

LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES



UN EJEMPLO PRÁCTICO DE INTEGRABILIDAD

Marcos Caso Huerta

Supervisor: Patrick Meessen

Universidad de Oviedo
Curso 2017/18

Índice

1. Introducción	4
1.1. Historia de los sistemas integrables	4
1.2. Historia de la ecuación de Korteweg-De Vries	5
2. Conceptos fundamentales	6
2.1. Fundamentos sobre integrabilidad	6
2.1.1. Notación y conceptos básicos	6
2.1.2. Integrabilidad de un sistema hamiltoniano	10
2.2. La ecuación de Korteweg-De Vries	12
2.2.1. Formulación y simetrías	12
2.2.2. Sistema hamiltoniano	14
3. Propiedades de las soluciones	17
3.1. Unicidad de las soluciones	17
3.2. Ondas viajeras y solitones	19
3.3. Mecánica cuántica de los solitones	23
4. Integrabilidad de la ecuación	28
4.1. Cantidades conservadas	28
4.2. Transformación de Miura	30
4.3. Número infinito de cantidades conservadas	32
4.4. Cantidades en involución e integrabilidad	36
4.5. Ecuaciones de mayor orden jerárquico	39
5. Problema de valor inicial	40
5.1. La ecuación de Schrödinger	40
5.2. Evolución temporal de los parámetros de dispersión	42
5.2.1. Estados ligados	43
5.2.2. Estados dispersivos	44
5.3. La ecuación de Gelfand-Levitan	45
5.4. Aplicación del método	46
6. Teoría de la dispersión inversa	48
6.1. Dispersión en una dimensión	49
6.2. Comportamiento analítico de los coeficientes de dispersión	51
6.3. Variables de acción-ángulo	56
7. El método de Lax	59
7.1. Origen de la ecuación de Schrödinger	59
7.2. El par de Lax	61
7.3. Particularización a KdV	63
7.4. Construcción alternativa	66
7.5. Derivación de Lenard de la ecuación KdV	67

8. Otras propiedades de la ecuación KdV	69
8.1. El parámetro espectral	69
8.2. Involución de las cantidades conservadas	75
8.3. La ecuación KdV y el grupo $SL(2;\mathbb{R})$	76
9. Soluciones multisoliton	80
9.1. Transformaciones de Bäcklund	80
9.2. Ejemplos de aplicación	81
9.2.1. Ecuación de Liouville	81
9.2.2. Ecuación de Sine-Gordon	83
9.3. Teorema de permutabilidad	85
9.4. Transformación de Bäcklund para la ecuación KdV	86
9.5. Soluciones de solitones	90
10. Conclusión y cierre	96
Referencias	97

1. Introducción

1.1. Historia de los sistemas integrables

El estudio de los sistemas integrables tiene sus raíces en los mismos inicios de la mecánica clásica. Desde que Newton formuló sus archiconocidas leyes, los físicos han intentado encontrar soluciones exactas para los problemas que modelan. El propio Newton logró resolver el problema de Kepler, pero hasta varios siglos después apenas se resolvió un puñado de problemas sencillos.

No fue hasta el siglo XIX que Liouville dio un salto cualitativo en el estudio de los sistemas hamiltonianos integrables, dando un marco general para resolver sistemas dinámicos por cuadraturas, es decir, encontrando una primitiva que defina la dinámica del sistema. No obstante, se tardaría un siglo más en desarrollar métodos más o menos sistemáticos para llevar a cabo esta tarea.

El primer método que se desarrolló para ello, y que trataremos más adelante en el trabajo, es el llamado método de dispersión inversa clásico, desarrollado por Gardner, Green, Kruskal y Miura en 1967, y aplicado por primera vez para resolver la ecuación de Korteweg-De Vries (de la que hablaremos más adelante).

La versión cuántica del método la desarrolló durante la siguiente década la llamada escuela de Leningrado-San Petersburgo, encabezada por Faddéyev y formada por otros importantes físicos como Korepin, Kulish, Reshetijin, Skliatin o Semiónov-Tian-Shanski. Su trabajo, que conecta con la teoría de grupos cuánticos de Drinfeld y Jimbo, abrió el camino a la formulación algebraica del problema (de hecho, resolver las ecuaciones del movimiento es equivalente a resolver el problema de factorización en el grupo correspondiente, véase [Reshetikhin y Semenov-Tian-Shansky, 1988]).

Esta nueva formulación permitió unificar en un único marco matemático el estudio de teorías cuánticas de campos integrables y el de sistemas de red de espines.

No obstante, y por cuestiones de espacio, en el trabajo nos ceñiremos a tratar únicamente la integrabilidad clásica desde distintas perspectivas, y ejemplificaremos la teoría con la aplicación a la ecuación de Korteweg-De Vries, de la que hablaremos a continuación.

1.2. Historia de la ecuación de Korteweg-De Vries

El origen de la conocida como ecuación de Korteweg-De Vries, o abreviadamente ecuación KdV, se remonta a Escocia en la primera mitad del siglo XIX

El ingeniero escocés John Scott Russell observó en 1834 una onda creada por un bote en las aguas poco profundas del canal que va de Falkirk a Edimburgo. Al detenerse el bote, la onda chocó con este, agitándose durante el choque pero recuperando su forma original tras sobrepasarlo, y transmitiéndose como una elevación solitaria en el agua. Se reproducen las notas de [Russell, 1845]:

Estaba observando el movimiento de un bote que atravesaba rápidamente un canal estrecho montado a caballo, cuando el bote se detuvo de repente -no así la masa de agua del canal que había puesto en movimiento; se acumuló alrededor de la proa del barco en un estado de violenta agitación, entonces repentinamente al dejarlo atrás, avanzó con gran velocidad, tomando la forma de una gran elevación solitaria, un cúmulo de agua redondeado, suave y bien definido, que continuó su curso en el canal aparentemente sin cambiar de forma o disminuir su velocidad. La seguí a caballo, y la adelanté aún avanzando a un ritmo de ocho o nueve millas por hora, manteniendo su forma original de unos treinta pies de largo y un pie o pie y medio de alto. Su altura disminuyó gradualmente, y tras una persecución de una o dos millas la perdí en los recodos del canal. Este, en el mes de agosto de 1834, fue mi primer encuentro con este singular y bello fenómeno que he llamado la Onda de Traslación.

El nombre por el que se bautizó a la ecuación viene del tratamiento que el matemático neerlandés Diederik Korteweg y su discípulo Gustav de Vries le dieron al fenómeno en su estudio de 1895 (véase [Korteweg y De Vries, 1895]), al modelar la elevación con la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.1)$$

Sin embargo, aunque Russell siempre estuvo convencido de la importancia de esta onda solitaria, sus contemporáneos no le prestaron atención. No fue hasta mediados de 1960 cuando se empezaron a emplear ordenadores para estudiar la propagación no lineal de ondas y se empezó a dar importancia al fenómeno. De este estudio de ondas solitarias partieron numerosas aplicaciones

a la ciencia moderna a través del estudio del comportamiento dinámico de los sistemas, en campos como la hidrodinámica, la óptica no lineal o la física de partículas elementales (véase [Brauer, 2000] y [Miles, 1981]).

2. Conceptos fundamentales

2.1. Fundamentos sobre integrabilidad

Comenzaremos nuestro estudio con un repaso de los conceptos básicos de mecánica teórica que necesitaremos

2.1.1. Notación y conceptos básicos

El primer paso será describir en qué consiste la integrabilidad de un sistema. Fijemos la notación a utilizar.

Tomaremos un sistema hamiltoniano, esto es, un sistema cuya evolución temporal viene dada por un conjunto de ecuaciones de Hamilton. En nuestro sistema mecánico, tendremos un conjunto de coordenadas y momentos canónicos, que denotaremos respectivamente q_i, p_i con $i = 1, \dots, N$ (tomaremos un sistema finito-dimensional, si bien los métodos se pueden aplicar a sistemas de dimensión infinita, y de hecho más adelante lo aplicaremos), y un hamiltoniano H que no dependerá explícitamente del tiempo t , de forma que las ecuaciones de evolución tomarán la forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde el punto superior indica como es habitual la derivada temporal y los corchetes representan los corchetes de Poisson del sistema, que en las coordenadas (q_i, p_i) se definen como

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right]\tag{2.2}$$

Así, un sistema hamiltoniano constará de unas variables dinámicas (q_i, p_i) , un hamiltoniano H y las relaciones fundamentales de corchetes de Poisson que

tomaremos canónicas, es decir,

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0 = \{p_i, p_j\} \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}\end{aligned}\tag{2.3}$$

con δ_{ij} la delta de Kronecker, de forma que tenemos

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \{q_i, p_j\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \{p_i, q_j\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Estas variables dinámicas (q_i, p_i) parametrizan el espacio de fases. Dicho de otro modo, son las coordenadas del espacio de fases, que resulta $2N$ -dimensional. Esto nos indica que la operación de partir las coordenadas en coordenadas y momentos canónicos es no covariante y en consecuencia poco adecuada para nuestro propósito. Consideraremos por tanto la combinación de coordenadas y momentos en un conjunto de $2N$ coordenadas generalizadas, que denotaremos

$$y^\mu = (q_i, p_i)\tag{2.5}$$

con $\mu = 1, 2, \dots, 2N$, y tal que

$$\begin{aligned}y^i &= q_i \\ y^{N+i} &= p_i\end{aligned}\tag{2.6}$$

En estas coordenadas los corchetes de Poisson canónicos tomarán la forma

$$\{y^\mu, y^\nu\} = \epsilon^{\mu\nu}\tag{2.7}$$

donde

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}\tag{2.8}$$

es la matriz antisimétrica constante $2N \times 2N$ escrita en términos de bloques $N \times N$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\{A(y), B(y)\} &= \partial_\mu A \{y^\mu, y^\nu\} \partial_\nu B \\ &= \partial_\mu A \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu B = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A \partial_\nu B\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde hemos definido

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.10)$$

Es interesante observar que la cantidad $H(y^\mu)$ se conserva trivialmente bajo evolución temporal, $\frac{d}{dt}H(y^\mu) = 0$, de forma que el movimiento se da en una subvariedad del espacio de fases determinada por $H = E$ constante. Ahora podemos escribir las ecuaciones de Hamilton de forma covariante:

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, H\} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu H \quad (2.11)$$

Este método covariante es útil en muchos sistemas no lineales que no tienen una descripción sencilla en términos de coordenadas canónicas.

Un ejemplo de estos sistemas es el de las coordenadas restringidas. En este caso, el formalismo covariante da una versión formalmente similar al de (2.11) para las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, H\} = f^{\mu\nu}(y) \partial_\nu H \quad (2.12)$$

donde

$$\{y^\mu, y^\nu\} = f^{\mu\nu}(y) \quad (2.13)$$

Como observamos, los corchetes de Poisson pasan a ser dependientes de las coordenadas. Análogamente, la ecuación (2.9) se convierte en

$$\{A(y), B(y)\} = \partial_\mu A(y) f^{\mu\nu}(y) B(y) \quad (2.14)$$

Es importante notar que $f^{\mu\nu}$ no puede ser cualquier relación para representar un corchete de Poisson, sino que tiene que cumplir unas ciertas propiedades. Una propiedad importante es que se tiene que cumplir

$$\{y^\mu, y^\nu\} = -\{y^\nu, y^\mu\} \implies f^{\mu\nu}(y) = -f^{\nu\mu}(y) \quad (2.15)$$

Una condición adicional es que los y^μ han de formar una base del espacio de fases, por lo que $f^{\mu\nu}(y)$ ha de ser una matriz no singular. Denotaremos su inversa por $f_{\mu\nu}(y)$, de forma que

$$f_{\mu\lambda} f^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu = f^{\nu\lambda} f_{\lambda\mu} \quad (2.16)$$

Además, los corchetes de Poisson deben satisfacer la identidad de Jacobi,

esto es:

$$\{y^\mu, \{y^\nu, y^\lambda\}\} + \{y^\lambda, \{y^\mu, y^\nu\}\} + \{y^\nu, \{y^\lambda, y^\mu\}\} = 0 \quad (2.17)$$

Esta condición se traslada en las matrices a la llamada identidad de Bianchi:

$$\partial_\mu f_{\nu\lambda}(y) + \partial_\lambda f_{\mu\nu}(y) + \partial_\nu f_{\lambda\mu}(y) = 0 \quad (2.18)$$

Si tomamos una variedad con un tensor antisimétrico de segundo rango que satisfaga las condiciones anteriores tenemos el conocido concepto de variedad simpléctica, que como es conocido induce en las funciones sobre ella la estructura de álgebra de Lie. Es claro que la geometría de un sistema hamiltoniano es simpléctica de manera inmediata (véase [Abraham y Marsden, 1978], [McDuff y Salamon, 1998] y [de Gosson, 2006]).

La principal diferencia entre una geometría pseudoriemanniana y una geometría simpléctica es que en la geometría simpléctica no tenemos una métrica simétrica. Además, en una variedad simpléctica el grupo de simetría del espacio tangente es el llamado grupo simpléctico, mientras que en una geometría pseudoriemanniana es el grupo de Lorentz.

Se pueden ver, no obstante, los tensores $f^{\mu\nu}(y)$ y $f_{\mu\nu}(y)$ como las componentes contravariante y covariante del tensor métrico en una variedad simpléctica. Se denominan métrica simpléctica y se pueden utilizar para subir o bajar índices en una variedad simpléctica de la misma forma que la métrica pseudoriemanniana en una variedad pseudoriemanniana.

Es importante recalcar que en esta elección de componentes estamos fijando un convenio no trivial, ya que al ser la métrica antisimétrica y no simétrica como en el caso pseudoriemanniano, ciertas propiedades no son inmediatas y requieren cuidar las definiciones. En particular, las expresiones

$$\begin{aligned} y^\mu &= \epsilon^{\mu\nu} y_\nu \\ y_\mu &= y_\nu \epsilon^{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.19)$$

nos son equivalentes en este caso y estamos tomando nuestra definición de métricas para que se dé el primer caso.

Finalmente, establezcamos la notación cuando tratemos con sistemas de dimensión infinita (en este caso, sistemas continuos). Para ello, deberemos reemplazar las derivadas parciales por derivadas funcionales, que vienen definidas

por

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\epsilon} \quad (2.20)$$

A modo de ejemplo, las ecuaciones (2.13) y (2.12) toman la forma:

$$\{u(x), u(y)\} = f(x, y) \quad (2.21)$$

$$\dot{u}(x) = \{u(x), H\} = \int dy f(x, y) \frac{\delta H}{\delta u(y)} \quad (2.22)$$

De esta forma, el corchete de Poisson de dos funcionales $A[u]$ y $B[u]$ se obtiene como:

$$\{A[u], B[u]\} = \int dx dy \frac{\delta A}{\delta u(x)} f(x, y) \frac{\delta B}{\delta u(y)} \quad (2.23)$$

2.1.2. Integrabilidad de un sistema hamiltoniano

Diremos que un sistema hamiltoniano es integrable si se puede resolver por el método de cuadraturas. Es decir, si dado un sistema de ecuaciones diferenciales que lo definen podemos encontrar una primitiva que describa la dinámica del sistema.

El principal resultado para discernir si un sistema hamiltoniano es integrable es el teorema de Liouville, también llamado teorema de Liouville-Arnold, que afirma que un sistema hamiltoniano cuyo espacio de fases tiene dimensión $2N$ es integrable por el método de cuadraturas si y solo si existen exactamente N cantidades conservadas funcionalmente independientes que estén en involución (esto último quiere decir que los corchetes de Poisson de estas cantidades entre sí se anulen). Se puede encontrar la demostración de este resultado en la mayor parte de la bibliografía relacionada, por ejemplo [Babelon *et al.*, 2003].

Que las cantidades sean funcionalmente independientes implica que en casi cualquier punto (excepto en un conjunto de medida nula), sus diferenciales son linealmente independientes, esto es, que el espacio tangente de la superficie que generan al fijar un valor existe en casi todo punto y es de dimensión N . Además, no pueden existir más de N cantidades independientes en involución ya que en caso contrario el corchete de Poisson sería degenerado.

Veamos las implicaciones de este resultado. Supongamos que tenemos un sistema descrito por las coordenadas y momentos canónicos (q_i, p_i) con $i = 1, 2, \dots, N$. Sean K_i con $i = 1, 2, \dots, N$ las cantidades conservadas funcionalmente independientes y en involución. Es inmediato que el hamiltoniano ha de ser una combinación lineal de estas. Además, al estar en involución, podemos con-

siderar una transformación canónica

$$K_i = K_i(q_j, p_j) = P_i \quad (2.24)$$

y podemos pensar en los K_i como momentos de las nuevas coordenadas. Estos se conocen también como las variables de acción de la teoría, como se puede ver en [Landau y Lifshitz, 1960], [Goldstein *et al.*, 1980] o [Sardanashvily, 2015]. Podemos pensar ahora que podemos, en principio, obtener las variables conjugadas canónicas

$$\theta_i = \theta_i(q_j, p_j) \quad (2.25)$$

de forma que

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad (2.26)$$

$$\{\theta_i, P_j\} = \{\theta_i, K_j\} = \delta_{ij} \quad (2.27)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Las coordenadas θ_i se denominan variables ángulo. Dado que vimos que el hamiltoniano era combinación lineal de las cantidades conservadas, se tiene que

$$H = H(P_i) \quad (2.28)$$

Por tanto, las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$\dot{P}_i = \{P_i, H(P_j)\} = 0 \quad (2.29)$$

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, H(P_j)\} = f_i(P_j) \quad (2.30)$$

La ecuación (2.29) simplemente afirma que los P_i son cantidades conservadas. Por tanto, para valores dados de estas cantidades la ecuación de las variables de ángulo toma la forma

$$\dot{\theta}_i = f_i = \text{constante} \quad (2.31)$$

La integración de estas ecuaciones es inmediata y nos da que

$$\theta_i = f_i t + \alpha_i \quad (2.32)$$

con las α_i constantes de integración que pueden fijarse con las condiciones iniciales. Así, vemos que la dinámica del sistema se puede fijar totalmente, en prin-

cipio, en términos de las variable de acción-ángulo (P_i, θ_i) . No obstante, en la práctica suele ser imposible poder encontrar la transformación canónica (2.25), lo cual nos impide invertir la solución obtenida para obtener una evolución de la forma

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(f_j, \alpha_j, t) \\ p_i &= p_i(f_j, \alpha_j, t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

De esta forma, el teorema de Liouville solo nos provee la existencia de soluciones, por lo que para encontrar soluciones concretas habrá que recurrir a métodos alternativos.

Finalmente, es necesario aclarar que a pesar de haber desarrollado el teorema de Liouville en dimensión finita, es igualmente válido para sistema con un número infinito de grados de libertad sin apenas modificación. No obstante, es claro que un sistema con infinitos grados de libertad (un sistema continuo) ha de tener un número infinito de cantidades conservadas, por lo que cualquier solución de este sistema habrá de estar infinitamente restringida.

Las soluciones de este tipo serán precisamente solitones, ondas localizadas que mantienen su forma (es decir, no dispersivas) incluso tras colisiones. De forma intuitiva, es claro que para que esto ocurra han de existir un número infinito de cantidades conservadas. Así, los solitones implican la existencia de un número infinito de cantidades conservadas y viceversa.

2.2. La ecuación de Korteweg-De Vries

Como ya adelantamos en la introducción, a lo largo del trabajo trataremos uno de los primeros ejemplos de estudio de sistemas integrables: la ecuación KdV. Comencemos planteando su formulación matemática.

2.2.1. Formulación y simetrías

Korteweg y De Vries encontraron que lo que Russell observó era una solución particular de una ecuación en derivadas parciales de tercer orden, con la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + au \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.34)$$

con $u = u(x, t)$ la variable dinámica que en este caso representaría la altura del agua y a y b constantes inherentes al fenómeno, cuyo trasfondo físico se puede

ver en [De Jager, 2006]. En el caso de las ondas en el canal, $u(x, t)$ representaría la altura de la ola sobre la superficie del agua. Observamos asimismo que aunque la ecuación KdV tiene dos constantes arbitrarias, se pueden eliminar sin más que reescalar las variables. Por ejemplo, haciendo el reescalado

$$x \rightarrow b^{1/3} x \quad (2.35)$$

la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ab^{-1/3} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.36)$$

Ahora, haciendo el cambio $t \rightarrow -t$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ab^{-1/3} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.37)$$

Y, finalmente, con el cambio

$$u \rightarrow a^{-1} b^{1/3} u \quad (2.38)$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.39)$$

A partir de ahora, esta será la ecuación a la que nos referiremos al hablar de ecuación KdV.

Podemos preguntarnos qué simetrías presenta esta ecuación, ya que las simetrías suelen ser útiles a la hora de obtener soluciones y de clasificarlas. Observemos algunas simetrías sencillas:

$$t \rightarrow t + c_1 \quad (2.40)$$

con c_1 constante deja la ecuación invariante de forma inmediata. Análogamente,

$$x \rightarrow x + c_2 \quad (2.41)$$

con c_2 constante tampoco varía la ecuación.

Podemos ahora pensar en algunas simetrías un poco más enrevesadas, pero triviales de comprobar:

$$x \rightarrow cx, \quad t \rightarrow c^3 t, \quad u \rightarrow c^{-2} u \quad (2.42)$$

nos lleva a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \longrightarrow c^{-5} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (2.43)$$

con lo que deja la ecuación invariante. Esta simetría, que llamaremos de escala, será útil a la hora de clasificar las cantidades conservadas del sistema.

Por otro lado, el cambio

$$x \rightarrow x + vt, \quad t \rightarrow t, \quad u \rightarrow u + v \quad (2.44)$$

es también una simetría. La comprobación es de nuevo inmediata. Podemos ver esta simetría como la invariancia de Galileo de la ecuación. Es interesante notar, sin embargo, que la ecuación KdV no puede ser covariante Lorentz ya que el espacio y el tiempo se tratan de forma diferente (lineal en tiempo y de mayor orden en espacio) como se puede ver en [Das, 1989].

2.2.2. Sistema hamiltoniano

Examinemos la ecuación (2.39). Las variables fundamentales, $u(x, t)$, son funciones continuas de x y t . Por tanto, pueden verse como coordenadas generalizadas del espacio de fases (de forma equivalente a las y^μ del caso de dimensión finita). De esta forma, la ecuación ya está en primer orden en tiempo (característica inherente de las ecuaciones de Hamilton). Para probar que el sistema es hamiltoniano nos queda por tanto encontrar el corchete de Poisson fundamental y un hamiltoniano que nos den como ecuaciones de Hamilton la ecuación KdV.

Esto es, buscamos poder escribir la ecuación en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u(x, t), H\} \quad (2.45)$$

Para ello, podemos reescribir la ecuación (2.39) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.46)$$

Ahora, si tomamos como hamiltoniano

$$H[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.47)$$

entonces tenemos que

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = \frac{1}{2}u^2(x) + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (2.48)$$

Nótese que con esta elección de H podemos escribir (2.46) en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.49)$$

Por otro lado, queremos tener la relación (2.45), por lo que necesitamos que

$$\{u(x), H\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.50)$$

o, equivalentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta H}{\delta u(y)} \{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.51)$$

con

$$f(x, y) = \{u(x), u(y)\} \quad (2.52)$$

el equivalente continuo de $f^{\mu\nu}$.

De esta forma, el corchete de Poisson viene dado por

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (2.53)$$

Al ser la derivada de la función delta, es automáticamente antisimétrico. Se puede comprobar que cumple la identidad de Jacobi por medio puramente algebraicos (véase [Hermann, 1970]). No obstante, su comprobación es directa, y la perfilaremos brevemente.

Usando la notación de (2.21) tenemos

$$f^{\mu\nu}(y) \rightarrow f(x, y, u(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (2.54)$$

Por tanto,

$$f_{\mu\nu}(y) \rightarrow f^{-1}(x, y, u(x)) = \epsilon(x - y) \quad (2.55)$$

donde $\epsilon(x - y)$ es la función escalón alternada, definida como

$$\epsilon(x - y) = \left(\theta(x - y) - \frac{1}{2} \right) \quad (2.56)$$

De esta forma la identidad de Bianchi dada en (2.18) se traduce en

$$\frac{\delta}{\delta u(y)}\epsilon(x-y) + \frac{\delta}{\delta u(y)}\epsilon(z-x) + \frac{\delta}{\delta u(x)}\epsilon(y-z) = 0 \quad (2.57)$$

que se satisface trivialmente ya que cada término es independiente de u y se anula individualmente.

De esta forma, hemos visto que la ecuación KdV es un sistema hamiltoniano con un hamiltoniano dado por (2.47) y un corchete de Poisson dado por (2.53).

No obstante, se puede observar una peculiaridad de la ecuación KdV, y es que se puede encontrar fácilmente una segunda estructura de sistema hamiltoniano, con un segundo corchete de Poisson y un segundo hamiltoniano.

Si tomamos el corchete

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) + u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \delta(x-y) \quad (2.58)$$

y el hamiltoniano

$$H_2[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} u^2(x) \quad (2.59)$$

se puede comprobar de forma directa que el sistema obtenido es la ecuación KdV.

La relación de Poisson obtenida es también antisimétrica, y además cumple la identidad de Jacobi. La demostración de esto último es algo más larga y compleja y no la incluiremos por motivos de espacio, se puede comprobar en [Beffa, 1994].

Finalmente, veamos que la ecuación KdV se puede obtener como variación de Euler-Lagrange de un cierto lagrangiano. Consideremos el lagrangiano

$$L_{KdV} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy u(x) \epsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial t} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.60)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen son

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \epsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial t} = \frac{1}{2} u^2(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.61)$$

Derivando aquí con respecto a x obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial}{\partial x} \epsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.62)$$

que resulta ser la ecuación KdV. Nótese que el lagrangiano (2.60) resulta ser no local debido al término $\epsilon(x - y)$. De hecho, no se puede obtener ningún lagrangiano local en las variables $u(x)$ cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange resulten en la ecuación KdV.

3. Propiedades de las soluciones

Antes de pasar al análisis de la integrabilidad de la ecuación KdV, estudiaremos algunas propiedades de sus soluciones, en particular la existencia y unicidad de soluciones y su forma.

3.1. Unicidad de las soluciones

La primera cuestión que nos plantearemos es si la ecuación KdV dada en (2.39) admite solución única para condiciones iniciales dadas.

Es importante remarcar que vamos a trabajar únicamente con soluciones de energía finita (es decir, cuya variable dinámica se anula en el infinito), de forma que dejaremos apartadas soluciones como las ondas cnoidales (soluciones en términos de la función elíptica de Jacobi cn , caracterizadas por crestas más estrechas y valles más planos que en soluciones sinusoidales, véase [Korteweg y De Vries, 1895, Drazin, 1977, Dingemans, 1997]). Se puede observar un ejemplo de estas últimas en la imagen de portada del trabajo, que representa ondas cnoidales perpendiculares entre sí manteniendo la forma tras encontrarse.

Supongamos que $u(x, t)$ y $v(x, t)$ representan dos soluciones de la ecuación KdV para las mismas condiciones iniciales. Esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = f(x) \quad (3.3)$$

Entonces tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - v) = u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3(u - v)}{\partial x^3} \quad (3.4)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-v) = u \frac{\partial(u-v)}{\partial x} + (u-v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3(u-v)}{\partial x^3} \quad (3.5)$$

O, renombrando $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.6)$$

Multiplicando por w e integrando sobre x , tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx w^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

donde hemos utilizado el hecho de que u y v , y por tanto w , caen a cero en el infinito.

Definamos ahora

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} w^2(x, t) \quad (3.8)$$

y

$$m = 2 \text{máx} \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (3.9)$$

Entonces la ecuación (3.7) nos da la desigualdad

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq mE(t) \quad (3.10)$$

o, lo que es lo mismo,

$$E(t) \leq E(0)e^{mt} \quad (3.11)$$

Claramente, como $E(t)$ es semidefinida positiva por definición, si $E(0)$ se anula también debe hacerlo $E(t)$.

Como u y v cumplen la misma condición inicial, nos dan para w una condición inicial

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = 0 \quad (3.12)$$

y por tanto

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx w^2(x, 0) = 0 \quad (3.13)$$

Por tanto necesariamente tenemos que $E(t) = 0$, y así en consecuencia $w(x, t) = 0$ y por tanto $u(x, t) = v(x, t)$ para todo x, t .

De esta forma, si existen dos soluciones para las mismas condiciones inicia-

les, estas han de coincidir, luego la ecuación KdV admite soluciones únicas para condiciones iniciales dadas.

3.2. Ondas viajeras y solitones

Estudiemos ahora las soluciones de onda viajera de la ecuación KdV. Asumamos para ello que

$$u(x, t) = u(x + ct) = f(x + ct) \quad \text{con } c > 0 \quad (3.14)$$

con c la velocidad de la onda viajera y $f(x)$ la condición inicial o perfil de la onda, de nuevo con la condición de energía finita.

Introduciendo esta forma en la ecuación KdV tenemos que:

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.15)$$

Dado que esta ecuación solo involucra derivadas espaciales, podemos fijar $t = 0$. De esta forma tenemos

$$c \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \quad (3.16)$$

Así, tenemos que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} u^2 - cu = \text{constante} \quad (3.17)$$

Utilizando que $u(x, t)$ debe anularse en el infinito obtenemos que la constante ha de ser cero. De esta forma,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} u^2 - cu = 0 \quad (3.18)$$

De esta ecuación, y multiplicando por $\frac{du}{dx}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{du^3}{dx} - \frac{c}{2} \frac{du^2}{dx} = 0 \quad (3.19)$$

de donde

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{c}{2} u^2 = 0 \quad (3.20)$$

donde nuevamente hemos igualado la constante a cero por la condición en el

infinito.

Si fijamos ahora la condición inicial

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad (3.21)$$

para tener así el máximo cuando $t = 0$ fijado en $x = 0$, podemos obtener la solución en una forma cerrada:

$$u(x) = 3c \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} x \quad (3.22)$$

o, lo que es lo mismo,

$$u(x) = \frac{3c}{\cosh^2 \frac{\sqrt{c}}{2} x} \quad (3.23)$$

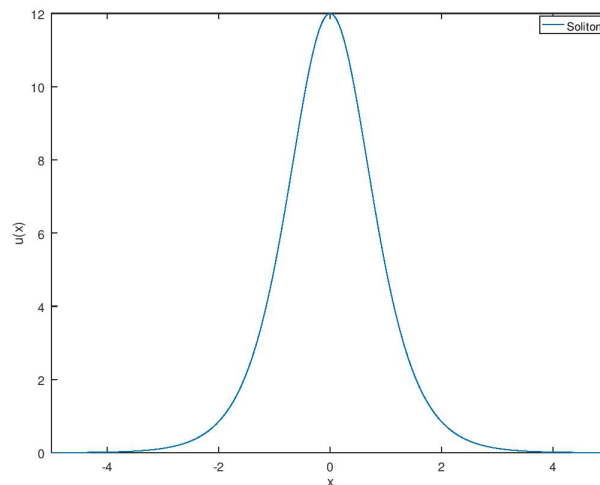


Figura 1: Representación gráfica de $u(x)$ para $c = 4$.

Recuperando la variable temporal, tenemos

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x + ct) \quad (3.24)$$

De esta forma encontramos que la ecuación KdV posee soluciones en forma de ondas viajeras. Se puede observar que la onda obtenida tiene varias propiedades interesantes:

1. $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y por tanto está claramente localizada, conse-

cuencia de nuestra condición de energía finita.

2. La onda viaja solo hacia la izquierda. De hecho, si cambiamos $c \rightarrow -c$ la onda no viaja hacia la derecha, sino que se vuelve oscilatoria.
3. La amplitud de la onda es directamente proporcional a su velocidad. Esto es, cuanto más alta la onda más rápido se mueve. Este efecto se observa realmente en ondas solitarias en el agua (véase [Andriopoulos *et al.*, 2009]).
4. La propiedad más importante es que la onda no tiene dispersión, mantiene su forma al avanzar. Dado que el *ansatz* que impusimos fue

$$u(x, t) = f(x + ct) \quad (3.25)$$

cada modo de Fourier tendría la forma

$$u_k(x, t) = e^{ik(x+ct)} \tilde{f}(k) \quad (3.26)$$

y por tanto se puede identificar la energía asociada a cada componente de onda con

$$E_k = \omega_k = ck \quad (3.27)$$

con k el número de onda asociado al modo de Fourier. Así,

$$\frac{E_k}{k} = \frac{\omega_k}{k} = c = \text{cte.} = \frac{dE_k}{dk} \quad (3.28)$$

De esta forma, cada componente de la onda se mueve con la misma velocidad de fase constante, que también es igual a la velocidad de grupo. En consecuencia, el movimiento es no dispersivo.

Esta es precisamente la definición de una solución de solitón, una onda sin ningún tipo de dispersión y que, por tanto, mantiene su forma al avanzar. Hemos probado, por tanto, que la ecuación KdV admite soluciones en forma de solitón (hecho lógico por otro lado, ya que se formuló para describir ondas solitarias).

Para ejemplificar la importancia de la naturaleza no dispersiva de la solución, comparémosla con la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger. La ecuación de Schrödinger para partículas libres,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.29)$$

tiene como solución la función de onda

$$\psi(x, t) = \frac{N}{\left(a^2 + \frac{i\hbar t}{m}\right)^{1/2}} e^{-x^2/2\left(a^2 + \frac{i\hbar t}{m}\right)} \quad (3.30)$$

donde N es una constante de normalización y a es una constante que depende de la condición inicial. Podemos calcular la anchura media asociada con la partícula libre, que tiene la forma

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^2} \right) \quad (3.31)$$

Observamos que la anchura media aumenta con el tiempo y por tanto el paquete de onda se expande con el tiempo. Esto nos dice que incluso la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger lineal tiene naturaleza dispersiva, y la razón tras ello yace en las componentes de Fourier de la onda.

Sabemos que en este caso

$$E_k = \hbar\omega_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.32)$$

Y por tanto para la velocidad de fase tenemos

$$v_f = \frac{E_k}{k} = \frac{\hbar^2 k}{2m} \quad (3.33)$$

mientras que para la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{dE_k}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m} \quad (3.34)$$

Esto es, cada componente de Fourier del paquete de onda se mueve con una velocidad de fase diferente proporcional a su número de onda y además esta es diferente a su velocidad de grupo. Esto lleva a una dispersión ya que las longitudes de onda más cortas se mueven más rápido que las más largas y dan lugar al cambio en la forma del paquete de onda.

Estudiemos brevemente la ecuación KdV sin el término no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.35)$$

Trivialmente, esta ecuación lineal lleva a una ecuación de dispersión de la

forma

$$E_k = \omega_k = k^3 \quad (3.36)$$

de forma que para cualquier solución de esta ecuación obtendríamos

$$v_f = \frac{E_k}{k} = \frac{\omega_k}{k} = k^2 \quad (3.37)$$

$$v_g = \frac{dE_k}{dk} = \frac{d\omega_k}{dk} = 3k^2 \quad (3.38)$$

Vemos que si eliminamos el término no lineal de la ecuación KdV la solución también se vuelve dispersiva. Esto nos muestra que es el término no lineal de la ecuación el responsable de la naturaleza no dispersiva de las soluciones en forma de solitón.

3.3. Mecánica cuántica de los solitones

Dado que los solitones son soluciones universales en modelos integrables, dejaremos brevemente a un lado la ecuación KdV para estudiar su mecánica cuántica cuando actúan como potenciales.

Trataremos primero algunas características generales de los hamiltonianos unidimensionales. Consideremos el hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}U(x) \quad (3.39)$$

y sus funciones propias $\phi(x)$ que satisfacen:

$$H\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad (3.40)$$

Hemos tomado masa unidad y denotamos por D el operador $\frac{\partial}{\partial x}$. Si $\phi(x)$ es no trivial podemos definir un operador

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x)D\phi^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(D - \phi^{-1}(x)(D\phi(x))) \quad (3.41)$$

Podemos también definir el operador

$$A^\dagger(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^{-1}(x)D\phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(D + \phi^{-1}(x)(D\phi(x))) \quad (3.42)$$

que de hecho si $\phi(x)$ es real resulta ser el adjunto formal de $A(x)$. Operando,

obtenemos que

$$A^\dagger(x)A(x) = \left(-\frac{1}{2}D^2 + \phi^{-1}(x) \left(\frac{1}{2}D^2\phi(x) \right) \right) \quad (3.43)$$

Pero $\phi(x)$ es un estado propio del hamiltoniano y, por tanto, usando la relación (3.40) obtenemos

$$A^\dagger(x)A(x) = H - \lambda I \quad (3.44)$$

Así, obtenemos que el operador unidimensional $H - \lambda I$ siempre puede factorizarse en la forma anterior con

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(D - W(x)) \quad (3.45)$$

y

$$A^\dagger(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(D + W(x)) \quad (3.46)$$

con $W(x) = \phi^{-1}(x)(D\phi(x))$ y $\phi(x)$ el estado propio del hamiltoniano con valor propio λ . Esta identificación induce una transformación de tipo Riccati entre $U(x)$ y $W(x)$, esto es,

$$U(x) - 2\lambda = W^2(x) + (DW(x)) \quad (3.47)$$

Así, hemos obtenido que para cualquier función propia $\phi(x)$ de H , el operador $H - \lambda I$ se factoriza. Análogamente, dada cualquier constante λ y un potencial dado, si podemos encontrar una relación de tipo Riccati como la anterior, entonces el operador $H - \lambda I$ se puede factorizar.

Estudiemos ahora las propiedades de $A(x)$ y $A^\dagger(x)$. De (3.41) obtenemos que

$$A(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x)D(\phi^{-1}(x)\phi(x)) = 0 \quad (3.48)$$

de forma que $\phi(x)$ se aniquila por $A(x)$. En términos de $W(x)$, obtenemos que

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = W(x)\phi(x) \quad (3.49)$$

luego

$$\phi(x) = e^{\int_x W(x')dx'} \quad (3.50)$$

Así, conocida la forma de $W(x)$, que exista una función $\phi(x)$ que lleve a factorización depende de si la solución anterior es o no normalizable. Análogamen-

te, podemos observar que

$$A^\dagger(x)\phi^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^{-1}(x)D(\phi(x)\phi^{-1}(x)) = 0 \quad (3.51)$$

De esta forma, $\phi(x)$ y $\phi^{-1}(x)$ son estados propios de valor propio cero para los operadores $A(x)$ y $A^\dagger(x)$ respectivamente. Obtenemos que

$$A(x)A^\dagger(x) = -\frac{1}{2}(D^2 + \phi^{-1}(x)(D^2\phi(x)) - 2\phi^{-2}(x)(D\phi(x))^2) \quad (3.52)$$

Podemos ahora usar la identidad

$$D^2\ln\phi(x) = -\phi^{-2}(x)(D\phi(x))^2 + \phi^{-1}(x)(D^2\phi(x)) \quad (3.53)$$

para obtener

$$A(x)A^\dagger(x) = \left(-\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}U(x) - \lambda - (D^2\ln\phi(x))\right) \quad (3.54)$$

o,

$$A(x)A^\dagger(x) = -\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}\tilde{U}(x) - \lambda = \tilde{H} - \lambda I \quad (3.55)$$

con

$$\tilde{U}(x) = U(x) - 2(D^2\ln\phi(x)) \quad (3.56)$$

Así, si

$$A^\dagger(x)A(x) = H_+ = H - \lambda I \quad (3.57)$$

entonces

$$A(x)A^\dagger(x) = H_- = \tilde{H} - \lambda I \quad (3.58)$$

Este formalismo nos permite observar que los hamiltonianos H_+ y H_- tienen casi el mismo espectro, esto es, tienen casi los mismos valores propios. Podemos ver esto observando que si

$$H_+\psi = A^\dagger(x)A(x)\psi = \epsilon\psi \quad (3.59)$$

entonces

$$A(x)A^\dagger(x)A(x)\psi = \epsilon A(x)\psi \quad (3.60)$$

o, dicho de otro modo,

$$H_-(A(x)\psi) = \epsilon(A(x)\psi) \quad (3.61)$$

Esto implica que, si $\psi(x)$ es un estado propio de H_+ con un valor propio no trivial ϵ , entonces $A(x)\psi(x)$ es un estado propio de H_- con el mismo valor propio. Esto es, los estados propios de H_+ y H_- están emparejados a excepción del estado que satisface

$$A(x)\psi(x) = 0 \quad (3.62)$$

Es por ello que decimos que los dos hamiltonianos tienen casi el mismo espectro.

Podemos expresar estos hamiltonianos en términos de $W(x)$ de la siguiente forma:

$$H_+ = \left(-\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}W^2(x) + \frac{1}{2}(DW(x)) \right) \quad (3.63)$$

$$H_- = \left(-\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}W^2(x) - \frac{1}{2}(DW(x)) \right) \quad (3.64)$$

A modo de ejemplo aplicaremos esto al análisis del potencial

$$\frac{1}{2}U_n(x) = -\frac{n(n+1)}{2}\operatorname{sech}^2 x \quad (3.65)$$

para determinar el espectro del hamiltoniano

$$H_n = -\frac{1}{2}D^2 - \frac{n(n+1)}{2}\operatorname{sech}^2 x \quad (3.66)$$

donde n es un entero positivo. Si tomamos

$$W_n(x) = -n \tanh x \quad (3.67)$$

obtenemos que

$$W_n^2(x) + DW_n(x) = n^2 - n(n+1)\operatorname{sech}^2 x \quad (3.68)$$

y por tanto

$$H_{n+} = H_n + \frac{n^2}{2} \quad (3.69)$$

y análogamente

$$H_{n-} = H_{n-1} + \frac{n^2}{2} \quad (3.70)$$

De esta forma como ambos hamiltonianos tienen casi el mismo espectro, se sigue que H_n y H_{n-1} tienen casi el mismo espectro. El único valor propio que no

comparten viene dado por

$$\left(H_n + \frac{n^2}{2}\right)\phi_n(x) = 0 \quad (3.71)$$

lo que lleva a

$$E_n = -\frac{n^2}{2} \quad (3.72)$$

Podemos repetir el argumento para probar que H_{n-1} y H_{n-2} también tienen casi el mismo espectro excepto por el estado propio dado por

$$\left(H_{n-1} + \frac{(n-1)^2}{2}\right)\phi_{n-1} = 0 \quad (3.73)$$

de forma que

$$E_{n-1} = -\frac{(n-1)^2}{2} \quad (3.74)$$

Se puede continuar con este razonamiento hasta llegar a $n = 0$, que se corresponde con el hamiltoniano libre. De esta forma, obtenemos que los valores propios de energía discretos de H_n vienen dados por

$$E_k = -\frac{k^2}{2} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.75)$$

Así, obtenemos que el potencial (3.65) tiene exactamente n estados ligados. Podemos comparar este potencial con el obtenido para la ecuación KdV en (3.22). Es fácil observar que si $c = 4$ admitirá un único estado ligado y describirá un único solitón.

Además, observamos que los estados propios de H_n y H_{n-1} vienen relacionados por los operadores $A_n(x)$ y $A_n^\dagger(x)$, que tienen la forma

$$A_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(D - W_n(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - W_n(x)\right) \quad (3.76)$$

$$A_n^\dagger(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(D + W_n(x)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + W_n(x)\right) \quad (3.77)$$

Además, como todos los H_n tienen el mismo espectro que H_0 , cuyas funciones propias son ondas planas, todos los estados ligados de H_n se pueden obtener aplicando sucesivamente $A_n^\dagger(x)$. Nótese que H_0 es el hamiltoniano libre y por tanto no da lugar a ninguna reflexión.

Tenemos también que los operadores $A_n^\dagger(x)$ no intercambian las ondas pla-

nas $e^{\pm ikx}$. En consecuencia, los hamiltonianos H_n para cualquier entero positivo n no llevan a ninguna reflexión. En consecuencia, estos hamiltonianos se denominan sin reflexiones. Esto concuerda con el hecho de que estos potenciales corresponden a solitones, que simplemente pasan a través de ellos. Esta propiedad será de vital importancia a la hora de buscar soluciones explícitas.

4. Integrabilidad de la ecuación

Hasta ahora hemos obtenido que la ecuación KdV admite soluciones únicas con condiciones iniciales dadas, y que los solitones son un tipo de solución que satisface la ecuación KdV. Por otra parte, los solitones implican la existencia de un número infinito de cantidades conservadas. Pasaremos ahora a estudiar la integrabilidad de la ecuación, buscando probar que posee un número infinito de cantidades conservadas que están en involución.

4.1. Cantidades conservadas

Comenzaremos con una discusión general sobre las cantidades conservadas en el caso de energía finita. Como ya vimos anteriormente, si $Q[u]$ se conserva, entonces

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \{Q[u], H\} = 0 \quad (4.1)$$

Además, si expresamos de forma explícita

$$Q[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho[u(x, t)] \quad (4.2)$$

entonces

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \rho[u(x, t)]}{\partial t} = 0 \quad (4.3)$$

implicaría la existencia de una ecuación de continuidad de la forma

$$\frac{\partial \rho[u(x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial j[u(x, t)]}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

Así, mientras que las cargas integradas son independientes del tiempo (constantes del movimiento), las densidades satisfacen ecuaciones de continuidad.

Con esta observación, podemos notar que la ecuación (2.39) tiene la forma de ecuación de continuidad. Si comparamos (2.46) con (4.4) identificamos fácil-

mente

$$\rho_0[u(x, t)] = u(x, t)$$

$$j_0 = -\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad (4.5)$$

Así, identificamos que

$$Q_0 = H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_0[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) \quad (4.6)$$

es una constante del movimiento. Para conveniencia futura, redefiniremos

$$\rho_0[u(x, t)] = 3u(x, t)$$

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_0[u(x, t)] = 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) \quad (4.7)$$

Por otra parte si multiplicamos la ecuación (2.39) por u y operamos tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}u^2\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad (4.8)$$

Así, obtenemos una segunda ecuación de continuidad, en la que podemos identificar

$$\rho_1[u(x, t)] = \frac{1}{2}u^2$$

$$j_1 = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

y obtener así una segunda constante del movimiento, dada por

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}(u(x, t))^2 \quad (4.10)$$

Además, obtuvimos la forma (2.47) para el hamiltoniano de la ecuación. Así, dado que se cumple

$$\frac{dH_{KdV}}{dt} = \{H_{KdV}, H_{KdV}\} = 0 \quad (4.11)$$

podemos identificar

$$H_2 = H_{KdV} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!}u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \quad (4.12)$$

como una tercera constante del movimiento.

De esta forma, tomando el corchete de Poisson que ya vimos en (2.53),

$$\{u(x, t), u(y, t)\} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (4.13)$$

podemos identificar H_2 como el generador de las traslaciones temporales y, por tanto, como la energía ya que

$$\{u(x, t), H_2\} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.14)$$

Análogamente, se puede ver H_1 como el momento, ya que genera las traslaciones espaciales:

$$\{u(x, t), H_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \{u(x, t), \frac{1}{2} u^2(y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (4.15)$$

Se puede ver mediante un cálculo directo que las tres cantidades están en involución.

Las tres cantidades conservadas obtenidas son las únicas que se pueden construir de forma sencilla y directa, e históricamente se llegaron a construir once cantidades conservadas por cálculo directo, hasta que mediante el trabajo de Miura y Kruskal se llegó a probar la existencia de un número infinito de ellas (véase [Gardner *et al.*, 1967]).

El método empleado, conocido como transformación de Miura, es un método relativamente sencillo y lo estudiaremos a continuación.

4.2. Transformación de Miura

Este método nos permitirá construir sistemáticamente todas las cantidades conservadas de la ecuación KdV. Para ello, construiremos una segunda ecuación relacionada con la que estamos estudiando, que se conoce como ecuación KdV modificada o ecuación MKdV:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (4.16)$$

El motivo de su nombre es que se puede obtener a partir de la KdV a través de una transformación de Riccati:

$$u(x, t) = v^2(x, t) + i\sqrt{6} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.17)$$

Introduciendo esta transformación en la ecuación (2.39) obtenemos

$$\left(2v + i\sqrt{6}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = \left(2v + i\sqrt{6}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) \quad (4.18)$$

Así, hemos obtenido que toda solución de la ecuación MKdV nos dará automáticamente una solución de la ecuación KdV sin más que utilizar la transformación de Riccati. De esta forma, toda cantidad conservada en la ecuación MKdV nos dará una cantidad conservada en la ecuación KdV, y por tanto si podemos probar que es integrable, la ecuación KdV también lo será.

Es interesante notar que las simetrías de ambas ecuaciones no coinciden. Por ejemplo, hemos visto que la ecuación KdV es invariante galileana, mientras que la ecuación MKdV no lo es. Por ejemplo, aplicando la transformación

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t \\ x &\rightarrow x + \frac{3}{2\epsilon^2}t \\ u &\rightarrow u + \frac{3}{2\epsilon^2} \\ v &\rightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} \end{aligned} \quad (4.19)$$

la ecuación KdV es invariante pero la ecuación MKdV no. De hecho, bajo esta transformación tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (4.20)$$

Podemos observar que esta ecuación es una mezcla de ambas ecuaciones, ya que cuando $\epsilon = 0$ se reduce a la ecuación KdV con $v(x, t)$ como variable dinámica, mientras que en el límite $\epsilon \rightarrow \infty$ y bajo un reescalado $v \rightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v$ la ecuación recupera la forma MKdV.

Podíamos haber hecho esta observación simplemente aplicando (4.19) a la transformación (4.17), y observando el comportamiento con ϵ .

Notemos por otra parte que si tenemos factores complejos no reales esto es simplemente por nuestra elección de coeficientes en cada ecuación y no tiene repercusión física.

4.3. Número infinito de cantidades conservadas

Con esto estamos en situación de probar que la ecuación KdV tiene un número infinito de cantidades conservadas. Hemos observado que si $v(x, t)$ es una solución de la ecuación generalizada

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\epsilon^2}{6} v^2 + v \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^2}{18} v^3 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (4.21)$$

entonces da también una solución de la ecuación KdV a través de la relación

$$u(x, t) = \frac{\epsilon^2}{6} v^2 + v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.22)$$

Además, podemos observar que la ecuación (4.21) está en forma de ecuación de continuidad, de forma que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.23)$$

Así, podemos identificar

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho[v(x, t)] \quad (4.24)$$

con

$$\rho[v(x, t)] = v(x, t) \quad (4.25)$$

Observemos ahora que dado que $u(x, t)$ está relacionada con $v(x, t)$ a través de la relación no lineal generalizada (4.22), podemos invertirla formalmente para expandir $v(x, t)$ en términos de $u(x, t)$ como

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n[u(x, t)] \quad (4.26)$$

Vemos de aquí que las $v_n[u(x, t)]$ serían las densidades conservadas de la ecuación KdV, ya que cada potencia de ϵ debe satisfacer de forma independiente una ecuación de continuidad.

Sin embargo, una densidad conservada no debe ser una derivada total, ya que en ese caso llevaría a una cantidad conservada trivial. Por tanto, debemos comprobar que esta expansión de v en términos de u no es trivial. Así, tomando la relación

$$u = v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{6} v^2 \quad (4.27)$$

es relevante preguntarse si invirtiéndola obtendremos términos polinómicos puros en u , ya que estos términos no pueden expresarse como derivadas totales. Observemos que incluso si v fuera un polinomio puro en u , $\frac{\partial v}{\partial x}$ llevaría a términos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y por tanto para estudiar esto podemos ignorar el segundo término de la derecha en la ecuación. Así, estudiaremos si la ecuación

$$u = v + \frac{\epsilon^2}{6} v^2 \quad (4.28)$$

admite que v esté expresado completamente en términos de polinomios en u .

Nótese que usando esta relación, tenemos que

$$u + \frac{6}{4\epsilon^2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} v \right)^2 \quad (4.29)$$

y por tanto

$$v = \frac{3}{\epsilon^2} \left[\left(1 + \frac{2}{3} \epsilon^2 u \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (4.30)$$

De esta forma, observamos que v tiene términos polinómicos puros en u y además que estos son de potencia par en ϵ .

Probemos ahora que las potencias impares de ϵ en la expansión de v son derivadas totales y por tanto triviales. De (4.22) obtenemos que en general v es complejo aunque u sea real. Así, descompongamos

$$v = y + iz \quad (4.31)$$

con y y z reales. Expresando (4.22) en función de las nuevas variables tenemos que

$$u = y + iz + i\epsilon \frac{\partial}{\partial x} (y + iz) + \frac{\epsilon^2}{6} (y^2 - z^2 + 2iyz) \quad (4.32)$$

Como u es real, tenemos que

$$z + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{3} yz = 0 \quad (4.33)$$

o lo que es lo mismo

$$z = -\frac{3}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(1 + \frac{\epsilon^2}{3} y \right) \quad (4.34)$$

Esto muestra que la parte imaginaria de v es una derivada pura e involucra términos que tienen potencia explícitamente impar en ϵ .

Aunque este argumento prueba que la parte imaginaria de v es de potencias impares en ϵ y es una derivada total, no es claro que no existan potencias impares de ϵ en la parte real de v . Veremos que esto es así por las propiedades de escala de distintas cantidades.

Conocemos el comportamiento de escala de x y u de la primera sección, y podemos obtener el de ϵ y v de la ecuación (4.22). Esto nos da las dimensiones de escala

$$\begin{aligned} [u] &= 1 \\ [v] &= 1 \\ [x] &= -\frac{1}{2} \\ [\epsilon] &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

De esta forma es claro que cualquier término con una potencia impar de ϵ ha de tener necesariamente un número impar de derivadas también ya que v tiene dimensión entera. Pero un término de derivada lleva necesariamente un factor de i como se observa en la ecuación (4.22), y por tanto el término ha de ser imaginario. Con el mismo argumento las partes reales deben ser todas de potencia par en ϵ , lo que lleva a cantidades conservadas no triviales.

Podemos ahora construir las cantidades conservadas. Sustituyendo la expansión de $v[u]$ en la relación (4.22) obtenemos

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \left[v_n + i \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{n-2} v_{n-m-2} v_m \right] \quad (4.36)$$

donde asumimos $v_{-1} = v_{-2} = 0$.

Como u es independiente de ϵ , comparando los términos ϵ^0 obtenemos

$$u = v_0 \quad (4.37)$$

Igualando a cero los coeficientes de los términos dependientes de ϵ obtenemos

$$v_n + i \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{n-2} v_{n-m-2} v_m = 0 \quad (4.38)$$

Esto nos da una relación de recurrencia entre las distintas cantidades con-

servadas que nos permiten construirlas recursivamente sobre u , obteniendo

$$v_1 + i \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_1 = -i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.39)$$

$$v_2 + i \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{6} v_0^2 \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{6} u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.40)$$

y se continúa construyendo de la misma forma,

$$v_3 = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.41)$$

$$v_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.42)$$

Observemos que, como obtuvimos antes, las potencias impares de ϵ dan lugar a términos imaginarios que son derivadas totales. Los términos reales, que son coeficientes de las potencias pares de ϵ , contienen monomios puros de u y por tanto no son derivadas totales.

Recordemos también que a las densidades conservadas se les puede añadir arbitrariamente constantes multiplicativas y sumarles derivadas totales. De esta forma, es claro que tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 3v_0 = 3u \\ \rho_1 &= -3v_2 = \frac{1}{2} u^2 + \text{derivadas totales} \\ \rho_2 &= 3v_4 = \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \text{derivadas totales} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Comparando con lo obtenido en (4.7), (4.9) y (4.12) podemos observar que las cantidades conservadas que habíamos obtenido no son más que las tres primeras densidades no triviales en la expansión en serie de potencias en ϵ . Tomaremos la n -ésima densidad conservada como

$$\rho_n = 3(-1)^n v_{2n} \quad (4.44)$$

de forma que la cantidad conservada será

$$H_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_n = 3(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{2n} \quad (4.45)$$

Notemos que el comportamiento de escala de las v_n se puede calcular con facilidad. Dado que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \quad (4.46)$$

tenemos que

$$[v_n] = [v_{n-1}] + \frac{1}{2} \quad (4.47)$$

Dado que $[v_0] = [u] = 1$, se sigue que

$$[v_n] = \frac{n}{2} + 1 \quad (4.48)$$

y por tanto

$$[\rho_n] = [v_{2n}] = n + 1 \quad (4.49)$$

Esto prueba que existe un infinito numerable de cantidades conservadas cada una de las cuales tiene una ley potencial entera distinta. Se puede comprobar, aunque de forma más complicada, que las cantidades conservadas para cada entero son únicas salvo constantes multiplicativas y sumas de derivadas totales.

Además, dado que cada cantidad conservada tiene un comportamiento de escala diferente, son independientes trivialmente.

4.4. Cantidades en involución e integrabilidad

Hasta ahora hemos probado dos de los tres requerimientos para que el sistema KdV sea integrable: que existe un número infinito de cantidades conservadas y que son independientes. Solo nos queda probar que están en involución.

Lo primero que probaremos es que las cantidades conservadas dadas por (4.7), (4.9) y (4.12) satisfacen la relación funcional

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \quad \text{con } n = 0, 1, 2 \quad (4.50)$$

con D como siempre el operador derivada respecto a x .

Claramente, esta relación se cumple para $n = 0$ si tomamos $H_{-1} = 0$. Para $n = 1$, tenemos que

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) \frac{\delta H_0}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \quad (4.51)$$

Operando obtenemos fácilmente que ambos lados de la ecuación son iguales a $D_x u(x)$, por lo que se cumple.

Finalmente, para $n = 2$ tenemos

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right) \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} \quad (4.52)$$

En este caso y por un procedimiento análogo al anterior obtenemos que ambos lados de la ecuación son iguales a $D_x^3 u(x) + u(x)D_x u(x)$, por lo que también se cumple la relación.

Esto nos lleva a pensar que tal vez todas las cantidades conservadas sigan una relación funcional recursiva similar. Veremos que se puede tomar el hamiltoniano de forma que se cumpla que

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x)\right) \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.53)$$

Se puede probar fácilmente por inducción. Supongamos que la relación de recurrencia anterior se cumple para $n = 1, 2, \dots, m$ con m fijo. Entonces la identidad cuando $n = m$ es

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x)\right) \frac{\delta H_{m-1}}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (4.54)$$

Pero, como H_m es una cantidad conservada, se tiene

$$\frac{dH_m}{dt} = 0 \quad (4.55)$$

Se puede calcular esta evolución temporal como

$$\frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_2\}_1 \quad (4.56)$$

donde

$$\{u(x), u(y)\}_1 = D_x \delta(x - y) \quad (4.57)$$

Podemos calcularla también con la segunda relación de corchetes de Poisson obtenida en (2.58), es decir,

$$\frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_1\}_2 \quad (4.58)$$

donde

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x)\right) \delta(x - y) \quad (4.59)$$

Usando esta última forma obtenemos

$$\frac{dH_m}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} u(x) \quad (4.60)$$

y como H_m debe ser una cantidad conservada, esta integral debe anularse, y por tanto el integrando ha de ser una derivada total. Esto solo se cumple si

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta K_m}{\delta u(x)} \quad (4.61)$$

Se observa fácilmente que K_m ha de ser de escala una potencia mayor que H_m . Se puede probar también que K_m se conserva. Así, dado que existe una única cantidad conservada para cada comportamiento de escala, podemos identificar

$$K_m = H_{m+1} \quad (4.62)$$

de forma que

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3}(D_x u(x) + u(x)D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \quad (4.63)$$

Así, hemos probado que si la relación de recurrencia es válida para $n = 1, 2, 3, \dots, m$ también lo es para $n = m + 1$. Por inducción, por tanto, se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta relación nos permitirá probar que las cantidades conservadas están en involución.

Utilizándola, es directo comprobar que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_{n-1}, H_{m+1}\}_1 \quad (4.64)$$

Iterando, probamos que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_m, H_n\}_1 = 0 \quad (4.65)$$

Esto demuestra que todas las cantidades conservadas además de ser independientes están en involución. La demostración utilizando el segundo corchete de Poisson es análoga.

De esta forma, por el teorema de Liouville probamos que la ecuación KdV es integrable. Además, dado que la ecuación MKdV comparte las mismas cantidades conservadas, también hemos obtenido que es integrable.

4.5. Ecuaciones de mayor orden jerárquico

Hemos visto que la ecuación KdV tiene un número infinito de cantidades conservadas H_n con $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_n, H_m\}_2 = 0 \quad (4.66)$$

y que además están en involución con respecto a los corchetes de Poisson asociados a la ecuación. También obtuvimos que las cantidades conservadas satisfacen la relación de recurrencia (4.53).

Esto explica por qué la ecuación KdV se puede escribir de dos maneras diferentes, como ya hemos visto, con las distintas estructuras de Poisson.

De hecho, cada una de las cantidades conservadas se puede ver como un hamiltoniano y genera su propia ecuación de evolución dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u(x), H_n\}_2 = \left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u(x)} = \{u(x), H_{n+1}\}_1 \quad (4.67)$$

Estas se conocen como ecuaciones de orden mayor de la jerarquía KdV (véase [Gesztesy y Holden, 2003]). De hecho, todo sistema integrable debe estar dotado de una estructura jerárquica de ecuaciones de evolución. Además, dado que los H_n están en involución, cada ecuación en la jerarquía comparte las mismas cantidades conservadas y es integrable.

Esto nos permite pensar en u como función de un número infinito de variables de tiempo,

$$u = u(x, t_0, t_1, t_2, \dots) \quad (4.68)$$

donde los t_n representan parámetros de evolución con respecto al hamiltoniano H_n (se corresponderían con las variables de acción del modelo, tal y como vimos al principio del trabajo). Así, para una ecuación de evolución dada en la jerarquía, solo cambia el parámetro de tiempo correspondiente mientras que los demás permanecen constantes.

Además, dado que los H_n están en involución es fácil ver que los diferentes flujos conmutan. Dicho de otro modo, si hacemos evolucionar el sistema en t_n durante un tiempo Δt_n y luego en t_m durante un tiempo Δt_m el resultado será el mismo que si hubiéramos evolucionado primero por t_m y luego por t_n .

La primera ecuación de la jerarquía KdV será la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.69)$$

que no es otra que la ecuación de una partícula quirál u onda quirál en el sentido de que describe una onda moviéndose únicamente hacia la izquierda. Esta característica de ser quirales es común a la jerarquía KdV, como ya hemos visto anteriormente.

5. Problema de valor inicial

Hasta ahora hemos conseguido demostrar que la ecuación KdV con condición de energía finita es integrable y hemos obtenido ciertas propiedades de sus soluciones, pero no hemos podido desarrollar un método que nos permita resolver la ecuación para condiciones iniciales dadas.

Existen métodos ampliamente conocidos que permiten resolver con facilidad sistemas hamiltonianos lineales con condiciones iniciales; la transformada de Laplace, por ejemplo, transforma la ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria que posteriormente podemos resolver. La transformada de Fourier, por su parte, la transforma en una ecuación algebraica, fácilmente resoluble. Sin embargo, en sistemas no lineales como el que nos ocupa estos métodos no son aplicables.

Necesitaremos métodos más ingeniosos para poder resolver la ecuación KdV. El método con el que se resolvió por primera vez, desarrollado expresamente para resolver la ecuación KdV, se convirtió posteriormente en el método estándar para resolver sistemas no lineales. Se conoce como teoría de la dispersión inversa (véase [Ablowitz y Clarkson, 1991]).

En esta sección profundizaremos un poco en las soluciones de la ecuación antes de entrar más adelante en la teoría de la dispersión inversa.

5.1. La ecuación de Schrödinger

Consideraremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, descrita por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6} u(x, t) + \lambda \right) \psi = 0 \quad (5.1)$$

donde $u(x, t)$ es la variable KdV que satisface

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (5.2)$$

La variable t de $u(x, t)$ no es la variable de tiempo de la ecuación de Schrödinger, sino que la consideraremos un parámetro que caracteriza el potencial. Por su parte, λ es el valor propio de energía y ψ la función propia correspondiente, siendo las dos en general dependientes de t .

Más adelante incidiremos más en el razonamiento detrás de la inclusión de la ecuación de Schrödinger. Por el momento, observemos que podemos utilizar la ecuación de Schrödinger para sustituir u en función de ψ en la ecuación KdV. Observamos de la ecuación de Schrödinger que

$$u(x, t) = -6 \left(\lambda + \frac{\psi_{xx}}{\psi} \right) \quad (5.3)$$

donde, como es habitual, el subíndice indica la derivación respecto a esa variable.

Usando esta relación, podemos obtener meramente operando que

$$u_t = -\frac{6}{\psi^2} \left(\lambda_t \psi^2 + \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_t}{\psi} \right) \right) \quad (5.4)$$

$$u_x = -\frac{6}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right) \quad (5.5)$$

Con un poco más de cálculo pero igualmente directo, obtenemos

$$3uu_x = -\frac{6}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u\psi_x}{\psi} \right) - 12\lambda u_x + \frac{6u_{xx}\psi_x}{\psi} \quad (5.6)$$

y sustituyendo la fórmula obtenida para u_x tenemos

$$uu_x = -\frac{6}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{3}u - 4\lambda \right) \frac{\psi_x}{\psi} \right) + \frac{2u_{xx}\psi_x}{\psi} \quad (5.7)$$

De forma similar, podemos calcular

$$u_{xxx} = -\frac{6}{\psi^2} \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{xxx}}{\psi} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \frac{\psi_x}{\psi} \right) - 2 \frac{\psi_x u_{xx}}{\psi} \quad (5.8)$$

Así, podemos expresar la ecuación KdV,

$$u_t - uu_x - u_{xxx} = 0 \quad (5.9)$$

en función de la función de onda de la ecuación de Schrödinger de la siguiente forma

$$\lambda_t \psi^2 - \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(\psi_{xxx} - \psi_t + (\frac{1}{2}u - 3\lambda)\psi_x)}{\psi} \right) = 0 \quad (5.10)$$

Integrando sobre x y utilizando el hecho de que la función de onda ψ se anula en el infinito tanto para los estados ligados como para los estados oscilatorios obtenemos

$$\lambda_t = 0 \quad (5.11)$$

Este hecho es importante, hemos obtenido que si $u(x, t)$ evoluciona de acuerdo a la ecuación KdV, los valores propios de la ecuación de Schrödinger con $u(x, t)$ como potencial son independientes del parámetro t . Como λ_t se anula, la ecuación (5.10) nos da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(\psi_{xxx} - \psi_t + (\frac{1}{2}u - 3\lambda)\psi_x)}{\psi} \right) = 0 \quad (5.12)$$

Usando la ecuación de Schrödinger nuevamente, podemos expresarlo como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} \right) = 0 \quad (5.13)$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} = \text{cte.} \quad (5.14)$$

Dado que la constante no depende de x , se puede determinar de comportamientos asintóticos.

5.2. Evolución temporal de los parámetros de dispersión

Separaremos el análisis en estados ligados y estados dispersivos.

5.2.1. Estados ligados

$$\lambda = -\kappa^2 < 0 \quad (5.15)$$

Dado que obtuvimos que $\lambda_t = 0$, la evolución en el parámetro t debe representar una simetría unitaria del sistema de Schrödinger. Por tanto, podemos estudiar el sistema en $t = 0$. En este caso, sabemos que las funciones de onda de los estados ligados decaen exponencialmente en la forma

$$\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-\kappa x} \quad (5.16)$$

Además, sabemos que la variable KdV cumple

$$u(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad (5.17)$$

Así, tenemos que

$$\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 4\lambda \frac{\psi_x}{\psi} = -4\lambda\kappa = 4\kappa^3 \quad (5.18)$$

Así, tenemos determinada la constante, y la evolución de $\psi(x, t)$ con respecto a t resulta

$$\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x - 4\kappa^3\psi = 0 \quad (5.19)$$

Multiplicando por ψ e integrando sobre x obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \psi^2}{\partial x} - \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial (u\psi^2)}{\partial x} \\ & + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx u_x \psi^2 - 4\kappa^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Recordemos que todas las derivadas totales se anulan bajo integración. Además, podemos observar en la ecuación (5.5) que $u_x\psi^2$ tiene forma de derivada total y por tanto también se anula bajo integración. Así, si definimos para los estados ligados

$$c^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^2(x, t) \quad (5.21)$$

la ecuación (5.20) nos da la ecuación de evolución

$$\frac{dc^{-1}(t)}{dt} = 8\kappa^3 c^{-1}(t) \quad (5.22)$$

de forma que

$$c^{-1}(t) = c^{-1}(0)e^{8\kappa^3 t} \quad (5.23)$$

y

$$c(t) = c(0)e^{-8\kappa^3 t} \quad (5.24)$$

Esto nos determina la evolución de la función de onda de los estados ligados con t .

5.2.2. Estados dispersivos

$$\lambda = k^2 \geq 0 \quad (5.25)$$

En este caso, las funciones de onda tendrán la forma asintótica

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} + R(k, t)e^{-ikx} \\ \psi(x, t) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} T(k, t)e^{ikx} \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde estamos considerando una onda plana que incide desde la izquierda y $R(k, t)$ y $T(k, t)$ representan los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente. Para que la función de onda sea unitaria se requiere la condición

$$|R(k, t)|^2 + |T(k, t)|^2 = 1 \quad (5.27)$$

En este caso, podemos también calcular la constante por el comportamiento asintótico

$$\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{(R_t - 4i\lambda kR)e^{-ikx} + 4i\lambda k e^{ikx}}{e^{ikx} + Re^{-ikx}} \quad (5.28)$$

Para que esto sea constante es necesario que

$$R_t - 4i\lambda kR = 4i\lambda kR \quad (5.29)$$

lo que implica

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t} \quad (5.30)$$

Por tanto, es fácil determinar la constante.

$$\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} = 4ik^3 \quad (5.31)$$

Evaluando el comportamiento asintótico en $+\infty$ de manera análoga, obtenemos que

$$\frac{\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x}{\psi} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{T_t e^{ikx} + 4i\lambda k T e^{ikx}}{T e^{ikx}} \quad (5.32)$$

Igualando a la constante anterior, obtenemos la condición $T_t = 0$ y por tanto $T(k, t) = T(k, 0)$.

Así, hemos obtenido que si el potencial en la ecuación de Schrödinger evoluciona de acuerdo a la ecuación KdV, los coeficientes de reflexión y transmisión evolucionan en la forma

$$\begin{aligned} R(k, t) &= R(k, 0)e^{8ik^3 t} \\ T(k, t) &= T(k, 0) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Además, cada normalización de los estados ligados evoluciona también de una forma sencilla

$$c_n(t) = \left(\int dx \psi_n^2(x, t) \right)^{-1} = c_n(0)e^{-8\kappa_n^3 t} \quad (5.34)$$

para cada estado ligado con energía $-\kappa_n^2$.

5.3. La ecuación de Gelfand-Levitan

Dado un potencial en la ecuación de Schrödinger, este determina unívocamente los coeficientes de reflexión y transmisión, así como los estados ligados, que están especificados por los c_n y los κ_n . Análogamente, si tenemos estas cantidades también podemos determinar el potencial unívocamente.

De esta forma, en principio, dada una condición inicial de la ecuación KdV $u(x, 0)$ tendremos determinados $R(k, 0)$, $T(k, 0)$, κ_n y $c_n(0)$ de forma única, pero como conocemos la evolución de todas estas cantidades podemos calcularlas en

cualquier tiempo y así determinar unívocamente el potencial $u(x, t)$, que será la solución de la ecuación KdV correspondiente al valor inicial $u(x, 0)$ dado.

Para determinar el potencial a partir del conocimiento de los estados ligados y los coeficientes de reflexión y transmisión tenemos que resolver la ecuación de Gelfand-Levitan (véase [Marchenko, 2011]). Sea $K(x, y)$ la solución de la ecuación

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty dz K(x, z)B(y + z) = 0, \quad y \geq x \quad (5.35)$$

con

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk R(k)e^{ikx} + \sum_{n=1}^N c_n e^{-\kappa_n x} \quad (5.36)$$

donde N es el número total de estados ligados del sistema.

Podemos obtener entonces el potencial a partir de $K(x, y)$ de la forma

$$\frac{1}{6} u(x) = 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x) \quad (5.37)$$

Podemos observar que cualquiera de las cantidades involucradas en la ecuación integral pueden en principio depender de parámetros pasivos como t en el caso de la ecuación KdV. Nótese también que en general la ecuación no tiene por qué tener solución en forma cerrada. No obstante, si el potencial no presenta reflexión, entonces siempre existirá solución en forma cerrada (véase [Koelink, 2008]).

5.4. Aplicación del método

Para ver cómo funciona el método, lo aplicaremos al estudio de la ecuación KdV en la configuración de un único solitón, que, como habíamos visto en (3.22), para $c = 4$ es

$$u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2 x \quad (5.38)$$

La ecuación de Schrödinger para $t = 0$ será

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \operatorname{sech}^2 x \psi = -\lambda \psi \quad (5.39)$$

Como ya vimos en el párrafo 3.3, este potencia admite un único estado ligado con energía

$$\kappa^2 = -\lambda = 1 \quad (5.40)$$

de forma que $\kappa = \pm 1$. La solución del estado ligado será

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \quad (5.41)$$

Elegimos esta normalización para la función de onda de forma que su comportamiento asintótico será

$$\begin{aligned} \psi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^x \\ \psi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-x} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Se puede comprobar de forma directa por mera sustitución que la función de onda que hemos tomado es solución de la ecuación de Schrödinger con el valor propio adecuado por mera sustitución.

La constante de normalización en este caso será

$$c(0) = \left(\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sech}^2 x \right)^{-1} = 2 \quad (5.43)$$

Así, la evolución temporal de la constante será

$$c(t) = 2e^{-8t} \quad (5.44)$$

Por otra parte, hemos obtenido que los potenciales de solitones no presentan reflexión, por lo que

$$R(k, t) = R(k, 0) = 0 \quad (5.45)$$

Dado que el coeficiente de transmisión no juega un papel directo en la ecuación de Gelfand-Levitan, no lo estudiaremos con detalle.

Con lo obtenido, tenemos que la ecuación (5.36) tomará la forma

$$B(x, t) = 2e^{-8t-x} \quad (5.46)$$

De esta forma, la ecuación integral de Gelfand-Levitan tomará la forma

$$K(x, y, t) + 2e^{-8t-x-y} + 2 \int_x^{\infty} dz K(x, z, t) e^{-8t-y-z} = 0 \quad (5.47)$$

Es claro que la solución será de la forma

$$K(x, y, t) = \omega(x, t) e^{-y} \quad (5.48)$$

Introduciéndola en la ecuación, obtenemos fácilmente que

$$\omega(x, t) = -\frac{2e^{-8t-x}}{1 + e^{-8t-2x}} \quad (5.49)$$

Por tanto,

$$K(x, y, t) = -\frac{2e^{-8t-x-y}}{1 + e^{-8t-2x}} \quad (5.50)$$

de forma que

$$K(x, x, t) = -2 + \frac{2}{1 + e^{-8t-2x}} \quad (5.51)$$

Y así, usando la ecuación (5.37) tenemos que

$$u(x, t) = 12 \operatorname{sech}^2(x + 4t) \quad (5.52)$$

que coincide con la solución que ya obtuvimos en (3.24) y representa una onda que viaja solo hacia la izquierda.

Sin embargo, la importancia del método radica en que se puede aplicar a cualquier configuración inicial arbitraria para obtener explícitamente la solución.

6. Teoría de la dispersión inversa

En la sección anterior, hemos utilizado el método de la dispersión inversa para resolver la ecuación KdV (y ecuaciones diferenciales no lineales en general) pero no hemos profundizado en la base del método.

Podemos preguntarnos los motivos por los que un sistema no lineal como el que nos ocupa está controlado por un sistema lineal. Además, tampoco hemos profundizado en la razón física detrás de la ecuación de Schrödinger.

Por otra parte, en este formalismo hemos dejado completamente aparte las cantidades conservadas, y no hemos visto una forma clara de obtenerlas ni qué papel juegan en el sistema.

En esta sección intentaremos entender un poco más el trasfondo del método desde la base de la teoría de la dispersión.

6.1. Dispersión en una dimensión

Consideremos el problema de dispersión en una dimensión para la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (q(x) + k^2)\psi = 0 \quad (6.1)$$

Supondremos que el potencial $q(x)$ es real y decae lo bastante rápido en el infinito, aunque no nos preocuparemos en exceso por su comportamiento asintótico respecto a la existencia de soluciones. Básicamente, supondremos que el problema está bien definido y que existe una solución.

Podemos observar que el problema que tratamos de la ecuación de Schrödinger con potencial KdV se obtiene sin más que identificar

$$q(x) = \frac{1}{6}u(x) \quad (6.2)$$

Consideraremos una onda plana que incide desde la izquierda. Tendremos entonces una función de onda que se comportará asintóticamente de la forma

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} + R(k)e^{-ikx} \\ \psi(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} T(k)e^{ikx} \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde, como sabemos, $R(k)$ y $T(k)$ son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente.

Para el estudio del comportamiento analítico de $R(k)$ y $T(k)$ introduciremos las funciones de Jost, que son soluciones de la ecuación (6.1) que satisfacen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} f(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{ikx} \\ g(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Observando la forma de la ecuación de Schrödinger (6.1), podemos ver que para k real, si $f(x, k)$ es solución también lo es $f^*(x, k)$. Por el comportamiento asintótico, vemos también que

$$f^*(x, k) = f(x, -k) \quad (6.5)$$

y por tanto es linealmente independiente de $f(x, k)$. Se puede observar fácilmente calculando el wronskiano, que es independiente de x y por tanto se pue-

de evaluar en las formas asintóticas como

$$[f(x, k), f(x, -k)] = \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} f(x, -k) - f(x, k) \frac{\partial f(x, -k)}{\partial x} = 2ik \quad (6.6)$$

Análogamente, se puede ver que

$$g^*(x, k) = g(x, -k) \quad (6.7)$$

es una solución linealmente independiente de $g(x, k)$ y que

$$[g(x, k), g(x, -k)] = -2ik \quad (6.8)$$

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de segundo orden, se puede expresar cualquier solución como combinación lineal de los pares $f(x, k)$ y $f(x, -k)$ o $g(x, k)$ y $g(x, -k)$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x, k) &= a(k)g(x, -k) + b(k)g(x, k) \\ g(x, k) &= \tilde{a}(k)f(x, -k) + \tilde{b}(k)f(x, k) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Las funciones coeficientes se pueden calcular fácilmente en términos de los wronskianos como

$$\begin{aligned} a(k) &= \tilde{a}(k) = \frac{1}{2ik} [f(x, k), g(x, k)] \\ b(k) &= -\frac{1}{2ik} [f(x, k), g(x, -k)] \\ \tilde{b}(k) &= -\frac{1}{2ik} [f(x, -k), g(x, k)] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Tenemos por tanto que

$$b(k) = -\tilde{b}(-k) \quad (6.11)$$

Observemos también que como se cumple $f^*(x, k) = f(x, -k)$ y $g^*(x, k) = g(x, -k)$, los coeficientes deben satisfacer

$$\begin{aligned} a^*(k) &= a(-k) \\ b^*(k) &= b(-k) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Además, para la consistencia de las relaciones se necesita que

$$b(k)\tilde{b}(k) + a(k)\tilde{a}(-k) = 1 \quad (6.13)$$

o, lo que es lo mismo,

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 \quad (6.14)$$

Así, es claro que $a(k)$ no puede tener ningún cero para valores reales de k . También es claro que si $a(k)$ diverge para algún valor real de k , $b(k)$ también debe diverger en ese punto con un comportamiento tal que

$$\left| \frac{b(k)}{a(k)} \right| \rightarrow 1 \quad (6.15)$$

Observemos finalmente que aunque la relación (6.14) recuerda a la relación (5.27) de los coeficientes de reflexión y transmisión, no es exactamente la misma.

6.2. Comportamiento analítico de los coeficientes de dispersión

Para poder pasar a $R(k)$ y $T(k)$, observemos que la función de onda que describe la dispersión también se puede expresar en términos de las funciones de Jost. De hecho, es claro por los comportamientos asintóticos que podemos expresar

$$\psi(x, k) = g(x, -k) + R(k)g(x, k) = T(k)f(x, k) \quad (6.16)$$

Sustituyendo ahora la forma que obtuvimos para $f(x, k)$ en la relación (6.9), tenemos que

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{1}{a(k)} \\ R(k) &= \frac{b(k)}{a(k)} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Tenemos así que

$$|R(k)|^2 + |T(k)|^2 = \left| \frac{b(k)}{a(k)} \right|^2 + \left| \frac{1}{a(k)} \right|^2 = 1 \quad (6.18)$$

como esperábamos.

Sabemos que los coeficientes de reflexión y transmisión están bien definidos para valores reales de k , pero para estudiar su comportamiento analítico

intentaremos extenderlos a valores complejos de k . Las funciones de Jost son analíticas en la mitad superior del k -plano complejo con $\text{Im} k > 0$. Por tanto, las funciones coeficiente $a(k)$ y $b(k)$ también serán analíticas en la mitad superior del k -plano complejo.

Por tanto, podemos ver por la forma de $R(k)$ y $T(k)$ que solo presentarán singularidades si $a(k)$ se anula. Sin embargo, ya hemos visto antes que esto no puede ocurrir para valores reales de k . Supondremos por tanto que $a(k)$ se anula para algún valor complejo de k en el semiplano superior,

$$a(k) = 0 \text{ para } k = k_0, \quad \text{Im} k_0 > 0 \quad (6.19)$$

Entonces, por la definición de $a(k)$ en (6.10), tenemos que $f(x, k_0)$ y $g(x, k_0)$ tienen que tener dependencia lineal. Por tanto, supongamos

$$f(x, k_0) = b_0 g(x, k_0) \quad (6.20)$$

Podemos pensar en b_0 como la extensión analítica de $b(k)$ a $k = k_0$. Por otro lado, observamos que si $\text{Im} k_0 > 0$, entonces $f(x, k_0)$ y $g(x, k_0)$ deben anularse asintóticamente, ya que

$$\begin{aligned} f(x, k_0) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-(\text{Im} k_0)x} \\ g(x, k_0) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{(\text{Im} k_0)x} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Así, vemos que si $a(k_0) = 0$, entonces tenemos una función propia normalizable de la ecuación de Schrödinger correspondiente al valor propio k_0^2 . Por otra parte, como el operador de Schrödinger de la ecuación (6.1) es hermítico, el valor propio ha de ser real, y dado que k_0 no es real, ha de ser imaginario puro,

$$k_0 = i\kappa_0 \quad (6.22)$$

Así, el estado será ligado. Por tanto, podemos concluir que $a(k)$ puede tener un número finito de ceros a lo largo del eje imaginario que se corresponderán con estados ligados. Por la definición de $a(k)$, tenemos que

$$\left. \frac{da(k)}{dk} \right|_{k=i\kappa_0} = \left\{ \frac{1}{2ik} \left[\frac{\partial f(x, k)}{\partial k}, g(x, k) \right] + \frac{1}{2ik} \left[f(x, k), \frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right] \right\} \Big|_{k=i\kappa_0} \quad (6.23)$$

donde hemos usado el hecho de que el wronskiano de $f(x, k)$ y $g(x, k)$ se anula

para $k = i\kappa_0$. Además, notemos que $f(x, k)$ y $g(x, k)$ satisfacen la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{\partial^2 f(x, k)}{\partial x^2} + (q(x) + k^2)f(x, k) = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial^2 g(x, k)}{\partial x^2} + (q(x) + k^2)g(x, k) = 0 \quad (6.25)$$

Derivando respecto a k , tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f(x, k)}{\partial k} \right) + (q(x) + k^2) \left(\frac{\partial f(x, k)}{\partial k} \right) + 2kf(x, k) = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right) + (q(x) + k^2) \left(\frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right) + 2kg(x, k) = 0 \quad (6.27)$$

Si ahora multiplicamos la primera por $\frac{\partial g(x, k)}{\partial k}$ y la segunda por $f(x, k)$ y las restamos, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, k), \frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right] = 2kf(x, k)g(x, k) \quad (6.28)$$

Finalmente, integrando respecto a x obtenemos que

$$\left[f(x, k), \frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right]_{-\infty}^x = 2k \int_{-\infty}^x dx' f(x', k)g(x', k) \quad (6.29)$$

Análogamente, podemos obtener también que

$$\left[\frac{\partial f(x, k)}{\partial k}, g(x, k) \right]_x^{\infty} = -2k \int_x^{\infty} dx' f(x', k)g(x', k) \quad (6.30)$$

Notemos ahora que para $k = i\kappa_0$, $f(x, k)$ y sus derivadas se anulan exponencialmente cuando $x \rightarrow \infty$, de la misma forma que $g(x, k)$ y sus derivadas cuando $x \rightarrow -\infty$. Así, obtenemos

$$\left\{ \left[f(x, k), \frac{\partial g(x, k)}{\partial k} \right] + \left[\frac{\partial f(x, k)}{\partial k}, g(x, k) \right] \right\} \Big|_{k=i\kappa_0} = 2i\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x, i\kappa_0)g(x, i\kappa_0) \quad (6.31)$$

De esta forma, obtenemos que

$$i \frac{da(k)}{dk} \Big|_{k=i\kappa_0} = b_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx f^2(x, i\kappa_0) = b_0^{-1} c_0^{-1} \quad (6.32)$$

donde c_0 es la constante de normalización del estado ligado. Con esto probamos que el cero en $k = i\kappa_0$ es un cero simple, ya que ni b_0 ni c_0 se anulan para soluciones no triviales. Además, si el espectro no cambia con la evolución del potencial, entonces el lado izquierdo de la ecuación es una constante y por tanto b_0 será proporcional a c_0^{-1} .

Concluimos por tanto que los coeficientes de transmisión y reflexión son funciones continuas de k que satisfacen

$$R^*(k) = R(-k), \quad T^*(k) = T(-k) \quad (6.33)$$

Además, son analíticas en el semiplano complejo superior excepto en los puntos correspondientes a estados ligados, $k_n = i\kappa_n$ con $n = 1, 2, \dots, N$. Las singularidades de $T(k)$ en los estados ligados se corresponden con polos simples con residuos

$$\text{Res}T(k)|_{k=i\kappa_n} = \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x, i\kappa_n) g(x, i\kappa_n) \right)^{-1} = i b_n c_n \quad (6.34)$$

donde b_n y c_n son las generalizaciones de b_0 y c_0 a otros estados ligados.

Por estas propiedades, claramente podemos determinar el coeficiente de transmisión una vez conocemos el coeficiente de reflexión y los estados ligados. Por ejemplo, si conocemos $R(k)$, entonces

$$|T(k)| = (1 - |R(k)|^2)^{1/2} \quad (6.35)$$

Además, como $T(k)$ es una función meromorfa en k , podemos expresarla

$$T(k) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\ln(1 - |R(k')|^2)}{k' - k} \right\} \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n} \quad (6.36)$$

El segundo factor, que proviene de las contribuciones de los estados ligados, se corresponde con la fase de $T(k)$. Así, vemos que la matriz de *scattering* está completamente determinada una vez que conocemos $R(k)$, κ_n y c_n . Es por ello que el conjunto de ellos se suele denominar información de *scattering*. Además, de la misma forma que un potencial determina la información de *scattering* y por tanto la matriz S de forma única, el conocimiento de la información de *scattering* también lleva a la construcción del potencial de forma única.

Finalmente, para ver la utilidad de la ecuación (6.36), observemos que si el

potencial no presenta reflexión, entonces $R(k) = 0$ y por tanto

$$T(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n} \quad (6.37)$$

es una fase pura.

A modo de ejemplo, centrémonos en el problema de un único solitón que estudiamos en la sección anterior. Obtuvimos que el potencial no presenta reflexiones y admite un único estado ligado en $k = i$, de forma que obtenemos que

$$T(k) = \frac{k + i}{k - i} \quad (6.38)$$

Tenemos por tanto que

$$i \frac{da(k)}{dk} \Big|_{k=i} = \frac{1}{2} \quad (6.39)$$

También obtuvimos que la función de onda del estado ligado es de la forma

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}(x + 4t) \quad (6.40)$$

y satisface

$$\psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} e^{\mp(x+4t)} \quad (6.41)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^2(x, t) = \frac{1}{2} \quad (6.42)$$

Podemos expresar las funciones de Jost en términos de $\psi(x, t)$ como

$$\begin{aligned} f(x, k = i) &= e^{4t} \psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-x} \\ g(x, k = i) &= e^{-4t} \psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^x \end{aligned} \quad (6.43)$$

Observemos que

$$f(x, k = i) = e^{8t} g(x, k = i) \quad (6.44)$$

de forma que

$$b(k = i) = e^{8t} \quad (6.45)$$

lo cual identificamos con $2c^{-1}(t)$ como vimos en la sección anterior. Además, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^2(x, k = i) = e^{8t} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^2(x, t) = \frac{1}{2} e^{8t} = c^{-1}(t) \quad (6.46)$$

Con todo esto, es directo comprobar que la relación (6.32) se cumple.

6.3. Variables de acción-ángulo

Como ya remarcamos al comenzar la discusión sobre la dispersión, podemos particularizar al caso de KdV escogiendo

$$q(x) = \frac{1}{6}u(x) \quad (6.47)$$

de forma que la ecuación de Schrödinger pasa a ser

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6}u(x) + k^2 \right) \psi = 0 \quad (6.48)$$

En lugar de trabajar directamente con los coeficientes de dispersión, estudiaremos $a(k)$ y $b(k)$. Es claro que estos coeficientes son funcionales del potencial. Por tanto, podemos calcular su variación con respecto al potencial de la siguiente forma.

Dado que las funciones de Jost satisfacen la ecuación de Schrödinger, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, k)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6}u(x) + k^2 \right) f(x, k) &= 0 \\ \frac{\partial^2 g(x, k)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6}u(x) + k^2 \right) g(x, k) &= 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Supongamos variaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} u(x) &\rightarrow u(x) + \delta u(x) \\ f(x, k) &\rightarrow f(x, k) + \delta f(x, k) \\ g(x, k) &\rightarrow g(x, k) + \delta g(x, k) \end{aligned} \quad (6.50)$$

sujetas a las condiciones

$$\begin{aligned} \delta u &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \\ \delta f(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \\ \delta g(x, k) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

Manteniendo los términos lineales en las variaciones en la ecuación (6.49),

tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \delta f}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6}u(x) + k^2\right)\delta f + \frac{1}{6}\delta u f &= 0 \\ \frac{\partial^2 \delta g}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6}u(x) + k^2\right)\delta g + \frac{1}{6}\delta u g &= 0\end{aligned}\quad (6.52)$$

Multiplicando ahora la primera ecuación de (6.49) por δg y la última de (6.52) por f , restándolas e integrando el resultado, obtenemos

$$\left[f(x, k), \frac{\delta g(x, k)}{\delta u(x)} \right] = \frac{1}{12} f(x, k) g(x, k) \quad (6.53)$$

donde hemos usados las condiciones asintóticas y la fórmula

$$\int_0^\infty dx \delta(x) f(x) = \frac{1}{2} f(0) = \int_{-\infty}^0 dx \delta(x) f(x) \quad (6.54)$$

Análogamente, del otro par de ecuaciones obtenemos

$$\left[\frac{\delta f(x, k)}{\delta u(x)}, g(x, k) \right] = \frac{1}{12} f(x, k) g(x, k) \quad (6.55)$$

Así, con estos últimos resultados y usando que

$$a(k) = \frac{1}{2ik} [f(x, k), g(x, k)] \quad (6.56)$$

tenemos que

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = \frac{1}{12ik} f(x, k) g(x, k) \quad (6.57)$$

Análogamente, tenemos también que

$$\frac{\delta b(k)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{12ik} f(x, k) g(x, -k) \quad (6.58)$$

De esta forma, podemos calcular los corchetes de Poisson de funcionales de $a(k)$ y $b(k)$ usando la expresión que ya calculamos para ello. Por su longitud, nos saltaremos los cálculos, pero el resultado final que obtenemos es que el conjunto

$$\begin{aligned}P(k) &= -\frac{144k}{\pi} \ln|a(k)| \\ Q(k) &= \operatorname{arg}b(k)\end{aligned}\quad (6.59)$$

forma un conjunto canónico de variables que satisfacen para $k, k' > 0$ que

$$\begin{aligned} \{P(k), P(k')\} = 0 = \{Q(k), Q(k')\} \\ \{Q(k), P(k')\} = \delta(k - k') \end{aligned} \quad (6.60)$$

Además de los estados dispersivos, tenemos también los estados ligados caracterizados por κ_n y c_n . Se pueden calcular también los corchetes de Poisson asociados a estas variables y obtenemos que

$$\begin{aligned} p_n &= 144\kappa_n^2 \\ q_n &= \frac{1}{2}\ln|b_n| \end{aligned} \quad (6.61)$$

con

$$b_n = \frac{-ic_n^{-1}}{\left.\frac{da(k)}{dk}\right|_{k=i\kappa_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (6.62)$$

también forma un conjunto canónico bajo la estructura de corchetes de Poisson de KdV.

De esta forma, el conjunto $(P(k), p_n, Q(k), q_n)$ constituye unas coordenadas canónicas del sistema KdV. Se sigue de esto que

$$\{\ln a(k), \ln a(k')\} = 0 \quad (6.63)$$

y en consecuencia $\ln a(k)$ debe contener de alguna forma las cantidades conservadas. De hecho, no profundizaremos en el cálculo pero se pueden obtener a partir de ello las densidades de las cantidades conservadas.

Con un cálculo relativamente largo que tampoco reproduciremos, podemos obtener la expresión del hamiltoniano en función de las coordenadas canónicas,

$$H_{KdV} = 8 \int_0^\infty dk k^3 P(k) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{m=1}^N (p_m)^{5/2} \quad (6.64)$$

Finalmente, con esto es directo calcular la evolución temporal de las varia-

bles canónicas usando los corchetes de Poisson correspondientes,

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(k, t)}{dt} &= 0 \\
 \frac{dp_n(t)}{dt} &= 0 \\
 \frac{dQ(k, t)}{dt} &= 8k^3 \\
 \frac{dq_n(t)}{dt} &= 4\kappa_n^3
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

y por tanto podemos calcular con facilidad la evolución temporal de los coeficientes funcionales

$$\begin{aligned}
 a(k, t) &= a(k, 0) \\
 b(k, t) &= b(k, 0)e^{8ik^3 t} \\
 b_n(t) &= b_n(0)e^{8\kappa_n^3 t}
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Por supuesto, esto coincide con la evolución que ya habíamos calculado, y nos muestra que esta evolución simple es consecuencia del hecho de que transformar la información de *scattering* es transformar las variables de acción-ángulo del sistema.

7. El método de Lax

Hasta ahora hemos visto que si tenemos una ecuación de evolución no lineal y le podemos asociar una ecuación lineal apropiada, entonces podemos aplicar el método de la dispersión inversa para obtener la solución de la ecuación no lineal. De esta forma, el sistema lineal cuyos valores propios no evolucionan bajo el flujo no lineal juega un papel fundamental. Sin embargo, no hemos justificado cómo surge la ecuación lineal y cómo podemos encontrar una ecuación lineal adecuada para un sistema no lineal dado.

7.1. Origen de la ecuación de Schrödinger

Antes de entrar de lleno en la discusión formal de la teoría, nos detendremos a entenderlo primero de una manera más intuitiva. Recordamos de (4.17) y (4.18) que las ecuaciones KdV y MKdV están relacionadas por una relación de

Riccati, de forma que si $u(x, t)$ satisface la ecuación KdV, entonces tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v^2 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (7.1)$$

Podemos aprovechar la invariancia galileana de la ecuación KdV que vimos en (2.44) para definir una relación de Riccati generalizada de la forma

$$u(x, t) + 6\lambda = v^2(x, t) + i\sqrt{6} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (7.2)$$

De esta forma, si $u(x, t)$ satisface la ecuación KdV, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (v^2 - 6\lambda) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (7.3)$$

Como ya vimos, si obtenemos una solución de la ecuación MKdV esta nos dará asimismo una solución de la ecuación KdV a través de la relación de Riccati. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, ya que la relación de Riccati no es invertible en general. Sin embargo, dado que ambas ecuaciones son integrables y comparten las mismas cantidades conservadas, uno podría pensar intuitivamente que solucionar una implicaría solucionar la otra y, de esta forma, podríamos preguntarnos si podemos realmente invertir la relación de Riccati. La forma más sencilla de invertirla es linealizar, por lo que definimos

$$v(x, t) = i\sqrt{6} \frac{\psi_x}{\psi} \quad (7.4)$$

de forma que la ecuación (7.2) pasa a ser

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6} u(x, t) + \lambda \right) \psi = 0 \quad (7.5)$$

Así, si encontramos un ψ que satisfaga la relación anterior podremos invertir la relación de Riccati. Podemos reconocer esta última ecuación como la que vimos en (5.1) y que identificamos con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Además, como el valor propio de la ecuación de Schrödinger, λ , fue introducido a través de una transformación de Galileo, es independiente del parámetro t . Así, hemos visto por qué el parámetro espectral no evoluciona con el tiempo.

Podemos expresar la función de onda de Schrödinger, ψ , en términos de la

variable MKdV $v(x, t)$,

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{6}} \int^x dx' v(x', t)\right) \quad (7.6)$$

de forma que su evolución temporal será

$$\psi_t = \left(-\frac{i}{\sqrt{6}} \int^x dx' \frac{\partial v(x', t)}{\partial t}\right) \psi \quad (7.7)$$

Por otro lado, sabemos que $v(x, t)$ evoluciona de acuerdo a (7.3), que podemos expresar como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} v^3 - 6\lambda v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \quad (7.8)$$

Introduciendo esto último en (7.7) tenemos

$$\psi_t = -\frac{i}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{3} v^3(x, t) - 6\lambda v(x, t) + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \text{cte.}\right) \psi \quad (7.9)$$

Expresando v en función de ψ a través de (7.6) y utilizando que ψ satisface la ecuación de Schrödinger, obtenemos que la evolución temporal de ψ es

$$\psi_t + \frac{1}{6} u_x \psi + 4\lambda \psi_x - \frac{1}{3} u \psi_x = \text{cte.} \cdot \psi \quad (7.10)$$

que coincide con la ecuación (5.14) que utilizamos para el problema de dispersión inversa.

7.2. El par de Lax

Pasaremos ahora a un análisis más formal de la teoría. Queremos, dada una ecuación de evolución no lineal, encontrar un operador lineal cuyos valores propios sean constantes bajo la evolución no lineal. Con ello, podremos aplicar el método que hemos obtenido a otros sistemas y desarrollar así un método general para sistemas no lineales.

Comenzaremos analizando el problema en el caso lineal. Dada una ecuación de evolución lineal descrita por un hamiltoniano independiente del tiempo H , queremos construir operadores cuyos valores esperados no cambien con el tiempo. Es claro que si A es un operador con esta propiedad, entonces en la imagen de Heisenberg $A(t)$ ha de ser unitariamente equivalente a $A(0)$,

$$U^\dagger(t) A(t) U(t) = A(0) \quad (7.11)$$

con $U(t)$ el operador de evolución temporal con la forma

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (7.12)$$

Derivando con respecto a t , tenemos que

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i[A(t), H] \quad (7.13)$$

Así, esta condición es necesaria para que los valores propios de $A(t)$ sean independientes del tiempo. Además, podemos expresar

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = -iHU(t) = BU(t) \quad (7.14)$$

donde

$$B = -iH \quad (7.15)$$

es un operador hermítico.

Intentaremos ahora seguir un procedimiento análogo en el caso de ecuaciones de evolución no lineales. Sea

$$L(u(x, t)) = L(t) \quad (7.16)$$

el operador lineal que buscamos. Supongamos que es hermítico y que sus valores propios son independientes de t . Para que esto sea cierto, ha de existir un operador unitario $U(t)$ tal que

$$U^\dagger(t)L(t)U(t) = L(0) \quad (7.17)$$

Derivando en ambos lados de la ecuación respecto a t obtenemos que

$$\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}L(t)U(t) + U^\dagger(t)\frac{\partial L(t)}{\partial t}U(t) + U^\dagger(t)L(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0 \quad (7.18)$$

Al contrario que en el caso lineal, no conocemos la forma explícita de $U(t)$, pero dado que es unitario tenemos que

$$U^\dagger(t)U(t) = 1 \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}U(t) + U^\dagger(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0 \quad (7.20)$$

de forma que

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = B(t)U(t) \quad (7.21)$$

con $B(t)$ un cierto operador que ha de ser antihermítico. Sustituyendo en (7.18), tenemos

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [B(t), L(t)] \quad (7.22)$$

Así, vemos que $L(t)$ debe satisfacer una relación similar a la que encontramos en el caso lineal. La única diferencia es que no conocemos la forma explícita de $B(t)$. Sin embargo, sabemos que $L(t)$ es lineal en $u(x, t)$. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación será un operador multiplicativo proporcional a la evolución temporal de $u(x, t)$. Es claro, por tanto, que si podemos encontrar un operador lineal $L(t)$ y un segundo operador $B(t)$ no necesariamente lineal tales que el conmutador $[B(t), L(t)]$ sea un operador multiplicativo proporcional a la evolución de $u(x, t)$ de acuerdo a una ecuación no lineal, entonces los valores propios de $L(t)$ serán independientes de t , es decir, en la ecuación

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \quad (7.23)$$

los valores λ serían independientes de t . Además, $\psi(t)$ debe estar unitariamente relacionado con su valor en $t = 0$. Es decir,

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \quad (7.24)$$

De esta manera, su evolución con t tomará la forma

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t} \psi(0) = B(t)\psi(t) \quad (7.25)$$

Los operadores $L(t)$ y $B(t)$, cuando existen, se conocen como par de Lax correspondiente a una ecuación de evolución no lineal dada, y son vitales en la determinación de soluciones (véase [Lax, 1968]).

7.3. Particularización a KdV

Particularizaremos ahora a la ecuación KdV. Hemos visto que en este caso

$$L(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u(x, t) = D^2 + \frac{1}{6}u(x, t) \quad (7.26)$$

de forma que

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.27)$$

Este es un operador multiplicativo y describe la evolución temporal de u . $B(t)$ se puede encontrar de forma sistemática. Observemos que $B(t)$ ha de ser antihermítico y por tanto debe ser impar en el número de derivadas. Elegiremos la forma más sencilla,

$$B(t) = aD \quad (7.28)$$

con a constante. En este caso,

$$[B(t), L(t)] = \frac{a(Du(x, t))}{6} = \frac{a}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.29)$$

Así, aunque el conmutador es un operador multiplicativo, no describe la evolución de $u(x, t)$ bajo el flujo KdV. De hecho, se observa fácilmente que con $a = 1$, la ecuación de Lax describe una partícula u onda quiral,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.30)$$

La siguiente elección obvia para $B(t)$ que satisface todas las propiedades de simetría y un comportamiento de escala homogéneo es

$$B(t) = a_3 D^3 + a_1 (Du + uD) \quad (7.31)$$

con a_1 y a_3 constantes, de forma que

$$[B(t), L(t)] = \left(\frac{a_3}{6} - a_1\right) (D^3 u) + \frac{a_1}{3} u(Du) + \left(\frac{a_3}{2} - 4a_1\right) ((D^2 u)D + (Du)D^2) \quad (7.32)$$

Así, este conmutador es un operador multiplicativo si las constantes a_1 y a_3 satisfacen

$$\frac{a_3}{2} - 4a_1 = 0 \quad (7.33)$$

de forma que

$$[B(t), L(t)] = \frac{a_1}{3} (u(Du) + (D^3 u)) \quad (7.34)$$

Se observa fácilmente que con la elección $a_1 = 1/2$, la ecuación de Lax des-

cribe la ecuación KdV. Así, el par de Lax para la ecuación KdV viene dado por

$$\begin{aligned} L(t) &= D^2 + \frac{1}{6}u \\ B(t) &= 4D^3 + \frac{1}{2}(Du + uD) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Observemos que el operador $B(t)$ está definido salvo constante aditiva, ya que las constantes conmutan con cualquier operador, de esta forma, la evolución de ψ con t vendrá dada por

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi = -\frac{1}{6}u_x\psi + \frac{1}{3}u\psi_x - 4\lambda\psi_x + \text{cte.} \cdot \psi \quad (7.36)$$

que por supuesto coincide con la que obtuvimos en (5.14) y (7.10).

Podemos generalizar esta construcción para tomar $B(t)$ de mayor orden en las derivadas. Como $B(t)$ ha de ser antihermítico, la forma más general con un comportamiento de escala homogéneo se puede tomar como

$$B_m(t) = a \left[D^{2m+1} + \sum_{j=1}^m \left(b_j(u) D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j(u) \right) \right] \quad (7.37)$$

donde a es una constante general y las $b_j(u)$ representan m funcionales arbitrarios de u con comportamiento de escala específico. Sabemos también que $[B_m(t), L(t)]$ es hermítico y por tanto tiene la forma

$$[B_m(t), L(t)] = \tilde{a}K_m(u) + \sum_{j=1}^m D^j C_j(u) D^j \quad (7.38)$$

con $K_m(u)$ un operador multiplicativo. Imponer que este operador sea multiplicativo implica imponer m condiciones que determinan los $b_j(u)$ unívocamente.

Tomando una constante a apropiada, se puede probar que la ecuación de Lax da la ecuación KdV de orden m según (4.67),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \quad (7.39)$$

Con ello, probamos que las soluciones de todas las ecuaciones de la jerarquía KdV se pueden obtener de la información de *scattering* de la misma ecuación de Schrödinger.

7.4. Construcción alternativa

Por su elegancia, reproduciremos brevemente un método alternativo para calcular los operadores $B_m(t)$ basada en técnicas de operadores formales. Recordemos que

$$L(t) = D^2 + \frac{1}{6}u \quad (7.40)$$

Podemos definir formalmente la raíz cuadrada de este operador como una serie infinita de potencias inversas de D , esto es,

$$L^{1/2}(t) = D + a_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)D^{-n} \quad (7.41)$$

donde cada $a_n(u)$ es un funcional de u . Se pueden determinar sus formas funcionales hasta cualquier orden sin más que calcular la serie formal e igualarla a $L(t)$ hasta cualquier orden.

Dada la forma de $L^{1/2}(t)$, podemos calcular fácilmente $(L(t))^{\frac{2m+1}{2}}$ utilizando la relación

$$(L(t))^{\frac{2m+1}{2}} = L^m(t)L^{1/2}(t) = \left(D^2 + \frac{1}{6}u\right)^m L^{1/2}(t) \quad (7.42)$$

Esta es también una serie formal con potencias tanto positivas como negativas de D . Sea $(L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}}$ la parte de la serie formal con el grado del operador derivada mayor o igual que cero. Denotaremos el complementario por $(L(t))_-^{\frac{2m+1}{2}}$ y constará de los términos con potencias negativas de D , por lo que

$$(L(t))^{\frac{2m+1}{2}} = (L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}} + (L(t))_-^{\frac{2m+1}{2}} \quad (7.43)$$

Observemos que dado que la mayor derivada contenida en $L^m(t)$ es D^{2m} , para conocer $(L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}}$ necesitamos conocer el coeficiente del término D^{-2m} en la expansión de $L^{1/2}(t)$. Observemos también que

$$\left[(L(t))^{\frac{2m+1}{2}}, L(t)\right] = 0 \quad (7.44)$$

por lo que tenemos que

$$\left[(L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}}, L(t)\right] = - \left[(L(t))_-^{\frac{2m+1}{2}}, L(t)\right] \quad (7.45)$$

El lado izquierdo de la ecuación es un operador derivada de grado mayor o igual que cero, mientras que el lado derecha es un operador derivada de gra-

do menor o igual que cero. Así, la igualdad solo se cumplirá si ambos lados se corresponden con un operador multiplicativo. Así, vemos que

$$\left[(L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}}, L(t) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.46)$$

es un operador multiplicativo y por tanto podemos identificarlo salvo constante multiplicativa con los $B_m(t)$,

$$B_m(t) = \alpha_m (L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}} \quad (7.47)$$

7.5. Derivación de Lenard de la ecuación KdV

Para entender mejor su interrelación, podemos preguntarnos si podemos obtener la jerarquía de la ecuación KdV a partir de la ecuación de Schrödinger lineal. Será fundamental para ello la suposición de la independencia temporal del parámetro espectral λ .

Tomemos la ecuación de Schrödinger,

$$\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \psi = 0 \quad (7.48)$$

Derivando respecto a t tenemos

$$\psi_{xxt} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \psi_t + \frac{1}{6}u_t \psi = 0 \quad (7.49)$$

Tomamos $\psi(x, t)$ normalizado a la unidad para todo t , de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^2(x, t) = 1 \quad (7.50)$$

En consecuencia, si multiplicamos (7.49) por $\psi(x, t)$ e integramos sobre el eje x , obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\psi \psi_{xxt} + \frac{1}{6}u \psi \psi_t + \frac{1}{6}u_t \psi^2 \right) = 0 \quad (7.51)$$

Por otra parte, podemos expresar

$$\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\psi \psi_{xx} + \frac{1}{6}u \psi^2 \right) \quad (7.52)$$

y, dado que λ es independiente de t , tenemos que

$$\lambda_t = 0 = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(2\psi\psi_{xxt} + \frac{1}{6}u_t\psi^2 + \frac{1}{3}u\psi\psi_t \right) \quad (7.53)$$

Introduciendo la relación (7.51), obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u_t\psi^2 = 0 \quad (7.54)$$

Así, la forma de u_t ha de ser tal que el integrando sea una derivada total. La forma más general para ello es

$$u_t\psi^2 = \frac{\partial}{\partial x} (A(u)\psi_x^2 + B(u)\psi\psi_x + C(u)\psi^2) \quad (7.55)$$

donde $A(u)$, $B(u)$ y $C(u)$ son funcionales de u y dependen de λ . Es importante remarcar que esta es la forma más general ya que cualquier derivada de mayor orden de ψ se puede reducir a ella utilizando la ecuación de Schrödinger. Escribiendo los términos explícitamente, tenemos

$$u_t\psi^2 = (A_x + B)(\psi_x)^2 + \left(B_x + 2C - 2A\left(\frac{1}{6}u + \lambda\right) \right) \psi\psi_x + \left(C_x - B\left(\frac{1}{6}u + \lambda\right) \right) \psi^2 \quad (7.56)$$

Comparando ambos lados de la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} B &= -A_x \\ C &= A\left(\frac{1}{6}u + \lambda\right) + \frac{1}{2}A_{xx} \end{aligned} \quad (7.57)$$

y por tanto

$$u_t = \frac{1}{2} \left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) A + 2\lambda DA \quad (7.58)$$

Dado que u_t es independiente de λ , debemos tomar $A(u)$ una función de λ tal que la relación anterior sea consistente. Expandiendo en serie de potencias en (-4λ) ,

$$A(u) = 2 \sum_{j=0}^n A_j(u) (-4\lambda)^{n-j} \quad (7.59)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) A_j = DA_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7.60)$$

con

$$A_0 = 1 \quad (7.61)$$

Así,

$$u_t = \left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) A_n \quad (7.62)$$

De esta forma, las A_j satisfacen la misma relación de recurrencia que las cantidades conservadas de la ecuación KdV en (4.63). Podemos por tanto identificar

$$A_j = \frac{\delta H_j}{\delta u(x)} \quad (7.63)$$

Así, hemos recuperado las relaciones de recurrencia de la ecuación KdV, así como las ecuaciones de la jerarquía KdV, ya que cada una se corresponde simplemente con una forma particular de A donde las funciones coeficiente están completamente determinadas. Esto nos muestra que toda la jerarquía de ecuaciones se puede obtener de la misma ecuación de Schrödinger si suponemos que el parámetro espectral es independiente de t .

8. Otras propiedades de la ecuación KdV

Nos dedicaremos ahora a estudiar algunas propiedades interesantes que presenta la ecuación KdV. En particular, entenderemos el trasfondo físico del parámetro espectral de la ecuación de Schrödinger, veremos cómo las cantidades conservadas están en involución en el formalismo del método de Lax y encontraremos una fascinante relación entre la ecuación KdV y un grupo de Lie de simetrías.

8.1. El parámetro espectral

Abordemos la cuestión del significado de los valores propios conservados de la ecuación de Schrödinger en la ecuación KdV. Denotaremos la ecuación KdV de manera compacta en la siguiente forma

$$u_t = uu_x + u_{xxx} = K(u) \quad (8.1)$$

Construiremos además una familia paramétrica de soluciones, $u^{(\epsilon)}(x, t)$, de la ecuación KdV. Sea

$$u^{(\epsilon)}(x, 0) = u(x, 0) + \epsilon f(x) \quad (8.2)$$

con $f(x)$ una función suave que se anula asintóticamente.

Denotamos la solución de la ecuación KdV correspondiente a esta condición inicial como $u^{(\epsilon)}(x, t)$. Esta, en general, será una serie de potencias de ϵ de la forma

$$u^{(\epsilon)}(x, t) = u(x, t) + \epsilon v(x, t) + o(\epsilon^2) \quad (8.3)$$

con

$$v(x, t) = \left. \frac{du^{(\epsilon)}(x, t)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (8.4)$$

Para evitar confusiones, recalquemos que $v(x, t)$ no es la variable MKdV a pesar de haber utilizado esta notación antes. Definamos ahora

$$\left. \frac{dK(u^{(\epsilon)})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{dK(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = M(u)v \quad (8.5)$$

Claramente, es un funcional lineal de v y la llamaremos derivada de Frechet de $K(u)$. $M(u)$ se llama habitualmente derivada funcional de $K(u)$. En general, $M(u)$ será un operador que involucra derivadas. Sin embargo, observemos que por la ecuación (8.1), $u^{(\epsilon)}$ satisfará la ecuación

$$u_t^{(\epsilon)} = K(u^{(\epsilon)}) \quad (8.6)$$

de forma que al derivar ambos lados con respecto a ϵ y fijar $\epsilon = 0$ obtenemos la ecuación lineal

$$v_t = M(u)v \quad (8.7)$$

Por simplicidad, introduciremos la siguiente notación para derivadas funcional de cantidades conservadas. Si $H_n(u)$ es una cantidad conservada, entonces su derivada funcional se obtiene como

$$\left. \frac{dH_n(u^{(\epsilon)})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{dH_n(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = (G_n(u), v) = \int_{-\infty}^{\infty} dx G_n(u(x, t))v(x, t) \quad (8.8)$$

de forma que

$$G_n(u(x, t)) = \frac{\delta H_n(u)}{\delta u(x, t)} \quad (8.9)$$

Podemos también identificar de (4.12) y (8.1) que

$$K(u) = \frac{\partial G_2(u(x, t))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_2}{\delta u(x, t)} \quad (8.10)$$

Observemos que, dado que $H_n(u^{(\epsilon)})$ es una cantidad conservada para todos los valores de ϵ ,

$$(G_n(u(x, t)), v(x, t)) \quad (8.11)$$

ha de ser independiente del tiempo. Derivando respecto a t obtenemos

$$\left(\frac{\partial G_n}{\partial t}, v \right) + \left(G_n, \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (8.12)$$

Además, usando la fórmula (8.7) para la evolución temporal de v tenemos

$$\left(\frac{\partial G_n}{\partial t}, v \right) + (G_n, M(u)v) = 0 \quad (8.13)$$

que podemos expresar como

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) G_n, v \right) = 0 \quad (8.14)$$

con $M^\dagger(u)$ el adjunto de $M(u)$ respecto al producto interno (\cdot, \cdot) .

Dado que v se puede elegir arbitrariamente sin más que cambiar la condición inicial, concluimos que la relación anterior solo se puede cumplir en general si

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) G_n(u(x, t)) = 0 \quad (8.15)$$

Así, la derivada funcional de cada cantidad conservada debe satisfacer esta ecuación. En particular, como

$$H_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x, t) \quad (8.16)$$

es una cantidad conservada, tenemos que

$$G_1 = \frac{\delta H_1}{\delta u(x, t)} = u(x, t) \quad (8.17)$$

debe satisfacer

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) G_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) u = 0 \quad (8.18)$$

Comparando con la ecuación KdV (8.1), tenemos

$$K(u) = -M^\dagger(u)u \quad (8.19)$$

ya que con un cálculo directo observamos que

$$M(u) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} + u_x \quad (8.20)$$

y por tanto

$$M^\dagger(u) = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - u \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.21)$$

Es interesante observar también la naturaleza de operador de $M(u)$ y $M^\dagger(u)$.

Consideremos ahora el caso en que la solución de la ecuación KdV es una onda solitaria, es decir,

$$u(x, t) = s(x + ct) \quad (8.22)$$

con c la velocidad de la onda, que se mueve hacia la izquierda. Esta onda satisfará la ecuación

$$\frac{\partial s(x + ct)}{\partial t} = K(s) = -M^\dagger(s)s \Rightarrow \left(c \frac{\partial}{\partial x} + M^\dagger(s) \right) s = 0 \quad (8.23)$$

Por otro lado, las derivadas funcionales de las cantidades conservadas también satisfacen la misma ecuación en este caso, luego

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} + M^\dagger(s) \right) G_n(s) = 0 \quad (8.24)$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones, podemos ver que

$$G_n(s) \propto s \quad (8.25)$$

Así, las derivadas funcionales de las cantidades conservadas en el caso de ondas solitarias son proporcionales a las propias ondas. Otra forma de verlo es que para estas soluciones, todas las cantidades conservadas deben tomar la misma forma, dada por

$$H_n(s) \propto \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx s^2(x + ct) \quad (8.26)$$

Planteemos la ecuación de Schrödinger para la familia paramétrica de potenciales,

$$\psi_{xx}^{(\epsilon)} + \left(\frac{1}{6} u^{(\epsilon)} + \lambda^{(\epsilon)} \right) \psi^{(\epsilon)} = 0 \quad (8.27)$$

con

$$\begin{aligned} u^{(\epsilon)} &= u + \epsilon v + o(\epsilon^2) \\ \psi^{(\epsilon)} &= \psi + \epsilon \phi + o(\epsilon^2) \\ \lambda^{(\epsilon)} &= \lambda + \epsilon \left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (8.28)$$

de forma que para $\epsilon = 0$ recuperamos la ecuación habitual

$$\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \psi = 0 \quad (8.29)$$

Derivando la ecuación respecto a ϵ y fijando $\epsilon = 0$, obtenemos

$$\phi_{xx} + \left(\frac{1}{6}v + \left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \psi + \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \phi = 0 \quad (8.30)$$

Tomando el producto interno de esta última ecuación con ψ y usando el hecho de que ψ satisface la ecuación de Schrödinger usual obtenemos finalmente que

$$\left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{6}(\psi^2, v) \quad (8.31)$$

donde hemos usado que ψ está normalizado a la unidad. Además, de la definición de derivada de Frechet concluimos que

$$\frac{\delta \lambda}{\delta u(x, t)} = G_\lambda(u) = -\frac{1}{6}\psi^2(u) \quad (8.32)$$

Observamos que, en el marco de (8.25) dado que $\lambda(u)$ se conserva bajo el flujo KdV, entonces para una onda solitaria

$$G_\lambda(s) = -\frac{1}{6}\psi^2(s) \propto s \quad (8.33)$$

de forma que

$$\psi(s) \propto s^{1/2} \quad (8.34)$$

Así, para un potencial de onda solitaria, la función propia de la ecuación de Schrödinger es proporcional a la raíz cuadrada de la solución de onda solitaria. Como podemos recordar de (5.38) y (5.41), para un potencial de un solitón se cumple esta relación, ya que si

$$u(x, 0) = 12\text{sech}^2 x \quad (8.35)$$

entonces la función de onda correspondiente es

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \quad (8.36)$$

Reflexionemos sobre las consecuencias de este hecho. Introduciendo la forma (8.34) en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$s_{xx} - \frac{1}{2} s^{-1} s_x^2 + \frac{1}{3} s^2 + 2\lambda s = 0 \quad (8.37)$$

Derivando con respecto a x , obtenemos

$$s_{xxx} + s s_x + 4\lambda s_x = 0 \quad (8.38)$$

Usando ahora la forma de $M^\dagger(s)$ de la ecuación (8.21) llegamos a

$$\left(4\lambda \frac{\partial}{\partial x} - M^\dagger(s) \right) s = 0 \quad (8.39)$$

Por otra parte, dado que s representa una onda solitaria, debe satisfacer la ecuación (8.22), por lo que por comparación obtenemos que

$$c = -4\lambda(s) \quad (8.40)$$

y esto, finalmente, da significado físico al parámetro espectral de la ecuación de Schrödinger. Así, los valores propios discretos corresponden a las velocidades de las ondas solitarias con una constante multiplicativa de $-1/4$. Efectivamente, en nuestro cálculo para un solitón en las ecuaciones (5.38), (5.40) y (5.52), obtuvimos que para $c = 4$ el valor propio correspondiente era $\lambda = -1$.

Esta interpretación física lleva a un entendimiento intuitivo de por qué deben conservarse. Recordemos que las ondas solitarias conservan su forma, y ya encontramos que su forma está directamente relacionada con su velocidad. Así, la velocidad, y por tanto el parámetro espectral, debe conservarse.

Por otra parte, también es inmediato que dado que las ondas solitarias pueden tener un número infinito de velocidades distintas, el número de cantidades conservadas deberá también ser infinito.

8.2. Involución de las cantidades conservadas

Veremos brevemente cómo con este formalismo se puede comprobar con facilidad que las cantidades conservadas están en involución.

Recordemos primero que en el marco de la ecuación de Schrödinger (8.29), hemos obtenido en (8.33) que

$$\frac{\delta \lambda}{\delta u(x, t)} = -\frac{1}{6} \psi^2 \quad (8.41)$$

Por otra parte, es directo calcular que

$$\begin{aligned} D(\psi^2) &= 2\psi\psi_x \\ D^2(\psi^2) &= 2(\psi_x)^2 - \left(\frac{1}{3}u + 2\lambda\right)\psi^2 \\ D^3(\psi^2) &= -\left(\frac{4}{3}u + 8\lambda\right)\psi_x\psi - \frac{1}{3}u_x\psi^2 \end{aligned} \quad (8.42)$$

En consecuencia,

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right)\psi^2 = -8\lambda\psi_x\psi = -4\lambda D(\psi^2) \quad (8.43)$$

y por tanto tenemos que

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right) \frac{\delta \lambda}{\delta u(x, t)} = -4\lambda D \frac{\delta \lambda}{\delta u(x, t)} \quad (8.44)$$

Por tanto, mediante un cálculo simple obtenemos la siguiente relación entre los corchetes de Poisson de los diferentes λ ,

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \lambda_i}{\delta u(x, t)} D \frac{\delta \lambda_j}{\delta u(x, t)} = \dots = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \{\lambda_i, \lambda_j\} \quad (8.45)$$

Así, si $\lambda_i \neq \lambda_j$ tenemos que

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0 \quad (8.46)$$

y por supuesto si $\lambda_i = \lambda_j$ el corchete de Poisson se anula por antisimetría. Con esto probamos que el número infinito de cantidades conservadas está también en involución y por tanto la ecuación KdV es integrable. Además, si podemos encontrar un par de Lax para una ecuación dada, esta también será integrable.

8.3. La ecuación KdV y el grupo $SL(2;\mathbb{R})$

Nos detendremos brevemente para encontrar una propiedad fascinante de la ecuación KdV, y es que se puede obtener a partir de la ecuación de estructura del grupo de Lie $SL(2;\mathbb{R})$ (véase [Chern y Peng, 1979]).

Además de establecer una conexión muy interesante entre los modelos integrables y los grupos de simetría, dará una motivación natural para el método de condición de curvatura cero y el método AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur), que no trataremos por cuestiones de espacio pero que suponen una maquinaria matemática muy útil a la hora de tratar con modelos integrables (véase [Markov *et al.*, 1985]).

Para evitar posibles confusiones, remarcaremos desde el principio que la relación de la ecuación con el citado grupo de Lie no implica que este sea el grupo de simetrías asociado a las cargas conservadas, sino que la relación es una subyacencia matemática.

Lo primero será definir y familiarizarnos con el grupo de Lie $SL(2;\mathbb{R})$, que está definido por las propiedades de grupo del conjunto de matrices reales 2×2 con determinante 1. El álgebra de Lie del grupo consiste en tres generadores hermíticos T_a con $a = 1, 2, 3$ que en una base dada satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = iC_{ab}{}^c T_c \quad (8.47)$$

donde las constantes de estructura $C_{ab}{}^c$ toman los valores

$$\begin{aligned} C_{23}{}^1 &= -C_{32}{}^1 = -1 \\ C_{12}{}^2 &= -C_{21}{}^2 = -2 \\ C_{31}{}^3 &= -C_{13}{}^3 = -2 \end{aligned} \quad (8.48)$$

Los elementos de un grupo de Lie conectados de forma continua con la identidad se pueden expresar en términos de los generadores del álgebra de Lie como

$$g = \exp(i\theta^a T_a) \quad (8.49)$$

En particular, si los parámetros θ^a son funciones de espacio y tiempo, entonces los elementos del grupo correspondientes serán también dependientes de espacio y tiempo. Dado que estamos trabajando en dimensión 1+1, tomaremos un elemento típico, $g(x, t) \in SL(2;\mathbb{R})$ como una matriz con dependencia espacio-temporal con determinante 1 que puede representarse en términos de

los generadores anteriores como

$$g(x, t) = \exp(i\theta^a(x, t)T_a) \quad (8.50)$$

Observemos que $g(x, t)$ será una matriz cuya dimensión dependerá de la dimensión de la representación.

Dado un elemento del grupo $g(x, t)$, podemos construir un campo vectorial con valores en $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ (el álgebra de Lie asociada), A_μ , como

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g, \quad \mu = 0, 1 \quad (8.51)$$

con

$$\begin{aligned} x^0 &= t \\ x^1 &= x \\ \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.52)$$

Por su estructura, vemos que A_μ debe satisfacer la ecuación

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (8.53)$$

Esta última se conoce como ecuación de Cartan-Maurer, condición de curvatura cero o ecuación de estructura, ya que permite determinar las constantes de estructura del grupo (véase [Sharpe, 1996]).

Observemos que la conexión de Cartan-Maurer es antihermítica y de traza cero, por lo que se puede representar como

$$A_\mu(x, t) = iA_\mu^a(x, t)T_a \quad (8.54)$$

de forma que las ecuaciones de estructura toman la forma

$$\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1; \quad a = 1, 2, 3 \quad (8.55)$$

que es un conjunto de tres ecuaciones. Estudiémoslo para una elección particu-

lar de las variables A_μ^a ; sean

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \sqrt{-\lambda}, \quad \lambda < 0 \\ A_1^3 &= 6 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Entonces, para $a = 3$ la ecuación de estructura nos da

$$A_0^1 = \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{6} A_0^3 - \frac{1}{12} A_{0,x}^3 \right) \quad (8.57)$$

en este caso y en adelante, una coma seguida por un subíndice denotará una derivada respecto a esa variable.

Análogamente, para $a = 1$ obtenemos

$$A_0^2 = \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{36} A_{0,x}^3 - \frac{1}{72} A_{0,xx}^3 + \frac{1}{6} A_0^3 A_1^2 \right) \quad (8.58)$$

donde hemos utilizado el resultado obtenido para $a = 3$. Finalmente, para $a = 2$,

$$A_{1,t}^2 = A_{0,x}^2 - 2 \left(A_0^1 A_1^2 - \sqrt{-\lambda} A_0^2 \right) \quad (8.59)$$

Usando los resultados (8.57) y (8.58), se simplifica en

$$A_{1,t}^2 = -\frac{1}{72} A_{0,xxx}^3 + \frac{1}{3} A_{0,x}^3 A_1^2 + \frac{1}{6} A_0^3 A_{1,x}^2 - \frac{\lambda}{18} A_{0,x}^3 \quad (8.60)$$

Si hacemos la identificación

$$\begin{aligned} A_1^2 &= -\frac{1}{36} u(x, t) \\ A_0^3 &= A(u(x, t)) \end{aligned} \quad (8.61)$$

entonces la relación anterior toma la forma

$$u_t = \frac{1}{2} \left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) A + 2\lambda DA \quad (8.62)$$

Esta es precisamente la ecuación (7.58) que obtuvimos en la derivación de Lenard de la ecuación KdV. Con el mismo procedimiento que usamos entonces podemos obtener no solo la jerarquía completa de ecuaciones KdV sino también la relación de recurrencia funcional entre las cantidades conservadas. Con lo que hemos trabajado en este apartado, toda esa derivación procede directa-

mente de la ecuación de estructura del grupo de Lie $SL(2;\mathbb{R})$.

Observemos también que de la misma ecuación de Cartan-Maurer se puede obtener también la ecuación MKdV. Tomemos ahora

$$\begin{aligned} A_1^2 = A_1^3 &= \frac{i}{\sqrt{6}} v \\ A_1^1 &= \sqrt{-\lambda} \end{aligned} \quad (8.63)$$

donde $v(x, t)$ es la variable dinámica. En este caso, la ecuación de estructura para $a = 1$ nos da

$$(A_0^2 - A_0^3) = -i\sqrt{6} \left(\frac{A_{0,x}^1}{v} \right) \quad (8.64)$$

Para $a = 2$,

$$\frac{i}{\sqrt{6}} v_t = A_{0,x}^2 - 2 \left(\frac{i}{\sqrt{6}} v A_0^1 - \sqrt{-\lambda} A_0^2 \right) \quad (8.65)$$

Análogamente, para $a = 3$,

$$\frac{i}{\sqrt{6}} v_t = A_{0,x}^3 - 2 \left(\sqrt{-\lambda} A_0^3 - \frac{i}{\sqrt{6}} v A_0^1 \right) \quad (8.66)$$

Restando (8.66) de (8.65), obtenemos

$$(A_0^2 + A_0^3) = \frac{2i}{\sqrt{-6\lambda}} v A_0^1 - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} (A_0^2 - A_0^3)_x \quad (8.67)$$

Usando la ecuación (8.64), obtenemos

$$(A_0^2 + A_0^3)_x = \frac{2i}{\sqrt{-6\lambda}} (v A_0^1)_x + \frac{i\sqrt{6}}{2\sqrt{-\lambda}} \left(\frac{A_{0,x}^1}{v} \right)_{xx} \quad (8.68)$$

Análogamente, usando (8.65) y (8.66) terminamos llegando a

$$v_t = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} (v A_0^1)_x + \frac{3}{2\sqrt{-\lambda}} \left(\frac{A_{0,x}^1}{v} \right)_{xx} - 6\sqrt{-\lambda} \left(\frac{A_{0,x}^1}{v} \right) \quad (8.69)$$

Si ahora identificamos

$$A_0^1 = \sqrt{-\lambda} \left(-4\lambda + \frac{1}{3} v^2 \right) \quad (8.70)$$

entonces la relación anterior toma la forma

$$v_t = v^2 v_x + v_{xxx} \quad (8.71)$$

Esta, como ya adelantamos, coincide con la ecuación MKdV, que por tanto puede derivarse también del grupo de Lie $SL(2; \mathbb{R})$. Esto último no es sorprendente, ya que las ecuaciones KdV y MKdV están estrechamente relacionadas proceden del mismo grupo de simetría.

9. Soluciones multisoliton

Hasta ahora, hemos probado que la ecuación KdV tiene soluciones de tipo soliton, hemos estudiado sus propiedades y hemos calculado explícitamente una solución de un único soliton. En esta sección, construiremos soluciones multisoliton de la ecuación KdV. Para ello, necesitaremos hacer uso de las transformaciones de Bäcklund (véase [Hermann, 1976]).

9.1. Transformaciones de Bäcklund

Las transformaciones de Bäcklund se originaron en el estudio de superficies de curvatura constante negativa. A grandes rasgos, se puede describir de la siguiente manera. Dada una ecuación diferencial de orden mayor que 1 en la variable $u(x, t)$,

$$P(u(x, t)) = 0 \tag{9.1}$$

una transformación de Bäcklund es una transformación a una nueva variable $v(x, t)$ definida por un par de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(u(x, t), v(x, t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= g(u(x, t), v(x, t)) \end{aligned} \tag{9.2}$$

donde f y g dependen de u , v y sus derivadas de forma que la ecuación de mayor orden, (9.1), surja como la condición de integrabilidad de las dos ecuaciones de primer orden.

Para entender mejor la transformación plantearemos un par de ejemplos sencillos. Observemos que una transformación de Bäcklund relacionaría la solución de la ecuación original con la de otra más fácil de resolver. También relacionaría una solución de la ecuación dada con otra que ya conoceríamos. Es esto último lo que nos permitirá usar las transformaciones de Bäcklund para construir soluciones multisoliton de la ecuación KdV.

9.2. Ejemplos de aplicación

9.2.1. Ecuación de Liouville

Consideremos la ecuación de Liouville en 1+1 dimensiones, que está descrita por

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = e^{u(x, t)} \quad (9.3)$$

donde $u(x, t)$ es la variable dinámica. Por simplicidad, pasemos a las variables definidas por

$$x^\pm = t \pm x \quad (9.4)$$

En estas variables, la ecuación de Liouville toma la forma

$$\partial_+ \partial_- u = e^u \quad (9.5)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \partial_+ &= \frac{\partial}{\partial x^+} \\ \partial_- &= \frac{\partial}{\partial x^-} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Definiremos ahora la transformación de Bäcklund a la variable $v(x^+, x^-)$ por

$$\partial_+ u = -\partial_+ v + \alpha e^{\frac{1}{2}(u-v)} \quad (9.7)$$

$$\partial_- u = \partial_- v + \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(u+v)} \quad (9.8)$$

con α una constante arbitraria. Tomando la derivada de la primera respecto a x^- y la de la segunda respecto a x^+ , tenemos

$$\partial_- \partial_+ u = -\partial_- \partial_+ v + e^u \quad (9.9)$$

$$\partial_+ \partial_- u = \partial_+ \partial_- v + e^u \quad (9.10)$$

Así, las condiciones de integrabilidad para estas ecuaciones serán

$$\partial_+ \partial_- u = e^u \quad (9.11)$$

$$\partial_+ \partial_- v = 0 \quad (9.12)$$

Podemos observar que la primera de ellas es justamente la ecuación de Liouville, mientras que la segunda es simplemente la ecuación de ondas, cuyas soluciones son bien conocidas. Así, la transformación de Bäcklund en este caso relaciona la solución de la ecuación de Liouville con la de la ecuación de ondas.

Para ver cómo se obtiene la solución explícita, recordemos que la solución general de la ecuación de ondas toma la forma

$$v(x^+, x^-) = f(x^+) + g(x^-) \quad (9.13)$$

esto es, una superposición de una onda que se mueve hacia la izquierda y otra que se mueve hacia la derecha. Sustituyendo esta forma en (9.7) obtenemos

$$\partial_+(u + f) = \alpha e^{\frac{1}{2}(u-f-g)} \quad (9.14)$$

Como $g(x^-)$ no depende de x^+ , podemos reescribir la ecuación como

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} \partial_+(u + f - g) = \alpha e^{-f(x^+)} \quad (9.15)$$

Integrando respecto a x^+ , obtenemos

$$e^{\frac{1}{2}(u+f-g)} = -\frac{\alpha}{2} \int^{x^+} dx'^+ e^{-f(x'^+)} + a(x^-) = \alpha P(x^+) + a(x^-) \quad (9.16)$$

donde hemos introducido una constante de integración $a(x^-)$ y hemos definido $-1/2$ de la integral del lado derecho como $P(x^+)$. Análogamente, de (9.8) obtenemos

$$\partial_-(u - g) = \frac{2}{\alpha} Q(x^-) + b(x^+) \quad (9.17)$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones tenemos que

$$a(x^-) = \frac{2}{\alpha} Q(x^-)$$

$$b(x^+) = \alpha P(x^+) \quad (9.18)$$

de forma que

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} = \alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-) \quad (9.19)$$

y, por tanto, operando

$$u(x^+, x^-) = -f(x^+) + g(x^-) - 2\ln\left(\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha}Q(x^-)\right) \quad (9.20)$$

Así, la familia uniparamétrica de transformaciones de Bäcklund genera una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de Liouville a partir de soluciones de la ecuación de onda.

9.2.2. Ecuación de Sine-Gordon

La ecuación de Sine-Gordon es el ejemplo más antiguo de estudio de transformaciones de Bäcklund (véase [Dodd y Bullough, 1976]). En este caso, la transformación relaciona una solución de la ecuación con otra. También sirve para ejemplificar ciertas propiedades asociadas con estas transformaciones. La ecuación viene dada por

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \text{sen}(\omega) \quad (9.21)$$

que, en términos de las variables descritas en (9.4) y (9.6), se convierte en

$$\partial_+ \partial_- \omega = \text{sen}(\omega) \quad (9.22)$$

Las transformaciones de Bäcklund, en este caso a la variable $\omega_1(x^+, x^-)$, vienen definidas por el par de ecuaciones

$$\partial_+ \omega = \partial_+ \omega_1 + 2a \text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) \quad (9.23)$$

$$\partial_- \omega = -\partial_- \omega_1 - \frac{2}{a} \text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right) \quad (9.24)$$

con a una constante. Derivando la primera respecto a x^- , obtenemos

$$\partial_- \partial_+ \omega = \partial_- \partial_+ \omega_1 - (\text{sen} \omega_1 - \text{sen} \omega) \quad (9.25)$$

Análogamente, derivando la segunda respecto a x^+ , tenemos

$$\partial_+ \partial_- \omega = -\partial_+ \partial_- \omega_1 + (\text{sen} \omega_1 + \text{sen} \omega) \quad (9.26)$$

Así, las condiciones de integrabilidad correspondientes serán

$$\partial_+ \partial_- \omega = \text{sen} \omega \quad (9.27)$$

$$\partial_+ \partial_- \omega_1 = \text{sen} \omega_1 \quad (9.28)$$

De esta forma, vemos que no solo ω sino también ω_1 satisface la ecuación de Sine-Gordon, por lo que en este caso las transformaciones de Bäcklund relacionarán una solución de la ecuación con otra. Esto es bastante útil al construir las soluciones de la ecuación, ya que sabemos que en particular $\omega = 0$ es una solución. Introduciéndola en las ecuaciones, obtenemos

$$\partial_+ \omega_1 = -2a \text{sen} \frac{\omega_1}{2} \quad (9.29)$$

$$\partial_- \omega_1 = -\frac{2}{a} \text{sen} \frac{\omega_1}{2} \quad (9.30)$$

Definimos unas nuevas variables

$$\tilde{x}^+ = ax^+, \quad \tilde{\partial}_+ = \frac{1}{a} \partial_+ \quad (9.31)$$

$$\tilde{x}^- = \frac{1}{a} x^-, \quad \tilde{\partial}_- = a \partial_- \quad (9.32)$$

En términos de estas, las ecuaciones (9.29) y (9.30) se expresan como

$$\tilde{\partial}_+ \omega_1 = -2 \text{sen} \frac{\omega_1}{2} = \tilde{\partial}_- \omega_1 \quad (9.33)$$

de esta forma,

$$\omega_1 = \omega_1 (\tilde{x}^+ + \tilde{x}^-) \quad (9.34)$$

Para encontrar la solución explícitamente, observamos que

$$\tilde{\partial}_+ \omega_1 = -2 \text{sen} \frac{\omega_1}{2} = -4 \text{sen} \frac{\omega_1}{4} \cos \frac{\omega_1}{4} \quad (9.35)$$

de forma que

$$\sec^2 \frac{\omega_1}{4} \tilde{\partial}_+ \omega_1 = -4 \tan \frac{\omega_1}{4} \quad (9.36)$$

y así

$$\tilde{\partial}_+ \left(\tan \frac{\omega_1}{4} \right) = -\tan \frac{\omega_1}{4} \quad (9.37)$$

De esta forma, tenemos que

$$\tan \frac{\omega_1}{4} = C \exp(-(\tilde{x}^+ + \tilde{x}^-)) \quad (9.38)$$

y, deshaciendo los cambios de variable,

$$\omega_1 = 4 \tan^{-1} \left\{ C \exp \left(\frac{-2(t + vx)}{(1 - v^2)^{1/2}} \right) \right\} \quad (9.39)$$

con

$$v = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad (9.40)$$

Así, hemos obtenido una solución no trivial de la ecuación de Sine-Gordon partiendo de la solución de vacío $\omega = 0$.¹

Podemos iterar este proceso para seguir construyendo soluciones más complejas. Sin más resultados, construir soluciones por este proceso puede parecer una tarea titánica, pero resulta mucho más sencillo debido a que las transformaciones de Bäcklund satisfacen el teorema de permutabilidad, lo que nos facilita mucho los cálculos.

9.3. Teorema de permutabilidad

De acuerdo al teorema de permutabilidad, dos transformaciones de Bäcklund sucesivas son conmutativas (véase [Bracken y Grundland, 2000]). Dicho de otro modo, si dos transformaciones de Bäcklund con parámetros distintos a_1 y a_2 llevan una solución ω_0 en otra solución ω_{12} , entonces el orden en que se aplican es irrelevante. Así, si

$$\omega_0 \xrightarrow{a_1} \omega_1 \xrightarrow{a_2} \omega_{12} \quad (9.41)$$

y

$$\omega_0 \xrightarrow{a_2} \omega_2 \xrightarrow{a_1} \omega_{21} \quad (9.42)$$

¹La solución obtenida se conoce como *topological kink* (que traduciremos libremente como pliegue topológico) hacia la izquierda o antipliegue, una clase de soluciones de solitón topológicas. Se pueden ver diagramas muy ilustrativos en la página https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sine-Gordon_equation&oldid=829285639

entonces

$$\omega_{12} = \omega_{21} \quad (9.43)$$

Si aplicamos este teorema a la ecuación de Sine-Gordon, tenemos de las ecuaciones (9.23) y (9.24) que

$$\partial_+(\omega_1 - \omega_0) = -2a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\right) \quad (9.44)$$

$$\partial_+(\omega_{12} - \omega_1) = -2a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{12} + \omega_1}{2}\right) \quad (9.45)$$

$$\partial_+(\omega_2 - \omega_0) = -2a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2 + \omega_0}{2}\right) \quad (9.46)$$

$$\partial_+(\omega_{12} - \omega_0) = -2a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{12} + \omega_2}{2}\right) \quad (9.47)$$

Sumando (9.44) a (9.45) y (9.46) a (9.47) y restando los resultados, obtenemos que

$$a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{12} - \omega_0 + \omega_2 - \omega_1}{4}\right) - a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{12} - \omega_0 - \omega_2 + \omega_1}{4}\right) = 0 \quad (9.48)$$

Por las propiedades de las funciones trigonométricas, podemos simplificarlo en

$$\tan\left(\frac{\omega_{12} - \omega_0}{4}\right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right) \quad (9.49)$$

En otras palabras, el teorema de permutabilidad nos permite construir una solución de segundo orden de forma algebraica. Además, este proceso puede repetirse en cada orden de forma que una vez construimos la primera solución no necesitaremos utilizar el farragoso formalismo de cuadraturas.

Así, las transformaciones de Bäcklund son de gran ayuda en la construcción de soluciones. La dificultad, por supuesto, yace en encontrar una transformación de Bäcklund. Existe un método, desarrollado por Clairin, para construir transformaciones de Bäcklund de forma sistemática (véase [Clairin, 1902]). Sin embargo, no siempre es simple ni directo.

9.4. Transformación de Bäcklund para la ecuación KdV

En realidad, ya hemos utilizado transformaciones de Bäcklund para la ecuación KdV, aunque sin llamarlas de esta forma. Una vez las hemos estudiado, podemos reconocer que las transformaciones de Miura o la relación de Riccati que utilizamos son casos particulares de transformaciones de Bäcklund. Recordar-

mos de (7.2) y (7.3) que la transformación de Miura generalizada

$$u + 6\lambda = v^2 + i\sqrt{6}v_x \quad (9.50)$$

lleva a la ecuación generalizada MKdV

$$v_t = (v^2 - 6\lambda)v_x + v_{xxx} \quad (9.51)$$

Efectivamente, podemos tomar estas como las relaciones que definen las transformaciones de Bäcklund, si las reescribimos como

$$v_x = -\frac{i}{\sqrt{6}}(u + 6\lambda - v^2) \quad (9.52)$$

$$v_t = -\frac{i}{\sqrt{6}}u_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}u^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda u + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}u_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}uv^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \quad (9.53)$$

Derivando la primera respecto a t y utilizando la segunda para simplificar, obtenemos que

$$v_{tx} = -\frac{i}{\sqrt{6}}u_t + \frac{1}{3}u_{xx}v + \frac{1}{9}u^2v - \frac{2}{3}\lambda uv - 8\lambda^2v + \frac{2i}{2\sqrt{6}}u_xv^2 - \frac{1}{9}uv^3 + \frac{4}{3}\lambda v^3 \quad (9.54)$$

Tácitamente, estamos asumiendo que λ no depende de x ni de t . Por supuesto, sabemos que es cierto ya que λ es el valor propio de la ecuación de Schrödinger.

Podemos ahora derivar la segunda utilizando la primera para simplificar, y obtenemos

$$v_{xt} = -\frac{i}{\sqrt{6}}u_{xxx} - \frac{i}{\sqrt{6}}uu_x + \frac{1}{3}u_{xx}v + \frac{1}{9}u^2v - \frac{2}{3}\lambda uv - 8\lambda^2v + \frac{2i}{3\sqrt{6}}u_xv^2 - \frac{1}{9}uv^3 + \frac{4}{3}\lambda v^3 \quad (9.55)$$

Así, la condición de integrabilidad para (9.52) y (9.53) se sigue de (9.54) y (9.55) y es precisamente la ecuación KdV,

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad (9.56)$$

La ecuación de evolución para v es una de las relaciones de la transformación de Bäcklund y se puede probar que es la ecuación MKdV eliminando u a través de (9.52).

Así, hemos encontrado que es una transformación de Bäcklund la que conecta las soluciones de la ecuación KdV con las de MKdV. Podemos preguntarnos si existe alguna transformación de Bäcklund que relacione soluciones de KdV entre sí. Si la encontramos, previsiblemente podremos construir soluciones multisolitón comenzando por una solución de solitón único, que ya hemos trabajado antes.

Efectivamente, podremos encontrar una transformación de Bäcklund de este tipo, y la podemos construir de la siguiente forma.

Introduzcamos una nueva variable $\omega(x, t)$, definida por

$$u(x, t) = \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \quad (9.57)$$

En términos de esta nueva variable, la ecuación KdV se convierte en

$$\omega_t = \frac{1}{2} \omega_x^2 + \omega_{xxx} \quad (9.58)$$

Por otra parte, tenemos de (7.3) que si $v(x, t)$ es solución de la ecuación MKdV para un cierto valor de λ , entonces $-v(x, t)$ también lo es. Cada una de estas soluciones lleva a una única solución de la ecuación KdV. Denotando por $u(x, t)$ y $\tilde{u}(x, t)$ las soluciones obtenidas de $v(x, t)$ y $-v(x, t)$ respectivamente, las relaciones (9.52) y (9.53) pasan a ser

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{i}{\sqrt{6}}(u + 6\lambda - v^2) \\ -v_x &= -\frac{i}{\sqrt{6}}(\tilde{u} + 6\lambda - v^2) \\ v_t &= -\frac{i}{\sqrt{6}}u_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}u^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda u + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}u_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}uv^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \\ v_t &= -\frac{i}{\sqrt{6}}\tilde{u}_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}\tilde{u}^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda \tilde{u} + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}\tilde{u}_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}\tilde{u}v^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \end{aligned} \quad (9.59)$$

De aquí, obtenemos

$$v_x = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(u - \tilde{u}) \quad (9.60)$$

$$\frac{1}{2}(u + \tilde{u}) = v^2 - 6\lambda \quad (9.61)$$

$$v_t = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(u - \tilde{u})_{xx} - \frac{i}{4\sqrt{6}}(u^2 - \tilde{u}^2) \quad (9.62)$$

Usando ahora que $u = \omega_x$ y $\tilde{u} = \tilde{\omega}_x$, esto nos lleva a la identificación

$$v = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(\omega - \tilde{\omega}) \quad (9.63)$$

Así, podemos construir una transformación de Bäcklund entre las variables ω y $\tilde{\omega}$ en la forma

$$(\omega + \tilde{\omega})_x = -\left(12\lambda + \frac{1}{12}(\omega - \tilde{\omega})^2\right) \quad (9.64)$$

$$(\omega - \tilde{\omega})_t = (\omega - \tilde{\omega})_{xxx} + \frac{1}{2}(\omega - \tilde{\omega})_x(\omega + \tilde{\omega})_x \quad (9.65)$$

Observemos que obtenemos de (9.64) ciertas identidades útiles en el análisis de la integrabilidad de estas relaciones.

$$(\omega + \tilde{\omega})_{xx} = -\frac{1}{6}(\omega - \tilde{\omega})(\omega - \tilde{\omega})_x$$

$$(\omega + \tilde{\omega})_{xxx} = -\frac{1}{6}(\omega - \tilde{\omega})(\omega - \tilde{\omega})_{xx} - \frac{1}{2}(\omega - \tilde{\omega})_x(\omega - \tilde{\omega})_{xx} \quad (9.66)$$

Derivando (9.64) respecto a t y utilizando las identidades anteriores, obtenemos

$$(\omega + \tilde{\omega})_{tx} = (\omega + \tilde{\omega})_{xxx} + \omega_x \omega_{xx} + \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{xx} \quad (9.67)$$

Análogamente, derivando (9.65) respecto a x obtenemos

$$(\omega - \tilde{\omega})_{xt} = (\omega - \tilde{\omega})_{xxx} + \omega_x \omega_{xx} - \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{xx} \quad (9.68)$$

Así, las condiciones de integrabilidad para las transformaciones de Bäcklund que hemos definido serán

$$\omega_t = \frac{1}{2}\omega_x^2 + \omega_{xxx} \quad (9.69)$$

y

$$\tilde{\omega}_t = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_{xxx} \quad (9.70)$$

De esta forma ω y $\tilde{\omega}$ satisfacen la misma ecuación, que como vimos en (9.58) corresponde a la ecuación KdV en estas variables. Así, este conjunto de transformaciones de Bäcklund relaciona dos soluciones distintas de la ecuación KdV y

por tanto permite construir nuevas soluciones del sistema.

9.5. Soluciones de solitones

Como sabemos que $\omega = 0$ es la solución trivial de la ecuación KdV , podemos preguntarnos si las transformaciones de Bäcklund nos pueden llevar a soluciones de interés. Para $\omega = 0$, las transformaciones de Bäcklund (9.64) y (9.65) se reducen a

$$\tilde{\omega}_x = -12\lambda - \frac{1}{12}\tilde{\omega}^2 \quad (9.71)$$

$$\tilde{\omega}_t = \tilde{\omega}_{xxx} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_x^2 \quad (9.72)$$

La segunda, como ya vimos, simplemente nos indica que $\tilde{\omega}$ es solución de la ecuación KdV. Sin embargo, de la primera podemos observar que

$$\tilde{\omega}_{xxx} = -\frac{1}{6}\tilde{\omega}_x^2 + \frac{1}{36}\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_x \quad (9.73)$$

Así, la ecuación (9.72) toma la forma

$$\tilde{\omega}_t = \frac{1}{3}\tilde{\omega}_x \left(\tilde{\omega}_x + \frac{1}{12}\tilde{\omega}^2 \right) \quad (9.74)$$

Sustituyendo (9.71),

$$\tilde{\omega}_t = -4\lambda\tilde{\omega}_x \quad (9.75)$$

Así, la solución obtenida a partir de la solución trivial de vacío a través de la transformación de Bäcklund se corresponde con una onda viajera con velocidad

$$c = -4\lambda \quad (9.76)$$

Podemos observar que coincide con la velocidad que ya trabajamos en (8.40). Recordemos que si el valor propio de la ecuación de Schrödinger, λ , para los estados ligados toma valores negativos, entonces la onda se mueve hacia la izquierda.

Reconocemos así este resultado como la solución de un único solitón. Efectivamente, si elegimos

$$\omega(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \tanh\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \quad (9.77)$$

de forma que

$$u(x, t) = \omega_x(x, t) = -12\lambda \operatorname{sech}^2 \sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \quad (9.78)$$

entonces se satisfacen las ecuaciones (9.71), (9.72) y (9.75). Podemos ahora pensar que si aplicamos sucesivamente la misma transformación podemos construir soluciones multisolitón.

Como ya vimos con la ecuación de Sine-Gordon, el teorema de permutabilidad juega un papel importante en la construcción de soluciones de mayor orden a través de transformaciones de Bäcklund. Estudiemos qué implicaciones tiene en este caso. Supongamos que

$$\begin{aligned} \omega &\xrightarrow{\lambda_1} \omega_1 \xrightarrow{\lambda_2} \omega_{12} \\ \omega &\xrightarrow{\lambda_2} \omega_2 \xrightarrow{\lambda_1} \omega_{21} \end{aligned} \quad (9.79)$$

Entonces, el teorema de permutabilidad nos dice que

$$\omega_{12} = \omega_{21} \quad (9.80)$$

Usando las transformaciones de Bäcklund, obtenemos

$$(\omega + \omega_1)_x = -12\lambda_1 - \frac{1}{12}(\omega - \omega_1)^2 \quad (9.81)$$

$$(\omega_1 + \omega_{12})_x = -12\lambda_2 - \frac{1}{12}(\omega_1 - \omega_{12})^2 \quad (9.82)$$

$$(\omega + \omega_2)_x = -12\lambda_2 - \frac{1}{12}(\omega - \omega_2)^2 \quad (9.83)$$

$$(\omega_2 + \omega_{12})_x = -12\lambda_1 - \frac{1}{12}(\omega_2 - \omega_{12})^2 \quad (9.84)$$

Restando (9.81) de (9.82) y (9.83) de (9.84) y restando después los resultados obtenemos que

$$\omega_{12} = \omega - \frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2 - \omega_1} \quad (9.85)$$

Observamos que la expresión es simétrica bajo intercambio de los índices 1 y 2, como requiere el teorema de permutabilidad, y recordemos que

$$u_{12}(x, t) = \frac{\partial \omega_{12}(x, t)}{\partial x} \quad (9.86)$$

El teorema de permutabilidad nos permite construir de forma algebraica soluciones a cualquier orden dado. Así, la expresión general para la solución en el paso n -ésimo será

$$\omega_{(n)} = \omega_{(n-2)} - \frac{144(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\omega'_{(n-1)} - \omega_{(n-1)}}, \quad n > 1 \quad (9.87)$$

con

$$\omega_{(n)} = \omega_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}} = \omega_{12\dots n}$$

$$\omega'_{(n)} = \omega_{\{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_{n+1}\}} = \omega_{12\dots n-1, n+1} \quad (9.88)$$

y

$$\omega_{(0)} = \omega \quad (9.89)$$

Por ejemplo,

$$\omega_{123} = \omega_1 - \frac{144(\lambda_3 - \lambda_2)}{\omega_{13} - \omega_{12}} \quad (9.90)$$

Y, como las soluciones segundo paso tienen la forma (9.85), podemos calcular ω_{123} explícitamente como

$$\omega_{123} = \frac{\lambda_1 \omega_1 (\omega_2 - \omega_3) + \lambda_2 \omega_2 (\omega_3 - \omega_1) + \lambda_3 \omega_3 (\omega_1 - \omega_2)}{\lambda_1 (\omega_2 - \omega_3) + \lambda_2 (\omega_3 - \omega_1) + \lambda_3 (\omega_1 - \omega_2)} \quad (9.91)$$

La simetría bajo permutación de los índices 1, 2 y 3 es trivial.

Ya hemos visto que si

$$\omega_{(0)} = \omega = 0 \quad (9.92)$$

entonces al menos las soluciones de primer orden se corresponden con soluciones de un único solitón. Las soluciones regulares de la ecuación de solitón, como ya hemos visto, toman la forma

$$\omega(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \tanh\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \quad (9.93)$$

pero una solución singular también satisface la misma ecuación,²

$$\omega^*(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \coth\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \quad (9.94)$$

²Nótese que utilizamos una notación liosa (no confundirla con el complejo conjugado) aunque por contra habitual en la bibliografía.

satisface (9.71) ya que

$$\omega_x^* = -12\lambda - \frac{1}{12}\omega^{*2} \quad (9.95)$$

Así, observamos que para obtener soluciones regulares a través de la aplicación de transformaciones de Bäcklund no tenemos que usar siempre soluciones regulares en los pasos intermedios. Podemos ver esto fácilmente en la solución de segundo orden obtenida del vacío. Si tomamos

$$\omega_{12} = -\frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2^* - \omega_1}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 \quad (9.96)$$

entonces el denominador nunca se anula y por tanto la solución es regular. Efectivamente, observemos que dado que las λ son negativas, aunque λ_1 pueda anularse, λ_2 no puede por la condición que le imponemos. En el límite $\lambda_1 = 0$,

$$\omega_{12}(\lambda_1 = 0) = -\frac{144\lambda_2}{\omega_2^*} = 12\sqrt{-\lambda_2} \tanh\sqrt{-\lambda_2}(x - 4\lambda_2 t) = \omega_2 \quad (9.97)$$

que es, claramente, regular. Es fácil ver que si hubiéramos utilizado la solución regular ω_2 en el paso intermedio, entonces el límite hubiera llevado a una solución singular. Así, para obtener soluciones regulares no solo tendremos que usar soluciones singulares en los pasos intermedios sino que deberemos ordenar los parámetros de las transformaciones de forma adecuada.

Finalmente, analizaremos el comportamiento asintótico de la solución de segundo orden obtenida del vacío. Para simplificar la notación, tomaremos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 12\sqrt{-\lambda_1} \tanh\xi_1 \\ \omega_2 &= 12\sqrt{-\lambda_2} \tanh\xi_2 \end{aligned} \quad (9.98)$$

con

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{-\lambda_1}(x - 4\lambda_1 t) \\ \xi_2 &= \sqrt{-\lambda_2}(x - 4\lambda_2 t) \end{aligned} \quad (9.99)$$

Introduciremos además la notación

$$\tanh\gamma = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} \quad (9.100)$$

Entonces, de la ecuación (9.96) observamos que cuando $\xi_2 \rightarrow \pm\infty$,

$$\omega_{12} \rightarrow \pm\sqrt{-\lambda_1} \coth\gamma + 12\sqrt{-\lambda_1} \tanh(\xi_1 \mp \gamma) \quad (9.101)$$

Análogamente, cuando $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$,

$$\omega_{12} \rightarrow \pm\sqrt{-\lambda_2} \tanh\gamma + 12\sqrt{-\lambda_2} \tanh(\xi_2 \mp \gamma) \quad (9.102)$$

Así, vemos que

$$u_{12} = \omega_{12,x} \xrightarrow{|\xi_2| \rightarrow \pm\infty} -12\lambda_1 \operatorname{sech}^2(\xi_1 \mp \gamma)$$

$$u_{12} = \omega_{12,x} \xrightarrow{|\xi_1| \rightarrow \pm\infty} -12\lambda_2 \operatorname{sech}^2(\xi_2 \mp \gamma) \quad (9.103)$$

Con esto probamos que u_{12} es una solución pura de dos solitones con fases asintóticas $\frac{\gamma}{\sqrt{-\lambda_1}}$ y $\frac{\gamma}{\sqrt{-\lambda_2}}$ respectivamente. Esto es significativo ya que nos indica que podemos construir las soluciones multisoliton desde la solución de vacío a través de repetidas aplicaciones de transformaciones de Bäcklund, aumentando el número de solitones en una unidad en cada paso sucesivo. Se puede observar que esto es cierto sin más que aplicar el método recursivamente.

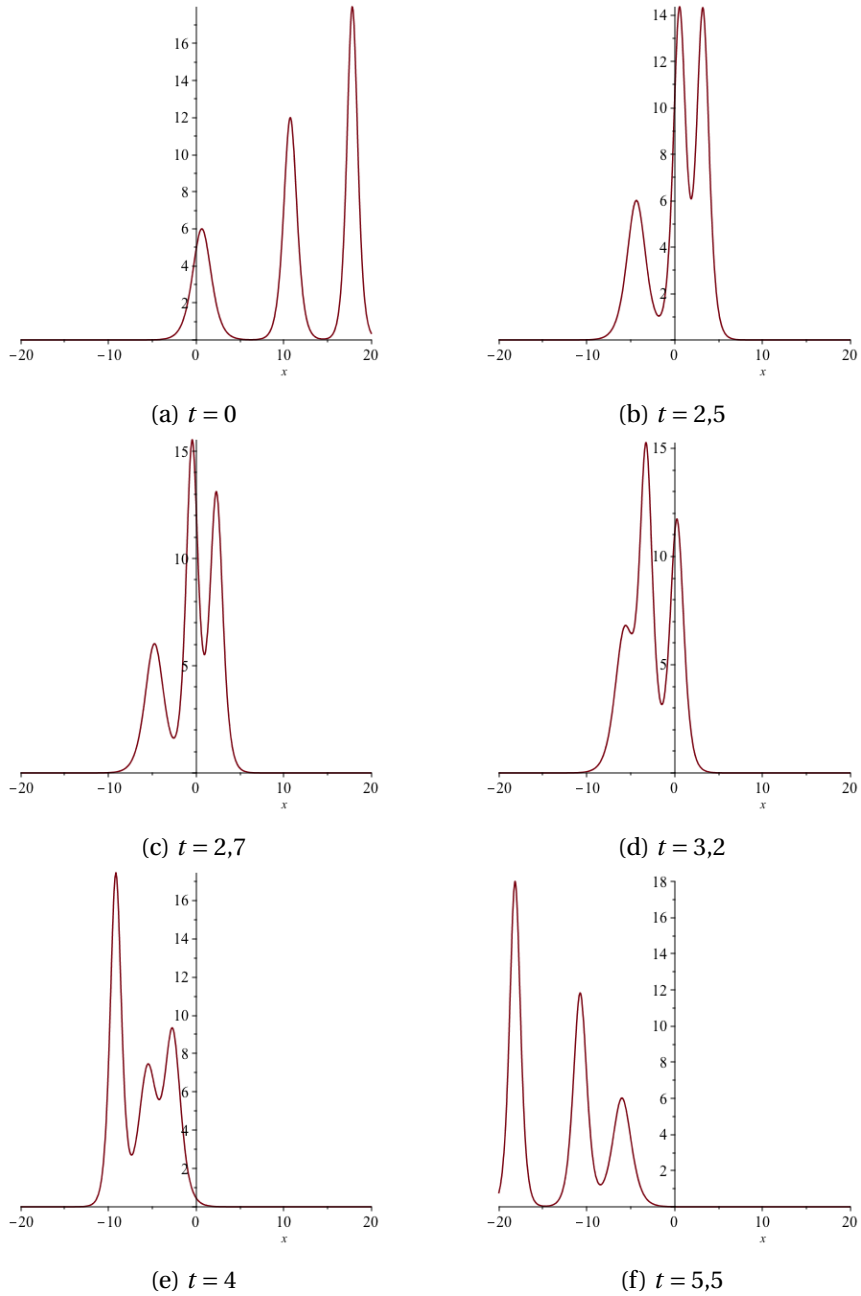


Figura 2: Solución de tres solitones en distintos instantes de tiempo, con $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1,5$, ω_1 y ω_3 regulares y ω_2 singular (cada solitón está desplazado para dejar el más alto a la derecha).

10. Conclusión y cierre

A lo largo del trabajo hemos querido estudiar conceptos sobre integrabilidad basándonos en el estudio concreto de las soluciones de energía finita de la ecuación KdV.

Hemos abordado el concepto de onda viajera y de solitón y hemos obtenido propiedades suyas por cálculo directo y a través de un tratamiento mecano-cuántico. Hemos podido probar que la ecuación KdV con condiciones de energía finita tiene un número infinito de cantidades conservadas en involución, y por tanto es integrable.

Hemos analizado el problema de valor inicial, hemos encontrado un método general y lo hemos aplicado a la solución de un solitón para hallar que efectivamente es una onda viajera.

Hemos visto de forma somera el método de dispersión inversa y el método de Lax, dos métodos fundamentales en el tratamiento de sistemas integrables.

Finalmente, hemos abordado la herramienta de las transformaciones de Bäcklund para poder hallar soluciones multisolitón de la ecuación KdV.

No obstante, simplemente por razones de espacio no hemos podido profundizar más en ciertas cuestiones de la integrabilidad enormemente interesantes y de actualidad científica. Nos hubiera gustado poder incidir más en cuestiones como la aproximación geométrica a los modelos integrables (puede ampliarse en [Cariñena *et al.*, 2007] o [De Filippo *et al.*, 1985]) o la aproximación teórica de grupos (véase [Reyman y Semenov-Tian-Shansky, 1994] o [Aziz, 2007]).

Además, hemos incidido únicamente en lo que se llama integrabilidad clásica (en todo momento hemos supuesto que nuestras ondas eran completamente deterministas y no presentaban incertidumbre alguna). No hemos tratado ni siquiera de forma somera el principal campo de trabajo de la integrabilidad en la actualidad: la integrabilidad cuántica, que utiliza sin embargo métodos en cierto modo análogos a los que tratamos clásicamente, como el llamado método de dispersión inversa cuántica (véase [Sklyanin, 1992]).

Cerramos así este breve repaso de los fundamentos de la teoría de integrabilidad dejando interesantes y estimulantes campos abiertos, que no invitan sino a una mayor profundización.

Referencias

- [Ablowitz y Clarkson, 1991] Ablowitz, M. J. y Clarkson, P. A. (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [Abraham y Marsden, 1978] Abraham, R. y Marsden, J. E. (1978). *Foundations of Mechanics*. Benjamin-Cummings, Londres.
- [Andriopoulos *et al.*, 2009] Andriopoulos, K., Bountis, T., Van der Weele, K., y Tsigaridi, L. (2009). The shape of soliton-like solutions of a higher-order KdV equation describing water waves. *Jour. of Nonlinear Math. Phys.*, 16.
- [Aziz, 2007] Aziz, Z. A. (2007). Integrability of the KdV hierarchies via group theoretical approach. *Jour. of Fund. Sciences*, 3.
- [Babelon *et al.*, 2003] Babelon, O., Bernard, D., y Talon, M. (2003). *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [Beffa, 1994] Beffa, G. M. (1994). On the Virasoro algebra as reduced Poisson submanifold of a Kac-Moody algebra on the circle. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 122(3).
- [Bracken y Grundland, 2000] Bracken, P. y Grundland, A. M. (2000). On the Bäcklund transformation and the theorem of permutability for the generalized Weierstrass system. *Inverse Problems*, 16.
- [Brauer, 2000] Brauer, K. (2000). The Korteweg-de Vries equation: History, exact solutions, and graphical representation. *Harvard University*.
- [Cariñena *et al.*, 2007] Cariñena, J. F., De Lucas, J., y Ramos, A. (2007). A geometric approach to integrability conditions for Riccati equations. *Elec. Jour. of Diff. Equat.*, 122.
- [Chern y Peng, 1979] Chern, S. S. y Peng, C. K. (1979). Lie groups and KdV equations. *Manuscripta Math.*, 28.
- [Clairin, 1902] Clairin, J. (1902). Sur les transformations de Bäcklund. *Ann. Sci. École Norm. Sup. 3e. Ser. Suppl.*, 19.
- [Das, 1989] Das, A. (1989). *Integrable Models*. World Scientific, Singapur.

- [De Filippo *et al.*, 1985] De Filippo, S., Salerno, M., y Vilasi, G. (1985). A geometrical approach to the integrability of soliton equations. *Lett. in Math. Phys.*, 9.
- [de Gosson, 2006] de Gosson, M. A. (2006). *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*. Birkhäuser Verlag, Basilea.
- [De Jager, 2006] De Jager, E. M. (2006). On the origin of the Korteweg-de Vries equation. *arXiv:math/0602661v1*.
- [Dingemans, 1997] Dingemans, M. W. (1997). *Wave Propagation over Uneven Bottoms*. World Scientific, Singapur.
- [Dodd y Bullough, 1976] Dodd, R. K. y Bullough, R. K. (1976). Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations. *Roc. R. Soc. Lond.*, 351.
- [Drazin, 1977] Drazin, P. G. (1977). On the stability of cnoidal waves. *Quarterly Jour. of Mechanics and Appl. Math.*, 30.
- [Gardner *et al.*, 1967] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., y Miura, R. M. (1967). Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19.
- [Gesztesy y Holden, 2003] Gesztesy, F. y Holden, H. (2003). *Soliton Equations and their Algebraic-Geometric Solutions. Vol. I*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [Goldstein *et al.*, 1980] Goldstein, H., Poole, C., y Safko, J. (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Nueva York.
- [Hermann, 1970] Hermann, R. (1970). *Infinite dimensional Lie algebras and current algebra*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Hermann, 1976] Hermann, R. (1976). *The Geometry of Non-Linear Differential Equations, Bäcklund Transformations, and Solitons*. Math Sci Press, Brookline.
- [Koelink, 2008] Koelink, E. (2008). Scattering theory. *Lecture Notes, Spring*.
- [Korteweg y De Vries, 1895] Korteweg, D. J. y De Vries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39.

- [Landau y Lifshitz, 1960] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. (1960). *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [Lax, 1968] Lax, P. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Applied Math.*, 21.
- [Marchenko, 2011] Marchenko, V. A. (2011). *Sturm-Liouville Operators and Applications*. Amer. Math. Society, Providence.
- [Markov *et al.*, 1985] Markov, M. A., Manko, V. I., y Shabad, A. E., editores (1985). *Group Theoretical Methods in Physics, Vol. I*. OPA, Ámsterdam.
- [McDuff y Salamon, 1998] McDuff, D. y Salamon, D. (1998). *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford.
- [Miles, 1981] Miles, J. W. (1981). The Korteweg-de Vries equation: a historical essay. *Jour. of Fluid Mechanics*, 106.
- [Reshetikhin y Semenov-Tian-Shansky, 1988] Reshetikhin, N. Y. y Semenov-Tian-Shansky, M. A. (1988). Quantum R-matrices and factorization problems. *Jour. of Geometry and Phys.*, 5.
- [Reyman y Semenov-Tian-Shansky, 1994] Reyman, A. G. y Semenov-Tian-Shansky, M. A. (1994). Group-theoretical methods in the theory of finite-dimensional integrable systems. *Dinamical Systems VII*.
- [Russell, 1845] Russell, J. S. (1845). Report on waves. *Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*.
- [Sardanashvily, 2015] Sardanashvily, G. A. (2015). *Handbook of Integrable Hamiltonian Systems*. URSS, Moscú.
- [Sharpe, 1996] Sharpe, R. W. (1996). *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Springer-Verlag, Berlín.
- [Sklyanin, 1992] Sklyanin, E. K. (1992). Quantum inverse scattering method. Selected topics. *Nankai Lect. on Math. Phys.*

Imagen de portada: Ondas cnoidales perpendiculares en la Isla de Ré, Francia (por Michael Griffon, CC-BY 3.0, en Wikimedia Commons)