ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA AGREGACIÓN SECTORIAL EN EL MARCO DEL ANÁLISIS INPUT-OUTPUT

Carmen Ramos Carvajal[1] cramos@uniovi.es
Esteban Fernández Vázquez[2] evazquez@uniovi.es
Rubén Álvarez Herrero[3] rherrero@cuniovi.es
Ana Salomé García Muñiz[4] asgarcia@uniovi.es

(1) Tfno. 985105054. Fax.985105050
(2) Tfno 985105056. Fax.985105050
(3) y (4) Tfno. 985105058. Fax.985105050

Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas.
Avda. del Cristo s/n, 33071 Oviedo

1-INTRODUCCIÓN

Un aspecto relevante en los estudios input-output es el grado de agregación con el que se trabaja. frecuentemente podemos consultar estudios aplicados en los que se utiliza un grado de agregación bastante elevado. Lo cual permite una simplificación en el manejo de los datos, pero también constituye una fuente de error, ya que al agregar a un número muy reducido de sectores estaremos considerando ramas constituidas por sectores diferentes[1].

En esta comunicación pretendemos enfatizar este aspecto y analizarlo con detalle. En suma, consideraremos qué repercusiones tiene trabajar con un nivel u otro de agregación. Para efectuar este análisis vamos a utilizar la teoría estadística de la información, la cual proporciona un amplio conjunto de

[1] Puede verse el análisis efectuado por Szyrmer (1989) en el que se considera la influencia del nivel de agregación en la estimación de coeficientes mediante el método RAS.

herramientas, no sólo relacionadas con la estimación de coeficientes input-output[2], sino también con la fiabilidad de estas estimaciones o con la diferenciación del grado de desagregación de una tabla[3].

En la presente comunicación expondremos algunos conceptos básicos de teoría de la información, a partir de los cuales desarrollaremos nuestro cometido. En concreto, nos referiremos a la entropía y cantidad de información de Shannon y a la cuadrática.

Posteriormente, introduciremos el concepto de pérdida de la cantidad de información y analizaremos algunas de sus propiedades. Efectuaremos una descomposición de la misma en tres componentes: la aportación de las filas, de las columnas y de las celdas.

Asimismo se analizará la relación existente entre dicha pérdida de información y la dispersión existente en la tabla.

Concluiremos con un análisis empírico de la tabla input-output de Asturias de 2000, sobre la que se aplicarán los conceptos anteriormente presentados.

2-MEDIDAS DE ENTROPÍA

Shannon (1949) propuso como medida de incertidumbre asociada a un experimento aleatorio, una función que denominó entropía[4].

---

[2] Golan, A., G. Judge y S. Robinson (1994): Recovering information from incomplete or partial multisectoral economic data. *The Review of Economics and Statistics.* Nº 76, pág. 541-549.

[3] Ver Ramos, Álvarez, Fernández y García (2003): Algunas aplicaciones de la Teoría Matemática de la información al Análisis Input-Output. XI Jornadas de ASEPUMA, Oviedo.

[4] Esta palabra deriva del griego y significa “replegarse hacia el interior”.

2.1.1. La entropía de Shannon

Consideremos una población sobre la que se define una variable aleatoria X que toma unos valores $(x_1, ..., x_n)$ cuyas probabilidades asociadas serán $(p_1,...,p_n)$, donde $\sum_i^n p_i = 1$. Se denomina entropía de Shannon de dicha variable o de la distribución P a la expresión siguiente:

$$H(X) = H(p_1, p_2, ... p_n) = -\sum_{i=1} p_i \log p_i$$

La entropía de Shannon está acotada inferiormente por cero, alcanzándose este valor cuando la variable es degenerada, esto es, cuando son nulas n-1 probabilidades y la restante toma el valor uno. Alcanzará su mayor valor, log(n), en el caso de que todas las probabilidades coincidan, $p_1=p_2=... =p_n=\frac{1}{n}$, esto es, cuando la distribución es uniforme.

La entropía de una distribución puede ser entendida como el desorden existente en la misma, es decir, la incertidumbre asociada a un determinado fenómeno.

Consideremos ahora una variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y) que toma valores (x_i, y_j), $\forall i=1,2...,n$ y $\forall j=1,2...,t$, con probabilidades $p(x_i,y_j)\geq 0$, tales que

$$\sum_{i=1}\sum_{j=1} p_{ij} = 1$$

Se puede definir la entropía asociada a dicha variable del siguiente modo:

$$H(X,Y)=-\sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

El comportamiento de esta medida es análogo al visto para una variable.

2.1.2. La entropía cuadrática

Existen diferentes generalizaciones de la medida de entropía, una de las cuales es debida a Havrda y Charvat (1967), los cuales propusieron la entropía de grado β.

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad P=(p_1, p_2...p_n), Se puede establecer la siguiente definición de entropía de grado β (β≠1), β>0:

$$H^{\beta}(X) = H^{\beta}(p_1,...p_n) = \frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_i \left(p_i^{\beta} - p_i\right)$$

Esta medida coincide con la entropía de Shannon cuando β se aproxima a la unidad. Para el valor concreto β=2 surge la denominada entropía cuadrática; así pues, dada una variable aleatoria X que lleva asociado un sistema de probabilidades $\{p_1, p_2, ...p_n\}$ se define la entropía cuadrática a partir de la expresión

$$H^2(X) = 2\sum_i p_i(1-p_i) = 2\left[1-\sum_i p_i^2\right]$$

Esta medida está acotada acotada entre cero y dos, alcanzando su menor valor en el caso de que la distribución sea degenerada y el máximo cuando las probabilidades son coincidentes.

Dado que nuestro interés se centra en la determinación de la incertidumbre asociada a una tabla input-output, consideraremos una variable aleatoria bidimensional, que presenta una probabilidad conjunta p_{ij}.

La entropía cuadrática toma la expresión siguiente:

$$H^2(X,Y) = 2\sum_i\sum_j p_{ij}(1-p_{ij}) = 2\left[1-\sum_i\sum_j p_{ij}^2\right]$$

Dicha medida se encuentra acotada entre cero y dos, con interpretación análoga a la señalada para una variable unidimensional.

2.1.3. Cantidad de información

A partir del concepto de incertidumbre podemos definir el de cantidad de información que la variable aleatoria Y contiene sobre X, la cual puede interpretarse como la reducción de la incertidumbre de X entre la situación inicial y la que se produce después de conocer Y.

La expresión de la cantidad de información será:

$$I(X,Y)=H(X)-H(X/Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$$

donde H(X/Y) representa la entropía condicionada de X dada la variable Y.

Operando convenientemente llegamos a la expresión siguiente[5]:

$$I(X,Y)=\sum_i\sum_j p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{p_i p_j}$$

La cantidad de información es mayor o igual que cero y no superior a la entropía de X, por lo tanto, podemos escribir

$$0\leq I(X,Y)\leq H(X)=\log(n)$$

Dada una v.a. bidimensional (X,Y), las probabilidades asociadas serán p_{ij} $\forall i=1,2,...,n$ y $\forall j=1,2...,n$, por lo que la cantidad de información cuadrática se puede definir de la siguiente forma

$$I^2(X,Y)=2\left[1-\sum_i p_i^2-\sum_j p_j^2+\sum_i\sum_j p_{ij}^2\right]$$

Esta medida se encuentra acotada entre cero y dos.

[5]Obsérvese que $H(y)=-\sum_j p_j\log p_j$

3-CONEXIÓN DE UNA TABLA INPUT-OUTPUT CON LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Una tabla input-output recoge tanto las relaciones existentes entre los distintos sectores como la demanda final de los mismos.

Las ecuaciones que recogen estos flujos son:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 \\
X_2 &= x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n
\end{aligned}
$$

Donde X_i representa el output total del sector i-ésimo, x_{ij} el flujo de bienes y servicios del sector i-ésimo al j-ésimo e y_i es la demanda final del i-ésimo sector.

Las anteriores ecuaciones recogen los flujos "en filas", pero análogamente podrían haber sido presentados "en columnas" del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + g_1 \\
X_2 &= x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + g_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + g_n
\end{aligned}
$$

Donde g_i se refiere a los inputs primarios del sector i-ésimo.

En concreto, si nos centramos en la submatriz de consumos intermedios que representa las transacciones en una economía, se puede establecer un sistema de probabilidades[6], al dividir el contenido de cada celda entre el total de las mismas, esto es,

[6] Este aspecto está recogido en Tilanus y Theil (1965) o en Doblado (1988), entre otros.

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{X}$$

donde $X = \sum_i \sum_j x_{ij}$.

Por lo tanto, y si aplicamos cualquiera de las fórmulas anteriormente presentadas, podremos determinar la incertidumbre y la cantidad de información asociada a una tabla input-output.

4-AGREGACIÓN Y PÉRDIDA DE INFORMACIÓN

A continuación pasaremos a hacer una breve referencia a la información estadística empleada y posteriormente definiremos la pérdida de información asociada a la agregación sectorial.

4.1. INFORMACIÓN ESTADÍSTICA UTILIZADA: LA TIOA DE 2000

Las tablas input-output (TIO) se presentan frecuentemente en distintos niveles de desagregación; así, por ejemplo, la TIO simétrica correspondiente a Asturias referida al año 2000 aparece desglosada en 65 y 4 sectores. Esta matriz es la primera, en nuestra región, que sigue las directrices contables del SEC-95. Posiblemente, si empleamos la matriz con 65 ramas el gran volumen de información dificultaría la comprensión del objeto de nuestro estudio, mientras que si, por el contrario, nos decantamos por trabajar con 4 ramas habremos perdido mucha información relevante. Por todo ello, consideramos interesante disponer de una herramienta que permita diferenciar entre los distintos niveles de agregación; nuestra propuesta es utilizar la cantidad de información como elemento diferenciador.

4.2. PÉRDIDA DE LA CANTIDAD DE INFORMACIÓN: DESCOMPOSICIÓN

Tomemos como punto de partida una matriz que esté constituida por n sectores. A partir de los flujos que aparecen en la tabla se determinarán las probabilidades p_{ij} como se ha señalado anteriormente.

La cantidad de información asociada a dicha tabla se obtendrá a partir de la incertidumbre cuadrática[7], es decir,

$$I^2(X,Y) = 2\left[1 - \sum_i p_i^2 - \sum_j p_j^2 + \sum_i \sum_j p_{ij}^2\right]$$

Supongamos, ahora, que se desea realizar una agregación de los sectores que constituyen la tabla, pasaremos a disponer de m grupos de filas y columnas; dichos grupos serán denotados, respectivamente, por S_g y S_h, $\forall g=1,2...,m$ y $\forall h=1,2...,m$. Por lo tanto, las probabilidades resultantes de la agregación (p_{gh}) variarán, en relación a las iniciales (p_{ij}), es decir, $p_{gh} \geq p_{ij}$ $\forall i \in S_g$ y $\forall j \in S_h$. La expresión de la cantidad de información cuadrática después de la agregación será:

$$I_A^2(X,Y) = 2\left[1 - \sum_g p_g^2 - \sum_h p_h^2 + \sum_g \sum_h p_{gh}^2\right]$$

Obsérvese que $p_g \geq p_i$, $\forall i \in S_g$ y $p_h \geq p_j$, $\forall j \in S_h$, por lo tanto, $\forall i \in S_g$ y $\forall j \in S_h$, se verificará $p_g^2 \geq p_i^2$, $p_h^2 \geq p_j^2$ y $p_{gh}^2 \geq p_{ij}^2$.

La pérdida que experimenta la cantidad de información ante esta agregación puede expresarse de la siguiente manera

$$\Delta I^2(XY) = I^2(X,Y) - I_A^2(X,Y) =$$
$$= 2\left[\left(\sum_g p_g^2 - \sum_i p_i^2\right) + \left(\sum_h p_h^2 - \sum_j p_j^2\right) + \left(\sum_i \sum_j p_{ij}^2 - \sum_g \sum_h p_{gh}^2\right)\right]$$

[7] En lo que sigue de esta comunicación nos referiremos a la cantidad de información cuadrática, ya que Doblado (1988) ha realizado un ejercicio similar a éste, aplicando la cantidad de información de Shannon.

Esto es, hemos descompuesto el cambio en la cantidad de información debido a la agregación en tres términos: el cambio que se experimenta en las filas, $\left(\sum_g p_g^2 - \sum_i p_i^2\right)$, el que se experimenta en columnas, $\left(\sum_h p_h^2 - \sum_j p_j^2\right)$, y el debido a las celdas, $\left(\sum_i \sum_j p_{ij}^2 - \sum_g \sum_h p_{gh}^2\right)$.

El primer y segundo sumandos tienen signo positivo y el tercero negativo. Este último puede ser interpretado como un factor de corrección que permite descontar la acción conjunta de inputs y outputs.

Como señala Doblado (1988) la pérdida de información será debida a la heterogeneidad de los inputs, a la heterogeneidad de los outputs y a la de las celdas.

Con la finalidad de ilustrar este punto vamos a considerar distintas agregaciones de los sectores de la tabla de Asturias de 2000 y cuantificaremos la pérdida de información global y su descomposición entre el peso que tienen los inputs, los outputs y celdas en la variación global. Como hemos señalado anteriormente la tabla de Asturias aparece presentada a 65 y 4 sectores. Nosotros hemos procedido a efectuar dos agregaciones intermedias a ambas, en concreto, a 31 sectores y a 16 sectores, siguiendo el modelo de la TIO de de Asturias de 1995. Dichas agregaciones aparecen recogidas en el anexo.

Cuadro Nº 1. Cantidad de información asociada a diferentes niveles de agregación

$I^2(X,Y)$	TIOA-65	TIOA-31	TIOA-16	TIOA-4
Valor	1.8207	1.7379	1.6960	0.8342
% respecto a su cota	91.03%	86.90%	84.8%	41.71%

Como podemos apreciar la cantidad de información contenida en las tres primeras tablas es bastante elevada en relación a su cota superior; esta cantidad va disminuyendo a medida que se agrega a un menor número de sectores, es decir, mayor agregación lleva asociada una menor cantidad de información.

A continuación vamos a cuantificar la pérdida global de la información asociada a la agregación tanto global, como desglosada en los outputs, los inputs y las celdas.

Cuadro Nº 2. Pérdida de información: descomposición

	Pérdida global	Pérdida celdas	Pérdida outputs	Pérdida inputs
TIO 65-31	0.0877	12.74%	41.34%	45.92%
TIO 65-16	0.1248	11%	43.99%	45.01%
TIO 65-4	0.9865	22.10%	41.05%	36.85%
TIO 31-16	0.0371	7.05%	50.03%	42.92%
TIO 31- 4	0.9037	22.73%	41.02%	36.24%
TIO 16-4	0.8041	23.21%	40.75%	36.04%

Como puede apreciarse en el cuadro anterior la pérdida global tiene un pequeño peso cuando se pasa a agregar de 65 a 31, o de 31 a 16, aumentando a ésta a medida que la agregación es más drástica. En los casos considerados el componente que tiene menos importancia es el de las celdas, mientras que los otros dos componentes tienen un peso más elevado y, más o menos, similar, a veces superior en los inputs y a veces en los outputs. Las diferencias que se aprecian en inputs y outputs son debidas a la distribución inicial de las compras y ventas de la economía que se mantienen después de la agregación.

Si se desea trabajar con tablas simétricas, la agregación ha de ser análoga en filas y columnas y no puede ser alterada unilateralmente, sin embargo, si detectamos aquellas agrupaciones sectoriales que son “mayores generadoras” de pérdida de información, podemos actuar sobre ellas y reducir así dicha pérdida.

A partir de la información anterior podríamos determinar qué agrupación de sectores tiene más importancia en la pérdida de información, para ello deberíamos determinar las contribuciones de los distintos conjuntos de ramas en el total.

Cuadro Nº 3. Outputs con mayor peso en la pérdida de información

Agregación[8]	**Outputs con mayor peso**
TIOA 65-31	Administración pública; Metalurgia y productos metálicos; Intermediación financiera; Transportes y comunicaciones.
TIOA 65-16; TIOA 31-16	Servicios financieros y empresariales; Metalurgia y productos metálicos

Y por lo que se refiere a los inputs:

Cuadro Nº 4. Inputs con mayor peso en la pérdida de información

Agregación	**Inputs con mayor peso**
TIOA 65 -31	Alimentación, bebidas y Tabaco; Metalurgia y productos metálicos; Intermediación financiera y Construcción
TIOA 65-16;TIOA 31-16	Metalurgia y productos metálicos; Construcción

Si se analizan los resultados obtenidos tanto para inputs como para outouts, se pueden observar los siguientes aspectos:

[8] Hemos eliminado del análisis la agregación a 4 sectores ya que proporciona muy poca información.

- Algunas ramas del sector servicios provocan una mayor pérdida de información (Alquileres, servicios empresariales, Intermediación finananciera).
- Algunas de las agrupaciones que mayores distorsiones causan están constituidas por un elevado número de sectores (Alimentación, Bebidas y Tabaco, Intermediación financiera)
- Las ramas Construcción y Administración Pública están constituidas por un único sector, pero bajo esa denominación se recogen una gran cantidad de partidas (Ver CNAE).
- La agregación Metalurgia y productos metálicos, aunque está constituida sólo por dos sectores, parece presentar un comportamiento distorsionador.

A partir de estos resultados, vamos a presentar nuevas agregaciones en las que se hallen desagregados los sectores que generan una mayor pérdida de información, respetando, por supuesto, la simetría de las tablas y analizaremos de nuevo la pérdida de información.

Cuadro Nº 5. Pérdida de información con la nueva agregación

Nueva agregación	Pérdida global	Reducción de la pérdida
65-34	0.0514	25.29%
65-17	0.0915	26.68%
31-17	0.0333	10.24%

Como puede apreciarse, un pequeño aumento en el número de sectores ha provocado un descenso en la pérdida de información que puede llegar al 25%.

4.3. LA NO NEGATIVIDAD DE LA PÉRDIDA DE INFORMACIÓN

Como hemos señalado, los dos primeros sumandos que constituyen la pérdida de información son positivos (los correspondientes a inputs y outputs) y el último negativo (el referente a las celdas). Por ello, podremos plantearnos cuál será el signo de la pérdida global.

A continuación, pasamos a analizar el signo de la pérdida de cantidad de información.

Sabemos que $H^2(X)+H^2(Y) > H^2(X,Y)$, por lo tanto,

$$2\left[1-\sum_i p_i^2-\sum_j p_j^2+\sum_i\sum_j p_{ij}^2\right]>0$$

Análogamente,

$$2\left[1-\sum_g p_g^2-\sum_h p_h^2+\sum_g\sum_h p_{gh}^2\right]>0$$

entonces, podemos escribir

$$1+\sum_i\sum_j p_{ij}^2>\sum_i p_i^2+\sum_j p_j^2$$

$$1+\sum_g\sum_h p_{gh}^2>\sum_g p_g^2+\sum_h p_h^2$$

Si sumamos ambas inecuaciones se obtiene

$$2+\sum_g\sum_h p_{gh}^2+\sum_i\sum_j p_{ij}^2>\sum_g p_g^2+\sum_h p_h^2+\sum_i p_i^2+\sum_j p_j^2$$

Operando convenientemente

$$2+\sum_g\sum_h p_{gh}^2+\sum_i\sum_j p_{ij}^2-\sum_i p_i^2-\sum_j p_j^2>\sum_g\sum_h p_{gh}^2-\sum_i\sum_j p_{ij}^2+\sum_i p_i^2+\sum_j p_j^2$$

A partir de donde, se deriva la desigualdad siguiente:

$$\left(\sum_g p_g^2-\sum_i p_i^2\right)+\left(\sum_h p_h^2-\sum_j p_j^2\right)>\left(\sum_i\sum_j p_{gh}^2-\sum_g\sum_h p_{ij}^2\right)$$

Con lo cual, podemos concluir que a medida que se agrega más, la cantidad de información no crece, sino que en general disminuirá. Por tanto, denominaremos a esta medida de cambio en la cantidad de información debido a la agregación como pérdida de la cantidad de información.

4.4. PÉRDIDA DE INFORMACIÓN Y DISPERSIÓN

Para intentar ahondar algo más en el concepto de la pérdida de información se relacionará con el de dispersión. En concreto, expresaremos dicha función en términos de la dispersión de los coeficientes y, por lo tanto, de las relaciones intersectoriales.

Tradicionalmente, la dispersión asociada a una distribución se cuantifica en relación a la media aritmética mediante la varianza, que al tratarse de una medida de dispersión cuadrática se adapta bastante bien a la medida de entropía utilizada, que también lo es.

Si consideramos una variable discreta (X), la expresión de la varianza de las participaciones marginales, será

$$S_X^2 = \left[1 - \frac{H^2(X)}{2}\right]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}\left[2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - H^2(X)\right]$$

La cual se obtiene a partir a partir de la expresión

$$S_X^2 = \sum_i \frac{p_i^2}{n} - \left(\sum_i \frac{p_i}{n}\right)^2$$

Es decir, se ha establecido la varianza como la diferencia entre la cota superior de la entropía cuadrática[9] y su valor observado, multiplicado por una constante.

Si ahora, expresamos la entropía cuadrática, en términos de la varianza se tiene:

$$H^2(X) = 2\left[1 - nS_x^2 - \frac{1}{n}\right] = 2\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) - nS_x^2\right]$$

Esta expresión representa la diferencia entre la cota superior de la entropía, esto es, la máxima entropía y la varianza multiplicada por una constante. A partir de lo anteriormente expuesto, se aprecia que la varianza puede ser entendida como una medida opuesta de la entropía, cuando la dispersión es mínima la entropía es máxima y viceversa.

A partir de lo anteriormente señalado podemos expresar la pérdida de la cantidad de información en términos de la varianza. Así pues,

$$\Delta I^2(XY) = \Delta H^2(X) + \Delta H^2(Y) - \Delta H^2(XY)$$

entonces podemos escribir:

$$\Delta I^2(XY) = 2\left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \left(nS_O^2 - mS_{OA'}^2\right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \left(nS_I^2 - mS_{IA'}^2\right) + \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) - (n^2S_C^2 - m^2S_{CA}^2)\right]$$

donde $S_O^2(S_{OA}^2)$ representan la varianza de los outputs antes (después) de la agregación, $S_I^2(S_{IA}^2)$ es la varianza de los inputs antes (después) de la agregación y $S_C^2(S_{CA}^2)$ la varianza de las celdas antes (después) de la agregación.

Por lo tanto,

---

[9] El término $2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ es la cota máxima de la entropía cuadrática que se aproxima a 2 cuando n toma un valor muy elevado.

$$\Delta I^2(XY) = 2\left[2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\left[\left(nS_{OA}^2-mS_O^2\right)+\left(nS_{IA}^2-mS_I^2\right)+(m^2S_C^2-n^2S_{CA}^2)\right]\right]$$

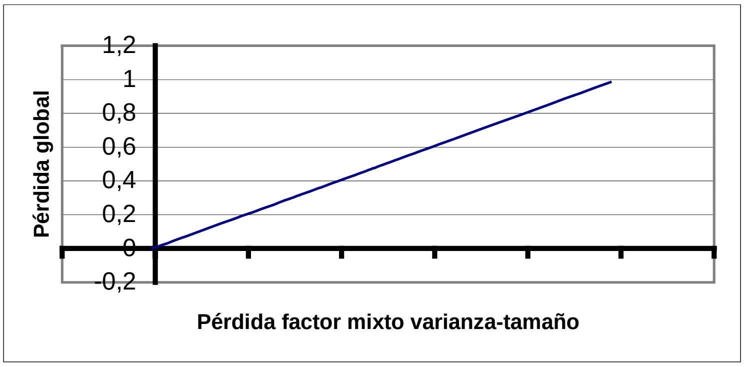
Es decir, se puede expresar como la diferencia entre las cotas superiores de las entropía respectivas más la diferencia de las varianzas[10]. Por lo tanto, la pérdida de información depende de dos factores: el primero de ellos, indica que la pérdida será menor si la agregación no es muy drástica, es decir, si no hay una fuerte disminución del número de sectores y el segundo se refiere a que cuanto más parecida sea la dispersión de las cuotas, antes y después de la agregación, menos pérdida de información se producirá.

Se han realizado distintas simulaciones para intentar profundizar en el comportamiento de la pérdida de información. En primer lugar se ha analizado la relación entre la pérdida global y el segundo factor de pérdida $\left(nS_{OA}^2-mS_O^2\right)+\left(nS_{IA}^2-mS_I^2\right)+(m^2S_C^2-n^2S_{CA}^2)$. Hemos supuesto que la agregación no varía y se han ido modificando los coeficientes de forma que las varianzas respectivas se han ido alterando. Se ha obtenido una relación lineal que aparece recogida en el gráfico siguiente.

[10] Hemos calculado la varianza a partir de las cuotas p_{ij} a partir de la fórmula siguiente

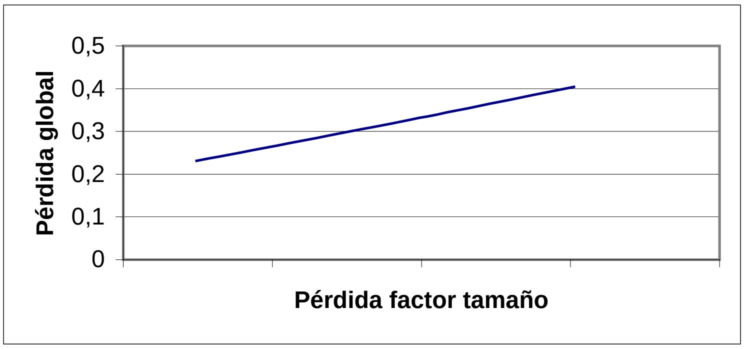
$$\sum_i\sum_j \frac{p_{ij}^2}{n}-\left(\overline{p}_{ij}\right)^2$$

Gráfico Nº1: Relación entre la pérdida global y la pérdida debida al factor mixto



Si ahora planteamos cambios en el número de sectores antes y después de la agregación, la relación existente entre la pérdida total y el factor de pérdida debido al cambio en el número de sectores será:

Gráfico Nº2: Relación entre la pérdida global y la pérdida debida al factor tamaño



Donde de nuevo se aprecia una relación lineal entre la pérdida global y la debida al factor tamaño.

4.5. PÉRDIDA RELATIVA DE INFORMACIÓN

Puede resultar interesante para efectuar comparaciones, acotar superiormente la pérdida de información. Para ello vamos a partir de dos situaciones que difieran lo más posible en su estructura, esto es, supongamos que en la situación antes de efectuar la agregación, los coeficientes son todos ellos coincidentes, por lo tanto, la dispersión con respecto a la media será nula, en este caso $S_O^2 = S_I^2 = S_C^2 = 0$. Supongamos ahora que después de haber efectuado la agregación la dispersión de los coeficientes alcanza su mayor valor, que según lo anteriormente expuesto se alcanzará si la distribución es degenerada, esto es,

$$S_{OA}^2 = \frac{1}{2m}\left[2\left(1-\frac{1}{m}\right)\right] = \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$$

Análogamente, para S_{IA}^2 y para S_{CA}^2 tendremos

$$S_{IA}^2 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} \text{ y } S_{CA}^2 = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^4}$$

Por lo tanto, sustituyendo estos valores en la expresión de la pérdida de información, obtendremos

$$\Delta I^2(XY) = 2\left[2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)-\left[2m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}\right)+m^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^4}\right)\right]=2\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+1\right]\right]$$

Esto es, la cota superior depende del número de sectores que hubiese antes de efectuar la agregación. Por lo tanto, podemos construir una medida relativa de la pérdida de información de la siguiente manera

$$\Delta I^2(XY) = \frac{\left[2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\left[\left(nS_{OA}^2 - mS_O^2\right)+\left(nS_{IA}^2 - mS_I^2\right)+(m^2S_C^2 - n^2S_{CA}^2)\right]\right]}{\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+1\right]}$$

dicha expresión está acotada, entre cero y uno. Si se considera en términos porcentuales, podremos determinar el porcentaje de pérdida de información debido a la agregación.

Procederemos a cuantificar la pérdida de información anteriormente calculada en términos de su cota superior, los valores obtenidos se recogen en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 6. Pérdida de información global relativa

	Pérdida global	Pérdida global relativa
TIO 65-31	0.0877	4.45%
TIO 65-16	0.1247	6.33%
TIO 31-16	0.0371	1.91%
TIO 65-4	0.9865	50.01%
TIO 31- 4	0.9037	46.64%
TIO 16-4	0.8041	42.71%

Como puede apreciarse a partir del cuadro anterior la pérdida relativa de información que supone de pasar de agregar de 65 o 31 a 4 ramas es de más del 40%. Mientras que dicha pérdida será del 4.45% cuando 31 sectores en lugar de los 65 iniciales, o del 6.33% si la agregación es a 16.

5- CONCLUSIONES

La teoría de la información es una herramienta de importante aplicación en el ámbito del análisis input-output. Un aspecto de interés en los estudios aplicados lo constituye la consideración de la influencia que tiene trabajar con distintos niveles de agregación.

La pérdida de la cantidad de información asociada a la agregación sectorial constituye un buen indicador que permite diferenciar entre la oportunidad de efectuar diferentes agrupaciones.

Se ha utilizado como caso de estudio la TIO de Asturias de 2000, analizando la pérdida de información en diferentes situaciones: agregación a 65, a 31, a 16 y a 4 ramas.

6-REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOBLADO, J.M (1988): *Teoría de la información: Errores de Agregación en las tablas input-output.* Ed. UNED.

GIL, P. (1981): *Teoría matemática de la información.* Ed. ICE.

GOLAN, A., G. JUDGE y S. ROBINSON (1994): Recovering information from incomplete or partial multisectoral economic data. *The Review of Economics and Statistics.* Nº 76, pág. 541-549.

INFANTE, R. (2000):Teoría de la información. Aplicaciones, en *Perspectivas en estadística e investigación operativa.* Pascual, A. y Parras, L. Editores. Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

PARDO, L. (1997): *Teoría de la información estadística.* Ed. Hespérides.

PÉREZ, R. (1985): *Estimación de la incertidumbre, la incertidumbre útil y la inquietud en poblaciones finitas. Una aplicación a las medidas de desigualdad.* Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

PULIDO, A. y A. FONTELA (1993): *Análisis input-output. Modelos, datos y aplicaciones.* Ed. Pirámide.

RAMOS, C. (1997): La distancia como medida de similitud en el análisis input-output. XI *Reunión ASEPELT*, Bilbao.

RAMOS, C., ALVAREZ, R., FERNÁNDEZ, E. y GARCÍA, A. S. (2003): Algunas aplicaciones de la teoría matemática de la información al análisis input-output. *XI Jornadas de ASEPUMA, Oviedo.*

RÍO, Mª J. y R. PÉREZ (1987): Sobre la medición de la concentración industrial. *III Jornadas de Economía Industrial,* Madrid.

RÍO, Mª J. y C. RAMOS (1987): El concepto de distancia y algunas aplicaciones económicas. *Encuentro de Matemática Aplicada a la Empresa,* Zaragoza.

SADEI (2003): *Marco Input-Output de Asturias.* Publicación electrónica: http://www.sadei.es

SZYRMER,J. (1989): Trade-off between error and information in the RAS procedure. En Miller, Polenske y Rose *Frontiers of Input-Output Analysis,* Oxford University Press, págs. 258-278.

TILANUS, C.B. y H. THEIL (1965): The Information approach to the evaluation of input-output forecast. *Econometrica,* Vol. 32, Nº 4, pág. 847-862.

Anexo 1

Cadro Nº A.1: Agregación a 31 ramas

Ramas	TIOAS-31
1- Agricultura, ganadería y silvicultura	1+2
2-Pesca	3
3-Extracción de productos energéticos	4+5+6
4-Extracción de otros minerales	7+8
5-Alimentación, bebidas y tabaco	9+10+11+12+13
6-Industria textil y de confección	14+15
7-Industria del cuero y del calzado	16
8-Industria de la madera y corcho	17
9-Industria de la edición, papel y artes gráficas	18+19
10-Coquerías y refino de petróleo	20
11-Industria química	21
12-Industria del caucho y materias plásticas	22
13-Otros productos minerales no metálicos	23
14-Metalurgia y productos metálicos	24+25
15- Maquinaria y equipo mecánico	26
16- Material eléctrico, electrónico óptico	27+28+29+30
17- Fabricación de material de transporte	31+32
18-Industrias manufactureras diversas	33+34
19-Energía eléctrica, gas y agua	35+36
20-Construcción	37
21-Comercio y reparación	38+39+40
22-Hostelería	41
23-Transportes y comunicaciones	42+43+44+45+46
24-Intermediación financiera	47+47 bis+48+49
25-Administración pública	55
26-Educación de mercado	56
27-Educación de no mercado	58
28-Actividades sanitarias; servicios sociales de mercado	57
29- Actividades sanitarias; servicios sociales de no mercado	59
30-Otros servicios	50+51+52+53+54+60+61+62+63
31-Hogares que emplean personal doméstico	64

Cuadro NºA.2: Agregación a 16 ramas

Ramas	TIOAS -16
1-Agricultura y pesca	1+2+3
2-Industrias extractivas	4+5+6+7+8
3-Alimentación, bebidas y tabaco	9+10+11+12+13
4-Industria química	20+21
5-Otros productos minerales no metálicos	23
6-Metalurgia y productos metálicos	24+25
7-Industria transformadora de los metales	26+27+28+29+30+31+32
8-Otras industrias manufactureras	14+15+16+17+18+19+22+33+34
9-Energía eléctrica, gas y agua	35+36
10-Construcción	37
11-Comercio y reparación	38+39+40
12-Hostelería	41
13-Transporte y comunicaciones	42+43+44+45+46+
14-Servicios financieros y empresariales	47+47bis+48+49+50+51+52+53+54
15-Educación, sanidad y servicios sociales	56+57+58+59
16-Otros servicios	55+60+61+62+63+64+65