ESTUDIO DE LA PROBABILIDAD DE ZADEH PARA T-NORMAS ARQUIMEDIANAS

J. Hernández[1] **I. Montes**[2] **D. Martinetti**[2] **S. Montes**[2]

[1] Massachusetts Institute of Technology, javierh@mit.edu
[2] Universidad de Oviedo, {uo182551,martinettidavide.uo,montes}@uniovi.es

Resumen

Una de las primeras formas de medir la probabilidad de un suceso borroso fue propuesta por Zadeh. A pesar de que desde entonces han surgido muchas otras alternativas, dicha definición sigue siendo considerada aún en la actualidad en algunos ámbitos. Cuando la intersección y la unión de dos conjuntos borrosos se define mediante la t-norma del mínimo y su t-conorma dual, respectivamente, esta medida es realmente una medida de probabilidad según los axiomas de Kolmogorov. Ésta fue la t-norma elegida inicialmente, pero evidentemente cualquier otra podría se considerada dependiendo del contexto. En este trabajo se plantea una caracterización de las t-normas arquimedianas en función de su compatibilidad con dicho concepto de probabilidad.

Palabras Clave: probabilidad de Zadeh, t-norma arquimediana, t-norma estricta, t-norma nilpotente.

1 INTRODUCCIÓN

La falta de información asociada a todo experimento puede ser de dos tipos bien diferenciados: incertidumbre o imprecisión. Hablamos de incertidumbre cuando el espacio muestral está compuesto por una serie de alternativas bien especificadas, pero no sabemos cuál de ellas ha sido el resultado del experimento. Un ejemplo típico de incertidumbre es el resultado del lanzamiento de una moneda, conocemos con precisión las posibles alternativas (cara o cruz), pero no sabemos cual de las dos ocurrirá. La teoría de la probabilidad se encarga del estudio de este tipo de falta de información. Por otro lado, hablamos de imprecisión cuando se sabe cuál de las alternativas ha ocurrido, pero ésta no puede ser descrita de forma precisa. Esto ocurriría, siguiendo con el ejemplo anterior, si vemos el resultado del lanzamiento de la moneda, pero ésta es muy antigua y está demasiado gastada. En realidad sabemos el resultado del experimento, pero no podemos describirlo con precisión, podríamos decir que el resultado "parece ser cruz" o afirmaciones por el estilo. La teoría que se encarga del estudio de la imprecisión es la de los conjuntos borrosos.

Aunque de naturaleza totalmente distinta, es posible que ambas faltas de información estén presentes en un mismo problema. Esto hace que la teoría de la probabilidad y la teoría de los conjuntos borrosos puedan y deban trabajar en conjunto en algunas ocasiones, con el fin de poder manejar de forma unificada y coherente la imprecisión y la incertidumbre. Este hecho ha sido puesto de manifiesto por muchos autores (ver, por ejemplo, [5, 9, 10, 11, 15, 19, 20]) desde la introducción del concepto de conjunto borroso en 1965 [18]. El primer intento de trabajar con ambas teorías de forma conjunta fue el de Loginov en 1966 [10]. Sin embargo su idea inicial no era natural puesto que para conjuntos borrosos no se verifica la ley del *tercero excluido*. El segundo intento fue el propuesto por Zadeh en 1968 [19], basándose en el hecho de que la probabilidad de un conjunto nítido puede ser vista como la esperanza de su función característica y definiendo, a partir de aquí la probabilidad de un conjunto borroso. Posteriormente muchas otras teorías han contribuido con nuevas formas de cuantificar la probabilidad de un conjunto borroso, dando lugar a medidas de probabilidad borrosas, medidas de posibilidad, etc. (ver por ejemplo, entre otras muchas, [3, 14, 15, 16]). A pesar de ello, el concepto de probabilidad de un conjunto borroso introducido por Zadeh es aún utilizado en algunas ocasiones (ver, por ejemplo, [1, 4, 6, 13, 16, 17]).

En [19], Zadeh consideró que la intersección de dos conjuntos borrosos venía definida mediante la t-norma del mínimo y que la unión venía definida por su t-conorma dual, es decir, por el máximo. Bajo estas suposiciones, la medida introducida por Zadeh verificaba los clásicos axiomas de Kolmogorov, con lo cual era una medida de probabilidad en el sentido clásico. No obstante, esta propiedad no se mantiene en general para cualquier t-norma y su t-conorma dual asociada. El objetivo de este trabajo es caracterizar todas las t-normas arquimedianas de acuerdo con su compatibilidad con dicha axiomática. Así, se realiza un estudio general tanto para t-normas estrictas como nilpotentes. De dicho estudio se obtendrá como consecuencia inmediata la caracterización de los parámetros compatibles para algunas de las familias de t-normas más habituales (Frank, Yager, Aczél-Alsina, Dombi, Sugeno-Weber, Mayor-Torrens, Schweizer-Sklar y Hamacher).

Así, la organización de este trabajo queda como sigue. Comenzaremos con una primera sección en la que se recordarán los conceptos previos necesarios para la compresión del resto del manuscrito. Posteriormente, en la Sección 3, se analizará el comportamiento respecto a la axiomática de Kolmogorov de las t-normas estrictas e idempotente. En la Sección 4 se realiza un planteamiento análogo para las t-normas nilpotentes. La aplicación de los estudios anteriores para algunas familias interesantes de t-normas se realiza en la Sección 5. Finalmente se termina el trabajo con una sección de conclusiones y puntos abiertos.

2 CONCEPTOS BÁSICOS

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos necesarios en el desarrollo del resto del trabajo. Muchos de ellos son ampliamente conocidos, por lo que nuestro objetivo no es sólo recordarlos al lector, sino fijar la notación utilizada. Comenzaremos recordando el concepto de probabilidad analizado en este trabajo. En el análisis de dicho concepto será imprescindible tener en cuenta las diversas formas de definir la unión y la intersección de dos conjuntos borrosos. Puesto que dichas definiciones vienen dadas a través de las t-conormas y las t-normas, respectivamente, un repaso de dichos conceptos será también necesario.

Zadeh ([19]) cuantificó la probabilidad de un suceso del tipo "el día está caliente", "x es *aproximadamente* igual a 5", "en las veinte tiradas de una moneda hubo *muchas* más caras que cruces", es decir, de sucesos representados por conjuntos borrosos. Su definición de probabilidad de un suceso borroso se basaba en la idea de que en el caso clásico, la probabilidad de un suceso medible A puede expresarse como $P(A) = \int_A dP = \int_\Omega \chi_A(w)dP(w) = E[\chi_A]$, donde χ_A representa la función característica de A, es decir, $\chi_A(w) = 1$ si $w \in A$ y cero en otro caso. Así pues, de forma análoga, definió la probabilidad de un suceso borroso A con función de pertenencia medible, a través de la integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$P(A) = \int_\Omega A(w)dP(w) = E[A],$$

donde Ω representa el referencial y $A(w)$ el valor de la función de pertenencia del punto w al conjunto A.

En este primer acercamiento al problema, consideró el operador mínimo, que denotaremos por T_M, para definir la intersección y el operador máximo para la unión, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B(w) = \min(A(w), B(w)) \\ A \cup B(w) = \max(A(w), B(w)) \end{array}\right\}, \qquad \forall w \in \Omega.$$

Considerando estas operaciones demostró que su definición de probabilidad sobre una T_M-tribu de algún espacio no vacío Ω era una medida de probabilidad en el sentido clásico de Kolmogorov, es decir, que

Ax1) $P(\Omega) = 1$.

Ax2) $P(A) \geq 0$, para todo suceso A.

Ax3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para cualesquiera A y B con $A \cap B = \emptyset$.

No obstante, las operaciones de intersección y unión de conjuntos nítidos, admiten otras muchas extensiones en el caso de conjuntos borrosos, que vienen dadas a través de las t-normas y las t-conormas. Recordemos que una t-norma T es una aplicación de $[0,1]^2$ en $[0,1]$ con elemento neutro 1, conmutativa, asociativa y no decreciente en ambas componentes. Así, en general la intersección de dos conjuntos borrosos viene definida por $A \cap B(w) = T(A(w), B(w)), \forall w \in \Omega$, para cualquier t-norma T fijada.

El primer operador utilizado por Zadeh, el mínimo, es además el ejemplo más conocido de t-norma y será denotado aquí por T_M. Otras t-normas clásicas son la t-norma del producto T_P, definida por $T_\mathrm{P}(x,y) = x \cdot y$ y la t-norma de Łukasiewicz T_L, definida por $T_\mathrm{L}(x,y) = \max(x+y-1, 0)$.

Recordemos también que una t-conorma tiene exactamente las mismas propiedades que una t-norma salvo que el elemento neutro es en este caso el 0. Así, la unión de dos conjuntos borrosos se define en general, para cualquier t-conorma S, como sigue: $A \cup B(w) = S(A(w), B(w)), \forall w \in \Omega$.

En este trabajo vamos a considerar que la intersección viene definida por una t-norma cualquiera y la unión por su t-conorma dual, es decir,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y), \forall (x,y) \in [0,1^2.$$

Con este planteamiento vamos a ver como dada un t-norma cualquiera, no siempre se verifica que P sea una medida de probabilidad sobre un T-tribu (T-probabilidad). Recordemos que dada una t-norma T, una subclase $\mathcal{T}$ de las partes borrosas de Ω se dice que es una T-tribu si [2, 7]: *i)* $\emptyset \in \mathcal{T}$; *ii)* el complementario de todo conjunto de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$; y para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{T}$, se tiene que $\cap^T_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. En particular vamos a caracterizar el comportamiento de algunas clases importantes de t-normas respecto a la axiomática de Kolmogorov, o lo que es lo mismo, analizar el comportamiento de la función P definida por Zadeh para otras T-tribus distinta de la T_{M}-tribu. Para ello, debemos concluir esta sección de conceptos previos con un análisis más detallado de dichas clases de t-normas. Un estudio completo sobre t-normas y t-conormas, en general, puede verse en [8].

Una forma de obtener nuevas t-normas a partir de una dada es a partir de los automorfirmos. Un automorfismo (o $[0,1]$-automorfismo si existiese ambigüedad) es toda aplicación estrictamente creciente $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. La inversa de un automorfismo es también un automorfismo y así, dada una t-norma, su φ-transformación T_φ definida por $T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(y)))$ es también una t-norma. En general la φ-transformación da lugar a una t-norma distinta de la inicial, aunque por ejemplo en el caso de mínimo, de tiene que $(T_{\mathrm{M}})_\varphi = T_{\mathrm{M}}$, para todo automorfismo φ.

En este trabajo nos ocuparemos en particular de un tipo de t-normas que son φ-transformaciones de las principales t-normas (mínimo, producto y Łukasiewicz). Todas ellas constituyen, como veremos, dos clases particulares de t-normas continuas. Recordemos que una t-norma continua es aquella que es continua en cada componente y que esta propiedad se preserva por φ-transformaciones.

Antes de pasar a definir tales clases de t-normas, necesitamos recordar dos conceptos más: elemento idempotente y divisor de cero. Decimos que un valor $x \in (0,1)$ es un divisor de cero de una t-norma cualquier T si existe otro valor $y \in (0,1)$ tal que $T(x,y) = 0$. Por otro lado, decimos que un valor $x \in [0,1]$ es un elemento idempotente de T si $T(x,x) = x$. Los valores 0 y 1 son pues elementos idempotentes para cualquier t-norma.

En base a estos elementos podemos clasificar ciertas familias de t-normas. Así:

- Una t-norma T es idempotente si todos los puntos del intervalo $(0,1)$ son elementos idempotentes de T.
- Una t-norma T es nilpotente si es continua y todo los elementos del intervalo $(0,1)$ son divisores de cero de T.
- Una t-norma T es estricta si es continua y estrictamente creciente en cada componente.
- Una t-norma T es arquimediana si $T(x,x) < x, \forall x \in (0,1)$.

Se tiene que la única t-norma idempotente es el mínimo. Por otro lado, todas las t-normas nilpotentes y estrictas con t-normas continuas arquimedianas y también el recíproco es cierto, es decir, toda t-norma continua arquimediana es o bien nilpotente o bien estricta. Ahora bien, una t-norma es estricta, respectivamente nilpotente, si y sólo si es una φ-transformación de la t-norma producto, respectivamente Łukasiewicz. Con lo cual tenemos caracterizadas todas la t-normas continuas arquimedianas como transformaciones de la t-norma producto o de la t-norma de Łukasiewicz.

3 T-NORMAS ESTRICTAS Y NILPOTENTES

La verificación o no de los axiomas de Kolmogorov por parte del concepto de probabilidad radica en la verificación del tercer axioma. Al haber demostrado Zadeh [19] que con la t-norma del mínimo este concepto verificaba los tres axiomas y no depender de la t-norma elegida más que el tercero, en el que interviene la unión y la intersección de dos conjuntos borrosos, la comprobación de la compatibilidad de un t-norma con dicha axiomática se reduce a comprobar si verifica el tercer axioma. Teniendo esto en cuenta y que una t-norma estricta no tiene ningún divisor de cero, se puede demostrar fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Dada una t-norma estricta T, un referencial Ω y una T-tribu $\mathcal{T}$ de Ω. La aplicación $P : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$ definida por*

$$P(A) = \int_\Omega A(w)dP(w) = E[A],$$

para todo $A \in \mathcal{T}$ con función de pertenencia medible es una T-probabilidad, es decir, verifica los tres axiomas de Kolmogorov con respecto a la t-norma T.

A pesar del buen comportamiento de las t-normas estrictas respecto a esta propiedad, no ocurre lo mismo con las t-normas nilpotentes. Vamos a ver, por ejemplo, como la transformación a través del automorfismo $\varphi(x) = x^2$ de la t-norma de Łukasiewicz no verifica el tercer axioma de Kolmogorov.

Ejemplo 3.2 *Según acabamos de comentar en la sección anterior, si consideramos $\varphi(x) = x^2$, la t-norma $(T_{\mathrm{L}})_\varphi$), que denotaremos por simplicidad por $T_{\mathrm{L}2}$, es una t-norma nilpotente. Dado un referencial unipuntual $\Omega = \{w\}$, para el que evidentemente*

$P(w) = 1$ y los conjuntos borrosos A y B definidos por $A(w) = 0'5$ y $B(w) = 0'4$, se tiene que

$$A \cap B(w) = \sqrt{\max\{A(w)^2 + B(w)^2 - 1, 0\}} = 0,$$

con lo que $A \cap B = \emptyset$. Sin embargo,

$$A \cup B(w) = 1 - \sqrt{\max\{(0'5)^2 + (0'6)^2 - 1, 0\}} = 1,$$

con lo que $P(A \cup B) = 1$, pero

$$P(A)+P(B) = \int_\Omega A(w)dP(w)+\int_\Omega B(w)dP(w) = 0'9.$$

Según lo visto anteriormente no todas las t-normas nilpotentes son compatibles con esta axiomática. De hecho, tal como vamos a demostrar, la única que es compatible es la de Łukasiewicz. Para ello, necesitamos un par de lemas previos. El primero será dado en general para t-normas nilpotentes y es necesario establecer algunos conceptos previos a su planteamiento. El segundo será dado para el caso particular de t-normas nilpotentes que verifican una determinada condición de compatibilidad.

Definición 3.3 *([12]) Sea T una t-norma cualquiera.*

- *Para todo $z \in [0,1]$, se define el z-nivel de T, que denotaremos por $L(T,z)$, como el conjunto $L(T,z) = \{(x,y) \in [0,1]^2 | T(x,y) = z\}$.*
- *Dados dos puntos $p_1 = (x_1,y_1), p_2 = (x_2,y_2)$ de $[0,1]^2$ decimos que son T-equivalentes, y lo denotamos por $p_1 \approx_T p_2$, si existe un $z \in [0,1]$ tal que ambos puntos pertenecen al mismo z-nivel.*
- *Llamaremos soporte de T, y lo denotaremos por supp(T) a la unión de todos los z-niveles, para todo $z \in (0,1]$.*
- *Dos rectángulos R y R' en $[0,1]^2$, es decir, dos conjuntos de la forma $\{x_1,x_2\} \times \{y_1,y_2\} \subseteq [0,1]^2$ con $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, se dicen T-equivalentes si sus vértices correspondientes son T-equivalentes. Se dicen T-alineados si al menos tres de sus vértices son T-equivalentes.*
- *Decimos que T satisface la condición de Reidmeister si para cada par de rectángulos en el soporte de T que están T-alineados son T-equivalentes.*

Lema 3.4 *([12]) Toda t-norma nilpotente satisface la condición de Reidmeister.*

Si la t-norma es compatible con el tercer axioma de Kolmogorov, hemos demostrado otros resultados particulares, que aparecen recogidos en el siguiente lema.

Lema 3.5 *Sea T una t-norma nilpotente verificando la siguiente condición*

$$T(x,y) = 0 \Rightarrow T(1-x, 1-y) = 1 - x - y.$$

Entonces:

- *El conjunto de los divisores de cero están incluido en $\{(x,y) \in [0,1]^2 | x + y \leq 1\}$.*
- $\sup\{z\ in[0,1] | T(z,z) = 0\} = 1/2$ *si y sólo si* $T = T_{\mathrm{L}}$.

Como consecuencia de los Lemas 3.4 y 3.5 se puede demostrar el siguiente resultado que caracteriza totalmente el comportamiento de las t-normas nilpotentes en el problema tratado en este trabajo.

Teorema 3.6 *La única t-norma nilpotente que hace que la probabilidad P verifique el tercer axioma de Kolmogorov es la de Łukasiewicz.*

Un resumen de los principales resultados presentados en esta sección puede verse a continuación.

Familia	Compatible
Idempotente (T_M)	Sí
Estricta ($(T_P)_\varphi$)	Para todo automorfismo φ
Nilpotente ($(T_L)_\varphi$)	Si y sólo si $\varphi = Id$

4 FAMILIAS DE T-NORMAS

Vamos a utilizar los resultados de la sección anterior para analizar el comportamiento de las t-normas continuas arquimedianas de algunas de las familias más conocidas (para más detalles ver, por ejemplo, el capítulo 4 de [8]). Por simplicidad, diremos que una t-norma es compatible, cuando al considerarla para definir la intersección, y su dual para definir la unión, de dos conjuntos difusos, la probabilidad definida por Zadeh sea una T-probabilidad. En cada caso, vamos además a recordar la expresión que tienen las t-normas continuas arquimedianas de dicha familia.

Así, sea T una t-normas continua arquimediana,

- Si T es de la familia de Schweizer-Sklar, es decir, si $T_\lambda^{SS}(x,y)$ viene definido por
  - $T_{\mathrm{P}}(x,y)$ si $\lambda = 0$,
  - $(\max((x^\lambda + y^\lambda - 1), 0))^{1/\lambda}$ si $\lambda \in (-\infty, \infty) - \{0\}$,

  entonces T_λ^{SS} es compatible para todo $\lambda \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.
- Si T es de la familia de Hamacher, es decir, si $T_\lambda^H(x,y)$ viene definido por

– 0 si $\lambda = 0$ y $x = y = 0$,
– $\frac{xy}{\lambda+(1-\lambda)(x+y-xy)}$ en otro caso con $\lambda \in [0, \infty)$,

entonces T_λ^H es siempre compatible.

- Si T es de la familia de Frank, es decir, si $T_\lambda^F(x, y)$ viene definido por

  – $T_{\mathrm{P}}(x, y)$ si $\lambda = 1$,
  – $T_{\mathrm{L}}(x, y)$ si $\lambda = \infty$,
  – $log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right)$ si $\lambda \in (0, \infty) - \{1\}$,

  entonces T_λ^F es siempre compatible.

- Si T es de la familia de Yager, es decir, si $T_\lambda^Y(x, y)$ viene definido por

  – $\max\left(1 - ((1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda)^{1/\lambda}, 0\right)$ si $\lambda \in (0, \infty)$,

  entonces sólo T_1^Y es compatible.

- Si T es de la familia de Aczél-Alsina, es decir, si $T_\lambda^{AA}(x, y)$ viene definido por

  – $e^{-((-logx)^\lambda+(-logy)^\lambda)^{1/\lambda}}$ si $\lambda \in (0, \infty)$,

  entonces T_λ^{AA} es siempre compatible.

- Si T es de la familia de Dombi, es decir, si $T_\lambda^D(x, y)$ viene definido por

  – $\left(1 + ((\frac{1-x}{x})^\lambda + (\frac{1-y}{y})^\lambda)^{1/\lambda}\right)^{-1}$ si $\lambda \in (0, \infty)$,

  entonces T_λ^D es siempre compatible.

- Si T es de la familia de Sugeno-Weber, es decir, si $T_\lambda^{SW}(x, y)$ viene definido por

  – $T_{\mathrm{P}}(x, y)$ si $\lambda = \infty$,
  – $\max\left(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}, 0\right)$ si $\lambda \in (-1, \infty)$,

  entonces sólo T_∞^{SW} y T_0^{SW} son compatibles.

- La única t-norma de la familia de Mayor-Torrens que es continua y arquimediana es la de Łukasiewicz y por tanto, según el Teorema 3.6, es compatible.

La información anterior se puede resumir en forma de tabla, como sigue:

Familia	Idempotente ó Arquim. cont.	Compatible
Schweizer-Sklar $\lambda \in [-\infty, \infty]$	$\lambda \in [-\infty, \infty)$	$\lambda \in [-\infty, 0]$ ó $\lambda = 1$
Hamacher $\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in [0, \infty)$	$\lambda \in [0, \infty)$
Frank $\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in [0, \infty]$
Yager $\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in (0, \infty]$	$\lambda \in \{1, \infty\}$
Aczél-Alsina $\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in (0, \infty]$	$\lambda \in (0, \infty]$
Dombi $\lambda \in [0, \infty]$	$\lambda \in (0, \infty]$	$\lambda \in (0, \infty]$
Sugeno-Weber $\lambda \in [-1, \infty]$	$\lambda \in (-1, \infty]$	$\lambda \in \{0, \infty\}$
Mayor-Torrens $\lambda \in [0, 1]$	$\lambda \in \{0, 1\}$	$\lambda \in \{0, 1\}$

5 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos demostrado que dada una t-norma cualquiera T, no siempre se verifica que P sea una medida de probabilidad sobre una T-tribu (T-probabilidad). En particular, vemos como esto es cierto para las t-normas idempotentes y estrictas, pero no así para las nilpotentes, para las que sólo es cierto en el caso particular de la t-norma de Łukasiewicz. Dentro de las familias más relevantes y utilizando los estudios anteriores, hemos demostrado para qué miembros de las mismas se verifica la propiedad anterior y para cuales no. Como consecuencia de esto, presentamos una familia, la de Frank, cuya compatibilidad es perfecta, es decir, en las que todos sus miembros satisfacen que P es una T-probabilidad. Algunas otras de las familias analizadas son totalmente compatibles para todos sus elementos continuos y arquimedianos o idempotentes (el rango de definición del parámetro λ en la segunda y la tercera columna coincide), pero no para todos sus elementos (el rango de definición de λ en la segunda columna es un subconjunto estricto del considerado en la primera columna).

Como futuros trabajos, nos gustaría completar el presente estudio con el análisis de todas las t-normas continuas, es decir, considerar también el caso de las sumas ordinales.

Agradecimientos

La investigación que se presenta en este trabajo ha sido subvencionada parcialmente por el Proyecto MTM2007-61193, concedido por el Ministerio de Educación y Ciencia. Este proyecto está financiado en parte con fondos FEDER.

Referencias

[1] J.F. Baldwin, J. Lawry, T.P. Martin. A note on the conditional probability of fuzzy subsets of a continuous domain. *Fuzzy Sets and Systems* **96** (1998) 211–222.

[2] D. Butnariu, E.P. Klement. *Triangular Norm-based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[3] D. Dubois, H. Prade. Toward fuzzy analysis: Integration and derivation of fuzzy functions. In “Fuzzy Algebra, Analysis, Logics,” Tech. Rep. TR-EE 78/13, Part C. Purdue Univ., Lafayette, Indiana, 1978.

[4] T. Flaminio, L. Godo. A logic for reasoning about the probability of fuzzy events. *Fuzzy Sets and Systems* **158** (2007) 625–638.

[5] M.A. Gil. Statistical management of fuzzy elements in random experiments. Part 1: A discussion on treating fuzziness as a kind of randomness. *Information Sciences* **69** (1993) 229–242.

[6] S. Janssens, B. De Baets, H. De Meyer. Bell-type inequalities for quasi-copulas. *Fuzzy Sets and Systems* **148** (2004) 263-278.

[7] E.P. Klement. Construction of fuzzy σ-algebras using triangular norms. *J. Math. Anal. Appl.* **85** (1982) 543–565.

[8] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[9] M. Laviolette, J.W. Seaman, J.D. Barrett, W.H. Woodall. A Probabilistic and Statistical View of Fuzzy Methods. *Technometrics* **37** (1995) 249–261.

[10] V.I. Loginov. Probability Treatment of Zadeh Membership Functions and Their Use in Pattern Recognition. *Engineering Cybernetics* (1966) 68–89.

[11] M. Navara. Probability theory of fuzzy events. In *EUSFLAT/LFA 2005 Proceedings* Barcelona, Spain, September 7-9, 2005, pp. 325–329.

[12] M. Petrík, P. Sarkoci. Convex combinations of nilpotent triangular norms. *J. Math. Anal. Appl.* **350** (2009) 271–275.

[13] J. Pykacz, B. D’Hooghe. Bell-type inequalities in fuzzy probability calculus. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **9** (2001) 263–275.

[14] D. Ralescu. Fuzzy Probabilities and their Applications to Statistical Inference. In: B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, L.A. Zadeh (Eds.), Advances in Intelligent Computing-IPMU94, Lecture Notes in Computer Science, vol. 945, Springer, Paris, 1995, pp. 217-222.

[15] N.D. Singpurwalla, J.M. Booker. Membership Functions and Probability Measures of Fuzzy Sets. *Journal of the American Statistical Association* **99** (2004) 867–877.

[16] R.R. Yager. A note on probabilities of fuzzy events. *Information Sciences* **18** (1979) 113–129.

[17] R.R. Yager. Drawing reasonable conclusions from information under similarity modelled contexts. *Int. J. Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems* **1** (2009) 81–104.

[18] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Inform. Control* **8** (1965) 338–353.

[19] L.A. Zadeh. Probability Measures of Fuzzy Events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **23** (1968) 421–427.

[20] L.A. Zadeh. Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competitive. *Technometrics* **37** (1995) 271–276.