

Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS  
Grado en Física

---

*Óptica atmosférica*

---

Beatriz Pardo Rivera

*26 de mayo de 2019*



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Descartes</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Método de Descartes . . . . .	3
1.3. Arcoiris de orden superior . . . . .	9
1.4. Regiones del arcoiris . . . . .	9
1.5. Tamaño de la gota . . . . .	11
<b>2. Medida del ángulo de observación del arcoiris</b>	<b>13</b>
2.1. Fundamento Teórico . . . . .	13
2.2. Procedimiento y montaje . . . . .	13
2.3. Obtención de los ángulos . . . . .	15
2.3.1. Ángulo del sol, $\delta$ . . . . .	16
2.3.2. Ángulo de visión, $\beta$ . . . . .	18
2.3.3. Ángulo del arcoiris, $\phi$ . . . . .	20
2.4. Resultados experimentales . . . . .	21
2.5. Conclusiones . . . . .	26
<b>3. Airy</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Parámetro de impacto . . . . .	28
3.3. Arcos supernumerarios . . . . .	30
3.4. Integral de Airy . . . . .	31
3.5. Desfase entre los frentes de onda . . . . .	34
3.6. Tamaño de la gota . . . . .	36
<b>4. Coloración por reflexión total interna</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Observación experimental . . . . .	43
4.3. Modelos teóricos . . . . .	50
4.4. Comprobación del modelo y resultados . . . . .	52
4.5. Conclusiones . . . . .	59
<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>Apéndice</b>	<b>63</b>
<b>Referencias</b>	<b>65</b>



## Introducción

El arcoiris es considerado como el más hermoso de los fenómenos ópticos atmosféricos, no se requiere ningún tipo de conocimiento para poder verlo y admirarlo. Desde el principio de los tiempos el arcoiris ha sido origen de leyendas y está presente en multitud de mitologías y religiones, la *Biblia* se refiere a él como el puente entre *Dios* y los hombres, para los *Celtas* era un símbolo mágico de tesoros y riquezas, donde los *leprechaun* eran los encargados de esconder bajo uno de sus extremos sus calderos de oro, mientras que según el *budismo tibetano*, se asemeja con lo real, ya que se percibe y se ve pero es imposible de tocar. En la *mitología griega*, Iris era la diosa del arcoiris que anuncia el pacto de los humanos y los *dioses* y el fin de la tormenta además de ser la encargada de hacer llegar los mensajes de los *dioses* a los seres humanos.

El arcoiris esta repleto de simbolismo y desde que comencé este trabajo me he dado cuenta de que está más presente en nuestras vidas de lo que creemos. Allá donde mire veo un arcoiris, no necesariamente en sentido estricto, ya que estos son menos frecuentes de lo que me gustaría, iridiscencias en nubes o pompas de jabón, interferencias en manchas de aceite en el asfalto, glorias en las nubes o descomposición de la luz blanca al pasar por cualquier objeto similar a un prisma. Incluso en la arquitectura de Asturias hay arcoiris. Sin ir más lejos, el puente de San Sebastián en Avilés, que cuenta con más de 125 años de historia, fue renovado con un toque colorista con motivo de la apertura del *Centro Cultural Internacional Oscar Niemeyer*. El puente, que fue pintado emulando un arcoiris, conecta este centro con la ciudad, "Un arcoiris no deja de ser un puente entre el cielo y la tierra. Próximamente tendremos un trozo de cielo a través del *Centro Cultural Óscar Niemeyer*", afirmó el artista avilesino Ramón Rodríguez encargado del proyecto.

Centrándome ahora más en la física del arcoiris, es un fenómeno sobre el que se pueden aplicar diversos conocimientos adquiridos con las asignaturas del grado, como pueden ser Óptica, Química, Fotónica, Técnicas Experimentales y Métodos Numéricos Aplicados a la Física.

En 1704 Newton publicó el libro *Óptica*, en el que trataba sus investigaciones sobre los colores y la difracción de la luz. Logró demostrar gracias a un prisma cómo la luz blanca procedente del sol contiene todos los colores, partiendo del rojo, pasando por el naranja, amarillo, verde, azul y añil hasta llegar al violeta. Muchos siglos antes de Newton, la naturaleza había descompuesto la luz del sol una y otra vez, en forma de llovizna o de tormenta, el arcoiris fue durante mucho tiempo una maravilla desconocida.

En este trabajo se estudian modelos teóricos del fenómeno del arcoiris para posteriormente buscar su aplicación. Comienza con René Descartes, en su libro, *El discurso del Método* publicado en 1637, propuso un modelo, basado en la óptica

geométrica y en el trazado de rayos, para estudiar qué ocurría cuando la luz del sol atravesaba una sola gota de agua y consiguió así dar una explicación satisfactoria.

Con el fin de comprender y dar un paso más allá en el modelo de Descartes, en el segundo capítulo se lleva a cabo un pequeño experimento, crear arcoiris artificiales con ayuda de una manguera a lo largo de un día entero para estudiar el comportamiento del arcoiris en función de la posición del sol y determinar el ángulo del arcoiris, definido por Descartes.

Ahora bien, la teoría de Descartes no explicaba algunos aspectos del arcoiris, como los arcos supernumerarios, por lo que hubo que recurrir a *la teoría ondulatoria de la luz*. En 1838, Sir George Biddell Airy, un matemático británico, desarrolló una explicación para estos arcos, basada en fenómenos de interferencia. Así, en el tercer capítulo, se estudia cómo se originan estos arcos supernumerarios y en qué circunstancias se ven. Por otro lado con la integral de Airy, se examina cómo influye el tamaño de la gota en ellos.

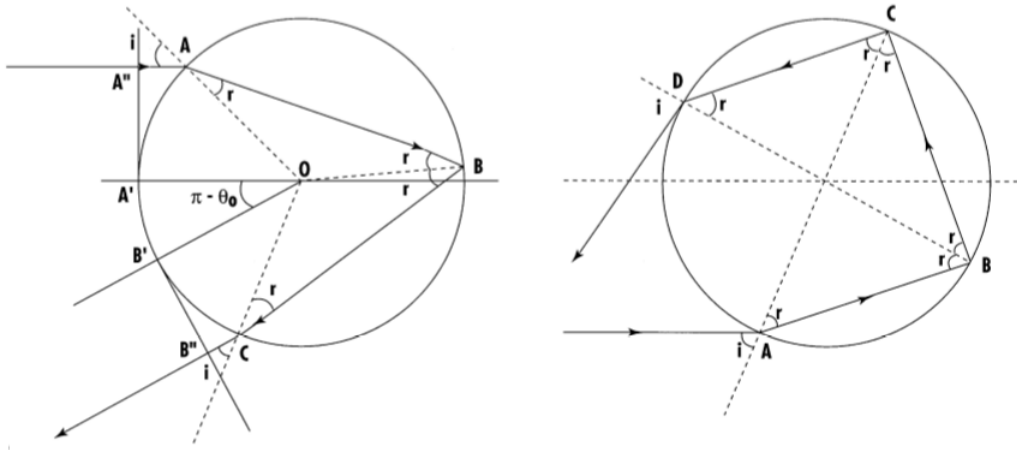
Por último, en el cuarto capítulo, se analiza un artículo muy reciente de la revista *Nature*, en el que se trata un mecanismo nuevo para crear colores estructurales iridiscentes con una gran separación angular basado en fenómenos de reflexión e interferencia semejantes a los que dan lugar a los arcos supernumerarios estudiados por Airy.

De esta forma se habrá estudiado la historia del arcoiris, desde sus inicios con Descartes, pasando por Airy y terminando con un estudio reciente que muestra la importancia de este fenómeno y la utilidad que puede tener aunque hayan pasado ya más de casi 400 años desde las primeras explicaciones.

# 1. Descartes

## 1.1. Introducción

Un arcoiris es luz solar dispersada debido a la reflexión y refracción que se produce al atravesar gotas de agua. Para que el observador pueda verlo, deben cumplirse una serie de condiciones específicas, pero la más importante consiste en que este debe estar de espaldas al sol. El número de reflexiones y refracciones que se producen dentro de la gota de agua, establece un orden en los arcoiris. El arcoiris primario está formado por dos refracciones y una reflexión en incontables gotas de agua, además de ser el más brillante, puede identificarse fácilmente ya que se encuentra en la parte inferior (cuando hay más de un arcoiris). La *figura 1*, muestra el camino que siguen los rayos para un arcoiris primario y un arcoiris secundario.

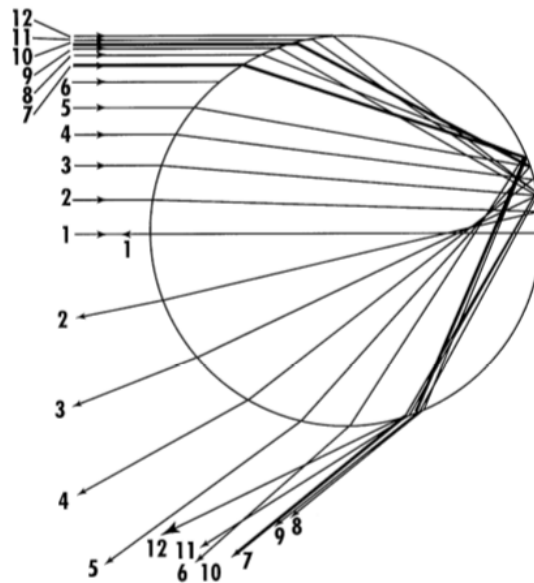


*Figura 1: Geometría del camino de los rayos del sol en una gota de agua esférica para el arcoiris primario (izquierda) y para el secundario (derecha); donde  $O$  es el centro de la gota,  $i$ , el ángulo incidente y  $r$ , el refractado.[1]*

## 1.2. Método de Descartes

René Descartes fue el primero que consiguió dar una explicación satisfactoria para la existencia y la forma del arcoiris.[1] Consideró el camino de los rayos de luz a través de una sola gota de agua, ya que la geometría es la misma para cada gota, para un observador dado. Combinó la teoría con los experimentos para deducir que tanto el arcoiris primario como el secundario (este último mayor en diámetro angular pero menos visible), son causados por la refracción y reflexión

en gotas de agua esféricas. Supuso, de forma correcta, que podía reproducir estas características haciendo pasar luz a través de un matraz lleno de agua, que hacía el papel de una gota de agua muy grande. Gracias a que 16 años antes, Snell había formulado las leyes de la refracción y la reflexión, Descartes fue capaz de calcular y trazar el camino que seguirían rayos paralelos desde el sol impactando en una gota de agua esférica, sin embargo no fue capaz de dar cuenta de los colores del arcoiris, 30 años más tarde Newton lo conseguiría.



*Figura 2: El camino de varios rayos de sol al atravesar una gota de agua esférica, donde se ilustran las diferencias en el ángulo de desviación total, según el ángulo de incidencia.[1]*

En la *figura 2*, se puede ver que los rayos salen de la gota habiendo sido desviados de su dirección original un cierto ángulo. Si nos fijamos en el rayo a lo largo del eje central, denotado con el número 1, vemos que este sale desviado exactamente un ángulo de  $180^\circ$  (en la misma dirección que llevaba). Por encima de este punto, el ángulo de desviación se ve reducido hasta un valor mínimo y para rayos que impactan aún más arriba, el ángulo crece de nuevo. El rayo de desviación mínima, indicado con el número 7, se corresponde con el ángulo de desviación mínima y recibe el nombre de *rayo del arcoiris* o *rayo de Descartes*.



Veamos ahora cómo obtenemos el valor de dicho ángulo.[1][3] Refiriéndonos de nuevo a la *figura 1*, centrándonos en el arcoiris primario, podemos afirmar que la desviación de un rayo de luz en la refracción en la superficie de la gota es  $i-r$ , mientras que la desviación de una reflexión interna es  $180-2r$ . Como el arcoiris está formado por rayos que se han refractado al entrar y salir y se reflejan una vez en la parte posterior de la gota, la desviación total será:

$$D = (i - r) + (180^\circ - 2r) + (i - r) = 180^\circ - 4r + 2i$$

Para el arcoiris secundario es válido el mismo razonamiento, siempre que consideremos que tiene dos reflexiones internas más:

$$D = 360^\circ - 6r + 2i$$

De esta forma como podemos tener hasta k-arcoiris también podemos encontrar la expresión para el ángulo de desviación k-ésimo:

$$D_k(i) = k(180^\circ - 2r) + 2(i - r) \quad (1.1)$$

Nos encontramos en la búsqueda del ángulo de desviación mínimo, por lo que derivamos e igualamos a cero para encontrar la condición de equilibrio. Utilizamos la ley de Snell  $n_i \text{sen}(i) = n_r \text{sen}(r)$ , para expresar la desviación tan sólo en función del ángulo incidente.

Si definimos  $N = \frac{n_r}{n_i}$  podemos reescribir la Ley de Snell:  $\text{sen}(i) = N \text{sen}(r)$

$$D_k(i) = k(180^\circ) + 2i - 2(k-1) \arcsen\left(\frac{\text{sen}(i)}{N}\right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\delta D_k(i)}{\delta i} = 2 \left( 1 - \frac{(k+1) \cos(i)}{N \sqrt{1 - \frac{\text{sen}(i)^2}{N^2}}} \right) = 0$$

$$\frac{N}{k+1} = \frac{\cos(i)}{\cos(r)} \quad (1.3)$$

Representamos el ángulo de desviación frente al incidente, para ello generamos los valores utilizando la ley de Snell, que nos relaciona los ángulos incidentes y refractados y la ecuación (1.1), que relaciona los anteriores con el de desviación. En este caso vamos a representarlo para el arcoiris primario y para el color rojo. El índice de refracción del agua, depende de la longitud de onda que estemos utilizando, luego para una luz roja de  $6563\text{\AA}$ , tendremos  $n \simeq 1.3318$ .

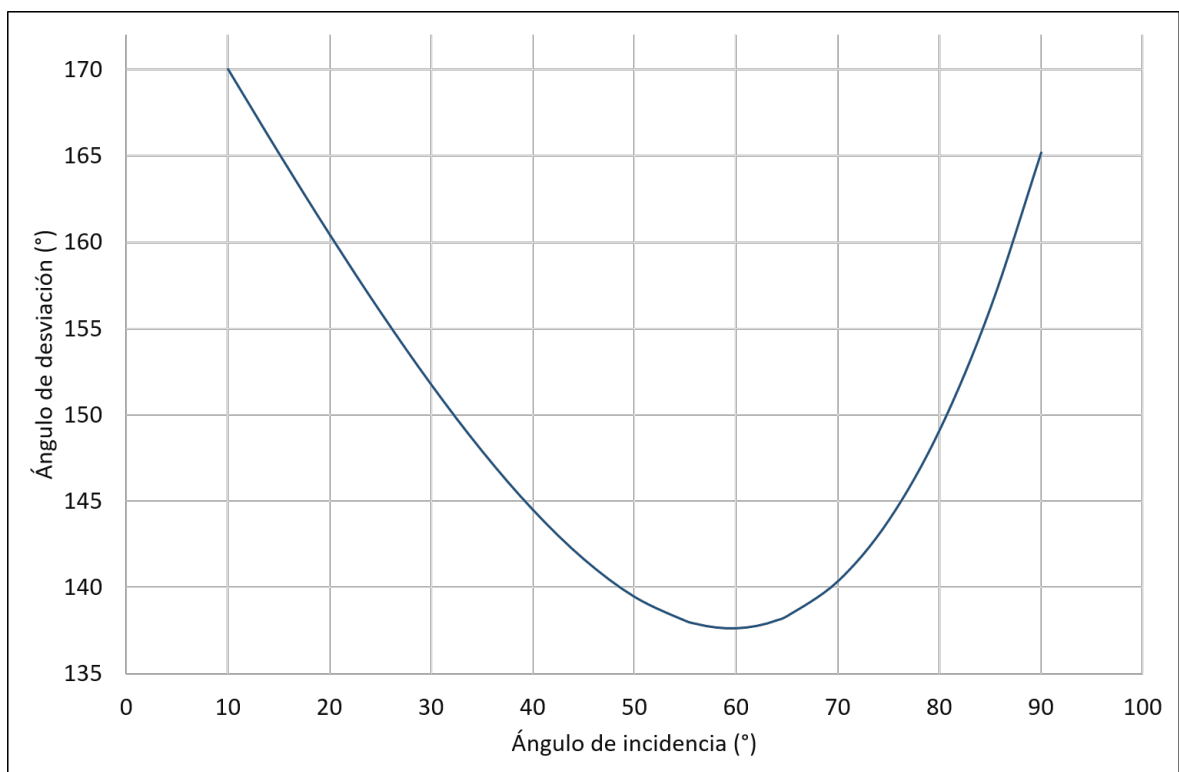


Figura 3: Ángulo de desviación frente al de incidencia. Vemos que el ángulo de desviación alcanza un mínimo en torno a los  $60^\circ$ .

Es interesante reescribir la condición de equilibrio para que sólo dependa de los parámetros del medio,  $N$  y de  $k$ , el orden del arcoiris. Partimos de un paso intermedio de la derivada e igualamos a cero:

$$1 = \frac{(k+1)\cos(i)}{N\sqrt{1 - \frac{\text{sen}(i)^2}{N^2}}} \Leftrightarrow \frac{N^2 - \text{sen}^2(i) + 1 - 1}{N^2} = \frac{(k+1)^2\cos^2(i)}{N^2}$$

$$N^2 - 1 = [(k+1)^2 - 1]\cos^2(i)$$

$$\cos(i) = \left( \frac{N^2 - 1}{k(k+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Luego podemos obtener el valor del ángulo incidente y con este, el desviación mínima.

$i_{min}$	$D_1(i_{min})$
59.48°	137.76°

Tabla 1: Ángulo de desviación mínima para el arcoiris primario.

La característica significativa de este sistema geométrico es que los rayos que salen de la gota, no están espaciados de forma uniforme: aquellos que se encuentran ‘cerca’ del ángulo de desviación mínima se concentran alrededor del mismo, mientras que aquellos desviados por ángulos mayores están separados por espacios más anchos, como se observa en la *figura 2*.

Esto implica que en un intervalo alrededor del ángulo del arcoiris, pongamos medio grado a cada lado, hay muchos más rayos saliendo que en cualquier otro intervalo de grados. Esta concentración de rayos es la que origina el arcoiris primario, en lo que a intensidad de luz se refiere. Podemos decir que el arcoiris está formado por esos rayos desviados, aproximadamente 138° de su dirección original, entrando en el ojo de un observador cualquiera. Así, el arcoiris puede ser visto mirando desde cualquier dirección siempre que esté unos 42° (el ángulo suplementario de los 138°) sobre la línea que une el ojo del observador con la sombra de su cabeza (el punto antisolar).

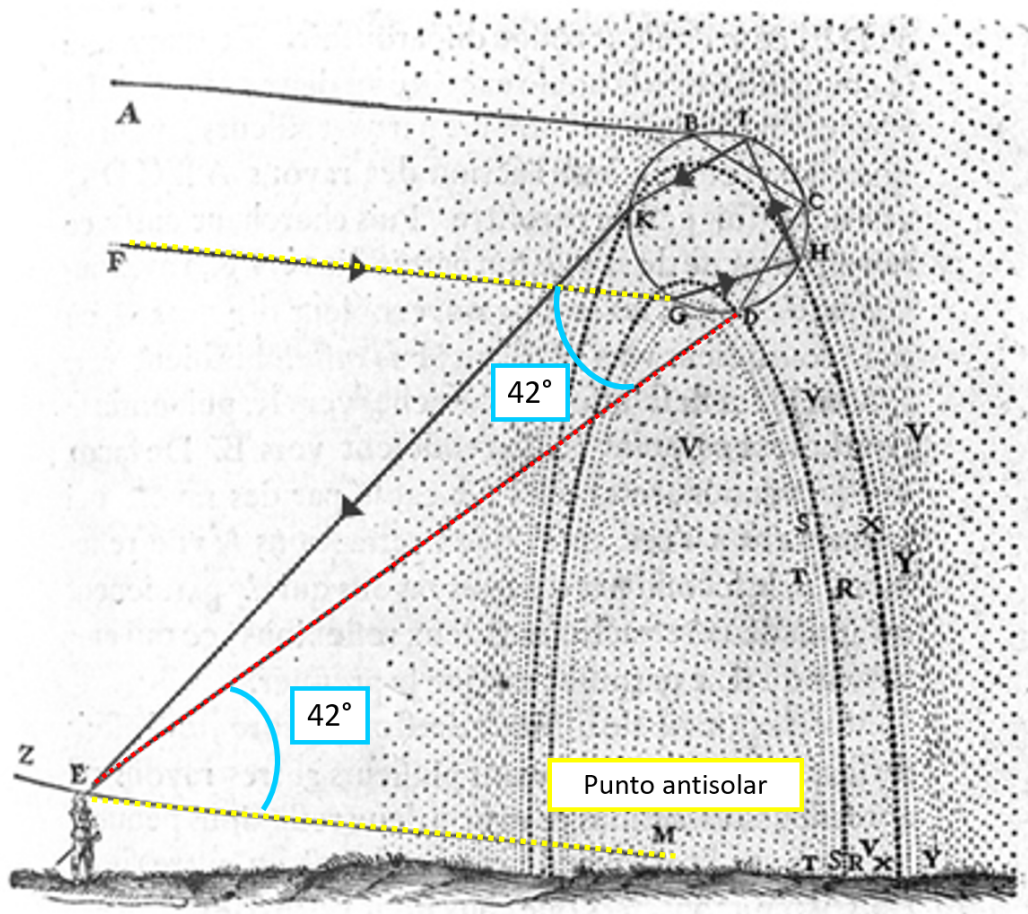


Figura 4: Boceto original de Descartes. [2]

Este criterio define un arco circular alrededor del punto antisolar y en consecuencia, todas las gotas a ese ángulo, contribuirán al arcoiris primario. Si el observador se encuentra por encima de la nube de lluvia el arco será en realidad una circunferencia completa, estos pueden ser vistos muy de vez en cuando a altas altitudes sobre la tierra o desde aviones; en cambio, si nos encontramos a nivel del suelo, como máximo podrá verse un arco semicircular (por ejemplo si el sol se está poniendo o acaba de amanecer) aunque normalmente será un segmento de arco. Llegados a este punto, podemos decir que el arcoiris primario se forma por rayos dispersados por todas las gotas que se localizan en la superficie de un cono cuyo vértice se encuentra en el ojo del observador, con el eje a lo largo de la dirección antisolar y un ángulo del semicono de  $42^\circ$ . El mismo razonamiento es válido para el arcoiris secundario, teniendo en cuenta que en este caso el ángulo del semicono es de  $51^\circ$  (que es el suplementario de  $129^\circ$ , el ángulo de desviación). Estos conos

serán diferentes para cada observador, por lo que cada persona tiene su propio arcoiris.

Hasta aquí, hemos descrito un arcoiris genérico, sin color. La luz azul y violeta es más refractada que la luz roja, aunque la cantidad real puede depender según las fuentes, ya que las longitudes de onda del rojo y del violeta pueden diferir ligeramente. Por tanto, tenemos para el rojo, con una longitud de  $6563\text{Å}$  el semiángulo del cono es de  $42.3^\circ$  mientras que para la luz violeta, con  $4047\text{Å}$ , es de unos  $40.6^\circ$ , por lo que el ancho del arcoiris primario es de unos  $1.7^\circ$ . El arcoiris secundario tiene un ancho similar pero hay que tener en cuenta que la secuencia de colores es invertida, el rojo se encuentra ahora en la parte interna del arco.

### 1.3. Arcoiris de orden superior

Sólo hemos hablado de arcoiris primario y secundario, pero nada nos impide que existan arcoiris de órdenes superiores (terciario, cuaternario, . . . ), ya que dentro de cada gota de agua pueden darse más de dos reflexiones. Cada reflexión adicional viene acompañada por una pérdida de intensidad, por lo que por este motivo esperaríamos que el arcoiris terciario ( $k=3$ ) fuera muy difícil de ver. Edmund Halley encontró que en este caso, el ángulo de desviación mínima es de  $319^\circ$ , y entonces la concentración de luz se sitúa en un ángulo de  $41^\circ$  respecto a la dirección de la luz incidente. Esto implica que aparece por detrás del observador como un anillo alrededor del sol. Debido a que en las proximidades del sol el fondo del cielo es muy brillante y a la propia debilidad intrínseca del mismo arco, hace que sea prácticamente imposible de ver, al igual que los de orden superior.

### 1.4. Regiones del arcoiris

El cielo bajo el arcoiris primario suele ser notablemente más brillante que el cielo que le rodea. La razón por la que dentro del arco primario (dentro del cono) es más brillante, es porque las gotas en el interior de cono reflejan luz también al ojo (algunas de reflexiones directas desde su superficie) pero no son tan intensas como la luz del arcoiris y están compuestas por la mezcla de muchos colores. De forma similar, fuera del arco secundario, ocurre un efecto parecido (aunque menos obvio).

La región entre los arcoiris primario y secundario, recibe el nombre de *Banda oscura de Alexander*. [4] Como ya hemos visto, los rayos de luz que sufren una única reflexión forman el arcoiris primario, mientras que los que sufren dos, el secundario. Las gotas de lluvia a lo largo de las líneas de visión entre los dos arcos no pueden enviar luz al ojo, y por tanto esa región del cielo es más oscura. Gran parte de la luz dispersada, proviene de las gotas de agua a través de las cuales la luz del sol es refractada y reflejada: estos rayos no emergen entre los  $42^\circ$  y los  $51^\circ$ . Esta

banda angular oscura no se encuentra en completa oscuridad, obviamente, porque las superficies de las gotas reflejan luz hacia ella, la reducción de intensidad sin embargo es bastante notable.

En la *figura 5* se ejemplifican los conceptos explicados.



*Figura 5: Arcoiris, Paseo del Muro, Gijón [5]*

### 1.5. Tamaño de la gota

Cuando el sol se encuentra más cerca del horizonte, se observan más brillantes los arcos del arcoiris cerca del suelo, casi verticales, que los situados en la parte superior del arco. Esto parece deberse a que las gotas no tienen el mismo tamaño.



Figura 6: Arcoiris, 18 de Febrero 2017, Gijón. Se puede observar cómo en la parte alta del arco, los colores parecen difuminarse mientras que en los extremos se distinguen con mayor claridad.

En las siguientes figuras se ha representado de forma esquemática y cualitativa, el camino que seguiría un rayo de sol al atravesar gotas de distintos tamaños a lo largo del arcoiris.

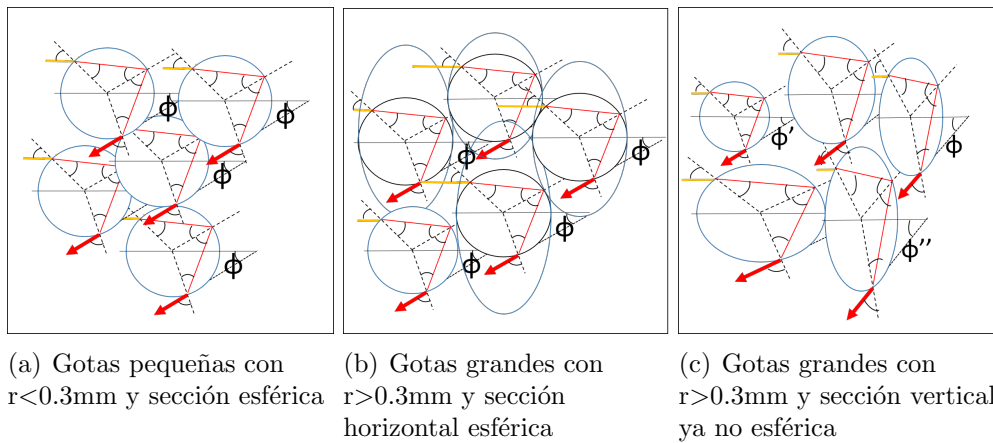


Figura 7: Agrupaciones de las gotas que forman el arcoiris.

- a) Las gotas más pequeñas que 0.2-0.3 mm pueden considerarse esféricas, de forma que la tensión superficial es la suficiente como para mantener los efectos de distorsión de las fuerzas aerodinámicas a raya, por lo que estas contribuyen en cualquier parte del arcoiris.
- b) Según aumentamos el tamaño de las gotas, comienzan a ser más ovaladas, por tanto, a pesar de que mantienen una sección horizontal circular, no lo hacen verticalmente. Aunque estas gotas más grandes pueden contribuir a la intensidad del arcoiris, sólo lo hacen de forma significativa cuando se encuentran en la parte baja del cono, porque es entonces cuando la luz se dispersa en un plano horizontal en la forma exacta en que debe producirse un arcoiris.
- c) Sin embargo, cuando estas gotas más grandes y ovaladas se encuentran en la parte superior del arco, debido a que sus secciones no son completamente circulares, no contribuyen de forma relevante, ya que no dispersan la luz con el mismo ángulo y comienzan a mezclarse los colores.

El tamaño de la gota, como acabamos de ver, puede marcar la diferencia en la intensidad y el color del arcoiris, si es demasiado grande debido a su forma ovalada no contribuye por igual en el mismo, mientras que si es demasiado pequeña, la óptica de rayos falla por efectos de interferencia y lo que tiene lugar es un arco amplio, blanco y débil llamado arco de niebla, como el de la *figura 8*.



*Figura 8: Arco de niebla, Julio 2014, Winter Island Park in Salem, Massachusetts.[6]*



## 2. Medida del ángulo de observación del arcoiris

El objetivo de este experimento consiste en la determinación del ángulo de observación del arcoiris a partir de los ángulos de visión y de inclinación del sol, gracias a procedimientos trigonométricos.

### 2.1. Fundamento Teórico

Para la observación de un arcoiris es necesario estar de espaldas al sol y humedad o llovizna en el ambiente. El índice de refracción es función de la frecuencia de la luz, por lo que para cada frecuencia vamos a tener una desviación diferente, que será la causante de los colores que forman el arcoiris. Por ejemplo, en el caso del agua, donde el índice de refracción para el rojo es 1.32, se obtiene un ángulo  $\phi$  de 42 grados, como vimos en el capítulo anterior.

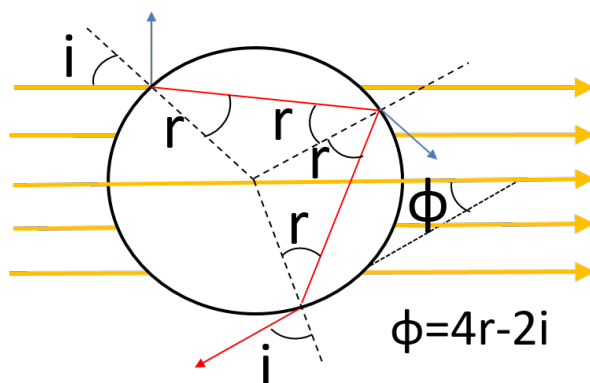


Figura 1: Trayectoria de un rayo de sol en una gota de agua

### 2.2. Procedimiento y montaje

Debido a las específicas condiciones atmosféricas necesarias para la formación de un arcoiris, crearemos arcoiris artificiales con la ayuda de una manguera. Si bien ya tenemos el agua, con objeto de obtener el segundo elemento fundamental, el sol, nos trasladamos a un pequeño pueblo en la región de Zamora, Lanseros, en verano.

Nos situamos en una finca lo más despejada de árboles y edificaciones posible, para procurar obtener el máximo número de horas de sol y así mayor número de arcoiris, realizaremos uno cada hora, desde las nueve de la mañana hasta las siete

y media de la tarde. Para crear nuestro arcoiris colocaremos la manguera en el mismo lugar para cada hora y seremos nosotros los que nos movamos.



*Figura 2: Arcoiris artificiales, medidos en Lanseros 17 de Junio 2018.*

El primero de la mañana fue a las 9:14, antes resultaba imposible ya que a pesar de que en verano amanece muy temprano, aún no pegaba el sol en la finca. Observamos cómo a medida que van pasando las horas y el sol se sitúa en posiciones más altas, la altura de los arcoiris disminuye, aunque a partir de las 18:14 el sol comienza a descender y la altura de los arcoiris vuelve a crecer. Sólo conseguimos obtener un segmento de arco de la semicircunferencia, comenzamos con el lado derecho y según pasa el tiempo va moviéndose poco a poco hasta que al medio día, el arcoiris que conseguimos se sitúa en la parte superior viendo casi una recta, a partir de las 17:00 comenzamos a ver la parte izquierda del arcoiris (fue necesario cambiar el objetivo de lado, para poder tener el sol a nuestras espaldas).

Los arcoiris creados cuando el sol se encontraba en las posiciones más altas son menos visibles mientras que los correspondientes a las primeras horas de la mañana y las últimas de la tarde, ganan más altura y se distinguen sus colores con más claridad.

### 2.3. Obtención de los ángulos

A la hora de determinar el ángulo de observación del arcoiris,  $\phi$ , no podemos hacerlo directamente, debido a esto se obtiene a partir de otros dos ángulos que si podemos determinar, nuestro ángulo de visión  $\beta$  y el de inclinación de los rayos del sol  $\delta$ . Para ver las relaciones entre estos ángulos de un modo más visual, están representados en la *figura 3*.

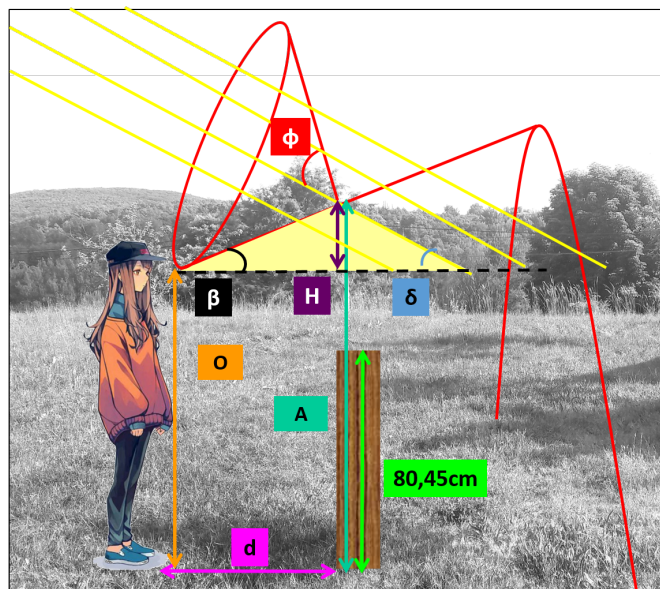


Figura 3: Esquema de ángulos y distancias.

- $\beta$  ángulo de visión del observador.
- $\delta$  ángulo de inclinación de los rayos de sol.
- $\Phi$  ángulo del arcoiris.
- O altura de los ojos del observador.
- d distancia entre el observador y el poste de madera.
- A altura del arcoiris.
- H distancia ente la altura del arcoiris y los ojos del observador.

### 2.3.1. Ángulo del sol, $\delta$

Para determinar el ángulo de inclinación de los rayos del sol, utilizamos un objeto como puede ser un árbol y su correspondiente sombra. Nos colocamos frente al objeto de manera que este y su sombra, formen un ángulo recto, así, conociendo las longitudes del objeto y la sombra, por trigonometría podemos obtener el ángulo buscado.



*Figura 4: Árbol y su sombra, 17 de Junio 2018, 19:33, Zamora*

A su vez utilizamos una aplicación que nos permite obtener este ángulo exacto. Introducimos el lugar o las coordenadas, la fecha y por último la hora, teniendo en cuenta que nuestra zona horaria será GMT+2, ya que el experimento se llevó a cabo en verano y en España.[7]

42.0664500, -6.4096200	42° 3' 59.220" N	6° 24' 34.632" W	
Lanseros, Manzanal de los Infantes, Castilla y León, España, ESP			
<input type="button" value="ejecutar"/>	Solar Disk <input checked="" type="checkbox"/>	Analemma <input checked="" type="checkbox"/>	Solstice <input checked="" type="checkbox"/>
año	mes	día	hora minutos
2018	06	17	09 14
Time zone	GMT+2	DST <input type="checkbox"/>	Default

Figura 5: Introducción de los datos en la aplicación Sun Earth Tool[7].

La aplicación nos permite movernos por el lugar, de forma que podemos seleccionar el punto exacto (la finca) donde se toman las fotografías.



Figura 6: Vista satélite del punto donde se realizó el experimento, Lanseros (Zamora).

Finalmente, obtenemos una gráfica con el recorrido del sol a lo largo del año y con el valor del ángulo a la hora y fecha deseadas.

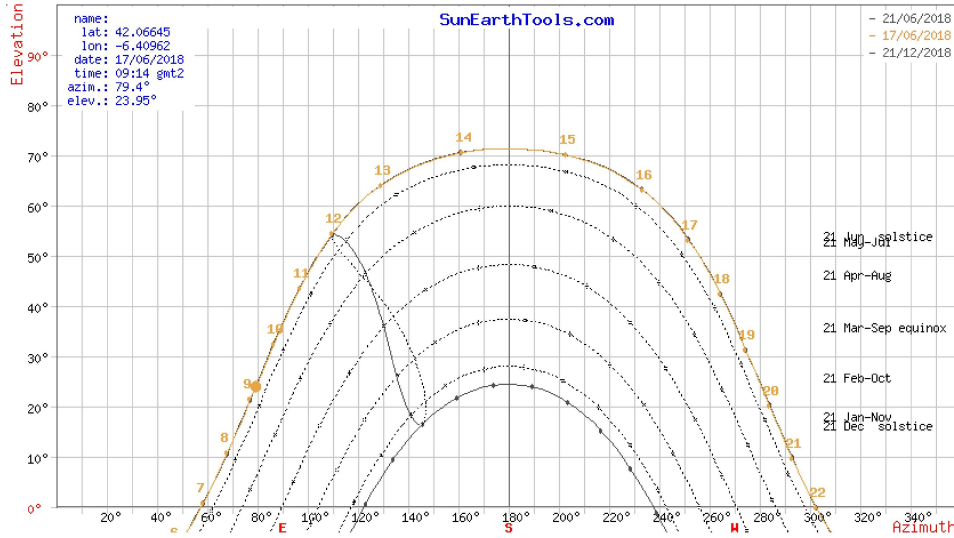


Figura 7: Camino del sol, 17 de junio 2018, 9:14, Lanseros (Zamora)[7].

### 2.3.2. Ángulo de visión, $\beta$

Si nos fijamos de nuevo en la *figura 3*, podemos obtener el ángulo de visión, por trigonometría, a partir de dos distancias:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H(px)}{d(cm)} \quad (2.1)$$

Vamos a estar utilizando medidas sobre la foto en píxeles y sobre el entorno real en centímetros, debido a esto se precisa un modo de hallar un factor de conversión entre ambas medidas. Para ello necesitamos un objeto de referencia, en todas las fotos, es un poste de madera, del cual conocemos el ancho y alto en la realidad,  $11 \times 80.45 \text{ cm}^2$ . Así, podemos obtener las dimensiones del poste en píxeles, que son propias de cada foto, y establecer un factor de conversión. Con esto ya tendríamos solucionado el tema de las dimensiones y lo que nos ocupa ahora es determinar cada distancia.

Distancia  $d$ :

Es la que hay entre el observador (que sostiene la cámara, que serán los ojos a lo largo del experimento) y el objeto de referencia, el poste de madera. Se mide directamente sobre el terreno.

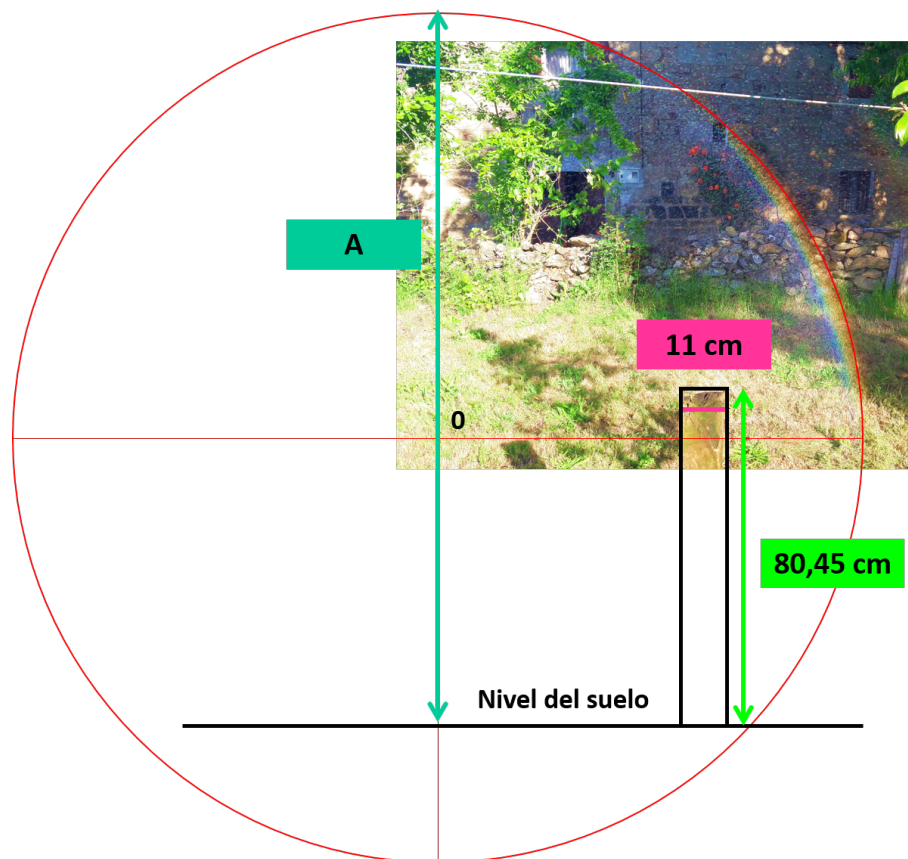
Distancia H:

En la *figura 3*, se observa que se puede obtener de forma indirecta, como la diferencia de dos medidas que si pueden obtenerse de la foto:

$$H = A - O \quad (2.2)$$

La altura del arcoiris, A, se refiere a la que le corresponde cuando lo situamos en el mismo plano que el poste de madera que se obtiene directamente de la fotografía, en píxeles.

Como nosotros sólo vemos un fragmento del arcoiris, reconstruimos la circunferencia completa, para el color rojo, intentando ajustarla lo mejor posible y dado que solo se ve una parte del poste pero conocemos su longitud total, podemos figurar gracias al factor de conversión, el poste completo, que nos indicará dónde se encuentra el nivel del suelo. De esta forma A, será la distancia entre el punto más alto del arcoiris y el suelo.



*Figura 8: Esquema del procedimiento. Arcoiris, 17 de Junio 2018, 9:14.*

En este desarrollo, estamos suponiendo que en todas las fotos, la cámara no tenía ningún tipo de inclinación, ya que para poder relacionar píxeles con centímetros, en el eje horizontal no hay problema, pero en el vertical, si hubiese inclinación, cada píxel representaría una cantidad diferente.

La distancia  $O$ , es la altura de la cámara, en el dibujo, los ojos del observador, que se mide directamente sobre el terreno.

### 2.3.3. Ángulo del arcoiris, $\phi$

Una vez obtenidos  $\beta$  y  $\delta$ , ya estamos en disposición de calcular el ángulo de observación del arcoiris,  $\phi$ , del que recordemos, la teoría nos indica un valor de  $42^\circ$ .

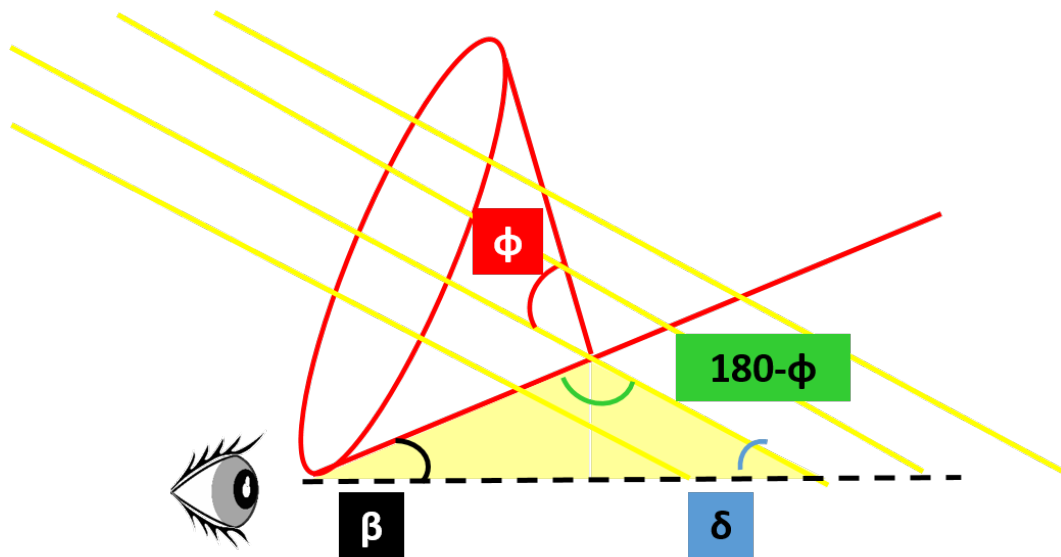


Figura 9: Esquema de ángulos.

Fijándonos en la figura, (que no es más que una ampliación de la *figura 3*), por simple geometría se deduce que:

$$180 = (180 - \phi) + \beta + \delta \quad (2.3)$$

Luego finalmente se obtiene que:

$$\phi = \beta + \delta \quad (2.4)$$



## 2.4. Resultados experimentales

Procedemos ahora a estudiar los resultados obtenidos y ver si concuerdan con lo que nos dice la teoría.

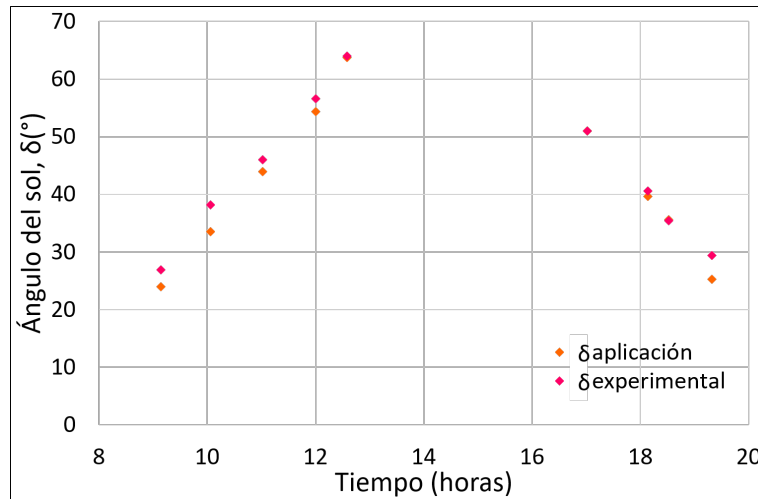


Figura 10: Ángulo del sol

En primer lugar se observa el ángulo del sol frente al tiempo, existen dos series. La representada en color naranja se corresponde con la procedente de la inclinación del sol obtenida a través de la ya mencionada aplicación. La del color rosa viene dada por los datos experimentales a partir de la sombra de los árboles en cada momento. Para obtener una mayor precisión, utilizaremos para el experimento los procedentes de la aplicación.

Podemos ver como los datos se ajustan perfectamente al movimiento que nosotros vemos del Sol desde la Tierra, sale por el este y se pone por el oeste, que se traduce en un movimiento semicircular, como el que se observa en la gráfica. Entre las 13:00 y las 17:00 de la tarde, al estar el sol en el punto más alto no era posible crear un arcoiris lo suficientemente claro y colorido como para poder aplicar el proceso de obtención de los ángulos a partir de la fotografía, luego no fue necesario calcular la posición del sol en estos casos y es por ello que no se muestran los datos de esas horas.

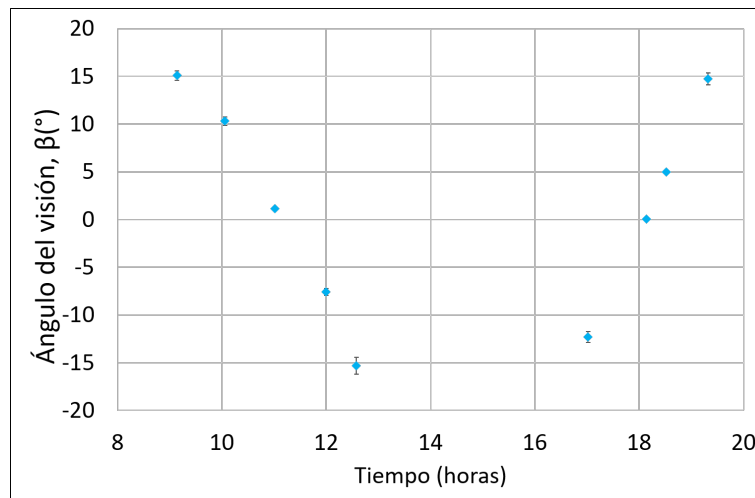


Figura 11: Ángulo de visión.

En segundo lugar, se ha representado el ángulo de visión,  $\beta$ , frente al tiempo.

Se puede observar que a medida que transcurre el tiempo la tendencia es decreciente hasta el medio día y a partir de aproximadamente las 18:00 de la tarde vuelve a crecer. Si tuviéramos datos entre la 13:00 y las 17:00, todo parece indicar que alcanzaríamos un mínimo en la posición en la que el sol alcance su punto más alto del día.

Ahora nos preguntamos por qué hay ángulos negativos y qué significado físico tienen. En el cálculo de  $\beta$ , intervienen dos cantidades como ya hemos visto,  $d$ , siempre es positiva por tanto la causa debe de estar en  $H$ . Esta se obtenía a partir de la diferencia entre la altura del arcoiris y la altura de la cámara. En la gráfica observamos que los ángulos comienzan a ser negativos entre las 12:00 y las 17:00. Lo que está ocurriendo es que como el sol se encuentra en posiciones altas, los rayos del sol inciden con un ángulo mayor que 45 grados, el arcoiris que vemos se encuentra por debajo de nuestros ojos, por lo que la altura de la cámara es mayor que la del arcoiris y por tanto  $H$ , es negativo. Este concepto se ilustra en la *figura 12*.

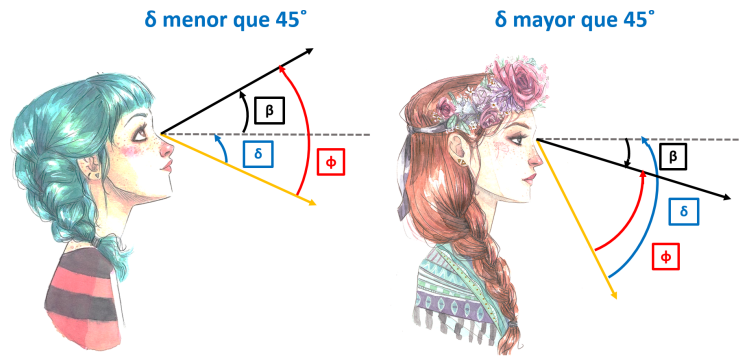


Figura 12: Signo del ángulo de visión,  $\beta$ .

Cuando el ángulo del sol,  $\delta$ , es mayor que 45 grados, el arcoiris que nosotros vemos se encuentra por debajo de nuestra línea de visión (pintada en gris), esta situación se traduce en que para lograr ver el arcoiris estaríamos obligados a mirar ligeramente hacia abajo, por lo que nuestro ángulo de visión,  $\beta$  será negativo.

Para poder comparar la trayectoria de los ángulos de sol y de visión, representamos ambos en una misma gráfica. Le hemos cambiado el signo al ángulo de visión,  $\beta$ , para que la comparación sea más visual.

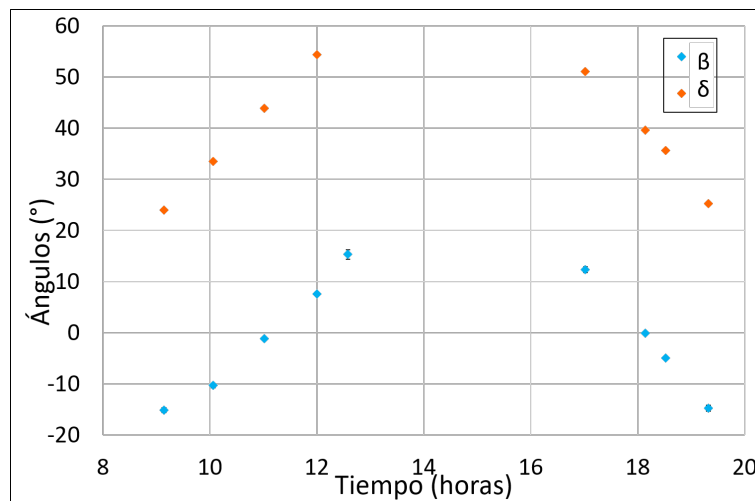


Figura 13: Comparación ángulo del sol y de visión.

La teoría nos decía que para el color rojo, el ángulo del arcoiris tenía que ser de  $42^\circ$ , y dado que la suma de  $\delta$  y  $\beta$  ya hemos visto que es el ángulo del arcoiris,  $\phi$ , el ángulo del sol y de visión deberían seguir el mismo comportamiento semicircular

pero con una diferencia de 42 grados entre ellos. Si observamos la gráfica, vemos que ambas siguen la misma tendencia, pero separadas en cada punto el ángulo del arcoiris aproximadamente.

Por último, analizamos en profundidad los valores obtenidos del ángulo del arcoiris.

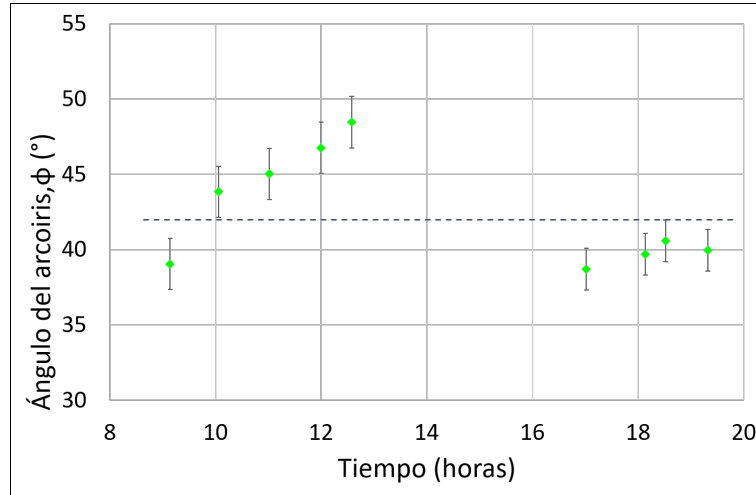


Figura 14: Ángulo del arcoiris, La recta discontinua indica el valor teórico de  $42^\circ$ .

Observamos cómo los datos de los arcoiris realizados durante la mañana se desvían más del valor que esperábamos que los obtenidos por la tarde. Para tener en cuenta este hecho, decidimos tratarlos por separado.

Podemos reordenar la ecuación 2.4 de forma que tengamos:

$$\beta = \phi - \delta \quad (2.5)$$

De esta relación vemos que los ángulos de visión y de inclinación del sol siguen una relación lineal, siendo la ordenada en el origen el valor del ángulo del arcoiris. Por esto podemos hacer un ajuste de mínimos cuadrados, uno para los datos de por la mañana y otro para los de la tarde.

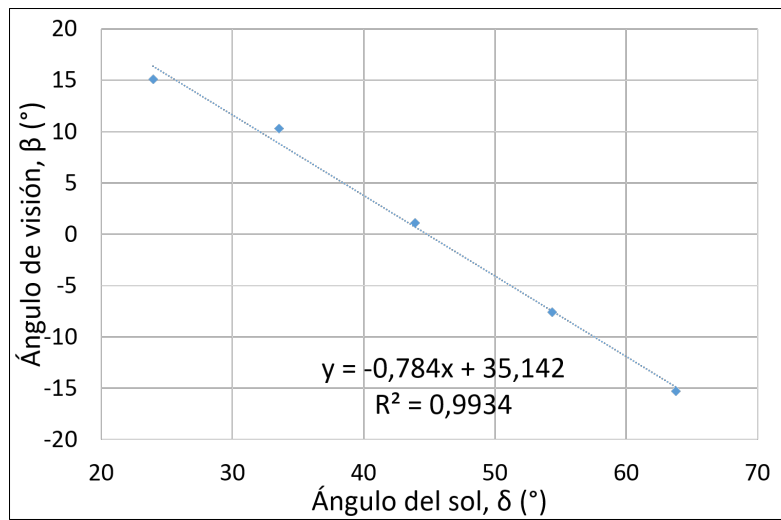


Figura 15: Ajuste mínimos cuadrados de los datos por la mañana.

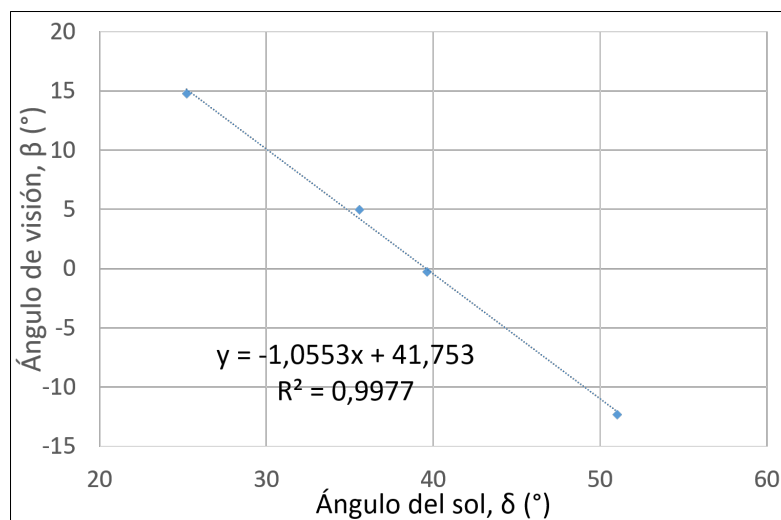


Figura 16: Ajuste mínimos cuadrados de los datos por la tarde.

Del ajuste extraemos directamente el valor de  $\phi$  con su error. Calculamos también este valor mediante el promedio y su error con la desviación típica.

	Mínimos cuadrados	Promedio
$\phi_{mañana}$ ( $^{\circ}$ )	$35.1 \pm 1.7$	$45 \pm 4$
$\phi_{tarde}$ ( $^{\circ}$ )	$41.8 \pm 1.4$	$39.7 \pm 0.8$

Tabla 2: Valores del ángulo del arcoiris.

Comprobamos cómo obtenemos resultados bastante diferentes con cada método. Fijándonos por ejemplo en los datos de por la mañana, que son los que mayor error parecían tener a vista de la *figura 14*, si sólo hubiésemos utilizado el promedio, estaríamos obteniendo una idea equivocada, pues parece que los datos se desvían ligeramente del valor teórico, sin embargo, al contrastar con mínimos cuadrados, realmente nos damos cuenta de que los datos de por la mañana no se corresponden con los resultados esperados. Este error podría estar relacionado con la posición de la cámara al tomar las fotos. Según la *ecuación 2.5*, lo que esperamos obtener es que la recta tenga pendiente -1, vemos cómo en el segundo caso se cumple, pero en el primero se aleja bastante de este valor, otro indicativo más de que los datos de por la mañana son menos fiables que los de por la tarde.

## 2.5. Conclusiones

Hemos comprobado cómo el ángulo del arcoiris  $42^{\circ}$ , depende tanto de nuestro ángulo de visión como el de la inclinación de los rayos del sol. Se ha demostrado que haciendo uso únicamente de óptica geométrica se puede determinar con un error aceptable el ángulo del arcoiris. Al conseguir varios arcoiris se ha podido ver cómo se comportan con el tiempo, siendo mayores en las primeras horas de la mañana o últimas de la tarde, y muy débiles y difíciles de ver alrededor del medio día.

## 3. Airy

### 3.1. Introducción

Ya hemos visto que Descartes fue el primero en dar una explicación del arcoiris, pero esta no tenía en cuenta todos los fenómenos posibles, como son los arcos supernumerarios:



*Figura 1: Arcos supernumerarios, 19 Octubre 2010, Hinuera, Nueva Zelanda. [9]*

Para explicar estos arcos que aparecen bajo el arcoiris primario, la teoría de rayos y la óptica geométrica de Descartes ya no son suficiente, necesitamos recurrir a la *teoría ondulatoria de la luz*. Alrededor del año 1838, Sir George Biddell Airy, un matemático británico, desarrolló una explicación para estos arcos, basada en fenómenos de interferencia, que procederemos a estudiar a lo largo de este capítulo.

### 3.2. Parámetro de impacto

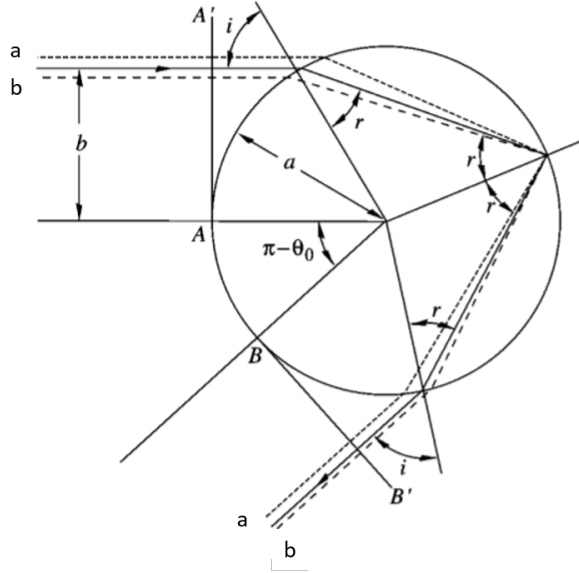


Figura 2: Óptica geométrica del arcoiris primario.

A partir de ahora en lugar de utilizar los ángulos de incidencia y refracción  $(i, r)$  vamos a trabajar en términos del *parámetro de impacto*,  $b$ , normalizado por el radio de la gota. [10] El tamaño de la gota juega un papel fundamental y con esta descripción empezaremos a tenerlo en cuenta. De forma que nuestra variable ahora será:

$$x = \sin(i) = b/a \Leftrightarrow i = \arcsen(x) \quad (3.1)$$

Podemos obtener también  $r$  en términos de la nueva variable utilizando la Ley de Snell:

$$r = \arcsin\left(\frac{\sen(i)}{N}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{N}\right) \quad (3.2)$$

Como ya hemos visto la expresión del ángulo de desviación  $j$ -ésimo, podemos expresarla ahora en función de nuestra nueva variable:

$$\theta_j = 180^\circ + 2\arcsen(x) - (j+1)2\arcsin\left(\frac{x}{N}\right) \quad (3.3)$$



En el capítulo anterior, habíamos obtenido que existía un ángulo de desviación mínimo, pero en función de los ángulos de incidencia y refracción. Procedemos ahora a obtener la expresión del mínimo en términos del parámetro de impacto:

$$\frac{\delta\theta_j}{\delta x} = \frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}} - \frac{2(j+1)}{N\sqrt{1-\frac{x_0^2}{N^2}}} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{(j+1)}{\sqrt{N^2-x_0^2}} \quad (3.5)$$

$$x_0 = \left( \frac{(j+1)^2 - N^2}{j(j+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Particularizando para el arcoiris primario ( $j=1$ ), teniendo en cuenta que  $N=4/3$  (en el agua), recuperamos el ángulo incidente que logra la mínima desviación que habíamos obtenido en el capítulo anterior, luego confirmamos que nuestros resultados son consistentes:

$$x = 0.86 = \sin(i) \Rightarrow i = 59.39^\circ$$

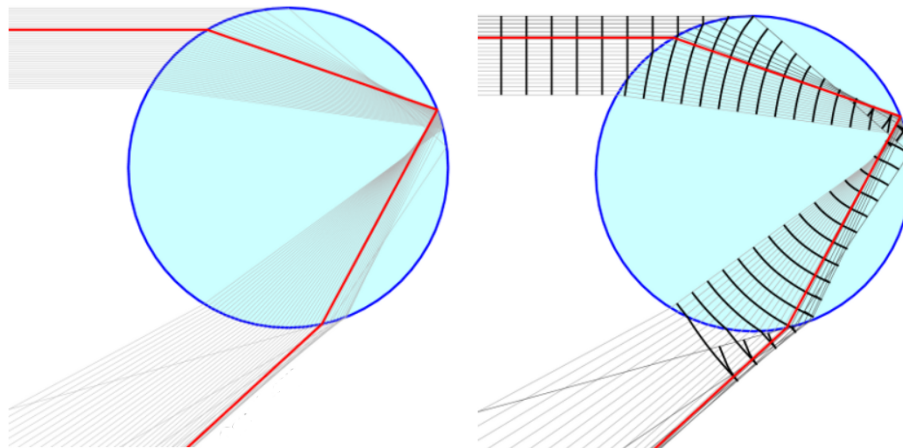
Por último, para examinar la dependencia con  $x$ , podemos hacer un desarrollo de Taylor en torno al mínimo, que se utilizará más adelante.

$$\theta_0 = \theta(x_0)$$

$$\theta \simeq \theta_0 + \frac{\delta^2\theta(x_0)}{\delta x^2} \frac{(x-x_0)^2}{2} \quad (3.7)$$

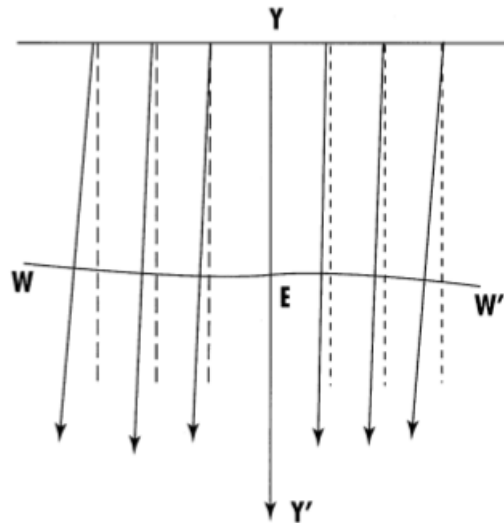
### 3.3. Arcos supernumerarios

Los arcos supernumerarios son una serie de arcos, levemente visibles que se sitúan bajo el arcoiris primario. Estos son esencialmente el resultado de la interferencia entre rayos emergiendo desde la gota cercanos al ángulo del arcoiris. Volviendo a la *figura 2*, los rayos a y b, entran en la gota, paralelos, a ambos lados del rayo del arcoiris (el rayo para el cual la desviación era mínima) pero cuando salen no tienen por qué seguir caminos paralelos, esto ocurrirá solo para determinados rayos incidentes. Vamos a considerar ahora frentes de onda, superficies de fase constante, perpendiculares a los rayos. Las ondas incidentes están en fase, mientras que los rayos que salen de la gota, por lo general ya no lo están. Cada rayo dentro de la gota recorre un camino de diferente longitud, por tanto, volviendo a nuestros rayos iniciales a y b, existe una diferencia de caminos entre ellos. Esta diferencia va a dar lugar a un patrón de interferencia, pudiendo darse interferencias constructivas (reforzándose la intensidad) si es un número entero de longitudes de onda, o destructivas (disminuyendo la intensidad) si es un número entero impar de semilongitudes de onda. Aparecen un conjunto de máximos y mínimos que se extienden entre la dirección de la luz incidente y el ángulo de Descartes.

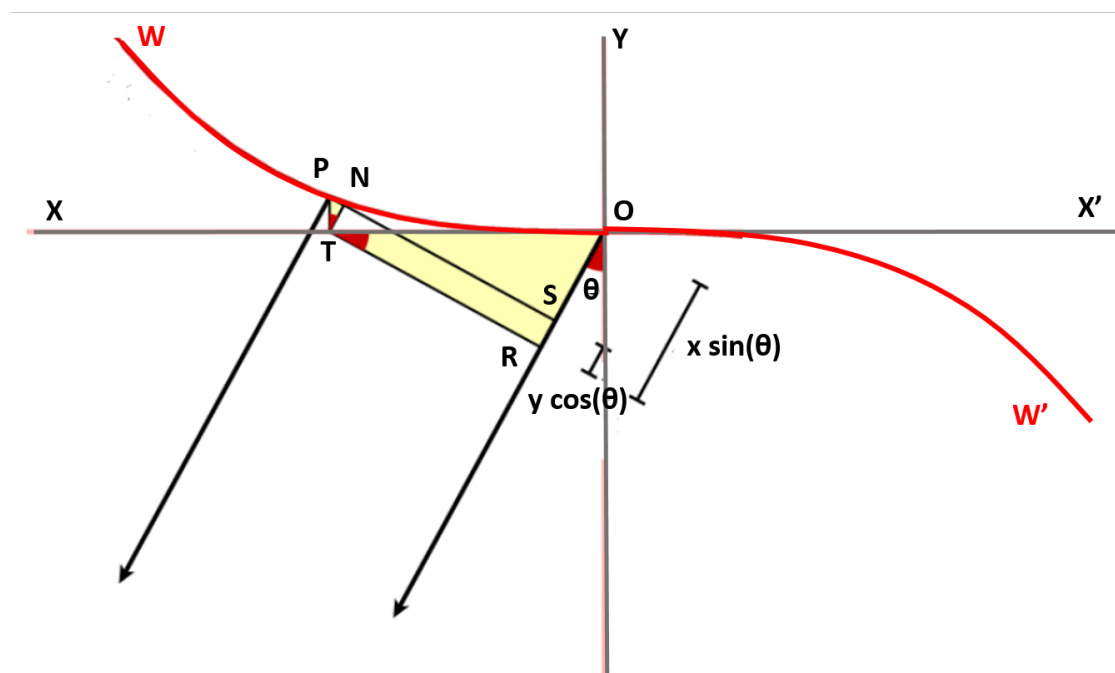


*Figura 3: Diferentes partes del frente de onda de los rayos del sol inciden en la gota a tiempos distintos, por lo que algunas partes empiezan poco a poco a disminuir su velocidad en distintos momentos, lo que implica una curvatura en dichos frentes de onda. Es determinante la forma en la que los frentes de onda se doblan sobre sí mismos, ya que al cruzarse los rayos, se mezclan ondas con distintos frentes, que causan la interferencia.[8]*

### 3.4. Integral de Airy



(a)



(b)

Figura 4: (a) La recta  $YY'$ , representa el rayo de desviación mínima y los otros rayos, representan los rayos cercanos que emergen del frente de onda cúbico,  $WW'$ ; (b) Geometría del frente de onda  $WW'$  que conduce a la integral de Airy.

Como se puede observar en la *figura 4a*, si  $YEY'$  representa el rayo que emerge con desviación mínima, los rayos a cada lado de este, son desviados a través de ángulos mayores. Si consideramos ahora el correspondiente frente de onda  $WEW'$  distorsionado con respecto al frente  $XOX'$  (*figura 4b*) correspondiente a rayos paralelos, estamos ante una aproximación cúbica del frente de onda en el entorno del punto E, que constituye un punto de inflexión. Tomando el punto E como origen de coordenadas e  $YY'$ ,  $XX'$  como los ejes de coordenadas, la ecuación del frente de onda  $WEW'$  puede ser escrita como:

$$y = c'x^3 \quad (3.8)$$

Es razonable esperar que las dimensiones lineales del frente de onda estén relacionadas con el tamaño de la gota de la que procede, por lo que podemos expresarlo en términos del radio de la gota:

$$y = \frac{c}{a^2}x^3 \text{ siendo ahora la constante } c, \text{ adimensional} \quad (3.9)$$

Ya estamos en disposición de deducir la forma de la 'integral del arcoiris' introducida por Sir George Airy en 1838.[1]

A partir de la *figura 4b*, podemos encontrar una expresión para la amplitud de la onda en una dirección haciendo que el ángulo  $\theta$  sea el de desviación mínima. Vamos a considerar la diferencia de caminos,  $\eta$  entre los puntos P(x,y) y O.

$$\eta = OS = OR - RS = OR - TN = \quad (3.10)$$

$$= x\sin(\theta) - y\cos(\theta) = x\sin(\theta) - \frac{c}{a^2}x^3\cos(\theta) \quad (3.11)$$

En términos relativos, si la oscilación de un pequeño elemento  $dx$  del frente de onda en O, es representado por  $\sin(\omega t)$ , entonces esto forma un elemento similar en P,  $\sin(\omega t + \delta)$  donde

$$\delta = \frac{2\pi\eta}{\lambda} = k\eta \quad (3.12)$$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda y  $k$  el número de onda.

Para el frente de onda completo, la oscilación total acumulada viene dada por la integral:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t + k\eta)dx \quad (3.13)$$

Utilizando las propiedades del seno de la suma y teniendo en cuenta que el seno es una función impar, como estamos integrando en un intervalo par:

$$\psi = \sin(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k\eta) dx = A \sin(\omega t) \quad (3.14)$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable

$$\xi^3 = \frac{2kcx^3 \cos(\theta)}{\pi a^2} \quad (3.15)$$

$$m\xi = \frac{2kx \sin(\theta)}{\pi} \quad (3.16)$$

Podemos expresar el argumento del coseno, en términos de estas nuevas variables, teniendo en cuenta la *ecuación 3.10*:

$$k\eta = kx \sin(\theta) - \frac{kc}{a^2} x^3 \cos(\theta) = \frac{\pi}{2} m\xi - \frac{\pi}{2} \xi^3 \quad (3.17)$$

$$A = \left( \frac{\pi a^2}{2kcc \cos(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} (m\xi - \xi^3) \right) d\xi \quad (3.18)$$

Esta es la integral del arcoiris de Airy, publicada por primera vez en su libro “On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic” [11]

El significado del parámetro  $m$ , puede ser obtenido eliminando  $\xi$  de las *expresiones 3.15 y 3.16*.

$$m = \frac{2kx \sin(\theta)}{\pi \xi} = \frac{2kx \sin(\theta)}{\pi} \left( \frac{\pi a^2}{2kcx^3 \cos(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$m = \left( \frac{2ka}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

siendo  $m$  proporcional a  $\theta^3$  para valores suficientemente pequeños de  $\theta$  (el ángulo de desviación del arcoiris).

### 3.5. Desfase entre los frentes de onda

En la *figura 2*, el rayo sólido representa el rayo de desviación mínima, que emerge en  $\theta = \theta_0$ . A cada lado de este, se encuentran dos rayos, con línea punteada, que emergen con un ángulo ligeramente distinto. Podemos escribir la fase acumulativa,  $\phi(x)$  [10], a lo largo del rayo del arcoiris entre las superficies AA' y BB' como sigue:

$$\phi(x) = 2ka [1 - \cos(i) + 2N\cos(r)] \quad (3.19)$$

Donde  $2(1 - \cos(i))$  representa la suma de las distancias desde tanto AA' como BB' a la superficie de la gota, y  $4N\cos(r)$  es N veces la longitud del camino interior a la gota.

Si reescribimos la fase en términos del parámetro de impacto:

$$\phi(x) = 2ka \left[ 1 - \sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt{N^2 - x^2} \right] \quad (3.20)$$

Estamos interesados en el comportamiento de  $\phi(x)$  en el entorno de  $x = x_0$ , por lo que efectuamos su derivada:

$$\frac{d\phi}{dx} = 2ka \left[ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{N^2 - x^2}} \right] \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta la *expresión 3.4*:

$$\frac{d\phi}{dx} = kax \frac{d\theta}{dx} \quad (3.22)$$

Cerca del ángulo del arcoiris,  $\theta = \theta_0$  (y por tanto cerca de  $x = x_0$ ), este resultado puede ser escrito en términos de una nueva variable:

$$\xi = x - x_0$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = ka \left[ x_0 \frac{d\theta}{d\xi} + \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right] \quad (3.23)$$

De donde integrando en ambas partes desde 0 hasta  $\xi$ :

$$\phi(\xi) - \phi_0 = ka \left[ x_0(\theta - \theta_0) + \xi\theta - \int_0^\xi \theta(\xi') d\xi' \right] \quad (3.24)$$

Utilizando el resultado obtenido en la *sección 2*, de que cerca de  $\theta = \theta_0$ :

$$\theta(\xi) \simeq \theta_0 + \frac{\theta'' \xi^2}{2} + O(\xi^3) \quad (3.25)$$

Se muestra fácilmente que

$$\phi(\xi) \simeq \phi_0 + ka \left[ x_0(\theta - \theta_0) + \frac{\theta'' \xi^3}{3} + O(\xi^4) \right] \quad (3.26)$$

De forma que para dos rayos, uno cerca del otro, pero a lados opuestos del rayo de desviación mínima, con valores pequeños iguales y opuestos de  $\xi$ , como lo son a y b (*figura 2*), se sigue que su diferencia de fase es

$$\delta = \phi(\xi) - \phi(-\xi) \simeq 2ka \frac{\theta'' \xi^3}{3} \quad (3.27)$$

Si la diferencia de fase es igual a un múltiplo entero de  $2\pi$ , entonces los rayos interfieren de forma constructiva. Igualando la expresión que acabamos de obtener y expresando  $\xi$  en términos de  $\theta - \theta_0$ :

$$\theta_M - \theta_0 = \frac{(\theta'')^{1/3}}{2} \left( \frac{3\pi M}{ka} \right)^{2/3}, \quad M=1,2,\dots \quad (3.28)$$

Obtenemos la condición de interferencia constructiva, aunque realmente hay que sustituir M por  $(M+1/4)$  para obtener una solución mas correcta. Los ángulos que corresponden con interferencias constructivas, definen la posición de los arcos supernumerarios. Como se extienden con ángulos mayores que  $\theta_0$ , aparecen dentro del arcoiris primario, y los colores siguen el mismo orden que este. No se suelen ver con frecuencia, ya que se requieren unas condiciones óptimas para que no aparezcan borrosos o descoloridos.

Para aprovechar al máximo las expresiones de la función de fase,  $\phi(x)$  y  $\theta - \theta_0$ , refiriéndonos ahora al frente de onda a lo largo de BB' (*figura 2*), se puede probar que utilizando la integral de Kirchhoff para la difracción, la amplitud de la onda dispersada cerca de  $\theta = \theta_0$  es

$$\psi_{Scatt} \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{ika(\theta-\theta_0)\xi} e^{-ika(\theta'')\xi^3/6} d\xi \quad (3.29)$$

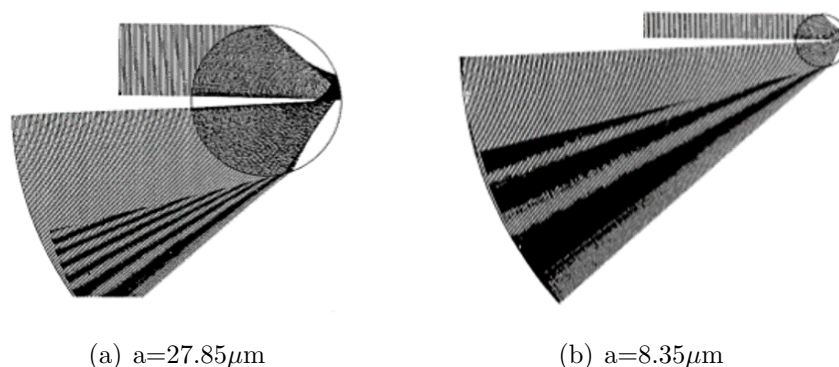
Esto, puede ser expresado en la forma de una integral de Airy  $\text{Ai}(-\eta)$ , fundamentalmente equivalente a la *expresión 3.18*.

$$Ai(-\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} - t\eta\right) dt \quad (3.30)$$

$$\text{donde } \eta = \left(\frac{2k^2 a^2}{\theta''}\right)^{\frac{1}{3}} (\theta - \theta_0)$$

### 3.6. Tamaño de la gota

De la sección anterior se deduce que el tamaño de la gota también juega un papel importante en los arcos supernumerarios, de él va a depender el ancho de las bandas y el espaciado entre ellas.[10] Cuanto menor sea el tamaño de la gota, mayor espaciado:



*Figura 5: Se observan los frentes de onda curvados, que surgen de dos gotas de lluvia de distintos tamaños. Para una longitud de onda dada, por ejemplo para el color rojo con  $700\text{nm}$ , la gota de la izquierda, es de  $27.85\mu\text{m}$ , que da lugar a arcos supernumerarios estrechos, ligeramente espaciados. Sin embargo, según disminuimos el tamaño de la gota, los arcos se vuelven más anchos y existe más espacio entre ellos, como se puede ver en la figura de la derecha, que se corresponde con un tamaño de gota de  $8.35\mu\text{m}$ . [1]*

Si contribuyen a la formación gotas de muchos tamaños diferentes, los arcos tienden a solaparse y las bandas que se distinguirían con claridad si se tratara de gotas pequeñas y por tanto esféricas, se difuminan. Como las gotas de mayor tamaño contribuyen más en la parte baja del arco que en la superior, en esta última las bandas son más notables, porque son resultado casi en su totalidad de las gotas pequeñas, mientras que cerca del horizonte, las gotas más grandes a la vez que contribuyen también tienden a desenfocar las bandas de interferencia.



El ángulo  $(\theta_M - \theta_0)$  depende del tamaño de la gota, para gotas grandes es demasiado pequeño y los arcos se extienden dentro del arcoiris primario, mezclándose así los colores y dejando de ser visibles. No sólo necesitamos que las gotas sean pequeñas, deben tener un tamaño uniforme para poder verlos con claridad, de lo contrario, el máximo puede verse descolorido debido a los diferentes tamaños. Jackson [1] demostró que el tamaño óptimo uniforme de gota que los hace visible es  $a=0.28\text{mm}$ . Gotas más grandes causan que los supernumerarios queden ocultos por efectos de la dispersión. Por último, si las gotas son muy pequeñas ( $a < 50\text{micras}$ ), los colores apenas son dispersados y tienen picos primarios amplios casi uno encima del otro, como resultado se obtiene un arco de niebla.

Para comprobar este efecto del tamaño de la gota vamos a recurrir a la sección transversal de dispersión clásica,  $d\sigma/d\Omega$ :

$$\frac{d\sigma_{\text{clasica}}}{d\Omega} \simeq a^2 \frac{x_0}{\sin(\theta_0)} \sqrt{\frac{2}{\theta''(\theta - \theta_0)}} \quad (3.31)$$

que puede ser expresada con la aproximación de Airy como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq 2\pi a^2 \frac{x_0}{\sin(\theta_0)} \left(\frac{2}{\theta''}\right) (ka)^{\frac{1}{3}} |Ai(-\eta)|^2 \quad (3.32)$$

Vamos a representar esta sección transversal de Airy, en función de  $\theta$ , utilizando Python, (el código se adjunta en el apéndice). Primero tenemos que definir y calcular todas las variables que intervienen en la *ecuación 3.32*.

Empezaremos particularizando las *ecuaciones 3.6, 3.3 y 3.4* para el arcoiris primario ( $j=1$ ):

$$x_0 = \sqrt{\frac{4 - N^2}{3}} \quad (3.33)$$

$$\theta = 180^\circ + 2\arcsen(x) - 4\arcsin\left(\frac{x}{N}\right) \quad (3.34)$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta x} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{N\sqrt{1-\frac{x^2}{N^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{N^2-x^2}} \quad (3.35)$$

$$\frac{\delta^2\theta}{\delta x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4x}{(N^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.36)$$

Si ahora evaluamos la segunda derivada en  $x_0$ , ya tendremos la expresión que buscábamos.

$$\theta'' = \frac{\delta^2 \theta(x_0)}{\delta x^2} = \frac{2\sqrt{\frac{4-N^2}{3}}}{\left(1 - \frac{4-N^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\sqrt{\frac{4-N^2}{3}}}{\left(N^2 - \frac{4-N^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.37)$$

$$\theta'' = \frac{(12)\sqrt{\frac{4-N^2}{3}}}{\left(\frac{N^2-1}{3}-4\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9\sqrt{4-N^2}}{2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.38)$$

La función de Airy,  $Ai$ , la utilizamos directamente de la biblioteca de funciones especiales de Python, luego sólo nos queda definir  $\eta$ .

$$\eta = \left(\frac{2k^2 a^2}{\theta''}\right)^{\frac{1}{3}} (\theta - \theta_0) \quad (3.39)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.40)$$

Todas estas expresiones dependen directa o indirectamente del índice de refracción normalizado  $N$  y de la longitud de onda  $\lambda$ . Vamos a representarlo para el color rojo y el violeta, variando el tamaño de la gota  $a$ .

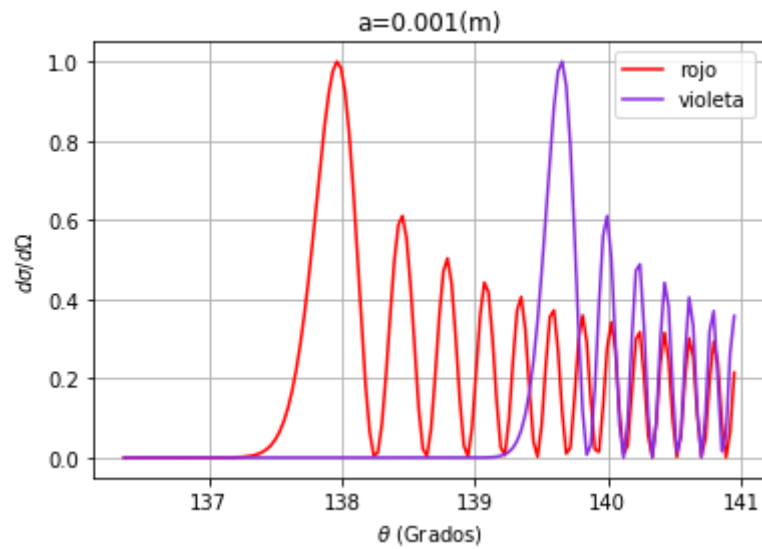


Figura 6: Sección transversal de dispersión para una gota grande, de 1mm. Los máximos aparecen dentro del arcoiris primario y no se ven los arcos.

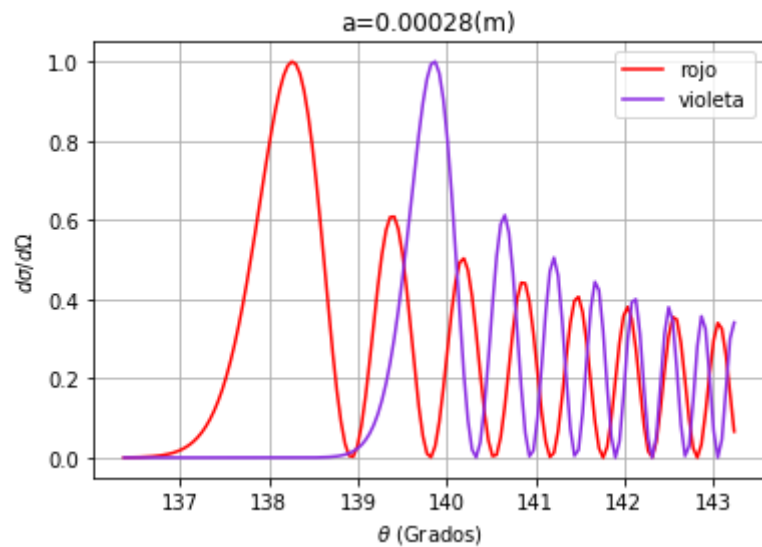


Figura 7: Sección transversal de dispersión para una gota de 0.28mm, el tamaño óptimo, para el cual los máximos del rojo coinciden con los mínimos del violeta, permitiendo ver los arcos supernumerarios.



Figura 8: Arcos supernumerarios, 30 de Mayo del 2016, Oviedo [13], equivalente al cálculo del tamaño óptimo que permite verlos con claridad.

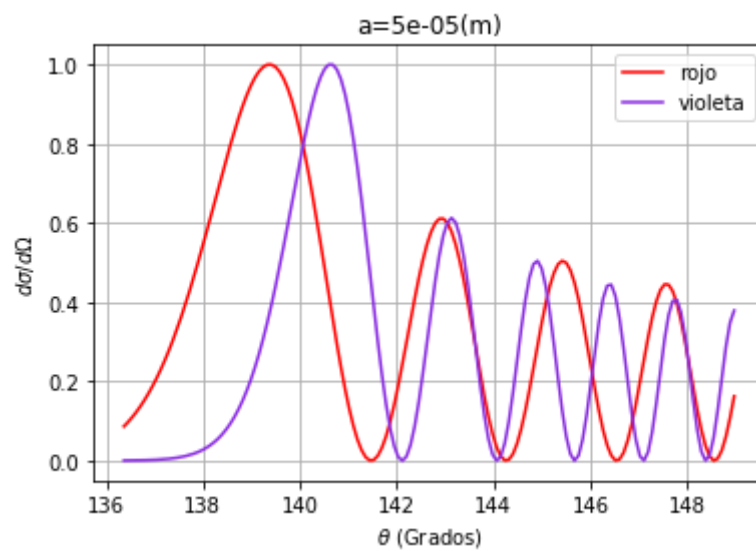


Figura 9: Sección transversal de dispersión para una gota pequeña, de  $50\mu\text{m}$ . Nótese la coincidencia de los máximos para el rojo y el violeta, que afecta a la separación de colores y causa que los colores se solapen. Como resultado lo que se observa es un arco de niebla.



*Figura 10: Arco de niebla, 3 de Noviembre del 2018, Oviedo.[13], equivalente al cálculo de la sección transversal de dispersión para gotas pequeñas.*

Como indicaba la teoría, se observa que efectivamente para el tamaño óptimo de  $0.28\text{mm}$ , los picos están lo suficientemente separados como para poder ver los colores, los máximos del rojo coinciden con los mínimos del violeta, permitiendo que los arcos se vean con claridad (*figuras 7 y 8*), sin embargo si nos vamos a una gota mayor, de  $1\text{mm}$ , estos aparecen dentro del arcoiris primario (*figura 6*). De igual modo, para gotas muy pequeñas, de  $50\ \mu\text{m}$ , aunque los picos están más separados, estos tienen un ancho mayor, que hará que se mezclen, lo que se traduce en un arco de niebla (*figuras 9 y 10*).



## 4. Coloración por reflexión total interna

### 4.1. Introducción

Durante la realización de este trabajo, se publicó un artículo en *Nature*[12], relacionado directamente con los aspectos que se tratan en el mismo y que se resumirá a lo largo de este capítulo.

Como ya hemos visto, muchos fenómenos físicos crean color, gracias a mecanismos de dispersión, difracción e interferencia, sin embargo, lo interesante de este artículo, es que describe un mecanismo desconocido hasta ahora para crear colores estructurales iridiscentes con una gran separación angular espectral, basado en fenómenos de reflexión e interferencia semejantes a los que dan lugar a los arcos supernumerarios estudiados por Airy.

### 4.2. Observación experimental

Hasta ahora hemos estudiado la dispersión de la luz en gotas de agua en aire, Goodling *et al* hicieron su descubrimiento estudiando gotas bifásicas de dos polímeros con distinto índice de refracción, 1.37 y 1.27, situándose el de mayor índice en la parte superior de la gota. Es decir, se trata de dar un paso más en la física del arcoiris, en el que el color puede ajustarse modificando las propiedades de las gotas (tamaño e índice de refracción de los distintos materiales que la componen).

Primero, Goodling *et al* observaron coloración estructural en gotas de aceite monodispersas y bifásicas formadas por heptano y perfluorohexano, con índices de refracción  $n_H \simeq 1.37$  y  $n_P \simeq 1.27$ , dispersadas en un surfactante acuoso, como se muestra en la (*figura 1a*). Cuando se iluminaban con luz blanca colimada desde arriba, observaron que las gotas que tenían la intercara cóncava interna entre los aceites constituyentes orientada hacia arriba mostraban una coloración que dependía del ángulo de reflexión (*figura 2*). Observaciones microscópicas, muestran que esta luz reflejada se origina en un anillo cerca de la línea de contacto trifásica de las gotas, de donde se infiere que la causa del color es la interacción entre la luz y la materia dentro de cada gota individualmente y no por agrupaciones periódicas de gotas (*figura 1b*).

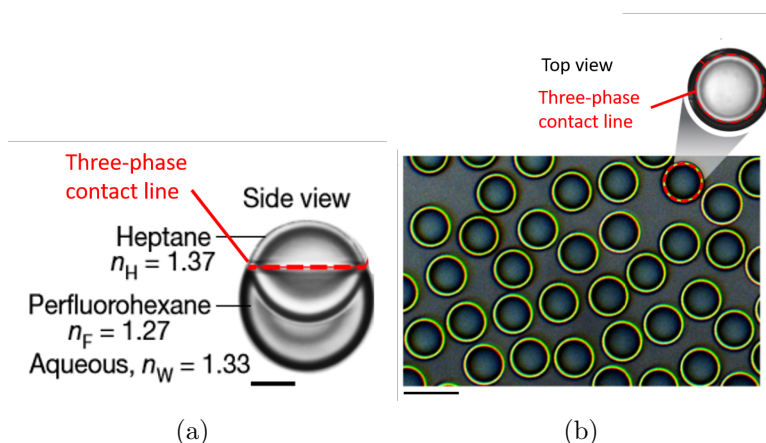


Figura 1: a) Esquema óptico que describe los componentes y la geometría de la gota bifásica. Las gotas se orientan debido a la gravedad con la parte más densa, el perfluorohexano, hacia abajo. (Barra de escala  $25 \mu\text{m}$ ). b) La imagen microscópica muestra cómo cada gota, refleja el mismo color independientemente de la localización de sus gotas vecinas y cómo el color siempre surge cerca de la línea de contacto trifásica de las gotas. (Barra de escala  $100 \mu\text{m}$ ).

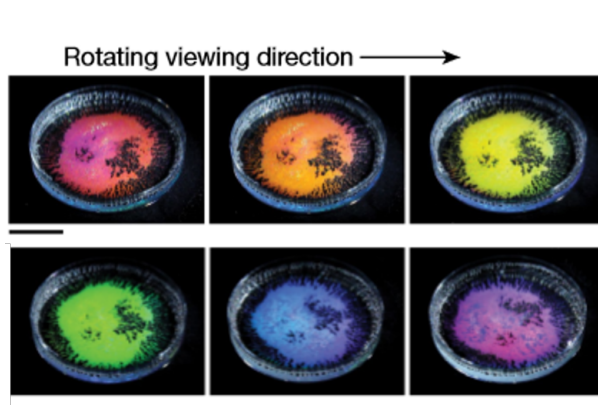
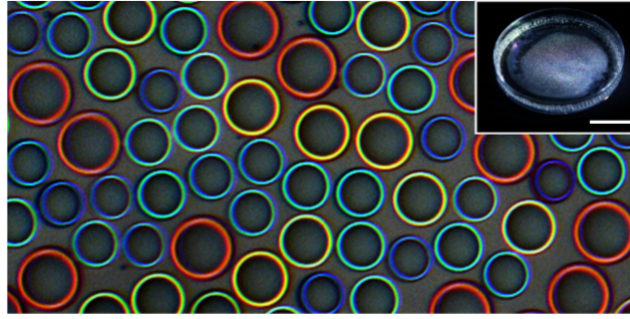


Figura 2: Placa de Petri que contiene una monocapa de las mismas gotas monodispersas de la figura 1. Al ser iluminadas con luz blanca colimada desde una dirección fija y fotografiadas desde diferentes ángulos de observación, se muestra cómo el color reflejado varía. (Barra de escala  $2 \text{cm}$ ).

El siguiente paso fue ver qué sucedía si se utilizaban gotas polidispersas (de distintos tamaños), que mantuvieran la misma proporción de volumen de aceite y ángulos de contacto idénticos pero cambiando el tamaño de las gotas, como se muestra en la figura 3. Se encontró que el color tenía una dependencia con el

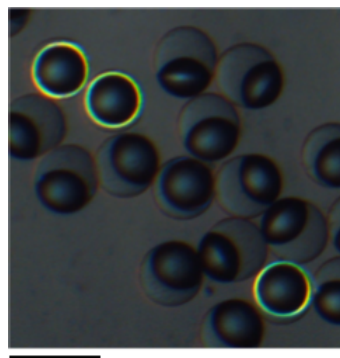


tamaño y que la mezcla de todos los colores daba lugar a una apariencia blanca brillante observable a simple vista.



*Figura 3: Gotas polidispersas con la misma morfología y composición que las de la figura 1. Se observa cómo al variar el tamaño aparecen distintos colores en reflexión. (Barra de escala 100  $\mu\text{m}$ .) La imagen macroscópica de la placa de Petri muestra como la mezcla de estas gotas polidispersas, efectivamente refleja una luz blanca brillante. (Barra de escala 2 cm).*

Se intentó replicar el fenómeno en gotas polimerizadas. Se observó que al ser las partículas sólidas, retienen el color reflejado pero no se orientan tan bien como las gotas líquidas con la gravedad (*figura 4*). Esto manifiesta la importancia de la orientación de la interfaz en relación a la luz para generar el efecto óptico.



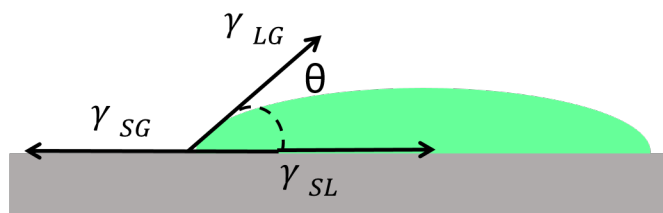
*Figura 4: Imagen al microscopio óptico de la reflexión de partículas sólidas dispersadas en agua, con la misma morfología que en la figura 1 salvo porque estas gotas han sido polimerizadas. Esto causa que ya no se orienten de forma uniforme y el efecto de coloración se degrada. Este hecho pone de manifiesto la importancia de la orientación de la interfaz para lograr la reflexión. (Barra de escala 100  $\mu\text{m}$ ).*

Goodling *et al* repitieron su experimento con gotas sésiles, es decir, condensadas sobre una superficie plana. Para entender este tipo de gotas, es necesario introducir los conceptos de tensión superficial y ángulo de contacto.[14]

La tensión superficial se debe a que las fuerzas que afectan a la molécula son distintas en el interior del líquido y la superficie. En el interior, cada molécula está sometida a fuerzas de atracción que en promedio se anulan, mientras que en la superficie existe una fuerza hacia el interior del líquido. Por otro lado, una molécula que esté en contacto con otra molécula vecina, está en un estado de menor energía que el que tendría si no estuviera en contacto con ella. Como las moléculas que se encuentran en la superficie tienen menos vecinas que las del interior, están entonces en un estado más alto de energía.

Los líquidos tienden a adoptar formas que minimicen su área superficial, condiciones en las que existe un mayor número de moléculas en el interior de la fase que están totalmente rodeadas, y por tanto interaccionando con las vecinas. Como las moléculas del exterior tienen una energía mayor, se minimiza la energía reduciendo el número de moléculas en superficie. Las gotas de líquido tienden a ser esféricas, debido a que la esfera es la forma geométrica con menor superficie-volumen.

Una característica importante es el ángulo de contacto, que denominamos  $\theta$  y se refiere al ángulo formado entre la tangente a la superficie libre del líquido y la tangente a la superficie del sólido, en su punto de contacto. Este ángulo depende de un equilibrio entre tres fases: el líquido, el sólido con el que el líquido entra en contacto, y el medio que rodea a ambos (la atmósfera u otro líquido) como muestra la *figura 5*. Dependiendo del valor de este ángulo, la gota tendrá un comportamiento distinto sobre la superficie. Si  $\theta < 90^\circ$ , se dice que la gota moja al sólido, por lo que la superficie es hidrófila, mientras que si es mayor que  $90^\circ$ , el la gota no moja y la superficie se considera hidrófoba. Existe un caso especial, en el que el ángulo de contacto es mayor que  $150^\circ$  y entonces nos encontramos en superficies superhidrofóbicas, el agua no es capaz de mojar la superficie y se desliza (*figura 6*).



*Figura 5: El ángulo de contacto depende del equilibrio entre las fuerzas líquido-gas, líquido-sólido y sólido-gas.*

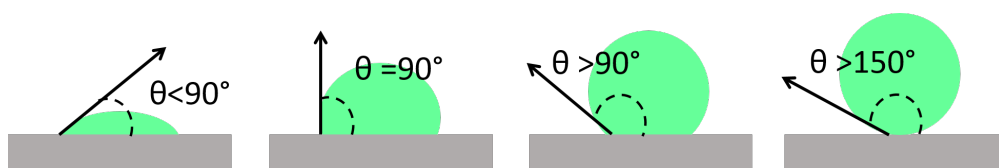


Figura 6: El comportamiento de la gota depende del valor del ángulo de contacto, si es menor que  $90^\circ$ , la gota moja, a medida que va aumentando se minimiza la superficie de contacto hasta llegar a un caso límite en el que sólo existe un punto de contacto y la gota desliza.

Como la orientación de la intercara interna de la gota era esencial, se preguntaron si serían capaces de replicar los colores en materiales más simples con una geometría cóncava similar, como gotas sésiles, en las que cambiando la tensión superficial del sólido, se puede modificar el ángulo de contacto. Goodling *et al* estudiaron entonces gotas de agua condensadas en la cara inferior de una placa de Petri transparente y observaron iridiscencia y separación de colores. Al igual que ocurría con los otros tipos de gotas, la luz emanaba cerca de la línea de contacto, esta vez sólido-líquido y el efecto dependía tanto del diámetro de la gota como del ángulo de contacto (figura 7).

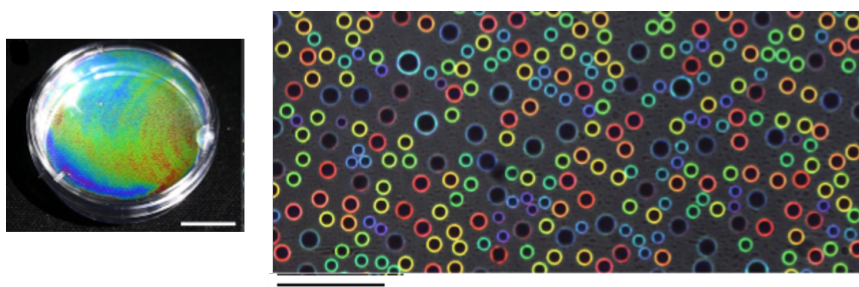


Figura 7: Fotografía de gotas de agua condensadas en la parte inferior de una placa de Petri iluminadas con luz blanca y vistas en reflexión. (Barra de escala 1cm). Imagen al microscopio óptico de la reflectancia de estas mismas gotas de agua, donde una vez más se comprueba que el color emana de los alrededores de la línea de contacto y varía con el diámetro de la gota (Barra de escala  $200 \mu\text{m}$ ).

La figura 8 muestra la importancia del ángulo de contacto para obtener la iridiscencia. El esquema que describe la gota sésil es válido también para la figura 7. Modificando la tensión superficial del agua en vidrio mediante un tratamiento hidrófilo con ozono activado por luz ultravioleta, se consigue que en las zonas tratadas el ángulo de contacto sea menor que  $90^\circ$ , provocando que la gota moje la superficie y en consecuencia no se observa coloración. Las zonas no tratadas, el

elefante, son en cambio hidrófobas, tienen un ángulo de contacto mayor que hace que la gota no moje y entonces consigue la forma adecuada para reflejar el color.

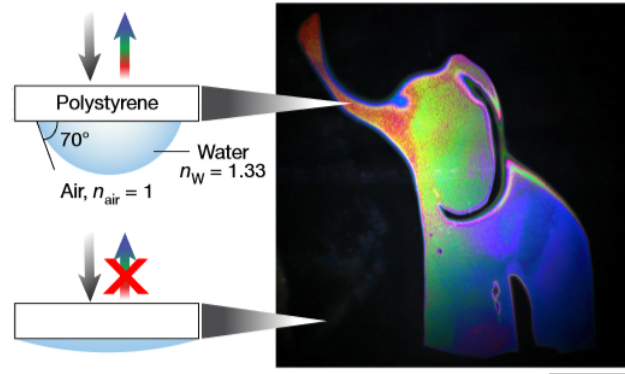


Figura 8: La imagen se obtiene al condensar agua sobre una placa de Petri con una superficie hidrofílica en forma de elefante. A pesar de que el agua condensada se encuentra por toda la superficie, las regiones más hidrófilas tratadas con ozono activado por luz ultravioleta, aparecen negras mientras que las regiones no tratadas (ángulo de contacto,  $70^\circ$ ) reflejan el color, lo que demuestra la importancia del ángulo de contacto para generar el efecto óptico (Barra de escala, 3 cm).

Por último, se comprobó que se producía un efecto similar en hemisferios poliméricos de dimensiones comparables a las gotas sésiles, fabricados mediante litografía multifotón (figura 9), el color reflejado variaba según el índice de refracción (figura 10).

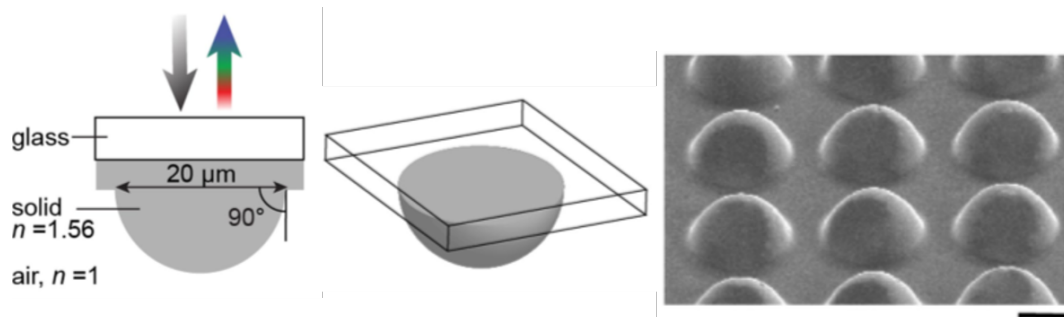


Figura 9: Esquema de la geometría de los hemisferios acompañado de una imagen obtenida por microscopio electrónico (Barra de escala  $10 \mu\text{m}$ ).

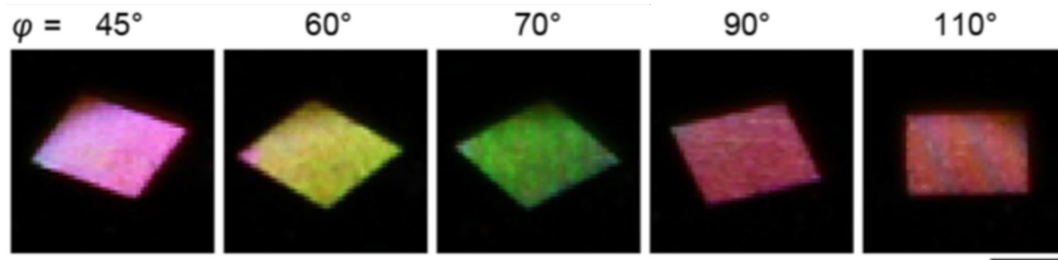


Figura 10: Fotografías macroscópicas obtenidas rotando la cámara alrededor de la muestra bajo un ángulo de iluminación constante, rotar la cámara es equivalente a cambiar el ángulo de observación, por lo que se observan distintos colores (Barra de escala 1 mm).

Si se proyecta la luz reflejada en una pantalla traslúcida hemisférica, se puede cuantificar la luz dispersada y capturar la distribución angular de colores en su totalidad, así se pueden visualizar todos los colores desde todos los ángulos posibles en una sola foto, como se muestra en la *figura 11*. Esto es equivalente a la visión del arcoiris en la atmósfera por una nube de gotas de agua en distintas posiciones.

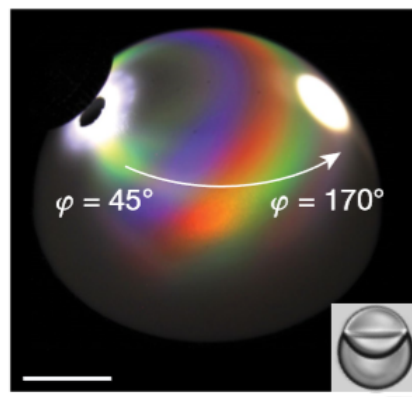


Figura 11: Vista lateral de un patrón de iridiscencia modelo iluminado con un ángulo de  $40^\circ$  (Barra de escala 1 cm). En la esquina inferior derecha se muestra la forma de la gota que se empleó (Barra de escala  $50 \mu\text{m}$ ).

Se observa un gran separación angular de colores, unos  $30\text{-}35^\circ$  entre el rojo y el azul. Los mecanismos de coloración conocidos no son capaces de explicar el fenómeno, debido al gran tamaño de las gotas y a las distintas geometrías, por lo que se procede a estudiar qué causa esta coloración.

### 4.3. Modelos teóricos

El primer paso del trabajo de Goodling *et al* fue la comprobación experimental de que los ingredientes básicos del fenómeno de separación de colores era generalizable a intercaras cóncavas a microescala entre medios con índices de refracción altos y bajos y que la luz se refleja desde el borde de la intercara cóncava. Por ello se hizo la hipótesis de que la reflexión total interna (TIR) de la luz sobre la intercara cóncava, jugaba un papel importante. Se intentó entonces encontrar una explicación del fenómeno, recurriendo a teorías ya conocidas como la dispersión del índice de refracción del material o la interferencia de la luz a lo largo de distintos caminos, estudiadas en los capítulos de Descartes y Airy respectivamente.

En primer lugar, la *reflexión total interna*, permite explicar cómo la luz es reflejada con una intensidad notable, pero ella sola no podía justificar la variación de colores observada. Por tanto debía haber otro fenómeno más.

Se recurrió entonces a un modelo basado en la dispersión del índice de refracción en el material, equivalente al modelo de Descartes para el arcoiris. Se obtuvo el índice de refracción como función de longitud de onda para cada material de la gota, donde se observó que el agua y el heptano eran más dispersivos que el perfluorohexano (*figura 12a*). Mediante un trazado de rayos a lo largo de la gota, calcularon las trayectorias para muchos rayos variando el índice de refracción para cada longitud de onda (*figura 12b*).

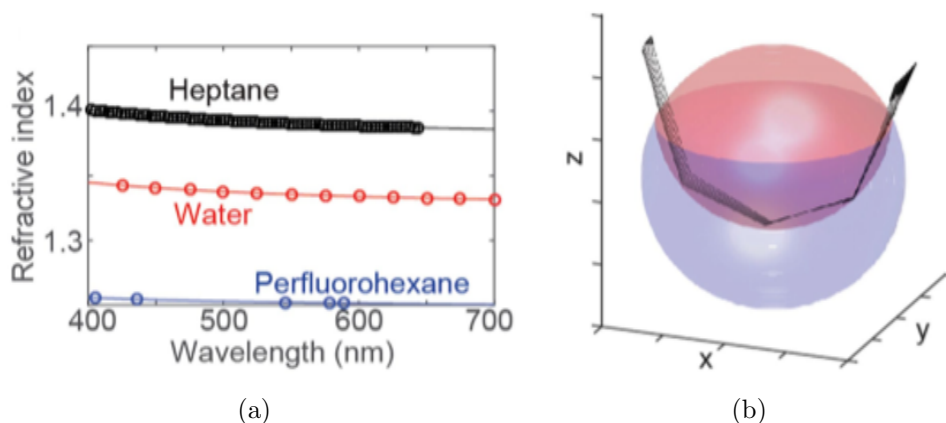


Figura 12: a) Índice de refracción de los distintos materiales que forman la gota en función de la longitud de onda. b) Trazado de rayos en la gota, donde la fase roja representa el heptano y la gris el perfluorohexano.

Se agruparon los rayos salientes según el ángulo y la longitud de onda. Para cada píxel  $(\theta, \phi)$ , se convirtió el espectro en color, con lo que se obtuvo el diagrama de

separación de colores debido a la dispersión del índice de refracción en el material (figura 13).

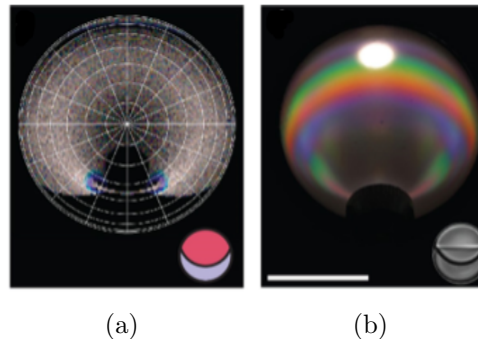


Figura 13: a) La única separación que se obtuvo fue una pequeña cantidad de azul donde comienza la reflexión total interna. b) Distribución experimental de colores iridiscentes de una gota con geometría similar para comparar. (Barra de escala 20 mm).

Si lo comparamos con lo estudiado en la parte de Descartes, proceden haciendo incidir muchos rayos en la gota variando el parámetro de impacto, para intentar encontrar si para alguna región de esos ángulos, se reproducen los colores que han observado. Pudiera darse el caso de que se encontrase un intervalo de ángulos para el cual se viesan esos colores, como ocurre con el arcoiris primario, dependiendo de con qué ángulo lo observemos, podemos ver el color rojo, el violeta o todos los colores del arcoiris. Lo que ocurre es que en este caso sólo observan una separación de colores pequeña en torno al azul, una zona blanca donde se encontrarían todos los colores y una zona oscura donde la luz no se refleja. Es decir la dispersión del índice de refracción no puede explicar la separación de colores obtenida en este caso.

Goodling *et al* pensaron también en los *cristales fotónicos*, donde la interferencia se crea mediante volúmenes y superficies periódicas con un tamaño del orden de la longitud de onda. Como una de las características de este nuevo fenómeno que estamos estudiando es que se produce para tamaños grandes en comparación con la longitud de onda de la luz, este razonamiento deja de ser válido.

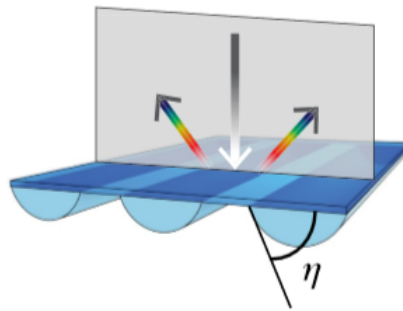
Por similitud del fenómeno, se intentó relacionar de nuevo con los arcoiris y las glorias, que se describen utilizando la *Teoría de dispersión de Mie*. El problema es que estos modelos sólo son aplicables a partículas con simetría esféricas pero dicha simetría no está presente en los sistemas que se tratan en este experimento.

Tras estudiar las distintas opciones y ver en qué puntos fallaban cada una de ellas, se hizo la hipótesis de que los colores observados resultaban de la interferencia de la luz propagándose por reflexión total interna en diferentes caminos a lo largo

de la intercara cóncava de manera semejante a los modelos de Airy estudiados en el capítulo 3.

#### 4.4. Comprobación del modelo y resultados

El siguiente paso era comprobar si el modelo era correcto. Para ello, se considera un sistema simplificado en el que se espera que la luz se propague en un solo plano, como en un segmento cilíndrico (*figura 14*). Si la dirección de la luz incidente es perpendicular al eje de simetría del cilindro, se espera que los rayos reflejados se extiendan dentro del plano perpendicular a dicho eje.



*Figura 14: Diagrama de los segmentos cilíndricos horizontales donde  $\eta$  representa el ángulo de contacto.*

La interferencia de la luz en los segmentos cilíndricos puede ser modelada de forma teórica mediante la consideración de los distintos caminos que la luz total puede tomar a lo largo de la intercara y teniendo en cuenta la fase acumulada en cada trayectoria. Veamos ahora cómo proceder.

Dados dos ángulos de entrada y de salida,  $(\theta_{in}, \theta_{out})$ , se puede determinar el color que se verá si podemos calcular todas las posibles trayectorias con esos ángulos. Para ello, consideramos un rayo de luz que viaja con un ángulo de entrada  $(\theta_{in})$  y que incide en la intercara curva con un ángulo de incidencia local  $\alpha$  (*figura 15*).



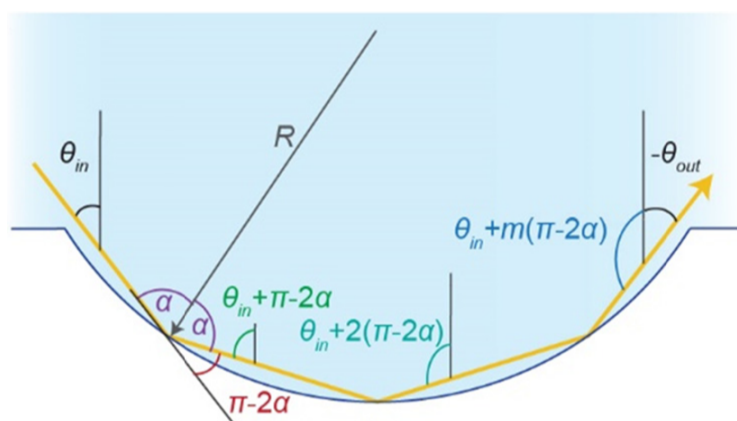


Figura 15: Diagrama con las relaciones entre el ángulo de incidencia local,  $\alpha$  y los ángulos de incidencia y salida global ( $\theta_{in}$ ,  $\theta_{out}$ ).

Como el ángulo de incidencia es igual que el reflejado, por cada reflexión, este último habrá sido desviado un ángulo  $\pi - 2\alpha$ , como se observa en la figura 14. Por tanto si el rayo sufre  $m$  reflexiones, el ángulo que se desvía será  $m(\pi - 2\alpha)$ . Teniendo en cuenta esta desviación, la dirección del rayo de salida viene dada por:

$$\pi + \theta_{out} = \theta_{in} + m(\pi - 2\alpha) \quad (4.1)$$

que recuerda a la utilizada en el capítulo de Descartes para el ángulo de desviación total. Esta relación implica que para unos ángulos de entrada y salida dados, no todos los pares de  $\alpha$  y  $m$  son posibles. Podemos determinar entonces el número mínimo de reflexiones,  $m_{min}$ , que se requieren para que la reflexión total interna tenga lugar y también el número máximo,  $m_{max}$  que permite la geometría.

Si solo consideramos los rayos que sufren reflexión total interna, entonces  $m_{min}$  viene dado por el ángulo de incidencia crítica:

$$\alpha_c = \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad (4.2)$$

Imponiendo esta condición en la ecuación 4.1, que  $\alpha$  sea  $\alpha_c$ , obtenemos el número mínimo de reflexiones.

$$m_{min} = \frac{-\theta_{in} + \theta_{out} + \pi}{\pi - 2\arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \quad (4.3)$$

Vayamos ahora con el número máximo, este puede ser calculado considerando el caso límite donde ambos rayos inciden en la línea de contacto o simplemente la pasan por alto (figura 16).

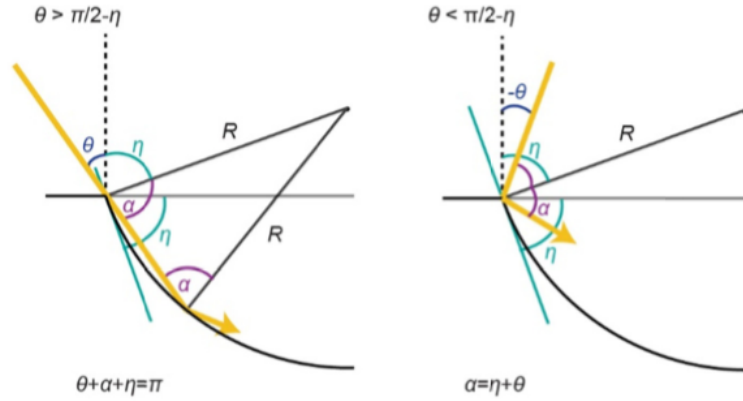


Figura 16: Máximos valores de  $\alpha$  dependiendo de si la luz entra con un ángulo mayor o menor que la tangente a la intercara.

Si la luz entra o sale con un ángulo mayor que la tangente a la intercara ( $\theta > \frac{\pi}{2} - \eta$ ), entonces la esquina de la intercara cóncava actúa como una sombra y se obtiene el valor de  $\alpha_{max\ out}$ .

$$\alpha_{max\ out} = \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - (\eta - \theta_{out}) \right| \quad (4.4)$$

Si de lo contrario, la luz entra con un ángulo menor que la tangente de la intercara ( $\theta < \frac{\pi}{2} - \eta$ ), entonces se da el valor máximo posible de  $\alpha$ , cuando la luz incide exactamente en la línea de contacto y se obtiene por tanto  $\alpha_{max\ in}$

$$\alpha_{max\ in} = \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - (\eta + \theta_{in}) \right| \quad (4.5)$$

El más pequeño de estos dos ángulos, establece un límite en el ángulo local de incidencia máximo:

$$\alpha_{max} = \min \left( \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - (\eta + \theta_{in}) \right|, \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - (\eta - \theta_{out}) \right| \right) \quad (4.6)$$

Sustituyendo este  $\alpha_{max}$  en la ecuación 4.1, obtenemos el número máximo de reflexiones.

$$m_{max} = \left\lfloor \frac{\theta_{out} - \theta_{in} + \pi}{(\pi - 2\alpha_{max})} \right\rfloor \quad (4.7)$$

Ahora que ya conocemos el número mínimo y máximo de reflexiones, vamos a determinar la longitud de camino óptico para cada reflexión permitida. Se puede emplear cualquier plano perpendicular a los rayos de entrada y de salida, pero por comodidad se utilizan aquellos planos que contengan además el centro de curvatura de la intercara (figura 17).

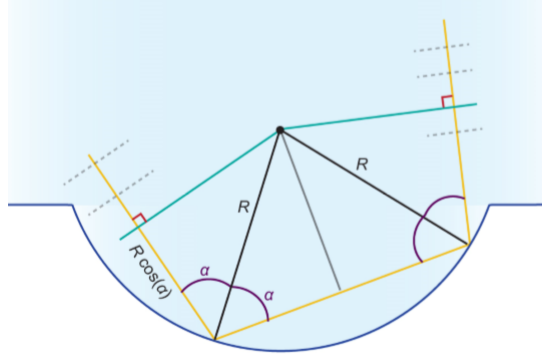


Figura 17: La distancia entre el plano de entrada y la primera reflexión es  $R\cos(\alpha)$ , entre reflexiones,  $(m-1)2R\cos(\alpha)$  y entre la última reflexión y el plano final,  $R\cos(\alpha)$ .

Así, se calcula la longitud de camino de cada trayectoria:

$$l = R\cos(\alpha) + (m - 1)2R\cos(\alpha) + R\cos(\alpha) = \quad (4.8)$$

$$= 2mR\cos(\alpha) \quad (4.9)$$

Por otro lado, se necesita el cambio de fase en cada reflexión para poder determinar el cambio de fase total en cada trayectoria y para ello se utilizan los coeficientes de reflexión de Fresnel complejos:

$$r_s = \frac{n_1\cos(\alpha) - in_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right)^2 - 1}}{n_1\cos(\alpha) + in_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right)^2 - 1}} \quad (4.10)$$

$$r_p = \frac{n_2\cos(\alpha) - in_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right)^2 - 1}}{n_2\cos(\alpha) + in_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right)^2 - 1}} \quad (4.11)$$

Donde s y p representan la polarización transversal eléctrica y magnética respectivamente. El cambio de amplitud compleja de un rayo incidente  $\theta_{in}$  tras sufrir m reflexiones antes de salir en la dirección de  $\theta_{out}$  viene dado por:

$$C_{m,s,p}(\theta_{in}, \theta_{out}) = r_{s,p}^m \exp\left(i \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} l_m\right) \quad (4.12)$$

Luego la intensidad total se obtiene como la suma coherente de todos estos caminos distintos:

$$I = \left| \sum_m A_m(\alpha_m) \left[ r_m \left( \alpha_m' \frac{n_1}{n_2} \right) \right]^m \exp\left(\frac{2\pi i n_1}{\lambda_0} l_m(\alpha_m)\right) \right|^2 \quad (4.13)$$

Donde  $A_m$  es un factor de amplitud de escala. La energía debe conservarse en la intercara, por eso lo que nos interesa no es el valor de la intensidad sino la proyección, ya que va cambiando a lo largo de la intercara cóncava.

$$A_m(\alpha_m) = \sqrt{\frac{\cos(\alpha_m)}{m}} \quad \text{donde} \quad \alpha_m = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta_{in} + \theta_{out}}{2m} \quad (4.14)$$

Sustituyendo este valor de la amplitud y la longitud de camino físico para cada trayectoria de radio R, obtenemos la expresión final de la intensidad:

$$I = \left| \sum_m \sqrt{\frac{\cos(\alpha_m)}{m}} \exp\left(i \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} 2mR \cos(\alpha_m)\right) r_{s,p}^m \right|^2 \quad (4.15)$$

Podemos ver que la intensidad  $I$ , viene dada por el cambio de fase, expresado en la exponencial y por una amplitud definida por el factor de amplitud que nos da la proyección y el coeficiente de Fresnel complejo. Tiene dependencia con la longitud de onda de la luz incidente  $\lambda_0$  y los ángulos de incidencia y de observación ( $\theta_{in}, \theta_{out}$ ).

De la información espectral obtenida de forma analítica, podemos predecir los colores que deberían ser observados. Para comprobar el modelo de forma experimental se diseñaron segmentos cilíndricos y poligonales con un número distinto de lados y se observaron colores iridiscentes reflejados en todas las estructuras capaces de sufrir múltiples reflexiones internas (*figura 18*).

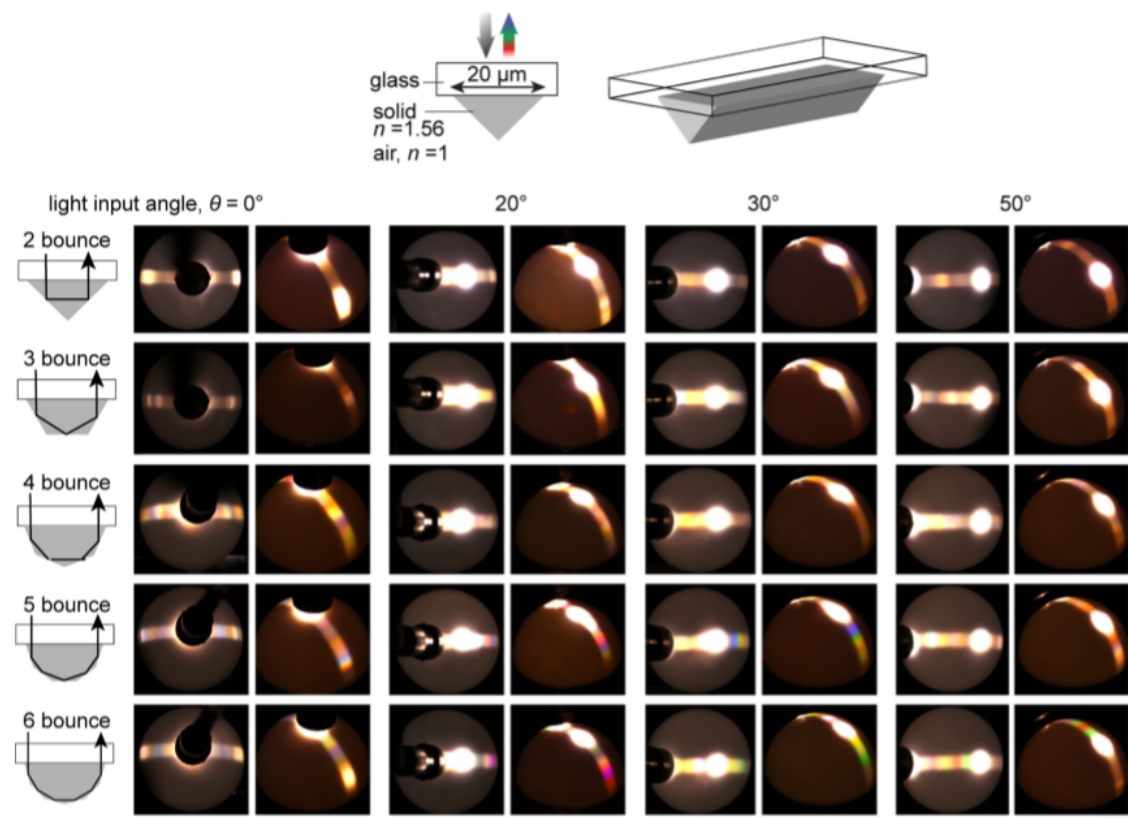
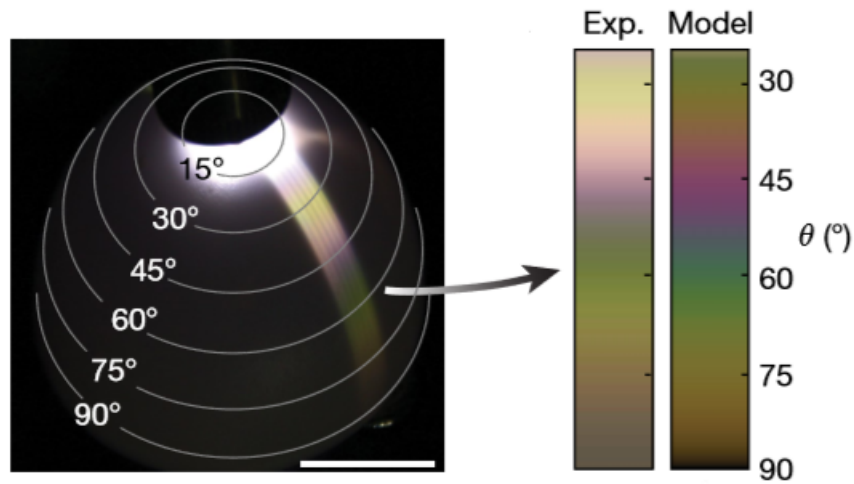


Figura 18: El número de lados de cada polígono limita el número máximo posible de reflexiones totales internas que la luz puede sufrir para un ángulo de iluminación dado. Las fotografías muestran las distribuciones de colores que se obtienen, donde  $\theta$  es el ángulo de la entrada de la luz y para cada caso se fotografía desde dos ángulos de visión. Cada polígono tiene una base de  $20\mu\text{m}$  de ancho y la barra de escala es de 1 cm.

Goodling *et al* comprobaron que todos los colores predichos por el modelo encajaban bien con la distribución angular de colores determinada experimentalmente, como se muestra en la *figura 19*.



*Figura 19: Distribución de colores reflejada de los segmentos horizontales cilíndricos cuando son iluminados con incidencia normal. Se muestran líneas con  $\theta$  constante (Factor de escala 2cm). A la derecha, se muestra la comparación entre el modelo y el experimento para iluminación de  $0^\circ$  con un ángulo de contacto de  $70^\circ$ .*

## 4.5. Conclusiones

Se ha descrito un principio de diseño que permite crear coloración estructural utilizando fenómenos de interferencia cuando la luz sufre múltiples reflexiones totales internas en intercaras a microescala. Aunque no se había estudiado previamente se encontró que era un fenómeno común, que se puede reproducir en un amplio rango de materiales y geometrías. Los dos puntos claves y necesarios para la generación de este efecto, son un buen contraste en los índices de refracción y una geometría a microescala que sean capaces de producir múltiples trayectorias de reflexión total interna para direcciones específicas de la luz incidente y la de observación. De esta manera se ha logrado un modelo analítico con capacidades predictivas que fueron verificadas comparando distribuciones de colores determinadas experimentalmente con la teoría.

Este modelo permite explicar las variaciones de color observadas para variables como el radio de curvatura, el ángulo de contacto, el contraste en los índices de refracción y el ángulo de la luz incidente. Se prevé que estos principios de diseño serán de utilidad para científicos de una gran variedad de campos que busquen modular el color y las propiedades ópticas reflectantes de los materiales. Se trata de un efecto físico que combina reflexión total e interferencia de una manera equivalente al fenómeno de los arcos supernumerarios.





## Conclusiones

El estudio del arcoiris comienza de la mano de Descartes, analizando el comportamiento de un rayo de sol que impacta en una gota de agua, donde para el arcoiris primario, el rayo sufre una reflexión y dos refracciones. Si se observan múltiples rayos que impactan en distintos puntos de la gota, se comprueba cómo muchos de ellos se agrupan a la salida en torno al ángulo de desviación mínima, que recibe el nombre de rayo de Descartes. Podemos decir entonces que el arcoiris puede ser visto desde cualquier dirección siempre que el esté unos  $42^\circ$  sobre la línea que une el ojo del observador con la sombra de su cabeza. Así, se define la forma de arco circular que adquiere el arcoiris. Existen distintas órdenes de arcoiris, aunque en la naturaleza sólo puede observarse el primario y el secundario. Estos, definen ciertas regiones: por debajo del arco primario, observamos el cielo más claro, mientras que entre ellos, se encuentra la banda oscura de Alexander, donde la intensidad se ve reducida. Otro aspecto a tener en cuenta es el tamaño de la gota y, en consecuencia la forma, las gotas más pequeñas que 0.2 mm pueden considerarse esféricas y contribuyen en cualquier parte del arcoiris, pero a medida que las gotas comienzan a ser mayores, se vuelven más ovaladas y pueden dejar de dispersar la luz con el mismo ángulo, lo que provoca la mezcla de colores y en última instancia, un arco de niebla.

En el segundo capítulo, se lleva a cabo un experimento para comprobar el modelo de Descartes. Se crean arcoiris artificiales con ayuda de una manguera a lo largo del día desde las nueve de la mañana hasta las siete y media de la tarde, exceptuando el medio día ya que no es posible verlos con claridad. Observamos cómo a primera hora de la mañana y a última de la tarde los arcoiris son más intensos y brillantes. Con un trazado de rayos y trigonometría se calculan los ángulos de visión del observador y el de inclinación del sol, aunque este último se obtiene también utilizando una aplicación para obtener mayor precisión. A partir de estos dos ángulos puede obtenerse el ángulo de Descartes. Representando el ángulo de visión frente al tiempo, se comprueba cómo tiene un comportamiento opuesto al del sol, decrece según pasan las horas y a partir del mediodía se va incrementado. A la hora de analizar este comportamiento hay que tener en cuenta que se obtienen ángulos negativos en las horas en las que el sol está en posiciones altas, ya que entonces el arcoiris se encuentra por debajo de nuestra línea de visión y nos vemos obligados a orientar la cabeza hacia abajo para poder verlo. Así si representamos de nuevo el ángulo de visión, pero esta vez los valores opuestos junto con los obtenidos del sol, siguen el mismo comportamiento, pero manteniendo entre ellos una distancia de aproximadamente 42 grados, tal como predice la teoría. Separamos los resultados obtenidos por la mañana de los de la tarde, ya que los primeros parecen tener un error sistemático y empeoran la medida. De esta forma, obtenemos un valor del ángulo de Descartes de  $41.8 \pm 1.4^\circ$ , por lo que podemos

concluir que los resultados han sido satisfactorios.

El modelo de Descartes no está completo, por lo que en el capítulo 3 se recurre a la teoría ondulatoria de la luz con Airy para explicar los arcos supernumerarios. Para este análisis, dejamos de utilizar los ángulos de incidencia y refracción, para trabajar en términos del parámetro de impacto. Los arcos supernumerarios son resultado de fenómenos de interferencia entre rayos emergiendo desde la gota cercanos al ángulo del arcoiris, pudiendo ser constructiva o destructiva, por lo que aparecen un conjunto de máximos y mínimos. Se estudia el desarrollo que da lugar a la integral de Airy, para después hacer un cálculo, con ayuda de *Python*, que ilustra el papel tan esencial que juega el tamaño de la gota en estos arcos. Si las gotas son demasiado grandes, del orden de 1mm, los arcos aparecen dentro del arcoiris primario mientras que si son demasiado pequeñas, se mezclan los colores dando lugar a un arco de niebla. Existe entonces un tamaño óptimo de gota, (0.28 mm) en el que los máximos del color rojo están en fase con los mínimos del violeta, permitiendo ver los arcos.

En el cuarto capítulo se analiza un artículo reciente de la revista *Nature*, en el que se describe un mecanismo para crear colores estructurales iridiscentes basado en fenómenos de reflexión e interferencia semejantes a los que dan lugar a los arcos supernumerarios estudiados por Airy. El primer paso de Goodling *et al* fue comprobar experimentalmente que los ingredientes básicos del fenómeno de separación de colores era generalizable. Para ello desarrollaron gotas bifásicas, monodispersas y polidispersas, gotas polimerizadas, condensadas de agua y sésiles. Demostraron así que era efectivamente reproducible en intercaras cóncavas a microescala entre medios con índices de refracción altos y bajos y que la luz se reflejaba desde el borde de la intercara cóncava. El siguiente paso fue buscar una explicación para el fenómeno, se recurrió a modelos ya conocidos (reflexión total interna, la dispersión del índice de refracción en el material, los cristales fotónicos y la teoría de dispersión de Mie) pero todos fueron descartados. Hicieron la hipótesis de que los colores observados resultaban de la interferencia de la luz propagándose por reflexión total interna en diferentes caminos a lo largo de la intercara cóncava. Desarrollaron entonces un modelo que predecía los colores que deberían ser observados y posteriormente se diseñaron segmentos cilíndricos y poligonales con los que se comprobó que los resultados experimentales encajaban bien con los predichos por la teoría. De esta forma concluye el trabajo, con un artículo sobre un método de coloración estructural muy prometedor que se prevé será de utilidad para científicos de diversos campos interesados en la modulación del color y las propiedades ópticas reflectantes de los materiales.

## Apéndice

```

# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special

#DEFINICIÓN DE CONSTANTES.....
a=0.1E-3


```

```
ttGrados=array(theta)*180./pi
#la funcion nos devuelve un vector de grados y las
#correspondientes dSigma/dOmega
return(ttGrados, dSigma)

#REPRESENTACIÓN.....
ttGradosR, dSigmaR= gota(a,landaR,NR,2.38,2.6,150)
plt.plot(ttGradosR,dSigmaR,'r',label='rojo',color='red')
ttGradosV,dSigmaV=gota(a,landaV,NV,2.38,2.6,150)
plt.plot(ttGradosV,dSigmaV,'b',label='violeta',color='
blueviolet')
plt.xlabel( "$\\theta$ (Grados)")
plt.ylabel("$d\\sigma/d\\Omega$ ")
plt.legend()
plt.grid()
plt.title(u"a={}(m)".format(a))
plt.show()
```

## Referencias

- [1] Physics Reports 356, (2002) pp 231-250. John A. Adam. The mathematical physics of rainbows and glories.
- [2] Descartes, 1637, El discurso del Método.
- [3] Walter Levin. The hidden beauty of rainbows.  
<https://www.youtube.com/watch?v=iKUSWJWMSk4t=1234s>
- [4] Atmospheric Optics.  
<https://www.atoptics.co.uk/>
- [5] Flickr Hive Mind.  
<https://hiveminer.com/Tags/arcoiris>
- [6] EarthSky  
<https://earthsky.org/earth/what-is-a-fogbow>
- [7] SunEarthTools.com
- [8] American Mathematical Society. <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2015-02>
- [9] World meteorological organization. International Cloud Atlas  
<https://cloudatlas.wmo.int/supernumerary-bow.html>
- [10] Physics Reports (1999) 320, pp 27-36. J. D. Jackson. From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy.
- [11] Transactions of the Cambridge Philosophical Society VI (1838), 379-403. G. B. Airy, On the intensity of light in the neighborhood of a caustic.  
<https://archive.org/details/transactionsofca06cam>
- [12] Nature 566, (28 Febrero 2019) pp 523-527. Amy E. Goodling, Sara Nagelberg, Bryan Kaehr, Caleb H. Meredith, Seong Ik Cheon, Ashley P. Saunders, Mathias Kolle Lauren D. Zarzar. Colouration by total internal reflection and interference at microscale concave interfaces .
- [13] Cortesía de Javier Martínez de Orueta. Asociación Meteorológica Española.
- [14] P.W. Atkins, J. De Paula, PHYSICAL CHEMISTRY, 8th Edition, O.U.P., 2006.