviene una constante cuyo valor sea un número irracional (π , por ejemplo), el número de cifras significativas de la constante ha de ser mayor que el número de cifras significativas de los otros operandos. Ej.: $3,141 \times 2,469 = 7,755$; $3,1415 \times 2,469 = 7,756$; $\pi \times 2,469 = 7,757$ (donde hemos redondeado la última operación).

6. Redondeo de números

Imaginemos que realizamos una medida indirecta de una velocidad media a partir de las medidas directas del espacio recorrido y del tiempo que tarda en recorrerlo. Imaginemos que obtenemos (de la calculadora) el siguiente resultado⁷: $\otimes v = 1,666666667 \pm 0,138888889$ m/s.

Al expresar cualquier valor numérico, bien el valor de la magnitud medida x_{opt} , bien el valor del error δx , deben eliminarse los dígitos que carecen de sentido (dígitos no significativos). La eliminación de estas cifras superfluas se denomina redondeo de números.

Hemos de eliminar, por tanto, primero las cifras superfluas de δx , expresando su valor con una sola cifra, o dos si la primera es un 1, o, siendo un 2, la segunda no es mayor que 5; y, segundo, las cifras superfluas de x_{opt} de tal forma que la última cifra significativa en el valor x_{opt} y en su error δx , expresados en las mismas unidades, deben corresponder al mismo orden decimal (centenas, decenas, unidades, décimas, centésimas,...).

EL redondeo de números se realiza de acuerdo con las siguientes reglas:

► Si la cifra que se omite es menor que 5, simplemente se elimina sin más. Ej.: al redondear 3,563 a las centésimas (a la centésima más próxima) quedaría 3,56.

► Si la cifra eliminada es superior a 5, se aumenta en una unidad la última cifra retenida. Ej.: al redondear 3,569 a las centésimas quedaría 3,57.

► Si la cifra eliminada es 5, se acepta aumentar siempre en una unidad la última cifra retenida. Ej.: al redondear 3,565 a las centésimas quedaría 3,57.

Las dos primeras reglas son de sentido común, mientras que la tercera es un convenio. No obstante, no deja de ser la definición de la función matemática del redondeo de un número al orden elegido más próximo. En un número redondeado todas sus cifras son significativas, es decir, su incertidumbre ha de ser media unidad de la última cifra indicada. Por ejemplo, 7,96 redondeado a las décimas quedaría $8,00 \pm 0,05$.

Así, la velocidad media expresada antes, redondeada quedaría $v = 1,67 \pm 0,14$ m/s. Pero ¿por qué se expresa el valor de δx con una sola cifra, o dos si la primera es un 1, o, siendo un 2, la segunda no es mayor que 5?

Teniendo en cuenta que el error relativo es independiente del orden decimal, esto es, es independiente de la posición de la coma decimal, vamos a determinar el error relativo que involucra la operación aritmética del redondeo. Por ejemplo, consideremos el número $\delta x = 0, dcm$ y su redondeo a las décimas, y calculemos el error relativo del redondeo del número $\xi = |d, c \dots|$ a su entero más próximo.

A la función que redondea un número a su entero más próximo se le suele denotar⁸ $y = round(\xi)$, cuyo dominio de definición es $\mathcal{D}(y) = [1, 10)$ (Fig. 4). La razón por la que $0 \leq \xi < 1$ no pertenece al dominio de y radica en el hecho de que los ceros a la izquierda del

⁷ Si este resultado fuera correcto, el 9 significaría que hemos medido la velocidad con una precisión del orden del nanómetro por segundo!

⁸ Denominada así generalmente en los lenguajes de programación.

primer dígito distinto de cero de la medida (d) no son significativos.

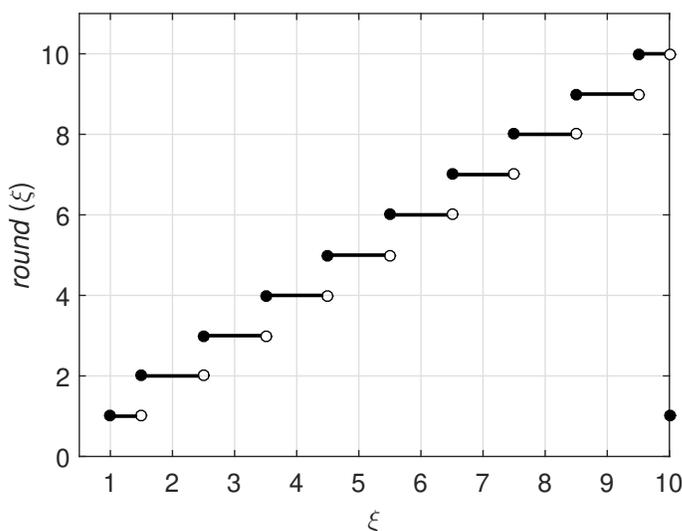


Figura 4: Redondeo de un número a su entero más próximo.

Así, el error relativo del redondeo de un número a su entero más próximo, esto es, el error relativo que cometemos al evaluar la función $y = round(\xi)$, resulta:

$$\epsilon(\xi) = 100 \left| \frac{y - \xi}{\xi} \right|, \quad (5)$$

donde y es el número redondeado de ξ . La figura 5 representa el error relativo $\epsilon(\xi)$ (en tanto por ciento) del redondeo de un número $\xi = |d, c \dots|$ a su entero más próximo. Se observa que $\epsilon(\xi)$ tiene forma de diente de sierra y decae como $\frac{1}{\xi}$ (línea de puntos).

Se observa, además, que excluida la región sombreada, esto es, cuando $\xi \leq 2,5$, el error relativo del redondeo es menor o igual que el 15%. Por ejemplo, el redondeo de $\xi = 1,5$ es $round(1,5) = 2$, y el error relativo del redondeo $\epsilon(\xi = 1,5) = 33\%$.

Si queremos que $\epsilon(\xi \leq 2,5)$ sea menor que el 15% para cualquier valor de dicho intervalo, tendremos que redondear el número $\xi^* = |d, cm \dots|$ a la centésima más próxima. El panel pequeño de la figura 5 muestra que el error relativo del redondeo a la centésima más próxima de ξ^* es siempre menor que el 5%, y es por esta razón por la que el valor de δx , una vez redondeado, se expresa con una sola cifra (d), o dos (d y c) si la primera (d) es un 1, o, siendo un 2, la segunda (c) es menor o igual que 5, para que el error relativo cometido en su redondeo sea siempre menor que el 15%.

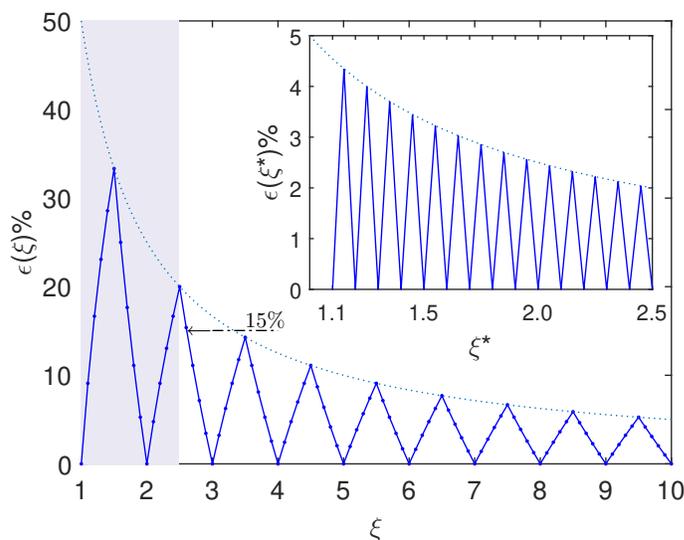


Figura 5: Error relativo del redondeo de un número $\xi = |d, c \dots|$ a su entero más próximo. *Inset:* Error relativo del redondeo de un número $\xi^* = |d, cm \dots|$ a su centésima más próxima.

7. Estimación de la incertidumbre en medidas directas

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, la medida de una magnitud X puede obtenerse de forma directa a partir de la realización de una sola o N medidas x_i (con $i = 1, 2, \dots, N$). Estudiemos la estimación de la incertidumbre δx en cada caso, considerando que la incertidumbre debida a errores aleatorios es mayor que la incertidumbre debida a errores sistemáticos ($\delta_a x > \delta_s x$).

7.1. Una sola medida de la magnitud X

Siempre que sea posible se realizarán tantas medidas de la magnitud X como podamos, pero en el caso en que sólo se realice una medida y el resultado sea x_1 , éste será su valor óptimo, y como incertidumbre tomaremos la precisión p del instrumento de medida⁹. Así, obtenemos:

$$x = x_1 \pm p \quad (6)$$

Por ejemplo, si medimos el tiempo de la final olímpica de los 100 m lisos, y realizamos la medida con un cronómetro que aprecia centésimas de segundo, $p = 0.01$ s, el resultado se puede expresar como:

$$t = 9,58 \pm 0,01 \text{ s.}$$

⁹ Si el instrumento de medida es analógico, podemos tomar $\delta x = p/2$ si la medida coincide con una división de la escala, o muy próxima a ella; o $\delta x = p$ si la medida queda entre dos divisiones de la escala y es difícil apreciar de cuál de las dos está más cerca.

7.2. N medidas de la magnitud X

- Cuando los errores aleatorios sean menores que la precisión del aparato ($\delta_a x < p$), no tiene sentido repetir muchas veces la medida, el resultado siempre será el mismo, x_1 . Se adopta, igual que en el caso anterior (Ec. (6)), como valor óptimo, el resultado obtenido, $x_{opt} = x_1$; y como incertidumbre de la medida, la precisión del instrumento, $\delta x = p$.

Por ejemplo, si medimos la anchura de un folio DIN A4 con una regla graduada en milímetros, por muchas veces que midamos (dado que el error aleatorio es menor que 1 mm), siempre obtendremos el mismo resultado: 210 mm. Así, podemos expresar el resultado de la medida como:

$$l = 210,0 \pm 0,5 \text{ mm.}$$

- Cuando los errores aleatorios sean mayores que la precisión del aparato ($\delta_a x > p$), y el número de medidas realizadas sea pequeño, por ejemplo $N < 5$, el valor óptimo de la medida viene dado por el valor medio, definido como la suma de los diferentes resultados dividida por el número de medidas:

$$x_{opt} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (7)$$

y la estimación de la incertidumbre por la mitad del rango de las medidas, esto es, la mitad de la diferencia entre el valor mayor y el menor de las medidas realizadas:

$$\delta x = \frac{r}{2} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}. \quad (8)$$

Así, podemos expresar el resultado de la medida como:

$$x = \bar{x} \pm \frac{r}{2} \quad (9)$$

- Cuando los errores aleatorios sean mayores que la precisión del aparato ($\delta_a x > p$), y el número de medidas realizadas sea grande, el valor óptimo y el valor de la estimación de la incertidumbre vienen dados por el tratamiento estadístico de las medidas realizadas. En estas notas haremos una descripción somera del tratamiento estadístico necesario en la teoría de errores. Una descripción más detallada la puede encontrar en el capítulo [Nociones de Estadística Matemática](#).

Es importante señalar que muchas de las consideraciones estadísticas que haremos sólo serán aceptablemente ciertas, en general, cuando $N > 30$. No obstante, nosotros nos conformaremos con un número menor de medidas, por ejemplo $N > 10$, y seremos conscientes de las limitaciones de nuestro análisis estadístico cuando $5 < N < 10$. Es importante señalar también que este número mínimo de medidas N necesarias para que el tratamiento estadístico sea aceptable depende de la dispersión de dichos datos. No será igual, por ejemplo, estudiar esta-

dísticamente una medida cuya dispersión sea (haciendo el símil mental) la del tercer cuadrante de la figura 2, que otra cuya dispersión sea la del primer cuadrante.

Con el experimento del juego de dardos descrito anteriormente nuestra idea era describir los conceptos de precisión, exactitud y dispersión. Consideremos ahora un experimento real y aclaremos mejor las ideas.

Consideremos que medimos una magnitud X y que, tras realizar $N = 105$ medidas, los $l = 11$ resultados diferentes obtenidos son, de menor a mayor, $x_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (con $k = 1, 2, \dots, l$), obtenidos cada uno, respectivamente, un número de veces $F_k = \{1, 4, 5, 13, 18, 22, 16, 14, 6, 4, 2\}$. F_k recibe el nombre de frecuencia absoluta del resultado x_k , y se tiene que $\sum_{k=1}^l F_k = N$. A $f_k = F_k/N$ se le denomina frecuencia relativa, indica la fracción del número total de medidas en las que se obtuvo cada valor x_k , y se tiene que $\sum_{k=1}^l f_k = 1$ (condición de normalización).

A partir de los resultados obtenidos, el valor medio de la medida se puede expresar como:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = \sum_{k=1}^l \frac{F_k x_k}{N}, \quad (10)$$

donde en el segundo miembro de la segunda igualdad, los sumandos del numerador son los productos de cada valor diferente por el número de veces que se obtuvo. Se tiene, por tanto, un número menor de sumandos: el número l de valores diferentes ($l < N$).

Esto es, el valor medio \bar{x} de la medida es la media ponderada de los diferentes valores obtenidos x_k , donde el factor de ponderación de cada uno de ellos es la fracción f_k de veces que se obtuvo:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^l f_k x_k. \quad (11)$$

Una representación de la dispersión de las medidas se puede obtener gráficamente en un diagrama que represente las frecuencias relativas de los diferentes valores (Fig. 6). Sobre el eje horizontal se representan los valores x_k y sobre cada uno de ellos se traza una vertical cuya altura es su respectiva frecuencia relativa f_k (o el número de veces que se repite, F_k). Este tipo de diagramas se denomina diagrama de barras o diagrama de frecuencias relativas (o absolutas).

La distribución de las fracciones f_k especifica la dispersión de los resultados obtenidos ya que expresa cómo están distribuidas las medidas entre los diferentes valores obtenidos. Por esta razón a f_k se le denomina también distribución de probabilidad de x_k .

Los diagramas de barras resultan adecuados en los casos en los que los valores x_i son números enteros. No obstante, en general, los valores de las magnitudes físicas X son números reales por lo que resulta más conveniente dividir el rango r de los valores obtenidos en un número adecuado de intervalos (usualmente de igual anchura Δx), y contar el número de valores que se encuentran dentro de cada uno de ellos.

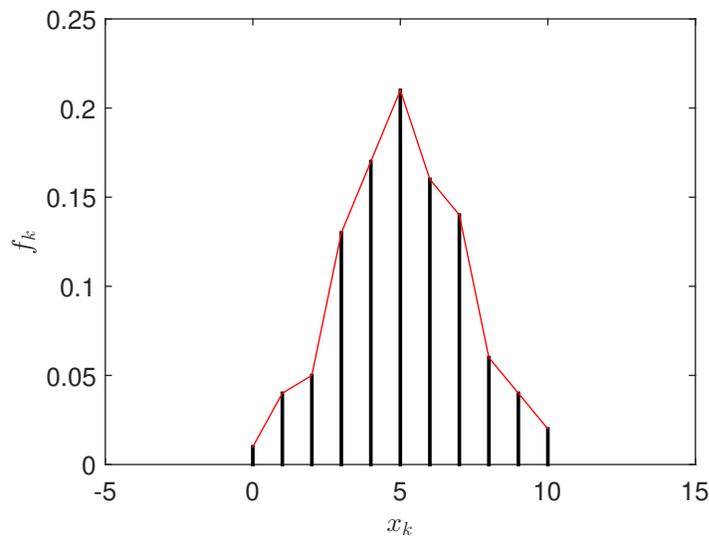


Figura 6: Diagrama de barras o diagrama de frecuencias relativas (en rojo el polígono de frecuencias que une las barras).

Los resultados pueden representarse en un histograma (Fig. 7), representando sobre el eje horizontal los j intervalos considerados, y sobre cada uno de ellos un rectángulo de altura h_j cuya área $\Delta x h_j$ mide la fracción (o el número) de valores encerrados en ese intervalo. Si la anchura de los intervalos es $\Delta x = 1$, las alturas de los rectángulos coinciden con las fracciones relativas f_j (absolutas F_j), y el área de todos los rectángulos resulta la unidad (el número de medidas N). Para la elección adecuada de la anchura Δx de los intervalos, véase el capítulo [Elaboración de los resultados y presentación de un informe científico](#).

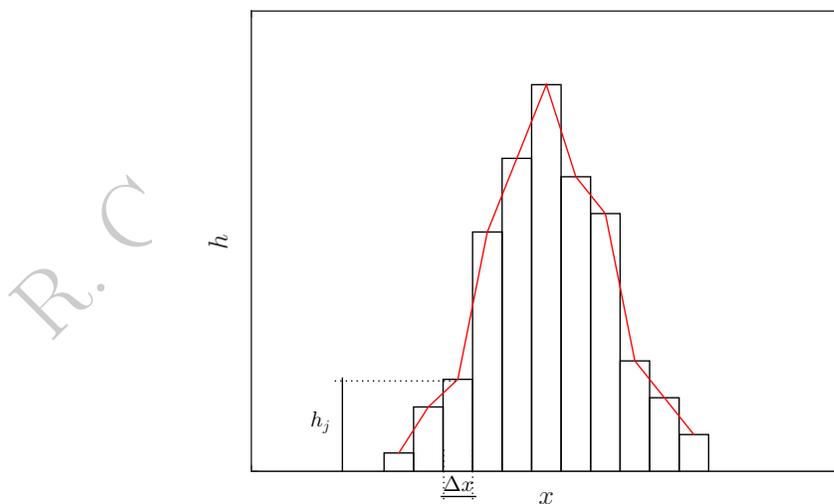


Figura 7: Histograma de los valores de x (en rojo el polígono de frecuencias que une los puntos medios de cada rectángulo).

En general, si el número de medidas en un experimento se hace muy grande ($N \rightarrow \infty$), la anchura de los intervalos del histograma puede hacerse muy pequeña (infinitesimal), y la envolvente de la distribución, esto es, el polígono de frecuencias de las figuras 6 y 7, tiende a una curva continua con forma de campana, que se denomina distribución límite (Fig. 8).

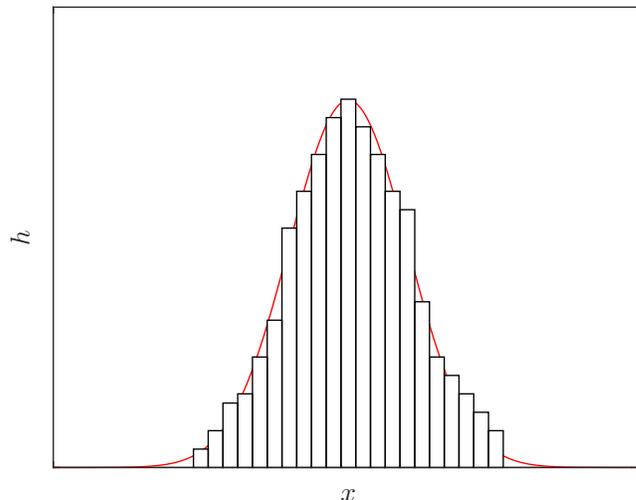


Figura 8: Histograma y distribución límite (en rojo) de los valores de x cuando el número de medidas se hace muy grande, teóricamente cuando $N \rightarrow \infty$.

Puede probarse que si una medida está sujeta a múltiples fuentes de errores aleatorios y los errores sistemáticos son despreciables, la distribución límite¹⁰ es la distribución de probabilidad de Gauss, denominada también distribución normal por ser la más habitual, cuya densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (12)$$

y cuya representación gráfica (véase la figura 9) es una curva en forma de campana simétrica, centrada en el valor verdadero de la magnitud medida $x = \mu = x_v$, que presenta un máximo en su centro $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, dos puntos de inflexión (\times) en $x = \mu \pm \sigma$, y cuya anchura a media altura es¹¹ $\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 4} \sigma \simeq \frac{7}{3}\sigma$.

El parámetro σ (definido positivo), por tanto, nos da cuenta de la anchura de la campana: una campana estrecha (ancha), extendida en un pequeño (amplio) intervalo de valores de x , refleja una medida muy (poco) precisa, y los valores obtenidos están muy próximos entre sí (muy dispersos) y cerca (lejos) del valor “verdadero”.

Teniendo en cuenta que la probabilidad de encontrar un valor cualquiera x entre $-\infty$ y

¹⁰ Recordemos siempre que la distribución límite se obtiene cuando el número de medidas tiende a infinito.

¹¹ De sus siglas en inglés, *Full Width at Half Maximum*.

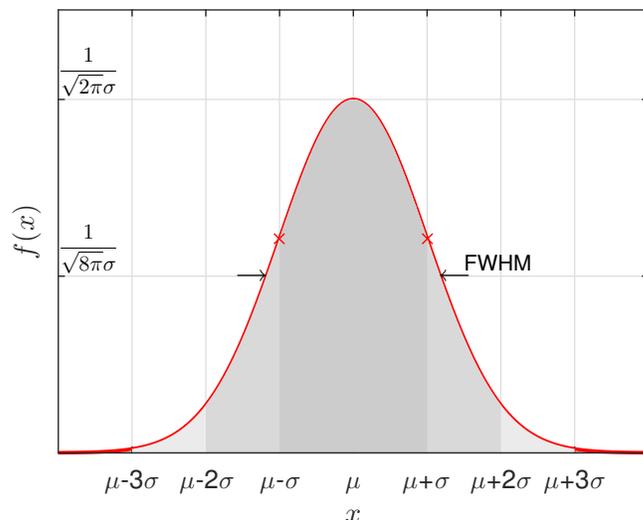


Figura 9: Función de distribución de Gauss.

$+\infty$, es la unidad, la distribución normal cumple la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (13)$$

por lo que $f(x) dx$ es la probabilidad de que, al realizar una sola medida de la magnitud X , el resultado esté comprendido entre x y $x + dx$.

Se puede demostrar que la probabilidad de encontrar un resultado de la medida en el intervalo $[\mu - t\sigma, \mu + t\sigma]$ viene dada por la función error $erf(t\frac{\sqrt{2}}{2})$, esto es, dicha probabilidad es del 68,27% para $t = 1$, del 95,45% para $t = 2$, del 99,73% para $t = 3$, y del 99,99% para $t = 4$. Esto nos permite, con un nivel de confianza del 99,99%, reducir el intervalo de integración en la condición de normalización a:

$$\int_{\mu-4\sigma}^{\mu+4\sigma} f(x) dx \simeq 1, \quad (14)$$

dado que la probabilidad de encontrar un resultado fuera del intervalo $[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma]$ es prácticamente nula (0,006%).

De acuerdo con todo lo anterior, para determinar con toda exactitud el valor verdadero de la medida $x_v = \mu$, tendríamos que realizar infinitas medidas, construir el histograma correspondiente, y a partir de la distribución límite, determinar el valor verdadero como el máximo de dicha distribución. Dado que lo anterior resulta tan laborioso como inviable, en el laboratorio realizaremos un número finito de medidas (en principio siempre $N > 10$), y sobre ese conjunto finito, la Estadística nos permite definir una serie de estadísticos (ciertos parámetros de interés estadístico), a saber:

► **Valor medio o media aritmética:** Si realizamos un número finito de medidas, al igual

que hicimos anteriormente (Ec. (7)), aceptaremos como valor óptimo de dicha medida el valor medio obtenido:

$$x_{opt} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (15)$$

ya que es razonable pensar que tan probable es que existan errores aleatorios por defecto como por exceso y, al hacer la media, deben compensarse.

► **Desviación:** La desviación de una medida respecto del valor medio se define como la diferencia entre el valor medido y la media:

$$D(x_i) = x_i - \bar{x}. \quad (16)$$

Las desviaciones serán positivas para unos datos y negativas para otros, por lo que su suma es nula, $\sum_{i=1}^N D(x_i) = 0$. El valor medio de las desviaciones es también nulo, esto es:

$$\overline{D(x)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = 0, \quad (17)$$

resultado que siempre ocurre, independientemente del tipo de distribución de probabilidad de la variable x , por lo que no es un buen estadístico para medir la dispersión de un conjunto de datos. Para ello consideramos los cuadrados de las desviaciones o desviaciones cuadráticas.

► **Varianza:** La varianza de un conjunto de datos se define como la “media” del cuadrado de las desviaciones de los datos respecto de la media:

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N D^2(x_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (18)$$

que no tiene la misma dimensión que la variable x , por lo que ambas variables no se pueden comparar directamente. La razón por la que se ha sustituido N por $N-1$ en el cálculo de la “media” es de índole estadística, consecuencia de realizar un número finito de medidas, y la estudiaremos en el capítulo [Nociones de Estadística Matemática](#).

► **Desviación estándar, desviación típica o desviación cuadrática media:** La desviación estándar de un conjunto de datos se define como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (19)$$

que tiene la misma dimensión y unidades que la variable x , y por tener unidades no podremos decir si una desviación estándar es pequeña o grande (siempre puede realizarse un cambio de unidades). Para ello se define, como veremos más tarde, el estadístico adimensional $\sigma(x)/|\bar{x}|$, denominado fluctuación relativa.

De la misma forma que distinguimos entre el valor medio de un conjunto de datos, \bar{x} , y el

valor medio de la distribución de Gauss, μ , no debemos confundir la desviación estándar de un conjunto de datos, $\sigma(x)$, con la desviación estándar de la distribución de Gauss, σ .

► **Varianza del valor medio:** Consideremos ahora que realizamos \mathcal{N} medidas de una magnitud X y que repetimos este proceso N veces. Si calculamos el valor medio del conjunto de las N veces que repetimos la medida, es de esperar que la dispersión de los valores medios \bar{x}_j (con $j = 1, 2, \dots, N$) sea menor que la dispersión de las medidas individuales x_i (con $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$).

Como veremos enseguida, se puede demostrar que la varianza de los valores medio:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2, \quad (20)$$

se puede expresar como:

$$\sigma^2(\bar{x}) \stackrel{*}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sigma^2(x_j) \stackrel{\dagger}{=} \frac{N}{N^2} \sigma^2(x) \stackrel{\ddagger}{=} \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (21)$$

donde en la segunda igualdad (\dagger) hemos considerado que hay N sumandos iguales, esto es, que $\sigma(x_j) = \sigma(x)$ para todo valor de j ; y en la tercera igualdad (\ddagger), que $\mathcal{N} = N$ (que no impone ninguna restricción).

► **Desviación estándar, desviación típica o error cuadrático medio del valor medio:**

Aceptado el valor medio como el valor óptimo de la medida (Ec. (15)), nos queda estimar la incertidumbre asociada a dicho valor. La incertidumbre debe indicar la dispersión de los datos medidos respecto del valor medio, por lo que aceptamos la desviación estándar del valor medio como la estimación de su incertidumbre ($\delta x = t\sigma(\bar{x})$), esto es:

$$x = \bar{x} \pm t\sigma(\bar{x}) \quad (22)$$

donde:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (23)$$

es la desviación estándar del valor medio, denominado también error cuadrático medio del valor medio.

La Ec. (22) equivale a decir que, basándonos en nuestras medidas, tenemos la confianza de que al repetir el proceso de medida en las mismas condiciones, el 68,27% de los valores obtenidos estarán comprendidos en el intervalo $[\bar{x} - \sigma(\bar{x}), \bar{x} + \sigma(\bar{x})]$; el 95,45% de los valores obtenidos estarán en el intervalo $[\bar{x} - 2\sigma(\bar{x}), \bar{x} + 2\sigma(\bar{x})]$; y el 99,73% en el intervalo $[\bar{x} - 3\sigma(\bar{x}), \bar{x} + 3\sigma(\bar{x})]$.

Obsérvese que $\sigma(\bar{x})$ contiene un factor $1/\sqrt{N}$, lo que significa que mientras $\sigma(x)$ (que representa la incertidumbre de las medidas individuales) puede crecer o disminuir al aumentar el número de medidas, $\sigma(\bar{x})$ (que representa la desviación estándar del valor medio) en general decrece al aumentar N .

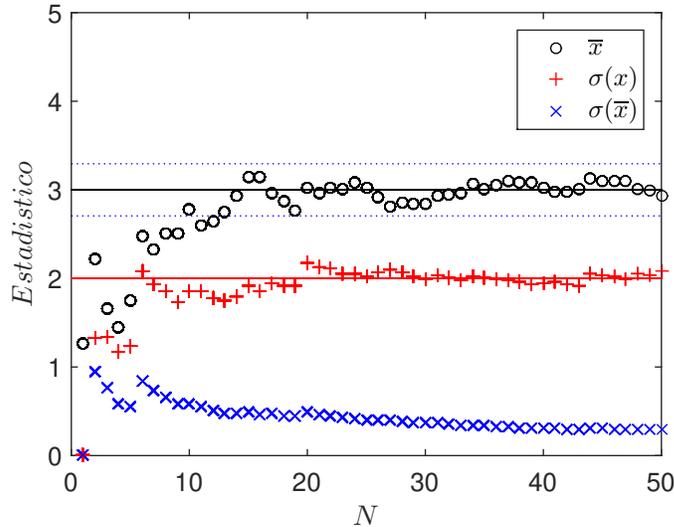


Figura 10: Variación del valor medio \bar{x} , desviación estándar $\sigma(x)$, y desviación estándar del valor medio $\sigma(\bar{x})$, en función del número N de datos generados aleatoriamente de un conjunto de datos distribuidos normalmente con $\mu = 3$ (línea continua negra), y $\sigma = 2$ (línea continua roja).

Para aclarar conceptos, hagamos la siguiente simulación. Simulemos la medida de una magnitud generando aleatoriamente N datos extraídos de un conjunto de datos distribuidos de acuerdo con una distribución normal de parámetros: valor medio μ y desviación estándar σ , definidos *a priori*. La figura 10 presenta la variación, en función del número N de datos generados, del valor medio \bar{x} obtenido de acuerdo con la Ec. (15); de la desviación estándar $\sigma(x)$, obtenida de acuerdo con la Ec. (19); y de la desviación estándar del valor medio $\sigma(\bar{x})$, obtenida de acuerdo con la Ec. (23).

Se observa, por un lado, que conforme aumenta el número de datos, el valor medio \bar{x} y la desviación estándar $\sigma(x)$ se aproximan, respectivamente, a los valores $\mu = 3$ y $\sigma = 2$, y, por otro, que $\sigma(x)$ no varía significativamente conforme aumenta el número N , mientras que, en general, $\sigma(\bar{x})$ disminuye monótonamente. Los valores de \bar{x} quedan encerrados en el intervalo $[\bar{x} - \sigma(\bar{x}), \bar{x} + \sigma(\bar{x})]_{N=30}$, de acuerdo con la Ec. (22), como puede verse en la figura 10 en la franja horizontal delimitada por línea de puntos.

Teniendo en cuenta los resultados presentados en la figura 10, si el número de medidas realizadas N es muy pequeño (inferior a 10), el tratamiento estadístico pierde significado ya que el error que afecta a $\sigma(\bar{x})$, obtenido de acuerdo con la Ec. (8):

$$\delta\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(\bar{x})_{max} - \sigma(\bar{x})_{min}}{2}, \quad (24)$$

es tan grande como su propio valor, y deja de ser significativo. En estos casos en los que N es muy pequeño, el valor óptimo de la medida y su incertidumbre vienen dados por la Ec. (9).

Igualmente, teniendo en cuenta la figura 10, si el número de medidas realizadas es mayor que 30 (40 o 50, por ejemplo), el tratamiento estadístico no es más rico, por lo que el efecto beneficioso de repetir la medida, como dijimos en la sección §3, tiene sus limitaciones.

De acuerdo con lo anterior, el número de medidas necesarias a partir del cual la Estadística es confiable depende de la dispersión de dichos datos. El tratamiento estadístico de 500 medidas de una magnitud que presenta una distribución límite muy ancha, no tiene por qué ser mejor que el tratamiento estadístico de 50 medidas de una magnitud que presenta una distribución límite muy estrecha.

Se puede ver, ejecutando el programa cuyo código fuente (Matlab) se adjunta en el **Apéndice**, que cuando N_{max} es lo suficientemente grande, por ejemplo $N_{max} = 1000$, se tiene que el valor medio de la medida tiende al valor medio de la distribución de Gauss, $\bar{x} \rightarrow \mu$; que la desviación estándar del conjunto de datos tiende a la desviación estándar de la distribución de Gauss, $\sigma(x) \rightarrow \sigma$; y que la desviación estándar del valor medio se hace tan pequeña como queramos, $\sigma(\bar{x}) \rightarrow 0$.

8. Estimación de la incertidumbre en medidas indirectas: propagación de errores

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, en muchas ocasiones no es posible la medida directa de una magnitud, que llamamos ahora Y , sino que es necesario medirla de forma indirecta a partir de otras magnitudes relacionadas con ella, $y = f(z_j)$ (con $j = 1, 2, \dots, n$), que, a su vez, han sido obtenidas de antemano de forma directa, $z_j = z_{opt,j} \pm \delta z_j$, de acuerdo a lo descrito en la Sec. §7.

Para obtener el resultado de la medida indirecta, expresado como $y = y_{opt} \pm \delta y$, evaluamos la función f en los valores óptimos de las variables primarias, esto es, $y_{opt} = f(z_j)|_{z_j=z_{opt,j}}$. Para estimar su incertidumbre δy , necesitamos conocer si las incertidumbres de las magnitudes primarias δz_j han sido obtenidas por un procedimiento estadístico o no estadístico.

8.1. Todas las variables primarias proceden de una sola medida o un número pequeño de ellas

En este caso conocemos que las incertidumbres de las medidas directas δz_j vienen dadas por la precisión del aparato, de acuerdo con la ecuación (6), o a partir del rango r de las medidas realizadas (Ec. (8)).

Se trata de calcular cuánto varía y , esto es, la incertidumbre δy , cuando las variables de las

que depende varían δz_j , es decir, $\delta y = f(z_j + \delta z_j) - f(z_j)$.

Para ello consideremos el diferencial total de f :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j, \quad (25)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial z_j}$, también denotada como $\partial_{z_j} f$, es la derivada parcial de f respecto a la variable z_j . Dado que las variaciones δz_j son pequeñas respecto a sus variables ($\delta z_j \ll z_{opt,j}$), podemos aproximar (en primer orden) los diferenciales dz_j por las incertidumbres δz_j , tomando el valor absoluto de las derivadas parciales dado que no conocemos el signo de $\pm \delta z_j$, y obtener una cota superior de la incertidumbre δy producida por las incertidumbres δz_j :

$$\delta y = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|_{\delta z_j = z_{opt,j}} \delta z_j \quad (26)$$

donde las derivadas deben evaluarse en los valores óptimos de las cantidades primarias, esto es, en el valor z_1 si la incertidumbre viene dada por la precisión del aparato (Ec. (6)); o en el valor medio de las medidas realizadas si la incertidumbre se determina a partir del rango r de las medidas (Ec. (8)).

Puede ocurrir, excepcionalmente si f depende de una única variable, que al evaluar la ecuación (26) la derivada parcial $|\partial_z f|$ sea nula, lo que, aparentemente, nos llevaría a que $\delta y = 0$, pero sabemos que esto no es cierto. Hay que tener en cuenta que la ecuación (26) es una aproximación de primer orden de la incertidumbre, y en este caso habría que recurrir a la aproximación de segundo orden, esto es, $\delta y = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right| \delta z^2$, que, en general, no será nula.

La utilización de la expresión (26) resulta, en general, bastante simple ya que y será una combinación de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, etc., de las variables z_j (Véase la tabla 2). El cálculo de $\partial_{z_j} f$ puede ser en ocasiones más laborioso, especialmente cuando aparezcan funciones trigonométricas.

La tabla 2 presenta también el error relativo de la medida indirecta, $\epsilon(y) = \frac{\delta y}{y}$. Cuando la función f sea de la forma $f(z_j) = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_j}$, con α_j constantes racionales positivas y negativas, el cálculo de $\epsilon(y)$ se simplifica si en vez de hacer las derivadas de la ecuación (26), hacemos la derivada logarítmica. En efecto si tomamos logaritmo neperiano:

$$\ln f(z_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ln z_j, \quad (27)$$

hacemos la derivada aproximando los diferenciales dz_j por las incertidumbres δz_j :

$$\frac{\delta y}{y} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\delta z_j}{z_j}, \quad (28)$$

resulta que el límite de error relativo de la medida indirecta:

$$\epsilon(y) = \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \epsilon(z_j), \quad (29)$$

es la suma de los errores relativos de las variables primarias z_j multiplicados por el valor absoluto de las constantes α_j , como puede verse en la tabla 2.

8.2. Todas las variables primarias son obtenidas por procedimientos estadísticos

En este caso conocemos que las incertidumbres de las medidas directas δz_j vienen dadas por la Ec. (23). Podemos aplicar el mismo tratamiento que en el caso anterior, usando $\sigma(\bar{z}_j)$ en lugar de δz_j , pero dado que los errores de cada variable z_j son de tipo aleatorio, puede existir una compensación estadística entre ellos.

Si consideramos sólo dos variables a fin de simplificar los cálculos, $y = f(z_1, z_2)$, entonces:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2, \quad (30)$$

aproximando los diferenciales dz_1 y dz_2 por las incertidumbres δz_1 y δz_2 , tenemos:

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2, \quad (31)$$

elevando al cuadrado:

$$(\delta y)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 (\delta z_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 (\delta z_2)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right) (\delta z_1) (\delta z_2), \quad (32)$$

sumando para las N medidas realizadas:

$$\sum_{i=1}^N (\delta y_i)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\delta z_{1i})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \sum_{i=1}^N (\delta z_{2i})^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right) \sum_{i=1}^N (\delta z_{1i}) (\delta z_{2i}), \quad (33)$$

y teniendo en cuenta que, para un número N suficientemente grande de medidas, el último término de esta expresión es nulo dado que los errores de cada medida son aleatorios y no existe relación entre los errores de una y otra magnitud. Se dice, entonces, que las magnitudes

Tabla 2: Estimación de la incertidumbre δy y del error relativo $\epsilon(y)$ de medidas indirectas cuando las variables primarias z_j de las que depende se obtienen por procedimientos no estadísticos.

$y = f(z_j)$	δy	$\epsilon(y)$
Sumas y restas $y = z_1 \pm z_2$	$\delta y = \delta z_1 + \delta z_2$	
Multiplicación por una constante racional $y = az$	$\delta y = a \delta z$	$\epsilon(y) = \epsilon(z)$
Multiplicación por una constante irracional $y = \beta z$	$\delta y = \beta \delta z + z \delta \beta$	$\epsilon(y) = \epsilon(\beta) + \epsilon(z)$
Multiplicaciones y divisiones $y = \frac{z_1 z_2}{z_3}$	$\delta y = \left \frac{z_2}{z_3} \delta z_1 + \frac{z_1}{z_3} \delta z_2 + \left \frac{z_1 z_2}{z_3^2} \right \delta z_3 \right $	$\epsilon(y) = \epsilon(z_1) + \epsilon(z_2) + \epsilon(z_3)$
Potencias $y = az^n$	$\delta y = anz^n \epsilon(z)$	$\epsilon(y) = n \epsilon(z)$
Raíces $y = \sqrt[n]{az}$	$\delta y = \left \frac{1}{n} \sqrt[n]{az} \right \epsilon(z)$	$\epsilon(y) = \frac{1}{n} \epsilon(z)$
Logaritmos $y = a \ln(bz)$	$\delta y = a \epsilon(z)$	$\epsilon(y) = \left \frac{1}{\ln(bz)} \right \epsilon(z)$
Exponenciales $y = a \exp(bz)$	$\delta y = ab \exp(bz) \delta(z)$	$\epsilon(y) = bz \epsilon(z)$

z_1 y z_2 son estadísticamente independientes.

Teniendo en cuenta, por un lado, que $\delta z_{1i} = z_{1i} - \bar{z}_1$, $\delta z_{2i} = z_{2i} - \bar{z}_2$, y, por otro, la desviación de la medida indirecta $\delta y_i = y_i - \bar{y} = f(z_{1i}, z_{2i}) - f(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, y dividiendo entre $N(N-1)$, tenemos que:

$$\frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_{1i} - \bar{z}_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_{2i} - \bar{z}_2)^2, \quad (34)$$

Finalmente, la varianza del valor medio de y , resulta:

$$\sigma^2(\bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 \sigma^2(\bar{z}_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \sigma^2(\bar{z}_2), \quad (35)$$

y la desviación estándar del valor medio de y , resulta:

$$\sigma(\bar{y}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 \sigma^2(\bar{z}_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \sigma^2(\bar{z}_2)}. \quad (36)$$

La expresión (35) se puede generalizar para n variables, $y = f(z_j)$ (con $j = 1, 2, \dots, n$), resultando:

$$\sigma^2(\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)^2_{z_j=\bar{z}_j} \sigma^2(\bar{z}_j), \quad (37)$$

donde las derivadas parciales deben evaluarse en los valores medios de las cantidades primarias.

En efecto, resulta que $\sigma(\bar{y}) < \delta y$, esto es, si calculamos el valor de $\sigma(\bar{y})$ considerando que los errores de las magnitudes z_j son estadísticamente independientes, el valor obtenido será menor que si calculamos δy por el tratamiento descrito en la Sec. §8.1 (Ec. (26)), debido a que, como dijimos antes, estadísticamente existe la posibilidad de que estos errores se compensen en parte entre ellos.

Igualmente, la utilización de la expresión (37) resulta, en general, bastante simple ya que y será una combinación de sumas, restas, multiplicaciones, etc., de las variables z_j (Véase la tabla 3).

Consideremos ahora una forma particular de $f(z_j)$ que nos quedó pendiente en nuestro estudio anterior. Consideraremos el caso en el que y sea el valor medio de un conjunto de N medidas, $y = \bar{z} = (z_1 + z_2 + \dots + z_N)/N$. De acuerdo con la Ec. (37), su incertidumbre resulta:

$$\sigma^2(\bar{z}) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sigma^2(z_j), \quad (38)$$

con lo que queda demostrada la primera igualdad de la ecuación (21).

Tabla 3: Estimación de la incertidumbre $\sigma(\bar{y})$ de medidas indirectas cuando las variables primarias z_j de las que depende se obtienen por procedimientos estadísticos.

$y = f(z_j)$	$\sigma(\bar{y})$
Sumas y restas $y = z_1 \pm z_2$	$\sigma(\bar{y}) = \sqrt{\sigma^2(\bar{z}_1) + \sigma^2(\bar{z}_2)}$
Multiplicación por una constante racional $y = az$	$\frac{\sigma(\bar{y})}{\bar{y}} = \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}}$
Multiplicación por una constante irracional $y = \beta z$	Vea la tabla 2
Multiplicaciones y divisiones $y = \pm a z_1 z_2$ o $y = \pm a \frac{z_1}{z_2}$	$\frac{\sigma(\bar{y})}{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(\bar{z}_1)}{\bar{z}_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(\bar{z}_2)}{\bar{z}_2}\right)^2}$
Potencias $y = az^n$	$\frac{\sigma(\bar{y})}{\bar{y}} = n \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}}$
Raíces $y = \sqrt[n]{az}$	$\frac{\sigma(\bar{y})}{\bar{y}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}}$
Logaritmos $y = a \ln(bz)$	$\sigma(\bar{y}) = a \frac{\sigma(\bar{z})}{\bar{z}}$
Exponenciales $y = a \exp(bz)$	$\frac{\sigma(\bar{y})}{\bar{y}} = b \sigma(\bar{z})$

8.3. Algunas de las variables primarias proceden de una sola medida o un número pequeño de ellas, y otras han sido obtenidas por procedimientos estadísticos

En este caso conocemos que las incertidumbres de las medidas directas δz_j vienen dadas, unas por la precisión del aparato, de acuerdo con la ecuación (6), otras a partir del rango r de las medidas realizadas (Ec. (9)), y otras por el tratamiento estadístico dado por la Ec. (23).

Este tercer caso es una combinación de los dos anteriores, y el cálculo de la incertidumbre de la medida indirecta es más complejo. Sí podemos decir que la incertidumbre será mayor que la obtenida en la Sec. §8.2, y menor que la descrita en la Sec. §8.1. Generalmente se opta por considerar que todas las variables primarias proceden de una sola medida o un número pequeño de ellas, por lo que, en definitiva, la incertidumbre es algo mayor que la real.

9. Estimación de la incertidumbre debida a los errores sistemáticos

En todo lo anterior hemos supuesto que la incertidumbre debida a los errores sistemáticos era despreciable frente a la causada por los errores aleatorios. Consideremos ahora el caso en el que tanto la incertidumbre debida a los errores aleatorios, que no podemos despreciar, como la debida a los errores sistemáticos, han de tenerse en cuenta.

Como dijimos anteriormente, la incertidumbre debida a errores sistemáticos es difícil de tratar matemáticamente y debe ser evaluada por el experimentador en cada caso, por lo que está sujeta a cierta subjetividad y temporalidad.

Para cuantificar los errores sistemáticos es necesario que el experimentador conozca, por citar algunos aspectos: *i*) la calidad de los instrumentos de medidas, si los instrumentos de medidas presentan error de cero o no; *ii*) las condiciones experimentales, si son las mismas o no que las empleadas en la calibración de los instrumentos; *iii*) el procedimiento experimental seguido de acuerdo con una determinada teoría, si las aproximaciones matemáticas realizadas son groseras o no, etc.

Para las medidas directas realizadas en las prácticas de laboratorio, usando balanzas, cronómetros, voltímetros, etc., puede adoptarse el criterio de estimar una incertidumbre asociada a los errores sistemáticos del 1%, $\delta_s x = 0,01 \bar{x}$, por lo que podemos expresar la medida de la magnitud X como:

$$x = \bar{x} + \delta_a x + \delta_s x = \bar{x} + \delta_t x, \quad (39)$$

donde $\delta_t x = \delta_a x + \delta_s x$ es la incertidumbre total de la medida.

Para las medidas indirectas, por ejemplo, para la medida de la constante elástica k de un resorte a partir de la medida del período T de las oscilaciones de una masa m suspendida de

su extremo:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2},$$

podemos aplicar la propagación de errores, y parece lógico suponer que los errores de la balanza y del cronómetro son independientes, por lo que:

$$\frac{\delta_s k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta_s m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2 \delta_s T}{T}\right)^2},$$

y el resultado de la medida indirecta de la constante elástica se puede expresar como:

$$k = \bar{k} + \delta_a k + \delta_s k = \bar{k} + \delta_t k, \quad (40)$$

con $\delta_t k = \delta_a k + \delta_s k$, aunque también podríamos haber tomado (sin justificación regurosa, por analogía con la Sec. 8) que $\delta_t k = \sqrt{(\delta_a k)^2 + (\delta_s k)^2}$.

R. Caballero-Flores. 1era Versión (2019)

Apéndice: Código fuente

Código fuente para generar la figura 10 (Matlab)

```

Nmax = 50;% Numero de datos generados
%(Se excluyen las tildes del codigo fuente.)
a = abs(randn(1));% Genera aleatoriamente la desviacion estandar.
b = randn(1);% Genera aleatoriamente el valor medio
% Inicio bucle
for i = 1:Nmax
y(i,1) = a.*randn(1,1) + b;% Genera aleatoriamente un dato
% extraido de un conjunto de datos distribuidos de acuerdo a
% distribucion Normal de valor medio "b" y desviacion estandar "a"
N(i,1) = i;% Numero de datos generados
vm(i,1) = mean(y);% Valor medio de los datos generados (Ec. 15)
s(i,1) = std(y);% Desviacion estandar de los datos generados (Ec. 19)
sm(i,1) = std(y)/sqrt(i);% Desviacion estandar del valor medio de los datos generados (Ec. 23)
%
figure(10)% Variacion en funcion del numero de datos generados aleatoriamente
hold on
plot(N,vm,'ko')% Variacion del valor medio
plot(N,s,'r+')% Variacion de la desviacion estandar
plot(N,sm,'bx')% Variacion de la desviacion estandar del valor medio
plot([0 Nmax],[b b],'k-')% Valor medio cuando Nmax = infinito
plot([0 Nmax],[a a],'r-')% Desv. est. cuando Nmax = infinito
plot([0 Nmax],[a a]/sqrt(Nmax),'b-')% Desv. est. med. cuando Nmax = infinito
% Ejes
axis tight
ty=ylabel('$$\overline{x} (\circ), \sigma(x) (+), \sigma(\overline{x})(\times)$$')
set(gca,'FontSize',12)
tx=xlabel('$$N$$','FontSize',18)
ty.Interpreter = 'latex';
tx.Interpreter = 'latex';
pause(0.1)
end
% Fin bucle
box
plot([0 Nmax],[b+sm(Nmax) b+sm(Nmax)],'b:')
plot([0 Nmax],[b-sm(Nmax) b-sm(Nmax)],'b:')
% Estas dos ultimas lineas de comandos dibuja en la figura las lineas de puntos

```

Bibliografía

A. CONDE, J.S. BLÁZQUEZ GÁMEZ, C.F. CONDE, M. MILLÁN, R. CABALLERO-FLORES, *Técnicas Experimentales Básicas*. Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Sevilla (2100), ISBN 978-84-693-9091-7.

C. SÁNCHEZ DEL RÍO, *Análisis de errores*. Eudema Universidad, Madrid (1989).

J.R. TAYLOR, *An Introduction to Error Analysis*. 2nd ed. University Science Books, Sausalito-California (1997).

R. Caballero-Flores. 1era Versión (2019)