

Universidad de Oviedo

Facultad de Formación del Profesorado y Educación

Máster en Formación del Profesorado de Educación
Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación
Profesional.

TRABAJO FIN DE MÁSTER

*Análisis de errores en las Pruebas de Acceso a la Universidad:
El caso de los sistemas de ecuaciones lineales.*

*Error analysis in the University Entrance Exams: The case of
systems of linear equations*

Autora: Belén Díaz Ruiz

Tutor: Pedro Alonso Velázquez

Julio 2016

ÍNDICE¹

Resumen / Abstract	3
Introducción	5
Reflexión sobre la formación recibida y mis prácticas profesionales	6
1. Aportación de las materias del Máster a las prácticas profesionales.....	6
2. Descripción de la experiencia personal en las prácticas profesionales.....	12
Programación didáctica: Matemáticas 2º ESO	15
1. Condiciones iniciales: el centro.....	15
1.1 Contexto del centro.....	15
1.2 Descripción del centro.....	15
1.3 Alumnado, personal docente y no docente.....	17
2. Objetivos.....	18
2.1 Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria.....	18
2.2 Objetivos propios de las Matemáticas en la ESO.....	19
3. Contribución de la materia al logro de las competencias clave.....	20
4. Organización, secuenciación y temporalización de los contenidos del currículo y de los criterios de evaluación asociados.....	23
4.1 Criterios de selección y determinación de los contenidos.....	23
4.2 Criterios de secuenciación de contenidos.....	24
4.3 Estructuración de las unidades didácticas.....	25
4.4 Temporalización.....	39
5. Metodología.....	40
5.1 Desarrollo del esquema metodológico.....	40
5.2 Estrategias del profesor, actividades y técnicas de trabajo en el aula.....	41
6. Recursos, medios y materiales didácticos.....	44
7. Procedimientos, instrumentos de evaluación y criterios de calificación.....	46

¹ Las referencias a personas, colectivos o cargos académicos figuran en el presente documento en género masculino como género gramatical no marcado. Cuando proceda, serán también válidas en género femenino.



7.1 Procedimientos e instrumentos de evaluación del aprendizaje.....	46
7.2 Criterios de evaluación.....	47
7.3 Criterios de calificación.....	49
8. Programa de refuerzo.....	50
9. Medidas de atención a la diversidad.....	51
10. Actividades complementarias y extraescolares.....	52
Propuesta de iniciación a la investigación: Análisis de errores en las Pruebas de Acceso a la Universidad. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales.....	53
1. Introducción: Problema planteado y justificación.....	53
2. Marco teórico.....	54
3. Objetivos e hipótesis.....	58
4. Diseño metodológico.....	59
4.1 Modalidad de la investigación.....	59
4.2 Instrumentos de recogida de información y planificación.....	59
4.3 Población objeto de estudio.....	61
5. Análisis de los resultados.....	63
6. Conclusiones e implicaciones educativas.....	70
Referencias bibliográficas.....	72
ANEXOS	
ANEXO I: Calendario escolar 2015/2016. Principado de Asturias.....	75
ANEXO II: Resolución del ejercicio.....	76
ANEXO III: Plantilla creada para el registro de los errores observados.....	78
ANEXO IV: Examen PAU 2014/2015. Fase General. Matemáticas Aplicadas a las CC.SS.....	79

RESUMEN

En las siguientes líneas, se muestra la importancia de cada una de las asignaturas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional por la especialidad de Matemáticas para una correcta labor docente, especialmente su contribución a las prácticas profesionales en un Instituto Público de Enseñanza Secundaria; destacando la necesidad de ampliar el periodo de algunas de ellas para una mejora en la formación tanto pedagógica como en contenidos matemáticos. Además, se describe, de una forma personal, las prácticas profesionales, una de las mejores experiencias vividas que ha servido para encontrar mi vocación.

Por otro lado, también se incluye una Programación Didáctica de la materia de Matemáticas para el curso de 2º ESO, contextualizada en el centro donde se han desarrollado las prácticas; así como una propuesta de iniciación a la investigación vinculada al análisis de errores, cuestión de permanente interés de la Educación Matemática. Esta propuesta está centrada en un ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales de la Prueba de Acceso a la Universidad de Oviedo y permite mostrar la importancia de fomentar un aprendizaje significativo, y no memorístico, basado en el razonamiento autónomo y pensamiento crítico; además de la necesidad de incidir en la lectura cuidadosa y comprensiva de los enunciados y la comprobación de la solución.

ABSTRACT

In the following lines, it is shown the importance of each of the subjects included in University Master's Degree in Teaching in Secondary and High Schools and Vocational Training Centres in order to become a good mathematics teacher, specially its contribution to the work experience in a Public Secondary School – highlighting the need to increase the duration of some of them in order to improve not only the pedagogical training but also the mathematics knowledge. In addition, it is described a personal work experience, one of the best moment I've ever had which makes me realize teaching is truly my calling.

On the other hand, a mathematics syllabus for Second Year of Secondary School is included, which is contextualized in the school I have done the work experience. And in the end, you could find a research about error analysis, a topic of interest in Mathematics Education research for a lot of decades. This research is focused on the University Entrance Exams, specifically on a systems of linear equations problem. The results shows the importance of promoting a meaningful learning instead of rote learning, which would be based on autonomous reasoning and critical thinking. Moreover, they indicate the need for pupils to do a careful and comprehensive reading and to check the solutions themselves.

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster está fundamentado en los conocimientos adquiridos durante los estudios del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional por la especialidad de Matemáticas; así como en la experiencia práctica vivida en un centro público de enseñanza.

Se encuentra estructurado en tres partes, relacionadas entre sí:

La primera parte consta de una reflexión sobre la aportación al período de prácticas de las diferentes materias impartidas en el Máster; además de una descripción de la experiencia personal vivida durante la estancia en un centro de enseñanza.

En la segunda parte de este trabajo se elabora una Programación Didáctica de la asignatura de Matemáticas para el curso de 2º ESO, en el contexto del centro donde se han realizado las prácticas.

Finalmente, en el último bloque se puede encontrar una propuesta de iniciación a la investigación vinculada al análisis de errores; concretamente de un ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales de la Prueba de Acceso a la Universidad de Oviedo. Se ha elegido esta línea de investigación debido a que durante mi estancia en el centro de prácticas me han llamado especialmente la atención las dificultades y errores que el alumnado comete durante el aprendizaje de las Matemáticas. En esta investigación, se trata de clasificar el tipo de errores que comenten los alumnos, analizar los posibles motivos y plantear una estrategia de actuación para intentar resolverlos.

REFLEXIÓN SOBRE LA FORMACIÓN RECIBIDA Y LAS PRÁCTICAS PROFESIONALES

El Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional está compuesto por dos partes bien diferenciadas pero ligadas entre sí: una parte teórica entre los meses de septiembre y mayo, formada por una serie de asignaturas pensadas para preparar al alumnado en el ejercicio de la docencia; y una parte práctica, a desarrollar en un Instituto Público de Enseñanza Secundaria durante tres meses, entre enero y abril.

Las prácticas profesionales son consideradas por el alumnado del Máster la parte más importante de este curso, ya que, gracias a ellas no solo se pone de manifiesto todo lo aprendido en las diferentes asignaturas teóricas, sino que permite conocer personalmente cómo funciona un centro de secundaria y entre otras cosas, los problemas a los que te puedes tener que enfrentar en la vida de docente. Por estas razones, este período se considera decisivo para saber si realmente quieres dedicarte a esta profesión.

En las siguientes líneas, se hablará sobre la experiencia de prácticas en un centro, así como de la aportación de las distintas materias del Máster a esta experiencia.

1. Aportación de las materias del Máster a las prácticas profesionales

Como se ha indicado anteriormente, el Máster ofrece una serie de asignaturas teóricas con el fin de proporcionar al alumnado los conocimientos necesarios para la correcta realización de la labor docente. (Ver Tabla 1.1)

A continuación, se realiza una reflexión sobre los conocimientos adquiridos en las diferentes materias y su utilización durante la estancia en el centro de prácticas. Se comenzará por las materias comunes con el resto de especialidades, continuando con las materias propias de mi especialidad, Matemáticas, para finalizar con la optativa escogida.

TABLA 1.1. ASIGNATURAS DEL MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Materias		Créditos
Comunes	Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad	5 ECTS
	Procesos y Contextos Educativos	7 ECTS
	Sociedad, Familia y Educación	3 ECTS
	Diseño y Desarrollo del Currículum	2 ECTS
	Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa	4 ECTS
	Tecnologías de la Información y la Comunicación	1 ECTS
Especialidad	Complementos de la Formación Disciplinar: Matemáticas	8 ECTS
	Aprendizaje y Enseñanza: Matemáticas	8 ECTS
Optativa	El Uso de los Recursos Informáticos en los Procesos de Cálculo en el Ámbito de las Ciencias Experimentales	3 ECTS

La asignatura de *Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad* proporciona una valiosa información en diferentes aspectos desde el punto de vista psicopedagógico. Gracias a los modelos conductistas, se comprende mejor el comportamiento del alumnado en el aula, proporcionando una mejor instrucción y control de ésta. Por otro lado, los modelos cognitivistas, permiten entender cómo se procesa la información y proporcionan métodos para mejorar el aprendizaje; del mismo modo, el constructivismo muestra la importancia del aprendizaje significativo y cómo llegar a él. Esta materia, también permite conocer el desarrollo cognitivo del alumnado a lo largo de las diferentes etapas educativas, lo cual se considera de gran utilidad por estar vinculada con el desarrollo del aprendizaje de las Matemáticas. Además, gracias a un trabajo grupal sobre las Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas, se aprende dónde y en qué momento es más frecuente que el alumnado presente ciertas dificultades, lo cual me ha servido durante la estancia en el centro. Por último, gracias al estudio sobre la etapa de la adolescencia, y particularmente, los problemas que surgen en ella (anorexia,



bulimia, bullying, etc.) soy más consciente de la realidad del alumnado de los centros y de estos posibles dilemas que pueden afectar en su educación. En general, todo lo aprendido me ha servido para conocer mejor al alumnado que me puedo encontrar en las aulas y así poder empatizar con él y guiar mejor el proceso de enseñanza – aprendizaje.

La asignatura de *Procesos y Contextos Educativos* se divide en cuatro bloques. En el *Bloque I. Características organizativas de las etapas y centros de secundaria*, se ve una gran variedad de contenidos de gran utilidad durante las prácticas. Por un lado, las normativas que regulan la educación en nuestro país, y en particular, por la que se rigen los centros asturianos de Educación Secundaria; lo cual es necesario para todo docente, pues mi experiencia en el centro me ha demostrado que se consulta con frecuencia. Por otro lado, los documentos institucionales de los institutos (la Programación General Anual, el Proyecto Educativo de Centro, el Reglamento de Régimen Interno, etc.), y la estructura organizativa de estos; los cuales han sido útiles, no solo para elaborar el cuaderno de prácticas, sino para conocer mejor el centro y su funcionamiento, así como para saber en qué documentos buscar y a quién acudir en diferentes situaciones.

El *Bloque II. Interacción, comunicación y convivencia en el aula* permite conocer los diferentes climas de aula y proporciona la información necesaria para una buena comunicación en ella, tanto verbal como no verbal, además de mostrar las diferentes situaciones conflictivas con las que el profesorado se puede encontrar en las aulas y cómo debe éste enfrentarse a ellas; destacando la mediación. Todo ello es necesario para una correcta labor docente, y lo he tenido en cuenta durante mi estancia en el centro; aunque afortunadamente, no he tenido que afrontar ninguna situación conflictiva.

El *Bloque III. Tutoría y Orientación Educativa* muestra la importancia de la acción tutorial en toda etapa educativa, destacando que los docentes no solo deben proporcionar al alumnado conocimientos de determinadas materias, sino que también deben favorecer su desarrollo completo como persona en todos los aspectos de la vida. Este bloque presenta también el Plan de Acción Tutorial, imprescindible en todo centro, lo cual me ha sido de gran utilidad durante mis prácticas. Sin embargo, mi tutora del instituto no ejercía la función de tutoría en ningún grupo, por lo que durante ese período no he podido poner en práctica los demás conocimientos de este bloque. Únicamente he



podido asistir a una tutoría de 3º ESO dedicada a un taller sobre la “Violencia” dado por la Cruz Roja.

Por último, en esta materia, el *Bloque IV. Atención a la Diversidad* muestra las grandes diferencias que pueden existir entre el alumnado de una misma aula, proporcionando las medidas más comunes para enfrentarse a esta diversidad. Por otro lado, permite conocer la terminología específica con respecto a este tema, además de tomar contacto con un Programa de Atención a la Diversidad; imprescindible en todo centro y cuyo análisis hemos tenido que realizar para el cuaderno. Esto me ha sido de gran utilidad en las prácticas, ya que he tenido la oportunidad de trabajar con un grupo flexible de 2º ESO. Sin embargo, he de destacar que estos contenidos han sido explicados de una forma breve y sin gran profundidad, lo cual considero un error, puesto que la atención a la diversidad es una de las mayores dificultades a las que todo docente puede enfrentarse.

La asignatura de *Sociedad, Familia y Educación* se encuentra también dividida en dos bloques. El *Bloque I. Género, Igualdad y Derechos Humanos*, hace reflexionar acerca de la importancia de la igualdad de género y etnia en la escuela, en el día a día de cada clase; así como la educación en Derechos Humanos. Todo ello relacionado con la acción tutorial, con el formar al alumnado no solo en materias sino también como personas. Estos contenidos los he tenido en cuenta en gran medida durante mi estancia en el centro, ya que en él convivían alumnos de una gran variedad de países. Sin embargo, he de destacar que no he tenido ocasión de ver ninguna actividad relacionada con estas cuestiones, a parte de la mencionada en la tutoría de 3º ESO.

En la segunda parte de esta materia, *Bloque II. Familia y Educación*, además de conocer los diferentes estilos educativos parentales, necesarios para comprender mejor la educación del alumnado, así como a la hora de tratar con las familias; he comprendido la gran importancia de la participación de las familias en el centro debido a los efectos positivos que provoca para todos los miembros de la comunidad educativa, siendo, por tanto, necesaria. Sin embargo, durante mis prácticas he podido comprobar que ésta es muy escasa, que la relación familias-centro se limita a aquello que parece ser estrictamente obligatorio; por lo que quizás sean necesarios cambios.



La asignatura de *Diseño y Desarrollo del Currículum* ha sido otra de las asignaturas más valiosas para el prácticum; principalmente porque nos ha mostrado en mayor profundidad la estructura actual del sistema educativo español, particularizando en los principios y elementos esenciales del currículo; necesarios para la labor de cualquier profesor. Por otro lado, nos ha enseñado cómo es el diseño y el desarrollo de una programación didáctica, particularizando en la metodología y la evaluación. Sin embargo, esto ha sido de una manera menos profunda debido a las escasas horas, teniendo que completarse en otras materias, especialmente en Aprendizaje y Enseñanza como señalaré más adelante.

Ya en el segundo semestre, y en simultaneidad con las prácticas, se han desarrollado las demás asignaturas comunes.

La materia de *Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa* además de proporcionar los elementos necesarios para realizar estos dos procesos, útiles para la elaboración del Trabajo Fin de Máster; muestra la necesidad de estar en constante innovación e investigación en la educación para mejorar su calidad. Te hace reflexionar sobre cómo innovar en tu materia, en mi caso las Matemáticas, y gracias a ello he elaborado junto con otra compañera un juego de cartas con cuerpos geométricos, el cual he tenido oportunidad de poner en práctica en mi centro, teniendo una gran aceptación, por lo que con seguridad intentaré implementarlo de nuevo más adelante.

La asignatura de *Tecnologías de la Información y la Comunicación* nos ha puesto al día en lo que se refiere a las TIC en la educación; todo ello de una manera breve y sin profundidad. A pesar de todo, hemos tenido la oportunidad de desarrollar un blog educativo de nuestra especialidad; lo cual me ha mostrado que puede ser de gran utilidad para la enseñanza. Sin embargo, durante el prácticum, no he podido poner en práctica ninguno de estos conocimientos.

En cuanto a las asignaturas propias de la especialidad de Matemáticas, he de decir que son de las que más aportaciones han hecho a mi periodo de prácticas.

La asignatura de *Complementos de Formación Disciplinar* permite conocer en profundidad el currículo de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. El trabajo con esta documentación me ha servido de gran ayuda para saber dónde encontrar la información necesaria acerca de los contenidos, criterios de



evaluación y estándares de aprendizaje de cada curso; además de la metodología y la contribución de la materia a las competencias clave. Por otro lado, me ha preparado, en cierta medida, para la hora de impartir las clases en el instituto. Todas ellas cuestiones de gran relevancia para la profesión docente.

La otra materia, *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, a pesar de desarrollarse al unísono con mi periodo de prácticas, es la que más me ha aportado a mis prácticas profesionales: me ha ayudado a preparar y desarrollar una clase, a utilizar la metodología adecuada, a poner un examen y evaluarlo, a elaborar las Unidades Didácticas, a enfrentarme a la Programación Didáctica, etc.

Siguiendo en esta línea, me gustaría destacar que estas dos asignaturas, propias de mi especialidad, me han permitido observar diferencias en cuanto a las aptitudes y conocimientos de los profesores en formación por la especialidad de Matemáticas que son graduados en este ámbito y los que no. Me ha llamado la atención y llevado a pensar que quizás sea necesario un cambio con respecto a la formación del profesorado de Matemáticas, ya que, por ejemplo, no parece coherente que un futuro profesor de Matemáticas no haya estudiado nunca o tenga escasos conocimientos relacionados con la Estadística y la Probabilidad.

Por último, la materia optativa, en mi caso, *El Uso de los Recursos Informáticos en los Procesos de Cálculo en el Ámbito de las Ciencias Experimentales*. Esta asignatura, por desarrollarse a la vez que el prácticum, y al contrario que la anterior, no la he podido poner en práctica durante mi estancia en el centro. Sin embargo, en ella hemos podido reflexionar acerca de cómo introducir el uso de los recursos informáticos en nuestra especialidad, además de aprender a utilizar dos programas de gran interés para mi futuro docente: el GeoGebra, software de matemáticas para todo nivel educativo que reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo; y el eXeLearning, una herramienta que ayuda a los docentes en la creación y publicación de contenidos web.

Concluyendo, aunque no todas las asignaturas han aportado lo mismo a mi periodo de prácticas, considero que todas serán de gran utilidad para mi futuro docente. Sin embargo, destaco la posible necesidad de ampliar el periodo de algunas de ellas para una mejora en la formación tanto pedagógica como en contenidos matemáticos.



2. Descripción de la experiencia personal en las prácticas profesionales

Mi período de prácticas ha transcurrido durante algo más de tres meses, entre enero y abril, pudiendo formar parte de la vida del centro durante una evaluación entera, en concreto la segunda. Todo ello bajo la tutela de una profesora veterana, de gran experiencia y, además, Jefa del Departamento de Matemáticas.

Considero que la acogida en el centro ha sido muy buena. Desde el primer momento, tanto el Director como la tutora y el resto del personal, se han mostrado totalmente dispuestos a ayudarnos en cualquier cosa que necesitáramos, tratándonos como uno más o así me he sentido.

Las primeras semanas las he dedicado a conocer mejor el centro: sus instalaciones, los documentos institucionales, el personal, el alumnado, etc. Sin embargo, sin lugar a duda, lo mejor ha sido formar parte de las clases de Matemáticas que mi tutora impartía en cuatro grupos: 2º ESO de agrupamiento flexible, 3º ESO de Enseñanzas Académicas, 1º Bachillerato de Ciencias Sociales y 1º Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

En 2º ESO, he vivido una gran experiencia. Al tratarse de un agrupamiento flexible, el número de alumnos era muy pequeño: cuatro alumnos fijos y otros cuatro que únicamente venían dos días a la semana, los demás estaban con la Pedagoga Terapéutica (P.T.). Todos ellos eran de otra nacionalidad, dominica y rumana fundamentalmente, por lo que quizás presentaban unas grandes diferencias de edad. Los cuatro alumnos fijos eran muy trabajadores y se esforzaban por aprender, aunque presentaran dificultades; el principal problema de uno de ellos era el idioma, sin embargo, era uno de los que más se esforzaba. Por otro lado, los otros cuatro que se turnaban con la P.T., presentaban muy poca motivación para aprender y eran los más problemáticos del aula, por lo que se hacía muy difícil trabajar con ellos. Cada alumno seguía un ritmo de aprendizaje diferente, por lo que las clases eran más personalizadas, algo alejado de la enseñanza tradicional y más cercano a las clases particulares.

Por el contrario, el grupo de 3º ESO de Enseñanzas Académicas estaba formado por 21 alumnos, todos ellos de nacionalidad española, algo inusual en el centro, y con un gran rendimiento, no existiendo alumnos repetidores y encontrándose entre ellos alumnos destacados. Aunque existen uno o dos casos especiales, por lo general, son



alumnos que presentan una gran motivación a la hora de aprender, muy participativos y nada problemáticos. Destacaría el buen clima en el aula y una muy buena relación entre todos ellos, algo a veces poco usual.

En 1º Bachillerato de CC.SS., nos encontramos con un número mucho menor de alumnos, 11 exactamente. A pesar de ser tan pocos, existía una gran diversidad tanto cultural como de intereses, rendimiento y actitudes. Es una clase que presenta algunas dificultades, teniendo la gran mayoría de los alumnos un bajo rendimiento, quizás debido a su poca motivación para aprender y a sus no muy buenas actitudes; aunque existiendo excepciones, basta decir que la mayoría de ellos no tenían ni el libro de texto en clase ni tomaban apuntes.

Por último, en 1º Bachillerato de Ciencia y Tecnología, se apreciaban grandes diferencias en comparación con el anterior. En este curso se encontraban 23 alumnos, la mayoría de ellos de nacionalidad española, con un rendimiento bastante alto, habiendo un gran número de alumnos muy trabajadores y destacables, con ganas de aprender y participativos; aunque también existían casos opuestos.

Afortunadamente, ya desde el primer día, pude entrar en sus clases. Al principio, como mera observadora, me fijaba en el alumnado, sus características e intereses; así como, en la metodología utilizada en clase por mi tutora. A las pocas semanas, mi participación en la clase fue aumentando, pudiendo ayudar al alumnado con los ejercicios que la tutora proponía, explicando algunos contenidos en la pizarra e incluso corrigiendo algunos exámenes.

Sin embargo, donde más contacto he tenido con el alumnado y cuando más he vivido la experiencia de ser docente, ha sido durante mi impartición de las unidades didácticas: una destinada a 1º Bachillerato de Ciencia y Tecnología, “Derivada de una función”, y otra a 2º ESO, “Ecuaciones de primer y segundo grado”. Dos unidades en las que yo era la profesora y debía hacer todo lo propio para impartir una unidad: preparar las clases, tanto la teoría a explicar como los ejercicios, elaborar el examen y corregirlo, etc. Fue una de las mejores experiencias durante las prácticas, en la que me he dado cuenta de la importancia de conocer el nivel del alumnado antes de comenzar



una unidad, de motivarlo en todo momento hacia los contenidos y de hacer las clases amenas, fomentando siempre su participación.

Durante mi intervención en las clases, una de las cosas que más me ha llamado la atención fueron los errores y dificultades con las que el alumnado se enfrentaba durante el aprendizaje de las Matemáticas y, sobre todo, su reiteración en diferentes cursos.

Por otro lado, he de destacar que me hubiese gustado que mi tutora de prácticas ejerciera la tutoría en algún curso, para así conocer mejor al alumnado y ver con detalle la acción tutorial, una de las cuestiones que considero más importantes en la educación.

Sin embargo, durante mi estancia en el centro he podido participar en otras actividades, que me han permitido introducirme más en la vida de un docente.

- Asistir a una tutoría con el alumnado de 3º ESO, dedicada a un taller sobre la violencia impartido por la Cruz Roja.
- Presenciar tres reuniones de familias del alumnado de 3ºESO y 1ºBachillerato.
- Acudir a una clase del Aula de Inmersión Lingüística, aula destinada al alumnado inmigrante que no domina nuestro idioma, pudiendo ver cómo aprenden nuevos contenidos en diferentes materias a la vez que mejoran el castellano.
- Participar en una clase de la asignatura de Taller de Expresión Sociolingüística, optativa de 4ºESO, donde redactan una revista digital.
- Asistir a una excursión al Museo de la Minería con todos los grupos de 3º ESO; lo que me permitió familiarizarme con el alumnado y conocerle mejor.
- Acudir a reuniones de Comisión de Coordinación Pedagógica, de Equipo Docente, de Departamento de Matemáticas y a un Claustro de Profesores.

Además, durante el período de prácticas se han ido realizando en el centro una gran variedad de reuniones destinadas a todo el alumnado del Máster que participaba en él, para tratar diferentes temas relacionados también con la vida en un instituto. Algunos de estos temas eran la organización del centro, sus programas específicos, el programa SAUCE, así como el funcionamiento del Departamento de Orientación y del Centro del Profesorado y Recursos.

Finalmente, me gustaría decir que este período de prácticas ha sido una de las mejores experiencias de mi vida y me ha servido para encontrar mi vocación.

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA: *Matemáticas 2º ESO*

A continuación, se presenta una Programación Didáctica de la asignatura de Matemáticas para el curso de 2º ESO, en el contexto del centro donde se han realizado las prácticas.

1. Condiciones iniciales: el centro

1.1 Contexto del centro

Ubicado en pleno centro de la ciudad de Oviedo, se trata de un instituto público, con más de un siglo y medio de historia, en el que actualmente se imparten las siguientes enseñanzas:

- ✓ Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO): con sección bilingüe de inglés.
- ✓ Bachillerato: en las modalidades de Ciencia y Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales, en régimen ordinario y nocturno.
- ✓ Ciclos Formativos de Grado Superior: de Educación Infantil, en régimen presencial y a distancia, y de Animación de Actividades Físico Deportivas, en régimen presencial

1.2 Descripción del centro

Mi centro de prácticas puede describirse como un centro de gran amplitud, con largos pasillos, notándose su gran antigüedad si nos fijamos en sus características arquitectónicas, tanto por dentro como por fuera con su gran presencia.

Está formado por tres edificios: dos pabellones, comúnmente llamados Pabellón Antiguo (de 1939) y Pabellón Nuevo (de 1967), y un tercer edificio, anexo a estos dos, una pequeña construcción de una única planta.

Los dos pabellones se encuentran comunicados por el interior a través de una galería. Cada uno de ellos consta de tres plantas, aunque únicamente el Pabellón Nuevo,



por ser la construcción más reciente, dispone de ascensor. Por otro lado, en el tercer edificio, se encuentra únicamente el Aula de Inmersión Lingüística, destinada al alumnado inmigrante que no domina nuestro idioma, como parte del Programa de Atención a la Diversidad del instituto.

En cuanto a las aulas, la mayoría tienen capacidad para acoger a unos veinticinco alumnos, aunque existen algunas de menor capacidad, destinadas a los grupos flexibles o desdobles. Todas ellas tienen características similares: son aulas muy bien iluminadas con amplias ventanas que dan a la calle o al patio exterior, en las que la mesa del profesor se encuentra sobre una tarima de madera, al frente hay una o dos pizarras de tiza y las mesas de los alumnos son individuales y se disponen de dos en dos. Hay que destacar también que la mayoría de las aulas, exceptuando las de menor capacidad, disponen de un proyector, así como de un ordenador situado en la mesa del profesor, como novedad de estos últimos años.

A continuación, se indican los diferentes espacios, separándolos entre los situados en el Pabellón Antiguo y los situados en el Pabellón Nuevo:

- En el Pabellón Antiguo encontramos:
 - Secretaría.
 - 2 salas de profesores de uso diario, equipadas con medios informáticos.
 - Despachos para el Director, el Secretario y el Jefe de Estudios.
 - Tres salas de visitas.
 - Salón de actos
 - Biblioteca
 - Sala de fotocopadoras
 - Cafetería
 - Capilla, destinada como otro salón de actos
 - Despachos para los diferentes Departamentos, exceptuando el de Orientación y Música.
 - 3 aulas destinadas a la Educación Plástica y Visual o Dibujo
 - Un aula destinada a Tecnología
 - Un aula específica para Francés y otra para Alemán.

- En el Pabellón Nuevo:
 - Sala de profesores destinada a reuniones, situada en el antiguo Departamento de Historia.
 - 4 aulas de Informática
 - 2 talleres de Tecnología
 - 2 aulas de Música
 - 2 aulas específicas para Inglés
 - Laboratorios de Geología, Biología, Física y Química
 - Almacén destinado al “Banco de Libros”
 - Polideportivo
 - Canchas de fútbol y baloncesto exteriores.

Asimismo, entre los dos pabellones se encuentra un patio interior; además el centro dispone de un aparcamiento interior para profesores y personal no docente.

1.3 Alumnado, personal docente y no docente

En el actual curso 2015/16 se hayan matriculados en el centro, aproximadamente, 1170 alumnos, repartidos entre la Enseñanza Secundaria Obligatoria, el Bachillerato y la Formación Profesional, de gran diversidad cultural, contando con veintiséis nacionalidades de procedencia distintas, con especial concentración del alumnado inmigrante en los primeros cursos de la ESO.

En cuanto al personal docente, el centro dispone de una plantilla con cerca de 88 profesores, distribuidos en las siguientes especialidades Filosofía, Griego, Latín, Lengua Española y Literatura, Geografía e Historia, Matemáticas, Física y Química, Ciencias Naturales, Artes Plásticas, Francés, Inglés, Alemán, Música, Educación Física y Deportiva, Tecnología, Economía, Formación y Orientación Laboral (F.O.L.), Orientación, Servicios a la Comunidad, Intervención Sociocomunitaria.

Por último, el personal no docente del instituto está formado por 16 miembros, incluyendo al personal de secretaría, consejería, operarios de servicios y personal de limpieza.

2. Objetivos

2.1 Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, la ESO contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos y ellas. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en su persona, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, en su caso, en la lengua asturiana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.



- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de otras personas así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de otras personas, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.
- m) Conocer y valorar los rasgos del patrimonio lingüístico, cultural, histórico y artístico de Asturias, participar en su conservación y mejora y respetar la diversidad lingüística y cultural como derecho de los pueblos e individuos, desarrollando actitudes de interés y respeto hacia el ejercicio de este derecho. (p. 3-4)

2.2 Objetivos propios de las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Por otro lado, según el Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas se centrará en el carácter instrumental y formativo de éstas; concretamente para la etapa de la ESO, tendrá por objeto el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos y otros) presentes en los medios de comunicación, internet, publicidad u otras fuentes de



información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Reconocer las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y sensibilizarse a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores y otros) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica. (p. 163)

3. Contribución de la materia al logro de las competencias clave establecidas para la etapa.

A su vez, la materia debe ayudar al desarrollo de las competencias clave del currículo, las cuales, según el Real Decreto citado anteriormente, son las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos de la etapa de Educación Secundaria



Obligatoria, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. Estas competencias son:

1. Comunicación lingüística.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.
4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

Siguiendo el Decreto citado anteriormente, la materia contribuirá al desarrollo de las anteriores competencias del siguiente modo:

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas la expresión oral y escrita es utilizada constantemente, especialmente en la resolución de problemas, donde la comprensión y la expresión de los procesos realizados y los razonamientos seguidos tienen especial importancia. Estos aspectos contribuyen a la adquisición de la *competencia lingüística*. Además, no hay que olvidar que esta materia tiene un lenguaje propio de comunicación de ideas con gran capacidad para transmitir conjeturas; la traducción de este lenguaje matemático al lenguaje cotidiano, y viceversa, contribuye también a esta competencia.

Al observar el currículo de matemáticas para esta etapa se hace evidente la contribución de la materia al desarrollo de todos los aspectos que conforman la *competencia matemática* y las *competencias básicas en ciencia y tecnología*. Por tanto, todo el currículo contribuye a la adquisición de la competencia matemática, de aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente y comprender una argumentación lógica, expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático e integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. Por otro lado, las matemáticas y las ciencias están interrelacionadas, puesto que esta materia es necesaria para un adecuado y profundo desarrollo del conocimiento científico.

El desarrollo tecnológico de la sociedad actual explica la necesidad del alumnado de adquirir la *competencia digital*, para ello, se han introducido las herramientas



tecnológicas como recurso didáctico. El uso de la calculadora, el ordenador, programas informáticos, etc., a lo largo de los diferentes bloques de unidades, tanto para la resolución de problemas como para el descubrimiento de conceptos matemáticos; así como la oportunidad que ofrece esta materia de proporcionar conocimientos y destrezas para la búsqueda, selección y tratamiento de la información accesible a través de la red, contribuyen a la adquisición de esta competencia.

Las matemáticas contribuyen a la competencia *aprender a aprender* mediante el fomento de la reflexión sobre los procesos de razonamiento, la contextualización de los resultados obtenidos, la autonomía para abordar situaciones de creciente complejidad, la motivación y la autoconfianza, etc. Por otro lado, el desarrollo de estrategias necesarias para la resolución de problemas, la organización y regulación del propio aprendizaje, así como la gestión del propio desarrollo académico también contribuyen a aprender a aprender.

Las *competencias sociales y cívicas* se adquieren aportando criterios científicos para predecir y tomar decisiones en el ámbito social y ciudadano. Las matemáticas, mediante la utilizando el lenguaje gráfico y estadístico para interpretar la información que aparece en los medios de comunicación contribuyen a esta competencia. También ayudan a su adquisición, el trabajo cooperativo y el análisis de los errores cometidos en la resolución de problemas con espíritu constructivo, pues permite aceptar otras maneras de pensar las cosas y reflexionar sobre las soluciones aportadas por otras personas.

Los procesos matemáticos, especialmente los de resolución de problemas, contribuyen a desarrollar el *sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor*, ya que para realizar estos procesos es necesario planificar estrategias, asumir retos, valorar resultados y tomar decisiones. Además, las técnicas heurísticas que se utilizan consolidan la adquisición de destrezas de esta competencia, tales como la autonomía, la perseverancia, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

Para trabajar la *competencia conciencia y expresiones culturales*, basta relacionar las matemáticas con otros conocimientos, encontrarlas en los medios de comunicación e integrarlas en la vida cotidiana. Por otro lado, la historia de las matemáticas es una parte fundamental de nuestra cultura en todos los ámbitos, por tanto,



a lo largo de las unidades didácticas, en los momentos que sea posible, es preciso hacer alusión a ésta; especialmente en el bloque de geometría; puesto que esta rama de las matemáticas ha sido clave en muchos de los movimientos y expresiones artísticas a lo largo de la historia; la visión espacial, la búsqueda de la belleza a través de la simetría, etc. constituyen ejemplos de la contribución de las matemáticas a esta competencia.

4. Organización, secuenciación y temporalización de los contenidos del currículo y de los criterios de evaluación asociados.

4.1 Criterios de selección y determinación de los contenidos

La selección y determinación de los contenidos para el curso de 2º ESO se ha realizado teniendo como referencia el Decreto 43/2015 de 10 de junio, citado anteriormente.

Siguiendo la organización de este currículo, los contenidos - en concreto, las Unidades Didácticas (UDs) - se encuentran estructuradas en cinco bloques:

1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
2. Números y Álgebra
3. Geometría
4. Funciones
5. Estadística y Probabilidad

Hay que destacar que estos bloques no deben verse como conjuntos independientes unos de otros; sino que, por el contrario, deben desarrollarse de manera global, pensando en las conexiones internas tanto dentro del curso como entre las distintas etapas educativas.

Por otro lado, el primer bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” es un bloque común a la etapa y debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenidos y por tanto, en todas las Unidades Didácticas; siendo el eje fundamental de la materia ya que trata sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático.

En la siguiente Tabla 4.1, se recogen las doce Unidades Didácticas en las que se han organizado los contenidos, agrupadas por los bloques anteriormente descritos pero sin tener en cuenta el orden en el que se van a impartir.

TABLA 4.1 DISTRIBUCIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS POR BLOQUES DE CONTENIDOS

Bloques de contenidos	Unidades Didácticas
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Los contenidos de este bloque se desarrollarán en todas las UD.
Bloque 2. Números y Álgebra	Números enteros Fracciones Números decimales Potencias y raíces Proporcionalidad numérica Expresiones algebraicas Ecuaciones de primer y segundo grado Sistemas de ecuaciones lineales
Bloque 3. Geometría	Teorema de Pitágoras. Semejanza: Teorema de Tales. Geometría del espacio. Poliedros y cuerpos de revolución.
Bloque 4. Funciones	Funciones y gráficas
Bloque 5. Estadística y Probabilidad	Probabilidad

4.2 Criterios de secuenciación de contenidos

La secuenciación de los contenidos - y por consecuencia, de las unidades didácticas - se ha realizado siguiendo los siguientes criterios fundamentales:

- *Estructura interna de las matemáticas.* Las matemáticas es una materia jerarquizada, en la que sus contenidos están internamente relacionados entre sí, puesto que el proceso de enseñanza-aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos precisa del conocimiento de otros previos. Por tanto, es necesario pensar en un orden adecuado para la enseñanza de estos contenidos.



- *Dificultad, importancia y momento del curso.* El rendimiento del alumnado a lo largo del curso no es el mismo; siendo más bajo en el primer y tercer trimestre, ya que, en el primer caso, el alumnado, recién llegado de las vacaciones debe acostumbrarse a la vuelta a clase y en el segundo caso, se encuentra en la etapa final, en la que ya ha consumido casi toda su energía durante el curso y en la que, por lo general, tiene más exámenes. Por estas razones, parece conveniente comenzar el curso con unidades que mayoritariamente sean un repaso de contenidos anteriores y progresivamente aumentar la dificultad de éstas, dejando para el tercer trimestre aquellas que resulten más asequibles para el alumnado.
- *Coordinación con otras materias.* Durante el curso, los contenidos de otras materias precisan, en ocasiones, de contenidos matemáticos; estas son por ejemplo Física y Química y Tecnología; por tanto, resulta necesaria una coordinación con los departamentos correspondientes para que la elaboración de las programaciones permita que el alumnado disponga de los conocimientos necesarios en cada asignatura a lo largo del curso.

Teniendo en cuenta estos criterios, se comenzará por el bloque de Números y Álgebra, en el que la mayoría de los contenidos son un repaso del curso anterior, aunque también se añaden contenidos nuevos. A continuación, pasaremos al bloque de Funciones, para seguir con la Geometría, tema que suele ser de gran interés para el alumnado, y finalizar con la Estadística y la Probabilidad, bloque de mayor brevedad.

4.3 Estructuración de las unidades didácticas

A continuación, se describen brevemente las diferentes unidades didácticas elaboradas para este curso de 2º ESO en la materia de Matemáticas, teniendo en cuenta los criterios citados anteriormente, así como el Decreto 43/2015 de 10 de junio.

Para cada unidad se podrá encontrar lo siguientes elementos didácticos:

- ✓ *Contenidos* a enseñar que contribuyen al logro de los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y a la adquisición de las competencias.



- ✓ *Objetivos de aprendizaje* que se pretende que el alumnado alcance, así como los *objetivos mínimos* (*), seleccionados teniendo en cuenta los estándares de aprendizaje evaluables reflejados en el Real Decreto de 26 de diciembre.
- ✓ *Criterios de evaluación* que describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr.

Se recuerda que durante el desarrollo de las unidades que a continuación se presentan se debe impartir de manera transversal el primer bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, compuesto por los siguientes contenidos:

- *Planificación del proceso de resolución de problemas.*
- *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.*
- *Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.*
- *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*
- *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*
- *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*
- *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos; la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*



UD 1: Números enteros	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none">▪ Números enteros. Ordenación y representación en la recta numérica.▪ Valor absoluto y opuesto de un número entero.▪ Operaciones con números enteros y propiedades: suma, resta, multiplicación y división. Regla de los signos.▪ Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones.▪ Aplicación de los números enteros a la resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none">✓ Reconocer la presencia de los números enteros en distintos contextos. (*)✓ Ordenar y representar un conjunto de números enteros en la recta numérica. (*)✓ Calcular el valor absoluto y el opuesto de un número entero. (*)✓ Operar con números enteros aplicando sus propiedades: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. (*)✓ Realizar operaciones combinadas de números enteros respetando la jerarquía de operaciones. (*)✓ Resolver problemas mediante la aplicación de números enteros. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none">1. Utilizar los números enteros y sus propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y para resolver problemas relacionados con la vida diaria.2. Comparar números enteros y representarlos en la recta numérica.3. Realizar operaciones con cualquier expresión de números enteros aplicando correctamente las propiedades y la jerarquía de operaciones.	



UD 2: Fracciones	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fracciones: interpretación en entornos cotidianos. Numerador y denominador. ▪ Fracciones equivalentes e irreducibles. Ampliación y simplificación de una fracción. ▪ Representación, ordenación y comparación de fracciones. ▪ Reducción de fracciones a común denominador. ▪ Operaciones con fracciones y propiedades: suma, resta, multiplicación y división. Fracción inversa. ▪ Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones. ▪ Aplicación de las fracciones a la resolución de problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Interpretar el significado de una fracción relacionándolo con situaciones cotidianas. (*) ✓ Calcular fracciones equivalentes e irreducibles. (*) ✓ Ordenar, comparar y representar un conjunto de fracciones en la recta numérica. (*) ✓ Operar con fracciones: suma, resta, multiplicación y división, utilizando correctamente sus propiedades. (*) ✓ Realizar operaciones combinadas con fracciones respetando la jerarquía de las operaciones. (*) ✓ Resolver problemas reales aplicando fracciones. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar las fracciones para recoger, transformar e intercambiar información y para resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Comparar fracciones y representarlos en la recta numérica. 3. Simplificar fracciones y calcular fracciones equivalentes e irreducibles. 4. Operar con cualquier conjunto de fracciones aplicando correctamente las propiedades y la jerarquía de operaciones. 	



UD 3: Números decimales	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Número decimal: parte entera y parte decimal. Representación y ordenación. ▪ Relación entre fracciones y decimales. Conversión de fracciones a decimales y viceversa. ▪ Tipos de números decimales: exacto, periódico puro y periódico mixto. ▪ Aproximación de números decimales por truncamiento y redondeo. ▪ Operaciones con números decimales: suma, resta, multiplicación y división. ▪ Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones. ▪ Aplicación de los números decimales a la resolución de problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificar, comparar y representar los números decimales en la recta numérica. (*) ✓ Obtener la expresión decimal de una fracción y viceversa. (*) ✓ Clasificar los números decimales en los diferentes tipos. ✓ Sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales utilizando correctamente sus propiedades. (*) ✓ Realizar operaciones combinadas respetando la jerarquía de operaciones. (*) ✓ Aproximar números decimales por truncamiento y redondeo. (*) ✓ Resolver problemas mediante la aplicación de números decimales. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar los números decimales para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Comparar y representar los números decimales en la recta numérica, distinguiendo los diferentes tipos. 3. Operar con cualquier conjunto de números decimales aplicando correctamente la jerarquía de operaciones; así como realizar aproximaciones de estos. 	



UD 4: Potencias y raíces	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Potencias de base entera y fraccionaria con exponente entero. ▪ Operaciones: multiplicación y división de potencias con la misma base y/o mismo exponente; potencia de potencia, potencia de exponente cero y potencia de exponente 1. ▪ Potencias de base 10. Notación científica para expresar números grandes y pequeños. ▪ Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas exactas y enteras. Estimación y obtención de raíces cuadradas aproximadas. ▪ Generalización de las raíces: elementos. Raíz de índice par e impar. ▪ Operaciones con raíces: multiplicación y división con el mismo índice, potencia de raíz. ▪ Raíces de fracciones: Operaciones. ▪ Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones. ▪ Resolución de problemas mediante el uso de potencias y raíces. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificar la potencia como una multiplicación de productos iguales. ✓ Calcular las potencias de números enteros y fraccionarios con exponente entero. (*) ✓ Utilizar la notación científica para expresar números grandes y pequeños. (*) ✓ Relacionar los cuadrados perfectos con las raíces cuadradas, siendo capaz de calcular raíces cuadradas exactas, además de realizar aproximaciones de las enteras. ✓ Calcular raíces de números fraccionarios. ✓ Realizar operaciones con potencias y raíces cuadradas de números enteros y fraccionarios; así como otras operaciones combinadas, respetando la jerarquía de operaciones. (*) ✓ Resolver problemas que involucren potencias y raíces. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Operar con potencias y raíces cuadradas de números enteros y fraccionarios, conociendo sus propiedades. 2. Manejar la notación científica. 3. Emplear las potencias y raíces para la resolución de problemas. 	



UD 5: Proporcionalidad numérica	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Magnitud. Razón y proporción. Constante de proporcionalidad y propiedad fundamental de la proporción. ▪ Magnitudes directamente proporcionales. Constante de proporcionalidad directa. Regla de tres directa. ▪ Magnitudes inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad inversa. Regla de tres inversa. ▪ Proporcionalidad compuesta. ▪ Resolución de problemas de proporcionalidad directa, inversa y compuesta. ▪ Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. ▪ Repartos proporcionales: directamente e inversamente. ▪ Resolución de problemas de variaciones porcentuales y repartos proporcionales. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer una magnitud. ✓ Diferenciar entre fracción, razón y proporción. ✓ Determinar si dos razones forman una proporción. ✓ Calcular la constante de proporcionalidad y el término desconocido de una proporción. ✓ Reconocer magnitudes directa e inversamente proporcionales; así como la proporcionalidad compuesta. (*) ✓ Resolver problemas de proporcionalidad aplicando la regla de tres directa e inversa. (*) ✓ Reconocer situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales; así como repartos directa e inversamente proporcionales. (*) ✓ Resolver problemas de variaciones porcentuales y repartos proporcionales. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar la existencia de proporcionalidad directa e inversa entre dos magnitudes y calcular la constante de proporcionalidad. 2. Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones en la resolución de diferentes problemas. 3. Resolver situaciones de la vida real en la que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. 	



UD 6: Expresiones algebraicas	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Lenguaje algebraico y lenguaje cotidiano. ▪ Expresión algebraica: Valor numérico. ▪ Monomios: Elementos. Monomios semejantes. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división de monomios; y potencia de un monomio. ▪ Polinomios: Elementos. Operaciones con polinomios y propiedades: Suma, resta, multiplicación y división de polinomios; y potencia de un polinomio. ▪ Factor común. Igualdades notables. ▪ Resolución de problemas de la vida real mediante el uso de expresiones algebraicas y sus propiedades: monomios y polinomios. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Traducir enunciados expresados en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico y viceversa. (*) ✓ Obtener el valor numérico de una expresión algebraica. ✓ Identificar los elementos de un monomio y un polinomio. ✓ Reconocer dos monomios semejantes y los polinomios como suma de monomios. ✓ Realizar operaciones con monomios y polinomios: sumar, restar, multiplicar, dividir y potencias. (*) ✓ Extraer factor común en un polinomio. (*) ✓ Conocer y manejar las identidades notables. (*) ✓ Plantear y resolver problemas con el uso de monomios y polinomios. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas de la vida cotidiana mediante operaciones con expresiones algebraicas. 2. Realizar operaciones con monomios y polinomios, utilizando las propiedades correctamente. 3. Identificar y desarrollar las igualdades notables, así como utilizarlas para simplificar expresiones. 	



UD 7: Ecuaciones de primer y segundo grado	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Igualdad algebraica: Identidad y ecuación. ▪ Elementos de una ecuación: Miembro, término, incógnitas y grado. Solución de una ecuación. ▪ Ecuaciones equivalentes. Reglas de transposición de términos. ▪ Ecuaciones de primer grado: Resolución (sencillas, con paréntesis y con denominadores). ▪ Ecuaciones de segundo grado: Expresión general. Completas e incompletas. ▪ Resolución de ecuaciones de segundo grado: completas e incompletas. ▪ Resolución de problemas con ecuaciones de primer y segundo grado. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Distinguir entre identidades y ecuaciones. ✓ Reconocer los diferentes elementos de una ecuación. ✓ Comprobar si un número es solución de una ecuación. (*) ✓ Obtener ecuaciones equivalentes a una dada. ✓ Realizar transposición de términos de una ecuación de manera correcta. (*) ✓ Reconocer una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado. ✓ Resolver ecuaciones de primer grado sencillas, con paréntesis y con denominadores. (*) ✓ Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas. (*) ✓ Plantear y resolver situaciones y problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer ecuaciones de primer y segundo grado y los elementos de cada una de ellas. 2. Resolver ecuaciones de primer y segundo grado. 3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer y segundo grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos y contrastando los resultados obtenidos. 	



UD 8: Sistemas de ecuaciones lineales	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ecuación lineal. Solución y representación gráfica de una ecuación lineal. ▪ Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Solución. ▪ Métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: Gráfico, sustitución, igualación y reducción. ▪ Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer una ecuación lineal. ✓ Hallar soluciones de una ecuación lineal mediante tablas ✓ Representar ecuaciones lineales. ✓ Reconocer sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. ✓ Comprobar si un par de valores es solución de un sistema. (*) ✓ Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método gráfico y los métodos algebraicos (sustitución, igualación y reducción). (*) ✓ Plantear y resolver problemas reales utilizando sistemas de ecuaciones lineales. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 2. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante el método gráfico y los métodos algebraicos. 3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales, aplicando para su resolución métodos algebraicos y contrastando los resultados obtenidos. 	



UD 9: Funciones y gráficas	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sistema de coordenadas cartesianas. ▪ Concepto de función. Variable independiente, variable dependiente. ▪ Formas de representar una función: un enunciado, una expresión algebraica, una tabla de valores y una gráfica. ▪ Características de las funciones: Dominio puntos de corte con los ejes, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos... ▪ Funciones lineales y afines. Representación. Pendiente de una recta. ▪ Funciones cuadráticas. Puntos de corte con los ejes de coordenadas. Vértice de la parábola. Representación. ▪ Funciones de proporcionalidad inversa. Representación. ▪ Resolución de problemas mediante la aplicación de los diferentes tipos de funciones. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Localizar puntos en el plano y representarlos utilizando coordenadas cartesianas. ✓ Interpretar relaciones funcionales sencillas distinguiendo las variables que intervienen en ellas. ✓ Trabajar con la expresión algebraica, la tabla y la gráfica de una función, y pasar de unas a otras. (*) ✓ Determinar las características de las gráficas: dominio, puntos de corte con los ejes, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos... (*) ✓ Interpretar y analizar gráficas para la resolución de problemas de la vida real. (*) ✓ Reconocer y representar funciones lineales, afines, cuadráticas y de proporcionalidad inversa. (*) ✓ Calcular la pendiente de una recta a partir de su expresión. (*) ✓ Resolver situaciones de la vida real a partir de funciones elementales. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Comprender el concepto de función; reconociendo, interpretando y analizando gráficas funcionales. 2. Manejar las distintas formas de representar una función, pasando de unas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. 3. Reconocer, representar y analizar las funciones elementales, utilizándolas para resolver problemas. 	

**UD 10: Teorema de Pitágoras. Semejanza: Teorema de Tales.**

Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Triángulos: Triángulo rectángulo. ▪ Teorema de Pitágoras. Aplicaciones. ▪ Figuras semejantes. Razón de semejanza. Aplicaciones. ▪ Teorema de Tales. Triángulos en posición de Tales. Aplicaciones. ▪ Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza. Aplicaciones. ▪ Perímetros, áreas y volúmenes de polígonos semejantes. ▪ Escalas: mapas y planos. ▪ Resolución de problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer los elementos característicos de un triángulo rectángulo. ✓ Enunciar el Teorema de Pitágoras y aplicarlo a la resolución de problemas geométricos en contextos reales. (*) ✓ Reconocer y distinguir figuras semejantes utilizando sus propiedades para calcular elementos de unas figuras a partir de otras y calcula su razón de semejanza. (*) ✓ Aplicar el Teorema de Tales en distintos contextos de la vida real. (*) ✓ Reconocer triángulos en posición de Tales. (*) ✓ Distinguir y aplicar los criterios de semejanza de triángulos. ✓ Calcular la razón entre perímetros, áreas y volúmenes de polígonos semejantes. ✓ Aplicar las semejanzas en mapas y planos trabajando con escalas. (*) ✓ Resolver problemas aplicando los conocimientos adquiridos. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes. 2. Aplicar el Teorema de Pitágoras y el Teorema de Tales para la resolución de problemas geométricos y de la vida real. 3. Utilizar las escalas de manera adecuada en el cálculo de longitudes sobre planos o mapas a partir de longitudes reales, y viceversa. 	



UD 11: Geometría del espacio. Poliedros y cuerpos de revolución	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Poliedros: Elementos y clasificación. Fórmula de Euler. Poliedros regulares. ▪ Prismas: Elementos, clasificación, desarrollo plano, área y volumen. ▪ Pirámides: Elementos, clasificación, desarrollo plano, área y volumen. Troncos de pirámides: área y volumen. ▪ Cuerpos de revolución: Elementos y clasificación. ▪ Cilindro: Elementos, desarrollo plano, área y volumen. ▪ Cono: Elementos, desarrollo plano, área y volumen. Tronco de cono: área y volumen. ▪ Esfera: Elementos, área y volumen. Intersección del plano y la esfera. ▪ Resolución de problemas mediante el uso de poliedros y cuerpos de revolución. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Distinguir los diferentes tipos de poliedros regulares, prismas y pirámides y sus elementos. (*) ✓ Calcular el área y volumen de prismas y pirámides, y aplicar las fórmulas en la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana. (*) ✓ Reconocer los tipos de cuerpos de revolución más sencillos y distinguir sus elementos. (*) ✓ Calcular el área y volumen de cilindros y conos, y aplicar las fórmulas en la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana. (*) ✓ Reconocer, describir, clasificar y representar los cuerpos geométricos presentes en el entorno. ✓ Construir, dado un cuerpo geométrico, su desarrollo plano y viceversa. (*) ✓ Resolver problemas en los que aparezcan los elementos estudiados. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar, analizar, describir y construir los diferentes poliedros y cuerpos de revolución; conociendo sus propiedades y elementos característicos, y reconociéndolos en diferentes elementos de la vida cotidiana. 2. Calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. 3. Resolver problemas que conlleven la utilización de propiedades de cuerpos geométricos. 	



UD 12: Probabilidad	
Contenidos	Objetivos de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fenómenos deterministas y aleatorios. ▪ Experimento aleatorio: Espacio muestral. ▪ Sucesos. Tipos de sucesos: elemental, compuesto, seguro, imposible, contrario. Sucesos incompatibles y compatibles. ▪ Frecuencia de un suceso: absoluta y relativa. ▪ Probabilidad de un suceso: Frecuencia relativa y probabilidad. Propiedades de la probabilidad. ▪ Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. ▪ Regla de Laplace. ▪ Diagrama de árbol. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificar y proponer ejemplos sencillos de experimentos aleatorios y experimentos deterministas. (*) ✓ Identificar los distintos tipos de sucesos asociados al espacio muestral de un experimento aleatorio sencillo. (*) ✓ Calcular la frecuencia relativa de un suceso dados los datos y por experimentación. (*) ✓ Predecir los resultados de un fenómeno aleatorio sencillo a partir de la experimentación. (*) ✓ Conocer la probabilidad y sus propiedades. ✓ Distinguir entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. (*) ✓ Utilizar la Regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad de un suceso en experimentos aleatorios sencillos. (*) ✓ Representar el espacio muestral asociado a experimentos aleatorios sencillos utilizando diagramas de árbol. (*)
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios; identificando los diferentes tipos de sucesos de éstos últimos. 2. Hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los experimentos aleatorios a partir de regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria o el cálculo de su probabilidad, utilizando frecuencias relativas. 3. Resuelve problemas de experimentos aleatorios sencillos aplicados a la vida cotidiana mediante el cálculo de probabilidad utilizando la Regla de Laplace o utilizando diagramas de árbol. 	



4.4 Temporalización

La distribución temporal que a continuación se presenta (Tabla 4.2) se ha elaborado teniendo en cuenta tres aspectos:

- Horas semanales de la asignatura de Matemáticas para 2ºESO: 4 horas.
- Calendario escolar para el curso 2015/2016 en el Principado de Asturias, obtenido de Educastur. (Ver Anexo I)
 - o Primera evaluación: 14 semanas (56 sesiones)
 - o Segunda evaluación: 11 semanas (44 sesiones)
 - o Tercera evaluación: 12 semanas (48 sesiones)
- Pérdida de horas de clase a causa de puentes, actividades extraescolares, huelgas, conferencias, etc.

TABLA 4.2 DISTRIBUCIÓN DE LAS SESIONES DEL CURSO

Primera evaluación (51 sesiones)	Presentación y realización de prueba inicial	1 sesión
	UD 1: Números enteros	8 sesiones
	UD 2: Fracciones	10 sesiones
	UD 3: Números decimales	10 sesiones
	UD 4: Potencias y raíces	8 sesiones
	UD 5: Proporcionalidad numérica	14 sesiones
Segunda evaluación (38 sesiones)	Recuperación de la primera evaluación	1 sesión
	UD 6: Expresiones algebraicas	14 sesiones
	UD 7: Ecuaciones de primer y segundo grado	13 sesiones
	UD 8: Sistemas de ecuaciones lineales	10 sesiones
Tercera evaluación (41 sesiones)	Recuperación de la segunda evaluación	1 sesión
	UD 9: Funciones. Características y funciones elementales	8 sesiones
	UD 10: Teorema de Pitágoras. Semejanza: Teorema de Tales	9 sesiones
	UD 11: Geometría del espacio. Poliedros y cuerpos de revolución	14 sesiones
	UD 12: Probabilidad	7 sesiones
	Recuperación de la tercera evaluación	1 sesión
	Realización de prueba final	1 sesión



Hay que destacar que una sesión de cada Unidad Didáctica estará destinada al examen correspondiente a esa unidad. Por otro lado, esta distribución pretende ser orientativa, pudiendo ser modificada a lo largo del curso si las circunstancias lo requieren.

5. Metodología

La metodología puede entenderse como la utilización técnica y razonada de métodos para enseñar, de manera que faciliten el aprendizaje del alumnado. (Luengo, 2016).

5.1 Desarrollo del esquema metodológico

Para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permita el desarrollo de las capacidades y competencias señaladas, así como el logro de los objetivos, el Decreto 43/2015, de 10 de junio, propone una serie de recomendaciones y orientaciones metodológicas.

- Tener en cuenta lo que el alumnado es capaz de hacer y sus conocimientos previos. La enseñanza deberá partir del nivel de conocimiento del alumnado, y se irá graduando la dificultad de los contenidos a lo largo de la etapa. Del mismo modo, se fomentará el aprendizaje significativo, relacionando los nuevos conocimientos con los ya aprendidos.
- Atender a la diversidad del alumnado. Se deberá tener en cuenta los distintos ritmos de aprendizaje del alumnado e intentar que cada uno desarrolle al máximo sus capacidades en función de sus posibilidades. Para ello, se trabajará con técnicas de aprendizaje cooperativo en pequeños grupos y con materiales que permitan distintos grados de profundización y actividades abiertas; utilizando siempre métodos diversos que impliquen activamente y motiven al alumnado.
- Contextualizar los aprendizajes a la resolución de problemas de la vida real y utilizar los medios de comunicación como fuente de actividades para su

presentación y desarrollo en el aula; contribuyendo a un análisis crítico y más objetivo del entorno social, además de impulsar la educación en valores.

- Promover en el alumnado las destrezas de razonamiento, las estrategias de resolución de problemas y la confianza en sus propias capacidades para enfrentarse a situaciones nuevas de manera adecuada. Esto debe abordarse desde todos los bloques y no de manera aislada en cada uno de ellos; sino integrando conocimientos de varios y de distintas materias.
- Fomentar el manejo del lenguaje y la terminología matemática, tanto de forma oral como escrita, mediante las exposiciones orales por parte del alumnado, la elaboración de trabajos y proyectos.
- Fomentar el trabajo en equipo. Utilizar metodologías que promuevan el trabajo en grupo y técnicas cooperativas que fomenten el trabajo consensuado, la toma de decisiones en común, la valoración y el respeto de las opiniones de otras personas.
- Considerar las diferentes herramientas tecnológicas como piezas claves en el aula para facilitar los procesos de visualización y aprendizaje de las matemáticas; además de fomentar su uso y dominio en el alumnado, no solo para ir introduciéndolo a la demanda social tecnológica, sino para contribuir a un aprendizaje personal más autónomo e intuitivo. Del mismo modo, destacar la importancia del uso de la calculadora de manera correcta y cuándo sea necesaria, sin olvidarse del cálculo mental.
- Introducir aspectos de la historia de las matemáticas, destacando su contribución a la historia de la humanidad.

5.2 Estrategias del profesor, actividades y técnicas de trabajo en el aula

Como se ha destacado anteriormente, una vez formulados y analizados los objetivos de aprendizaje y antes de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es útil conocer el estado inicial del alumnado; es decir, el nivel cognitivo del que parte para adecuar los métodos de enseñanza a sus necesidades.



El método de enseñanza que se utilizará en la mayoría de los casos será el expositivo, método fundamentado en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1968). Esta teoría supone que el alumnado ha de mantener una cierta predisposición inicial hacia lo que se enseña, por lo que se utilizarán estrategias motivadoras que procuren su atención con continuidad. Además, considera que se aprende a través de la transmisión-recepción, por lo que será necesario una participación activa por parte del alumnado.

Por otro lado, para que el aprendizaje sea significativo, el profesor deberá estructurar lógicamente los contenidos, partiendo de los conceptos más generales para llegar a lo más específico y no al revés; así como relacionar los conocimientos nuevos con los ya conocidos.

Los pasos a realizar para llevar a cabo el método de enseñanza expositiva son los siguientes (Luengo, 2016):

1. *Motivación*: Se presentará la información tratando de despertar el interés y la motivación del alumnado. Cuando sea posible, se presentará la explicación como solución a alguna pregunta o problema motivador o se comenzará por las consecuencias prácticas antes de comenzar con la teoría.
2. *Organizadores previos*. Teniendo en cuenta el estado inicial del alumnado, antes de comenzar las explicaciones, y si es necesario durante el desarrollo de las mismas, se recordarán los conceptos que ya deberían existir en la estructura cognitiva del alumnado, los cuales serán necesarios para aprender los nuevos conocimientos de manera significativa.
3. *Desarrollo de la explicación*: La organización de la información durante la explicación será esencial para que el alumnado aprenda significativamente, por ello se deberá, siempre que sea posible:
 - Ilustrar cada concepto o principio nuevo con ejemplos y aplicaciones, pasando del concepto o principio al ejemplo y viceversa.
 - Al pasar de una información conceptual a otra poner de manifiesto las relaciones entre ellas para que el aprendizaje no sea memorístico.



- A medida que se presente información nueva, subir y bajar por las jerarquías conceptuales; es decir, pasar de la información conceptual más general a la más específica, ilustrando cómo se relaciona y, después, volver atrás añadiendo significados nuevos a los conceptos generales, sin perder de vista su utilidad; además de realizar síntesis periódicas.
4. *Síntesis final*: se trata resumir y repasar los conocimientos y procedimientos más importantes explicados hasta el momento para ayudar a recordar y afianzar mejor los conocimientos.

Por otro lado, en función del nivel del alumnado, para la resolución de problemas, así como para la enseñanza de procesos algorítmicos se utilizará, en combinación con el método de enseñanza expositiva, el método de aprendizaje por descubrimiento guiado, fundamentado en la teoría de Bruner (1963). Este método pretende ayudar al alumnado a aprender descubriendo guiado por el profesor.

Así, el profesor, en lugar de presentar la información ya totalmente elaborada y estructurada como en la enseñanza expositiva, deberá elaborar secuencias cuidadosamente planificadas para ayudar al alumnado en la deducción del camino correcto para la resolución de los mismos; resolviendo siempre todas las dudas que surjan.

En cuanto a las técnicas de trabajo en aula, aunque la mayoría de las clases serán expositivas, se intentará que sean lo más dinámicas posible, con una continua participación del alumnado. Por otro lado, fundamentalmente se tratará de que el alumnado trabaje y se acostumbre a realizar los ejercicios de manera autónoma. Sin embargo, para fomentar el trabajo en grupo, se propondrán trabajos a realizar por dos o tres personas. Por otro lado, en cada explicación, se seleccionarán ejercicios a solucionar en la hora de clase por el alumnado, pudiendo ser resueltos de manera autónoma o en colaboración con otros compañeros, ya que el alumnado estará sentado en parejas. Además, en ocasiones, se les pedirá que realicen dichos ejercicios en la pizarra.

Finalmente, para ayudar al alumnado a lograr los objetivos propuestos, a lo largo del curso se realizarán una serie de actividades, elaboradas teniendo en cuenta las



necesidades y el nivel del alumnado. Según el fin con el que se planteen, se distinguen varios tipos:

- *Actividades de introducción y motivación.* Se proponen al principio de cada Unidad Didáctica, no solo para conocer el nivel del que parte el alumnado, sino para llamar su atención y aumentar su interés hacia el tema.
- *Actividades de desarrollo.* Son las actividades que se proponen durante la explicación en cada sesión para aplicar los contenidos vistos en la teoría y ayudar a lograr los objetivos propuestos.
- *Actividades de elaboración y síntesis.* Con el objetivo de que el alumnado revise y practique todos los conocimientos vistos hasta ese momento, se mandarán estas actividades para su realización tanto en el aula como en clase.
- *Actividades de ampliación.* Actividades complementarias destinadas al alumnado que avance a un ritmo medio-alto de aprendizaje y muestre interés por ampliar sus conocimientos.
- *Actividades de refuerzo y recuperación.* Actividades complementarias destinadas al alumnado que presente dificultades en el aprendizaje o tenga la materia pendiente.
- *Actividades de evaluación.* Pruebas escritas que se realizarán con el objetivo de medir el grado de adquisición de los objetivos propuestos para cada Unidad Didáctica.

6. Recursos, medios y materiales didácticos

A continuación se señalan los recursos, medios y materiales didácticos que se utilizarán para el desarrollo de las unidades didácticas:

- ✓ *Libro de texto.* “Matemáticas 2. Proyecto: Los caminos del Saber”. 2º E.S.O. Ed. Santillana; el cual se propone en la programación del Departamento de Matemáticas del centro. Este libro servirá como referencia fundamental para el

desarrollo de los contenidos, aunque en algunas ocasiones se utilizarán otros materiales.

- ✓ *Cuaderno de clase.* Material del que deberá disponer todo el alumnado para realizar las anotaciones que considere oportunas y realizar las actividades que se propongan a lo largo de las Unidades Didácticas.
- ✓ *Fichas de ejercicios y problemas.* Para cada Unidad Didáctica se le entregará al alumnado una ficha, elaborada por el Departamento de Matemáticas, que contendrá una serie de ejercicios relacionados con todos los contenidos de la unidad y que el alumnado deberá ir realizando por su cuenta. Esta ficha ayudará al alumnado a prepararse para la prueba escrita y será corregida en clase previamente.
- ✓ *Pizarra.* Elemento fundamental para el desarrollo de las explicaciones por parte del profesor a lo largo de todas las Unidades Didácticas.
- ✓ *Medios audiovisuales: ordenador y proyector.* El profesor para complementar sus explicaciones, en ocasiones, utilizará estos medios para facilitar el aprendizaje y motivar al alumnado.
- ✓ *Aula de ordenadores para el uso de aplicaciones informáticas.* Durante el desarrollo de algunas Unidades Didácticas el alumnado precisará de ordenadores para utilizar aplicaciones informáticas (Wiris, GeoGebra, Excel, etc) donde aplicar los conocimientos vistos.
- ✓ *Calculadora científica.* Todo el alumnado debe disponer de una para utilizarla en los ejercicios y problemas que el profesor considere oportunos.
- ✓ *Instrumentos de dibujo.* El alumnado, así como el profesorado para su uso en la pizarra, deberá disponer de los materiales de dibujo apropiados (regla, compás, cartabón, escuadra, etc.) pues serán necesarios para las unidades de geometría.
- ✓ *Colección de juegos matemáticos del Departamento de Matemáticas.* Para el desarrollo de algunas Unidades Didácticas se utilizarán juegos matemáticos para motivar al alumnado y hacer más ameno el aprendizaje: cuerpos



geométricos para su construcción, juegos de cartas matemáticos, juegos de pensar, etc.

- ✓ *Libros de la biblioteca.* Tanto el profesorado como el alumnado, tendrá a su disposición libros en la biblioteca del centro para su consulta en el momento que desee.

7. Procedimientos, instrumentos de evaluación y criterios de calificación

La evaluación educativa es la medida o comprobación del grado de consecución de objetivos, lo que comporta una recogida de información para emitir un juicio de valor codificado en una calificación, con vistas a una toma de decisiones. (Luengo, 2016).

En este apartado se presentarán los procedimientos e instrumentos de evaluación, así como los criterios de evaluación y calificación de la materia para el curso de 2ºESO.

7.1 Procedimientos e instrumentos de evaluación del aprendizaje.

Los procedimientos e instrumentos para llevar a cabo la evaluación del aprendizaje del alumnado durante el curso son los siguientes:

- *Prueba inicial.* El primer día de clase, y antes de comenzar el proceso de enseñanza-aprendizaje, se realizará una evaluación inicial mediante una prueba escrita con el objetivo de averiguar el nivel de preparación de cada alumno para enfrentarse a los objetivos que se espera que logre. Su resultado no influirá en la nota de la asignatura.
- *Pruebas escritas.* Al finalizar cada Unidad Didáctica se realizará una prueba escrita para determinar el grado de consecución de los objetivos de esa unidad. Además, servirá para detectar tanto los aspectos no asimilados, como las causas para reajustar, mejorar y optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.



- *Observación diaria en el aula. Realización de ejercicios y trabajos grupales e individuales.* La evaluación continua es una parte importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, pues permite seguir su evolución. Para ello, se observará la actitud y participación de cada alumno en el aula, así como la realización de los ejercicios y trabajos que se propongan.
- *Prueba final.* Al finalizar la tercera evaluación se realizará una prueba final para valorar la evolución de cada alumno con respecto a la prueba inicial. Su resultado no incidirá en la calificación de la asignatura.

7.2 Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación son el referente para valorar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje por parte del alumnado.

A continuación, se indican los criterios de evaluación para la asignatura de Matemáticas en el segundo curso de enseñanza secundaria, según el Decreto 43/2015, de 10 de junio.

1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.

2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.

3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.

4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.



5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables y operar con expresiones algebraicas.

7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.

8. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico y abordar problemas de la vida cotidiana.

9. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado y expresando el procedimiento seguido en la resolución.

10. Reconocer el significado aritmético del teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados contruidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

11. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

12. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).



13. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

14. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.

15. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.

16. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.

17. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.

18. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.

7.3 Criterios de calificación

La calificación es un juicio de valor en el que se comparan los datos obtenidos en la recogida de información, que reflejan el “cómo es” de lo que se va a evaluar, con unos determinados parámetros de referencia, que indican el “cómo debería ser”. (Luengo, 2016).

La calificación de cada alumno en cada una de las evaluaciones se obtendrá a partir de los procedimientos e instrumentos de evaluación anteriormente descritos y siguiendo la ponderación detallada en la Tabla 6.1.

TABLA 6.1 CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Aspecto	Ponderación sobre la nota final
Media aritmética de las pruebas escritas	70%
Realización de ejercicios y trabajos	20%
Observación en el aula	10%

Se considera que el alumnado ha superado una evaluación cuando su calificación es igual o superior a cinco puntos, en caso contrario deberá realizar un examen de recuperación de la misma en los momentos señalados.

Sin embargo, al finalizar la tercera evaluación, se considerará que el alumnado ha superado la materia si realizando la media aritmética de las notas de las tres evaluaciones su calificación es igual o superior cinco puntos y la nota obtenida en cada una de las evaluaciones no es inferior a cuatro. En caso contrario, el alumnado deberá examinarse de la evaluación en la cual su calificación sea inferior a cuatro.

A continuación, se detallan estas medidas de recuperación.

8. Programa de refuerzo

En las siguientes líneas se proponen algunas medidas para recuperar los aprendizajes no adquiridos cuando se promocione con evaluación negativa en la asignatura.

- *Alumnado con un elevado índice de absentismo:* En caso de estar totalmente injustificado, perderá el derecho a la evaluación continua, siguiendo el Reglamento de Régimen Interno del centro. Por otro lado, en el caso de estar justificado, se le propondrán ejercicios a entregar antes de finalizar la evaluación cuya puntuación será la correspondiente a la evaluación continua.
- *Alumnado que no haya aprobado alguna de las evaluaciones en la primera convocatoria:* Se les realizará una prueba de recuperación de la evaluación correspondiente en los momentos señalados en la Tabla 4.2; proponiéndoles ejercicios orientados al examen.



- *Alumnado que al finalizar la tercera evaluación no vaya a superar la materia:* Antes de finalizar la tercera evaluación, realizará una prueba extraordinaria de las evaluaciones que haya obtenido una calificación negativa.
- *Alumnado que no supere la materia en Junio:* Deberá realizar una prueba extraordinaria en septiembre, la cual versará sobre los objetivos mínimos del curso y tendrá una valoración del 80% de la nota; siendo el 20% restante la entrega, el día del examen, de una serie de ejercicios que se les adjudicará al finalizar el curso.
- *Alumnado que no supere la asignatura en Septiembre:* Será controlado en esta asignatura por un profesor designado para tal fin durante una hora semanal por las tardes. El profesor deberá calificar en cada evaluación, para lo que podrá realizar las pruebas que estime convenientes y tener en cuenta la evolución en matemáticas de 3º ESO.

9. Medidas de atención a la diversidad.

Según el Decreto 43/2015, de 10 de junio, se entiende por atención a la diversidad el conjunto de actuaciones educativas dirigidas a dar respuesta a las diferentes capacidades, ritmos y estilos de aprendizaje, motivaciones e intereses, situaciones sociales, culturales, lingüísticas y de salud del alumnado.

A continuación, se proponen una serie de medidas de atención a la diversidad para este curso:

- *Actividades con diferentes niveles de dificultad.* Teniendo en cuenta que no todo el alumnado adquiere al mismo tiempo y con la misma intensidad los contenidos a tratar, se hace necesaria una atención más individualizada. Para ello, tomando como referencia la prueba inicial, así como las diferentes pruebas que se realizan a lo largo del curso, se desarrollaran actividades con diferentes grados de dificultad.
- *Actividades de ampliación o complementarias.* Una vez diagnosticado al alumnado con altas capacidades, con ayuda del Departamento de

Orientación, se le propondrán ejercicios de ampliación y complementarios de mayor profundización y complejidad.

- *Material de refuerzo.* Aquel alumnado que presente dificultades en el aprendizaje, se le propondrá materiales de refuerzo que le motive y facilite el logro de los objetivos mínimos de la materia. Estos pueden ser, por ejemplo, ejercicios de refuerzo o materiales de repaso.
- *Agrupamientos flexibles.* El alumnado al que se les detecten mayores deficiencias en la prueba inicial o lo largo del curso y teniendo en cuenta la información aportada por la Pedagoga Terapéutica, será acogido por un tercer profesor. Este grupo, que tendrá un máximo de 10 alumnos, será flexible, por lo que si se consiguen subsanar las deficiencias, el alumnado pasará de nuevo a su grupo de referencia.
- *Alumnado con la materia pendiente de 1º ESO.* Será controlado en esta asignatura por un profesor designado para tal fin durante una hora semanal por las tardes. El profesor deberá calificar en cada evaluación, para lo que podrá realizar las pruebas que estime convenientes y tener en cuenta la evolución en matemáticas de 2º ESO.

10. Actividades complementarias y extraescolares

Las actividades que se proponen para el presente curso escolar son las siguientes:

- *Divermat:* Talleres de matemáticas en el Palacio de los Niños, organizados por el ayuntamiento de Oviedo.
- *Olimpiada Matemática:* Organizada por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática, en la que se pedirán alumnos voluntarios para formar los equipos participantes.

PROPUESTA DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN

Análisis de errores en las Pruebas de Acceso a la Universidad: El caso de los sistemas de ecuaciones lineales.

1. Introducción: Problema planteado y justificación.

La experiencia vivida en el centro de prácticas me ha permitido darme cuenta de los errores y dificultades que los alumnos presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. No es de extrañar, pues las matemáticas, debido a su naturaleza, es una de las asignaturas más complejas. Sin embargo, lo que más me ha llamado la atención es que estos errores son cometidos en todos los niveles de la ESO y del Bachillerato, y además, según mi tutora de prácticas, se repiten año tras año, llegando a ser cometidos en los exámenes.

Como futura docente, me parece necesario conocer dónde el alumnado puede presentar más dificultades o cometer más errores, además de saber cuáles son las causas de ellos para así, tenerlos en cuenta y mejorar en la explicación o reincidir más y mejor en aquellos conceptos que puedan llevar a cometerlos.

He creído, pues, interesante, vincular esta propuesta de iniciación a la investigación con un análisis de errores.

A la hora de elegir el enfoque de la investigación, he tenido la gran oportunidad de trabajar con exámenes de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU), exámenes realizados por alumnos que finalizan la última etapa educativa y que por tanto son una gran fuente de información sobre la formación matemática recibida.

Puesto que trabajar con todos los ejercicios no sería factible debido al tiempo, he decido centrarme en un ejercicio relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales. El propósito de esta investigación es clasificar el tipo de errores que comenten los alumnos en este tipo de ejercicio, analizar los posibles motivos y plantear una estrategia de actuación para intentar resolverlos.

2. Marco teórico

El estudio de errores en el aprendizaje ha sido, y sigue siendo, una cuestión de permanente interés de la Educación Matemática.

Según Del Puerto y otros (2004):

En la actualidad, el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas. (p. 2)

[...] El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados. (p. 4)

Existe una gran variedad de investigaciones acerca de los errores en Matemáticas, ya desde principios del siglo XX, fundamentalmente en aritmética y álgebra.

Entre estas investigaciones cabe destacar la de Rico (1995). En ella se aporta una revisión sobre el estudio de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas hasta principio de los noventa, poniendo de manifiesto que este estudio ha sido objeto de investigación constante en Educación Matemática; además de reflejar cómo este análisis de errores se ha visto influenciado en cada época por las corrientes predominantes en Pedagogía y Psicología; así como por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.

En esta revisión sobre el estado de arte, podemos destacar algunos autores:

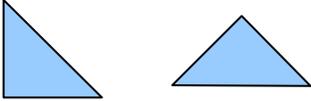
Bachelard (1988) que plantea la noción de “obstáculo epistemológico”, considerado como aquel conocimiento que por haber sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas se fija en la mente del estudiante; pero que, sin embargo, posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas. Este autor es importante, puesto que otro investigador destacado, Brousseau (1997), tomó sus ideas y las desarrolló en el ámbito específico del

aprendizaje de las matemáticas. Su trabajo ha sido referente en varias investigaciones; en el distingue entre obstáculos de origen:

- Psicogenético, vinculados con la etapa de desarrollo del alumno.
- Didáctico, relacionados con la metodología que caracterizó al aprendizaje.
- Epistemológico, vinculados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende.

Radatz (1979), ofrece una taxonomía para clasificar los errores, estableciendo cinco categorías generales para este análisis. Esta categorización es una de la más utilizada en las investigaciones, la podemos observar en la Tabla 2.1. (Abrate et al., 2006)

TABLA 2.1. CATEGORIZACIÓN DE LOS ERRORES (ABRATE ET AL., 2006)

<i>Tipo de error Según la causa</i>	<i>Descripción</i>	<i>Ejemplo ilustrativo</i>
1. Dificultades del lenguaje	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.	Si “x” denota la edad de María e “y” la edad de Juan, la expresión que traduce al lenguaje simbólico la frase: “María tiene el doble de la edad de Juan” suele ser identificada con $2x = y$
2. Dificultades para obtener información espacial	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.	 <p>El triángulo de la izquierda es identificado por los alumnos como un triángulo rectángulo, sin embargo, una rotación del mismo, como en el ejemplo de la derecha, lleva a que no sea identificado como tal.</p>
3. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos,	Identificación del intervalo continuo de números reales $[-2, 3]$ con el conjunto discreto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



	procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.	
4. Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas. Dentro de esta clase de errores se tienen:	
4.1 Por perseveración	Predominan los elementos singulares de un problema.	<i>Demostrar una propiedad sobre triángulos en general, usando un triángulo rectángulo (un caso particular).</i>
4.2 De asociación	Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.	<i>Usar por ejemplo: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$</i>
4.3 De interferencia	Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros.	<i>La multiplicación de dos números negativos ($- * - = +$) interfiere en la resolución de una resta: $- 3 - 5 = 8$</i>
4.4 De asimilación	Cuando la información es mal procesada debido a faltas de percepción.	<i>Por ejemplo: $2x - x = 2$</i>
5. Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Errores producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares en contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemáticas.	<i>El cálculo de las raíces de $x^2 + x - 6 = 0$ arroja por resultados correctos a $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$; en tanto que el cálculo de las raíces de $x^2 + x - 6 = -4$ suele conducir erróneamente al mismo resultado, siendo en realidad $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.</i>

Por otro lado, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), en una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemáticas, realizan también una clasificación de éstos, basándose en un análisis, realizado por expertos, de las soluciones de los alumnos:

1. *Datos mal utilizados.* Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Puede ser porque se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la solución, se hace una lectura incorrecta del enunciado, etc.



2. *Interpretación incorrecta del lenguaje.* Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. *Inferencias no válidas lógicamente.* Son los errores que tienen que ver con equivocaciones en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
4. *Teoremas o definiciones deformados.* Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición.
5. *Falta de verificación en la solución.* Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
6. *Errores técnicos.* Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Según Mulhern (1989), la mayor parte de los especialistas establecen las siguientes características de los errores:

- Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor.
- Son persistentes y difíciles de corregir, ya que requieren una reorganización de los conocimientos.
- Pueden ser sistemáticos o por azar; los sistemáticos son más frecuentes y descubren los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada; los cometidos por azar son ocasionales.
- Los alumnos, por lo general, no son conscientes del error ya que no comprenden completamente el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

A continuación, se mencionan algunos aspectos de la investigación llevada a cabo por otros autores en el campo que nos ocupa:

Astolfi (1999), hace un análisis del estatus del error a lo largo de los años; así como de su naturaleza, además de elaborar una tipología de los errores cometidos por los alumnos usada por algunos investigadores.



Socas (1997), más centrado en los errores en el álgebra, hace una clasificación de los errores en el aprendizaje de este ámbito, la cual también es utilizada en algunas investigaciones. Además, desarrolló varios estudios acerca de las dificultades y errores que cometían los alumnos con respecto a procesos específicos del lenguaje algebraico (Socas et al., 2003); así como en su construcción (Socas, 2007).

Del Puerto et al. (2004), realizan un estudio acerca de los errores cometidos por alumnos que están finalizando enseñanzas medias o comenzando enseñanzas universitarias en problemas que comprenden contenidos de álgebra y teoría básica de funciones, utilizando la clasificación de Radatz.

Abrate et al. (2006), centrados también en las enseñanzas medias y universitarias, presentan un laborioso proyecto acerca de las dificultades y el análisis de errores en el aprendizaje de las matemáticas en estos niveles, tanto desde la perspectiva del profesorado como del alumnado, para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las mismas.

Finalmente, conviene notar que también se han analizado otra serie de trabajos de investigación, tanto sobre estudiantes universitarios, como preuniversitarios (Checa y Martínez-Artero, 2010; Ramírez et al., 2014; Solaz, 2014).

3. Objetivos e hipótesis

En los exámenes de PAU los alumnos son evaluados sobre los conocimientos recibidos en 2º de bachillerato, y sus resultados pueden marcar el futuro académico y profesional del alumnado. Teniendo en consideración la importancia de esta prueba, hemos decidido centrar nuestra investigación sobre el análisis de error en un ejercicio incluido en la misma.

Los objetivos generales de esta investigación son:

- Analizar los errores que comenten los alumnos.
- Conocer las carencias del alumnado que se presenta a la PAU con respecto a los conocimientos en Matemáticas.

Los objetivos específicos que se proponen son:



- Clasificar el tipo de errores que comenten los alumnos.
- Analizar los posibles motivos.
- Plantear una estrategia de actuación para intentar resolverlos.

Teniendo en consideración que los alumnos que se presentan a la PAU han superado el bachillerato con éxito, se tomará como hipótesis de partida que la mayoría de los errores pueden ser debidos a lo que Socas (1997) define como “actitudes afectivas y emocionales”: falta de concentración, bloqueos, etc.; consecuencias de la presión que esta prueba suele provocar en el alumnado.

4. Diseño metodológico

4.1 Modalidad de la investigación

El análisis que se lleva a cabo en esta investigación es de tipo descriptivo, pues se trata de identificar los conceptos y procedimientos a los que se asocia un mayor número de errores; así como determinar las causas de los mismos.

4.2 Instrumentos de recogida de información y planificación.

Para la recogida de información se han utilizado dos instrumentos: los exámenes de la PAU realizados por los alumnos y una hoja registro de los errores observados.

- *Exámenes de la PAU, realizados por los alumnos*, aquellos que contienen el ejercicio elegido que a continuación se presenta y que forma parte de:
 - PAU de la Universidad de Oviedo. Curso 2014/2015
 - Convocatoria de Junio. Fase General
 - Materia: Matemáticas Aplicadas las Ciencias Sociales (Opción A)

EJERCICIO

Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y 1'5 euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

- a) Plante un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado. (0.75 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? (1 punto)
- b) ¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro? (0.75 puntos)
-

En el contexto del Decreto 42/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato en el Principado de Asturias, el ejercicio se corresponde con el Bloque de Números y Álgebra, concretamente, con los siguientes contenidos referentes a los Sistemas de Ecuaciones Lineales:

- Rango de una matriz. Determinantes hasta orden 3.
- Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales: discusión por el teorema de Rouché-Frobenius y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (hasta tres ecuaciones con tres incógnitas). Método de Gauss. Regla de Cramer. Sistemas lineales dependientes de un parámetro.
- Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía. (p. 321)

Y con las siguientes capacidades que el alumnado debe lograr:

- [...] - Expresar en forma matricial sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas como máximo.
- Utilizar el lenguaje algebraico para plantear un problema mediante un sistema de un máximo de tres ecuaciones con tres incógnitas y dependientes de un parámetro.
 - Estudiar la compatibilidad de un sistema planteado utilizando técnicas matriciales, así como resolverlo aplicando diferentes métodos, como Gauss, Cramer u otros, comprobando la validez de las soluciones encontradas. [...] (p. 324 – 325)

Por otro lado, como se puede observar, estamos ante un problema que fácilmente puede recordar a algún ejercicio de niveles anteriores, como 3º o 4º ESO; pues para su resolución, el alumnado debe plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos



incógnitas. Además, dicha tarea, que con seguridad podrían realizar alumnos de 3º y 4º ESO, tiene asociada más de la mitad de la puntuación del ejercicio (1.5 puntos); dejando el punto restante para lo que sería propio de la etapa de 2º Bachillerato: la discusión del sistema. Por estas razones, se ha elegido y considerado interesante este ejercicio. (En el Anexo II se encuentra su resolución)

- *Registro de los errores observados en cada procedimiento, así como la frecuencia con la que aparecen y ejemplos.*

Una vez analizados el ejercicio y cada uno de los exámenes, se ha elaborado un registro de errores a través de una plantilla creada (ver Anexo III), basada en los resultados obtenidos en este análisis, en los procedimientos que el alumnado debe desarrollar en el ejercicio - el planteamiento del sistema, su discusión y la resolución; y en la clasificación de las causas de los errores propuesta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), incluyéndose dentro de la “interpretación incorrecta del lenguaje” el error debido a una falta de comprensión lectora.

4.3 Población objeto de estudio

La población objeto de estudio serán aquellos alumnos que hayan realizado el examen correspondiente donde se encuentra el ejercicio; es decir, aquellos alumnos que han realizado la PAU en Junio, escogido el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en la Fase General y elegido la Opción A. (En el Anexo III se encuentran las dos opciones a escoger).

Sorprendentemente, de los 402 alumnos presentados a este examen, únicamente 67 han escogido la Opción A donde se encuentra el ejercicio. Para entender los motivos por los que un número tan reducido de estudiantes ha elegido la Opción A, se ha realizado un análisis de las características de los exámenes de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en la PAU desde la entrada de la Ley Orgánica de Educación (LOE).

- El examen consta de dos opciones (A y B) con cuatro ejercicios cada una, de las cuales el alumnado deberá escoger solo una.
- Cada ejercicio está dedicado a un contenido o tema de los siguientes:



1. Sistemas de Ecuaciones Lineales
 2. Programación Lineal
 3. Estudio de una función: Representación, continuidad, optimización.
 4. Cálculo integral: Primitiva de una función y cálculo de áreas.
 5. Probabilidad
 6. Contrastes de hipótesis
- Todos los ejercicios son aplicados a problemas de la vida real, exceptuando, a veces, los destinados a Sistemas de Ecuaciones Lineales.
 - Se sigue un patrón en los ejercicios de cada una de las opciones, tanto en el contenido como en el tipo de ejercicio. Como se puede observar en la Tabla 4.1:
 - Los ejercicios destinados al Cálculo Integral y al Estudio de una función aparecen indistintamente en una u otra opción, pero nunca el mismo en ambas.
 - En la Opción A, el último ejercicio puede estar destinado a la Probabilidad como al Contraste de Hipótesis.
 - En la Opción B, el primer ejercicio puede estar destinado a los Sistemas de Ecuaciones Lineales o la Programación Lineal.

TABLA 4.1. PATRÓN EXAMEN PAU DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS.

<i>Ejercicios/Opción</i>	Opción A	Opción B
Ejercicio 1	Sistemas de Ecuaciones Lineales	Sistemas de Ecuaciones Lineales / Programación Lineal
Ejercicio 2	Programación Lineal	Estudio de una función
Ejercicio 3	Cálculo Integral	Probabilidad
Ejercicio 4	Probabilidad / Contraste de Hipótesis	Contraste de Hipótesis

En este caso, el primer ejercicio de la Opción B está destinado a los Sistemas de Ecuaciones Lineales (ver Anexo III). Por tanto, el alumnado que escogiera la Opción B, no se examinaría de la Programación Lineal; tema en el cuál el alumnado suele presentar más dificultades y por tanto, no suele ser de su agrado. He aquí lo que se considera la principal razón de porqué tan pocos alumnos han elegido la Opción A.

5. Análisis de los resultados

Para comenzar, cabe destacar, que de los 67 alumnos que han realizado el ejercicio, poco más de la mitad, un 52%, no han cometido ningún error en su realización, y por tanto tienen el total de la puntuación.

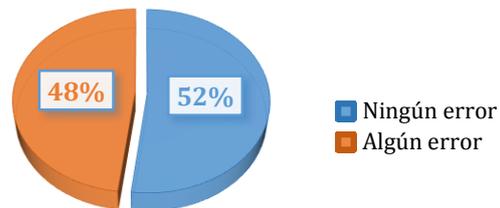


FIGURA 5.1. DISTRIBUCIÓN DE LA POBLACIÓN POR AQUELLOS QUE COMENTEN O NO ERRORES

Por otro lado, considerando el alumnado que ha cometido alguna equivocación (48%), en la Figura 5.2 se comparan los porcentajes de errores cometidos por éstos en cada uno de los procedimientos que componen el ejercicio: planteamiento del sistema, discusión y resolución.

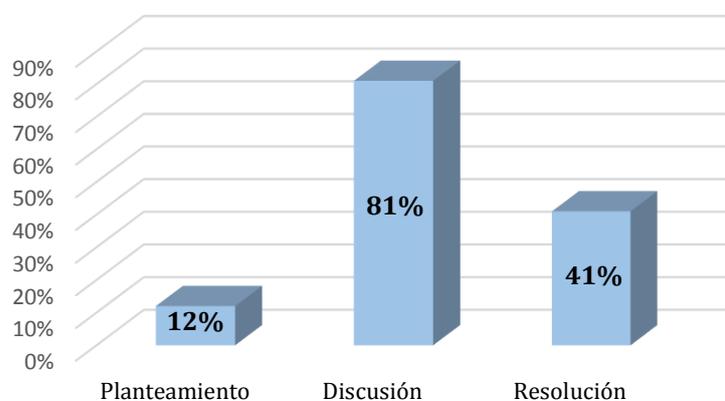


FIGURA 5.2. PORCENTAJES DE PERSONAS QUE HAN COMETIDO ERRORES EN CADA UNA DE LOS PROCEDIMIENTOS



Como era de esperar, el procedimiento donde los alumnos han presentado más equivocaciones ha sido en la discusión del sistema – cuestión más novedosa y de menos experiencia – seguida de la resolución y del planteamiento.

Sin embargo, ha sido un elevado número de alumnos el que ha cometido errores al discutir el sistema; únicamente 6 personas lo han resuelto correctamente de las 32 que han cometido fallos en algún procedimiento. Además, teniendo en cuenta la aparentemente poca dificultad del procedimiento, también un gran número han fallado en la resolución del sistema. Por último, destacar que no todo el alumnado ha realizado correctamente su planteamiento, a pesar de la escasa complejidad, el 12% ha cometido algún error en este procedimiento.

Para obtener más información acerca de estas equivocaciones, a continuación se representa el número de errores en cada procedimiento desglosándolos según las causas encontradas. (Figura 5.3)

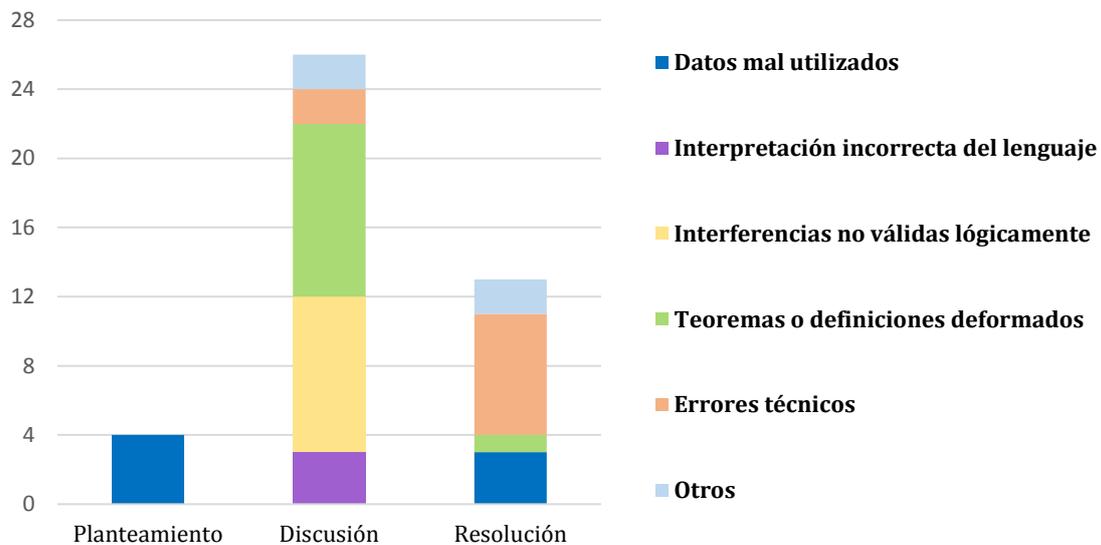


FIGURA 5.3. NÚMERO DE ERRORES EN CADA PROCEDIMIENTO SEGÚN SUS CAUSAS

Como se puede apreciar, la mayor parte de los errores cometidos por el alumnado se deben a teoremas o definiciones deformados – sobre todo en la discusión del sistema, seguido de aquellos debidos a interferencias no válidas lógicamente – presenciados únicamente a la hora de discutir el sistema - y a errores técnicos – predominantes, como era de esperar, en la resolución del sistema.



A continuación, se hace un desarrollo más específico de los errores en cada uno de los procedimientos.

Planteamiento del sistema

Los errores del alumnado en el planteamiento del sistema se deben, en su totalidad, a una mala utilización de los datos: el alumnado añade datos extraños o hace una lectura incorrecta del enunciado. En las Figura 5.4 y 5.5 se pueden observar dos ejemplos.

$$\begin{aligned} 11x + 15y &= 9 \\ x + y &= 9 \end{aligned} \quad -0,5$$

FIGURA 5.4. EJEMPLO DE ERROR EN EL PLANTEAMIENTO

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 7 \\ 15x + 15y &= 9 \end{aligned} \right\} -0,5$$

FIGURA 5.5. EJEMPLO DE ERROR EN EL PLANTEAMIENTO

Discusión del sistema

Para realizar este procedimiento, podían hacerlo de dos maneras (ver Anexo III): a) por el Método de Gauss (16% del alumnado); b) utilizando el Teorema de Rouché – Frobenius (84% del alumnado). Estos porcentajes prueban lo acostumbrados que están los alumnos a realizar la discusión de un sistema por este teorema, a pesar de que el método de Gauss puede resultar más sencillo.

Para la realización de ambos métodos, el alumnado debe tener la capacidad, como hemos dicho anteriormente, de expresar en forma matricial el sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, un 7,7% del alumnado que ha presentado problemas en la discusión del sistema, ha cometido errores en este primer paso; se corresponden a los errores técnicos. En la Figura 5.6 podemos ver un ejemplo; en ella vemos, como el alumnado, expresa mal la segunda ecuación en la fila de la matriz.



$$\left. \begin{aligned} mx + 1'5y &= 9 \\ x + y &= 7 \end{aligned} \right\} \text{ SISTEMA}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1'5 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

FIGURA 5.6. EJEMPLO DE ERROR EN LA EXPRESIÓN MATRICIAL

Una vez construida la expresión matricial, un 38,5% del alumnado ha cometido errores debidos a una deformación de los métodos anteriormente dichos (Método de Gauss y Teorema de Rouché – Frobenius) o de algún otro conocimiento necesario para su correcta utilización, predominando el cálculo de rangos; son los errores debidos a “Teoremas o definiciones deformados”. En la Figura 5.7, podemos observar como el alumno no calcula correctamente el rango de la matriz ampliada.

Matriz $\left(\begin{array}{cc|c} m & 1'5 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$

$\det A = \begin{vmatrix} m & 1'5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1'5$

$m - 1'5 = 0$
 $m = 1'5$

Si $m = 1'5 \rightarrow \left. \begin{aligned} \text{Rang } A &= 1 \\ \text{Rang } A^* &= 1 \\ \text{N}^\circ \text{ incog.} &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{sistema} \\ &\text{compatible} \\ &\text{ineterminado } (\infty \text{ soluciones}) \end{aligned}$

$\det A^* = \begin{vmatrix} 1'5 & 1'5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1'5 - 1'5 = 0$ (si $m = 1'5$)

-0,5 fallo en el estudio.

FIGURA 5.7. EJEMPLO DE ERRORES DEBIDOS A TEOREMAS O DEFINICIONES DEFORMADOS

Por otro lado, un 34,6% comete errores, tanto en la propia discusión del sistema como en la respuesta a la unicidad, debido a equivocaciones con el razonamiento y no al contenido específico. En la Figura 5.8 podemos ver como el alumno aplica correctamente el método de Gauss; sin embargo, falla en el razonamiento de la existencia de solución.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 7 \\ m & 15 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{m \cdot (R_1) - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -m+15 & | & -7m+9 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow -m+15=0 \rightarrow -m=-15 \rightarrow m=15$
 $\rightarrow -7m+9=0 \rightarrow -7m=-9 \rightarrow 7m=9 \rightarrow m=\frac{9}{7}$

$m = \frac{9}{7} \rightarrow$ Sistema incompatible.
 $m \neq \frac{9}{7} \rightarrow$ Sistema compatible indefinido.

FIGURA 5.8. EJEMPLO DE ERRORES DEBIDOS A INTERFERENCIAS NO VÁLIDAS LÓGICAMENTE

Otro ejemplo lo podemos encontrar en la Figura 5.9, donde podemos ver como el alumnado calcula correctamente los rangos, pero a la hora de razonar si el rango es menor o mayor al número de incógnitas se equivoca.

Si $|m \neq 1,5| \rightarrow \text{R}_S M = 2 = \text{R}_S M^* < n \rightarrow \text{S.C.I.}$ ~~infinitas~~

FIGURA 5.9. EJEMPLO DE ERRORES DEBIDOS A INTERFERENCIAS NO VÁLIDAS LÓGICAMENTE

Los siguientes errores menos representativos, son aquellos debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje (11,5%). Todos ellos resultan de contestar a la pregunta de la unicidad: “En caso de existir solución, ¿es siempre única?”. El alumnado no comprende con claridad lo que le están preguntando, por lo que contesta de manera incorrecta, a pesar de haber realizado bien la discusión. (Ver Figura 5.10)

a) Para $m=1,5$ es un sistema incompatible. Para valores distintos 0,75
 $m=1,5$ es un sistema compatible determinado.
 de solución no es única ya que para cualquier valor distintos de $m=1,5$
 tendríamos solución al problema.
- 0,25.

FIGURA 5.10. EJEMPLO DE ERROR POR INTERPRETACIÓN INCORRECTA DEL LENGUAJE



Resolución del sistema

Al igual que en el procedimiento anterior, por tratarse de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el alumnado puede resolverlo de varias maneras: a) Sustitución (36%), Reducción (31%) o Igualación (9%); b) Regla de Cramer (14%); c) Método de Gauss (9%). Estos porcentajes nos indican cómo la mayoría del alumnado prefiere utilizar un método que ha usado desde hace tiempo (sustitución, reducción o igualación); mientras que otros se decantan por utilizar métodos más novedosos y recientes, aprendidos en ese curso de 2º Bachillerato.

En cuanto a las equivocaciones cometidas por los alumnos en la resolución del sistema, la mayoría son debidas a errores técnicos (53,8%); principalmente, este alumnado comete errores de cálculo, lo que lleva también a que estos errores se deban a una falta de comprobación de la solución. Un ejemplo claro lo podemos observar en las Figura 5.11 y 5.12; en ambos casos, el alumno comete errores al restar números reales y a pesar de que el resultado no cumple el sistema, la propone como solución.

Handwritten work for Figure 5.11:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+1,5y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y=7-x \\ y=\frac{9-x}{1,5} \end{cases}$$

Calculation 1 (labeled 'Calculo x'):

$$7-x = \frac{9-x}{1,5}$$

$$10,5 - 1,5x = 9 - x$$

$$1,5 = 0,5x$$

$$x = 3$$

Calculation 2 (labeled 'Calculo y'):

$$y = 7 - 3$$

$$y = 5$$

FIGURA 5.11. EJEMPLO DE ERRORES TÉCNICOS EN LA RESOLUCIÓN

Handwritten work for Figure 5.12:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+1,5y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y=7-x \\ y=\frac{9-x}{1,5} \end{cases}$$

$$x + 1,5(7-x) = 9$$

$$x + 10,5 - 1,5x = 9$$

$$-0,5x = 9 - 10,5 \quad -0,5x = -1,5$$

$$x = 1$$

$$y = 7 - 1 = 6$$

FIGURA 5.12. EJEMPLO DE ERRORES TÉCNICOS EN LA RESOLUCIÓN

Además, hay que destacar que casi la mitad de estos errores técnicos han sido cometidos por aquellos alumnos que han decidido resolver el sistema por el método de reducción. (Figura 5.13)



$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + 1.5y = 9 \\ x + y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} x + 1.5y = 9 \\ -x - y = 7 \\ \hline 0.5y = 16 \\ y = \frac{16}{0.5} = 32 \end{array} \\
 & x + 32 = 7 \\
 & x = 32 - 7 \\
 & \boxed{x = 25}
 \end{aligned}$$

FIGURA 5.13 EJEMPLO DE ERRORES TÉCNICOS EN EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Por otro lado, del resto de los alumnos que han cometido errores en la resolución de sistemas, tres han utilizado mal los datos (Figura 5.14), uno ha cometido errores debidos a deformaciones en el Método de Gauss (Figura 5.15) y los dos restantes no han realizado este apartado.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + y = 7 \\ mx + 1.5y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -7 + x \\ 1.5x + 1.5(-7 + x) = 9 \end{cases} \quad m = 1. \\
 & 0.5x + y = 7 \rightarrow 1.5x + 1.5(-7 + x) = 9 \quad -0.75. \\
 & y = 7 - 0.5x \quad 1.5x + 10.5 + 1.5x = 9 \\
 & \boxed{y = 6.5} \text{ € cuestan las naranjas.} \quad 3x + 10.5 = 9 \\
 & \quad \quad \quad 3x = 9 + 10.5 \\
 & \quad \quad \quad x = \frac{19.5}{3} \\
 & \quad \quad \quad \boxed{x = 6.5} \text{ € cuestan las manzanas}
 \end{aligned}$$

FIGURA 5.14. EJEMPLO DE DATOS MAL UTILIZADOS EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + 1.5y = 9 \\ x + y = 7 \end{cases} \\
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1.5 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{-(F_1 + F_2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{0.5F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{array} \right) \\
 & Rg A = 1 < Rg A' = 2 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\
 & \text{MAL RESUELTO } \boxed{-0.75}
 \end{aligned}$$

FIGURA 5.15. EJEMPLO DE DEFORMACIONES DEL MÉTODO DE GAUSS

Finalmente, también se ha considerado oportuno destacar otra información observada en la resolución del sistema. A la pregunta del apartado b) “¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro?”, un 30% del alumnado responde “4 naranjas” en lugar de “4 kilogramos de naranjas”. Ha llamado la

atención puesto que se considera que un número elevado de alumnos comete esta equivocación. Se cree que este error es debido, principalmente, a una interpretación incorrecta del lenguaje, ya sea por no leer con atención el enunciado o por el empleo de la palabra “cantidad” en la pregunta.

6. Conclusiones e implicaciones educativas

Del análisis anteriormente descrito se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Un alto porcentaje del alumnado ha presentado problemas para resolver correcta y completamente un ejercicio sobre sistemas ecuaciones lineales con dos incógnitas, de no gran dificultad y previsible, dado el patrón que siguen los exámenes de esta prueba.
- Algunos alumnos ya han fallado en el planteamiento del sistema debido a una utilización incorrecta de los datos; probablemente por una lectura poco cuidadosa del enunciado, una falta de concentración y de comprobación de la respuesta.
- La discusión del sistema ha sido el procedimiento donde el alumnado ha presentado más errores. La mayoría de estos errores se deben a dos cosas: a) deficiencias en el cálculo de rangos; b) equivocaciones en el razonamiento. Estas causas quizás sean provocadas por una memorización de los procesos a realizar para discutir un sistema., en vez de un correcto aprendizaje de los mismos.
- Un porcentaje más elevado de lo esperado no resuelven correctamente el sistema, a pesar de ser de dos ecuaciones con dos incógnitas. Más de la mitad del alumnado que falla en este apartado comete errores en los cálculos y además, no verifica la solución; probablemente, por una falta de concentración y de costumbre, respectivamente.
- Un número elevado de alumnos no responde correctamente a algunas cuestiones debido a una incorrecta interpretación del enunciado. Esto puede ser porque el alumnado no hace una lectura cuidadosa o porque el enunciado no está formulado con claridad, como ocurre en el caso de la unicidad.



Teniendo en cuenta los resultados de este estudio y con el fin de solventar los errores encontrados, se proponen las siguientes actuaciones a desarrollar durante todo proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, siempre que sea posible:

- Fomentar la lectura cuidadosa y comprensiva de los enunciados; destacando también que éstos deben ser formulados con claridad, para que no lleven a una incorrecta interpretación.
- Enseñar los contenidos promoviendo un aprendizaje significativo y no memorístico. Siguiendo esta línea, se debe mejorar en la explicación del procedimiento para discutir un sistema; particularmente, en el cálculo de rangos.
- Inducir el razonamiento autónomo y el pensamiento crítico; ayudando a que el alumnado sea capaz de ver y aprender de sus errores.
- Insistir en la necesidad de que los procedimientos empleados lleven a un resultado coherente con el problema planteado; incidiendo sobre todo en la comprobación de la solución.

Finalmente, es necesario indicar las debilidades de este estudio; ya que se ha trabajado con una muestra relativamente pequeña y únicamente con un ejercicio tipo. Por tanto, como propuesta para dar continuidad a esta línea de investigación se sugiere realizar un estudio más amplio para analizar los errores que el alumnado comete en la Prueba de Acceso a la Universidad. Sería interesante poder tomar una muestra más amplia de exámenes y de ejercicios; pudiendo ser también ampliada a otros contenidos propios de esta prueba.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas, J. M. (2006). Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo, Universidad Nacional de Villa María, 2006 (Proyecto La articulación entre la Escuela Media y la Universidad: un camino posible para construir la “inclusión” de los estudiantes y mejorar las prácticas educativas).

Astolfi, J. P. (1999). El error un medio para enseñar. España. DIADA Editora SL. 1ra Edición.

Ausubel, D. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart y Winston.

Bachelard G. (1998). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in mathematics (Didactique des mathematiques, 1970-1990). (N. Balacheff & M. Cooper & R. Sutherland & V. Warfield, Trans.)

Bruner, J. S. (1963). The process of Education. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press.

Checa, A. N., & Martínez-Artero, R. N. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1).

Consejería de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Decreto 42/2015, de 10 de Junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato en el Principado de Asturias. *Boletín Oficial del Principado de Asturias*, 149.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias. *Boletín Oficial del Principado de Asturias*, 150.



Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 7.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Boletín de la SOAREM*, 6.

Garrote Sánchez, M., Hidalgo Carranza, M. J., & Blanco Nieto, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (46), 37-44.

Luengo, M. A. (2016). *Programación Docente, Evaluación y Metodología*. Material del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional. Facultad de Formación del Profesorado y Educación. Universidad de Oviedo (papers).

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, 169 – 546.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, (18), 3-14.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes. B. Greer, & G. Mulhern, G.(Eds.). *New directions in mathematics education*, 29-62.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 9, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Ramírez, G., Chavarría, J., Barahona, C., & Mora, M. (2014). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 10(1).



Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Ruano, R. M., Socas M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 311-322). Granada: Universidad de Granada.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Solaz, A. M. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio siglo XXI*, 32(1), 233-254.



ANEXO I: Calendario escolar 2015/2016. Principado de Asturias.

<p>SEPTIEMBRE</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30					<p>OCTUBRE</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		<p>NOVIEMBRE</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr> <tr><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30						
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																	
7	8	9	10	11	12	13																																																																																																																																	
14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																	
21	22	23	24	25	26	27																																																																																																																																	
28	29	30																																																																																																																																					
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
			1	2	3	4																																																																																																																																	
5	6	7	8	9	10	11																																																																																																																																	
12	13	14	15	16	17	18																																																																																																																																	
19	20	21	22	23	24	25																																																																																																																																	
26	27	28	29	30	31																																																																																																																																		
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
						1																																																																																																																																	
2	3	4	5	6	7	8																																																																																																																																	
9	10	11	12	13	14	15																																																																																																																																	
16	17	18	19	20	21	22																																																																																																																																	
23	24	25	26	27	28	29																																																																																																																																	
30																																																																																																																																							
<p>DICIEMBRE</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				<p>ENERO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	<p>FEBRERO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29												
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																	
7	8	9	10	11	12	13																																																																																																																																	
14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																	
21	22	23	24	25	26	27																																																																																																																																	
28	29	30	31																																																																																																																																				
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
				1	2	3																																																																																																																																	
4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																																	
11	12	13	14	15	16	17																																																																																																																																	
18	19	20	21	22	23	24																																																																																																																																	
25	26	27	28	29	30	31																																																																																																																																	
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																	
7	8	9	10	11	12	13																																																																																																																																	
14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																	
21	22	23	24	25	26	27																																																																																																																																	
28	29																																																																																																																																						
<p>MARZO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				<p>ABRIL</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		<p>MAYO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr> <tr><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																	
7	8	9	10	11	12	13																																																																																																																																	
14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																	
21	22	23	24	25	26	27																																																																																																																																	
28	29	30	31																																																																																																																																				
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
				1	2	3																																																																																																																																	
4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																																	
11	12	13	14	15	16	17																																																																																																																																	
18	19	20	21	22	23	24																																																																																																																																	
25	26	27	28	29	30																																																																																																																																		
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
						1																																																																																																																																	
2	3	4	5	6	7	8																																																																																																																																	
9	10	11	12	13	14	15																																																																																																																																	
16	17	18	19	20	21	22																																																																																																																																	
23	24	25	26	27	28	29																																																																																																																																	
30	31																																																																																																																																						
<p>JUNIO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr> <tr><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30				<p>JULIO</p> <table border="1"> <tr><th>L</th><th>M</th><th>M</th><th>J</th><th>V</th><th>S</th><th>D</th></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> </table>	L	M	M	J	V	S	D					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	 <p>educastur)))</p>																																																	
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
		1	2	3	4	5																																																																																																																																	
6	7	8	9	10	11	12																																																																																																																																	
13	14	15	16	17	18	19																																																																																																																																	
20	21	22	23	24	25	26																																																																																																																																	
27	28	29	30																																																																																																																																				
L	M	M	J	V	S	D																																																																																																																																	
				1	2	3																																																																																																																																	
4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																																	
11	12	13	14	15	16	17																																																																																																																																	
18	19	20	21	22	23	24																																																																																																																																	
25	26	27	28	29	30	31																																																																																																																																	

<p>Inicio de curso</p> <p>01-SEP Todas las enseñanzas</p>	<p>Inicio de clases</p> <p>10-SEP Inf+Prim+EE 15-SEP ESO+Bach+Art 23-SEP FP 01-OCT EPA 05-OCT Dep+EOI</p>	<p>Fin de clases</p> <p>27-MAY EOI 31-MAY Art Sup 21-JUN Inf+Prim+EE 24-JUN ESO+Bach+FP+EPA+ Art Elem-Prof+Dep</p>	<p>Fin de curso</p> <p>30-JUN Todas las enseñanzas</p> <p>15-JUL Art Sup</p>
<p>No lectivo</p> <p>20-NOV 08 y 09-FEB</p>	<p>Vacaciones</p> <p>24-DIC a 08-ENE 28-MAR a 01-ABR 01-JUL al inicio del curso 16-17</p>	<p>Festivo</p>	



ANEXO II: Resolución del ejercicio

Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y 1'5 euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

- a) Plante un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado.

SOLUCIÓN:

$$x = \text{kg de manzanas} \left(m \text{ €/kg} \right) \quad y = \text{kg de naranjas} \left(1'5 \text{ €/kg} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ mx + 1'5y = 9 \end{array} \right\}$$

¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

SOLUCIÓN 1: Método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ m & 1'5 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - mF_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1'5 - m & 9 - 7m \end{array} \right)$$

Si $1'5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1,5$. Obtendremos la siguiente matriz equivalente $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1'5 \end{array} \right)$, asociada a un Sistema Incompatible; es decir, que el sistema no tendría solución.

Por otro lado, si $m \neq 1,5$. Obtendremos una matriz escalonada equivalente asociada a un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, por tanto, estamos ante un Sistema Compatible Determinado; es decir, que tiene una solución única.

Conclusión: El sistema anterior tendrá solución para $m \neq 1,5$ y además será siempre única.



SOLUCIÓN 2: Teorema de Rouché – Frobenious

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ m & 1'5 & 9 \end{array} \right)$$

Para que tenga solución, es decir, para que el sistema sea compatible, según el Teorema de Rouché – Frobenious: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$

Podemos observar que el $\text{rang}(A') = 2$, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1'5 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$.

Luego, para que el sistema sea compatible $\text{rang}(A) = 2$, por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1'5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m - 1'5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1'5$$

Concluyendo, el sistema tendrá solución para $m \neq 1'5$ y además esta solución será única puesto que será un Sistema Compatible Determinado; ya que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 = n^{\circ} \text{ de incógnitas}$$

b) ¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro?

SOLUCIÓN:

Si el kilogramo de manzanas costase 1 euro, entonces $m = 1$; sustituyendo en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x + 1'5y = 9 \end{array} \right\}$$

Puesto que estamos ante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y considerándose el método más apropiado, se resuelve el sistema por reducción, pero puede utilizarse cualquier otro método.

$$\left. \begin{array}{l} -x - y = -7 \\ x + 1'5y = 9 \end{array} \right\}$$

$$\hline 0'5y = 2 \rightarrow y = 4$$

Por tanto, si el kilogramo de manzanas costase 1 euro, la persona habría comprado 4 kg de naranjas.

**ANEXO III: Plantilla creada para el registro de los errores observados**

PROCEDIMIENTO	CAUSA DEL ERROR / FRECUENCIA	OBSERVACIONES
Plantear el sistema	Datos mal utilizados: Interpretación incorrecta del lenguaje: Interferencias no válidas lógicamente: Teoremas o definiciones deformados: Falta de verificación en la solución: Errores técnicos:	
Discutir el sistema	Datos mal utilizados: Interpretación incorrecta del lenguaje: Interferencias no válidas lógicamente: Teoremas o definiciones deformados: Falta de verificación en la solución: Errores técnicos:	
Resolver el sistema	Datos mal utilizados: Interpretación incorrecta del lenguaje: Interferencias no válidas lógicamente: Teoremas o definiciones deformados: Falta de verificación en la solución: Errores técnicos:	

ANEXO IV: Examen PAU 2014/2015. Fase General. Matemáticas Aplicadas a las CC. SS.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. La puntuación de cada ejercicio es de 2'5 puntos.

OPCIÓN A

1. Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y $1'5$ euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro?

2. Unos grandes almacenes lanzan una campaña publicitaria con una oferta especial en dos de sus productos, ofreciendo el producto A a un precio de 100 euros y el producto B a 200 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 unidades del producto A y 10 unidades del producto B , queriendo vender al menos tantas unidades del producto A como del B . Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella para estos dos productos deben ser, al menos, de 600 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían vender 15 unidades de cada producto?

b) ¿Cuántas unidades de cada producto deben vender para maximizar sus ingresos?

3. El banco Ahorrando ha hecho un estudio sobre el tiempo (en minutos) que dedican sus empleados a los clientes en función de la edad y ha obtenido la siguiente función para clientes entre 18 y 70 años.



$$f(x) = \begin{cases} x^2/10 - 2x + 300, & \text{si } 18 \leq x \leq 50 \\ -x^2 + 134x - 3750, & \text{si } 50 < x \leq 70 \end{cases}$$

- a) Estudia y representa la función f . ¿Es continua para $x = 50$?
- b) ¿A qué edad los clientes requieren más tiempo de atención? ¿A qué edad requieren el menor tiempo?
-

4. El candidato A se presenta a unas elecciones. En un sondeo previo se preguntó a 500 personas seleccionadas al azar de la población de votantes y 265 de ellas manifestaron su intención de votar a dicho candidato A .

- a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el candidato A no va a sacar más del 50% de los votos, frente a la alternativa de que sí lo va a hacer.
- b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 3%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0.03) = 0.512$, $F(0.97) = 0.834$, $F(1.34) = 0.91$, $F(1.88) = 0.97$, $F(2.17) = 0.985$.)

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & -2 \\ m & m-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.
-

2. Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$. Se pide:

- a) Encontrar la función del coste total F , si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0) = 100$.



b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. Se sabe que en una ciudad el 50% de la población son hombres, el 30% de la población consume aceite de girasol y el 20% son hombres que consumen aceite de girasol. Se elige una persona al azar de dicha ciudad.

a) Si es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que consuma aceite de girasol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y consuma aceite de girasol?

4. Una empresa de suministros electrónicos ha publicitado ampliamente su negocio. El gerente de la misma espera que como resultado de dicha campaña publicitaria las ventas medias semanales pasen a ser mayores de los 7880 € que la empresa ingresó en el pasado. Para comprobar si esto es así, el gerente considera una muestra aleatoria de 36 semanas para las que la media de ventas ha sido de 8023 €. Se supone además que las ventas semanales de esta empresa siguen una distribución normal con una desviación típica de 286 €.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la publicidad no ha surtido efecto, frente a la alternativa de que sí lo ha hecho.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 1%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0.01) = 0.504$, $F(0.99) = 0.839$, $F(2.33) = 0.99$, $F(2.58) = 0.995$, $F(3) = 0.999$.)



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

1. a) Plantear el sistema: 0'75. Discutir el sistema: 1.

b) Resolver el sistema: 0'75.

2. a) Plantear las inecuaciones: 0'75. Representar la región factible: 0'75. Cuestión: 0'25.

b) 0'75.

3. a) Estudiar la función: 0'75. Representar la función: 0'25. Cuestión: 0'5

b) Cada cuestión: 0'5.

4. a) Plantear las hipótesis: 0'75.

b) 1'75.

OPCIÓN B

1. a) Plantear el sistema: 1.

b) Discutir el sistema: 1. Resolver el sistema: 0'5.

2. a) Calcular la primitiva: 0'75.

b) Estudiar la función: 0'75. Representar la función: 0'25. Calcular el área: 0'75.

3. a) 1'5.

b) 1.

4. a) Plantear las hipótesis: 0'75.

b) 1'75.
