DOC. 104/96

SARA MARÍA ALONSO
BLANCA PÉREZ GLADISH
Mª VICTORIA FERNÁNDEZ URÍA

# PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CON RESTRICCIONES: APLICACIONES ECONÓMICAS

# PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CON RESTRICCIONES: APLICACIONES ECONÓMICAS

Dña Sara Maria Alonso

Dña Blanca Perez Gladish

Dra. María Victoria Rodriguez Uria

# INDICE

## 1. LA TEORIA DEL CONTROL

### 1.1 Introduccion.

Richard Bellman habló de la teoría del control como "una cierta disposición de la mente, más que como un conjunto de teorías y modelos matemáticos". El objetivo, en sentido amplio, de esta teoría es conseguir que un sistema funcione de un modo más conveniente, se trata de intentar optimizar el comportamiento del sistema, cuando ello sea posible. El problema central de cualquier intento de optimización es "la búsqueda de un control que maximice o minimice un criterio representativo de la eficiencia del sistema"( Dreyfus, 1965 p. IX)

En resumen, a través del control se estudian los sistemas reales construyendo modelos matemáticos abstractos que, por una parte expliquen el sistema y, por otra, permitan regular la evolución del mismo mediante la adopción de decisiones adecuadas (decisiones óptimas).

Tal y como se ha definido la teoría del control no cabe duda de que su aplicación al ámbito de la economía resulta, no sólo interesante, sino necesaria.

Economizar, en sentido estático, consistía en distribuir recursos escasos entre objetivos que compiten en un momento dado del tiempo, en términos matemáticos se denominaba un problema de *programación matemática.*

El problema dinámico de economizar, consiste en distribuir dichos recursos escasos entre objetivos, que ahora competirán en un intervalo de tiempo, que va desde un *tiempo inicial* hasta un *tiempo terminal.*

La resolución matemática del problema consiste en elegir cursos temporales para ciertas variables llamadas *variables de control*, dentro de una clase de cursos dada que se denomina *conjunto de control.* La elección de estas trayectorias temporales para las variables de control supone, a través de una serie de ecuaciones diferenciales -*ecuaciones de movimiento*- cursos temporales para ciertas variables que describen el sistema, llamadas *variables de estado.* Los cursos temporales de las variables de control se eligen de modo que maximicen un funcional dado, que depende tanto de las variables de estado como de las de control, denominado *funcional objetivo.* Planteado de esta forma el problema se denomina *problema de control.*

## 1.2 Planteamiento formal del problema.

El planteamiento formal de un problema de control comprende :

A) *El tiempo*, que se mide en unidades continuas y se define en el intervalo que abarca desde el *tiempo inicial* $t_0$, dado, hasta el *tiempo terminal* $t_1$, que puede venir dado o, como ocurre a menudo, es necesario determinarlo a lo largo de la resolución del problema. Luego el intervalo es:

$$t_0 \leq t \leq t_1$$

B) *Las variables de estado*, son *n* números reales que caracterizan el estado del sistema en el intervalo pertinente, y se agrupan en *el vector de estado*:

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\}$$

Cada variable de estado se supone función continua del tiempo, de modo que la *trayectoria de estado* es una función continua de valores vectoriales del tiempo, cuyo valor en cualquier tiempo $t$ perteneciente al intervalo $(t_0, t_1)$, es el vector de estado $X(t)$.Geométricamente, la trayectoria de estado es una sucesión de puntos del espacio euclídeo $E^n$, que comienza en el *estado inicial* $x(t_0) = x_0$, dado, y finaliza en el *estado terminal* $x(t_1) = x_1$, que puede estar dado o no.

C) *Las variables de control,* son los *r* números reales que caracterizan las elecciones que deben hacerse, están representadas en el *vector de control*:

$$U(t) = \{u_1(t), u_2(t), \ldots\ldots u_n(t)\}$$

Cada variable de control ha de ser una función del tiempo continua a trozos, de modo que resulte una *trayectoria de control* que sea también continua a trozos, cuyo valor, en cualquier tiempo $t$ del intervalo correspondiente, es el *vector de control* $U(t)$. Geométricamente, la trayectoria de control es una sucesión de puntos en $R^n$ que es continua, con la posible excepción de un número finito de saltos discretos.

El vector de control en todos los tiempos del intervalo debe pertenecer a un subconjunto Ω dado, no vacío, del espacio euclídeo de dimensión $r$ :

$$U(t) \in \Omega, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Ω se supone compacto (cerrado y acotado), convexo e invariante respecto al tiempo.

D) *Las ecuaciones de movimiento*, son un conjunto de ***n*** ecuaciones diferenciales que caracterizan a la trayectoria de estado, las cuales dan la tasa instantánea de variación de cada variable de estado en función de:las variables de estado, las variables de control y el tiempo

$$\dot{X} = f(x(t), u(t), t)$$

Donde las ***n*** funciones se suponen dadas y continuamente diferenciables. Si estas ecuaciones diferenciales no dependen explícitamente del tiempo, se hablará de ecuaciones de movimiento *autónomas*

E) *El funcional objetivo*, es una aplicación de las trayectorias de control en puntos de la recta real, cuyo valor debe ser optimizado. En general será de la forma siguiente:

$$J = J\{u(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), u(t), t)dt + F(x_1, t_1), \text{ donde}$$

I(.....) se denomina *función intermedia*, y F(.....) *función final*. Tanto una como otra se suponen dadas y continuamente diferenciables.

En resumen, el problema general de control es:

$$\text{Max } J = \int_{t_0}^{t_1} I(x, u, t)dt + F(x_1, t_1)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & \dot{x} = f(x, u, t) \\ & t_0 \text{ y } x(t_0) = x_0 \text{ dado} \\ & (x(t), t) \in T \text{ en } t = t_1 \\ & \{u(t)\} \in U \end{aligned}$$

En el caso de que la función intermedia sea nula hablaremos de un *Problema de Mayer*, si la función final es nula el problema se denomina *Problema de Lagrange*, cuando ninguna de las funciones que componen el funcional objetivo se anula estaremos ante un *Problema de Bolza.*

En cualquiera de los casos, comenzando en el estado inicial $x_0$, dado el tiempo inicial $t_0$, la trayectoria de estado $\{x(t)\}$ debe tomarse del conjunto de trayectorias factibles, cada una de las cuales resulta de utilizar una trayectoria de control admisible $\{u(t)\}$. La trayectoria de estado factible particular que sea optimal $\{x^*(t)\}$, debe alcanzar la superficie terminal y debe maximizar el funcional objetivo entre el conjunto de dichas trayectorias.

Para llegar a la solución de un problema de control existen tres caminos: *el cálculo de variaciones, el control óptimo* y *la programación lineal.*

**1.3 Cálculo de variaciones y control óptimo.**

La primera aproximación al problema del control es la del cálculo de variaciones. El problema del control se reduce en el cálculo de variaciones a encontrar una trayectoria temporal para la variable de estado que une puntos inicial y terminal dados, de modo que maximice el valor de la integral de una función dada de la variable de estado, la tasa instantánea de variación de la variable de estado, y del tiempo.

El problema clásico del cálculo de variaciones es por tanto:

$$\text{Opt.} \int_{t_0}^{t_1} F[x(t),\dot{x}(t),t]\,dt$$

$$\text{s.a} \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

$$x(t_1) = x_1$$

donde $F(x,\dot{x},t)$ es una función dada continuamente diferenciable y $t_0$ , $t_1$ , $x_0$ y $x_1$ son parámetros dados. Este problema puede considerarse como un caso especial del problema de control en el cual no existe ninguna dependencia respecto de las consideraciones finales ( es un problema de Lagrange ); existe solamente una variable de estado y una variable de control; la variable de control es simplemente la tasa de variación instantánea de la variable de estado, siendo la ecuación de movimiento:

$$\dot{x} = u,$$

de modo que u se remplaza por $\dot{x}$ en F(...); y la variable de control puede tomar cualquier valor:

$$\Omega = E.$$

La única restricción sobre la trayectoria de control es la de que sea una función continua a intervalos de tiempo. Cualquier trayectoria $\{\mathbf{x}\ (\mathbf{t})\}$ que cumpla las condiciones de contorno de (1) y la condición de continuidad de que **x(t)** sea continua y las $\dot{x}(t)$ sean funciones continuas a intervalos del tiempo se denomina *admisible*, y el problema de cálculo de variaciones clásico consiste en elegir una trayectoria admisible que maximimce la integral funcional objetivo.

El tratamiento por cálculo de variación también puede utilizarse en la resolución de ciertos problemas de control con restricciones. Las restricciones pueden ser en forma integral o en forma de igualdad o desigualdad, relacionándose en este último caso las variables de estado, sus tasas de variación y el tiempo. En el caso de restricciones de igualdad el problema quedaría planteado como:

$$\text{Máx. } J \int_{t_0}^{t_1} F(x,\dot{x},t)\,dt$$

$$\text{s.a:} \quad x(t_0)=x_0$$

$$x(t_1)=x_1$$

$$g(x,\dot{x},t)=b$$

El método de resolución implica la introducción del multiplicador de Lagrange. Definiendo la funcion lagrangiana como:

$$L(x,\dot{x},t,\lambda)= F(x,\dot{x},t)+\lambda[b-g(x,\dot{x},t)],$$

la solución se obtiene eligiendo $\{\mathbf{x(t)}\}$ para maximizar, y $\lambda$, para minimizar:

$$J'= \int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},t,\lambda)dt$$

lo que lleva a la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})=0,$$

que junto a las condiciones de contorno y la restricción, define la solución.

Las restricciones de desigualdad relacionan las variables de estado, sus tasas de variación y el tiempo. En este caso el problema es:

$$\text{Máx } J= \int_{t_0}^{t_1} F(x,\dot{x},t)dt$$

$$\text{s.a:} \quad x(t_0)=x_0$$

$$x(t_1)=x_1$$

$$g(x,\dot{x},t)\leq b,$$

Formando la lagrangiana como en el caso anterior. la solución debe satisfacer:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})=0$$

$$g(x,\dot{x},t)\leq b,$$

$$\lambda\geq 0$$

$$\lambda[b-g(x,\dot{x},t)] = 0$$

Otro tipo de restricción muy importante es la restricción integral, en la que la integral de una función dada se mantiene constante. Este problema, llamado isoperimétrico, que resolveremos también mediante control óptimo, es de la forma:

$$\text{Máx J}=\int_0^T F(y,\dot{y},t)dt$$

s.a. $y(0)=y_0$

$y(T)=y_T$

$$k=\int_0^T G(y,\dot{y},t)dt = c$$

siendo G(...) una función dada continuamente diferenciable y ***c*** una constante dada. La restricción se tendrá en cuenta introduciendo el multiplicador de Lagrange λ, y definiendo el funcional:

$$J'=\int_0^T [F(...)+G(...)]dt,$$

siendo las condiciones necesarias las requeridas para hallar un máximo de J′ con respecto a la trayectoria $\{x(t)\}$ y un mínimo de J′ con respecto al multiplicador de Lagrange λ. La ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial}{\partial y}(F(...)+\lambda G(...))-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(F(...)+\lambda G(...))\right)=0,$$

la cual junto a las condiciones de contorno y la restricción, define la solución

El cálculo de variaciones puede utilizarse pues para resolver problemas de control que contengan ciertos tipos de restricciones. ***Pero su debilidad principal radica en que no puede resolver directamente problemas en que las variables de control estén restringidas a un conjunto de control dado.***

El estudio continuado en el tiempo de los problemas de cálculo de variaciones ha conducido al desarrollo de un método mucho más moderno : ***la teoría del control óptimo***. En la teoría del control óptimo, el problema de optimización dinámica se formula con tres tipos de variables: además de la variable tiempo **t** y la variable de estado **x(t)**, se considera la variable de control **u(t)**. De hecho es esta última variable la que da nombre a la teoría del control óptimo y ocupa el centro de estudio en esta nueva aproximación a la optimización dinámica.

Enfocar la atención sobre la variable de control implica relegar la variable de estado a un segundo plano. Esto podrá ser aceptado únicamente si la decisión sobre una trayectoria de control **u(t)** nos ayudara a, una vez dada una condición inicial para la variable de estado, determinar de manera directa una trayectoria para la variable de estado **x(t)**. Por esta razón un problema de control óptimo deberá contener una ecuación que relacione la variable de estado **x(t)** con la variable de control, y que se denominará *ecuación de movimiento:*

$$\frac{dy}{dt} = f[t, y(t), u(t)]$$

indicándonos cómo en cualquier momento del tiempo, dado el valor de la variable de estado, la elección del planeador de la variable de control u será determinante del valor de la variable de estado a lo largo del tiempo. Una vez encontrada la trayectoria óptima de la variable de control **u(t)**, la ecuación de movimiento nos posibilitará la construcción de la trayectoria óptima de la variable de estado **x(t)**.

El problema de control optimo se reduce entonces a :

$$\text{Opt.} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), u(t)]dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:} \quad & \dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)] \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) \text{ libre.} \end{aligned}$$

Ahora la variable de control **u(t)** es el instrumento último de optimización. Este problema de control está por tanto íntimamente ligado al problema planteado de cálculo de variaciones, permitiéndonos sin embargo resolver además de los problemas que podíamos solucionar mediante cálculo de variaciones, otros que no tenían solución a través de dicho método. De hecho el control óptimo no deja de ser un caso especial del cálculo de variaciones, en el que se sustituye **x(t)** en la integral, y se adopta la ecuación diferencial **x(t)=u(t)** como ecuación de movimiento.

## 2. CONTROL ÓPTIMO CON RESTRICCIONES

### 2.1 Introducción.

Como en el cálculo de variaciones el tratamiento de las restricciones en la teoría de control óptimo descansa sobre todo en la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo como los problemas de control óptimo incluyen también variables de control, es necesario distinguir entre dos categorías de restricciones. En primer lugar aquellas en las que las variables de control están presentes en la propia restricción, y en segundo lugar aquellas en las que las variables de control están ausentes, por lo que la restricción sólo afecta a las variables de estado. Los métodos de tratamiento para ambas categorías son distintos.

## 2.2 Restricciones que incluyen variables de control.

Podemos distinguir cuatro tipos principales: restricciones de igualdad, restricciones de desigualdad, restriciones de igualdad en forma de integral, y restricciones de desigualdad en forma de integral.

### 2.2.1 Restricciones de igualdad.

Sean dos variables de control en un problema $(u_1,u_2)$. Sea la restricción referida a dichas variables:

$g(t,y,u_1,u_2)=c$ Función restricción.

c constante de restricción.

El problema quedará pues planteado como:

$$\text{Máx.} \quad \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)dt$$

$$\text{s.a:} \quad \dot{y}=f(t,y,u_1,u_2)$$

$$g(t,y,u_1,u_2)=c$$

y las condiciones de frontera.

El principio de maximización nos lleva a maximizar el Hamiltoniano:

1°) Construimos el Hamiltoniano:

$$H=F(t,y,u_1,u_2)+\lambda(t)f(t,y,u_1,u_2) \quad \forall t\in[0,T]$$

2°) Introducimos la restricción mediante una Lagrangiana:

$$L=H+\theta(t)[c-g(t,y,u_1,u_2)]=$$

$$= F(t,y,u_1,u_2)+\lambda(t)f(t,y,u_1,u_2)+\theta(t)[c-g(t,y,u_1,u_2)]$$

Donde el multiplicador de Lagrange ahora es dinámico y dependiente del tiempo. Esto es así porque la restricción g deberá ser satisfecha en cualquier momento **t** del periodo de planificación.

La solución vendrá dada por la C.P.O:

$$\frac{\partial L}{\partial u_j}=\frac{\partial F}{\partial u_j}+\lambda\frac{\partial f}{\partial u_j}-\theta\frac{\partial g}{\partial u_j}=0 \qquad \forall t\in[0,T] \quad (j=1,2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=c- g(t,y, u_1,u_2)=0 \quad \forall t\in[0,T]$$

Deberán darse también unas condiciones de segundo orden apropiadas, o una condición de concavidad adecuada.

El resto del problema de maximización incluye:

$\dot{y}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}\Rightarrow$ Ecuación de movimiento para y.

$\dot{\lambda}=-\frac{\partial L}{\partial y}\Rightarrow$ Ecuación de movimiento para λ,

junto a una condición de transversalidad adecuada.

### 2.2.2 Restricciones de igualdad en forma de integral *:*

*"El problema isoperimétrico"*

Antes de plantear este tipo de problemas debemos tener en cuenta dos cuestiones:

- La variable de coestado asociada a la integral, como en el cálculo de variaciones, es constante a lo largo del tiempo.
- Dada la naturaleza de la integral, no es necesario restringir el número de restricciones relativas al número de variables de control.

Sea un problema con una variable de estado, una variable de control y una restricción en forma de integral:

$$\text{Máx}\int_0^T F(t,y,u)dt$$

$$\text{s.a:}\quad \dot{y}=f(t,y,u)$$

$$\int_0^T G(t,y,u)dt=k \quad \text{(k dado)}$$

$$Y(0)=y_0 \quad Y(T)\text{libre} \quad (y_0\text{ ,T dados})$$

En este contexto vamos a introducir una nueva variable de estado , que llamaremos **Γ(t)** de tal manera que podamos reemplazar la integral por una condición en términos de **Γ(t):**

$$\Gamma(t) = -\int_0^t G(t,y,u)dt$$

Derivando:

$$\dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u) \qquad \text{Ecuación de movimiento para } \Gamma.$$

Los valores inicial y terminal para **Γ(t)** serán:

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(t,y,u)dt = 0$$

$$\Gamma(T) = -\int_0^T G(t,y,u)dt = -k \qquad \text{Condición terminal.}$$

CONCLUSIÓN: Podemos reemplalzar la restricción integral dada, por una condición terminal en la variable de estado Γ.

El nuevo problema será pues un problema sin restricciones:

$$\text{Máx.} \int_0^T F(t,y,u)dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:} \quad & \dot{y} = f(t,y,u) \\ & \dot{\Gamma}(t) = -G(t,y,u) \\ & y(0) = y_0 \quad y(T) \text{ libre} \quad (y_0, T \text{ dados}) \\ & \Gamma(0) = 0 \quad \Gamma(T) = -k \quad (k \text{ dado}) \end{aligned}$$

Se puede trabajar con el Hamiltoniano sin ampliarlo y por ello no es necesario limitar el número de restriccones integrales.

Construimos el Hamiltoniano simple:

$$H = F(t,y,u) + \lambda(t)f(t,y,u) - \mu G(t,y,u)$$

Las condiciones de maximización serán:

$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ Ecuación de movimiento para y.

$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial y}$ Ecuación de movimiento para λ.

$\dot{\Gamma}=\frac{\partial H}{\partial \mu}$ Ecuación de movimiento para Γ.

$\dot{\mu}=-\frac{\partial H}{\partial \Gamma}$ Ecuación de movimiento para μ.

$\lambda(T)=0$ Condición de transversalidad.

CONCLUSIÓN: Lo que distingue a este problema de otros problemas de optimización sin restricciones, es la presencia de dos ecuaciones de movimiento para Γ y para μ. Sin embargo debemos tener en cuenta varias cosas:

- Γ es una variable cuya única misión es permitirnos introducir - **μG(t,y,u)** en el Hamiltoniano.

La trayectoria temporal de Γ no nos interesa realmente, por lo que podemos omitir esta ecuación sin perder información relevante.

- La ecuación para μ sí nos proporciona información importante. Al no aparecer la variable Γ, en el modelo, $\dot{\mu}=-\frac{\partial H}{\partial \Gamma}$ ⇒ μ (t) constante.

Esto corrobora la afirmación inicial de que la variable de coestado asociada a la integral, era una constante a lo largo del tiempo. Mientras recordemos ésto, podemos omitir del modelo, también la ecuación para $\dot{\mu}$.

### 2.2.3 Restricciones de desigualdad

El método de sustitución no es fácilmente aplicable a los problemas en los que las restricciones presentan desigualdad. Por ello es necesario utilizar un sistema alternativo para estas situaciones.

En este tipo de problemas el número de variables de control puede ser mayor que el número de restricciones, esto se debe a que las restricciones de desigualdad permiten más libertad de elección que en el caso de las igualdades.

Por simplicidad analizaremos un problema con dos variables de control y dos restricciones:

$$\text{Max: } \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)\, dt$$

$$\text{s.a.} \quad y = f(t,y,u_1,u_2)$$

$$g_1(t,y,u_1,u_2) \leq c_1$$

$$g_2(t,y,u_1,u_2) \leq c_2$$

junto a las condiciones de frontera.

El Hamiltoniano definido en el apartado anterior también es válido para este problema, pero ahora debe maximizarse respecto a $u_1$ y a $u_2$ sujeto a restricciones de desigualdad, necesitamos por ello recurrir a las condiciones de *Kühn - Tucker*[1] .

Además, según el Tª de *Arrow, Hurwick y Uzaya*, las restricciones deben:

- ser cóncavas en ( $u_1$, $u_2$ )
- ser lineales en ( $u_1$ , $u_2$ )
- debe existir un punto en la región de control tal que, al evaluar en $u_0$ todas las restricciones son estrictamente menores que las respectivas constantes de restricción
- debe cumplirse la condición de rango[2]

[1]Implican condiciones de holgura complementaria( cualquier multiplicador de Lagrange se anula si la restricción correspondiente se satisface como desigualdad estricta y cualquier restricción se satisface como igualdad si el correspondiente multiplicador es > 0.

[2]El rango de la matriz de las derivadas parciales de las restricciones efectivas con respecto a $u_i$, evaluada en el óptimo es igual al nº de restricciones

Ahora incluímos el Hamiltoniano en la función Lagrangiana:

$$L = F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t).f(t,y,u_1,u_2) + \theta_1[c_1 - g_1(t,y,u_1,u_2)] + \theta_2[c_2 - g_2(t,y,u_1,u_2)]$$

Para simplificar la expresión anterior, omitiremos las variables que no den lugar a confusión:

$$L = F + \lambda.f + \theta_1(c_1 - g_1) + \theta_2(c_2 - g_2)$$

aplicando las condiciones del *principio optimizador* :

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = 0 \quad \forall t / \theta \leq t \leq T$$ [3]

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = c_i - g_i \geq 0 \qquad \theta_i \geq 0 \qquad \theta_i . \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \Rightarrow \textit{Kühn-Tucker}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \dot{y} \quad \Rightarrow \text{Ecuación de movimiento para y.}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial y} = \dot{\lambda} \quad \Rightarrow \text{Ecuación de movimiento para } \lambda.$$

además de las condiciones de transversalidad.

[3]Señalar que en el problema planteado u no tiene restricciones de no negatividad, si las hubiera esta 1ª condición se transformaría en $\partial L/\partial u \leq 0$ $u \geq 0$ $u.\partial L/\partial u = 0$ , por las condiciones de *Kuhn - Tücker*.

### 2.2.4 Restricciones de desigualdad en forma de integrales.

Plantearemos un nuevo problema con una variable de estado **u**, y una restricción en forma de integral :

$$\text{Máx: } \int_0^T F(t,y,u)\,dt$$

$$\text{s.a.:} \quad \dot{y} = f\,(t,y,u)$$

$$\int_0^T G(t,y,u)dt \le k \qquad (\,k \text{ dado}\,)$$

$$y(0) = y_0 \qquad y(T)\ \text{libre} \qquad (\,y_0\,,\,T \text{ dados}\,)$$

Introducimos una nueva variable de estado Γ, de forma que pueda sustituirse la integral:

$$\Gamma\,(t) = -\int_0^t G(t,y,u)\,dt$$

$$\dot{\Gamma}(t) = -\,G(t,y,u) \Rightarrow \text{Ecuación de movimiento de } \Gamma.$$

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(t,y,u)\,dt = 0$$

$$\Gamma(T) = -\int_0^t G(t,y,u)\,dt \ge -k \quad \Rightarrow \ \text{condición terminal.}$$

El problema quedará transformado en:

$$\text{Max: } \int_0^T F(t,y,u)\, dt$$

$$\text{s. a:} \quad \dot{y} = f(t,y,u)$$

$$\dot{\Gamma} = - G(t,y,u)$$

$$y(0) = y_0 \qquad y(T) \text{ libre} \qquad \Gamma(0) = 0 \quad \Gamma(T) \geq K$$

Al igual que en los casos anteriores se construye el Hamiltoniano:

$$H = F(t, y, u) + \lambda\, f(t, y, u) - \mu\, G(t, y, u)$$

y finalmente se aplican las condiciones de maximización al problema:

$$\underset{u}{\text{Max}}\ H \qquad \forall\, t \in [\,0, T\,]$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Rightarrow \text{ ecuación de movimiento para y,}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \text{ ecuación de movimiento para } \lambda,$$

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \Rightarrow \text{ ecuación de movimiento para } \Gamma,$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} \Rightarrow \text{ ecuación de movimiento para } \mu.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda(T) = 0 & \Gamma(T) + K \geq 0 \\ \mu(T) \geq 0 & \mu(T).[\Gamma(T) + K] = 0 \end{matrix}\right\} \text{ condiciones de } \textit{Kühn - Tucker}.$$

### 2.2.5 El valor de descuento: un caso particular.

Cuando un problema de control óptimo con restricciones incluye un factor de descuento, cabe la posibilidad de utilizar el valor descontado del Hamiltoniano $H_C$, con el fin de simplificar la resolución de dicho problema.En este caso $L$ también quedará transformada en $L_C$.

Sea el problema:

$$\text{Max} \int_0^T \varphi(t, y, u).e^{-\rho t}\,dt$$

$$\text{s.a.} \quad y = f(t, y, u)$$

$$g(t, y, u) \leq c$$

junto a las condiciones de frontera.

H y $L$ tal y como se han venido construyendo en epígrafes anteriores serían:

$$H = \varphi\,(t, y, u).e^{-\rho t} + \lambda.f(t, y, u)$$

$$L = \varphi(t, y, u).e^{-\rho t} + \lambda.f(t, y, u) + \theta[c - g(t, y, u)]$$

Aplicando el principio maximizador:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = c - g(t, y, u) \geq 0 \quad \theta \geq 0 \quad \theta.\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial y}$$

junto a las condiciones de transversalidad.

Introduciremos nuevos multiplicadores o variables de coestado para transformar H y $L$ en $H_C$ y $L_C$, es decir , en sus respectivos valores descontados.

$$H_C = H.e^{\rho t} \qquad L_C = L.e^{\rho t} \quad \text{luego,}$$

$$H_C = [\varphi(t, y, u).e^{-\rho t} + \lambda.f(t, y, u)].e^{\rho t}$$

$$H_C = \varphi(t, y, u) + \lambda.e^{\rho t}.f(t, y, u)$$

$$L_C = \varphi(t, y, u) + \lambda.e^{\rho t}.f(t, y, u) + \theta.e^{\rho t}[c - g(t, y, u)]$$

Siendo:

$$m = \lambda.e^{\rho t} \quad y \quad n = \theta.e^{\rho t} \qquad \text{entonces,} \quad \lambda = m.e^{-\rho t} \quad y \quad \theta = n.e^{-\rho t}$$

sustituyendo en $H_C$ y en $L_C$ ,

$$H_C = \varphi( t, y, u) + m.f(t, y, u)$$

$$L_C = H_C + n.[c - g(t, y, u)]$$

Al aplicar ahora el principio de máximo puede observarse que, tras los cambios efectuados, se ha simplificado la resolución del problema:

$$\frac{\partial L_c}{\partial u} = 0 \qquad \forall\, t \in [\,0,T]$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial n} \geq 0 \qquad n \geq 0 \qquad n \cdot \frac{\partial L_c}{\partial n} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial L_c}{\partial m} \qquad \dot{m} = -\frac{\partial L_c}{\partial y} + \rho \cdot m$$ [4]

[4] Para obtener la ecuación de movimiento de la nueva variable de coestado, derivaremos la expresion de la variable inicial en función de ella:

En el caso de que las restricciones del problema tengan forma de integral, crearemos la variable $\Gamma$ ya mencionada en el apartado 2.3, y construiremos $H_C$ y $L_C$, de forma que al igual que en el caso explicado el problema quede transformado en otro sin restricciones.

### 2.2.6 Condiciones suficientes

Las condiciones suficientes de Mangasarian y Arrow, válidas para los problemas sin restricción, son válidos también aquí en problemas de optimización con restricciones pero con horizonte fijado.

1) Sea **u** el vector de variables de control

$u=u(u_1,u_2)$

2) Sea **H** el valor del hamiltoniano maximizado, es decir el valor del Hamiltoniano en **u(t)**. Pero ahora también se deberá cumplir:

s.a. $g(t,y,u)=c$ ó $g(t,y,u)\leq c$

Y además la nueva variable constante $\mu$ de los problemas que incluían restricciones en forma de integral, deberá aparecer reflejada en **H**.

3) El principio maximizador de condición suficiente para una maximización global del funcional objetivo es:

1° Cada Lagrangiana es cóncava en **(y,u)** $\forall t\in[0,T]$

ó 2° H es cóncavo en **y** $\forall t\in[0,T]$ para un $\lambda$ dado.

4) En los problemas de horizonte infinito, estas condiciones anteriores, deben verse complementadas por una condición de transversalidad:

$$\underset{t\to\infty}{Lím.}\ \lambda(t)\,[\,y(t)-y(t)]\geq 0$$

---

$\lambda = m.e^{-\rho t} + \rho.m.e^{-\rho t}$, y la combinamos con la igualdad $\dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial y}$

Es importante tener en cuenta que la concavidad de la Lagangiana en **(y,u)** implica concavidad en las variables **y**, **u** de manera conjunta, no por separado. Además como **H** y **L** están compuestas por **F**, **f**, **g** y **G**:

$$H=F+\lambda f-\mu G$$

$$L=H+\theta(c-g)$$

Las condiciones suficientes serán satisfechas siempre y cuando:

F sea cóncava en (y,u)

$\lambda f$ sea cóncava en (y,u)

$\mu G$ sea cóncava en (y,u)

y 0g sea convexa en (y,u) $\forall t \in [0, T]$

En los casos de restricciones de desigualdad con integral donde $\mu$ es una constante no negativa, la convexidad de $\mu$**G** está asegurada por **G** solamente.

En el caso de restricción con desigualdad, con $\theta \geq 0$, la convexidad de $\theta$**g** está asegurada por la convexidad de **g**.

Si el valor actual del Hamiltoniano y Lagrangiano es usado, puede ser fácilmente adaptado reemplazando **L** por **Lc** , y **H** por **Hc**.

### 2.3 Restricciones que no incluyen variables de control. *Restricciones estado-espaciales.*

El objetivo de este tipo de problemas es situar las restricciones en el espacio estado y demarcar el área permitida de movimiento para la variable **y** . En general la forma de estas restricciones es:

$$h(t,y) \leq c \qquad \forall\, t \in [\,0,T]$$

Debemos tener en cuenta que es mera coincidencia, que cuando ignoramos la restricción y resolvemos como un problema sin restricciones, la solución óptima **y(t)** cae por entero en el área permitida. En este tipo de casos la restricción será trivial. Con restricciones espacio-estado no triviales, la solución óptima del problema sin restricciones saldría fuera del área permitida (por ejemplo en muchos problemas económicos la zona de no negatividad)

Sea el problema planteado:

$$\text{Máx.} \int_0^T F(t,y,u)dt$$

$$\text{s.a. } \dot{y} = f(t,y,u) \qquad (1)$$

$$h(t,y) \leq c$$

y las condiciones de frontera.

No podemos ahora aplicar el método seguido para los casos anteriores. Antes suponíamos contínuas las variables **y**, $\dot{\lambda}$ . Las únicas que podían ser no continuas eran las variables de control. En este tipo de problemas la variable de coestado $\lambda$ puede ser no continua, en los puntos donde la restricción estado-espacial pasa de la inactividad a la actividad o viceversa.

Si t es el punto de cambio de un intervalo sin restricciones a uno con ellas, si denotamos por $\lambda^-$**(t)** y $\lambda^+$**(t)** el valor de $\lambda$ justo antes y después del salto, entonces la condición de salto es:

$$\lambda^+(t) = \lambda^-(t) + bh_y \quad (b \geq 0)$$

Otra posible alternativa sería que como **h(t,y)** no puede exceder **c**, entonces siempre que **h(t,y)=c**, debemos prohibir que **h(t,y)** sufra incrementos. Para ello imponemos la condición:

$$\frac{dh}{dt} \leq 0 \quad \text{siempre que h(t,y)=c.}$$

Recordemos que:

$$\frac{d}{dt}h(t,y) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h_t + h_y f(t,y,u) \equiv \dot{h}(t,y,u)$$

La condición se puede expresar entonces como:

$$\dot{h}(t,y,u) \equiv h_t + h_y f(t,y,u) \leq 0 \quad \text{siempre que h(t,y)=c}$$

El nuevo problema será:

$$\text{Máx.} \int_0^T F(t,y,u)dt$$

$$\text{s.t} \quad \dot{y} = f(t,y,u) \qquad (2)$$

$$\dot{h}(y,y,u) = h_t + h_y f(t,y,u) \leq 0 \quad \text{siempre que h(t,y)=c}$$

y las condiciones de frontera.

Queremos comparar el **nuevo** principio de maximización con el visto en el caso de restricciones de igualdad con variables de control. Para ello utilizaremos distintos multiplicadores $\Lambda, \Theta$ :

$$L' = F(t,y,u) + \Lambda f(t,y,u) - \Theta \dot{h}$$

Las condiciones de maximización serán:

$$\frac{\partial L'}{\partial u} = F_u + \Lambda f_u - \Theta h_y f_u = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \Theta} = -\dot{h} = -h_t - h_y f(t,y,u) \geq 0 \quad \Theta \geq 0 \quad \Theta \frac{\partial L'}{\partial \Theta} = 0$$

Debemos añadir para que la condición anterior no sea sólo cierta para h(t,y)=c, otra condición complementaria:

h(t,y)≤c   Θ[c-h(t,y)]=0 ⇒ h(t,y)<c →Θ=0 ó h(t,y)=c →Θ>0

Las condiciones del principio maximizador serán:

$$\frac{\partial L'}{\partial u} = F_u + \Lambda f_u - \Theta h_y f_u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = -\dot{h} = -h_t - h_y f(t,y,u) \geq 0 \quad \Theta \geq 0 \quad \Theta \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$$

h(t,y)≤c   Θ[c-h(t,y)]=0

$\dot{\Theta} \geq 0$   [=0 cuando h(t,y)<c]

$$\dot{y} = \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = f(t,y,u)$$

$$\dot{\Lambda} = -\frac{\partial L'}{\partial y} = -F_y - \Lambda f_y + \Theta\left[h_{y_t} + h_y f_y + h_{yy} f\right]$$

más las condiciones de transversalidad.

Debemos tener en cuenta que tras derivar $\dot{h}$ de la función de la restricción h(t,y), podemos aplicar directamente las condiciones del principio maximizador, sin transformarlo antes del estado inicial planteado en (1) al estado planteado en (2).

Asumimos que la máximización de la Lagrangiana respecto a **u**, nos da una solución interior. Si la variable de control está sujeta a condición de no negatividad u(t)≥0, entonces $\frac{\partial L'}{\partial u} = 0$ será reemplazada por las condiciones de KÜHN-TUCKER:

$\frac{\partial L'}{\partial u} \leq 0 \quad u \geq 0 \qquad u\frac{\partial L'}{\partial u} = 0$, lo cual permite obtener una solución de contorno. Aunque existe solución de contorno siempre que la variable de control tenga delimitada su zona

## 3. APLICACIONES ECONOMICAS

### 3.1 El ciclo del negocio político

Este modelo desarrollado por William Nordhaus, parte de la idea de que en una democracia es competencia de un partido político para protegerse de los rivales tomar decisiones en cada periodo electoral sobre los ratios de desempleo y nivel de inflación. El autor utiliza una función de voto y la curva de Phillips para relacionar las dos variables anteriores.

El partido en el poder está obligado a desarrollar políticas que mejoren el bienestar de los votantes, para así ganar las elecciones. Este modelo se centra en las políticas económicas, y se basa en dos variables de control:

U: nivel de desempleo.

p: nivel de inflación,

que son las dos preocupaciones primordiales del electorado, que reaccionan en cada momento ante sus valores.

$v=v(U,p)$ Función de voto que medirá el poder del partido para captar el voto.

$v_u < 0$ → Ya que a mayor nivel de desempleo, mayor pérdida de votos.

$v_p < 0$ → Ya que a mayor nivel de inflación , mayor pérdida de votos.

La curva de Phillips : $p= \phi(U)+\alpha\pi \quad \phi' < 0$, $\pi$ inflación esperada, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Suponemos un modelo de expectativas adaptables:

$\pi' = b(p-\pi) \quad (b>0)$

Tenemos pues tres variables **U** , **p** , $\pi$. Tomaremos como variable de estado a $\pi$ :

($\pi$) variable de estado.

($\pi'$) ecuación de movimiento $\pi' = b(p-\pi)$.

(U) variable de control ( ya que afecta a **p** , y a $\pi$)$\Rightarrow$ Suponer que el partido en el poder tiene influencia para modificar **U**.

(p) simple función de las otras variables.

El problema supone que un partido gana las elecciones en t=0 y las siguientes son en t=T. El partido gobernante tiene T años para convencer e impresionar a sus votantes, para ganar votos.

En cualquier momento del periodo $[0, T]$ los pares de valores p , **U** determinan un valor concreto de v.

Este problema así planteado se podrá resolver bien mediante cálculo de variaciones, bien mediante control óptimo.

## Resolución del problema mediante cálculo de variaciones

El problema quedaría planteado como:

$$\text{Máx. } \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt$$

$$\text{s.a:} \quad p = \phi(U) + \alpha\pi$$

$$\pi' = b(p - \pi)$$

$$\pi(0) = \pi_0 \quad \pi(T) \text{ libre} \quad (\pi_0, T \text{ dados})$$

En este primer planteamiento del problema prescindiremos de la ecuación $p=\phi(U)+\alpha\pi$, dado que la variable **p**, puede ser sustituida con facilidad en la función de voto y en la ecuación de movimiento.

Siendo $\mathbf{e^{rt}}$ un actualizador. Deberá dar más peso a los acontecimientos más cercanos en el tiempo, ya que asumimos una memoria colectiva breve. (r>o: ratio de pérdida de memoria).

Para resolver el problema cuantitativamente Nordhaus asume las siguientes funciones específicas:

$$v(U,p) = -U^2 - hp \quad (h>0)$$

$$\phi(U) j - kU \quad (j,k>0)$$

El problema a resolver mediante cálculo de variaciones sería:

$$\text{Máx.} \int_0^T (-U^2 - hj + hkU - h\alpha\eta)e^{rt}dt$$

$$\text{s.a.} \quad \pi' = b[j - kU - (1-\alpha)\pi]$$

$$\pi(0) = \pi_0 \quad \pi(T) \text{ libre} \quad (\pi, T \text{ dados})$$

El Hamiltoniano es: $H = (-U^2 - hj + hkU - h\alpha\pi)e^{rt} + \lambda b[j - kU - (1-\alpha)\pi]$

Maximizando **H** con respecto a la variable de control **v**, tenemos la ecuación :

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0$$

Esto implica la trayectoria de control:

$$U(t) = 1/2k(h - \lambda b\, e^{-rt})$$

Como $\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2e^{rt} < 0$, la trayectoria de control maximiza el Hamiltoniano en cualquier momento del tiempo , como requiere el principio maximizador.

Debemos ahora obtener la trayectoria de control óptima para la variable de coestado:

$$\lambda' = \frac{\partial H}{\partial \pi} = h\alpha e^{rt} + \lambda b(1-\alpha)$$

Reescribiendo la ecuación de movimiento para $\lambda$ : $\lambda' - b(1-\alpha)\lambda = h\alpha e^{rt}$ se puede reconecer una ecuación diferencial lineal de orden uno. La solución general para $\lambda$ será:

$$\lambda_c = Ae^{b(1-\alpha)t} \qquad \text{(A arbitrario)}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h\alpha}{B}e^{rt} \qquad (B \equiv r - b + \alpha b)$$

$$\lambda(t) = \lambda_c + \bar{\lambda} = Ae^{b(1-\alpha)t} + \frac{h\alpha}{B}e^{rt} \qquad \text{Solución general.}$$

Determinamos A, utilizando las condiciones de transversalidad $\lambda(\pi)=0$. Dejando t=T, aplicamos la condición y despejando A, tenemos $A = (-h/B)e^{BT}$.La solución definitiva será pues:

$$\lambda(t) = (h\alpha/B)[e^{rt} - e^{BT + b(1-\alpha)t}]$$

Por último la trayectoria óptima de conntrol será, tras simplificar:

$$U(t) = (kh/2B)[(r-b) + b\alpha e^{B(T-t)}]$$

Esta es la trayectoria de control que el partido político deberá seguir si quisiese ser reelegido en el año T. Podemos además, a partir de aquí, observar que:

$$-\frac{dU^*}{dt} = -1/2\ khb\alpha e^{B(T-t)} < 0, \text{ porque } \mathbf{k}, \mathbf{h}, \alpha \text{ y } \mathbf{b} \text{ son positivos.}$$

La política económica maximizadora del voto es por tanto, establecer un nivel alto de desempleo nada más ganar las elecciones en el momento t=0, y luego despacio dejar caer el nivel de desempleo a lo largo del periodo [0,T]. De hecho, los niveles óptimos de desempleo en los momentos 0, T pueden ser perfectamente determinados.

$$U(0)= kh/2B[(r-b)+b\,\alpha e^{BT}]$$

$$U(T)= kh/2B[(r-b)+b\alpha]=kh/2$$

- El nivel final de desempleo es una cantidad positiva, lo cual y al ser un máximo de esta función, implica que la estrategia de no imponer ninguna restricción sobre **U**, no causa problemas sobre el signo de **U** en este caso. De cualquier modo, para ser totalmente correctos, el significado económico de U(0), nos indica que debe ser menor que la unidad, o mejor aún, menor que un ratio máximo tolerable de desempleo. Respecto a la inflación, el comportamiento general nos indica que debería ser relativamente baja al comienzo de cada periodo, para ir subiendo poco a poco.

## Resolución mediante control óptimo

Veamos como podemos pasar de un problema sin restricción a uno con restricción. Supongamos que tenemos planteado el problema como lo habíamos hecho en cálculo de variaciones:

$$Máx \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt$$

$$\text{s.a:} \quad p= \phi(U)+\alpha\pi$$

$$\pi' = b(p-\pi)$$

$$\pi(0)= \pi_0 \quad \pi(T) \text{ libre} \quad (\pi_0,T \text{ dados}).$$

Vamos a restituir la restricción de igualdad que habíamos omitido como tal en la resolución mediante cálculo de variaciones:

$$p= \phi(U)+\alpha\pi$$

En el problema tendremos pues:

$\pi$ : variable de estado.

$\pi'$: ecuación de movimiento.

U: única variable de control tras la sustitución.

p: nueva variable de control.

$$p-\phi(U)-\alpha\pi=0 \qquad \text{Restricción.}$$

Construimos el Lagrangiano:

$$L= v(U,p)e^{rt}+\lambda b(p-\pi)+\theta[\phi(U)+\alpha\pi-p]$$

Recordemos las funciones propuestas por Nordhaus para resolver es problema cuantitativamente:

$$v(U,p)=-U^2-hp \qquad (h>0)$$

$$\phi(U)j-kU \qquad (j,k>0)$$

El Lagrangiano tomará la forma:

$$L= (-U^2-hp)e^{rt}+\lambda b(p-\pi)+\theta[j-kU+\alpha\pi-p]$$

El principio de maximización nos lleva a :

$$\frac{\partial L}{\partial U}= -2Ue^{rt}-\theta k=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p}=-he^{rt}+\lambda b-\theta=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=j-kU+\alpha\pi-p=0 \qquad (3)$$

$$\pi'=\frac{\partial L}{\partial \lambda}= b(p-\pi) \qquad (4)$$

$$\lambda'=-\frac{\partial L}{\partial \pi}=\lambda b-\theta\alpha \qquad (5)$$

En el modelo sin restricciones obtuvimos:

$$\frac{\partial H}{\partial U}=(-2U+hk)e^{rt}-\lambda bk=0 \qquad (6) \text{ Máx del hamiltoniano.}$$

$$\pi'= b[j-kU-(1-\alpha)\pi] \quad \text{Ecuación movimiento estado . (7)}$$

$$\lambda'= h\alpha e^{rt}+\lambda b(1-\alpha) \quad \text{Ecuación de movimiento constante. (8)}$$

Resolviendo (2) para $\theta$:

$$\theta= -he^{rt}+\lambda b \qquad (9)$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{\partial l}{\partial U}=-2Ue^{rt}+hke^{rt}-\lambda bk=0 \equiv (6)$$

Resolviendo (3) para p, tenemos:

$$p=j-kU+\alpha\pi, \qquad \text{que restablece la restricción.}$$

Esto nos permite escribir (4) como :

$$\pi'= b(j-kU+\alpha\pi-\pi)=b[ j-kU-(1-\alpha)\pi] \equiv (7)$$

Finalmente utilizando la expresión de $\theta$ en (9) tenemos que (5) se puede reescribir como:

$$\lambda'=\lambda b+h\alpha e^{rt}-\lambda b\alpha= \lambda b(1-\alpha)+h\alpha e^{rt}$$

Que es exactamente (8), la expresión obtenida en la resolución del modelo mediante claculo de variaciones. Vemos pues, que los dos planteamientos son equivalentes.

## 3.2 La maximización de beneficios de una empresa en el contexto dinámico

En la mayoría de los modelos contemplados por la teoría económica, el objetivo de la empresa es la maximización del beneficio total; un ejemplo claro de este planteamiento es el modelo de Evans de Monopolio Dinámico.

Baumol, sin embargo, ha desarrollado un modelo estático de optimización en una empresa desde un punto de vista diferente. Dado que en la actualidad en la mayoría de las empresas existe una separación entre propiedad y control, el objetivo de los directivos ya no será maximizar los beneficios, sino maximizar los ingresos por ventas; pero siempre manteniendo un nivel mínimo de dividendos, con el fin de no enfrentar sus intereses a los de los accionistas.

La validez de este modelo ha sido cuestionada en el contexto dinámico, ya que si se acepta que los beneficios son el vehículo de crecimiento de una empresa, y este crecimiento a su vez, posibilita el incremento de la producción y con ello el de las ventas potenciales; puede parecer que bajo una perspectiva dinámica, la maximización del beneficio sería prerrequisito para la maximización de las ventas.

Vamos a considerar el planteamiento de Baumol en el desarrollo de un modelo de control óptimo.

Consideraremos una empresa que produce un único bien, con una función de producción neoclásica: linealmente homogénea y estrictamente cuasicóncava,

$$Q = Q(K, L) \quad \text{siendo} \quad k = K / L \quad \Rightarrow \quad Q / L = \phi(k)$$

$$Q_K = \phi'(k) \qquad Q_K > 0 \qquad Q_{KK} < 0 \quad (A)$$

$$Q_L = \phi(k) - k.\phi'(k) \quad Q_L > 0 \quad Q_{LL} < 0 \quad (B)$$

Todos los precios, incluido el salario **w** y el precio del capital se suponen constantes, y el precio del producto se considera igual a la unidad. Bajo estas condiciones los ingresos de la empresa serán:

$$R = Q(K, L).\ 1 = Q(K, L) \ , \ \text{y el beneficio } \Pi = R - w.L = Q(K, L) - w.L$$

Para satisfacer a los accionistas, los directivos han de mantener un mínimo interés de reembolso del capital ($r_0$), luego, el comportamiento de estos últimos estará restringido por la inecuación:

$$\frac{\Pi}{K} \geq r_0 \quad \Rightarrow \Pi - K.r_0 \geq 0 \quad \Rightarrow Q(K, L) - w.L - r_0 .K \quad \geq 0$$

Para simplificar, definimos $\alpha$ como la relación existente entre el capital reinvertido y el precio del capital. Luego la tasa de variación del capital será:

$$\dot{K} = \alpha .\Pi = \alpha[Q(K, L) - w.L]$$

Podemos plantear entonces el problema de maximización de ingresos por ventas como un problema de control óptimo, con una restricción de desigualdad :

$$\text{Max} \quad \int_0^T Q(K, L).e^{-\rho t}\, dt$$

$$\text{s.a.} \quad \dot{K} = \alpha[Q(K, L) - w.L]$$

$$w.L + r_0.K \; - Q(K, L) \leq 0$$

$$\text{y} \quad K(0) = K_0 \qquad K(T) \text{ libre} \qquad (K_0, T \text{ dados})$$

En el modelo hay dos variables **K** como variable de estado y **L** como variable de control. La ecuación de la desigualdad es convexa en L, y el conjunto de restricciones tiene solución interior ( $\Pi$ / K > $r_0$ . Luego, se satisfacen todas las condiciones necesarias para aplicar el principio de máximo.

Construimos $H_C$ y $L_C$

$$H_C = Q(K, L) + m.\alpha[Q(K, L) - w.L]$$

$$L_C = Q(K, L) + m.\alpha[Q(K, L) - w.L] \; + n.[Q(K, L) - w.L - r_0.K]$$

según el principio del máximo

$$\frac{\partial L_c}{\partial L} = 0 \quad \Rightarrow ( 1 + m.\alpha + n)Q_L - (m.\alpha + n)w = 0 \qquad \forall\, t \in [\, 0, T] \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial n} \geq 0 \quad n \geq 0 \quad n.\frac{\partial L_c}{\partial n} = 0 \Rightarrow \quad Q(K, L) - w.L - r_0.K \geq 0 \quad n \geq 0$$

(2)

$$n[\, Q(K, L) - w.L - r_0.K] = 0$$

$$\dot{K} = \frac{\partial L_c}{\partial m} \quad \Rightarrow \quad \dot{K} = \alpha\, [Q(K, L) - wL] \qquad (3)$$

$$\dot{m} = -\frac{\partial L_c}{\partial K} + \rho \cdot m \quad \Rightarrow \quad - (1 + m.\alpha + n)Q_K + nr_0 + \rho.m = \dot{m} \qquad (4)$$

$m(T) = 0$

Veamos el ***análisis cualitativo*** del problema para obtener alguna conclusión.Combinando las cuatro condiciones anteriores con (A) y (B), el planteamiento se transformaría en:

$$(1 + m.\alpha + n).[\varphi(k) - k.\varphi'(k)] - (m.\alpha + n).W = 0 \qquad (1')$$

$$\varphi(k) - w - r_0.k \geq 0 \quad n \geq 0 \quad n[\varphi(k) - w - r_0.k] = 0 \quad (2')$$

$$\dot{k} = \alpha.L[\varphi(k) - w] \qquad (3')$$

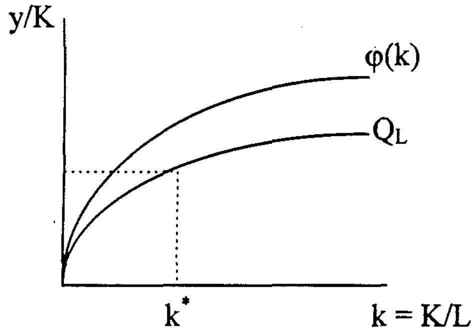
$$\dot{m} = - (1 + m.\alpha + n).\varphi'(k) + n.r_0 + \rho.m \quad (4')$$

Definiremos $\mathbf{k^*}$ como el nivel de k que maximiza el beneficio total, y $\mathbf{k_0}$ como el nivel de k que iguala el interés de reembolso a $r_0$,

si $k = k^* \Rightarrow Q_L = w$ ó bien $\varphi(k) - k.\varphi'(k) = w$

si $k = k_0 \Rightarrow \Pi/K = r_0$ ó bien $\varphi(k) - w = r_0.k$

Gráficamente:




($k_0$ es razonable esperar que se encuentre a la izquierda de $k^*$ )

Si $k_0 < k^*$ , n será nulo por las condiciones de inercia. Luego:

$$\frac{\partial L_c}{\partial L}_{(Cuando \quad n=0)} = (1+m\cdot\alpha)\cdot[\varphi(k) - k\cdot\varphi'(k)] - m\cdot\alpha\cdot\omega = 0,$$ esta ecuación puede

representarse como una curva F(k, m) cuya pendiente será:

$$\frac{dm}{dk}_{(\partial L_c/\partial L=0)} = -\frac{\partial F/\partial k}{\partial F/\partial m} = \frac{(1+m\cdot\alpha)k\varphi''(k)}{\alpha[\varphi(k) - k\varphi'(k) - \omega]},$$ el numerador es negativo

debido al _signo de $\varphi''(k)$.

Para todo $k < k^*$, el denominador es también nagativo, ya que **w** está por encima de $Q_L$.

Al aproximarse k a $k^*$ hacia la izquierda, el denominador tenderá a 0, lo que hace que la pendiente de la curva sea $\infty$.

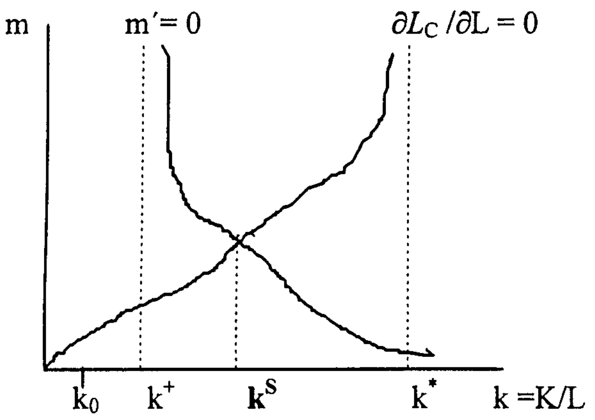
Al aproximarse k a 0, el numerador tenderá a 0, lo que hace nula la pendiente.

Llamaremos G(m, k) a m′ cuando n se anula, entonces:

$$dm / dk_{(SI\ \ m'=0)} = -\frac{\partial G / \partial k}{\partial G / \partial m} = \frac{(1+m\alpha)\varphi''(k)}{-\alpha\varphi'(k)+\rho}$$

Sea **$k^+$** el valor de k que satisface $\rho = \alpha.\varphi'(k)$, como $\varphi'(k)$ decrece al hacerlo k, para todo k mayor que $k^+$, el denominador es mayor que 0 lo que hace que dm/dk sea menor que cero. Si k tiende a $k^+$ por la derecha, dm/dk se hará infinito

Gráficamente:




**$k^S$** es el nivel de k para el que se cumple: $\partial L_c / \partial L = m' = 0$, cuando n = 0.Esta intersección se dará sólo si $k^+$ se encuentra a la izquierda de $k^*$.Del gráfico se deduce que el punto donde se cruzan las dos curvas no se encuentra en $k^*$ , es decir, en el punto de máximo beneficio.Esto supone que **en el contexto dinámico no es necesario rechazar el nuevo punto de vista de maximización de ingresos por ventas, en vez de maximizar el beneficio total.**

De hecho, realizando un análisis posterior del modelo, se observa la tendencia de que el nivel de k que maximiza los ingresos por ventas gravita en torno a $k_0$ (punto donde $r_0$ es el nivel mínimo aceptable del interés de reembolso), y la única circunstancia en que la empresa maximiza beneficios es cuando $k^+$ es mayor que $k^*$.

A lo largo de este análisis no se ha contemplado la ecuación de movimiento de K, pero transformándola a través de K = k.L, se obtiene:

$\dot{K} = \dot{k}.L + k.\dot{L}$, como $\dot{K} = \alpha.L.[\varphi(k) - w]$, entonces $\dot{k}.L + k.\dot{L} = \alpha.L.[\varphi(k) - w]$,

de donde $\dfrac{\dot{L}}{L} = \dfrac{\alpha L[\varphi(k) - w] - \dot{k}}{k}$

luego una vez que se ha obtenido una trayectoria óptima para k, a través de esta última ecuación podrá obtenerse la trayectoria óptima correspondiente para la variable de control.

### 3.3 El problema de la acumulación de capital bajo restricciones financieras.

William Schoworm analiza una firma sin posibilidades de financiación vía préstamo y cuya inversión únicamente puede ser financiada mediante sus propios beneficios retenidos.

El autor plantea un modelo donde:

$\pi(t,K)$ es la función de beneficios de la empresa.

$I(t)$ representa el gasto en inversión, siendo $I(t)>0$

Donde no se puede vender capital usado.

Donde no pueden tomar prestados fondos.

El flujo de caja $\phi(t)$ depende sólamente de los beneficios y de la inversión:

$$\phi(t)= \pi(t,K)-I(t)$$

El objetivo de la empresa es:

Máx. $Má\,x\int_0^{\infty}\phi(t)e^{-\rho t}dt$ , donde ρ es la tasa de retorno que los poseedores del capital podrían obtener en inversiones alternativas, así como la tasa de retorno que la firma podría obtener de sus dividendos retenidos.

Partiendo de un nivel inicial, los dividendos retenidos **R(t)**, sólo pueden ser incrementados mediante otras retenciones recibidas (al ratio ρ) de los dividendos **(R)**, o por un flujo de caja positivo. Lo cual implica:

$$\dot{R}(t) = \rho R(t) + \phi(t) = \rho R(t) + \pi(t,K) - I(t)$$

Asumiendo no depreciación del capital:

$$\dot{K}(t) = I(t)$$

Las variables de estado de este problema de control óptimo con resstricciones que no incluyen variables de control, serán **R(t)** y **K(t)**.Deberemos al ser ambas variables no negativas, imponer una restricción sobre **R(t)**, es decir, R(t)≥0. La variable de control será **I(t)**.

El problema quedará planteado como:

$$\text{Máx. } \int_0^\infty [\pi(t,K) - I(t)]e^{-\rho t}dt$$

$$\text{s.a. } \dot{R}(t) = \rho R(t) + \phi(t) = \rho R(t) + \pi(t,K) - I(t)$$

$$\dot{K}(t) = I(t)$$

$$R(0)=R_0 \quad K(0)=K_0$$

$$I(t)\in[\,0,\infty)$$

Construímos el Lagrangiano:

$$L' = [\pi(t,k) - I]e^{-\rho t} + \Lambda_R[\rho R + \pi(t,K) - I] + \Lambda_K I + \Theta[\rho R + \pi(t,K) - I],$$

donde $\Lambda_R, \Lambda_K$ son variables de coestado para R y K.

Las condiciones de maximización serán:

$$\frac{\partial L'}{\partial I} = -e^{-\rho t} - \Lambda_R + \Lambda_K - \Theta \le 0 \quad Y\ge 0 \quad I\frac{\partial L'}{\partial I} = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \Theta} = \rho R + \pi(t,K) - I \ge 0 \quad \theta \ge 0 \quad \theta\frac{\partial L'}{\partial \Theta} = 0$$

$$R(t)\ge 0 \qquad \theta R(t)=0$$

$$\dot{\Theta} \le 0 \quad [=0 \text{ cuando } R>0]$$

$$\dot{R} = \frac{\partial L'}{\partial \Lambda_R} = \rho R + \pi(t,K) - I$$

$$\dot{K} = \frac{\partial L'}{\partial \Lambda_K} = I$$

$$\dot{\Lambda}_R = -\frac{\partial L'}{\partial R} = -\rho(\Lambda_R + \Theta)$$

$$\dot{\Lambda}_K = -\frac{\partial L'}{\partial K} = -\pi_K(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta)$$

más una serie de condiciones de transversalidad.[5]

Con I(t)>0 la condición complementaria obliga a que $\frac{\partial L'}{\partial I}=0$ ó a que por (1)

$$\Lambda_K = e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta$$

Diferenciando respecto a t:

$$\dot{\Lambda}_K = -\rho e^{-\rho t} + \dot{\Lambda}_R + \dot{\Theta} = -\rho e^{-\rho t} - \rho(\Lambda_R + \Theta) + \dot{\Theta} = -\rho(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta) + \dot{\Theta}$$

(Por 3)

Conjugando $\dot{\Lambda}_K$ con (4):

$$-\pi_K(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta) = -\rho(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta) + \dot{\Theta} \qquad (5)$$

Este resultado sintetiza la regla de optimización para la firma cuando Y>0.

Hemos de observar que por (2) cuando $\dot{\Theta}=0$ entonces R>0. Por (5) sabemos también que si R>0 la firma seguirá como regla de inversión: $\pi_K=\rho$ , es decir, cuaando los dividendos retenidos son positivos la firma seguirá como norma que el beneficio marginal del capital sea igual al tipo de interés de retorno del mercado.

Si R=0 en algún intervalo del tiempo $(t_1,t_2)$ ello implicaría que $\dot{R}=0$ en dicho intervalo de tiempo. Por lo tanto la regla de inversión a seguir por la firma cuando R=$\dot{R}=0$, será I(t)=π(t,K), es decir, la firma bajo restricciones invertirá su beneficio corriente. Podemos observar por consiguiente, que cuando la restricción referida a los dividendos retenidos **( R )** está siendo tenida en cuenta, la inversión se vuelve más restringida por el beneficio corriente.

[5] *Las condiciones de Kuhn-Tucker fueron aplicadas en (1), gracias a la restricción de no negaatividad de la variable de control.*

# BIBLIOGRAFIA


BORRELL VIDAL, M. (1985): *Teoría del Control óptimo.* Ed. Hispano Europea.

CHIANG, ALPHA (1992): *Elements of Dynamic optimization.* McGraw-Hill International Ed.

DIXIT, A.K. (1990): *Optimization in Economic Theory* . Ed. Oxford University Press.

INTRILLIGATOR, M. (1973): *Optimización matemática y teoría económica.* Prentice Hall International.

KAMIEN, M; SCHWARTZ, N. (1993): *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economic and management.* Ed. North Holland.

SEIERSTAD, A; SYDSAETER, K. (1986): *Optimal control with economic aplications.* Ed. North Holland.

SETHI, S; THOMPSON, G. (1981): *Optimal control theory: aplications to management sciences.* Ed. Martinus Nijhoff.

TAKAYAMA, A. (1994): *Analytical methods in Economics.* Ed. Harvester-Wheatsheaf.

TU, P. (1991): *Introductory optimization Dynamics.* Ed. Springer-Verlag

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**
**RELACIÓN DE DOCUMENTOS DE TRABAJO:**

| | |
|---|---|
| Doc. 001/88 | **JUAN A. VAZQUEZ GARCIA.**- *Las intervenciones estatales en la minería del carbón.* |
| Doc. 002/88 | **CARLOS MONASTERIO ESCUDERO.**- *Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.* |
| Doc. 003/88 | **ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA.**- *Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.* |
| Doc. 004/88 | **JAVIER SUAREZ PANDIELLO.**- *Una propuesta para la integración multijurisdiccional.* |
| Doc. 005/89 | **LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO.**- *La modernización del sector agrario en la provincia de León.* |
| Doc. 006/89 | **JOSE MANUEL PRADO LORENZO.**- *El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.* |
| Doc. 007/89 | **JAVIER SUAREZ PANDIELLO.**- *El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).* |
| Doc. 008/89 | **FELIX LOBO ALEU.**- *El gasto público en productos industriales para la salud.* |
| Doc. 009/89 | **FELIX LOBO ALEU.**- *La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.* |
| Doc. 010/90 | **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.**- *Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.* |
| Doc. 011/90 | **ANTONIO APARICIO PEREZ.**- *Infracciones y sanciones en materia tributaria.* |
| Doc. 012/90 | **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA.**- *Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.* |
| Doc. 013/90 | **EQUIPO MECO.**- *Medidas de desigualdad: un estudio analítico* |
| Doc. 014/90 | **JAVIER SUAREZ PANDIELLO.**- *Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.* |
| Doc. 015/90 | **ANTONIO MARTINEZ ARIAS.**- *Auditoría de la información financiera.* |
| Doc. 016/90 | **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ.**- *La población como variable endógena* |
| Doc. 017/90 | **JAVIER SUAREZ PANDIELLO.**- *La redistribución local en los países de nuestro entorno.* |
| Doc. 018/90 | **RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO.**- *"Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.* |
| Doc. 019/90 | **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.**- *La política de precios en los establecimientos detallistas.* |
| Doc. 020/90 | **CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ.**- *La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).* |

Doc. 021/90 **JOAQUIN LORENCES**.- *Margen precio-coste variable medio y poder de monopolio.*

Doc. 022/90 **MANUEL LAFUENTE ROBLEDO; ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ**.- *El T.A.E. de las operaciones bancarias.*

Doc. 023/90 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ**.- *Amortización y coste de préstamos con hojas de cálculo.*

Doc. 024/90 **LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JEAN-MARC BUIGUES**.- *Un ejemplo de política municipal: precios y salarios en la ciudad de León (1613-1813).*

Doc. 025/90 **MYRIAM GARCIA OLALLA**.- *Utilidad de la teorías de las opciones para la administración financiera de la empresa.*

Doc. 026/91 **JOAQUIN GARCIA MURCIA**.- *Novedades de la legislación laboral (octubre 1990 - enero 1991)*

Doc. 027/91 **CANDIDO PAÑEDA**.- *Agricultura familiar y mantenimiento del empleo: el caso de Asturias.*

Doc. 028/91 **PILAR SAENZ DE JUBERA**.- *La fiscalidad de planes y fondos de pensiones.*

Doc. 029/91 **ESTEBAN FERNANDEZ SANCHEZ**.- *La cooperación empresarial: concepto y tipología (*)*

Doc. 030/91 **JOAQUIN LORENCES**.- *Características de la población parada en el mercado de trabajo asturiano.*

Doc. 031/91 **JOAQUIN LORENCES**.- *Características de la población activa en Asturias.*

Doc. 032/91 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ**.- *Política económica regional*

Doc. 033/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ**.- *La conversión coactiva de acciones comunes en acciones sin voto para lograr el control de las sociedades anónimas: De cómo la ingenuidad legal prefigura el fraude.*

Doc. 034/91 **BENITO ARRUÑADA SANCHEZ**.- *Restricciones institucionales y posibilidades estratégicas.*

Doc. 035/91 **NURIA BOSCH; JAVIER SUAREZ PANDIELLO**.- *Seven Hypotheses About Public Chjoice and Local Spending. (A test for Spanish municipalities).*

Doc. 036/91 **CARMEN FERNANDEZ CUERVO; LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ**.- *De una olvidada revisión crítica sobre algunas fuentes histórico-económicas: las ordenanzas de la gobernación de la cabrera.*

Doc. 037/91 **ANA JESUS LOPEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ**.- *Indicadores de desigualdad y pobreza. Nuevas alternativas.*

Doc. 038/91 **JUAN A. VAZQUEZ GARCIA; MANUEL HERNANDEZ MUÑIZ**.- *La industria asturiana: ¿Podemos pasar la página del declive?.*

Doc. 039/92 **INES RUBIN FERNANDEZ**.- *La Contabilidad de la Empresa y la Contabilidad Nacional.*

Doc. 040/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL**.- *La Cooperación interempresarial en España: Características de los acuerdos de cooperación suscritos entre 1986 y 1989.*

Doc. 041/92 **ESTEBAN GARCIA CANAL**.- *Tendencias empíricas en la conclusión de acuerdos de cooperación.*

Doc. 042/92 **JOAQUIN GARCIA MURCIA**.- *Novedades en la Legislación Laboral.*

Doc. 043/92 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.**- *El comportamiento del consumidor y la estrategia de distribución comercial: Una aplicación empírica al mercado de Asturias.*

Doc. 044/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.**- *Un marco teórico para el estudio de las fusiones empresariales.*

Doc. 045/92 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.**- *Creación de valor en las fusiones empresariales a través de un mayor poder de mercado.*

Doc. 046/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *Influencia relativa de la evolución demográfica en le futuro aumento del gasto en pensiones de jubilación.*

Doc. 047/92 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.**- *Aspectos demográficos del sistema de pensiones de jubilación español.*

Doc. 048/92 **SUSANA LOPEZ ARES.**- *Marketing telefónico: concepto y aplicaciones.*

Doc. 049/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *Las influencias familiares en el desempleo juvenil.*

Doc. 050/92 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *La adquisición de capital humano: un modelo teórico y su contrastación.*

Doc. 051/92 **MARTA IBAÑEZ PASCUAL.**- *El orígen social y la inserción laboral.*

Doc. 052/92 **JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.**- *Estudio del sector comercial en la ciudad de Oviedo.*

Doc. 053/92 **JULITA GARCIA DIEZ.**- *Auditoría de cuentas: su regulación en la CEE y en España. Una evidencia de su importancia.*

Doc. 054/92 **SUSANA MENENDEZ REQUEJO.**- *El riesgo de los sectores empresariales españoles: rendimiento requerido por los inversores.*

Doc. 055/92 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.**- *Una valoración económica de la obtención de productos derivados del petroleo a partir del carbón*

Doc. 056/92 **IGNACIO ALFREDO RODRIGUEZ-DEL BOSQUE RODRIGUEZ.**- *Consecuencias sobre el consumidor de las actuaciones bancarias ante el nuevo entorno competitivo.*

Doc. 057/92 **LAURA CABIEDES MIRAGAYA.**- *Relación entre la teoría del comercio internacional y los estudios de organización industrial.*

Doc. 058/92 **JOSE LUIS GARCIA SUAREZ.**- *Los principios contables en un entorno de regulación.*

Doc. 059/92 **Mª JESUS RIO FERNANDEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.**- *Cuantificación de la concentración industrial: un enfoque analítico.*

Doc. 060/94 **Mª JOSE FERNANDEZ ANTUÑA.**- *Regulación y política comunitaria en materia de transportes.*

Doc. 061/94 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *Factores determinantes de la afiliación sindical en España.*

Doc. 062/94 **VICTOR FERNANDEZ BLANCO.**- *Determinantes de la localización de las empresas industriales en España: nuevos resultados.*

Doc. 063/94 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *La crisis de la estructura multidivisional.*

Doc. 064/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Metodología de la investigación econométrica.*

Doc. 065/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.-** *Análisis Cualitativo de la fecundidad y participación femenina en el mercado de trabajo.*

Doc. 066/94 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *La supervision colectiva de los actos de contratación: la Ley 2/1991 de información a los representantes de los trabajadores.*

Doc. 067/94 **JOSE LUIS GARCIA LAPRESTA; Mª VICTORIA RODRIGUEZ URIA.-** *Coherencia en preferencias difusas.*

Doc. 068/94 **VICTOR FERNANDEZ; JOAQUIN LORENCES; CESAR RODRIGUEZ.-** *Diferencias interterritoriales de salarios y negociacion colectiva en España.*

Doc. 069/94 **Mª DEL MAR ARENAS PARRA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Programación clásica y teoría del consumidor.*

Doc. 070/94 **Mª DE LOS ÁNGELES MENÉNDEZ DE LA UZ; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Tantos efectivos en los empréstitos.*

Doc. 071/94 **AMELIA BILBAO TEROL; CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Matrices especiales. Aplicaciones económicas.*

Doc. 072/94 **RODOLFO GUTIÉRREZ.-** *La representación sindical: Resultados electorales y actitudes hacia los sindicatos.*

Doc. 073/94 **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *Economías de aglomeración y localización de las empresas industriales en España.*

Doc. 074/94 **JOAQUÍN LORENCES RODRÍGUEZ; FLORENTINO FELGUEROSO FERNÁNDEZ.-** *Salarios pactados en los convenios provinciales y salarios percibidos.*

Doc. 075/94 **ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; CAMILO JOSÉ VÁZQUEZ ORDÁS.-** *La internacionalización de la empresa.*

Doc. 076/94 **SANTIAGO R. MARTÍNEZ ARGÜELLES.-** *Análisis de los efectos regionales de la terciarización de ramas industriales a través de tablas input-output. El caso de la economía asturiana.*

Doc. 077/94 **VÍCTOR IGLESIAS ARGÜELLES.-** *Tipos de variables y metodología a emplear en la identificación de los grupos estratégicos. Una aplicación empírica al sector detallista en Asturias.*

Doc. 078/94 **MARTA IBÁÑEZ PASCUAL; F. JAVIER MATO DÍAZ.-** *La formación no reglada a examen. Hacia un perfil de sus usuarios.*

Doc. 079/94 **IGNACIO A. RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE RODRÍGUEZ.-** *Planificación y organización de la fuerza de ventas de la empresa.*

Doc. 080/94 **FRANCISCO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ.-** *La reacción del precio de las acciones ante anuncios de cambios en los dividendos.*

*Doc. 081/94* **SUSANA MENÉNDEZ REQUEJO.-** *Relaciones de dependencia de las decisiones de inversión, financiación y dividendos.*

*Doc. 082/95* **MONTSERRAT DÍAZ FERNÁNDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ; Mª del MAR LLORENTE MARRÓN.-** *Una aproximación empírica al comportamiento de los precios de la vivienda en España.*

*Doc. 083/95* **Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.-** *Matrices semipositivas y análisis interindustrial. Aplicaciones al estudio del modelo de Sraffa-Leontief.*

*Doc. 084/95* **ESTEBAN GARCÍA CANAL.-** *La forma contractual en las alianzas domésticas e internacionales.*

*Doc. 085/95* **MARGARITA ARGÜELLES VÉLEZ; CARMEN BENAVIDES GONZÁLEZ.-** *La incidencia de la política de la competencia comunitaria sobre la cohesión económica y social.*

*Doc. 086/95* **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *La demanda de cine en España. 1968-1992.*

*Doc. 087/95* **JUAN PRIETO RODRÍGUEZ.-** *Discriminación salarial de la mujer y movilidad laboral.*

*Doc. 088/95* **Mª CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA.-** *La teoría del caos. Nuevas perspectivas en la modelización económica.*

*Doc. 089/95* **SUSANA LÓPEZ ARES.-** *Simulación de fenómenos de espera de capacidad limitada con llegadas y número de servidores dependientes del tiempo con hoja de cálculo.*

*Doc. 090/95* **JAVIER MATO DÍAZ.-** *¿Existe sobrecualificación en España?. Algunas variables explicativas.*

*Doc. 091/95* **Mª JOSÉ SANZO PÉREZ.-** *Estrategia de distribución para productos y mercados industriales.*

*Doc. 092/95* **JOSÉ BAÑOS PINO; VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.-** *Demanda de cine en España: Un análisis de cointegración.*

*Doc. 093/95* **Mª LETICIA SANTOS VIJANDE.-** *La política de marketing en las empresas de alta tecnología.*

*Doc. 094/95* **RODOLFO VÁZQUEZ CASIELLES; IGNACIO RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE; AGUSTÍN RUÍZ VEGA.-** *Expectativas y percepciones del consumidor sobre la calidad del servicio. Grupos estratégicos y segmentos del mercado para la distribución comercial minorista.*

*Doc. 095/95* **ANA ISABEL FERNÁNDEZ; SILVIA GÓMEZ ANSÓN.-** *La adopción de acuerdos estatutarios antiadquisición. Evidencia en el mercado de capitales español.*

*Doc. 096/95* **ÓSCAR RODRÍGUEZ BUZNEGO.-** *Partidos, electores y elecciones locales en Asturias. Un análisis del proceso electoral del 28 de Mayo.*

*Doc. 097/95* **ANA Mª DÍAZ MARTÍN.-** *Calidad percibida de los servicios turísticos en el ámbito rural.*

*Doc. 098/95* **MANUEL HERNÁNDEZ MUÑIZ; JAVIER MATO DÍAZ; JAVIER BLANCO GONZÁLEZ.-** *Evaluating the impact of the European Regional Development Fund: methodology and results in Asturias (1989-1993).*

Doc. 099/96 **JUAN PRIETO; Mª JOSÉ SUÁREZ.**- *¿De tal palo tal astilla?: Influencia de las características familiares sobre la ocupación.*

Doc. 100/96 **JULITA GARCÍA DÍEZ; RACHEL JUSSARA VIANNA.**- *Estudio comparativo de los principios contables en Brasil y en España.*

Doc. 101/96 **FRANCISCO J. DE LA BALLINA BALLINA.**- *Desarrollo de campañas de promoción de ventas.*

Doc. 102/96 **ÓSCAR RODRÍGUEZ BUZNEGO.**- *Una explicación de la ausencia de la Democracia Cristiana en España.*

Doc. 103/96 **CÁNDIDO PAÑEDA FERNÁNDEZ.**- *Estrategias para el desarrollo de Asturias.*

Doc. 104/96 **SARA Mª ALONSO; BLANCA PÉREZ GLADISH; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.**- *Problemas de control óptimo con restricciones: Aplicaciones económicas.*

Doc. 105/96 **ANTONIO ÁLVAREZ PINILLA; MANUEL MENÉNDEZ MENÉNDEZ; RAFAEL ÁLVAREZ CUESTA.**- *Eficiencia de las Cajas de Ahorro españolas. Resultados de una función de beneficio.*

Doc. 106/96 **FLORENTINO FELGUEROSO.**- *Industrywide Collective Bargaining, Wages Gains and Black Labour Market in Spain.*