Doc. 037/1991

INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA. NUEVAS ALTERNATIVAS

ANA JESUS LOPEZ
RIGOBERTO PEREZ SUAREZ

INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA. NUEVAS ALTERNATIVAS.

Ana Jesús López y Rigoberto Pérez
Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Oviedo

0-SUMARIO

El análisis de los desequilibrios distributivos ocupa un papel cada vez más destacado en los estudios de Economía. Prueba de ello son los numerosos trabajos que -desde distintas ópticas- se ocupan de la desigualdad y la pobreza.

En este trabajo recogemos una propuesta de medidas de la desigualdad y la pobreza, que son derivadas conceptualmente y para las que se estudia también su comportamiento analítico y normativo.

Las medidas de desigualdad y pobreza que proponemos son derivadas a partir de indicadores relativos de las situaciones individuales respecto a la media poblacional y al umbral de pobreza respectivamente.

Los índices colectivos así definidos resultan ser medidas satisfactorias de la desigualdad y la pobreza, que aparecen además relacionadas entre sí.

Ambas medidas son complementadas con las expresiones de Ganancia de igualdad y Variación de pobreza que permiten analizar la evolución temporal de ambos fenómenos.

La validez conceptual de todos estos indicadores va unida a un comportamiento satisfactorio desde el punto de vista analítico, que se pone

de manifiesto cuando analizamos las propiedades que satisfacen y la interpretación gráfica de la que son susceptibles.

Dado que los desequilibrios distributivos indican en último término pérdidas de Bienestar Social, hemos considerado conveniente analizar el significado ético de las medidas propuestas y, también desde este punto de vista han resultado satisfactorias.

Por último se incluyen los principales resultados sobre las aplicaciones hechas con estos indicadores a la economía asturiana y sobre las EPF, así como de los proyectos en los que actualmente se está trabajando.

1.-DESIGUALDAD INDIVIDUAL Y COLECTIVA

1.1-INTRODUCCION

Al examinar los antecedentes de la desigualdad nos encontramos que las medidas habitualmente empleadas, que son básicamente los índices de Lorenz y Gini, tienen importantes limitaciones al no verificar algunos de los requisitos considerados como deseables en este tipo de medidas.

Partiendo de diferentes axiomáticas, Bourguignon (1979), Cowell (1980), Shorrocks (1980) y Zagier (1983) han llegado a caracterizar una familia de medidas de desigualdad aditivamente descomponibles que -siguiendo la axiomática de Zagier- puede ser descrita en los siguientes términos:

Toda medida de desigualdad descomponible y que satisface los requisitos de normalización, independencia del tamaño poblacional, invarianza por homotecias, condición de Pigou- Dalton y continuidad es de la forma:

$$I_{\beta}^{N}(X) = \sum_i \Phi_{\beta}(x_i/E(X))\, p_i$$

siendo $\Phi_{\beta}(x)$ una función definida para cada β real como:

$$\Phi_{\beta}(x) = \begin{cases} x^{\beta}-1 & \text{si} \quad \beta < 0 \\ -\log x & \text{si} \quad \beta = 0 \\ 1 - x^{\beta} & \text{si} \quad 0 < \beta < 1 \\ x \log x & \text{si} \quad \beta = 1 \\ x^{\beta} - 1 & \text{si} \quad \beta > 1 \end{cases}$$

Esta familia incluye como casos particulares al índice de Theil (β=1) y la Varianza Normalizada (β =2).

Río, M.J. y R. Pérez (1985) establecen una nueva axiomática de estas medidas cuando β<0, exigiendo un menor número de axiomas; concretamente, sustituyen los requisitos de independencia del tamaño poblacional e invarianza por homotecias por el axioma de simetría, no contemplado por Zagier, y presentan una formulación alternativa para la condición de Pigou-Dalton.

El requisito de **descomponibilidad** que caracteriza a la anterior familia es una propiedad crucial desde el punto de vista operativo, pues indica el procedimiento mediante el cual podemos articular la desigualdad asociada a diferentes agregaciones de individuos y rentas.

Este es además un instrumento de análisis reversible, pues no sólo nos permite ascender en la pirámide de desigualdad, sino también descender aislando los efectos que las diferentes partes tienen sobre el valor final. Así pues, en todo el procedimiento subyace un principio normativo, según el cual el todo debe relacionarse con el conjunto de sus partes.

Dentro de la familia aditivamente descomponible, el caso particular β=-1 ha sido ya estudiado en trabajos anteriores que ponen de manifiesto su idoneidad como medida de la desigualdad. Así, en Pérez, R. (1985) se introduce el indicador como aplicación de la inquietud cuadrática a la medición de la desigualdad de renta, y se obtienen los estimadores insesgados de esta medida y de la varianza de sus estimadores. En MECO (1990) se presenta un estudio comparativo del índice de orden -1, defendiendo su uso frente a otros indicadores alternativos.

Además de este comportamiento satisfactorio, una ventaja adicional de la medida de orden -1 es que puede ser derivada -como más adelante justificaremos- partiendo de un estudio individualizado de cada uno de los componentes de la población. En este sentido, juega un papel importante el **indice de desigualdad individual**, que sintetiza en una cifra la posición relativa de cada individuo perteneciente a la población estudiada, analizando sus propiedades y representación.

La desigualdad colectiva definida como esperanza de desigualdades individuales coincidirá así con el caso particular β=-1 de la familia de medidas aditivamente descomponibles. Bajo ciertas condiciones poco restrictivas, la desigualdad colectiva será además susceptible de una representación gráfica muy intuitiva, que permite establecer un claro paralelismo de este indicador con el índice de Lorenz (de hecho, el índicador de desigualdad colectiva presentará las mismas ventajas que el de Lorenz -interpretación gráfica, consistencia con su criterio de ordenación- solucionando además algunas de las carencias de éste).

1.2.- DESIGUALDAD INDIVIDUAL

Cada una de las medidas habitualmente empleadas en la medición de la desigualdad sintetiza mediante una cifra el nivel existente en la población, y la utilización de los diversos índices conducirá a resultados diferentes ya que el método de cálculo y las propiedades que éstos satisfacen no coinciden.

Dado que dentro de una población no todos los individuos se ven afectados de idéntica forma por la desigualdad, parece interesante considerar una medida que cuantifique la parte de desigualdad global que cada rentista genera o soporta. Con este objetivo hemos introducido el índice de desigualdad individual.

El **índice de desigualdad individual** ha sido introducido en López, A.J. y R. Pérez (1990), como una medida que compara por cociente la renta media poblacional con la correspondiente a cada individuo.

Definición: Llamamos índice de desigualdad individual asociado a i, a una función:

$$d : R^{+} x R^{N}_{+} \longrightarrow R$$

$$(x_i, X) \longrightarrow d(x_i, X) = (\mu / x_i) - 1$$

El signo de d_i será positivo para aquellos individuos cuya renta es inferior a la media poblacional, mientras que toma valores negativos para los que generan desigualdad. Los casos de desigualdad individual nula irán asociados a individuos con niveles de renta coincidentes con la media, esto es, perfectamente representativos de la población estudiada.

Esta definición de d_i, garantiza que el indicador verifique una serie de propiedades deseables:

-Continuidad: $\lim_{x \to a} d(x) = d(a) \quad \forall\, a \in R_{+}$.

La desigualdad individual es función continua de la renta.

- Dados dos vectores aleatorios de renta $X, X' \in R^{N}_{+}$, con $E(X) = E(X')$

siempre que $x_i < x'_i$ se tiene $d_i > d'_i$

Es decir, el valor de la desigualdad individual de un rentista **disminuye ante aumentos de la renta del mismo**, suponiendo constante la media poblacional. Ello refleja una mejor posición relativa del individuo, que pasa a sufrir menos desigualdad (o bien a generar más, si partíamos de niveles negativos de d).

- Dados dos vectores aleatorios de renta X, $X' \in R^N_+$, si $X' = cX$ (X' puede ser obtenido a partir de X mediante cambios de escala u homotecias) entonces $d'_i = d_i \ \forall i = 1,\ldots, k$.

El siguiente resultado es una generalización de esta propiedad:

- Dados dos vectores X, $X' \in R^N_+$, siempre que sea posible obtener X' a partir de X mediante redistribuciones de rentas, se tiene:

$$d'_i = d_i \quad ; \quad \forall\ x_i' = x_i.$$

Según esta afirmación, cualquier redistribución de la masa de renta existente en que no participe el individuo i no afectará a su desigualdad individual.

- Sean X, $X' \in R^N_+$. Si $X' = X + c\,I$ $(c>0)$, entonces se verifica:

$d_i' > d_i$	para	$x_i > \mu$
$d_i' = d_i$	para	$x_i = \mu$
$d_i' < d_i$	para	$x_i < \mu$

Esta propiedad recoge cómo las desigualdades individuales se ven afectadas por incrementos constantes en las rentas, siendo dicho efecto distinto según la posición inicial del rentista considerado (para individuos con ventaja relativa inicial, ésta ha disminuído -d_i aumenta- mientras que ha decrecido la desigualdad para perceptores de rentas inferiores a la media, que verán disminuir su agravio comparativo. Los perceptores de rentas medias no se verán afectados por este aumento constante).

- Sean los vectores $X \in R^N_+$, $X' \in R^{N'}_+$ con esperanzas respectivas μ y μ'. Se verifica entonces para cualquier renta dada x_i:

$$d_i < d'_i \quad \text{si} \quad \mu < \mu'$$

$$d_i = d'_i \quad \text{si} \quad \mu = \mu'$$

$$d_i > d'_i \quad \text{si} \quad \mu > \mu'$$

esta propiedad permite analizar la variación de la desigualdad individual ante alteraciones en el tamaño poblacional.

Si la población está integrada por N individuos con renta media μ y entran a formar parte de la misma nuevos individuos (cuya renta media denotaremos por μ_A) hasta llegar a un tamaño $N' > N$, la expresión de las nuevas desigualdades individuales será:

$$d_i' = (\mu'/x_i) - 1$$

donde $\mu' = [\ \mu N + \mu_A(N'-N)] / N' = \mu_A + (\mu-\mu_A)N / N'$.

Así pues, se verificará $d_i' < d_i$ siempre que $\mu > \mu_A$, ya que una entrada en la población de individuos con renta media inferior a la poblacional hará que mejore la posición relativa de los N rentistas iniciales.

Por el contrario, se tiene $d_i < d_i'$ cuando $\mu < \mu_A$. La última posibilidad sería que la entrada de nuevos rentistas no afectase a la media ($\mu = \mu_A$), en cuyo caso no variarán las desigualdades individuales.

Las conclusiones serían análogas en el caso de que se produjese una disminución del tamaño poblacional ($N'<N$).

Estas propiedades serán útiles en el estudio evolutivo de desigualdades, permitiendo comparar situaciones entre las que se han producido entradas o salidas de individuos en la población y repartos de las rentas existentes.

Para cualquier población dada es posible representar la distribución de renta asignando a cada valor de X el nivel de desigualdad individual asociado, que deberá aparecer ponderado por la probabilidad asignada al correspondiente valor. [Gráfico 1].

En el caso continuo, a cada renta le será asignado el producto de su desigualdad individual por la función de densidad en el punto correspondiente, obteniéndose bajo condiciones poco restrictivas una curva de desigualdad como la representada. [Gráfico 2].

Gráfico 1

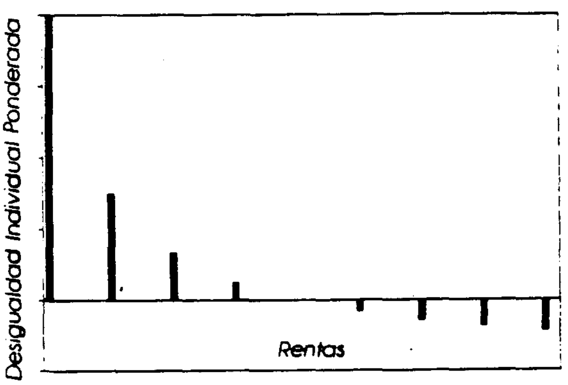
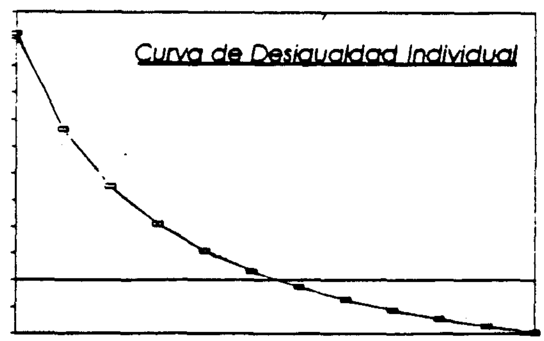


Gráfico 2



1.3.-DESIGUALDAD COLECTIVA

Como complemento al estudio individual será adecuado analizar también la desigualdad global asignable al conjunto de la población.

Para cuantificar esta desigualdad que denominamos **colectiva** partimos del concepto de desigualdad individual ya introducido, proponiendo una expresión en la que intervengan cada una de las situaciones relativas de los componentes de la población, que serán resumidas en un resultado asignable al conjunto poblacional.

Definición.- Dada una distribución de rentas X, se denomina **desigualdad colectiva** de la población, que denotaremos por D, al valor esperado de las desigualdades individuales de los rentistas que la integran; esto es:

$$D : R^{N}_{+} \longrightarrow R_{+} \quad ; \quad X \longrightarrow D(X) = E\,(d(x))$$

Esta medida colectiva representa el nivel de desigualdad que cabe esperar cuando un individuo desconoce qué renta le será asignada en la población. A partir de la expresión original de D como valor esperado de d es posible obtener en el caso discreto:

$$D = \sum_i (\mu/x_i)\, p_i - 1 = I^{-1}$$

La desigualdad colectiva así definida será por tanto un caso particular (cuando $\beta = -1$ y la variable X representa la renta) de la familia de medidas aditivamente descomponibles de orden β.

En el caso de que la renta sea estudiada como variable continua con función de densidad $f(x)$ y recorrido $[x_1 , x_k]$, la expresión de la desigualdad colectiva será:

$$D = E(d) = \int (\mu/x)\, f(x)\, dx \; - \; 1$$

Un análisis de la formulación continua del índice de orden -1 figura en MECO (1988).

Las principales propiedades que verifica el indicador de desigualdad colectiva definido anteriormente, algunas de las cuales aparecen como requisitos en diferentes caracterizaciones axiomáticas de las medidas de desigualdad, son las siguientes:

Continuidad- $\lim_{x \to x_0} D(X) = D(X_0)$

Normalización- $D(\mu, ..., \mu) = 0$. (El valor mínimo de D se obtiene en el caso de que todas las rentas coincidan).

Maximalidad- $\text{máx } D(X) = D(X^*)$, siendo $X^* = (a,a...,a,x_N)$, y $a \to 0$.

El índice D converge a su valor máximo cuando la renta tiende a concentrarse en un único perceptor.

Simetría- $\forall$ $X, X' \in R^N_+$, si $X' = \sigma(X)$ donde $\sigma \in P_N$ es una permutación del conjunto $\{1, 2..., N\}$ se cumple:

$$D(X') = D(X)$$

esto es, alteraciones en el orden de las rentas no afectan al valor de la desigualdad colectiva.

Conservación del signo- $D(X) \geq 0$, $\forall$ $X \in R^N_+$.

El índice de desigualdad colectiva de una población toma siempre valores no negativos.

S-convexidad- $D(BX) \leq D(X)$, $\forall$ $X \in R^N_+$ siendo B una matriz doblemente estocástica.

Esta propiedad permite afirmar que la desigualdad colectiva asignada a una situación intermedia entre dos distribuciones toma un resultado comprendido entre los valores de D correspondientes a los casos extremos.

Invarianza por homotecias- Si $X' = cX$, entonces:

$$D(X') = D(X)$$

(Variaciones proporcionales en todas las rentas no afectan al valor de desigualdad colectiva).

Varianza por traslaciones- $D(X + a\, I) < D(X)$, $\forall$ $X \in R^N_+$ y $\forall$ $a \in R_+$.

El valor de la desigualdad colectiva disminuye cuando todas las rentas aumentan en una cantidad constante.

Extensibilidad- $\lim_{a \to 0} D(x_1, ..., x_N, a) > D(x_1, ..., x_N)$.

Si se introduce un nuevo individuo en la población de modo que la renta total de la misma sufra variaciones mínimas, el valor de D aumenta.

Independencia del tamaño poblacional- Si X_r es un vector formado por r réplicas de X, entonces se cumple:

$$D(X_r) = D(X) \quad , \quad \forall\, r \in N$$

lo cual significa que la desigualdad colectiva no depende del número de individuos que componen la población, sino únicamente de las proporciones de rentistas.

Condición de Pigou-Dalton- Sean los vectores de R^N,

$X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_N)$ y $X' = (x_1, \ldots, x_i+a, \ldots, x_j-a, \ldots, x_N)$ con $0 < a < (x_j-x_i)/2$.
Entonces se cumple:

$$D(X') < D(X)$$

La interpretación de esta propiedad es muy intuitiva: siempre que se redistribuyen rentas desde individuos privilegiados hacia perceptores de rentas más bajas, el valor de la desigualdad colectiva decrece.

Principio de transferencias regresivas: $\forall\, a\ ,\ 0 < a < x_i$ se cumple:

$$D(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_N) < D(x_1, \ldots, x_i-a, \ldots, x_j+a, \ldots, x_N)$$

esto es, el valor de D sufre aumentos cuando se transfieren rentas desde individuos situados en estratos bajos hacia otros de estratos superiores.

Decrecimiento del impacto ante transferencias- Sea

$X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_N)$, con $x_i < x_j$, $x_k < x_l$, $x_i < x_k$, $x_j < x_l$ y $x_j-x_i=x_l-x_k$

Entonces se verifica:

$$D(x_1, \ldots, x_i+a, \ldots, x_j-a, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_N) < D(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k+a, \ldots, x_l-a, \ldots, x_N)$$

$$\forall\, a,\ \ 0 < a < (x_j-x_i)/2.$$

esto es, el decrecimiento de D que se produce como consecuencia de una transferencia progresiva de renta de cierta cuantía es mayor cuanto más bajos sean los niveles de renta entre los cuales dicha transferencia tiene lugar.

Descomponibilidad por grupos- Dada una población dividida en l subpoblaciones o estratos cuyos tamaños y rentas medias denotamos por N_j y μ_j respectivamente, se cumple:

$$D = D^* + \textstyle\sum_j a_j D_j$$

con $a_j = \mu N_j \,/\, \mu_j N$; $(j=1, \ldots, l)$.

Según esta propiedad, la desigualdad colectiva puede ser expresada a partir de dos sumandos: la desigualdad entre subpoblaciones:

$$D^* = \sum_i (\mu N_i/\mu_i N) - 1$$

y un término que es suma ponderada de las desigualdades colectivas de cada subpoblación.

Descomponibilidad por factores- Si la renta es originada por p factores distintos, la desigualdad colectiva global podrá ser expresada en función de las contribuciones de los diferentes factores S_r ($r = 1, ..., p$), siendo éstas sumas ponderadas de las correspondientes rentas. Es decir:

$$D = \sum_r S_r$$

donde: $S_r = \sum_i (x_i^r / x_i) [(\mu/x_i) - 1] / N.$

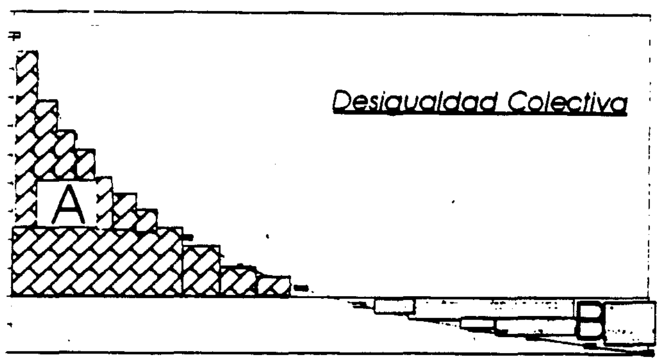
La medida de desigualdad colectiva une a su buena conducta analítica un **adecuado comportamiento inferencial**, que ya ha sido puesto de manifiesto en varios trabajos (Pérez (1985), Pérez et al. (1986), Caso (1988)..).

La definición de desigualdad colectiva como valor esperado de desigualdades individuales permite además una interpretación gráfica muy intuitiva de la misma, ya que bajo el supuesto de continuidad de renta se tiene

$$D = \int d(x)f(x)dx$$

que viene representado por la diferencia de las dos áreas contenidas entre la curva de desigualdad y el eje de abscisas (D = A - B).

Gráfico 3



Además de sus propiedades y representación, el índice D presenta como ventaja adicional la posibilidad de ser interpretada en términos análogos a la medida de Lorenz.

Así, cuando las rentas se encuentran equitativamente distribuidas, tanto el área de concentración de Lorenz como la superficie de desigualdad colectiva son nulas. La otra situación extrema, correspondiente al caso de máxima concentración daría lugar a superficies de desigualdad colectiva que, al igual que las áreas de concentración de Lorenz, tomarían valores máximos.

Dada la imposibilidad de llegar a ordenaciones totales de distribuciones de renta, se viene aceptando, generalmente, la cuasi-ordenación derivada de la utilización del criterio de Lorenz. Gracias a la propiedad de S-convexidad verificada por D podemos garantizar que dicha medida es Lorenz consistente, siguiendo así las pautas de las medidas de desigualdad más ampliamente aceptadas.

Las consideraciones anteriores justifican la elección de la medida de desigualdad individual definida, ya que otras expresiones alternativas de la misma (igualmente válidas a priori) no permitirían sin embargo obtener una expresión de la desigualdad colectiva de validez contrastada como es el caso del índice de desigualdad aditivamente descomponible de orden -1.

1.4.-DESIGUALDAD COLECTIVA Y BIENESTAR SOCIAL

Dado que la desigualdad es un fenómeno que refleja pérdidas de bienestar social, será conveniente un análisis del contenido normativo de las medidas utilizadas.

Siguiendo una clasificación convencional se agrupan las medidas distinguiendo entre **objetivas**, entendidas como aquéllas que utilizan índices meramente descriptivos, y **normativas**, que llevan aparejada a la medición algún tipo de valoración ética.

Si bien existe polémica entre los dos enfoques, éstos no son incompatibles entre sí, sino más bien complementarios ya que -como afirma Sen- los índices objetivos son derivados en ocasiones exigiendo requisitos (como la condición de Pigou-Dalton, la simetría...) de tipo normativo. Por su parte, en las características normativas no será posible incluir todos los elementos de la valoración ética del problema, por lo cual se seleccionarán ciertos aspectos que dependen del carácter objetivo de la desigualdad.

En las derivaciones normativas es necesario especificar la Función de Bienestar Social (FBS) que denotamos en general por W, y para la que es frecuente efectuar el supuesto de individualismo (W es función de las utilidades individuales).

Las FBS más comunes son las utilitaristas, que han sido criticadas debido al supuesto de separabilidad aditiva y también al hecho de que, al maximizar la suma de utilidades, ignoran por completo la distribución interpersonal. De ahí que sea posible añadir a W criterios que introduzcan preferencia por la igualdad, entre los cuales se encuentra la concavidad, el Axioma de débil equidad (WEA) u otros más restrictrivos como el maximin de Rawls.

Las medidas normativas más importantes son las propuestas por Dalton, que siguen la expresión $D=\sum_i U(x_i)/NU(\mu)$, y la medida de Atkinson que se basa en el concepto de renta equivalente (X_E) entendida como aquélla que, equitativamente distribuida daría lugar a un nivel de Bienestar social coincidente con el observado.

Esta medida es generalizable a FBS no utilitarias, e incluso no individualistas, llegando así a las medidas denominadas Atkinson-Kolm-Sen.

Aún en el caso de que las medidas sean derivadas por métodos descriptivos, es posible llevar a cabo un análisis de su contenido ético, examinando algunas de las propiedades que éstas verifican o bien a través de relaciones genéricas que establecen conexiones entre Bienestar social y desigualdad.

El contenido ético del índice D de desigualdad colectiva puede ser evaluado a partir de cualquiera de los dos métodos anteriormente recogidos.

Así, la medida de desigualdad colectiva podrá ser derivada partiendo de funciones del tipo:

$$U(x) = a-c/x \qquad (c > 0)$$

que son crecientes y cóncavas, y se obtienen como caso particular (β = -1) de la expresión recogida por Atkinson para medidas de desigualdad independientes de la media.

Calculada la renta equivalente en este caso obtendremos : $x_E=N/\sum(1/x_i)$, y la correspondiente medida de Atkinson $A_{(\beta=-1)}$. La relación genérica derivada por Zagier (1983) nos permite expresar la desigualdad colectiva como:

$$D = (1 - A_{(\beta=-1)}(X))^{-1} - 1.$$

El atractivo de este planteamiento es doble: por una parte, al relacionar la desigualdad colectiva con el índice de Atkinson garantiza que las ordenaciones derivadas de ambas medidas son consistentes, transmitiendo así a nuestro índice D el contenido normativo derivado de las rentas equivalentes. Además, la interpretación del parámetro ß permite conocer la aversión a la desigualdad que conlleva nuestra medida.

Si tenemos en cuenta que al decrecer ß aumentan los pesos otorgados a las transferencias a niveles bajos de renta, podemos afirmar que nuestra medida D contiene una considerable preferencia por la igualdad, que se pone de manifiesto cuando comparamos este indicador con otros índices habitualmente empleados (así, como hemos visto, el **índice de Theil** lleva asociado un valor $\beta=1$, y para $\beta=2$ se obtiene la **varianza normalizada**). El caso de máxima aversión por la desigualdad se alcanzaría con $\beta \longrightarrow -\infty$, lo cual nos conduciría al criterio maximin de Rawls.

Un resultado adicional derivado de la relación entre D y la medida de Atkinson es la posibilidad de proponer para la desigualdad colectiva una propiedad de descomponibilidad normativa en términos similares a los enunciados por Blackorby, Donaldson y Auesperg (1981).

El rasgo básico de esta propiedad será la consideración como referencia de las rentas equivalentes igualmente distribuidas (en sustitución de las medias, que eran los referenciales usados en la propiedad descriptiva de descomponibilidad por grupos).

Así, considerada una población dividida en l grupos será posible expresar la desigualdad colectiva total (D) en función de la desigualdad entre grupos (D_B) y la desigualdad intragrupal (D_A) a través de la expresión:

$$D + 1 = (D_A + 1)(D_B + 1)$$

donde:

$$D_A = (N\mu \,/\, \Sigma_j N_j x_E^j) - 1$$

(con x_E = renta equivalente de la población total y x_E^j = renta equivalente del j-ésimo grupo) representa el exceso de renta relativo debido a la desigualdad entre los grupos y

$$D_B = \Sigma_i (N_i x_E^j // N x_E) - 1$$

recoge la fracción excesiva de renta causada por la desigualdad dentro de los grupos.

Por otra parte, Blackorby y Donaldson (1978) proponen un método genérico de obtención de FBS asociadas a medidas de desigualdad continuas, monótonas de grado 0 y S-convexas.

La medida de desigualdad colectiva $D = (1/n) \sum_i (\mu / x_i) - 1$ cumple dichos requisitos y, siguiendo el método anterior, la expresión de la FBS asociada vendrá dada por:

$$W_D = \mu (1 - D) = 2 \mu - (1/n) \sum_i \mu^2 / x_i$$

Una derivación alternativa de esta medida es posible utilizando el procedimiento propuesto por Dagum (1990). Partiendo de los conceptos de **utilidad** y **desutilidad**, en función de los cuales expresa la renta, este autor deriva para cada medida de desigualdad una función de bienestar social cuya expresión es coincidente con las obtenidas por el método Blackorby-Donaldson.

Nos interesa saber hasta qué punto esta expresión del bienestar social obtenida por cualquiera de los dos métodos expuestos a partir de la desigualdad colectiva incorpora juicios distributivos. Para ello, estudiaremos la interpretación de W_D analizando su comportamiento ante distintas propiedades.

Blackorby y Donaldson (1978) demuestran que toda FBS derivada a través del método por ellos propuesto es continua, creciente a lo largo de rayos desde el origen y homotética. Recogemos a continuación otras propiedades interesantes de la función W_D:

-Maximalidad: W_D alcanza su valor máximo bajo equidistribución.

-Simetría: La FBS W_D es una función simétrica de las rentas, que garantiza el anonimato de los componentes de la población respecto al cálculo del bienestar global.

-Agregación de desigualdad relativa (significación ética): Esta condición -propuesta por Blackorby y Donaldson- exige que el bienestar crezca cuando la desigualdad se reduce, manteniéndose la misma renta per cápita. Al ser nuestra FBS W_D homotética podemos garantizar que satisface dicha condición y esta consistencia permite calificar al índice de desigualdad colectiva como indicador éticamente significativo.

Para un mejor análisis de otras propiedades normativas de W_D es conveniente llevar a cabo una representación gráfica de esta medida, empleando el método del simplex de renta constante.

Siguiendo este procedimiento, consideramos la asignación entre tres individuos de un total de renta igual a 12 unidades.

Partiendo de una situación como la representada en el Gráfico 4 es posible afirmar, gracias a la propiedad de simetría, que todas las permutaciones de una situación dada, serán indiferentes a ésta. Por tanto, tomando como referencia el status-quo S, una curva de nivel pasará por los puntos señalados.

Por ser la medida D Lorenz-consistente puede afirmarse además que los puntos del interior del exágono son al menos tan buenos como el status-quo de partida. Sin embargo, el criterio de dominación de Lorenz no permite ordenar los puntos contenidos en las zonas R y E, lo cual servirá para conocer la preferencia por la igualdad de cada medida.

En el caso de la desigualdad colectiva D, la superposición de curvas de nivel al simplex da lugar al Gráfico 5, donde puede observarse que las curvas de indiferencia se hacen más próximas al criterio de Rawls al disminuir el bienestar social, mientras que para niveles altos de éste las curvas son más redondeadas.

Gráfico 4

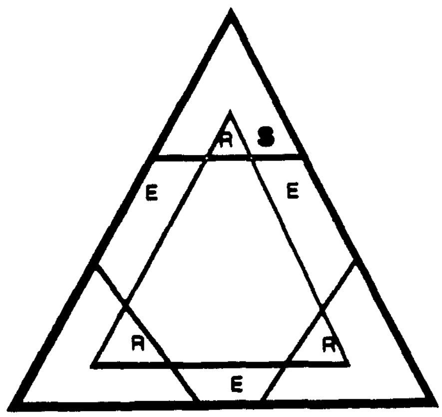
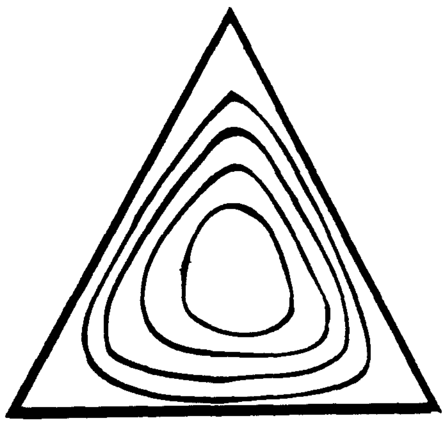


Gráfico 5



Este comportamiento deseable, consistente en otorgar mayor importancia a los individuos en peor situación a medida que los desequilibrios se hacen más graves, es similar al presentado por algunos de los índices de desigualdad más adecuados (Theil, función de Cobb-Douglas) mientras otras medidas como la de Gini o el Coeficiente de Variación presentan una conducta menos satisfactoria.

En concreto, estos dos indicadores cumplen una propiedad considerada no deseable: la homoteticidad distributiva, que supone ignorar el nivel de desigualdad en que nos encontramos para efectuar intercambios de renta.

En el caso de nuestra FBS, al no ser ésta distributivamente homotética, la tasa marginal de sustitución al movernos de un status quo de partida es variable, lo cual significa que la forma en que se intercambia renta entre los individuos dependerá -como parece éticamente deseable- del nivel de desigualdad existente.

2.-MEDIDA P_D DE POBREZA

2.1.-INTRODUCCION

Los estudios de pobreza se ocupan de los desequilibrios distributivos de una población, concediendo interés preferente a aquellos componentes de la misma cuya situación es menos privilegiada.

Dentro de este tipo de estudios es necesario distinguir dos aspectos: identificación de pobres y construcción de indicadores que cuantifiquen el nivel de pobreza.

La identificación de los pobres supone determinar la subpoblación T integrada por aquellos individuos cuya renta poblacional es menor o igual al umbral de pobreza que denotamos por z. Dicho límite será fijado de distintas formas según los diferentes conceptos de pobreza, que habitualmente se clasifican en tres categorías:

definiciones absolutas: entienden la pobreza como no alcanzar un nivel mínimo de renta objetivamente fijado.

definiciones relativas: consideran la pobreza como agravio comparativo respecto al resto de la población.

definiciones subjetivas: la pobreza es considerada como noción subjetiva que por tanto deberá ser determinada a partir de opiniones de individuos.

Si bien la determinación de la línea de pobreza suscita muchos puntos de discusión, y ha sido abordada en diferentes trabajos (Hagenaars 1986, Van Praag et. al. 1980 entre otros), la consideraremos aquí sólo como paso previo a la medición de la pobreza, que es el objetivo que nos ocupa.

Así, dado cualquier vector de renta $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$, una vez fijada la línea de pobreza z, quedará determinada la población de pobres $T(X,z) = \{i \in N / x_i \leq z\}$, cuyo tamaño se denota usualmente por q.

En estas condiciones, un índice de pobreza será una función real que, dada una línea de pobreza z, asigna a cada vector de ingresos un valor indicativo de su nivel de pobreza

El valor de este índice no dependerá en ningún caso de las rentas de los no pobres. Es decir, si X se obtiene a partir de Y por cambios en las rentas de individuos no pobres, entonces $P(X,z) = P(Y,z)$.

Por lo que se refiere a las expresiones concretas para medir la pobreza, segundo aspecto contemplado por Sen, son numerosos los estudios dedicados a examinar o proponer modificaciones de los indicadores más habituales, y también existen múltiples aplicaciones de estas medidas al estudio de la pobreza en distintos países.

2.2.-ANTECEDENTES

Las medidas tradicionalmente utilizadas eran indicadores simples, limitándose a contar los pobres en el caso de la proporción ($H=q/N$) o a cuantificar el total de renta necesario para situar a todos los individuos pobres en el umbral z (la medida resultante en este caso sería el gap medio normalizado $I=\sum (z-x_i)/qz$).

Desde 1976, la Axiomática de pobreza de Sen marca la pauta a la que se adaptan las diferentes medidas surgidas desde entonces. Según dicha axiomática, a cual un indicador de la pobreza debe satisfacer dos condiciones:

-**Axioma de Monotonía:** Dados $X, Y \in R^N$, si $x_j = y_j \quad \forall \; j \neq i$, $i \in T(X,z)$ y $x_i > y_i$, entonces se verifica $P(X,z) < P(Y,z)$.

Es decir, la reducción de renta de un pobre hace aumentar el nivel de pobreza.

-**Axioma de Transferencias:** $\forall \; X,Y \in R^N$, si $x_i = y_i \quad \forall \; i \neq j,k$ y $x_j > y_j \geq y_k > x_k$, con $x_j - y_j = y_k - x_k$, $k \in T(X,z)$ y $T(X,z) = T(Y,z)$, entonces:

$$P(X,z) > P(Y,z)$$

Ello significa que un trasvase de renta desde un pobre hacia otro individuo con mayor renta produce un aumento del valor de P.

El enunciado aquí recogido se corresponde con la versión "**débil**" de este axioma que es la propuesta por Sen y la de uso más generalizado. Según esta versión será necesario que las transferencias no afecten al número de pobres q, ya que si algún individuo deja de ser pobre gracias a las transferencias, ya no será evidente que el nivel de pobreza haya aumentado.

En ocasiones se añade a estos axiomas un tercero de Simetría según el cual dados $X,Y \in R^N$, si se cumple $X = \sigma Y$ siendo σ una matriz de permutación, entonces $P(X,z) = P(Y,z)$.

Este requisito exige la imparcialidad de la medida de pobreza. Su cumplimiento no presenta problemas ya que cualquier expresión de medida de la pobreza garantiza el anonimato de los individuos al utilizar para su cálculo vectores ordenados de renta.

Las medidas H e I de pobreza presentan inconvenientes cuando se las somete a las condiciones anteriores, ya que la medida I incumple el axioma de tranferencias mientras que H viola tanto este requisito como el de monotonía. La medida de pobreza propuesta por Sen parte de la consideración de los gaps de pobreza, a los que asigna ponderaciones $r(x,z)$ que coinciden con la posición que cada individuo ocupa en la ordenación de los pobres, dando lugar a la siguiente expresión:

$$S(X,z) = [2 / (q+1)Nz] \sum_{i\in T} g_i r_i(x,z)$$

a partir de la cual es posible obtener:

$$S(X,z) = H [I + (1-I)\, G_p\, (q/q+1)]$$

siendo únicamente a la población de pobres.

Sen llega a deducir esta expresión partiendo de una clase genérica de medidas de pobreza:

$$Q(X,z) = A(z,q,N) \sum g_i\, v_i(X,z)$$

y añadiendo nuevos requisitos a los axiomas iniciales de Transferencias y Monotonía:

-Axioma de Equidad relativa: $\forall$ i,j , tal que $W_i(x) < W_j(x)$ se verifica:

$$v_i(x,z) > v_j(x,z)$$

siendo W_i y W_j los niveles de bienestar de i y j en la situación X.

-Axioma de Ordenaciones: La ponderación $v_i(x,z)$ de un individuo coincide con el rango del mismo en la ordenación interpersonal de bienestar de los pobres.

-**Axioma de Monotonía en Bienestar:** $\forall$ i,j, con $x_i > x_j$, se tiene: $W_i(x) > W_j(x)$.

-**Axioma de Normalización:** Si $x_i = x_j$, $\forall$ $i,j \in T(X,z)$, entonces: $P = H\, I$.

Es posible probar que la medida de Sen es el único índice de pobreza que verifica la totalidad de los axiomas anteriores. Ello hace que sea la medida de uso más extendido en los análisis de pobreza. Sin embargo, numerosos autores han analizado las condiciones de Sen, proponiendo modificaciones de los axiomas que conducen a medidas alternativas de la pobreza.

Así, Kakwani (1980) propone una familia paramétrica:

$$P_k(X,z) = [q \,/\, Nz\lambda(q)]\, \Sigma_{i\in T}\, g_i\, r_i^k$$

de la que la medida de Sen sería el caso particular k=1.

La motivación de la medida de Kakwani es un requisito no verificado por S: la Sensibilidad ante Transferencias. Según este axioma, dados $i, j \in T(X,z)$, si $j > i$ entonces para cualquier $\delta > 0$ se tiene:

$$(\Delta P)_{i,i+\delta} > (\Delta P)_{j,j+\delta} \quad \text{donde} \quad (\Delta P)_{i,i+\delta} \text{ y } (\Delta P)_{j,j+\delta}$$

representan los incrementos de pobreza que tienen lugar como consecuencia de transferir una cantidad de renta desde los individuos i y j respectivamente hacia los que ocupan δ posiciones superiores.

Esta condición será verificada por la medida P_k para cualquier valor $k > 1$.

Existe una segunda versión de la **sensibilidad ante transferencias**, según la cual para cualesquiera $i,j \in T(X,z)$, $x_i < x_j$ y para todo $h > 0$ se cumple $(\Delta P)_{xi,\, xi+h} > (\Delta P)_{xj,\, xj+h}$. En este caso se exige que el efecto de las transferencias sobre la pobreza sea menor al aumentar los niveles de renta en que nos situamos, supuestas fijas las cantidades transferidas y las diferencias entre las rentas de los individuos afectados.

Este requisito se satisface para la familia de Kakwani a partir de cierto valor de k, una vez fijado el tamaño poblacional N.

Kundu y Smith (1983) proponen dos **propiedades de Monotonía respecto al tamaño poblacional** según los cuales si se añade un no pobre a la población, el valor de P debe decrecer mientras que si se añade un pobre a la población, el valor de P aumentará.

Según el **Teorema de Imposibilidad** postulado por Kundu y Smith, los dos axiomas anteriores son incompatibles con el axioma de transferencias en su versión fuerte.

Un método alternativo al de Sen para la construcción de medidas de pobreza consiste en tomar como punto de partida indicadores de la desigualdad, derivando de ellos medidas de pobreza que satisfagan los requisitos deseables.

Así, Blackorby y Donaldson (1980) presentan dos métodos para derivar indicadores de pobreza de los índices de desigualdad. El primero de ellos dará como resultado medidas relativas de pobreza mediante la expresión:

$$P_r(X,z) = H\,[I + (1\text{-}I)R_p] = [z - \mu_p(1 - R_p)]\,H/z$$

siendo R_p una **medida relativa**, **S-convexa** y **homogénea de desigualdad de rentas de los pobres.**

Con parecida justificación, es posible obtener una clase de medidas absolutas de pobreza:

$$P_a(X,z) = q(x,z)[z - \mu_p + A_p]$$

donde A_p es una **medida absoluta de desigualdad**, **S-convexa e invariante ante cambios constantes en todas las rentas.**

La deducción de medidas de pobreza propuesta por Hamada y Takayama (1977) se basa en el concepto de distribución truncada de renta X*(z), entendida como aquélla que asocia a la distribución efectiva los valores: xi , si i T(X,z) y z en caso contrario.

La medida de desigualdad R asociada a esta distribución truncada nos proporcionará una medida de pobreza de la población. Esto es:

$$P_R\,(X,z) = R(\,X^*(z))$$

En los trabajos de Clark et al. (1981), aprovechando la idea de distribución truncada, se propone la medida de pobreza:

$$D^{\alpha}(X,z) = [z - \mu^*\,(1 - A^{\alpha}(X^*))]\,/\,z$$

siendo μ^* y $A^\alpha(X^*)$ respectivamente la media y el índice de Atkinson correspondientes a la distribución truncada ($\alpha < 1$).

Foster et al. (1984) presentan una familia paramétrica de medidas de pobreza del tipo:

$$P_\alpha(X,z) = (1/N) \sum_{i\in T} (g_i / z)^{\alpha-1}$$

donde $\alpha \geq 1$.

Son casos particulares de esta familia $P_1 = H$, $P_2 = H.I$ y el caso $\alpha = 3$ que reviste especial interés ya que se obtiene como suma normalizada y ponderada de gaps de pobreza, siendo los pesos los propios gaps. Esta medida, que satisface la axiomática de Sen y la neutralidad ante transferencias, podrá ser expresada como

$$P_3(X,z) = H\,[I^2 + (1-I)^2\, C_p^2]$$

donde C_p es el coeficiente de variación de los pobres.

Un rasgo esencial de la familia propuesta por Foster et al. es su **Descomponibilidad aditiva**. Si dentro de la población analizada consideramos subgrupos j = 1 ,2 , ..., l , con tamaños respectivos N_j, podemos obtener:

$$P_\alpha(X,z) = \sum_j (N_j/N)\, P_\alpha(X_j,z)$$

posibilidad que no presentan sin embargo la medida de Sen y sus variaciones vistas hasta ahora.

Además, Foster et al. postulan un **Axioma de Monotonía de subgrupos**, según el cual si $X^{(j)} = Y^{(j)}\ \forall\ j \neq k$, y $P(X^{(k)},z) > P(Y^{(k)},z)$ entonces: $P(X,z) > P(Y,z)$. Este requisito es condición necesaria para la descomponibilidad aditiva, siendo por tanto satisfecho por la familia paramétrica de medidas por ellos propuesta.

Las diferentes alternativas examinadas conducen a la conclusión de que **no existe una medida ideal de la pobreza, y la elección de un indicador dependerá de qué requisitos se valoran más en cada caso.** Es por tanto inevitable -como reconoce el propio Foster- cierto grado de "arbitrariedad".

Además, al igual que con las medidas de desigualdad, la elección de un indicador llevará asociada cierta ordenación de estados; de ahí el interés de estudiar las funciones de bienestar social asociadas a las diferentes ordenaciones.

2.3.-GAP RELATIVO DE POBREZA

Hemos introducido en trabajos anteriores un indicador de pobreza que sigue las pautas marcadas en los estudios recientes, y cuya derivación efectuamos de forma similar a la vista para la desigualdad colectiva, partiendo de indicadores individuales.

Fijada una línea de pobreza en la población analizada, el gap de pobreza g viene definido para cada valor de X como diferencia entre z y la renta considerada. Partiendo de este concepto podemos establecer la siguiente definición:

El **gap relativo** de pobreza del individuo i que denotamos por g_R^i será obtenido como cociente entre el gap de pobreza de i y la renta individual correspondiente. Es decir, g_R es una nueva función real :

$$g_R : R_+ \times R_+ \longrightarrow R$$

$$(x_i, z) \longrightarrow g_R(x_i, z) = g_i / x_i = (z/x_i) - 1$$

El valor del gap relativo aumentará cuanto más se aleje un individuo del umbral de pobreza, esto es, cuanto mayor sea el agravio relativo que éste sufre. En este sentido, existe un claro paralelismo entre la idea de gap relativo y el índice de desigualdad individual definido en el capítulo anterior, con la diferencia de que en este último el referencial era, no un umbral de pobreza, sino la renta media de la población.

De la definición anterior de gap relativo se derivan una serie de propiedades, algunas de las cuales coinciden con las verificadas por el índice de desigualdad individual: continuidad, independencia de las restantes rentas poblacionales, disminución ante aumentos de renta, decrecimiento por cambios de origen e invarianza por homotecias.

Considerando el gap relativo como una variable aleatoria dependiente de la renta, su valor esperado podrá ser interpretado como síntesis poblacional de agravios relativos respecto a z.

2.4.-INDICE P_D DE POBREZA

Definición.- Denominamos Indice P_D de Pobreza a una función real cuya expresión viene dada por:

$$P_D : R^N_+ \times R_+ \longrightarrow R$$

$$(X,z) \longrightarrow P_D(X,z) = H\, E(g_R)$$

Es decir, fijada una línea de pobreza z, el índice P_D asocia a cada distribución de renta un nivel de pobreza dado por el producto de la proporción de pobres y el valor esperado del gap relativo de pobreza. Este valor podrá también ser expresado como:

$$P_D(X,z) = (1/N) \sum_{i \in T} g_R(x_i)$$

esto es, cociente entre el gap relativo agregado y el tamaño poblacional.

La medida anterior aumenta de valor cuanto peor sea la situación de los individuos considerados pobres, y presenta rasgos comunes - como más adelante mostraremos - con las medidas de pobreza habitualmente utilizadas.

Cuando se efectúan análisis comparativos de los indicadores de pobreza, se justifica a menudo la utilización de los más usuales (Sen, Kakwani, Foster, ...) argumentando que presentan la ventaja de contener en su expresión alguna medida de la desigualdad existente entre los pobres. Este requisito es en efecto deseable, ya que la pobreza de una población será más preocupante cuanto mayor sea la proporción de pobres en la misma, pero también lo será cuanto mayores sean los desequilibrios de rentas dentro del grupo de los pobres.

Además, si generalizásemos el estudio a toda la población (ignorando la línea de pobreza como referencial) desaparecerían los restantes componentes de la pobreza, quedando ésta reducida a una medida de desigualdad (esta característica puede ser considerada como consistencia de una medida de pobreza).

Como ya hemos anticipado, los índices usuales verifican este requisito y así hemos visto en el epígrafe anterior cómo la medida de Sen puede ser expresada en relación con el índice de Gini, al igual que la clase de medidas de Kakwani.

Este rasgo aparece de forma aún más clara en aquellos índices de pobreza construidos a partir de medidas de la desigualdad. Este es el caso de la familia propuesta por Blackorby y Donaldson (que contiene en su expresión índices de desigualdad genéricos), la medida de Takayama (equivalente a un índice de desigualdad de Gini aplicado a la distribución truncada de renta), la propuesta por Clark et al. y la familia de medidas aditivamente descomponibles de Foster et al. (en el caso $\alpha=3$, considerado por éstos como el más significativo, la medida de pobreza contiene en su expresión al coeficiente de variación para los pobres).

La medida de pobreza P_D que proponemos cumple también esta propiedad deseable, ya que es posible una expresión de la misma en la que aparece la desigualdad colectiva de renta en la población de pobres:

$$P_D(X,z) = H\,[\,D_p + I\,] / (1 - I)$$

Esta nueva fórmula de cálculo de P_D integra en su expresión tres componentes distintos de la pobreza:

-**Componente de agravio:** P_D recoge la distancia entre la renta media de los pobres (μ_p) y el umbral de pobreza ($dP_D/dI>0$).

-**Componente de población:** P_D aumenta con la proporción de rentistas a los que afecta la pobreza ($dP_D/dH>0$).

-**Componente de distribución:** P_D se ve afectado por el nivel de desigualdad colectiva existente entre los pobres ($dP_D/dD_p>0$).

Este resultado será de gran interés, ya que las ventajas del índice de desigualdad colectiva que hemos puesto de manifiesto en el capítulo anterior se trasladarán ahora al cálculo de la pobreza a través de P_D.

Es posible además llegar a caracterizar axiomáticamente nuestra medida de pobreza siguiendo métodos análogos a los de Sen y Takayama-Hamada. En el primero de los casos partimos de la familia genérica anteriormente vista, mientras que la derivación de Takayama-Hamada considera una nueva expresión en la que aparece la distribución truncada de renta. Dicha distribución que se denota usualmente por X , coincide con la original para los integrantes de la subpoblación de pobres, asignando renta igual a z a aquellos individuos que no pertenecen a dicha subpoblación.

En cualquiera de los dos casos, la medida P_D puede obtenerse partiendo de los Axiomas:

-**Axioma de ponderaciones inversas de renta:** el peso concedido a la renta de cada individuo coincide con el inverso del valor de ésta. Es decir:

$$\forall \ i \in T(X,z) \ , \quad v_i(x) = 1/x_i.$$

-**Axioma alternativo de Normalización**: si todos los pobres perciben una misma renta p, el nivel de pobreza viene dado como producto de la proporción de pobres y el gap relativo de pobreza asociado a la renta μ_p. Esto es, si $x_i = \mu_p \ , \ \forall \ i \in T(X,z)$, entonces se tiene:

$$P = H \, g_R(\mu_p) = H \, I \, / \, (1 - I) \, .$$

Por otra parte, la medida P_D verifica las siguientes propiedades:

-**Crecimiento respecto al umbral de pobreza**: Para X R^N_+ dado, $P_D(X,z)$ es una función creciente de z.

-**Continuidad**: $\forall \ X \in R^N_+ \ , \ \forall \ z \in R_+ \ ,$ P(X,z) es un función continua en (X, z).

-**Monotonía**: Dados $X,Y \in R^N_+$ si para algún $i \in T$ se cumple $x_i < y_i$ siendo $y_j = x_j \ \forall \ j \neq i$ entonces $P(X,z) > P(Y,z)$ (es decir, pérdidas de renta en algún pobre originan aumentos de valor en el índice P_D).

-**Principio de transferencias regresivas entre pobres**: Dados $X,Y \in R^N_+$, si $x_i = y_i \ \forall \ i \neq j,k,$ y $x_j > y_j \geq y_k > x_k$ con $x_j - y_j = y_k - x_k$ para cualesquiera $j, k \in T(X,z) \cap T(Y,z)$ se cumple:

$$P_D(X,z) > P_D(Y,z)$$

(Si X se obtiene a partir de Y mediante transferencias regresivas entre los pobres, entonces el valor del índice P_D asociado a la situación X es mayor que el correspondiente a Y).

Este principio es denominado por Chakravarty (1990) **axioma mínimo de transferencias** y una generalización del mismo es el **axioma débil** que figura a continuación.

-**Axioma débil de transferencias**: Dados $X,Y \in R^N_+$, si $x_i = y_i \ \forall \ i \neq j,k,$ y $x_j > y_j \geq y_k > x_k$ con $x_j - y_j = y_k - x_k$, $k \in T(X,z)$ y $T(X,z) = T(Y,z)$ entonces:

$$P_D(X,z) > P_D(Y,z)$$

esto es, si se transfiere renta de un individuo pobre a otro con renta superior, sin que ello modifique la población de pobres, entonces la medida de pobreza aumenta.

-Simetría o Imparcialidad: Sean $X,Y \in R^N_+$, con $Y = \sigma X$ donde σ es una matriz de permutaciones. Entonces:

$$P_D(X,z) = P_D(Y,z)$$

-Invarianza por homotecias que afectan a z: $\forall$ $X,Y \in R^N_+$, si $Y = cX$ y $z_Y = cz_X$, $c \in R_+$, entonces:

$$P_D(X,z_X) = P_D(Y,z_Y)$$

en consecuencia, cambios proporcionales en las rentas que afecten a la línea de pobreza no conllevan una modificación del valor de P_D.

-Varianza por traslaciones que afectan a z: Dados $X,Y \in R^N_+$, con $Y = X + cI$ y $z_Y = z_X + c$, $c \in R_+$, se tiene: $P(Y,z_Y) < P(X,z_X)$; es decir, si todas las rentas y la línea de pobreza se ven aumentadas en una cantidad constante, el valor del índice P_D disminuye.

-Crecimiento de la riqueza: Dados los vectores $X=(x_1, ..., x_N) \in R^N_+$ e $Y = (x_1, ..., x_i, y, x_{i+1} ..., x_N) \in R^{N+1}_+$, se cumple: $P(Y,z) < P(X,z)$ siempre que $y > z$.

Este es uno de los **principios de monotonía poblacional** y garantiza que la entrada de un individuo no pobre en la población considerada hace decrecer el valor de P_D.

-Sensibilidad decreciente de transferencias regresivas entre pobres: el aumento en el índice P_D de pobreza debido a una transferencia regresiva de pobres es menor cuanto más alto sea el nivel de renta al que dicha transferencia se produce, supuesta fija la cantidad transferida y la diferencia de renta entre los individuos afectados; es decir, $\forall$ $i, j, k, l \in T(X,z)$ con $x_l < x_k$, $x_j - x_i = x_l - x_k > 0$, se cumple: $(\Delta P_D)_{xl, xj} > (\Delta P_D)_{xk, xl}$.

Esta propiedad de sensibilidad decreciente puede ser ampliada a todas aquellas transferencias regresivas de igual cuantía que, partiendo de individuos pobres, mantengan inalterada la proporción de pobres en la población. Esto es: $\forall$ $i,j \in T(X,z)$, $x_i < x_j$ y $\forall$ $h>0$ se cumple: $(\Delta P_D)_{xi, xi+h} > (\Delta P_D)_{xj, xj+h}$.

-Monotonía de subgrupos: si la población se divide en subpoblaciones $j = 1, ..., l$, verificándose para los vectores X e Y, $X^{(j)} = Y^{(j)}$ $\forall$ $j \neq k$, y $P_D(X^{(k)},z) > P_D(Y^{(k)},z)$, entonces se cumple: $P_D(X,z) > P_D(Y,z)$.

-Descomponibilidad: cuando la población se divide en l subgrupos, la pobreza global puede ser obtenida a partir de los niveles de pobreza de cada subpoblación según la expresión:

$$P_D(X,z) = \sum_j (N_j/N)\, P_D(X^j,z)$$

donde N_j y $P_D(X^j,z)$ son respectivamente el tamaño del grupo j y el nivel de pobreza de dicho grupo medido a través del índice P_D.

Además de las propiedades anteriores, el índice P_D presenta la posibilidad de ser representado gráficamente.

Si consideramos la renta como variable continua, la medida quedaría expresada del siguiente modo:

$$P_D = H \int [(z/x) - 1]\, f(x)\, dx$$

donde f(x) es la función de densidad de renta en la población de pobres.

Representando en abscisas los valores de renta y considerando la proporción H como unidad del eje de ordenadas, la medida de pobreza P_D viene representada en el Gráfico 6.

Una expresión alternativa de P_D, que permite una nueva posibilidad para su representación gráfica, es:

$$P_D = H\,[(zD_p/\mu_p) + ((z-\mu_p)/\mu_p)]$$

Según esta última expresión, el área de pobreza será obtenida como suma de dos superficies: la representada por la diferencia entre las áreas rayadas (que es proporcional a la desigualdad entre los pobres) y la correspondiente al rectangulo $\mu_p z$ CD (que recoge el producto de la proporción de pobres por el gap relativo de μ_p).

Este segundo tipo de representación [Gráfico 7] permite separar los componentes de nuestra medida de pobreza, pues es fácil apreciar que la primera de las superficies recoge la importancia de los desequilibrios entre pobres, mientras la segunda representa el agravio medio de éstos respecto a la línea de pobreza.

Gráfico 6

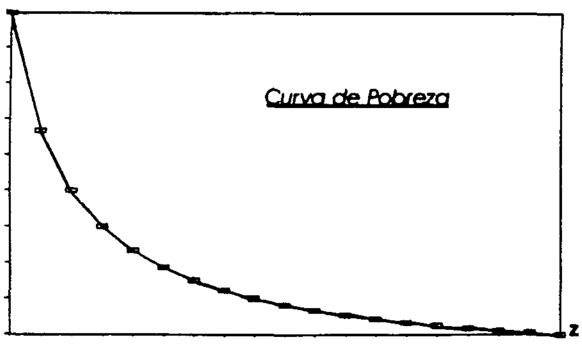
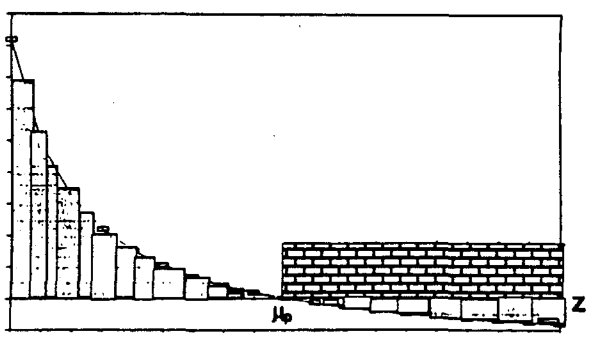


Gráfico 7



2.5.-POBREZA Y BIENESTAR SOCIAL

La conexión de las medidas de pobreza con el bienestar social viene dada a través de dos vías: por una parte, algunos de los axiomas impuestos a las medidas de pobreza tienen contenidos claramente éticos, y por otra, las expresiones de los índices de pobreza suelen incluir indicadores de la desigualdad de renta entre los pobres, lo cual hace posible utilizar las relaciones ya analizadas entre desigualdad y bienestar social.

En el caso de la medida de pobreza propuesta, ambas vías nos permitirán justificar su validez desde un punto de vista normativo. Sin embargo, el contenido ético de los análisis de pobreza se manifiesta incluso con carácter previo a su medición, ya que la especificación de la línea de pobreza exige determinar un umbral de bienestar por debajo del cual se asume que los individuos pertenecen a un subgrupo poblacional agraviado (población de pobres).

La línea de pobreza, entendida como traducción del umbral de bienestar, será la solución de $U(x_\delta) = \delta$ y dependerá por tanto de la variable que se haya elegido como relevante para aproximar el bienestar (en nuestro caso la renta), de la elección de la función U y del nivel crítico δ.

Algunos de los axiomas incluidos en las caracterizaciones de las medidas de pobreza reflejan claros juicios de valor, sirviendo como argumento para evaluar diferentes indicadores.

Así, la justificación del axioma débil de transferencias que P_D verifica, puede ser efectuada - según el propio A. Sen- en los siguientes términos: admitiendo que la utilidad marginal de la renta es positiva y decreciente, si las funciones de utilidad de los pobres son coincidentes (o difieren en una constante) entonces cualquier transferencia regresiva entre pobres aumentará la utilidad del receptor en una cantidad menor que el decrecimiento sufrido por el dador. De ahí que exista una pérdida neta de utilidad que se refleja en un aumento de la pobreza.

Por otra parte, el teorema de equidad relativa conlleva mayores ponderaciones para aquellos individuos que disfrutan de menores niveles de bienestar social. En el caso de P_D, al cumplirse la monotonía de bienestar, sabemos que W aumenta con la renta y además el axioma alternativo proponía ponderaciones del tipo $v_i=1/x_i$, que claramente cumplen el requisito exigido.

Una derivación normativa de medidas de pobreza es propuesta por Chakravarty (1983). Partiendo del concepto de gap de utilidad individual ($h_i = U(z)-U(x_i)$) dicho autor propone como medida de pobreza el gap agregado normalizado:

$$Q(X,z) = A(N,z). [\Sigma_i U(z)-U(x_i)]$$

al que exige axiomas de normalización e invarianza de escala.

Siguiendo la estructura de la medida Q de Chakravarty, la consideración de una función de utilidad del tipo $U=a-(1/x)$ nos permitirá obtener la medida P_D de pobreza, a la que se llega imponiendo un axioma alternativo de normalización análogo al anteriormente recogido .

Hemos visto que la medida P_D de pobreza definida como producto de H y la esperanza de gaps relativos podía ser expresada en función de la desigualdad colectiva de los pobres.

Según la expresión ya deducida de W_D aplicada a la población de pobres obtendremos en nuestro caso:

$$x_E^P = 2\mu_p - (\mu_p^2/q) \Sigma_i (1/x_i)$$

La medida de desigualdad colectiva para los pobres vendrá dada pues por la expresión :

$$D_p = (\mu_p - x_E^P) / \mu_p$$

En consecuencia, nuestro indicador de la pobreza P_D podrá ser expresado como:

$$P_D = [H / (1-I)] [((z-\mu_p)/z) + ((\mu_p-x_E^P)/\mu_p)]$$

donde $(z-\mu_p)/z$ representa el gap **normalizado de la renta media** de los pobres, y $(\mu_p-x_E^P)/\mu_p$ es la **diferencia relativa entre renta media y renta equivalente** para la población de pobres (se interpreta como el ahorro que sería posible en la renta gracias a la equidistribución entre pobres).

3.-GANANCIA DE IGUALDAD Y VARIACION DE POBREZA

El estudio de la evolución de la desigualdad y la pobreza hace necesario introducir indicadores de la variación de ambos fenómenos.

Estas medidas -introducidas en .López, A.J. y C. Caso (1989)- podrán ser utilizadas como criterios de evaluación de la eficacia de distintas políticas redistributivas, y también como indicadores de la evolución temporal de la equidad distributiva.

3.1- GANANCIA DE IGUALDAD

Para aproximar la evolución de la desigualdad es posible introducir indicadores de su variación, tanto a nivel individual como colectivo.

Considerando dos situaciones distintas, representadas por los vectores X^0 y X^t, denominamos índice de ganancia de igualdad individual que denotamos por gi a la función:

$$g : R^N{}_{+}xR^N{}_{+} \longrightarrow R$$

$$(i, X^0, X^t) \longrightarrow g(i, X^0, X^t) = (\mu^0/x_i^0) - (\mu^t/x_i^t)$$

Su interpretación es inmediata, ya que valores positivos de g van asociados a mejoras en la posición relativa que el individuo i ocupa en la población.

A nivel global será posible introducir una medida análoga, de ganancia de igualdad colectiva:

$$G : R^N{}_{+}xR^N{}_{+} \longrightarrow R$$

$$(X^0, X^t) \longrightarrow G(X^0, X^t) = D^0 - D^t$$

-que cuando es positiva indica evolución de la desigualdad en dirección a la equidad y viceversa en el caso negativo.

Las propiedades vistas para d y D se trasladan a las medidas de ganancia que resultan también adecuadas. En cuanto a la interpretación gráfica, considerando una situación inicial dada por la curva, el paso a una nueva distribución conllevaría ganancia de igualdad representada por el área comprendida entre ambas curvas de desigualdad.

La relación entre g y G puede ser estudiada en diversas situaciones. Así, cuando los sistemas de probabilidad son los mismos, la relación será inmediata, mientras que si los sistemas probabilísticos han variado introduciremos probabilidades conjuntas p_{ij}.

Por último, si se han producido variaciones en el tamaño poblacional, será necesario introducir un vector ficticio que mantenga los valores reales de renta media y desigualdad colectiva. Una vez obtenidas las rentas imputadas y compensatoria, el vector X quedará determinado, lo cual hace posible obtener el valor de g y por tanto el de G.

3.2.- MEDIDA V DE VARIACION DE LA POBREZA

El interés de comparar los niveles de pobreza asignados a una población en distintos períodos de tiempo es indudable dada la necesidad de llevar a cabo análisis evolutivos de este problema.

Para emprender este tipo de estudios tomaremos una situación como referencia (X^0) y definiremos a partir de ella la variación de pobreza experimentada en la población al pasar a una nueva situación X^t.

Denominamos **Variación de pobreza** desde el período 0 hasta cualquier otro t a la diferencia entre los valores del índice de pobreza P_D correspondientes a ambos períodos.

Tomada la diferencia de este modo ($V_{0t} = P_D^0 - P_D^t$) se tiene que valores positivos de V representan "pérdidas de pobreza" y por tanto evolución favorable de la situación, y viceversa para valores negativos de V.

El cálculo de esta variación de pobreza se llevará a cabo según diferentes expresiones, correspondientes a distintos supuestos sobre la población analizada.

Así, si los dos períodos en que estudiamos la pobreza no están muy alejados, parece lógico considerar que el tamaño poblacional no ha variado. Supondremos asimismo que la línea de pobreza se mantiene situada al mismo nivel z en ambos períodos.

En esta situación, la variación de pobreza vendrá dada por expresiones diferentes según haya o no variado el número de pobres de la población.

Con número de pobres fijo, tenemos

$$V = (z/N) \sum_{i=1}^{q} (1/x_i^0) - (1/x_i^t)$$

que podríamos escribir en función de las medidas de desigualdad entre los pobres del siguiente modo:

$$V = H.z\ [(1/\mu_p^0)(D_p^0+1) - (1/\mu_p^t)(D_p^t+1)]$$

donde μ_p^0, D_p^0, μ_p^t, D_p^t son, respectivamente, las medias y las desigualdades colectivas de la población de pobres en los periodos base y actual.

Parece realista tener en cuenta que, aunque z siga fijado en el mismo nivel, los cambios operados en la población harán posiblemente variar el número de individuos considerados pobres. En este caso tendríamos

$$V = (1/N)\ [(\sum_1^{q0} (z/x_i^0) - 1) - (\sum_1^{qt}(z/x_i^t) - 1)]$$

Para poder expresar esta medida en función de las ganancias de igualdad entre pobres acudiremos al concepto de **distribución truncada de pobres.** Si suponemos $q_t > q_0$, la distribución truncada asociada a la inicial (que denotaremos) vendrá dada por:

$$x_i^{0*} = x_i^0 \quad \text{si} \quad i \leq q_0$$

$$x_i^{0*} = z \quad \text{si} \quad q_0 < i \leq q_t$$

con lo cual la variación será:

$$V = (z/N) \sum_1^{qt} (1/x_i^{0*}) - (1/x_i^t)$$

que puede ser también expresada como:

$$V = H_t.z\ [(1/\mu_p^{0*})(D_p^{0*}+1) - (1/\mu_p^t)(D_p^{t*}+1)]$$

El umbral fijado para definir la población de pobres puede verse alterado en el tiempo como consecuencia de distintos cambios (nivel de precios, políticas redistributivas, ...). En este caso diferenciaremos z_0 de z_t, y la variación de pobreza será calculada mediante la expresión:

$$V = H_t[(1/1-I_o)(D_p^{o*}+1) - (1/1-I_t)(D_p^{t}+1)]$$

lo cual nos permitirá garantizar una variación favorable de la pobrezacuando la ganancia de igualdad sea capaz de compensar el incremento del gap medio normalizado, esto es: $V > 0 \iff G_p^*(1-I_o^*) > \Delta I(1+D_p^{o*})$

Una generalización al caso en que el tamaño poblacional varíe nos conducirá a considerar valores $N_o \neq N_t$, con lo cual la expresión de la variación de pobreza aumenta en complejidad:

$$V = \Delta H + [H_o(D_p^{o}+1) / (1-I_o)] - [H_t(D_p^{t}+1) / (1-I_t)]$$

siendo $\Delta H = (q_t/N_t) - (q_o/N_o)$ la variación en la proporción de pobres.

El resultado final de la medida V dependerá ahora de tres factores: **evolución de la proporción de pobres, variación del gap medio y ganancia de igualdad entre pobres.**

Como estos tres componentes pueden actuar en distintas direcciones, la variación de pobreza V resultará de la síntesis de todos ellos. El cálculo de las variaciones de pobreza a través de sus componentes en las diferentes expresiones aquí recogidas nos proporcionará una ganancia informativa, posibilitando análisis causales de la evolución de la pobreza.

4.-APLICACIONES EMPIRICAS

El comportamiento satisfactorio de las medidas que proponemos nos ha llevado a implementar dichos indicadores, cuantificando a través de ellos desequilibrios distributivos en Asturias y España. Algunos de estos estudios han sido ya elaborados y otros son objetos de proyectos actuales.

Así, a nivel autonómico, hemos llevado a cabo una cuantificación de la desigualdad espacial de la renta entre municipios asturianos. La inexistencia de información sobre rentas a nivel espacial inferior al municipal nos ha llevado a utilizar como criterios comoplementarios la división de Asturias en zonas (occidental, centro y oriental) y comarcas (basadas en el "Estudio Socioeconómico para la Autonomía Regional" llevado a cabo por el Principado). Dicho estudio, recogido en Pérez R. y A.J. López (1990) incluye la cuantificación de desigualdad espacial para distintos tipos de la variable renta: Renta Municipal, Personal, Familiar Disponible, y Salarial.

En el mismo trabajo se incluye una aproximación a la ganancia de igualdad asociada a las inversiones contempladas en los Presupuestos del Principado, que permite evaluar hasta qué punto dichas inversiones tienen-al menos teóricamente- carácter redistributivo.

Por lo que se refiere a la pobreza, tras la aparición recientemente del estudio de EDIS y Caritas (1991), tenemos la intención de aplicar la medida PD a la realidad asturiana, comparando los resultados con las conclusiones derivadas de trabajos anteriores.

A nivel nacional, la cuantificación de la desigualdad espacial por provincias y Comunidades Autónomas, ha sido llevada a cabo por Pérez, R.M. y R. Pérez (1988) con base en la EPF del año 1981.

La información contenida en dicha encuesta del INE permite llevar a cabo un estudio de la desigualdad según distintos criterios. En concreto, un cuantificación de la desigualdad según la división que el INE efectúa de los hogares en 13 categorías socioeconómicas puede verse en López, A.J. (1991), donde también se aproxima la ganancia de igualdad entre las encuestas de los años 1974 y 1981.

Los resultados de estos trabajos, en los que la medida utilizada es el índice de desigualdad colectiva, resultan consistentes con los que -utilizando otros indicadores- obtienen Ruiz-Castillo (1986a), Bosch et al.(1989) entre otros.

El trabajo anterior incluye también la aproximación del nivel de pobreza en España, que hemos llevado a cabo según los criterios socioeconómico y espacial, utilizando la medida P_D y la información de las EPF correspondientes a los años 1974 y 1981.

Dado que los análisis anteriores toman como variable la renta de los hogares, que consideramos es el indicador más adecuado desde el punto de vista conceptual, hemos considerado interesante analizar hasta qué punto los resultados diferirían al utilizar como indicador el gasto. Este estudio figura, bajo el criterio socioeconómico, en López, A.J.

y R. Pérez (1991) y un análisis similar, desde el punto de vista espacial se encuentra en fase de realización.

Entre nuestros proyectos actuales se encuentra también un estudio sobre la variación de la pobreza en Asturias y nuevos estudios comparativos, donde-tanto a nivel nacional como autonómico- se evalúe la eficacia redistributiva asociada a distintas alternativas.

Por último, es nuestra intención, cuando dispongamos de la información desagregada de la nueva EPF del INE, llevar a cabo nuevas estimaciones de desigualdad y pobreza, en las que pretendemos llevar a cabo estudios causales de ambos fenómenos, y cuantificar no sólo desequilibrios entre hogares sino también entre individuos.

BIBLIOGRAFIA

ALCAIDE, A. y J. ALCAIDE (1983): "Distribución de la renta española en 1980". **Hacienda Pública Española**, 85. 485-509.

ALCAIDE, J. (1989): "La España desigual". **Revista de Economía**, 1. 76-79.

ATKINSON, A.B. (1970): "On the Measurement of Inequality". **Journal of Economic Theory**, 2. 244-263.

ATKINSON, A.B. (1980): **Wealth, Income and Inequality**. Oxford University Press.

ATKINSON, A. B. (1981): **La Economía de la desigualdad**. Editorial Crítica, Barcelona.

ATKINSON, A.B. (1987): "On the Measurement of Poverty". **Econometrica**, 55 (4). 749-764.

BASMANN, R.L. and D.J.SLOTTJE (1987): "A New Index of Income Inequality". **Economics Letters**, 24. 385-389.

BASU, K. (1985): "Poverty Measurement: A decomposition of the normalization axiom". **Econometrica**, 53 (6). 1439-1443.

BLACKBURN, M.L. (1989): "Poverty Measurement: An index related to a Theil Measure of Inequality". **Journal of Business and Economic Statistics**, 7 (4). 475-481.

BLACKORBY, C. and D. DONALDSON (1978): "Measures of relative equality and their meaning in terms of Social Welfare". **Journal of Economic Theory**, 18. 59-80.

BLACKORBY, C. and D. DONALDSON (1980): "Ethical Indices for the measurement of poverty". **Econometrica**, 48. 1053-1060.

BLACKORBY, C. and D. DONALDSON (1984): "Ethically significant ordinal indexes of relative inequality". **Advances in Econometrics**, 3. 131-148.

BLACKORBY, C. and D. DONALDSON (1989): "Adult equivalence scales, interpersonal comparisons of well-being and applied welfare economics". **Discussion Paper N. 89-24**. University of British Columbia, Vancouver (Canada).

BLACKORBY, C., DONALDSON, D. and M. AUESPERG (1981): "A new procedure for the measurement of inequality within and among population subgroups". **Canadian Journal of Economics**, 14 (4). 665-685.

BOSCH, A.; ESCRIBANO, C. e I. SANCHEZ (1989): "Evolución de la desigualdad y la pobreza en España 1073-74 y 1980-81". I.N.E.- Instituto Universitario Ortega y Gasset.

BOURGUIGNON, F. (1979): "Decomposable Income Inequality measures". **Econometrica**, 47 (4). 901-920.

BRAULKE, M. (1988): "How to retrieve the Lorenz curve from sparse data". En: **Measurement in Economics** (Ed. by W. Eichhorn). Physica- Verlag, Heidelberg. 373-382.

BüRK, R. and W. GEHRIG (1978): "Indices of Income inequality and societal income. An axiomatic approach". En: **Theory and Applications of Economic Indices**.

(Ed. By W. Eichhorn et al.).Physica- Verlag, Würzburg. 309-356.

CASAS, J.M. y J.J. NUÑEZ (1989): "Aproximación axiomática a los índices de desigualdad y pobreza". **Actas de la 2ª Reunión ASEPELT.** 31-42.

CASO, C. (1988): "Inferencias sobre medidas de información en el muestreo estratificado". **Tesis Doctoral.** Universidad de Oviedo.

CASO, C.; LOPEZ, A.J. y R. PEREZ (1987): "La cuantificación de la incertidumbre y algunas aplicaciones a la economía". **Actas del Encuentro sobre la matemática aplicada a la Empresa.** Universidad de Zaragoza. 565-580.

CHAKRAVARTY, S.R.(1983a): "Ethically flexible measures of poverty". **Canadian Journal of Economics**, 16. 74-85.

CHAKRAVARTY, S.R.(1983b): "A New Index of Poverty". **Mathematical Social Sciences**, 6. 307-313.

CHAKRAVARTY, S.R.(1990): **Ethical Social Index Numbers.** Springer-Verlag, Berlin.

CLARK, S., HEMMING, R. and D. ULPH (1981): "On Indices for the Measurement of Poverty". **The Economic Journal**, 91. 515-526.

COWELL, EA. (1980): "On the structure of additive inequality measures". **Review of Economic Studies**, 47. 521-531.

COWELL, F.A. and K. KUGA (1981a): "Inequality Measurement: an Axiomatic Approach". **European Economic Review**, 15. 287-305.

COWELL, F.A. and K. KUGA (1981b): "Additivity and the Entropy Concept: an Axiomatic Approach to Inequality Measurement". **Journal of Economic Theory**, 25. 131-143.

DAGUM, C. (1980): "Inequality measures between income distributions with applications". **Econometrica**, 48 (7). 1791-1803.

DAGUM, C. (1990): "On the relationship between Income Inequality measures and Social Welfare Functions". **Journal of Econometrics**, 43. 91-102.

DALTON, H. (1920): "The Measurement of the inequality of incomes". **Economic Journal**, 30. 348-361.

DASGUPTA, P., SEN, A. and D. STARRET (1973): "Notes on the measurement of inequality". **Journal of Economic Theory**, 6. 180-187.

DELGADO, M. (1987): "Análisis cuantitativo de la distribución de renta familiar disponible de las CC.AA. 1973-1981". **Estudios Regionales**, 17. 41-70.

DONALDSON, D. and J.A. WEYMARK (1983): "Ethically flexible indices for income distributions in the continuum". **Journal of Economic Theory**, 29. 353-358.

DONALDSON, D. and J.A. WEYMARK (1986): "Properties of fixed population Poverty Indices". **International Economic Review**, 27. 667-688.

DUNCAN, G. (1990): "La dinámica de la pobreza". **I.C.E.**, 686. 23-47.

EBERT, U. (1987): "Size and distribution of incomes as determinants of Social Welfare". **Journal of Economic Theory**, 41. 23-33.

EBERT, U. (1988): "On the decomposition of inequality: partitions into non-overlapping subgroups". En: **Measurement in Economics** (Ed. by W. Eichhorn). Physica-Verlag, Heidelberg. 399-412.

EDIS-CARITAS OVIEDO (1991): Realidad social y pobreza en Asturias. Ed. Popular, s.a.

EICHHORN, W. and W. GEHRIG (1980): "Measurement of Inequality in Economics".

Discussion Paper, **141**. Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Resarch, Universität Karlsruhe.

ESCRIBANO, C. (1990): "Evolución de la pobreza y la desigualdad en España: 1973-1987". **I.C.E., 686**. 81-108.

FIELDS, G.S. and J.C.H. FEI (1978): "On Inequality comparisons". **Econometrica, 46 (2)**. 303-316.

FLIK, R. and B. VAN PRAAG (1990): "Definiciones de límites subjetivos de pobreza". **I.C.E., 686**. 9-22.

FOSTER, J.E. (1984): "On economic poverty: a survey of aggregate measures". **Advances in Econometrics, 3**. 215-251.

FOSTER, J.E. and A.F SHORROCKS (1988): "Inequality and Poverty orderings". **European Economic Review, 32**. 654-662.

FOSTER, J.E., GREER, J. and E. THORBERCKE (1984): "A class of decomposable poverty measures". **Econometrica, 52 (3)**. 761-767.

GARCIA ROCHA, A. (1986): **La Desigualdad Económica**. Ed. El Colegio de México, México.

GIL, M.A., PEREZ, R. and P GIL (1989): "A family of measures of uncertainty involving utilities: definition, properties, applications and statistical inferences". **Metrika, 36**. 129-147.

HAGENAARS, A.J.M. (1986): **The perception of poverty**. North- Holland, Netherland.

HAGENAARS, A.J.M. and B.M.S. VAN PRAAG (1985): "A synthesis of poverty line definitions". **Review of Income and Wealth, 31**. 139-153.

HAMADA, K and N.TAKAYAMA (1977): "Censored Income Distributions and The Measurement of Poverty". **Bulletin of the I.S.I., 47 (1)**. 617-632.

JORGENSON, D.W. and D. SLESNICK (1990): "Inequality and the standard of living". **Journal of Econometrics, 43**. 103-120

KAKWANI, N.C. (1980): "On a class of Poverty measures". **Econometrica, 48 (2)**. 437-446.

KAKWANI, N.C. (1984a): "Welfare ranking of income distributions". **Advances in Econometrics, 3**. 191-214.

KAKWANI, N.C. (1984b): "Issues in measuring Poverty". **Advances in Econometrics, 3**. 253-282.

KOLM, S.C. (1985): "Desigualdades desiguales (I y II)". **Hacienda Pública Española, 95**. 318-349.

KONDOR, Y. (1975): "Value judgements implied by the use of various measures of income inequality". **Review of Income and Wealth, 21**. 309-321.

KUNDU, A. and T.E. SMITH (1983): "An impossibility theorem on Poverty Indices". **International Economic Review, 24 (2)**. 423-434.

LOPEZ, A.J. y C. CASO (1989): "Estudio analítico sobre la ganancia de igualdad". Actas de **las XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas**, 897-901.

LOPEZ, A. (1991): "Desigualdad de renta y Pobreza: una aproximación conceptual y cuantitativa". **Tesis Doctoral**. Universidad de Oviedo.

LOPEZ, A. y R. PEREZ (1990): "Individual and Collective Inequality: A conceptual approach". (Pendiente de publicación).

LOPEZ, A.J. y R. PEREZ (1991): "Medida P_D de Pobreza. una aplicación". V **Reunión de ASEPELT España**.

MAASOUMI, E. (1986): "The measurement and decomposition of Multi-dimensional Inequality". **Econometrica**, 54. 991-997.

MECO (1988): "Indice de orden -1 para distribuciones continuas de renta. Aplicación a la distribución de Pareto". **XVII Reunión Nacional de la SEIO**. Benidorm.

MECO (1990): "Medidas de desigualdad: un estudio analítico". **Documento de Trabajo, 013/1990**. Facultad de CC. Económicas. Universidad de Oviedo.

PEREZ, R. (1985): "Estimación de la incertidumbre, la incertidumbre útil y la inquietud cuadráticas en poblaciones finitas: una aplicación a las medidas de desigualdad". **Tesis Doctoral**. Universidad de Oviedo.

PEREZ, R.; CASO, C. and M.A. GIL (1986): "Unbiased estimation of income inequality". **Statistische Hefte**, 27. 227-237.

PEREZ, R. y A.J. LOPEZ (1990): "Algunas consideraciones sobre la cuantificación de la desigualdad de renta. Una aproximación al caso de Asturias". **Actas II Congreso Asturiano de Sociología**. Asturias.

PEREZ, R.M. y R. PEREZ (1988): "Un análisis cuantitativo de la distribución de renta en España. I- Distribución espacial". **(Pendiente de Publicación)**.

PEREZ, R.M. y R. PEREZ (1988): "Un análisis cuantitativo de la distribución de renta en España. II- Distribución sectorial". **(Pendiente de Publicación)**.

RIO, M.J. y R. PEREZ (1985): "Una caracterización alternativa de la inquietud de orden y su interpretación para las medidas de desigualdad". **Actas de la XV Reunión Nacional de Estadística e Investigación Operativa**. 649-656.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986a): "La medición de la pobreza y la desigualdad en España 1980-1981". **Cursos de Estudios Superiores José Ortega y Gasset**. Oviedo.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986b): "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad". **Hacienda Pública Española, 101**. 17-31.

SARPELLON, G. (1990): "La pobreza en Italia". **I.C.E., 686**. 109-124.

SEN, A. (1970): **Elección colectiva y Bienestar social**. Alianza Universidad.

SEN, A. (1976): "Poverty: an ordinal approach to measurement". **Econometrica, 44** (2). 219-231.

SEN, A. (1979a): **Sobre la desigualdad económica**. Ed. Crítica, Barcelona.

SEN, A. (1979b): "Issues in the Measurement of Poverty". **Scandinavian Journal of Economics, 81**. 285-307.

SEN, A. (1983): "Poor, relatively speaking". **Oxford Economic Papers**, 35. 153-169.

SHESHINSKI, E. and Y. WEISS (1982): "Inequality within and between families". **Journal of Political Economy, 90 (1)**. 105-127.

SHORROCKS, A.F (1980): "The class of additively decomposable inequality measures". **Econometrica**, 48 (3). 613-625.SHORROCKS, A.F (1982a): "Inequality decomposition by factor components". **Econometrica, 50 (1)**. 193-211.

SHORROCKS, A.F (1984): "Inequality decomposition by population subgroups". **Econometrica**, 52 (6). 1369-1385.SHORROCKS, A.F (1988): "Aggregation issues in Inequality Measurement". En: **Measurement in Economics**. (Ed. By W. Eichhorn). Physica-Verlag, Heidelberg. 429-451.

SLOTTJE, D.J. (1990): "Using grouped data for constructing inequality indices. Parametric versus non-parametric methods". **Economics Letters**, 32. 193-197.

TAKAYAMA, N. (1979): "Poverty, income inequality and their measures: Professor Sen's axiomatic approach reconsidered". **Econometrica, 47** (3). 747-759.

THEIL, H. (1979): "The Measurement of Inequality by components of income". **Economics Letters**, 2. 197-199.

THON, D. (1979): "On measuring Poverty". **The Review of Income and Wealth,** 25. 429-440.

THON, D. (1981): "Income inequality and poverty: some problems". **The Review of Income and Wealth,** 27. 207-210.

THON, D. (1983): "A note on a troublesome axiom for poverty indices". **The Economic Journal**, 93. 199-200.

URIEL, E. (1974a): "Comparación entre diversas medidas de desigualdad: su aplicación a la encuesta de diferencias relativas de renta de 1972". **Estadística Española,** 64 y 65. 39-69.

URIEL, E. (1974b): "La teoría de la información y la medición de la distribución de la renta: aplicación a la distribución provincial de la renta en España". **Anales de Economía**, 5. 5-59.

VAN PRAAG, B.; GOEDHART, T. and A. KAPTEYN (1980): "The poverty line: a pilot survey in Europe". **The Review of Economics and Statistics**, 62. 461-465.

YITZHAKI, S. (1982): "Relative deprivation and economic welfare". **European Economic Review**, 17. 99-113.

ZAGIER, D. (1983a): "On the decomposability of the Gini coefficient and other indices of inequality". **Discussion Paper**, 108. Institut für Gessellschafts und Wirtschaftswissenschaften, Universität Bonn.

ZUBIRI, I. (1985): "Una introducción al problema de la medición de la desigualdad". **Hacienda Pública Española**, 95. 291-317.

Doc. 001/1988

JUAN A. VAZQUEZ GARCIA.- *Las intervenciones estatales en la minería del carbón.*

Doc. 002/1988

CARLOS MONASTERIO ESCUDERO.- *Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.*

Doc. 003/1988

ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA.- *Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.*

Doc. 004/1988

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- *Una propuesta para la integración multijurisdiccional.*

Doc. 005/1989

LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO.- *La modernización del sector agrario en la provincia de León.*

Doc. 006/1989

JOSE MANUEL PRADO LORENZO.- *El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.*

Doc. 007/1989

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- *El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).*

Doc. 008/1989

FELIX LOBO ALEU.- *El gasto público en productos industriales para la salud.*

Doc. 009/1989

FELIX LOBO ALEU.- *La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.*

Doc. 010/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.- *Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.*

Doc. 011/1990

ANTONIO APARICIO PEREZ.- *Infracciones y sanciones en materia tributaria.*

Doc. 012/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA.- *Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.*

Doc. 013/1990

EQUIPO MECO.- *Medidas de desigualdad: un estudio analítico*

Doc. 014/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- *Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.*

Doc. 015/1990

ANTONIO MARTINEZ ARIAS.- *Auditoría de la información financiera.*

Doc. 016/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ.- *La población como variable endógena*

Doc. 017/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- *La redistribución local en los países de nuestro entorno.*

Doc. 018/1990

RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO.- *"Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.*

Doc. 019/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.- *La política de precios en los establecimientos detallistas.*

Doc. 020/1990

CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ.- *La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).*

Doc. 021/1990

JOQUIN LORENCES.- *Margen precio-coste variable medio y poder de monopolio.*

Doc. 022/1990

MANUEL LAFUENTE ROBLEDO; ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.- *El T.A.E. de las operaciones bancarias.*

Doc. 023/1990

ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.- *Amortización y coste de préstamos con hojas de cálculo.*

Doc. 024/1990

LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JEAN-MARC BUIGUES.- Un ejemplo de política municipal: precios y salarios en la ciudad de León (1613-1813).

Doc. 025/1990

MYRIAM GARCIA OLALLA.- Utilidad de la teorías de las opciones para la administración financiera de la empresa.

Doc. 026/1991

JOAQUIN GARCIA MURCIA.- Novedades de la legislación laboral (octubre 1990 - enero 1991)

Doc. 027/1991

CANDIDO PAÑEDA.- Agricultura familiar y mantenimiento del empleo: el caso de Asturias.

Doc. 028/1991

PILAR SAENZ DE JUBERA.- La fiscalidad de planes y fondos de pensiones.

Doc. 029/1991

ESTEBAN FERNANDEZ SANCHEZ.- La cooperación empresarial: concepto y tipología (*)

Doc. 030/1991

JOAQUIN LORENCES.- Características de la población parada en el mercado de trabajo asturiano.

Doc. 031/1991

JOAQUIN LORENCES.- Características de la población activa en Asturias.

Doc. 032/1991

CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.- Política económica regional

Doc. 033/1991

BENITO ARRUÑADA SANCHEZ.- La conversión coactiva de acciones comunes en acciones sin voto para lograr el control de las sociedades anónimas: De cómo la ingenuidad legal prefigura el fraude.

Doc. 034/1991

BENITO ARRUÑADA SANCHEZ.- Restricciones institucionales y posibilidades estratégicas.

Doc. 035/1991

NURIA BOSCH; JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- Seven Hypotheses About Public Chjoice and Local Spending. (A test for Spanish municipalities).

Doc. 036/1991

CARMEN FERNANDEZ CUERVO; LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ.- De una olvidada revisión crítica sobre algunas fuentes histórico-económicas: las ordenanzas de la gobernación de la cabrera.

Doc. 037/1991

ANA JESUS LOPEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.- Indicadores de desigualdad y pobreza. Nuevas alternativas.

Doc. 038/1991

JUAN A. VAZQUEZ GARCIA; MANUEL HERNANDEZ MUÑIZ.- La industria asturiana: ¿Podemos pasar la página del declive?.