CONTRIBUCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DEL TANTO DE INTERÉS EN LAS RENTAS CIERTAS

POR

JOSÉ ANTONIO ESTRUGO ESTRUGO

Catedrático de Cálculo Comercial y Matemática Financiera en la Escuela Profesional de Comercio de Oviedo

Siendo penosa la resolución, con respecto a i, de la ecuación

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad (1)$$

por los procedimientos generales del Algebra (*), vencen los actuarios esta dificultad encontrando por medio de los variados métodos que existen (entre los que descuellan por la ingeniosidad del procedimiento empleado los de Baily, Gauss-Cantelli y Achard), un primer valor suficientemente aproxi-

(*) $a_{\overline{n}|i}$ es el valor actual, al tanto de interés i, de una renta unitaria, de frecuencia uno y duración n años, pagadera por atrasado. Por comodidad tipográfica la representaremos en lo que sigue por a simplemente, mientras no se preste a confusión.

mado a la única raíz que interesa (*), para ser corregido después mediante la aplicación—una sola vez en la mayoría de los casos—de la regla de Newton o la deducida por el matemático Baily, primeramente citado. (**)

La aproximación necesaria en la práctica es de una diez milésima; sin embargo, muchas veces es preciso llevarla hasta la sexta o séptima cifra decimal.

(*) En efecto, la (1) puede escribirse, multiplicando sus dos miembros por $(1+i)^n$,

$$a(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y de aquí

$$a\,i\,(1+i)^n - (1+i)^n + 1 = 0$$

Si hacemos $1+i=x$, resulta

$$a\,x^{n+1} - (1+a)\,x^n + 1 = 0 \qquad (\alpha)$$

que presenta dos variaciones, luego, por la regla de signos, tendrá dos raíces positivas o ninguna; pero la (α) se satisface para $x=1$; por tanto, existirá una segunda raiz positiva que es objeto de nuestro estudio, por ser extraña a la naturaleza del problema la primera que suministra para i el valor cero.

En la práctica se cumplen las siguientes limitaciones:

$$2 < n < 100. \qquad y\ 0'01 < i < 0'08.$$

(**) He aquí como la obtiene: Supuesto encontrado un valor aproximado i_1 haciendo $\varepsilon = i - i_1$, se tiene $i = i_1 + \varepsilon$, y sustituyendo en (1).

$$a = \frac{1-(1+i_1+\varepsilon)^{-n}}{i_1+\varepsilon}$$

de donde

$$a\,(i_1+\varepsilon) = 1-(1+i_1+\varepsilon)^{-n} = 1-(1+i_1)^{-n}\left(1+\frac{\varepsilon}{1+i_1}\right)^{-n} =$$

$$= 1-v_1^n\,(1+\varepsilon v_1)^{-n} = 1-v_1^n + n\varepsilon\, v_1^{n+1} \pm \ldots \qquad (\beta)$$

siendo $v_1 = (1+i_1)^{-1}$

Exponemos a continuación un procedimiento que permite encontrar, resolviendo una ecuación de primer grado, un valor aproximado a la raíz con error menor que potencias cuartas de i (*), dado, además, en forma de producto, lo que facilita la aplicación directa de logaritmos.

Si en (1) se desarrolla el binomio, se simplifica y dividen ambos miembros por n, queda (2)

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24} i^3 +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} i^4 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{720} i^5 \pm \ldots$$

en donde el segundo miembro es una serie alternada que converge (**) tanto más rápidamente cuanto menores sean los valores de n y de i. (***)

Teniendo en cuenta la pequeñez de ε, pueden suprimirse las potencias superiores a la primera de dicha cantidad, con lo cual, despejándola en (β) se obtiene como valor de la corrección

$$\varepsilon = i_1 \frac{a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - n\, v_1^{n+1}}$$

habiendo puesto para simplificar $a_{\overline{n}|i_1} = \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}$. —

(*) Hasta ahora para obtener esa aproximación era preciso una ecuación de segundo grado, que se elude resolver mediante aproximaciones sucesivas.

(**) La relación $\left|\frac{uk+1}{uk}\right| = \frac{k+n}{k+1} i$, siendo por tanto $\lim_{k \to \infty} \left|\frac{uk+1}{uk}\right| = i < 1$

(***) Si se observa la rápida convergencia de la serie (2), ocurre naturalmente considerar los primeros términos de la misma como valor del primer miembro, obteniéndose, como es lógico, una mayor aproximación a medida que se tengan en cuenta mayor número de ellos, que se contrarresta en la práctica por tener que resolver una ecuación de grado cada vez más elevado. Tomando los tres primeros términos, que obliga ya a establecer una ecuación cuadrática, se obtiene una aproximación grosera que no compensa los cálculos efectuados. Lo mismo ocurriría si se supone que a partir del tercero, los siguientes forman progresión geométrica de razón (n+5) i/4, a pe-

La (2) puede ponerse en esta otra forma

$$\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{a}{n}\right)=i\left[1-\frac{n+2}{3}i+\frac{(n+2)(n+3)}{12}i^2-\frac{(n+2)(n+3)n+4)}{60}i^3+\right.$$

$$\left.+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)(+5)}{360}i^4+\ldots\right)=i\,A \qquad (3)$$

siendo A la serie encerrada entre paréntesis.

Si ahora elevamos ambos miembros de (2) a la potencia 2 (n+2) / 3 (n+1), podemos escribir desarrollando el segundo miembro

$$\left[\frac{a}{n}\right]^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}}=1-\frac{n+2}{3}i+\frac{(n+2)(n+3)}{12}i^2-\frac{(n+2)(n^2+38n+65)}{324}i^3+$$

$$+\frac{(n+2)(86\,n^3+1209\,n^2+5136n+6529)}{2^5.\,3^5.\,5}\,i^4+\ldots \qquad (4)$$

que coincide en sus tres primeros términos con el valor de A en (3).

Sustituyendo (4) en (3) y teniendo en cuenta que

$$A-\left[\frac{a}{n}\right]^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}}=-\frac{(n+2)(2n+1)(n-1)}{1620}i^3+$$

---

sar de coincidir hasta el cuarto término inclusive.

A Baily se debe la idea de elevar ambos miembros de (2) si la potencia — 2/n+1, recíproco del coeficiente de i, transformando aquélla en esta otra

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{2}{n+1}}=1+i-\frac{n-1}{12}i^2+i^4(\alpha+\beta i+\ldots)$$

que ofrece la particularidad de carecer del término en i^3, lo que permite establecer una ecuación de grado segundo con error menor que potencias cuartas de i.—Baily la resuelve por aproximaciones sucesivas, llegando a la fórmula práctica

$$i_1=k\frac{12-(n-1)\,k}{12-2(n-1)k}, \qquad \text{siendo } k=\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}-1.$$

Este método es clásico entre los actuarios.

$$+\frac{(n+2)(2n+1)(n-1)(11n+49)}{1620\times 24}\, i^4 \pm .. = -\frac{(n+2)(2n+1)(n-1)}{1620}\, i^3 \left[1 - \frac{11n+49}{24}\, i \pm ..\right]$$

$$\backsim -\frac{(n+2)\,(2n+1)\,(n-1)}{1620}\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{11n+49}{12(n+1)}} i^3,$$

se tiene:

$$\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{a}{n}\right) \backsim i\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}} - \frac{(n+2)(2n+1)(n-1)}{1620}\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{11n+49}{12(n+1)}} i^4 \qquad (5)$$

y de aquí

$$\frac{n-a}{n(n+1)/2}\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}} \backsim i - \frac{(n+2)(2n+1)(n-1)}{1620}\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n+11}{4\,(n+1)}} i^4 \qquad (6)$$

Un primer valor aproximado se consigue mediante la igualdad

$$\frac{n-a}{n(n+1)/2}\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}} = i_1 \qquad (7)$$

que suministra un valor para i fácilmente calculable por logaritmos, pudiendo ya ser corregido por cualquiera de los métodos citados al comienzo de este trabajo.

La formula (6) nos permite encontrar directamente un valor más aproximado al verdadero, sin más que sustiuir i^4 por $i_1{}^4$ obteniéndose para la corrección el de

$$\varepsilon = \frac{(n+2)(2n+1)(n-1)}{1620}\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n+11}{4(n+1)}} i_1^4 \qquad (8)$$

siendo

$$i_2 = i_1 + \varepsilon$$

y verificándose la limitación

$$i_1 < i < i_2$$

He aquí un ejemplo numérico, para dar idea de la disposición práctica de los cálculos:

El valor actual de una renta unitaria de duración 19 años postpagable es 14,32379911. Hallar el tanto de interés a que ha sido evaluada. (El tanto exacto es $i = 0{,}03$).

En este caso $a = 14{,}32379911$, y $n = 19$.

Se tiene

$$\log(n-a) = \log 4{,}67620089 = 0{,}669.893.2$$

$$\frac{2(n+2)}{3(n+1)}(\log n - \log a) = \frac{7}{10}\,0{,}1226954 = 0{,}085.886.8$$

$$\text{colog. } n(n+1)/2 = \text{colog. } 190 = \bar{3}{,}721.246.4$$

$$i_1 = \text{antlog. } \bar{2}{,}477.026.4 = 0{,}029.993.45$$

$$\log.\, i_1^4 = 4 \log.\, i_1 = \bar{7}{,}908.105.6$$

$$\log.\frac{(n-1)(2n+1)(n+2)}{1620} = \log.\, 9{,}1 = 0{,}959.041.4$$

$$\frac{n+11}{4\,(n+1)}(\log a - \log.\, n) = \frac{3}{8}(-0{,}122.695.4) = \bar{1}{,}953.989.2$$

$$\varepsilon = \text{antlog. } \bar{6}{,}821.136.2 = 0.000.006.62$$

$$i_2 = 0{,}030.000.07$$

Las fórmulas (7) y (8) son aplicables igualmente para hallar el tanto de evalución en las rentas prepagables y en los valores finales. (*)

En efecto, para el primer caso observaremos que

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}}$$

y por tanto, bastará aplicar lo indicado al valor $a_{\overline{n-1|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} - 1$.-

(1) El valor actual de una renta prepagable, es decir, pagadera por anticipado, se representa por $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ y su valor es $(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i)\,a_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}}$.—El valor final será $a_{\overline{n|}}\,(1+i)^n = s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

En cuanto al segundo, es decir, dado el valor final, tendremos en cuenta que algebraicamente se verifica

$$-a_{\overline{-n|}} = -\frac{1-(1+i)^{-(-n)}}{i} = -\frac{1-(1+i)^{n}}{i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = s_{\overline{n|}}$$

luego bastará sustituir en (7) y (8) n por por—n, y cambiar de signo al valor actual $a_{\overline{n|}}$, obteniéndose

$$i_1 = \frac{s_{\overline{n|}} - n}{n(n-1)/2}\left(\frac{n}{s_{\overline{n|}}}\right)^{\frac{2(n-2)}{3(n-1)}}$$

siendo ahora,

$$\varepsilon = -\frac{(n-2)(2n-1)(n+1)}{1620}\left(\frac{n}{s_{\overline{n|}}}\right)^{\frac{n-11}{4(n-1)}} i_1^4.$$

El presente cuadro da idea de la aproximación que cabe esperar de las dos fórmulas expuestas:

n/i		0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
9	i_1	0.024.999	0,029.999	0,034.998	0,039.997	0,044.996	0,049.994
	i_2	0.025.000	0,030.000	0,035.000	0,040.000	0,045.000	0,050.000
19	i_1	0,024.997	0,029.993	0,034.988	0,039.981	0,044.969	0,049.953
	i_2	0,025.000	0.030.000	0,035.000	0,040.000	0,045.001	0,050.001
29	i_1	0,024.989	0,029.978	0,034.961	0,039.935	0,044.899	0,049.850
	i_2	0,025.000	0,030.000	0,035.001	0,040.002	0,045.004	0,050.007
39	i_1	0,024.975	0,029.950	0,034.911	0,039.854	0,044.777	0,049.672
	i_2	0,025.000	0,030.001	0,035.004	0,040.005	0,045.015	0,050.028
49	i_1	0,024.953	0,029.906	0,034.835	0,039.733	0,044.594	0,049.413
	i_2	0,025.002	0,030.005	0,035.011	0,040.024	0,045.043	0,050.075
99	i_1	0,024.695	0,029.432	0,034 058	0,038.563	0,042.944	0,047.167
	i_2	0,025.039	0,030.099	0,035.209	0,040.353	0,045.675	0,051.078