DOC. 112/96

DRA.MARIA VICTORIA RODRIGUEZ URÍA;
D. MIGUEL A.LÓPEZ FERNÁNDEZ;
DÑA.BLANCA Mª PEREZ GLADISH.

APLICACIONES ECONÓMICAS DEL CONTROL ÓPTIMO.
EL PROBLEMA DE LA MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD INDIVIDUAL DEL CONSUMO. EL PROBLEMA DEL MANTENIMIENTO Y MOMENTO DE VENTA DE UNA MÁQUINA

*EL PROBLEMA DE LA MAXIMIZACION DE LA UTILIDAD INDIVIDUAL DEL CONSUMO.

*PROBLEMA DEL MANTENIMIENTO Y MOMENTO DE VENTA DE UNA MAQUINA.

APLICACIONES ECONÓMICAS DEL CONTROL OPTIMO.

Dra. Maria Victoria Rodríguez Uría
D. López Fernández, Miguel A.
Dña. Pérez Gladish, Blanca Mª

ÍNDICE:

1. LA TEORÍA DEL CONTROL

1.1 Introducción

El objetivo de la teoría del ***control óptimo*** en sentido amplio, es el estudio de los sistemas dinámicos reales, construyendo modelos matemáticos abstractos que, por una parte expliquen el sistema y, por otra, permitan regular la evolución del mismo mediante la adopción de decisiones adecuadas: se trata de intentar optimizar el comportamiento de un sistema, cuando ello sea posible, es decir, conseguir que un sistema funcione del modo "más conveniente"respecto a algún criterio previamente establecido..

El problema central de cualquier intento de optimización dinámica es "la búsqueda de un control que maximice o minimice un criterio representativo de la eficiencia del sistema"(Dreyfus, 1965 p. IX)

La solución de un problema de optimización dinámica debe extenderse sobre un período de tiempo, no se trata de determinar una sola magnitud óptima, sino una secuencia de acciones óptimas, una para cada pto. $t \in [0,T]$ -o bien para cada subperiodo dentro del planificado en tiempo discreto- Tal solución tendrá por tanto la forma de trayectoria óptima en el tiempo $\mathbf{y^*(t)}$ para cada variable de elección, detallando el mejor valor de dicha variable, para hoy, para mañana etc. hasta los sistemas reales construyendo modelos matemáticos abstractos que, por una parte expliquen el sistema y, por otra, permitan regular la evolución del mismo mediante la adopción de decisiones adecuadas, *decisiones óptimas.*

La resolución matemática de un problema de optimización dinámica permite elegir cursos o trayectorias temporales para ciertas variables llamadas *variables de control*, dentro de una clase dada que se denomina *conjunto de control.* La elección de estas trayectorias temporales para las variables de control supone, a través de una serie de ecuaciones diferenciales -*ecuaciones de movimiento*- cursos temporales para ciertas variables que describen el sistema, llamadas *variables de estado.* Las trayectorias o cursos temporales de las variables de control se eligen de modo que maximicen un funcional dado, que depende tanto de las variables de estado como de las de control, denominado *funcional objetivo.* Planteado de esta forma el problema se denomina ***problema de control.***

La formulación del problema general de control óptimo es:

$$Opt. \quad J = \int_{t_0}^{t_1} f(x,u,t)\, dt \; + F(x_1, t_1)$$

sujeto a:

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$
$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$$
$$\{u(t)\} \in U$$

donde: t es el tiempo, x =x(t) la variable de estado, u=u(t) la variable de control y f(x,u,t) el funcional objetivo.

En este documento de trabajo vamos a presentar dos problemas de dinámica económica resueltos en el marco general del control óptimo. En el primero de ellos utilizamos las técnicas propias del cálculo de variaciones y para el segundo las específicas de la teoría del control, por ello presentamos a continuación el soporte matemático que se utiliza en tales problemas.

1.2 Cálculo de variaciones y control óptimo

1.2.1 Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una de las tres posibles aproximaciones al problema general de optimización dinámica, cuya formulación es la siguiente:

$$\text{Máx. o Mín. } V[x] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$$

$$\text{s.t} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (t_0, t_1, x_0, x_1 \text{ dados}) \qquad (1)$$
$$x(t_1) = x_1$$

Este tipo de problema, con una función integral y una sola variable de estado,un sólo control $\dot{x}(t)$ con unos puntos inicial y terminal dados, y sin restricciones, es conocido como *problema fundamental del cálculo de variaciones.*

Para que este tipo de problemas tengan sentido es necesario que la función sea integrable. Asumiremos esta condición cada vez que escribamos una integral en la forma general (1). Además asumiremos que todas las funciones que aparecen en el problema son continuas y continuamente diferenciables. Asumir esto es necesario porque la metodología de trabajo del cálculo de variaciones es muy similar a la del clásico cálculo diferencial.; la principal diferencia es, que en vez de trabajar con el diferencial *dx* que transforma el valor de y = f(x), ahora trabajaremos con la "variación" de una curva entera x(t) que afecta al valor del funcional $V[t]$.

El problema del control, en el cálculo de variaciones, consiste en elegir un curso temporal para una variable de estado que une puntos inicial y terminal dados de modo que maximice el valor de la integral de una función dada de la variable de estado, la tasa instantánea de variación de la variable de estado, y del tiempo. Este tipo de problemas pueden considerarse un caso concreto del problema general de control, en el cual no existe ninguna relación de dependencia respecto de las condiciones finales, se trata por tanto de un problema de Lagrange; existe una sola variable de estado y una variable de control; la variable de control es simplemente la tasa de variación instantánea de la variable de estado, siendo la ecuación de movimiento:

$$\dot{x} = u$$

de modo que u se reemplaza por $\dot{x}$ en F(...); y la variable de control puede tomar cualquier valor de **E**.

Es decir el conjunto de controles factibles será:

$$\Omega = E.$$

La única restricción impuesta a la trayectoria de control es la de que sea una función continua a intervalos de tiempo. Cualquier trayectoria $\{y(t)\}$ que cumpla las condiciones de contorno de (1) y la condición de continuidad de que y(t) sea continua y las $\dot{y}$(t) sean funciones continuas a intervalos del tiempo, se denomina *admisible*, y el problema del cálculo de variaciones clásico consiste en elegir una trayectoria admisible que maximice la integral funcional objetivo.

TEOREMA DE EULER: Condición necesaria de optimalidad

*Problema general:

Sea J(x)= $\int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$ con x $\in C^1$ en $[t_0, t_1]$, J $\in C^2$, conocemos $x(t_0) = x_0$; $x(t_1) = x_1$ (problema de extremos fijos).

"Una condición necesaria para que x*(t) sea un óptimo del problema es que se verifique en el punto, la ecuación:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0$$

denominada de Euler-Lagrange o simplemente de Euler.donde:

$$f_x = \partial f / \partial x; \qquad f_{\dot{x}} = \partial f / \partial \dot{x}; \qquad \dot{x} = dx/dt.$$

*<u>Problemas de horizonte libre:</u>

Hay tres casos particulares de problemas de control en que no se especifican o bien el estado terminal, o bien el tiempo terminal, o bien ambos: *tanto el tiempo como el estado terminal son libres.* La solución,en este último caso será una *curva terminal*, el lugar geométrico de todos los puntos (T_i, Z_i) determinados por las combinaciones de tiempo y estado terminales que serían admisibles como solución.

Este tipo de problemas se conoce como problemas de control *de horizonte libre.* En este documento de trabajo, comenzaremos planteando un problema donde tanto el estado como el tiempo terminal son conocidos, para después resolverlo para el caso general en que estado y tiempo terminal son desconocidos.

$$\begin{aligned} & Opt. \quad \int_0^T f(x,\dot{x},t)dt \\ s.t \quad & x(0) = x_0 \\ & x(T) = x_T \\ & siendo\ x_T,\ T \quad libres. \end{aligned}$$

La condición necesaria o condición de transversalidad en estos problemas, en que el momento y el estado finales forman parte del problema, es la siguiente:

$$[f_{\dot{x}}]_{t=T} = 0,$$

que hace que la nueva expresión de la ecuación de Euler sea la siguiente:

$$[f - \dot{x}f_{\dot{x}}]_{t=T} = 0$$

OTRAS CONDICIONES NECESARIAS:

Hasta ahora hemos hablado de identificar posibles extremos, sin preocuparnos su carácter de máximo o de mínimo. Determinarlos exige estudiar las derivadas segundas o condición de segundo orden. Nos limitaremos al caso de problemas cuyas condiciones de convexidad las hacen fácilmente manipulables.

Nuestro primer contacto con condiciones de segundo orden será de *necesidad de Legendre* que se apoya en condiciones de convexidad local y tiene el gran mérito de ser extremadamente simple por cuanto que sólo envuelve la : $f_{\dot{x}\dot{x}}$.

Así como la ecuación de Euler es una condición necesaria análoga a las de primer orden en optimización estática, la condición de segundo orden de Legendre es del tipo de las condiciones necesarias de segundo orden en optimización clásica. La condición de Legendre será pues:

"Si x*(t) es un máximo local del problema, ello implica que en x*(t) se verifica la siguiente condición:

$$f_{\dot{x}\dot{x}}[x^*(t),\dot{x}^*(t),t] \leq 0 \forall t \in [t_0,t_1]$$

"Si x*(t) es un mínimo local del problema, ello implica que en x*(t) se verifica la siguiente condición:

$$f_{\dot{x}\dot{x}}[x^*(t),\dot{x}^*(t),t] \geq 0 \forall t \in [t_0,t_1]$$

1.2.2 Control óptimo

El estudio continuado en el tiempo de los problemas de cálculo de variaciones ha conducido al desarrollo de un método mucho más moderno: *la teoría del control óptimo*. En la teoría del control óptimo, el problema de optimización dinámica se formula con tres tipos de variables: además de la variable tiempo t y la variable de estado $x(t)$, se considera la variable de control $u(t)$. De hecho es esta última variable la que da nombre a la teoría del control óptimo y ocupa el centro de estudio en esta nueva aproximación a la optimización dinámica.

Enfocar la atención sobre la variable de control implica relegar la variable de estado a un segundo plano. Esto podrá ser aceptado únicamente si la decisión sobre una trayectoria de control $u(t)$ nos ayudará a, una vez dada una condición inicial para la variable de estado, determinar de manera directa una trayectoria para la variable de estado $x(t)$. Por esta razón un problema de control óptimo deberá contener una ecuación que relacione la variable de estado $x(t)$ con la variable de control, y que se denominará *ecuación de movimiento*:

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t),u(t),t]$$

indicándonos como en cualquier momento del tiempo, dado el valor de la variable de estado, la elección del planeador de la variable de control u será determinante del valor de la variable de estado a lo largo del tiempo. Una vez encontrada la trayectoria óptima de la variable de control *u(t)*, la ecuación de movimiento nos posibilita la construcción de la trayectoria óptima de la variable de estado *x(t)*.

El problema de control óptimo se reduce entonces a:

$$
\begin{aligned}
&Opt. \quad \int_{t_0}^{t_1} F[x(t),u(t),t]\,dt \\
&s.t: \\
&\dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t] \\
&x(t_0) = x_0 \\
&x(t_1), t_1 \quad libres
\end{aligned}
$$

Ahora la variable de control *u(t)* es el instrumento último de optimización. Este problema de control está por tanto íntimamente ligado al problema de cálculo de variaciones, permitiéndonos sin embargo resolver además de los problemas que podíamos solucionar mediante el cálculo de variaciones, otros que no tenían solución a través de dicho método. De hecho, el cálculo de variaciones no deja de ser un caso especial del control óptimo, en el que se sustituye $\dot{x}(t)$ en la integral, y se adopta la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = u(t)$ como ecuación de movimiento.

Principio del máximo

Sea el programa:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad J = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t),u(t),t]\,dt + S[x(t_1),t_1] \\
&s.a: \\
&\dot{x} = f(x,u,t) \\
&x(t_0) = x_0; \quad t_1, x(t_1) \quad libres \\
&u(t) \in \Omega(t) \equiv conjunto\ de\ controles\ admisibles
\end{aligned}
$$

Construimos la función hamiltoniana asociada, que contiene la restricción del problema:

$$
\begin{aligned}
&H(x,u,\lambda,t) = F(x,u,t) + \lambda f(x,u,t) \\
&siendo: \\
&x(t) \equiv \text{variable de estado} \\
&u(t) \equiv \text{variable de control}; \quad \Omega(t) \equiv \text{conjunto de control} \\
&\lambda(t) \equiv \text{variable de coestado}
\end{aligned}
$$

Teorema

La condición necesaria para que el control admisible u*(t) sea el óptimo que conduce el sistema de (x_0, t_0) al punto inespecífico $[x(t_1), t_1]$ es que:

a) $\lambda^*(t), x^*(t)$ *son solución del sistema*:

$$[a-1] \qquad \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

$$[a-2] \qquad \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

b) $H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \geq H(x^*, u, \lambda^*, t)$

I.e.: H es máximo respecto de $u(t)$ *[se admiten soluciones de frontera]*

c) *Se verifican todas las condiciones de frontera requeridas, en particular las de transversalidad.*

t_1 *desconocido,* $x(t_1)$ *libre*:

$$\lambda^*(t_1) = \frac{dS}{dx}[x^*(t)]$$

Condiciones suficientes

Condiciones suficientes de Mangasarian

$$Max \quad J = \int_0^T F(x,u,t)\,dt$$

$$s.a:$$

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

$$x(0) = x_0,$$

$$x(T) = x_T$$

$$x(T), T \text{ ambos desconocidos}$$

Las condiciones necesarias de máximo del programa son condiciones suficientes si:

I) F y f son cóncavas en x y u.

II) Si f no es lineal en x o en u en el máximo $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

Condición suficiente de Arrow

Hamiltoniano derivado:

$$H^0(x, \lambda, t) = H(x, u^*, \lambda, t) = F(x, u^*, t) + \lambda f(x, u^*, t)$$

Las condiciones necesarias de máximo son suficientes si $H^0(x, \lambda, t)$ es función cóncava en x $\forall t \in [0, T]$.

2. APLICACIONES ECONÓMICAS

2.1 Una aplicación económica del cálculo de variaciones: maximización de la utilidad individual de consumo

Se quiere conocer la tasa de consumo de una persona en cada instante temporal que maximizará su utilidad descontada a lo largo de un período de tiempo de longitud conocido. Se tiene que la utilidad del consumo en cada momento es una función cóncava creciente conocida.

El objetivo es

$$\begin{aligned}
&Max \quad \int_0^T e^{-rt} U[C(t)]\, dt \\
&s.a: \\
&iK(t) + v(t) = C(t) + \dot{K}(t) \\
&K(0) = K_0 \\
&K(T) = K_T
\end{aligned}$$

Es decir, el objetivo será maximizar la utilidad descontada a lo largo de un período de longitud conocido sujeto a una restricción de dinero con un capital inicial y final especificados. Se considera que la persona obtiene su ingreso corriente de su salario, que va a estar determinado exógenamente, y de las ganancias de intereses procedentes de la tenencia de activos de capital. El ingreso procedente de intereses y salarios se distribuye entre el consumo y la inversión. Por simplicidad, la persona puede pedir un préstamo, así como prestarlo a una tasa de interés **i**. El capital puede ser comprado o vendido a un precio unitario.

Siendo:

$$\begin{aligned}
&U[C(t)] \equiv \textit{Utilidad en el instante } t \\
&f = e^{-rt} U[C(t)] \equiv \textit{Utilidad descontada en el instante } t \\
&r \equiv \textit{Tasa de descuento} \\
&T \equiv \textit{Período de longitud temporal}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{C}(t) = \frac{dC}{dt} \equiv \textit{Tasa de consumo en cada instante temporal} \\
&v(t) \equiv \textit{Salario en el instante } t \\
&K(t) \equiv \textit{Activos de capital en el instante } t
\end{aligned}$$

$\dot{K}(t) = \frac{dK}{dt} \equiv$ *Inversión en el instante t*

$i \equiv$ *Tipo de interés del mercado*

$iK(t) \equiv$ *Intereses procedentes de la tenencia de activos de capital en el instante t*

$C(t) \equiv$ *Consumo en el instante t*

Deberemos tener en cuenta que:

La utilidad es una función cóncava creciente conocida. Significa que ante aumentos sucesivos en el nivel de consumo, la utilidad también aumenta, pero dichos aumentos cada vez serán menores. La función crece a tasas decrecientes.

La tasa de descuento proporciona información acerca del grado de preferencia entre consumo presente y consumo futuro. De igual modo, proporciona información acerca del nivel deseado de liquidez en un instante determinado. Se podría decir que es la tasa individual de impaciencia.

El salario se determina exógenamente.

Los activos de capital representan la variable de estado.

Utilizando la ecuación de la restricción de dinero para eliminar el consumo de la función que representa la utilidad descontada en cada instante, se obtiene un problema de cálculo de variaciones de una función que depende de la variable de estado K, es decir, de los activos de capital. La ecuación de Euler asociada es:

$$\frac{d\left[-e^{-rt}\,\dot{U}(C)\right]}{dt} = e^{-rt}\,\dot{U}(C)i$$

Demostración

Para calcular las derivardas. obsérvese que la relación de dependencia entre las variables:la utilidad del individuo dependerá del consumo que realice en cada momento, que a su vez será dependiente tanto de los activos de capital que posea , como de la inversión en ese momento.

Así podremos expresar la función de consumo de la siguiente forma:

$$C(t) = iK(t) + v(t) - \dot{K}(t)$$

* Sustituyendo en la funcion de utilidad descontada: $f = e^{-rt}U[C(t)] = e^{-rt}U\left[iK(t) + v(t) - \dot{K}(t)\right]$

* Derivando con respecto a K y a $\dot{K}$:

$$f_K = e^{-rt}\frac{dU}{dC}\frac{\partial C}{\partial K} = e^{-rt}\,\dot{U}(C)i$$

$$f_{\dot{K}} = e^{-rt}\frac{dU}{dC}\frac{\partial C}{\partial \dot{K}} = e^{-rt}\,\dot{U}(C)(-1) = -e^{-rt}\,\dot{U}(C)$$

Puesto que la ecuación de Euler es la siguiente:

$$f_K - \frac{d}{dt}f_{\dot{K}} = 0$$

tendremos que la condición necesaria de máximo la verifican los puntos que cumplen:

$$\frac{d\left[-e^{-rt}\,\dot{U}(C)\right]}{dt} = e^{-rt}\,\dot{U}(C)i$$

Para facilitar la interpretación, se integrará la ecuación de Euler sobre un pequeño intervalo temporal:

$$\int_t^{t+\Delta} \frac{d\left[-e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]\right]}{ds}\,ds = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]i\,ds$$

$$\left[-e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]_t^{t+\Delta}\right]_t^{t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]i\,ds$$

$$-e^{-r(t+\Delta)}\,\dot{U}[C(t+\Delta)] + e^{-rt}\,\dot{U}[C(t)] = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]i\,ds$$

Reordenando términos:

$$e^{-rt}\,\dot{U}[C(t)] = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\,\dot{U}[C(s)]i\,ds + e^{-r(t+\Delta)}\,\dot{U}[C(t+\Delta)]$$

La interpretación de la expresión anterior es la siguiente:la utilidad descontada marginal del consumo en el instante t (el primer miembro de la ecuación) debe ser igual a la utilidad descontada marginal que se obtiene retrasando ese consumo a $t+\Delta$ segundo miembro de la ecuación).

Si el consumo se retrasa, una unidad monetaria produce ingresos a una tasa i que puede convertirse en consumo. El primer término del primer miembro de la ecuación, es la utilidad incremental descontada alcanzada durante el período de retraso. Finalmente, al término del período de retraso, la unidad monetaria en sí misma es consumida, produciendo utilidad incremental de $[C(t+\Delta)]$. El segundo miembro de la ecuación es la utilidad marginal descontada.

Recuperando la expresión de la ecuación de Euler asociada:

$$\frac{d\left[-e^{-rt}\dot{U}[C(t)]\right]}{dt} = e^{-rt}\dot{U}[C(t)]i$$

Derivando de nuevo respecto a t:

$$\frac{d\left[-e^{-rt}\dot{U}(C)\right]}{dt} = re^{-rt}\dot{U}(C) - e^{-rt}\frac{d\dot{U}}{dC}\frac{dC}{dt} = re^{-rt}\dot{U} - e^{-rt}\ddot{U}\dot{C}$$

Agrupando terminos:

$$re^{-rt}\dot{U} - e^{-rt}\ddot{U}\dot{C} = e^{-rt}\dot{U}i$$

$$e^{-rt}(r\dot{U} - \ddot{U}\dot{C}) = e^{-rt}\dot{U}i$$

$$-\ddot{U}\dot{C} = \dot{U}i - \dot{U}r = (i-r)\dot{U}$$

Finalmente obtenemos que:

$$\frac{-\ddot{U}\dot{C}}{\dot{U}} = i - r$$

De esta última expresión se desprende que la tasa proporcionada de cambio de la utilidad marginal es igual a la diferencia entre la tasa de ingresos sobre el capital invertido y la tasa de impaciencia.

Sabemos que $-\ddot{U}/\dot{U} > 0$ por hipótesis, la solución óptima está caracterizada por dC/dt >0 si y sólo si i > r.

La trayectoria de consumo óptimo asciende si la tasa de ganancias sobre el capital *i* excede la tasa individual de impaciencia *r*.

Un individuo relativamente paciente deja algún consumo corriente para permitir que el capital crezca de tal forma que pueda alcanzar una tasa de consumo más alta con posterioridad.

Reexpresando la ecuación anterior:

$$\dot{C} = -(i-r)\frac{\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)}$$

obtenemos una nueva expresión que nos proporciona la tasa óptima de consumo, caso de certidumbre sobre la duración de la vida. Veremos más tarde el caso general en que la duración de la vida del individuo es desconocida.

Si la forma funcional es especificada, se pueden obtener resultados más precisos.Así si consideramos como función de utilidad U(C) = Ln C, y suponemos que el salario en el tiempo t es cero, sisendo $0 \leq t \geq T$, y suponiendo que el individuo en el momento de su muerte no posee activos de capital, es decir K(T) = 0.

Entonces tendremos que:

$$\dot{U} = \frac{1}{C} \qquad\qquad \ddot{U} = -\frac{1}{C^2}$$

Adoptadas las anteriores especificaciones las expresiones generales quedarían:

$$\frac{-\ddot{U}\dot{C}}{\dot{U}} = i - r \;\rightarrow\; \frac{\dot{C}}{C} = i - r$$

Despejando $\dot{C}$ *y teniendo en cuenta que* $\dot{C} = \frac{dC}{dt}$:

$$\frac{dC}{dt} = (i-r)C$$

De donde obtenemos una ecuacion diferencial de variables separadas:

$$\frac{dC}{C} = (i-r)\,dt$$

Integrando: $\int \frac{dC}{C} = \int (i-r)\,dt$

Obtenemos como solucion general de la ecuacion diferencial:

$Ln\, C = (i-r)t + A \quad \rightarrow \quad C(t) = e^{(i-r)t} A$

Aplicando la condicion de contorno obtenemos la solucion particular:

$C(0) = constante \qquad C(t) = C(0)e^{(i-r)t}$

Se sabe que $iK(t) + v(t) = C(t) + \dot{K}(t)$, luego sustituyendo se tiene que:

$$\dot{K}(t) - iK(t) = -C(t) = -C(0)e^{(i-r)t}$$

Multiplicando por e^{-it}, integrando y utilizando las condiciones de contorno se llega a:

$$K(t) = e^{it} K_0 \left[1 - \frac{1-e^{-rt}}{1-e^{-rT}} \right]$$

luego la solución del problema planteado será la siguiente:

$$C(t) = rK_0 \frac{e^{(i-r)t}}{1-e^{-rT}}$$

Demostración

Tenemos que:

$$\dot{K}(t) - iK(t) = -C(t) = -C(0)e^{(i-r)t}$$

$$e^{-it}\left[\dot{K}(t) - iK(t) \right] = -C(0)e^{-rt}$$

Integrando ambos miembros:

$$\int e^{-it}\, \dot{K}(t)\, dt - i \int e^{-it} K(t)\, dt = -\, C(0) \int e^{-rt}\, dt$$

Resolvemos el primer miembro de la integral planteada por partes:

$$u = e^{-it} \quad \rightarrow \quad du = -ie^{-it}dt$$

$$dv = \dot{K}(t)dt \quad \rightarrow \quad v = \int \dot{K}(t)dt = K(t)$$

La integral del primer miembro sera igual:

$$e^{-it}K(t) + i\int e^{-it}K(t)dt$$

Resolvemos la integral del segundo miembro:

$$\int e^{-rt}dt = -\frac{1}{r}e^{-rt} + Cte.$$

Sustituyendo en la expresion inicial:

$$e^{-it}K(t) + i\int e^{-it}K(t)dt - i\int e^{-it}K(t)dt = \frac{C(0)}{r}e^{-rt} + Cte$$

Obtenemos que:

$$e^{-iT}K(T) = \frac{C(0)}{r}e^{-rT} + Cte$$

Aplicando la condición de contorno K(T) = 0:

$$Cte = -\frac{C(0)}{r}e^{-rT}$$

Volviendo a la expresión inicial:

$$e^{-it}K(t) = \frac{C(0)}{r}e^{-rt} - \frac{C(0)}{r}e^{-rT}$$

Despejando K(t):

$$K(t) = e^{it}\frac{C(0)}{r}\left[e^{-rt} - e^{-rT}\right]$$

Particularizando en el momento inicial:

$$K(0) = \frac{C(0)}{r}\left[1 - e^{-rT}\right]$$

Despejando el consumo en el momento inicial:

$$C(0) = \frac{rK_0}{1 - e^{-rT}}$$

Y sustituyendo en la expresión del inicio:

$$K(t) = e^{it}\frac{\frac{rK_0}{1-e^{-rT}}}{r}\left[e^{-rt} - e^{-rT}\right] \quad \textit{simplificando:} \qquad K(t) = e^{it}K_0\left[\frac{e^{-rt} - e^{-rT}}{1 - e^{-rT}}\right]$$

Obtenemos que:

$$1 - \frac{1 - e^{-rt}}{1 - e^{-rT}}\Bigg] = \frac{1 - e^{-rT} - 1 + e^{-rt}}{1 - e^{-rT}} = \frac{e^{-rt} - e^{-rT}}{1 - e^{-rT}}$$

Luego se ha demostrado que :

$$K(t) = e^{it} K_0 \left[1 - \frac{1 - e^{-rt}}{1 - e^{-rT}} \right]$$

Ahora, haciendo:

$$C(t) = C(0) e^{(i-r)t} \qquad\qquad C(t) = \frac{rK_0}{1 - e^{-rT}} e^{(i-r)t}$$

se demuestra la segunda ecuación, ya que :

$$C(t) = rK_0 \frac{e^{(i-r)t}}{1 - e^{-rT}}$$

GENERALIZACIÓN

Se supondrá ahora que la duración de la vida de la persona es desconocida de tal forma que se busca un plan de contingencia óptimo. Sea *F(t)* la probabilidad de fallecimiento en el instante t, $\dot{F}(t)$ la función de densidad asociada, y T una cota superior sobre la posible duración de la vida de la persona, de tal forma que F(T)=1 y

$$- F(t) = \int_t^T \dot{F}(s) ds$$

es la probabilidad de vivir al menos hasta t.[1]

Tendremos pues que:

$$- F(t) = \int_t^T \dot{F}(s)\, ds = 1 - \int_0^t \dot{F}(s)\, ds$$

ya que

$$\int_0^T \dot{F}(t)\, dt = \int_0^t \dot{F}(s)\, ds + \int_t^T \dot{F}(s)\, ds$$

$$F(T) - F(0) = \int_0^t \dot{F}(s)\, ds + \int_t^T \dot{F}(s)\, ds$$

$$= \int_0^t \dot{F}(s)\, ds + \int_t^T \dot{F}(s)\, ds$$

Luego

$$\int_t^T \dot{F}(s)\, ds = 1 - \int_0^t \dot{F}(s)\, ds = 1 - F(t)$$

La persona obtiene satisfacción no sólo del consumo *U(C)*, sino también de dejar herencia. Esto último se expresa a través de una función de utilidad del legado *W(K)* que

---

[1] Se va a suponer también que F(0)=0

es continuamente diferenciable, no negativa y creciente. La función *W(K)* difiere de la función de utilidad del consumo *U(C)*; depende de un stock mas que de un flujo y refleja el consumo permitido a los beneficiarios. Sea *a(t)* un término de descuento asociado con la utilidad del legado. Puede incrementar hasta algún t y descender después, reflejando la evolución de la persona de la importancia relativa de dejar un legado más grande en los años centrales de la vida cuando los hijos aún no son mayores, en comparación con los años anteriores en los que los hijos aún no han nacido o los últimos años cuando los hijos son ya independientes.

Si el individuo deja de vivir en el instante t, la utilidad total consistirá del flujo descontado (a una tasa r) de utilidad del consumo hasta t más la utilidad descontada (a un factor a(t)) del legado. Por tanto, el problema a resolver es:

$$Max \quad \int_0^T \dot{F}(t)\left[\int_0^t e^{-rs}U[C(s)]\,ds + a(t)W[K(t)]\right] dt$$

sujeta a la restricción de presupuesto,

$$C(t) = iK(t) + v(t) - \dot{K}(t)$$

y la condición de contorno

$$K(0) = K_0$$

Para expresar el problema en una forma más manejable, se integrará por partes la porción del objetivo que envuelve la integral doble Entonces el problema a resolver es equivalente entonces a:

$$\int_0^T \left\{ e^{-rt}U[C(t)][1-F(t)] + a(t)W[K(t)]\,\dot{F}(t) \right\} dt$$

Se tiene que demostrar que

$$\int_0^T \dot{F}(t)\left[\int_0^t e^{-rs}U[C(s)]\,ds\right] dt = \int_0^T e^{-rt}U[C(t)][1-F(t)]\,dt$$

__Demostración__

Sea la función:

$$\int_0^T \dot{F}(t)\left[\int_0^t e^{-rs}U[C(s)]\,ds\right]dt = \int_0^T e^{-rt}U[C(t)][1-F(t)]\,dt$$

$$u = \int e^{-rt}U[C(t)]\,dt \quad \to \quad du = e^{-rt}U[C(t)]\,dt$$

$$dv = \dot{F}(t)\,dt \quad \to \quad v = \int \dot{F}(t)\,dt = F(t)$$

$$\int_0^T \dot{F}(t)\left[\int_0^t e^{-rs}U[C(s)]\,ds\right]dt = [F(t)]_0^T \int_0^T e^{-rt}U[C(t)]\,dt - \int_0^T F(t)e^{-rt}U[C(t)]\,dt =$$

$$= [F(T)-F(0)]\int_0^T e^{-rt}U[C(t)]\,dt - \int_0^T F(t)e^{-rt}U[C(t)]\,dt = \int_0^T e^{-rt}U[C(t)]\,dt -$$

$$-\int_0^T F(t)e^{-rt}U[C(t)]\,dt = \int_0^T \left[e^{-rt}U[C(t)] - F(t)e^{-rt}U[C(t)]\right]dt = \int_0^T e^{-rt}U[C(t)][1-F(t)]\,dt$$

Esta forma alternativa puede ser interpretada como sigue. Si el individuo vive al menos hasta t (probabilidad (1-F(t))), entonces la utilidad del consumo está agregada. Si él muere en t (probabilidad $\dot{F}(t)$), entonces la utilidad del legado también se recibe.

La ecuación de Euler puede ser escrita como:

$$\dot{C}(t) = -(i-r)\frac{\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)} + m\frac{\dot{U}(C) - e^{rt}a\dot{W}(K)}{\ddot{U}(C)}$$

donde

$$m(t) \equiv \frac{\dot{F}(t)}{1-F(t)}$$

es la densidad de probabilidad condicional de morir en t dada la supervivencia hasta entonces.

Demostración

Sea la función:

$$f = \left\{e^{-rt}U[C(t)][1-F(t)] + a(t)W[K(t)]\dot{F}(t)\right\} =$$
$$= \left\{e^{-rt}U[iK(t)+v(t)-K(t)][1-F(t)] + a(t)W[K(t)]\dot{F}(t)\right\}$$

Derivando respecto a K y $\dot{K}$

* $f_k = e^{-rt}\,\dot{U}\,i[1-F(t)] + a(t)\dot{W}(K)\dot{F}(t)$
* $f_{\dot{k}} = -e^{-rt}\,\dot{U}[1-F(t)]$

y volviendo a derivar $f_{\dot{k}}$ respecto a t, tendremos que:

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{k}} = \frac{d}{dt}\left[-e^{-rt}\left[\dot{U}[1-F(t)]\right]\right] = re^{-rt}\left[\dot{U}[1-F(t)]\right] -$$

$$-e^{-rt}\left\{\ddot{U}\,\dot{C}[1-F(t)] - \dot{U}\,\dot{F}(t)\right\} = re^{-rt}\,\dot{U}[1-F(t)] - e^{-rt}\,\ddot{U}\,\dot{C}[1-F(t)] +$$

$$+ e^{-rt}\,\dot{U}\,\dot{F}(t)$$

Aplicando la ecuación de Euler:

$$f_K = \frac{d}{dt}f_{\dot{K}}$$

entonces sustituyendo correctamente se tiene que:

$$e^{-rt}\,\dot{U}\,i[1-F(t)] + a(t)\dot{W}(K)\dot{F}(t) = re^{-rt}\,\dot{U}[1-F(t)] - e^{-rt}\,\ddot{U}\,\dot{C}[1-F(t)] + e^{-rt}\,\dot{U}\,\dot{F}(t)$$

Si agrupamos debidamente:

Multiplicando por e^{rt} y dividiendo entre $[1-F(t)]$ ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$\dot{C}\ddot{U} = -i\dot{U} + r\dot{U} + \dot{U}\frac{\dot{F}(t)}{1-F(t)} - e^{rt}a(t)\dot{W}(K)\frac{\dot{F}(t)}{1-F(t)}$$

Por último, dividiendo ambos lados de la ecuación entre $\ddot{U}$ y ordenando correctamente:

$$\dot{C}(t) = -(i-r)\frac{\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)} + m\frac{\dot{U}(C) - e^{rt}a\dot{W}(K)}{\ddot{U}(C)}$$

siendo

$$m(t) \equiv \frac{\dot{F}(t)}{1-F(t)}$$

quedando al fin demostrado.

Comparando esta tasa de consumo con la obtenida anteriormente supuesta conocida la duración de la vida del individuo, se observa que la diferencia entre la tasa óptima de cambio del consumo en el caso de certidumbre con respecto al caso de incertidumbre viene reflejada en el segundo término de esta última ecuación. Más particularmente, en el caso de que el legado no sea valorado, es decir, a(t)=0, la ecuación se convierte en:

$$\dot{C}(t) = -(i-r-m)\frac{\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)}$$

expresión de la cual se observa que el efecto de la incertidumbre sobre la duración de la vida es el mismo que el que origina un incremento en la tasa de descuento r; es decir, como un incremento en la tasa de impaciencia. Específicamente, la incertidumbre sobre la duración de la vida eleva la tasa de descuento efectiva en cada t de r a

$$r + \frac{\dot{F}(t)}{1-F(t)} = r + m$$

Así uno descuenta tanto por impaciencia como por riesgo por fallecer. Todo esto se tiene también en el caso de que el legado sea valorado, esto es, en el caso de que a(t)>0.

Dado que T está fijado y K(T) es libre, la condición de transversalidad relevante será:

$$f_{\dot{k}}\Big]_{t=T} = -e^{-rT}\,\dot{U}[C(T)][1-F(T)] = 0$$

Pero dado que 1-F(T)=0 por hipótesis, no proporciona ninguna nueva información.

2.2 Una aplicación económica del control óptimo: Mantenimiento y reposición de maquinaria

Dynamic optimization (Kamien y Schwartz)

Una máquina en funcionamiento produce un ingreso constante R>0, descontando todos los costes excepto el de mantenimiento. Este flujo de ingresos finaliza cuando la máquina deja de funcionar o es vendida. Su duración es estocástica. El mantenimiento preventivo disminuye la probabilidad de fallo en cualquier instante. Una máquina averiada es improductiva. Si la máquina está todavía funcionando en el instante t, su valor de venta es $S(t)$. Se supone que $\dot{S}(t) \leq 0$ y que S(t)<R/r, cuando r es la tasa de descuento. Así, el valor residual será menor que el flujo de ingresos descontados que una duración infinita de la máquina produciría.

Se define $F(t)$ como la probabilidad de que la máquina falle en el instante t. La probabilidad de fallo en cualquier instante, dada la supervivencia en ese momento, depende del mantenimiento corriente $u(t)$ y de una tasa de fallo "natural" $h(t)$ que actúa en ausencia de mantenimiento y que se incrementa con la edad de la máquina.

Específicamente $F(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{F}(t) = [1 - u(t)]h(t)[1 - F(t)], \qquad F(0)=0,$$

donde $h(t)$ es una función conocida que satisface

$$h(t) \geq 0, \qquad \dot{h}(t) \geq 0.$$

Esto se traduce en que la densidad de probabilidad instantánea de fallo en t, dada la supervivencia en t, no depende de la historia de mantenimiento de la máquina, sino sólo del esfuerzo de mantenimiento corriente. (Desde luego la probabilidad de mantenimiento en t depende de la historia de mantenimiento).

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t [1 - u(s)]h(s)\, ds\right\}$$

La tasa de mantenimiento *u(t)* está acotada:

$$0 \leq u(t) \leq 1$$

Si se selecciona u=0, entonces la tasa de fallo $\dot{F}/(1-F)$ se supone que es su valor natural *h(t)*. Si u=1, el fallo será cero. El coste de mantenimiento es *M(u)h* donde *M(u)* es una función conocida que satisface

$$M(0) = 0, \qquad \dot{M}(u) > 0, \qquad \ddot{M}(u) > 0 \qquad para \qquad 0 \leq u \leq 1$$

El beneficio esperado actualizado de la máquina es:

$$\int_0^T e^{-rt}[R - M(u)h][1 - F(t)]\, dt + e^{-rT} S(T)[1 - F(T)]$$

Se tratará de determinar una política de mantenimiento *u* y un momento de venta *t* que maximicen lo anterior sujeto a

$$\dot{F}(t) = [1 - u(t)]h(t)[1 - F(t)]$$
$$F(0) = 0$$
$$0 \leq u(t) \leq 1$$

El control será *u*; el estado *F*. La función hamiltoniana será:

$$H^* = e^{-rt}[R - M(u)h](1 - F) + \lambda(1 - u)h(1 - F) + w_1 u + w_2(1 - u)$$

Aunque para facilitar las operaciones se tomará como referencia la siguiente:

$$H = [R - M(u)h](1 - F) + \lambda(1 - u)h(1 - F) + w_1 u + w_2(1 - u)$$

donde λ es el multiplicador de valor corriente asociado con

$$\dot{F}(t) = [1 - u(t)]h(t)[1 - F(t)]$$

Una política de mantenimiento óptima u^* debe maximizar H en cada momento t, $0 \le t \le T$, donde λ satisface

$$\dot{\lambda} = -H_F{}^* = r\lambda - H_F = r\lambda + R - M(u)h + \lambda(1-u)h \qquad (I)$$

Puesto que *F(T)* y *T* son elegidos óptimamente, hay que aplicar las condiciones de transversalidad apropiadas:

$$\zeta[S(T),T] = e^{-rT}S(T)[1-F(T)]$$

$$\lambda = \left[\frac{d\zeta}{dF}\right]_{t=T}; \qquad \lambda(T) = -S(T) \qquad (II)$$

$$H = -\left[\frac{d\zeta}{dt}\right]_{t=T} = \left[rS(T) - \dot{S}(T)\right][1-F(T)] \qquad (III)$$

Por otra parte,

$$H_u = -h(1-F)\left[\dot{M}(u) + \lambda\right] + w_1 - w_2 = 0$$
$$w_1 \ge 0, \quad w_2 \ge 0, \quad w_1 u = 0, \quad w_2(1-u) = 0$$

de tal forma que

si	$\dot{M}(u) + \lambda(t) > 0$,	entonces	u*(t)=0,	w_2=0
si	$\dot{M}(u) + \lambda(t) < 0$,	entonces	u*(t)=1,	w_1=0

en otro caso, se selecciona u*(t) que satisfaga

$$\dot{M}(u) + \lambda(t) = 0, \qquad w_1 = w_2 = 0$$

Puesto que no se ha especificado la expresión de *M* y *h*, sólo se podrá caracterizar cualitativamente la solución óptima.

Se define

$$Q(t) \equiv \dot{M}[u(t)] + \lambda(t)$$

Sobre un intervalo temporal en el cual $0 < u^* < 1$, se tiene Q(t)=0. Puesto que Q es constante, $\dot{Q}(t) = 0$.

Por tanto,

$$\dot{M} \rightarrow u \rightarrow t$$

$$\frac{d\dot{M}}{dt} = \frac{d\dot{M}}{du}\frac{du}{dt} = \ddot{M}(u)\dot{u}$$

Y así podremos expresar $\dot{Q}(t)$ como:

$$\dot{Q}(t) = \ddot{M}(u)\dot{u} + \dot{\lambda} = \ddot{M}(u)\dot{u} + [r + (1-u)h]\lambda + R - M(u)h = \ddot{M}(u)\dot{u} - \dot{M}(u)[r + (1-u)h] + R - M(u)h =$$

cuando se ha utilizado $\dot{\lambda} = r\lambda - H_F = r + R - M(u)h + \lambda(1-u)h$ para eliminar $\dot{\lambda}$ y luego Q(t) = 0 para eliminar λ.

La última ecuación puede ser reordenada para encontrar esa política de mantenimiento óptima que satisface

$$\ddot{M}(u)\dot{u} = \dot{M}(u)[r + (1-u)h] - R + M(u)h \qquad (V)$$

siempre que 0 < u(t) < 1. Puesto que $\ddot{M} > 0$ por hipótesis, el signo de $\dot{u}$ es el mismo que el signo del lado derecho de la ecuación anterior.

Facilitará el estudio de $\dot{u}$ considerar primero el conjunto de puntos (h,u) tales que $\dot{u} = 0$. Tales puntos satisfacen

$$\dot{M}(u)[r + (1-u)h] - R + M(u)h = 0$$

La forma de la curva puede obtenerse derivando lo anterior implícitamente para conseguir

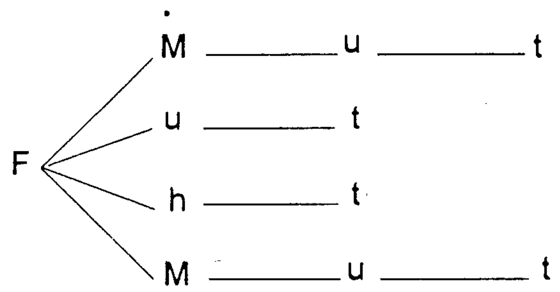
$$\frac{du}{dh} = -\frac{M + (1-u)\dot{M}}{[r + (1-u)h]\,\ddot{M}} < 0$$

Demostración

Sea F la función:

$$F \equiv \dot{M}(u)[r+(1-u)h] - R + M(u)h = 0$$

Teniendo en cuenta las relaciones de dependencia entre las variables:



Derivando respecto a t

:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{M}}\frac{d\dot{M}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial h}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial F}{\partial M}\frac{dM}{du}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = [r+(1-u)h]\,\ddot{M}\frac{du}{dt} - h\dot{M}\frac{du}{dt} + \left[M+(1-u)\,\dot{M}\right]\frac{dh}{dt} + h\dot{M}\frac{du}{dt}$$

Multiplicando por *dt* ambos lados de la ecuación:

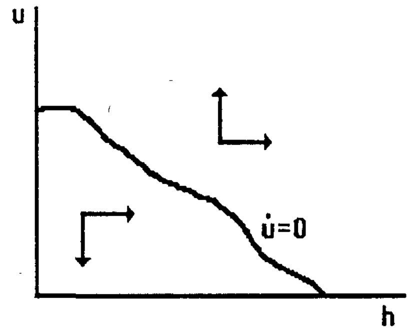
$$dF = [r+(1-u)h]\,\ddot{M}\,du + \left[M+(1-u)\,\dot{M}\right]dh$$

Pero como $F = 0 \rightarrow dF = 0$

$$[r+(1-u)h]\,\ddot{M}\,du = -\left[M+(1-u)\,\dot{M}\right]dh$$

$$\frac{du}{dh} = -\frac{M+(1-u)\,\dot{M}}{[r+(1-u)h]\,\ddot{M}} < 0$$

La negatividad es consecuencia de las propiedades de M. Se investigará la dirección de movimiento de una trayectoria (h,u) a lo largo del tiempo, donde h es una función dada y u obedece la ecuación diferencial (V). Se sabe que h es no decreciente; por tanto, las flechas apuntan hacia la derecha en el gráfico. Además, puesto que el lado derecho de (V) es una función creciente de u, una trayectoria en un punto sobre la curva $\dot{u} = 0$ crecerá y una trayectoria en un punto por debajo, decrecerá. Las flechas en el gráfico aclaran estos hechos.



A continuación se verá cómo se obtienen los puntos extremos:

Partimos de la expresión (V):

$$\dot{M}(u)[r+(1-u)h] - R + M(u)h = 0$$

Si $u = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{M}(0)[r+(1-0)h] - R + M(0)h = 0$

Y entonces tenemos que:

$$\dot{M}(0)[r+h] - R = 0$$

Donde operando obtenemos :

$$\dot{M}(0)h + \dot{M}(0)r = R$$

$$\dot{M}(0)h = R - \dot{M}(0)r$$

Y finalmente: $$h = \left[\frac{R}{\dot{M}(0)}\right] - r$$

Si ahora hacemos $h=0 \quad \rightarrow \quad \dot{M}(u)[r+(1-u)0]-R+M(u)0=0$

$$r\dot{M}(u)=R$$

$$1=\frac{1}{\dot{M}}\frac{R}{r}$$

Sustituyendo (II) en (III), y empleando la definición de H se obtiene:

$$R-M(u)h-[r+(1-u)h]S=-\dot{S}\geq 0 \quad en \quad T \qquad (VI)$$

En el momento de venta, el exceso de valor obtenido manteniendo la máquina un poco más, sobre el valor de venta no debe ser inferior a la pérdida en el valor de reventa si se pospone la venta ligeramente en el tiempo.

Demostración

Partimos de la expresión (VI):

$$R-M(u)h-[r+(1-u)h]S=R-M(u)h-rS-(1-u)hS=$$
$$=R-M(u)h-r\dot{M}(u)-(1-u)h\dot{M}(u)=-\ddot{M}(u)\dot{u}\geq 0 \quad en \quad T$$

ya que $\quad S(T)=\dot{M}[u(T)] \quad y \quad \dot{S}(T)=\ddot{M}[u(T)]\dot{u}$

Entonces volviendo a la expresión (V) podemos concluir que:

$$\ddot{M}(u)\dot{u}=\dot{M}(u)[r+(1-u)h]-R+M(u)h\leq 0 \quad en \quad T \quad \rightarrow \quad \dot{u}(T)\leq 0$$

Se puede ahora demostrar que la política de mantenimiento de una máquina implica $\dot{u}(t)\leq 0, 0\leq t\leq T$, en cada caso. (Pero el gasto actual *M(u)h* puede o incrementar o decrecer a lo largo del tiempo puesto que $\dot{h}\geq 0$). Si 0<u(T)<1, entonces Q(T)=0, de tal forma que $\lambda(T)=-\dot{M}[u(T)]=-S(T)$. Sustituyendo esto en (VI) y recordando (V), obtenemos $\dot{u}(T) \leq 0$. Del gráfico, si $\dot{u}(T) \leq 0$, entonces u debe ser no creciente en (0,T). Es claro de igual modo del gráfico que u es no creciente hasta el final en el caso u(T)=0.

Finalmente supongamos U(T)=1. Sea t_1 el primer momento en el que u=1. De (I) y (II), obtenemos:

$$\lambda(t) = -\int_t^T e^{-r(s-t)}\left[R - M(1)h(s)\right] ds - e^{-r(T-t)}S(T), \qquad t_1 \leq t \leq T$$

Reemplazando *h(t)* por su cota superior *h(T)* para $0 \leq t \leq T$, tenemos:

$$\lambda(t) \leq -\frac{\left[1-e^{-r(T-t)}\right]\left[R - M(1)h(T)\right]}{r - e^{-r(T-t)}S(T)}$$

Por tanto, como $Q = \dot{M} + \lambda$,

$$Q(t) \leq \dot{M}(1) - \frac{\left[1-e^{-r(T-t)}\right]\left[R - M(1)h(T)\right]}{r - e^{-r(T-t)}S(T)}$$

De (IV) y (II),obtenemos:

$$\dot{M}(1) + \lambda(T) = \dot{M}(1) - S(T) < 0$$

Por tanto,

$$\dot{M}(1) < S(T)$$

Reemplazando $\dot{M}(1)$ por su cota superior obtenemos finalmente

$$Q(t) \leq \frac{\left[1-e^{-r(T-t)}\right]\left[rS(T) - R + M(1)h(T)\right]}{r} < 0, \qquad t_1 \leq t \leq T,$$

donde la segunda desigualdad se sigue de (VI). En particular, $Q(t_1) < 0$. Por tanto, puede no haber período de u<1 finalizando en t_1 (puesto que $Q(t_1) = 0$ en ese caso). Esto significa que u=1 para $0 \leq t \leq T$ en el caso u(T)=1. Así u es una función no creciente de la edad de la máquina en cada caso.

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, SARA Mª; PÉREZ GLADISH, BLANCA Mª; RODRÍGUEZ URÍA, Mª VICTORIA: Problemas de control óptimo con restricciones. Documento de Trabajo nº104/96 de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Oviedo.

BORELL VIDAL, M. (1985): Teoría del Control óptimo. Ed. Hispano Europea.

CHIANG, ALPHA (1992): Elements of Dynamic optimization. McGraw-Hill International Ed.

DIXIT, A.K. (1990): Optimization in Economic Theory. Ed. Oxford University Press.

INTRILLIGATOR, M. (1973): Optimización matemática y teoría económica. Prentice Hall International.

KAMIEN, M; SCHWARTZ, N. (1993): Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economic and management. Ed. North Holland.

SEIERSTAD, A; SYDSAETER, K. (1986): Optimal control with economic aplications. Ed. North Holland.

SETHI, S; THOMPSON, G. (1981): Optimal control theory: aplications to management sciences. Ed. Martinus Nijhoff.

TAKAYAMA, A. (1994): Analytical methods in Economics. Ed. Harvester-Wheatsheaf.

TU, P. (1991): Introductory optimization Dynamics. Ed. Springer-Verlag

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
RELACIÓN DE DOCUMENTOS DE TRABAJO:

Doc. 001/88 **JUAN A. VAZQUEZ GARCIA**.- *Las intervenciones estatales en la minería del carbón.*

Doc. 002/88 **CARLOS MONASTERIO ESCUDERO**.- *Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.*

Doc. 003/88 **ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA**.- *Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.*

Doc. 004/88 **JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *Una propuesta para la integración multijurisdiccional.*

Doc. 005/89 **LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO**.- *La modernización del sector agrario en la provincia de León.*

Doc. 006/89 **JOSE MANUEL PRADO LORENZO**.- *El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.*

Doc. 007/89 **JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).*

Doc. 008/89 **FELIX LOBO ALEU**.- *El gasto público en productos industriales para la salud.*

Doc. 009/89 **FELIX LOBO ALEU**.- *La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.*

Doc. 010/90 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES**.- *Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.*

Doc. 011/90 **ANTONIO APARICIO PEREZ**.- *Infracciones y sanciones en materia tributaria.*

Doc. 012/90 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA**.- *Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.*

Doc. 013/90 **EQUIPO MECO**.- *Medidas de desigualdad: un estudio analítico*

Doc. 014/90 **JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.*

Doc. 015/90 **ANTONIO MARTINEZ ARIAS**.- *Auditoría de la información financiera.*

Doc. 016/90 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ**.- *La población como variable endógena*

Doc. 017/90 **JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *La redistribución local en los países de nuestro entorno.*

Doc. 018/90 **RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO**.- *"Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.*

Doc. 019/90 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.**- *La política de precios en los establecimientos detallistas.*

Doc. 020/90 **CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ.**- *La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).*

Doc. 021/90 **JOAQUIN LORENCES.**- *Margen precio-coste variable medio y poder de monopolio.*

Doc. 022/90 **MANUEL LAFUENTE ROBLEDO; ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *El T.A.E. de las operaciones bancarias.*

Doc. 023/90 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *Amortización y coste de préstamos con hojas de cálculo.*

Doc. 024/90 **LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JEAN-MARC BUIGUES.**- *Un ejemplo de política municipal: precios y salarios en la ciudad de León (1613-1813).*

Doc. 025/90 **MYRIAM GARCIA OLALLA.**- *Utilidad de la teorías de las opciones para la administración financiera de la empresa.*

Doc. 026/91 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.**- *Novedades de la legislación laboral (octubre 1990 - enero 1991)*

Doc. 027/91 **CANDIDO PAÑEDA.**- *Agricultura familiar y mantenimiento del empleo: el caso de Asturias.*

Doc. 028/91 **PILAR SAENZ DE JUBERA.**- *La fiscalidad de planes y fondos de pensiones.*

Doc. 029/91 **ESTEBAN FERNANDEZ SANCHEZ.**- *La cooperación empresarial: concepto y tipología (*)*

Doc. 030/91 **JOAQUIN LORENCES.**- *Características de la población parada en el mercado de trabajo asturiano.*

Doc. 031/91 **JOAQUIN LORENCES.**- *Características de la población activa en Asturias.*

Doc. 032/91 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.**- *Política económica regional*

Doc. 033/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ.**- *La conversión coactiva de acciones comunes en acciones sin voto para lograr el control de las sociedades anónimas: De cómo la ingenuidad legal prefigura el fraude.*

Doc. 034/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ.**- *Restricciones institucionales y posibilidades estratégicas.*

Doc. 035/91 **NURIA BOSCH; JAVIER SUAREZ PANDIELLO.**- *Seven Hypotheses About Public Chjoice and Local Spending. (A test for Spanish municipalities).*

Doc. 036/91 **CARMEN FERNANDEZ CUERVO; LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ.**- *De una olvidada revisión crítica sobre algunas fuentes histórico-económicas: las ordenanzas de la gobernación de la cabrera.*

Doc. 037/91 **ANA JESUS LOPEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.-** *Indicadores de desigualdad y pobreza. Nuevas alternativas.*

Doc. 038/91 **JUAN A. VAZQUEZ GARCIA; MANUEL HERNANDEZ MUÑIZ.-** *La industria asturiana: ¿Podemos pasar la página del declive?.*

Doc. 039/92 **INES RUBIN FERNANDEZ.-** *La Contabilidad de la Empresa y la Contabilidad Nacional.*

Doc. 040/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *La Cooperación interempresarial en España: Características de los acuerdos de cooperación suscritos entre 1986 y 1989.*

Doc. 041/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *Tendencias empíricas en la conclusión de acuerdos de cooperación.*

Doc. 042/92 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *Novedades en la Legislación Laboral.*

Doc. 043/92 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.-** *El comportamiento del consumidor y la estrategia de distribución comercial: Una aplicación empírica al mercado de Asturias.*

Doc. 044/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Un marco teórico para el estudio de las fusiones empresariales.*

Doc. 045/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Creación de valor en las fusiones empresariales a través de un mayor poder de mercado.*

Doc. 046/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Influencia relativa de la evolución demográfica en le futuro aumento del gasto en pensiones de jubilación.*

Doc. 047/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Aspectos demográficos del sistema de pensiones de jubilación español.*

Doc. 048/92 **SUSANA LOPEZ ARES.-** *Marketing telefónico: concepto y aplicaciones.*

Doc. 049/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Las influencias familiares en el desempleo juvenil.*

Doc. 050/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *La adquisición de capital humano: un modelo teórico y su contrastación.*

Doc. 051/92 **MARTA IBAÑEZ PASCUAL.-** *El orígen social y la inserción laboral.*

Doc. 052/92 **JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.-** *Estudio del sector comercial en la ciudad de Oviedo.*

Doc. 053/92 **JULITA GARCIA DIEZ.-** *Auditoría de cuentas: su regulación en la CEE y en España. Una evidencia de su importancia.*

Doc. 054/92 **SUSANA MENENDEZ REQUEJO.-** *El riesgo de los sectores empresariales españoles: rendimiento requerido por los inversores.*

Doc. 055/92 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.-** *Una valoración económica de la obtención de productos derivados del petroleo a partir del carbón*

Doc. 056/92 **IGNACIO ALFREDO RODRIGUEZ-DEL BOSQUE RODRIGUEZ.-** *Consecuencias sobre el consumidor de las actuaciones bancarias ante el nuevo entorno competitivo.*

Doc. 057/92 **LAURA CABIEDES MIRAGAYA.-** *Relación entre la teoría del comercio internacional y los estudios de organización industrial.*

Doc. 058/92 **JOSE LUIS GARCIA SUAREZ.-** *Los principios contables en un entorno de regulación.*

Doc. 059/92 **Mª JESUS RIO FERNANDEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.-** *Cuantificación de la concentración industrial: un enfoque analítico.*

Doc. 060/94 **Mª JOSE FERNANDEZ ANTUÑA.-** *Regulación y política comunitaria en materia de transportes.*

Doc. 061/94 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Factores determinantes de la afiliación sindical en España.*

Doc. 062/94 **VICTOR FERNANDEZ BLANCO.-** *Determinantes de la localización de las empresas industriales en España: nuevos resultados.*

Doc. 063/94 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *La crisis de la estructura multidivisional.*

Doc. 064/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Metodología de la investigación econométrica.*

Doc. 065/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Análisis Cualitativo de la fecundidad y participación femenina en el mercado de trabajo.*

Doc. 066/94 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *La supervision colectiva de los actos de contratación: la Ley 2/1991 de información a los representantes de los trabajadores.*

Doc. 067/94 **JOSE LUIS GARCIA LAPRESTA; Mª VICTORIA RODRIGUEZ URIA.-** *Coherencia en preferencias difusas.*

Doc. 068/94 **VICTOR FERNANDEZ; JOAQUIN LORENCES; CESAR RODRIGUEZ.-** *Diferencias interterritoriales de salarios y negociacion colectiva en España.*

Doc. 069/94 **Mª DEL MAR ARENAS PARRA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Programación clásica y teoría del consumidor.*

Doc. 070/94 **Mª DE LOS ÁNGELES MENÉNDEZ DE LA UZ; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Tantos efectivos en los empréstitos.*

Doc. 071/94 **AMELIA BILBAO TEROL; CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Matrices especiales. Aplicaciones económicas.*

Doc. 072/94 ***RODOLFO GUTIÉRREZ.-*** *La representación sindical: Resultados electorales y actitudes hacia los sindicatos.*

Doc. 073/94 ***VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-*** *Economías de aglomeración y localización de las empresas industriales en España.*

Doc. 074/94 ***JOAQUÍN LORENCES RODRÍGUEZ; FLORENTINO FELGUEROSO FERNÁNDEZ.-*** *Salarios pactados en los convenios provinciales y salarios percibidos.*

Doc. 075/94 ***ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; CAMILO JOSÉ VÁZQUEZ ORDÁS.-*** *La internacionalización de la empresa.*

Doc. 076/94 ***SANTIAGO R. MARTÍNEZ ARGÜELLES.-*** *Análisis de los efectos regionales de la terciarización de ramas industriales a través de tablas input-output. El caso de la economía asturiana.*

Doc. 077/94 ***VÍCTOR IGLESIAS ARGÜELLES.-*** *Tipos de variables y metodología a emplear en la identificación de los grupos estratégicos. Una aplicación empírica al sector detallista en Asturias.*

Doc. 078/94 ***MARTA IBÁÑEZ PASCUAL; F. JAVIER MATO DÍAZ.-*** *La formación no reglada a examen. Hacia un perfil de sus usuarios.*

Doc. 079/94 ***IGNACIO A. RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE RODRÍGUEZ.-*** *Planificación y organización de la fuerza de ventas de la empresa.*

Doc. 080/94 ***FRANCISCO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ.-*** *La reacción del precio de las acciones ante anuncios de cambios en los dividendos.*

Doc. 081/94 ***SUSANA MENÉNDEZ REQUEJO.-*** *Relaciones de dependencia de las decisiones de inversión, financiación y dividendos.*

Doc. 082/95 ***MONTSERRAT DÍAZ FERNÁNDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ; Mª del MAR LLORENTE MARRÓN.-*** *Una aproximación empírica al comportamiento de los precios de la vivienda en España.*

Doc. 083/95 ***Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-*** *Matrices semipositivas y análisis interindustrial. Aplicaciones al estudio del modelo de Sraffa-Leontief.*

Doc. 084/95 ***ESTEBAN GARCÍA CANAL.-*** *La forma contractual en las alianzas domésticas e internacionales.*

Doc. 085/95 ***MARGARITA ARGÜELLES VÉLEZ; CARMEN BENAVIDES GONZÁLEZ.-*** *La incidencia de la política de la competencia comunitaria sobre la cohesión económica y social.*

Doc. 086/95 ***VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-*** *La demanda de cine en España. 1968-1992.*

Doc. 087/95 **JUAN PRIETO RODRÍGUEZ.**- *Discriminación salarial de la mujer y movilidad laboral.*

Doc. 088/95 **Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA.**- *La teoría del caos. Nuevas perspectivas en la modelización económica.*

Doc. 089/95 **SUSANA LÓPEZ ARES.**- *Simulación de fenómenos de espera de capacidad limitada con llegadas y número de servidores dependientes del tiempo con hoja de cálculo.*

Doc. 090/95 **JAVIER MATO DÍAZ.**- *¿Existe sobrecualificación en España?. Algunas variables explicativas.*

Doc. 091/95 **Mª JOSÉ SANZO PÉREZ.**- *Estrategia de distribución para productos y mercados industriales.*

Doc. 092/95 **JOSÉ BAÑOS PINO; VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.**- *Demanda de cine en España: Un análisis de cointegración.*

Doc. 093/95 **Mª LETICIA SANTOS VIJANDE.**- *La política de marketing en las empresas de alta tecnología.*

Doc. 094/95 **RODOLFO VÁZQUEZ CASIELLES; IGNACIO RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE; AGUSTÍN RUÍZ VEGA.**- *Expectativas y percepciones del consumidor sobre la calidad del servicio. Grupos estratégicos y segmentos del mercado para la distribución comercial minorista.*

Doc. 095/95 **ANA ISABEL FERNÁNDEZ; SILVIA GÓMEZ ANSÓN.**- *La adopción de acuerdos estatutarios antiadquisición. Evidencia en el mercado de capitales español.*

Doc. 096/95 **ÓSCAR RODRÍGUEZ BUZNEGO.**- *Partidos, electores y elecciones locales en Asturias. Un análisis del proceso electoral del 28 de Mayo.*

Doc. 097/95 **ANA Mª DÍAZ MARTÍN.**- *Calidad percibida de los servicios turísticos en el ámbito rural.*

Doc. 098/95 **MANUEL HERNÁNDEZ MUÑIZ; JAVIER MATO DÍAZ; JAVIER BLANCO GONZÁLEZ.**- *Evaluating the impact of the European Regional Development Fund: methodology and results in Asturias (1989-1993).*

Doc. 099/96 **JUAN PRIETO; Mª JOSÉ SUÁREZ.**- *¿De tal palo tal astilla?: Influencia de las características familiares sobre la ocupación.*

Doc. 100/96 **JULITA GARCÍA DÍEZ; RACHEL JUSSARA VIANNA.**- *Estudio comparativo de los principios contables en Brasil y en España.*

Doc. 101/96 **FRANCISCO J. DE LA BALLINA BALLINA.**- *Desarrollo de campañas de promoción de ventas.*

Doc. 102/96 **ÓSCAR RODRÍGUEZ BUZNEGO.**- *Una explicación de la ausencia de la Democracia Cristiana en España.*

Doc. 103/96 **CÁNDIDO PAÑEDA FERNÁNDEZ.**- *Estrategias para el desarrollo de Asturias.*

Doc. 104/96 ***SARA Mª ALONSO; BLANCA PÉREZ GLADISH; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-*** *Problemas de control óptimo con restricciones: Aplicaciones económicas.*

Doc. 105/96 ***ANTONIO ÁLVAREZ PINILLA; MANUEL MENÉNDEZ MENÉNDEZ; RAFAEL ÁLVAREZ CUESTA.-*** *Eficiencia de las Cajas de Ahorro españolas. Resultados de una función de beneficio.*

Doc. 106/96 ***FLORENTINO FELGUEROSO.-*** *Industrywide Collective Bargaining, Wages Gains and Black Labour Market in Spain.*

Doc. 107/96 ***JUAN VENTURA.-*** *La competencia gestionada en sanidad: Un enfoque contractual*

Doc. 108/96 ***MARÍA VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA; ELENA CONSUELO HERNÁNDEZ.-*** *Elección social. Teorema de Arrow.*

Doc. 109/96 ***SANTIAGO ÁLVAREZ GARCÍA.-*** *Grupos de interés y corrupción política: La búsqueda de rentas en el sector público.*

Doc. 110/96 ***ANA Mª GUILLÉN.-*** *La política de previsión social española en el marco de la Unión Europea.*

Doc. 111/96 ***VÍCTOR MANUEL GONZÁLEZ MÉNDEZ.-*** *La valoración por el mercado de capitales español de la financiación bancaria y de las emisiones de obligaciones.*

Doc. 112/96 ***DRA.MARIA VICTORIA RODRIGUEZ URÍA; D. MIGUEL A. LÓPEZ FERNÁNDEZ; DÑA.BLANCA Mª PEREZ GLADISH.-*** *Aplicaciones económicas del Control Öptimo. El problema de la maximización de la utilidad individual del consumo. El problema del mantenimiento y momento de venta de una máquina.*

Doc. 113/96 ***OSCAR RODRÍGUEZ BUZNEGO.-*** *Elecciones autonómicas, sistemas de partidos y Gobierno en Asturias.*

Doc. 114/96 ***RODOLFO VÁZQUEZ CASIELLES; ANA Mª DÍAZ MARTÍN.****El conocimiento de las expectativas de los clientes: una pieza clave de la calidad de servicio en el turismo.*

Doc. 115/96 ***JULIO TASCÓN.-*** *El modelo de industrialización pesada en españa durante el período de entreguerras.-*

Doc. 116/96 ***ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; JOSÉ M. MONTES PEÓN; CAMILO J. VÁZQUEZ ORDÁS.-*** *Sobre la importancia de los factores determinantes del beneficio: Análisis de las diferencias de resultados inter e intraindustriales.*

Doc. 117/96 ***AGUSTÍN RUÍZ VEGA; VICTOR IGLESIAS ARGÜELLES.-*** *Elección de Establecimientos detallistas y conducta de compra de productos de gran consumo. Una aplicación empírica mediante modelos logit.*

Doc. 118/96 **VICTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *Diferencias entre la asistencia al cine nacional y extranjero en España.*

Doc. 119/96 **RODOLFO VÁZQUEZ CASIELLES; IGNACIO A. RODRÍGUEZ DEL BOSQUE;ANA Mª DÍAZ MARTÍN.-** *Estructura multidimensional de la calidad de servicio en cadenas de supermercados: desarrollo y validación de la escala calsuper.*

Doc. 120/96 **ANA BELÉN DEL RÍO LANZA.-** *Elementos de medición de marca desde un enfoque de marketing.*