DOC. 071/94

AMELIA BILBAO TEROL
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA
Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA

MATRICES ESPECIALES: APLICACIONES ECONÓMICAS.

MATRICES ESPECIALES. APLICACIONES.

1.- INTRODUCCION.

Los modelos lineales son frecuentes en Economía, bien como aproximaciones simplificadoras o bien como resultado de la naturaleza del problema. Por ello y, situados en este enfoque lineal, las matrices juegan un papel fundamental.

Hay ciertos tipos de matrices que presentan propiedades especialmente interesantes con aplicaciones tanto *finales* como *intermedias* muy importantes en Economía. En una primera aproximación, podemos decir que esta clase de propiedades se refieren a la relación entre la estructura de la matriz y el máximo módulo de los valores propios de dicha matriz, es decir, su **radio espectral**. Son evidentes las consecuencias de disponer de una acotación para el radio espectral debido a su relación con la norma de la matriz.

En cualquier problema que precise una acotación para la norma de la matriz, es eventualmente aplicable la teoría de matrices especiales que vamos a desarrollar en esta lección. A modo de ejemplo citaremos:

- la convergencia de métodos iterativos para resolución de sistemas de ecuaciones lineales,
- el estudio del número de condición de una matriz,
- estudio de la estabilidad de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales y de Diferencias,
- los multiplicadores matriciales en modelos intersectoriales de ingreso-gasto,
- el análisis interindustrial de Leontiev, etc.

En el tema que vamos a exponer aplicamos los resultados matemáticos que se vayan obteniendo, al análisis interindustrial.

Vamos a considerar las matrices con elementos no negativos: matrices no negativas; la no negatividad de las variables económicas es casi intrínseca puesto que suelen representar cantidades o precios; concretándonos en nuestro tema, el planteamiento del modelo input-output (o factor-producto) nos va a dar pie a su estudio puesto que la no negatividad de la inversa de Leontiev resolvería la viabilidad de la economía representada en dicho modelo. El principal resultado que se obtiene para estas matrices es la existencia de la raíz de Frobenius, es decir, cualquier matriz no negativa tiene un valor propio no negativo con vectores propios también no negativos.

Los resultados sobre la existencia de soluciones no negativas de sistemas de ecuaciones lineales: condiciones de resolubilidad débil, fuerte y de Hakwins-Simons se relacionan de forma sencilla con los obtenidos en este trabajo.

La característica de las economías que poseen únicamente mercancías básicas, o bien básicas y no básicas, está vinculada al carácter indescomponible o no de la matriz de coeficientes técnicos. Además, las matrices indescomponibles y no negativas verifican un teorema de Frobenius más fuerte que el correspondiente a las descomponibles.

Respecto a los elementos de matemáticas utilizados en esta lección son tanto resultados de teoría de matrices, de valores y vectores propios, etc. asi como nociones topológicas de sucesiones y series.

2.- MODELO SIMPLIFICADO DE LEONTIEV.

En 1936, Wassily Leontiev publicaba en *The Review of Economic and Statistics* sus primeros trabajos cuantificados sobre las relaciones productivas intersectoriales en Estados Unidos, siguiendo una metodología «input-output».

Al proponer el análisis input-output, el objetivo de Leontiev era construir un modelo de equilibrio general estático, es decir, Leontiev intentaba cuantificar el modelo matemático del economista suizo León Walras (1874).

TABLAS INPUT-OUTPUT.-

Desde el punto de vista de la información estadística, el modelo input-output de Leontiev utiliza como punto de partida una tabla en la que se contabilizan en fila los bienes y servicios vendidos a los diferentes sectores productores y a la demanda final (o sea los outputs) y en columna los bienes, servicios y factores primarios adquiridos por un sector productivo (los inputs). Se requiere por consiguiente para su elaboración una información estadística muy precisa sobre los flujos intersectoriales de bienes y servicios, y sobre la demanda final y el valor añadido de la economía también desagregados sectorialmente.

Los flujos económicos tienen una interesante característica: su observación puede hacerse en términos reales o en términos monetarios. Para el agente económico que vende un bien, el flujo de salida de este bien corresponde a un flujo de entrada de su equivalente monetario. Así, para un sector, los outputs de bienes y servicios corresponden a entradas de recursos monetarios. En cambio los flujos de bienes y servicios reales, medidos por unidades físicas no son agregables.

El sistema input-output por definición se limita a las relaciones entre sectores productores y utiliza los flujos intersectoriales que constituyen un elemento esencial de toda descripción cuantitativa del sistema de flujos económicos.

MODELIZACION INPUT-OUTPUT.-

Cualquier modelo de producción lineal con las siguientes características: coeficientes fijos, con varios procesos de producción o actividades, cada una de las cuales da lugar a un solo producto, presentará las siguientes características:

- La producción de una unidad del j-ésimo producto, por ejemplo, requiere una cantidad fija, a_{ij}, del i-ésimo factor.
- Como el modelo es lineal, para producir una cantidad x_j del producto j será necesaria una cantidad $a_{ij}x_j$ de factor i.
- Como los coeficientes de producción son fijos, no existe sustitución entre los factores, de modo que para la producción de x_j es

necesario $a_{ij}x_j$ del factor j y además $a_{kj}x_j$ del factor k.

- Una característica esencial del modelo es que por lo menos algunos de los factores necesarios sean a su vez el producto corriente de algún otro proceso del sistema.

Tendríamos así un modelo de input-output (o factor-producto), y los a_{ij} serían los coeficientes técnicos del modelo. La matriz (a_{ij}) es la matriz de factores.

Si el conjunto de bienes que aparecen por lo menos una vez como factores del sistema es idéntico al el de los bienes que figuran como productos, no existe otra fuente de factores que la producción corriente y los productos no se utilizan más que como factores, diremos que el modelo es cerrado. En los demás casos tendremos un modelo abierto.

Cuando un modelo de factor-producto representa un sistema económico completo es un modelo de Leontiev.

En sus primeros trabajos de inspiración walrasiana, Leontiev utiliza un modelo descriptivo de la interdependencia, totalmente cerrado, en el sentido de que ninguna variable era exógena al sistema: todos los bienes y factores estaban interrrelacionados entre ellos y por consiguiente eran todos endógenos.

El modelo cerrado es puramente descriptivo; deja indefinidos los niveles de producción y los precios.

Para que el modelo input-output del equilibrio general de una economía fuese operativo era necesario exogeneizar algunas de las producciones y precios.

EL MODELO ABIERTO DE LEONTIEV.-

Un modelo puede ser abierto de muchas maneras. Aquí nos limitaremos a considerar el modelo abierto de Leontiev. Se trata de un modelo factor-producto de una economía completa que consta de un sector de producción de n productos que son también factores dentro del sector, un factor adicional que no es producto de ningún proceso productivo y una demanda de productos además de la que se hace de ellos como factores. El factor adicional suele identificarse como trabajo, pero dicha identificación no es esencial.

Si sólo consideramos los sectores productores, podemos representar sus interrelaciones mediante una matriz de factores n x nno negativa.

Describir el modelo de demanda y el de precios:

El modelo de demanda.-

$$(I - A)\, X = c$$

El modelo de precios.-

$$(I - A^{T})\, p = v$$

Interés y aplicaciones.-

La utilización de estas ecuaciones de Leontiev para simular los efectos sobre la producción y los precios de cambios exógenos de demanda y de precios del capital y del trabajo es inmediata, siempre en un marco de estática comparativa, midiendo variaciones entorno a un equilibrio observado.

Como los coeficientes de la matriz A de Leontiev representan combinaciones de factores productivos para obtener un bien o servicio, es evidente que los agentes productores adoptarán en el tiempo esas combinaciones en función de la evolución de los precios de los factores productivos y de la tecnología; si la tecnología lo permite, se observarán fenómenos de sustitución entre factores relativamente más caros o más baratos.

El elemento central de la dinámica a corto y largo plazo se establece en la inversión, y por ello es éste un tema que ha interesado prioritariamente a Leontiev.

Pero se presentan problemas matemáticos de inestabilidad en dichos modelos dinámicos de Leontiev.

3.- ORDEN PARCIAL EN $\mathbb{R}^n$ Y EN $\mathfrak{M}_n$. MATRICES NO NEGATIVAS Y POSITIVAS.

Vamos a definir una *relación de orden* en $\mathbb{R}^n$ y en el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, $\mathfrak{M}_n$. Dicha relación, que no va a ser de orden total, nos va a permitir definir vectores y matrices no negativos y positivos, siendo éstos los que tienen todos sus elementos no negativos o estrictamente positivos, respectivamente.

Definición de relación de orden parcial:

Sean **x** e **y** dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, diremos que **x** es *menor o igual que* **y** , y lo denotaremos por **x** $\leq$ **y** , si y sólo si $x_i \leq y_i \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,n.$

Análogamente definiremos una relación de orden parcial en el conjunto $\mathfrak{M}_n$. Dadas dos matrices cuadradas de orden n , **A** y **B**, diremos que **A** es menor o igual que **B** , **A** $\leq$ **B**, si y sólo si

$$a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall\ i,j=1,2,\ldots,n.$$

En particular, tomando en estas relaciones **y** = 0 y **B** = **O** tendremos que un vector **x** es no negativo si cada una de sus componentes lo es, e igualmente se obtiene la condición de no negatividad de una matriz.

Diremos que el orden parcial es *estricto* si las desigualdades se verifican estrictamente. Lo que daría lugar a vectores y matrices positivos.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS MATRICES Y VECTORES NO NEGATIVOS.

Dadas dos matrices **A** y **B** , cuadradas de orden n, y un vector **x** de $\mathbb{R}^n$, se cumple:

1.- Si **A** $\geq$ **O** y **B** $\geq$ **O** entonces **A** + **B** $\geq$ **O**.

2.- Si **A** $\geq$ **O** y **B** $\geq$ **O** entonces **A** $\cdot$ **B** $\geq$ **O**.

3.- Si **A** $\geq$ **O** y **x** $\geq$ 0 entonces **A x** $\geq$ 0.

4.- Si $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, no nulo, entonces $\mathbf{A}\,\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

A partir de estas propiedades podemos considerar que la no negatividad de la matriz inversa de Leontiev $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{O}$ permitiría asegurar que siempre es posible abastecer un consumo final, c, puesto que el producto matricial

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\, c$$

daría lugar a una producción no negativa en todos los sectores.

4.- MATRICES DESCOMPONIBLES E INDESCOMPONIBLES. INTERPRETACION.

Definición de matriz descomponible:

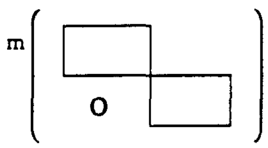
Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz *descomponible* o *reducible* si $\exists\, \mathbf{P}$ matriz de permutación tal que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}\, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{22}$ matrices cuadradas de orden inferior a $\mathbf{A}$. En caso contrario, si no existe $\mathbf{P}$ se dice que la matriz $\mathbf{A}$ es *indescomponible* o *irreducible*.

Observación:

Otra forma de decir lo mismo sería definir una matriz como descomponible si mediante una determinada (la misma) permutación de filas y columnas se obtienen dos matrices cuadradas: $\mathbf{B}_{11}$ y $\mathbf{B}_{22}$, de orden inferior al de la matriz $\mathbf{A}$, en la diagonal, y por debajo de ellas aparecen ceros, es decir, si se pueden agrupar todos los ceros en las <u>últimas filas y primeras columnas</u>.



Por tanto $\mathbf{A}$ es descomponible si existe

$$I \subset \{1,2,\ldots,n\},\ I \neq \emptyset \ /\ a_{ij} = 0 :\ i \in I \quad \text{y} \quad j \in J = \bar{I} \neq \emptyset$$

Si se verifica esto, tomando como permutación:

$$\sigma : J \longrightarrow \{ 1,2,\dots,m \}$$

donde "m" es el orden de la matriz $\mathbf{B}_{11}$, podemos transformar la matriz **A** en una de la forma **B** .

Interpretación económica de la DESCOMPONIBILIDAD en la matriz de LEONTIEV.

Podemos ilustrar lo anterior mediante la matriz de coeficientes de input **A** del análisis interindustrial. Cuando **A** es descomponible esto significa que el j-ésimo sector $(j \in J)$ no realiza compras al i-ésimo sector $(i \in I)$. Ningún sector del conjunto I interviene en la producción de los bienes (o productos) del conjunto J, luego los productos de I son no-básicos, es decir, no son necesarios para las restantes producciones.

Sin embargo, ello no excluye necesariamente la posibilidad de que el i-ésimo sector $(i \in I)$ realice compras al j-ésimo sector $(j \in J)$. En el caso de que también se tenga dicha situación, es decir,

$$a_{ji} = 0 \qquad \forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J$$

y, por tanto, $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{O}$, la producción de las mercancías del conjunto I depende sólo de éstos así como la producción de las mercancías de los sectores que pertenecen a J.

Si la economía entera está completamente separada en dos grupos totalmente independientes, I y J, se puede decir que es *completamente descomponible*.

Para estudiar la indescomposibilidad de una matriz, es muy ventajoso utilizar el grafo de la misma, concepto que suponemos conocido.

TEOREMA.-

Una matriz cuadrada de orden n , **A** , es indescomponible si y sólo si su grafo dirigido es fuertemente conexo.

Interpretación económica de la INDESCOMPONIBILIDAD en la matriz de LEONTIEV.

Cuando la matriz **A** es indescomponible, no es posible realizar ninguna permutación del conjunto de indices $\{1,2,\ldots,n\}$ que permita escribir la matriz **A** en la forma anteriormente indicada por lo que no es posible encontrar ninguna mercancía que no intervenga (directa o indirectamente) en la producción de todas las restantes.

Podemos entonces interpretar económicamente la conexidad fuerte del grafo de una matriz tecnológica indescomponible de la siguiente manera:

cualesquiera que sean los sectores i , j , el sector i es un input para el sector j que puede ser *directo* si $a_{ij} \neq 0$, o bien si $a_{ij} = 0$ entonces i es un input *indirecto* para el producto j .Puesto que existe un camino de elementos no nulos, es decir, *enlaces input directo* que terminan en j , luego el input i se emplea en la producción de otra mercancía k , que sí es input directo de j.

5.- NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES. RELACION DE LA NORMA DE UNA MATRIZ CON SUS VALORES PROPIOS.

NORMAS VECTORIALES.

Recordaremos a continuación la definición de norma vectorial:

Una *norma* en $\mathbb{R}^n$ es un aplicación:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que cumple:

1) $\| x \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Normas habituales en $\mathbb{R}^n$:

▷ $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ norma ℓ_1 o norma octaedral.

▷ $\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}$ norma ℓ_2 o norma euclídea.

▷ $\| x \|_\infty = \max_i \{ | x_i | \}$ norma ℓ_∞ o norma del máximo

▷ Si **A** es una matriz definida positiva, se define la norma elíptica:

$$\| x \|_A = (x^T A x)^{1/2}$$

en las normas elípticas los entornos son de tipo elipses.

▷ Si $\| \cdot \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y **P** una matriz no singular, entonces definimos la aplicación $\| \cdot \|'$ en $\mathbb{R}^n$ mediante:

$$\| x \|' = \| P x \|$$

que también se puede comprobar es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Normas equivalentes:

Se dice que dos normas en $\mathbb{R}^n$, $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|'$ son equivalentes si

$\exists\ c_1 \geq c_2 > 0$ tales que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$: $c_2 \| x \| \leq \| x \|' \leq c_1 \| x \|$

TEOREMA.-

La relación anterior es de equivalencia, todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes; luego la convergencia que se cumple para una norma se cumple para todas las restantes.

La demostracción se puede realizar probando que todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes a la euclidea aplicando la desigualdad de Schwarzt y la compacidad de la n-esfera unidad.

NORMAS MATRICIALES.

Sea $\mathfrak{M}_n$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$.

Definición de norma matricial:

Llamaremos *norma matricial* sobre $\mathfrak{M}_n$ a cualquier aplicación

$$\|\cdot\|: \mathfrak{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que verifica:

$$\begin{array}{lll}
1) \ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 & & \\
2) \ \|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| & \forall \alpha \in \mathbb{R} & \forall A \in \mathfrak{M}_n \\
3) \ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| & \forall A, B \in \mathfrak{M}_n & \\
4) \ \|A B\| \leq \|A\| \, \|B\| & \forall A, B \in \mathfrak{M}_n &
\end{array}$$

Definiciones:

▷ Una norma matricial se dice que es *compatible* con una norma vectorial cuando se verifica:

$$\|A x\| \leq \|A\| \, \|x\| \qquad \forall A \in \mathfrak{M}_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

▷ Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial, se llama *norma matricial subordinada* a la norma vectorial $\|\cdot\|$, y se denota con el mismo símbolo, a la norma matricial definida como:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|A x\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n , \ x \neq 0 \right\} = \sup_{\|x\|=1} \|A x\|$$

Es sencillo comprobar que la definición anterior da lugar a una aplicación $\|\cdot\|$ que verifica la definición de norma matricial, además dicha norma va a ser compatible con la norma vectorial de la que procede.

Por tanto, dada una norma vectorial siempre existe al menos una norma matricial compatible con ella (la subordinada).

También es cierto que dada una norma matricial siempre existen normas vectoriales con las que es compatible:

Sea la norma matricial $\| \cdot \|$, definimos:

$$\| x \| = \| \mathrm{diag}\ (x \cdot u) \|$$

donde **u** es un vector unitario, diag (**x** • **u**) representa la matriz cuadrada cuya diagonal es el producto escalar de **x** por **u** . Es una norma vectorial compatible con la matricial.

Existen infinitas normas vectoriales con las que la norma matricial es compatible (variando **u**).

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos decir que todas las normas matriciales son equivalentes. Por tanto, la convergencia con una norma es equivalente a la convergencia con cualquier otra norma.

Normas matriciales subordinadas a las normas vectoriales más habituales:

▷ a la norma ℓ_1 : $\| A \|_1 = \max\limits_j \left\{ \sum\limits_i | a_{ij} | \right\}$

Como se observa, esta norma es el máximo de las normas ℓ_1 de los vectores columna que forman la matriz.

▷ a la norma ℓ_2 : $\| A \|_2 = [\rho (A^T A)]^{1/2}$

donde $\rho (A^T A)$ es el radio espectral de $A^T A$.

▷ a la norma ℓ_∞ : $\| A \|_\infty = \max\limits_i \left\{ \sum\limits_j | a_{ij} | \right\}$

Esta norma es el máximo de las normas ℓ_1 de los vectores fila de la matriz **A** .

RELACION ENTRE NORMA MATRICIAL Y EL RADIO ESPECTRAL:

Cualquiera que sea la norma matricial considerada se verifica que el radio espectral de **A** es menor o igual que la norma de **A**:

$$\rho(A) \le \| A \|$$

Vamos a definir seguidamente una norma matricial, $\| \cdot \|_*$, que nos va a permitir considerar la convergencia término a término en las matrices.

Definición de $\|\cdot\|_*$:

Dada $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n$, definimos $\| A \|_* = n \max_{i,j} | a_{ij} |$

PROPOSICION.-

$\|\cdot\|_*$ es una norma matrical que es compatible con las normas vectoriales ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_∞ , y, no está subordinada a ninguna norma vectorial.

6.- SERIES DE POTENCIAS MATRICIALES. LEMA DE NEWMAN.

Desarrollaremos a continuación las definiciones y resultados que permiten realizar una suma infinita de matrices.

SUCESIONES Y SERIES DE MATRICES.

Definición de convergencia de una sucesión de matrices:

Una sucesión de matrices $(A^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ se dice que es *convergente* a una matriz $A = (a_{ij})$ si se verifica:

$$\lim_{r\to+\infty} a_{ij}^{(r)} = a_{ij} \qquad \forall\ i,j$$

Esta es la convergencia elemento a elemento y corresponde a la norma del máximo:

$$\| A \|_* = n \max_{i,j} \{ | a_{ij}| \}$$

Como todas las normas matriciales son equivalentes, la convergencia se podría definir también, para cualquier norma matricial, como:

$$A^{(r)} \longrightarrow A \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{r\to\infty} \| A^{(r)} - A \| = 0$$

Vamos a considerar sucesiones de matrices de la forma

$$(A^r)_{r\in\mathbb{N}} \qquad \text{donde} \qquad A^r = A\ A \overset{r)}{\dots} A$$

entonces como $\| A^r \| \leq \| A \|^r$, si $\| A \| < 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} A^r = O$

Vamos a ver un resultado importante para la convergencia de sucesiones.

TEOREMA.-

Sea $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n$: $\left[\lim_{r\to\infty} \mathbf{A}^r = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathbf{A}) < 1 \right]$

Vamos a considerar ahora la convergencia de series matriciales de potencias.

Definición de convergencia de series de matrices:

La serie $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{B}^{(m)}$ se dice que es *convergente* si lo es la sucesión

$$S^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{B}^{(m)}$$

y se llama *suma de la serie* al limite de la sucesión: $(S^{(k)})$.

El principal resultado de este apartado es el Lema de Newman que proporciona una condición necesaria y suficiente de convergencia de series de potencias matriciales.

Lema de NEWMAN.-

Sea $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n$ y sea $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$. Entonces:

$$\sum \frac{\mathbf{A}^m}{z^m} \quad \text{converge} \qquad \text{si y solo si} \qquad \rho(\mathbf{A}) < |\, z \,|$$

Como se puede observar es un resultado idéntico al de series de potencias numéricas o funcionales cambiando el radio espectral por la razón o radio de convergencia.

Además en caso de convergencia se verifica la siguiente igualdad:

$$\sum \frac{\mathbf{A}^{m-1}}{z^m} = (zI - \mathbf{A})^{-1}$$

7.- CONSECUENCIAS DEL LEMA DE NEWMAN.

Sea **A** la matriz de coeficientes técnicos del modelo de Leontiev entonces

$$\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad \text{si y solo si existe} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

y además esta inversa es no negativa ya que es la suma de matrices no negativas

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}^{m-1} \geq \mathbf{O}$$

Por tanto, el lema de Newman proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia y no negatividad de la inversa de Leontiev. A partir de esto definimos la matriz **A** como *productiva* si

$$\rho(\mathbf{A}) < 1$$

Además el resultado anterior nos proporciona un método para calcular de forma aproximada la inversa de Leontiev. Este resultado nos sirve también para interpretar los cambios, en cadena, sobre todos los sectores que se producen al cambiar la demanda final.

Empezamos por introducir un incremento exógeno en la demanda final, con lo que la producción total como suma de empleos finales aumentaba en esta cantidad.

EL EFECTO MULTIPLICADOR DE UNA VARIACION DE LA DEMANDA FINAL.-

Partimos de una situación inicial, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$, y estudiamos el efecto de un incremento exógeno en la demanda final representado por Δc. Este incremento da lugar a una nueva producción calculada en esta primera etapa, esto es, como suma de empleos finales:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{X}\ \mathbf{DIAG}\ (\mathbf{1}) + \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{c} \qquad (1)$$

Sin embargo, el incremento inicial de la producción sectorial para abastecer la demanda adicional exige calcular los nuevos incrementos que ocasiona en la producción de todos los sectores.

Para producir $x^{(1)}$ es necesario que los sectores dispongan de:

$$x^{(2)} = A\,x^{(1)} + c + \Delta c$$

sustituyendo $x^{(1)}$ por su valor y teniendo en cuenta que en el momento inicial $x = Ax + c$, la nueva producción sectorial deberá ser ahora

$$x^{(2)} = x^{(1)} + A\,\Delta c$$

El proceso deberá repetirse de nuevo, dado que la producción sectorial necesaria sufre ahora un nuevo incremento respecto a la etapa anterior $(A\,\Delta d)$. Por tanto, para producir $x^{(2)}$ se debe disponer de:

$$x^{(3)} = A\,x^{(2)} + c + \Delta c = A\,x^{(1)} + A^2\,\Delta c + c + \Delta c = x^{(2)} + A^2\,\Delta c$$

continuando sucesivamente, la producción total debido a un incremento en la demanda vendrá dada por:

$$x^{(\infty)} = x^{(0)} + \Delta c + A\,\Delta c + A^2\,\Delta c + \ldots = x^{(0)} + (I + A + A^2 + \ldots)\,\Delta c$$

luego el incremento en la producción será

$$\Delta x = (I - A)^{-1}\,\Delta c$$

puesto que la condición de que el radio espectral de la matriz A sea menor que 1 permite asegurar la convergencia de la serie $I + A + A^2 + \ldots$ a la inversa de la matriz de Leontiev $(I - A)^{-1}$.

INTERPRETACION DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ $(I - A)^{-1}$ EN EL MODELO DE LEONTIEV.

Sea A la matriz de coeficientes técnicos en el modelo de LEONTIEV:

$$A = (a_{ij})$$

El coeficiente de input a_{ij} representa como sabemos la cantidad de factor *i* necesaria para producir una unidad del bien *j*, si todos los factores vienen dados desde fuera del sistema y sólo se produce el bien j. Por tanto, se puede considerar que a_{ij} representa las "necesidades directas" del factor *i* en el sector *j*.

Pero como el sector j es una parte del sistema completo, la unidad de producto de dicho sector precisa de otros factores $k = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$ además del i. A su vez estos otros sectores también necesitan el bien j como factor, de modo que el sector j tendrá que producir una cantidad superior a la unidad a fin de suministrar a los sectores que a su vez le proporcionan factores a ella.

Las necesidades del factor i que surgen por estas causas, constituyen unas "necesidades indirectas" de factor i por parte del sector j.

Las "necesidades totales" de factor i por unidad de producción del sector j son la suma de las necesidades directas y de las indirectas.

Supongamos que el modelo es productivo, de manera que puede producirse cualquier combinación de demandas finales. Estas hipótesis nos permiten asegurar la existencia y no negatividad de la matriz $B^{-1} = (I - A)^{-1}$.

Nuestro objetivo ahora es calcular las necesidades totales de todos los factores para el sector j.

Planteada la ecuación general del modelo:

$$(I - A)\ x = c$$

elegimos una combinación particular de demandas finales (de bienes netos):

$$c = \bar{e}_j$$

es decir, la única producción neta corresponderá al sector j-ésimo. Sea x' la solución en esta situación, es decir,

$$x' = B^{-1}\ \bar{e}_j \qquad (1)$$

x' da los niveles a los cuales deben operar todos los sectores para producir una unidad del bien j.

Toda la producción del sector i se destina únicamente a satisfacer las necesidades de dicho bien como factor; por tanto x'_i es la cantidad total del factor i necesaria en la producción de una unidad (neta) del bien j .

Globalmente x' contiene las necesidades totales de todos los factores por unidad neta del producto j .

Ahora bien, teniendo en cuenta (1) x' no es más que la columna j-ésima de la matriz B^{-1} . Si denotamos por β_{ij} el elemento (i,j) de B^{-1} entonces tenemos:

- a_{ij} son las necesidades *directas* de i en j.
- β_{ij} son las necesidades *totales* de i en j.
- $\beta_{ij} - a_{ij}$ son las necesidades *indirectas* de i en j.

Resumiento la columna j-ésima de la inversa de Leontiev representa las necesidades totales de todos los factores para la producción neta unitaria del sector j.

A partir de esto podemos enunciar el siguiente resultado:

TEOREMA.-

Para cualquier sector de un sistema productivo, las necesidades totales de cualquier factor superan a las necesidades directas.

Este resultado también se puede probar en versión indescomponible.

8.- TEOREMAS DE PERRON-FROBENIUS.

Consideraciones preliminares.-

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n y no negativa: $A \geq 0$, definimos el siguiente conjunto:

$$M = \{ \rho \in \mathbb{R} \ / \ B(\rho) \text{ admite inversa no negativa}\}$$

donde $B(\rho) = \rho I - A$; si podemos comprobar que el conjunto M está acotado inferiormente por cero entonces según el corolario del lema de NEWMAN tendremos que el ínfimo del conjunto M es justamente el radio espectral de la matriz **A**.

Ahora bien, si ρ es un elemento cualquiera del conjunto M entonces existe un vector $\mathbf{x}$ no negativo tal que el producto $\mathbf{B}(\rho)\mathbf{x}$ es estrictamente positivo -sería el resultado de multiplicar la inversa no negativa de la matriz $\mathbf{B}(\rho)$ por un vector c estrictamente positivo.

De la positividad estricta de $\mathbf{B}(\rho)\mathbf{x}$ se tiene que $\rho\ \mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, y, por tanto, efectivamente $\rho > 0$, como queríamos demostrar.

Por todo lo anterior podemos determinar la estructura del conjunto M:

$$M = (\rho(\mathbf{A}),+\infty).$$

La propiedad fundamental de una matriz no negativa A, es que su radio espectral es un valor propio de la misma y tiene asociados vectores propios no negativos:

TEOREMA 1.-

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n no negativa y no nula, entonces la ecuación

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{x} = 0$$

tiene una solución no negativa y no nula, $\mathbf{x}$, para el valor de λ igual al radio espectral de la matriz, $\rho(\mathbf{A})$.

TEOREMA 2.-

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, entonces:

1.- **A** tiene valores propios reales no negativos. Existe un vector propio no negativo, $\mathbf{x} \geq 0$, asociado con el mayor valor propio no negativo $\lambda(\mathbf{A})$.

2.- Todo número real μ , que cumpla:

$\mathbf{A}\ \mathbf{x} \geq \mu\ \mathbf{x}$ para algún $\mathbf{x} \geq 0$ $(\ \mathbf{x} \geq 0$ y $\mathbf{x} \neq 0\ )$

satisface la desigualdad:

$$\mu \leq \lambda(\mathbf{A})$$

3.- $\lambda(A)$ es una función creciente de A ; es decir, si $A_1 \geq A_2 \geq O$, entonces $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$.

4.- Sea ρ un número real e I la matriz unidad de orden n , entonces existe $(\rho I - A)^{-1} \geq O$ si y sólo si $\rho > \lambda(A)$.

5.- $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

Los resultados anteriores se obtienen, pero en forma estricta, para matrices indescomponibles. En primer lugar

$$\lambda(A) < \rho \quad \text{si y sólo si} \quad (\rho I - A)^{-1} > O$$

y ya el teorema de Perron-Frobenius quedaría de la siguiente forma:

TEOREMA 3.-

Si A es una matriz es una matriz no descomponible de orden mayor que 1:

1.- La raíz de Frobenius de A es $\lambda(A) > 0$; existe un vector propio asociado a ella, x, estrictamente positivo.

2.- El problema de la no negatividad de los valores propios $A\,y = \mu\,y$, $\mu \geq 0$ $y > 0$ tiene una solución única $\mu = \lambda(A)$.

3.- $\lambda(A)$ es una función estrictamente creciente de A; es decir, si $A_1 \geq A_2 \geq O$, entonces $\lambda(A_1) > \lambda(A_2)$ con tal de que una de las dos matrices, A_1 o A_2 sea no descomponible.

4.- $\lambda(A)$ es una raíz simple de la ecuación característica.

9.- CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA Y NO NEGATIVIDAD DE LA INVERSA DE LEONTIEV.

Cualquier condición que permita afirmar que la norma de la matriz de coeficientes es menor que 1 va a permitir asegurar la existencia y no negatividad de la inversa de Leontiev.

Por supuesto, las normas matriciales más utilizadas por su sencillez son la $\| \cdot \|_1$ y la $\| \cdot \|_\infty$.

Tenemos, entonces, el siguiente teorema que suele aparecer en la literatura como: *Criterios de suma de fila y suma de columna de Brauer-Solow.*

i) Si todas las filas de la matriz **A** suman menos de la unidad, entonces existe y es no negativa la inversa de Leontiev.

Nótese que en este caso se está aplicando que $\| \mathbf{A} \|_\infty < 1$.

ii) Si todas las columnas de la matriz **A** suman menos de la unidad, entonces existe, y es no negativa, la inversa de Leontiev.

Aquí se está aplicando que $\| \mathbf{A} \|_1 < 1$.

Análogamente se tienen condiciones suficientes para la matriz generalizada $\rho\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sustituyendo la unidad por ρ.

Podemos relajar los criterios de suma de fila y de columna en el caso de que la matriz **A** sea no descomponible de la siguiente forma:

"Si todas las filas (respectivamente columnas) de la matriz de coeficientes técnicos suman menos o igual que la unidad y en alguna se verifica que la suma es estrictamente menor entonces la matriz **A** es productiva".

Es sencillo demostrar esta condición suficiente de productividad puesto que sabemos que la raiz de Frobenius de la matriz **A** , $\lambda(\mathbf{A})$, es menor que cualquier norma matricial de A.

En este caso tenemos:

$$\lambda^* \leq \| \mathbf{A} \|_1 = 1$$

Veamos que λ^* no puede ser igual a 1.

Por hipótesis existe al menos una columna sea la k-ésima tal que:

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} < 1$$

Por otra parte sea x^* el vector propio estrictamente positivo y tal que sus componentes suman la unidad, tenemos:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{*} = \lambda^{*}\mathbf{x}^{*}$$

luego para cada i

$$\lambda^{*} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

sumando en i las expresiones anteriores

$$\lambda^{*} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) x_j$$

$$\lambda^{*} = \sum_{j=1}^{n} s_j\, x_j$$

si $\lambda^{*} = 1$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - s_j)\, x_k^{*} = 0$$

de la positividad de $\mathbf{x}^{*}$ se tiene $1 - s_j = 0$ para cualquier j, luego llegamos a una contradicción.

INTERPRETACION.

Si multiplicamos por el correspondiente producto en cada fila tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\, x_k < x_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jl}\, x_l = x_l$$

Si es posible sumar la columna de recursos (por ejemplo si están expresados en flujos monetarios) entonces, una condición suficiente para que el sistema sea productivo es que el total de recursos de cada uno de los sectores sea menor o igual que la producción de cada uno de ellos dandose para alguno la desigual estricta.

10.- APLICACIONES ECONOMICAS DE LA RAIZ DE FROBENIUS.

EL PROBLEMA DE LA IGUALACION DE LOS VALORES AÑADIDOS POR UNIDAD EN TODOS LOS SECTORES.

Sea **A** la matriz de coeficientes de inputs de una economía

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \geq \mathbf{0}$$

Designando el vector precio por **p** , obtenemos el *modelo de precios*

$$\mathbf{p} - \mathbf{A}^T\mathbf{p} = \mathbf{v}$$

siendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$, donde v_j representa el valor añadido del j-ésimo bien; en general, v_j es la suma de beneficios y salarios (si hay dos inputs primarios, capital y trabajo).

Definimos para cada sector j el valor añadido por unidad de coste y lo denotamos por ω_j

$$\omega_j = \frac{v_j}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_i} .$$

Designamos por $\lambda\ (\mathbf{A}^T)$ la *raiz de Frobenius* de $\mathbf{A}^T$.

Dado un vector cualquiera de valores añadidos $v \geq 0$ $(v \neq 0)$ la ecuación $\mathbf{p} - \mathbf{A}^T\mathbf{p} = v$ tiene como solución un vector de precios $\mathbf{p} \geq 0$, si $\lambda\ (\mathbf{A}^T) < 1$.

Pero los valores añadidos sectoriales por unidad de coste: ω_j no son necesariamente iguales, difieren generalmente para cada sector.

La pregunta que nos planteamos es *¿existe entonces un vector de precios que iguale los valores añadidos por unidad de coste de todos los sectores?*

Para responder a la pregunta hagamos $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega$, si lo llevamos a la igualdad $v_j = \omega_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_i \right)$ j=1,2,...,n;

tendremos:

$$v = \omega A^T p$$

que sustituimos en la ecuación del modelo:

$$p - A^T p = v = \omega A^T p$$

entonces:

$$p = (1 + \omega) A^T p$$

como $(1 + \omega) \neq 0$ dividiendo nos queda:

$$\mu p = A^T p \qquad \text{con} \quad p \geq 0 \quad (p \neq 0) \quad y \quad \mu = \frac{1}{1 + \omega}$$

Por lo tanto la existencia de un vector de precios que iguale los valores añadidos por unidad de coste de todos los sectores se reduce a la resolución del problema del valor propio con vector propio no negativo: $\mu p = A^T p$.

Se demostró que una solución de este problema es $\mu = \lambda(A^T)$. Si **A** es descomponible podría existir otra solución , pero tal solución de μ debe siempre satisfacer $\mu \leq \lambda(A^T)$ por el apartado segundo del teorema de Frobenius.

Como conclusión tenemos que si existe un valor añadido por unidad de coste, ω, uniforme éste satisface la desigualdad:

$$\omega \geq \frac{1}{\lambda(A^T)} - 1$$

En particular, existe de hecho un vector de precios que hace posible alcanzar *el mínimo valor añadido por unidad de coste igual en todos los sectores*:

Tomando $\mu = \lambda(A^T)$ existe un vector de precios no negativo y no nulo y se tiene:

$$\omega = \frac{1}{\lambda(A^T)} - 1 \ .$$

11.- TEOREMA DE SUSTITUCION.

Una característica fundamental del modelo de Leontiev es que utiliza un solo proceso o actividad para la producción de cada bien. Existe una sola manera de producir el bien j, y viene representada por el conjunto de coeficientes técnicos que forman la j-ésima columna de la matriz de factores.

Sabemos, que si el sistema es productivo, puede producir cualquier combinación mediante el mismo conjunto de procesos utilizados para una combinación particular. Vamos ahora a modificar ligeramente una de las hipótesis del modelo de Leontiev: suponemos que existen más de una forma de producir alguno o todos los productos. Cabe preguntarse si en esta situación es posible que los sectores o procesos óptimos para una combinación de bienes -para una demanda final particular- no sean los óptimos en la producción de otra.

Para el modelo de Leontiev, que sólo tiene un factor escaso, Samuelson demostró que sólo se utilizaría una actividad para producir cada tipo de bien, cualesquiera que fuesen los cambios en la demanda final.

En el modelo abierto de Leontiev, con un sólo factor primario escaso, el conjunto de actividades óptimo para producir una combinación particular de bienes es óptimo en la producción de cualquier otra, entendiendo por óptimo que minimice el uso del factor escaso.

Utilizaremos una demostración basada en la Programación Lineal. Se supone que la técnica está constituida por varias actividades, cada una de las cuales produce un sólo producto. (El carácter de producción no conjunta del modelo de Leontiev se mantiene). Cada actividad se define mediante n coeficientes técnicos y el bien particular producido por ella. Puede haber muchas que tengan como producto a un determinado bien, pero a cada actividad le corresponde un solo producto.

Puesto que ya no se tiene una correspondencia biunívoca entre actividades y bienes, tenemos que realizar una nueva formulación del modelo. En lugar de definir la actividad mediante la columna de coeficientes técnicos solamente, como hasta ahora, lo haremos por medio de una columna que contenga los coeficientes usuales, afectados de signo negativo, correspondientes a los bienes que son factores de dicha actividad, y un uno menos el coeficiente correspondiente en el lugar del producto.

Si reunimos estas columnas de actividad en una matriz, cada fila corresponde a un bien y cada columna a una actividad, en el lugar (i,j) aparece, o bien la unidad menos el coeficiente correspondiente, en cuyo caso i será el producto de la actividad j, o un coeficiente negativo (quizá nulo), que significa que el bien i es un factor de la actividad j. Cada columna tendrá por lo menos un elemento no negativo (cada bien es producto de por lo menos una actividad), y lo mismo ocurrirá con cada columna (cada actividad tiene un producto).

Si formulamos el modelo ordinario de input-output de este modo, la matriz que obtendremos será la matriz tecnológica $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. En este caso, la matriz es rectangular $n \times m$, con más actividades (m) que bienes (n). La designaremos como $\hat{\mathbf{A}}$.

Enunciamos a continuación el siguiente resultado:

TEOREMA DE SUSTITUCION.-

Supongamos que existe solución del problema de Programación Lineal:

$$\left.\begin{array}{l} \min \quad 1^T y \\ \text{s.a.} \\ \quad \hat{\mathbf{A}}\, y = c^* \\ \quad y \geq 0 \end{array}\right\} (\mathbf{P}^*)$$

y además que en dicha solución la matriz básica asociada, $\hat{A}_B$, es productiva, entonces para cualquier demanda final, c, la solución básica óptima está asociada a la misma base. Es decir, se puede satisfacer cualquier consumo final utilizando el mismo conjunto de actividades.

12.- OTRAS APLICACIONES.

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS:

Sea la ecuación en diferencias lineal y con coeficientes constantes de orden k:

$$a_0 f(x+k) + \ldots + a_k f(x) = g(x) \qquad (1)$$

con $a_0 a_k \neq 0$.

Si definimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{a_k}{a_0} & & & \ldots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$$

entonces cualquier solución de (1) es asintóticamente estable si y sólo si el radio espectral de **B**, $\rho(\mathbf{B})$, es menor que 1.

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE METODOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (2)$$

si lo transformamos en la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\ \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

con $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, entonces el método iterativo definido por la ecuación (2) mediante

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{B}\ \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{b}$$

converge si y sólo si el radio espectral de **B** , $\rho(\mathbf{B})$, es menor que 1.

BIBLIOGRAFIA.-

DORFMANN, R. SAMUELSON P; SOLOW R. (1972): *Programación Lineal y Análisis Económico.* Aguilar. Madrid

GANTMACHER,F. R. (1966): *Théorie des Matrices.* Tome 2. Dunod. París.

GROSSMAN, S. (1991): *Algebra Lineal con aplicaciones.* McGraw-Hill. México.

GUTIERREZ, S. (1986): *Algebra Lineal para la Economía.* Ed.AC. Madrid.

LANCASTER, K. (1972): *Economía Matemática.* Bosch. Barcelona.

MUÑOZ, C. (1989): *Introducción a la Economía aplicada. Cuentas nacionales, tablas Input-Output y balanza de pagos.* Biblioteca de Economía. Espasa Calpe. Madrid.

NIKAIDO, H. (1978): *Métodos Matemáticos del Análisis Económico Moderno.* Vicens Vives. Barcelona.

PULIDO, A. y FONTELA, E. (1993): *Análisis Input-Output. Modelos, datos y aplicaciones.* Pirámide. Madrid.

SIBONY, M. y MARDON, J-C. (1984): *Analyse Numérique I: Systemes linéaires et non linéaires.* Hermann. Paris.

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
RELACIÓN DE DOCUMENTOS DE TRABAJO:

Doc. 001/1988 ***JUAN A. VAZQUEZ GARCIA***.- *Las intervenciones estatales en la minería del carbón.*

Doc. 002/1988 ***CARLOS MONASTERIO ESCUDERO***.- *Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.*

Doc. 003/1988 ***ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA***.- *Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.*

Doc. 004/1988 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *Una propuesta para la integración multijurisdiccional.*

Doc. 005/1989 ***LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO***.- *La modernización del sector agrario en la provincia de León.*

Doc. 006/1989 ***JOSE MANUEL PRADO LORENZO***.- *El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.*

Doc. 007/1989 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).*

Doc. 008/1989 ***FELIX LOBO ALEU***.- *El gasto público en productos industriales para la salud.*

Doc. 009/1989 ***FELIX LOBO ALEU***.- *La evolución de las patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.*

Doc. 010/1990 ***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES***.- *Investigación de las preferencias del cosnumidor mediante análisis de conjunto.*

Doc. 011/1990 ***ANTONIO APARICIO PEREZ***.- *Infracciones y sanciones en materia tributaria.*

Doc. 012/1990 ***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA***.- *Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.*

Doc. 013/1990 ***EQUIPO MECO***.- *Medidas de desigualdad: un estudio analítico*

Doc. 014/1990 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *Una estimación de las necesidades de gastos para los municipios de menor dimensión.*

Doc. 015/1990 ***ANTONIO MARTINEZ ARIAS***.- *Auditoría de la información financiera.*

Doc. 016/1990 ***MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ***.- *La población como variable endógena*

Doc. 017/1990 ***JAVIER SUAREZ PANDIELLO***.- *La redistribución local en los países de nuestro entorno.*

Doc. 018/1990 ***RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO***.- *"Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.*

Doc. 019/1990 ***RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ***.- *La política de precios en los establecimientos detallistas.*

Doc. 020/1990 ***CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ***.- *La demarcación de la economía (seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).*

Doc. 041/1992 **ESTEBAN GARCIA CANAL.-** *Tendencias empíricas en la conclusión de acuerdos de cooperación.*

Doc. 042/1992 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.-** *Novedades en la Legislación Laboral.*

Doc. 043/1992 **RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.-** *El comportamiento del consumidor y la estrategia de distribución comercial: Una aplicación empírica al mercado de Asturias.*

Doc. 044/1992 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Un marco teórico para el estudio de las fusiones empresariales.*

Doc. 045/1992 **CAMILO JOSE VAZQUEZ ORDAS.-** *Creación de valor en las fusiones empresariales a través de un mayor poder de mercado.*

Doc. 046/1992 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Influencia relativa de la evolución demográfica en le futuro aumento del gasto en pensiones de jubilación.*

Doc. 047/1992 **ISIDRO SANCHEZ ALVAREZ.-** *Aspectos demográficos del sistema de pensiones de jubilación español.*

Doc. 048/1992 **SUSANA LOPEZ ARES.-** *Marketing telefónico: concepto y aplicaciones.*

Doc. 049/1992 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *Las influencias familiares en el desempleo juvenil.*

Doc. 050/1992 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.-** *La adquisición de capital humano: un modelo teórico y su contrastación.*

Doc. 051/1992 **MARTA IBAÑEZ PASCUAL.-** *El orígen social y la inserción laboral.*

Doc. 052/1992 **JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.-** *Estudio del sector comercial en la ciudad de Oviedo.*

Doc. 053/1992 **JULITA GARCIA DIEZ.-** *Auditoría de cuentas: su regulación en la CEE y en España. Una evidencia de su importancia.*

Doc. 054/1992 **SUSANA MENENDEZ REQUEJO.-** *El riesgo de los sectores empresariales españoles: rendimiento requerido por los inversores.*

Doc. 055/1992 **CARMEN BENAVIDES GONZALEZ.-** *Una valoración económica de la obtención de productos derivados del petroleo a partir del carbón*

Doc. 056/1992 **IGNACIO ALFREDO RODRIGUEZ-DEL BOSQUE RODRIGUEZ.-** *Consecuencias sobre el consumidor de las actuaciones bancarias ante el nuevo entorno competitivo.*

Doc. 057/1992 **LAURA CABIEDES MIRAGAYA.-** *Relación entre la teoría del comercio internacional y los estudios de organización industrial.*

Doc. 058/1992 **JOSE LUIS GARCIA SUAREZ.-** *Los principios contables en un entorno de regulación.*

Doc. 059/1992 **Mª JESUS RIO FERNANDEZ; RIGOBERTO PEREZ SUAREZ.-** *Cuantificación de la concentración industrial: un enfoque analítico.*

Doc. 060/94 **Mª JOSE FERNANDEZ ANTUÑA.-** *Regulación y política comunitaria en materia de transportes.*

Doc. 061/94 **CESAR RODRIGUEZ GUTIERREZ.**- *Factores determinantes de la afiliación sindical en España.*

Doc. 062/94 **VICTOR FERNANDEZ BLANCO.**- *Determinantes de la localización de las empresas industriales en España: nuevos resultados.*

Doc. 063/94 **ESTEBAN GARCIA CANAL.**- *La crisis de la estructura multidivisional.*

Doc. 064/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.**- *Metodología de la investigación econométrica.*

Doc. 065/94 **MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; EMILIO COSTA REPARAZ.**- *Análisis Cualitativo de la fecundidad y participación femenina en el mercado de trabajo.*

Doc. 066/94 **JOAQUIN GARCIA MURCIA.**- *La supervision colectiva de los actos de contratación: la Ley 2/1991 de información a los representantes de los trabajadores.*

Doc. 067/94 **JOSE LUIS GARCIA LAPRESTA; Mª VICTORIA RODRIGUEZ URIA.**- *Coherencia en preferencias difusas.*

Doc. 068/94 **VICTOR FERNANDEZ; JOAQUIN LORENCES; CESAR RODRIGUEZ.**- *Diferencias interterritoriales de salarios y negociacion colectiva en España.*

Doc. 069/94 **Mª DEL MAR ARENAS PARRA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.**- *Programación clásica y teoría del consumidor.*

Doc. 070/94 **Mª DE LOS ÁNGELES MENÉNDEZ DE LA UZ; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.**- *Tantos efectivos en los empréstitos.*

Doc. 071/94 **AMELIA BILBAO TEROL; CONCEPCIÓN GONZÁLEZ VEIGA; Mª VICTORIA RODRÍGUEZ URÍA.**- *Matrices especiales. Aplicaciones económicas.*

Doc. 072/94 **RODOLFO GUTIÉRREZ.**- *La representación sindical: Resultados electorales y actitudes hacia los sindicatos.*

Doc. 073/94 **VÍCTOR FERNÁNDEZ BLANCO.**- *Economías de aglomeración y localización de las empresas industriales en España.*

Doc. 074/94 **JOAQUÍN LORENCES RODRÍGUEZ; FLORENTINO FELGUEROSO FERNÁNDEZ.**- *Salarios pactados en los convenios provinciales y salarios percibidos.*

Doc. 075/94 **ESTEBAN FERNÁNDEZ SÁNCHEZ; CAMILO JOSÉ VÁZQUEZ ORDÁS.**- *La internacionalización de la empresa.*

Doc. 076/94 **SANTIAGO R. MARTÍNEZ ARGÜELLES.**- *Análisis de los efectos regionales de la terciarización de ramas industriales a través de tablas input-output. El caso de la economía asturiana.*

Doc. 077/94 **VÍCTOR IGLESIAS ARGÜELLES.**- *Tipos de variables y metodología a emplear en la identificación de los grupos estratégicos. Una aplicación empírica al sector detallista en Asturias.*

Doc. 078/94 **MARTA IBÁÑEZ PASCUAL; F. JAVIER MATO DÍAZ.**- *La formación no reglada a examen. Hacia un perfil de sus usuarios.*

Doc. 079/94	***IGNACIO A. RODRÍGUEZ-DEL BOSQUE RODRÍGUEZ.-*** *Planificación y organización de la fuerza de ventas de la empresa.*
Doc. 080/94	***FRANCISCO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ.-*** *La reacción del precio de las acciones ante anuncios de cambios en los dividendos.*
Doc. 081/94	***SUSANA MENÉNDEZ REQUEJO.-*** *Relaciones de dependencia de las decisiones de inversión, financiación y dividendos.*