

# Dimensionamiento de placas de acristalamiento para edificios mediante un modelo probabilístico de rotura

## *A probabilistic model for failure design of glass plates in buildings*

ALFONSO FERNÁNDEZ CANTELI, ISABEL VIÑA OLAY y  
ANTONIO BERNARDO SÁNCHEZ (Drs. Ingenieros)  
Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación,  
E.T.S. de Ingenieros Industriales. Universidad de Oviedo

Fecha de recepción: 12-IV-96  
Fecha de aceptación: 13-VI-96

ESPAÑA

### RESUMEN

*Se propone un modelo para el dimensionamiento a rotura de acristalamientos de vidrio, que, partiendo del estado tensional, obtenido mediante la teoría de placas con grandes deformaciones, y de la distribución empírica de defectos superficiales en el vidrio, utiliza criterios de Mecánica de la Fractura para predecir probabilísticamente la rotura. La validez del modelo ha podido ser contrastada experimentalmente en placas de diferentes espesores y con variadas relaciones geométricas.*

### SUMMARY

*A model for the design of glass plates to failure is presented, which, based on the theory of plates with gross deformations for the calculation of the stress state as well as on the empirical flaws statistical distribution in the glass surface, applies Fracture Mechanics criteria to establish a probabilistic prediction of failure. The validity of the model has been experimentally proved for plates with different thicknesses and geometric characteristics.*

### 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se acusa un notable incremento en la utilización de acristalamientos de vidrio como elemento principal, o, incluso único, de recubrimiento de fachadas en edificios singulares de oficinas, de instituciones públicas y de parques feriales, tecnológicos o industriales. En estas construcciones, las zonas acristaladas superan habitualmente el 50% de la superficie total lateral del inmueble, alcanzando en algunos casos la práctica totalidad de las fachadas (Fig. 1).

### 1. INTRODUCTION

*In recent years a noticeable increment in the use of glass plates as façade elements can be reported. These appear as the main or even unique element of cladding of exteriors of singular buildings for offices, public bodies, fairs and technological or industrial parks. Generally, the glass surfaces make up more than 50% of the exterior areas of the building, sometimes covering practically all of the façade (Fig. 1).*



Fig. 1.- Ejemplo de edificios con fachadas acristaladas en Madrid.

Fig. 1.- Example of building in Madrid with glass exterior.

Se constata, así, una tendencia arquitectónica que trata de explotar la estética, economía y espectacularidad de los acristalamientos de vidrio coloreado, que pasan a desempeñar una misión de envoltura o recubrimiento de carácter estructural, alternativa a la tradicional del vidrio, como elemento secundario de ventanales.

En la actualidad, el dimensionamiento de las placas de acristalamiento se realiza para el estado de servicio y con la ayuda de tablas, tales como las editadas por el Centro de Información Técnica de Aplicaciones del Vidrio (CITAV) (6), deducidas, a partir de la teoría lineal de placas, para el caso de bordes simplemente apoyados, y considerando una tensión admisible del vidrio de  $200 \text{ kg/cm}^2$  (20 Mpa). A partir de estas tablas, y para unas dimensiones geométricas dadas, se obtiene el espesor mínimo del acristalamiento, necesario para resistir la sobrecarga de viento, calculada según la norma correspondiente.

Este método está siendo cuestionado por una serie de razones, entre las que citaremos las siguientes:

- La teoría y experimentación demuestran, que la consideración de la teoría de primer orden para el cálculo de placas delgadas de vidrio no es consistente y que debe ser sustituida por la teoría de placas con grandes deformaciones.

- El cálculo basado en tensiones admisibles, presenta una serie de limitaciones, de sobra conocidas, por lo que debe ser sustituido por el método de estados límites, en este caso, de rotura.

*This could be referred to as an architectonic trend aimed at exploiting the aesthetic, economy and effect of coloured glass which takes on a structural function of envelope or cladding, as an alternative to the traditional glass plates, limited until now to a secondary role as glass plates for windows.*

*At present, the design of glass plates is carried out with the help of charts, such as the ones edited by the CITAV (Center for Technical Assessment on Glass Application) (6), which were derived making use of the lineal theory of plates with simply supported edges and considering an admissible stress for the glass of  $200 \text{ kg/cm}^2$  (20 Mpa). For given geometrical relations the glass charts give the minimal thickness necessary to withstand the wind loading, calculated from the corresponding standard.*

*This procedure is now being questioned due to a number of reasons, such as the following:*

- Both theory and experimental programmes show that the use of the 1st. order theory for the calculation of thin glass plates is not consistent. Consequently it has to be replaced by the theory for plates with large deflections.*

- The design based on admissible stresses lacks well known limitations and has to be substituted by limit state methods, in this particular case, by the ultimate one.*

- El método no está fundado en un análisis consecuentemente probabilístico, que tenga en cuenta el carácter aleatorio de los factores influyentes en la rotura, ni considera criterios de Mecánica de Fractura, a pesar de que la naturaleza frágil del vidrio, sin reserva práctica de ductilidad, así lo exige.

- De los dos apartados anteriores se deduce que las tablas actuales no garantizan una reserva de seguridad homogénea para las diferentes dimensiones, relaciones geométricas y espesores, de todas las placas factibles de ser consideradas en el diseño.

- El procedimiento de cálculo es específico y, por tanto, no aplicable a acristalamientos con otros tipos de vidrios, tales como vidrio láminas, o con otros sistemas de soporte, tales como el caso de apoyos puntuales, que parecen ser actualmente preferidos al sistema de fijación con junquillos.

Como consecuencia de lo anterior, el grupo de trabajo de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Gijón, conjuntamente con el C.I.D.A. (Centro de Investigación y Desarrollo de Avilés) de Cristalería Española S.A. se propusieron desarrollar un nuevo método de dimensionamiento de las placas de acristalamiento, basado en un concepto probabilístico, que garantizase un diseño económico y unos márgenes homogéneos de seguridad, en consonancia con los métodos empleados en el cálculo de elementos estructurales construidos con otros materiales, tales como acero, hormigón armado o madera. Ante la abundancia de elementos de acristalamiento, derivada del creciente número de edificios y del elevado número de elementos por edificio, el procedimiento de cálculo debe implicar la exclusión estadística, casi absoluta, de posibilidad de fallos, dada la potencial peligrosidad que conlleva una rotura de un elemento de fachada. Por ello, el modelo ha de estar fundamentado en una alta fiabilidad, tanto teórica como experimental.

A continuación, se presentan los fundamentos teóricos de un nuevo modelo para el cálculo de placas de vidrio en rotura, inspirado inicialmente en los trabajos de Beason y otros (2), con un enfoque alternativo en la determinación de la probabilidad de rotura y en la estimación de los parámetros que definen la distribución de defectos máximos en el vidrio, según la Teoría de Valores Extremos, con consideración de su orientación preferencial. Adicionalmente, se hace uso de un procedimiento sencillo para la caracterización del vidrio frente a la fractura. Los resultados de la experimentación avalan razonablemente el desarrollo teórico del modelo.

*-The method is not based on a consequently probabilistic failure analysis, which takes into account the random character of the factors influencing failure, nor does it consider criteria from Fracture Mechanics, despite the fact that the brittle nature of glass, exhibiting no real ductility reserve, demands this.*

*-From the above considerations, it follows that the charts in use do not guarantee a safety margin for the different dimensions, geometric relations and thicknesses for all the plates that might feasibly be considered in the design.*

*-The design procedure is specifically concerned with laminated glass, so that the results are not transferable to glazing made of other glass types, such as sandwich glass plates, nor for other support systems, as is the case of the single point supports, now apparently preferred to the traditional system with gaskets.*

*As a consequence of the above, the research group of Structural Mechanics and Materials of the Faculty for Industrial Engineering of Gijón, belonging to the University of Oviedo, together with the Research and Development Center of Cristalería Española in Avilés, Spain, aimed to develop a new design procedure for glass plates based on a probabilistic concept ensuring an economical design with homogeneous safety margins in accordance with the methods in use for other conventional materials, such as steel, reinforced concrete or wood. Since the number of glass plates is extremely high, due to the increasing number of glazed buildings and the high number of glass elements in each building, the design procedure under development should encompass the statistical exclusion of the possibility of failure of the glass plates, in order to avoid the danger implied by the rupture of a façade element. Due to this, the model must exhibit both high theoretical and experimental reliability.*

*In the following, the theoretical fundamentals of a new model for the design of glass plates to failure are presented. Although this has been initially inspired by the pioneer work of Beason et al. (2), an alternative approach is employed in the determination of the probability of failure and for the estimation of the parameter defining the statistical distribution of the maximal glass flaws size according to Extreme Value Theory, taking into account their preferential orientation. Furthermore, a simple procedure for characterization of the glass to failure is considered. The experimental results reasonably support the theoretical basis of the model.*

## 2. PLANTEAMIENTO PROBABILÍSTICO

La imposibilidad de determinar el estado tensional realmente existente en una placa de vidrio, debido a la presencia de tensiones residuales que se crean en el proceso de fabricación y enfriamiento, junto a la obligada necesidad de considerar la concentración de tensiones por la consiguiente aparición de defectos microscópicos superficiales, o microfisuras (8), desaconsejan el empleo del cálculo elástico convencional. Si a esto se añade la naturaleza aleatoria del proceso de rotura, tanto desde el lado de las cargas, como desde el lado de las resistencias, y el comportamiento elástico-lineal, prácticamente ideal, del vidrio, se comprende la conveniencia de plantear un modelo de cálculo probabilístico de rotura, basado en la Mecánica la Fractura elástica-lineal. El desarrollo del modelo comprende las siguientes etapas:

- Cálculo determinista de las tensiones en la placa, a partir de un modelo no-lineal, debido a una "carga característica" (por ejemplo, correspondiente al 5% de probabilidad de no ser superada durante la vida estimada de la placa), que puede ser transformada en "carga de cálculo", mediante la aplicación del oportuno coeficiente de mayoración.
- Caracterización del comportamiento a rotura del material, mediante la determinación experimental de un valor característico de la tenacidad a fractura  $K_{Ic}$  (por ejemplo, a través de ensayos de indentación).
- Determinación indirecta de la función de distribución del tamaño máximo de las microfisuras superficiales del vidrio, por medio de ensayos de rotura en flexión de pequeñas vigas de vidrio. Se podría contemplar la posibilidad de introducir un factor de mayoración para representar la evolución del aumento del tamaño de defectos en el tiempo.
- Consideración de la orientación preferencial de fisuras, al constatarse que la distribución aleatoria de defectos superficiales no es isotropa.
- Modelo de rotura, que incluya el cálculo del tamaño crítico del defecto causante de la rotura, a partir de la distribución probabilística de defectos superficiales máximos, y de la consideración de las componentes normal y tangencial de las tensiones, que actúan sobre la fisura. Ello implica la posibilidad de rotura en modo mixto I y II y, por tanto, la necesidad de elaboración del correspondiente diagrama de interacción.
- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de rotura en cada una de las cuadrículas de la malla discreta, en la que imaginariamente se divide la placa para el cálculo

## 2. PROBABILISTIC APPROACH

*The stress state that really exists in a glass plate cannot be determined, due to the presence of residual stresses that arise during the manufacturing and cooling processes, that result in the creation of superficial microscopics flaws or microcracks (8). This leads to the need to consider the stress concentration and thus advises against the use of conventional elastic design of glass plates. If we add to this the random nature of the failure process, both from the loading side and from the resistance side, as well as the almost ideal linear-elastic behaviour of the glass, we can see the convenience of proposing a model for a probabilistic failure design, based on the linear-elastic Fracture Mechanics. The development of this model comprises the following steps:*

- Deterministic assessment by means of a non-linear model of the plate stress state which is induced by a "characteristic loading" - for instance, corresponding to 5% probability of this loading not being surpassed during the expected life of the plate - which may be converted to a "design loading" through the subsequent application of the magnification load factor.*
- Characterization of the failure behaviour of the material, through the experimental determination of a representative value of the fracture toughness  $K_{Ic}$  (say by indentation tests).*
- Indirect characterization of the cumulative distribution function (c.d.f.) of the maximal crack size, by means of bending failure tests on small-sized glass beams as well as the possibility of considering a magnification factor in order to take into account the evolution of the increasing size of the glass cracks with time.*
- Consideration of the preferential orientation of the cracks, once the random crack distribution has been found to be non-isotropic.*
- A failure model including the calculation of the critical crack size leading to failure from the probabilistic distribution of maximal surface cracks under consideration of the normal and shear stresses acting on the crack. This implies the possibility of failure in mixed mode I-II, and hence the necessity of deducing the corresponding interaction diagram.*
- Calculation of the probability of occurrence of failure in each of the elements of the discrete mesh, in which the plate has been hypothetically divided for stress*

de tensiones, considerando el estado tensional representativo de la cuadrícula, la distribución de defectos máximos y la tenacidad a fractura, y procediendo a continuación a una integración extendida a toda la superficie de la placa.

De lo anterior se deduce que, al ser el estado tensional función de punto y la distribución de defectos máximos aleatoria, la rotura no se producirá, en principio, ni donde el estado tensional sea más desfavorable (tensiones máximas, o tensión de comparación máxima), ni donde el defecto real existente sea máximo, sino donde la combinación del tamaño de fisura, estado tensional y orientación relativa sea crítica.

### 3. CÁLCULO TENSIONAL

Consideraremos una placa rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$  y de espesor  $t$  sometida a una carga lateral uniforme de valor  $q$  por unidad de área, que representa una placa de acristalamiento bajo la acción del viento (Fig. 2).

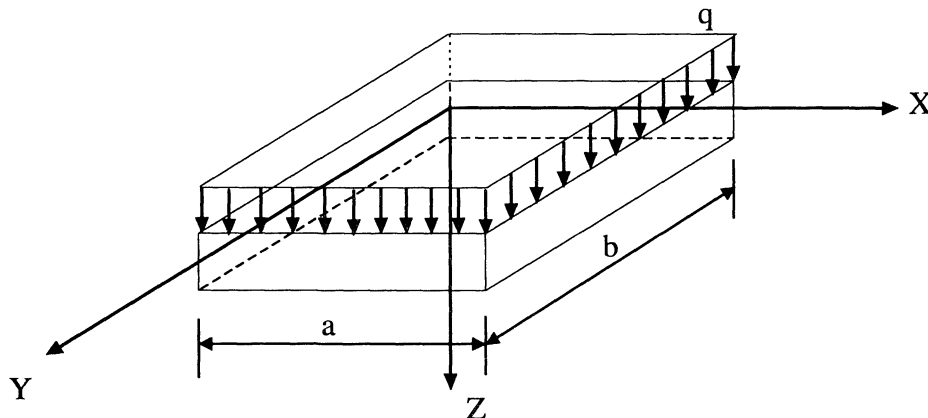


Fig. 2.- Placa de vidrio de dimensiones  $a \cdot b$ , de espesor  $t$ , sometida a una carga transversal  $q$  por unidad de área.

Fig. 2.- Glass plate with sides  $a \cdot b$ , and thickness  $t$ , under a transversal loading  $q$  per unit of area.

Las deformaciones que experimentan las placas de vidrio, sometidas a cargas de uso, pueden encuadrarse en la categoría de grandes flechas, lo que implica la aparición de tensiones de membrana junto a las tensiones de placa, únicas consideradas en la teoría lineal. Bajo estas condiciones, procede la aplicación de la teoría no-lineal de placas, cuyo desarrollo conduce a las ecuaciones de von Kármán:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{t}{D} \left\{ \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta y} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\}$$

$$\nabla^4 \Phi = E \left[ \left\{ \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\} - \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right]$$

calculation purposes. In doing this, account will be taken of the representative stress state, distribution of the maximal flaws and fracture toughness, thereafter extending integration to the whole surface of the plate.

Taking into account the fact that the stress state is a function of the position and the random nature of the distribution of maximal flaws, it follows that failure will not arise, in principle, neither where the stress state is the most detrimental (maximal stresses or maximal comparison stress) nor where the actual existing flaw is maximal, but where the combined effect of the crack size, stress state and relative orientation is critical.

### 3. STRESS CALCULATION

In the following section we will consider a rectangular plate with sides  $a$  and  $b$  and thickness  $t$ , under lateral uniform loading with value  $q$  per unit of area, that represents a glass plate under wind action (Fig. 2).

The deflections experienced by glass plates under service loading can be defined as large deformations, which cause the presence of membrane stresses besides the bending stresses, the only ones considered in the linear theory. Therefore, the theory of non-linear plates applies in this case, the development of which leads to the von Kármán equations:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{t}{D} \left\{ \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta y} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\}$$

$$\nabla^4 \Phi = E \left[ \left\{ \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\} - \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right]$$

en las que  $w$  es la flecha,  $\Phi$  es la función de Airy,  $E$  es el módulo de Young del vidrio y  $D$  es la rigidez a flexión de la placa, dada por:

$$D = \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)}$$

siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

Con el fin de obtener una solución normalizada, se adimensionalizan las ecuaciones de von Kármán mediante las transformaciones siguientes:

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{ab}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{ab}}, \quad W = \frac{w}{t}, \quad \Psi = \frac{\Phi}{Et^2}$$

La solución de las ecuaciones de von Kármán puede obtenerse mediante aplicación de métodos numéricos (elementos finitos, diferencias finitas, etc.), previa discretización de la placa en cuadrículas suficientemente pequeñas de tamaño  $\Delta x \Delta y$ , en las que las tensiones de su punto central son representativas de toda la cuadrícula. En el caso presente, y dado que las placas de acristalamientos son habitualmente rectangulares, y que los bordes se pueden considerar, con suficiente aproximación, como simplemente apoyados, según prueban los estudios previos de Anians (1), se considera ventajosa la aplicación del método de Galerkin, como caso particular del de los residuos ponderales, en el que las soluciones aproximadas vienen dadas por las expresiones:

$$W \cong W^* = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} N_w$$

$$\Psi \cong \Psi^* = \sum_{K=2,4,\dots} \sum_{I=2,4,\dots} \Psi_{KI} (1 - N_{\psi} \cos \alpha_K \zeta) (1 - \cos \beta_I \eta)$$

en las que  $W_{mn}$  y  $\Psi_{KI}$  son los parámetros ajustables a determinar y  $N_w$  y  $N_{\psi}$  las funciones de prueba, dadas por:

$$N_w = \left[ \text{sen} \frac{m\pi}{\sqrt{a/b}} \zeta \right] \left[ \text{sen} \frac{n\pi}{\sqrt{b/a}} \eta \right]$$

$$N_{\psi} = \left[ 1 - \cos \frac{k\pi}{\sqrt{a/b}} \zeta \right] \left[ 1 - \cos \frac{l\pi}{\sqrt{b/a}} \eta \right]$$

Al sustituir estas soluciones aproximadas en las ecuaciones diferenciales de partida, aparece un residuo, que se anula, en el sentido de error promediado, utilizando como funciones de ponderación las propias funciones de prueba. Se obtienen de esta manera dos sistemas de ecuaciones cuya solución permite conocer el valor de los parámetros ajustables  $W_{mn}$  y  $\Psi_{KI}$ .

El modelo fue validado experimentalmente, a través de la comprobación de flechas, con ayuda de relojes

In which  $w$  are deflections,  $\Phi$  is Airy's function,  $E$  is Young's modulus and  $D$  is the flexural rigidity of the plate, given by:

$$D = \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)}$$

where  $\nu$  is the Poisson's ratio.

In order to obtain a normalized solution, the von Kármán equations become dimensionless by means of the transformation:

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{ab}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{ab}}, \quad W = \frac{w}{t}, \quad \Psi = \frac{\Phi}{Et^2}$$

The solution of the von Kármán equations may be achieved by applying numerical techniques (finite elements, finite differences, etc.) after discretization of the plate in to sufficiently small elements of size  $\Delta x \Delta y$ , so that the stress of the mid-point of the element can be considered representative for all the points of the element. In the present case, due to the fact that the glass plates in the façades are usually rectangular, and that they can be considered, with sufficient accuracy, as simply supported on the edges, as follows from the previous research of Anians (1), the Galerkin approach - a particular case of the weighted residual method - can be considered as advantageous. In said approach, the approximated solutions are given by:

$$W \cong W^* = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} N_w$$

$$\Psi \cong \Psi^* = \sum_{K=2,4,\dots} \sum_{I=2,4,\dots} \Psi_{KI} (1 - N_{\psi} \cos \alpha_K \zeta) (1 - \cos \beta_I \eta)$$

where  $W_{mn}$  and  $\Psi_{KI}$  are the adjustable parameters to be determined and  $N_w$  and  $N_{\psi}$  are the trial functions given by:

$$N_w = \left[ \text{sen} \frac{m\pi}{\sqrt{a/b}} \zeta \right] \left[ \text{sen} \frac{n\pi}{\sqrt{b/a}} \eta \right]$$

$$N_{\psi} = \left[ 1 - \cos \frac{k\pi}{\sqrt{a/b}} \zeta \right] \left[ 1 - \cos \frac{l\pi}{\sqrt{b/a}} \eta \right]$$

Substitution of these approximated solutions into the differential equations yields a residual, which can be cancelled, in the sense of averaged error over the whole domain, using the trial functions themselves as weighting functions. From this, two systems of equations are obtained whose solution allows us to ascertain the value of the adjustable parameters  $W_{mn}$  and  $\Psi_{KI}$ .

The model has been experimentally validated through measurement of deflections, by means of displacement

comparadores, y de tensiones, por medio de técnicas extensométricas (10). Como alternativa al método de Galérkin, aquí utilizado, se puede acudir a un programa comercial de elementos finitos para cálculo de placas según la teoría de segundo orden.

#### 4. CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL VIDRIO

La tenacidad a fractura,  $K_{Ic}$ , caracteriza el comportamiento a rotura del vidrio, al ser éste un material elástico, frágil y con presencia de defectos o microfisuras superficiales. Entre las diferentes técnicas que se tienen a disposición para la determinación experimental de la tenacidad a fractura, se eligió, por razones de fiabilidad, sencillez de ejecución del ensayo, mínima preparación de las probetas y bajo coste, la de "indentación", consistente en la realización de un ensayo de dureza Vickers, con posterior medida de las huellas radiales,  $C$ , (Fig. 3).

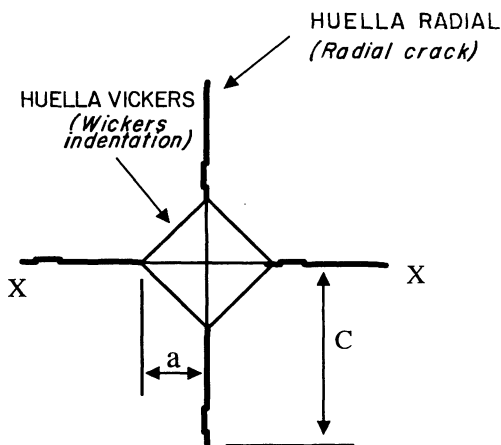


Fig. 3.- Huella del ensayo de indentación.

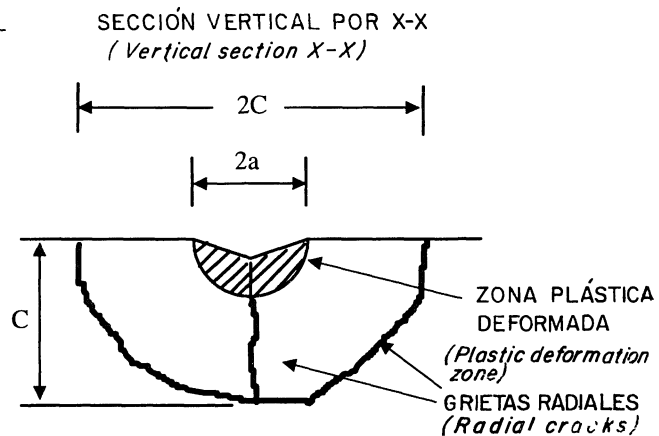


Fig. 3.- Trace in the indentation test.

La tenacidad a fractura viene dada por la expresión empírica siguiente, propuesta por Moya y Miranzo (9):

$$\frac{K_{Ic}}{H\sqrt{a}} [f(E/H)]^{-1} = \begin{cases} 0,09 (C/a)^{-1,145} & \text{si } C/a \geq 2,8 \\ 0,09 (C/a)^{-0,5} & \text{si } C/a < 2,8 \end{cases}$$

donde  $f(E/H) = \frac{1}{1-m_r} \left[ \frac{\beta^2}{\Delta} - 1,5 \right]$

en la que  $E$  y  $H$  son, respectivamente, el módulo elástico y la dureza Vickers del material,  $\beta$  y  $\Delta$  son dos parámetros derivados de la relación entre el radio

transducers, and the calculation of stresses by means of extensometric techniques (10). As an alternative to the Galérkin method, herein proposed, it is possible to use a commercial F.E.M. programme which employs the non-linear theory for plates.

#### 4. MECHANICAL CHARACTERIZATION OF THE GLASS

Glass failure is controlled by the fracture toughness,  $K_{Ic}$ , since glass is an elastic, brittle material, with the presence of superficial flaws or microcracks. Among the possible techniques at ones disposal for the experimental determination of the fracture toughness of the glass, that of "indentation" has been chosen for the sake of its reliability, ease in test execution, minimal preparation of the specimens and low cost. This consists of performing a Vickers hardness test, with subsequent measurement of the radial crack,  $C$ , (Fig. 3)

The fracture toughness is given by the following empirical relation, proposed by Moya and Miranzo (9):

$$\frac{K_{Ic}}{H\sqrt{a}} [f(E/H)]^{-1} = \begin{cases} 0,09 (C/a)^{-1,145} & \text{if } C/a \geq 2.8 \\ 0,09 (C/a)^{-0,5} & \text{if } C/a < 2.8 \end{cases}$$

where  $f(E/H) = \frac{1}{1-m_r} \left[ \frac{\beta^2}{\Delta} - 1.5 \right]$

in which  $E$  and  $H$  are, respectively, the Young modulus and the Vickers hardness of the material,  $\beta$  and  $\Delta$  are two parameters related to the ratio between the radius

de la zona deformada y el tamaño de la huella, y  $m_r$  recoge la influencia de las tensiones residuales que aparecen tras la creación de la superficie libre.

Una vez realizada la experimentación, se calcula un valor característico de la tenacidad a fractura, que puede corresponder, por ejemplo, a la mediana, o al 5% de probabilidad de no ser superado.

## 5. MODELO DE ROTURA

La rotura del vidrio se produce físicamente cuando un defecto superficial, situado en las coordenadas  $(x,y)$ , alcanza su tamaño crítico  $a^*(x,y;q;\theta)$ , dependiente del particular caso tensional presente en la fisura, debido a la carga  $q$ , y de la orientación de ésta.

Partiendo de la premisa cierta de que la tensión de compresión no es capaz de producir rotura para los niveles de carga,  $q$ , aquí contemplados, la relación entre el tamaño crítico de defecto  $a^*$  y la tensión de tracción actuante, en modo I, viene expresada por (7):

$$a^* = \frac{K_{lc}^2}{\pi f_1^2 \sigma_1^2}$$

en la que  $f_1$ , es una constante asociada a la geometría de la placa y al tipo de entalla.

Cuando actúan simultáneamente una tensión de tracción normal al defecto y una tensión tangencial en el propio plano de fisura, es decir, sollicitación en modo mixto I-II, la expresión del tamaño crítico de defecto resulta ser (3):

$$a^* = \frac{K_{lc}^2}{\pi \left( f_1^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{0,64} f_2^2 \sigma_{II}^2 \right)}$$

En el caso que nos ocupa, se suponen fisuras elípticas de tamaño y profundidad despreciable frente al espesor de la placa. Esta hipótesis arbitraria, aunque razonable, no tiene trascendencia en el cálculo que de aquí se deriva, ya que, teóricamente, se podría acudir a una función de distribución de defectos máximos "acoplada", independiente de la forma de defecto, y manteniendo en todo momento el producto  $a^*f_1^2$  acoplado.

El planteamiento probabilístico permite plantear las condiciones de rotura, sin que se conozcan "a priori" ni el tamaño de defecto, ni su orientación.

Para el caso de grieta superficial elíptica los coeficientes  $f_1$  y  $f_2$  toman la forma (3):

$$f_1 = 1,12 \frac{1}{\pi}; f_2 = 1,15 \frac{4}{\pi(2-\nu)}$$

of the deformed zone and the size of the trace. Finally,  $m_r$  reproduces the influence of the residual stresses appearing after the creation of the free surface.

As soon as the experimental work is completed, a characteristic value of the fracture toughness is calculated. This may correspond to the median or to the 5% of probability not being surpassed.

## 5. FRACTURE MODEL

Glass failure occurs physically when a superficial flaw, located at the coordinates  $(x, y)$  reaches its critical size  $a^*(x,y;q;\theta)$ , which depends on the particular stress state present in the crack, due to the loading  $q$ , and its orientation.

Taking for granted the premise, experimentally justified, that compression stress is not capable of causing failure for the loading  $q$  associated to the levels considered here, the relation between the critical crack size,  $a^*$ , and the acting tension stress in mode I, is given by (7):

$$a^* = \frac{K_{lc}^2}{\pi f_1^2 \sigma_1^2}$$

in which  $f_1$  is a constant associated with the geometry of the plate and with the crack shape.

When a tension stress, normal to the crack, and a shear stress in the selfsame plane of the crack act simultaneously, i. e., in a mixed mode I-II, the expression of the critical crack size becomes (3):

$$a^* = \frac{K_{lc}^2}{\pi \left( f_1^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{0,64} f_2^2 \sigma_{II}^2 \right)}$$

In the present case, elliptically shaped cracks of negligible length and depth compared to the thickness of the plate are considered. This arbitrary, although reasonable, hypothesis has no influence on the computation derived herein, since it could be possible theoretically to use a cumulative distribution function for "coupled" maximal cracks, independent of the flaw shape, but maintaining through all the calculation process the coupled product  $a^*f_1^2$ .

The probabilistic approach allows us to establish the failure requirements without the flaw or crack size and the orientation being known in advance.

For the case of a superficial elliptic shaped crack the coefficients  $f_1$  and  $f_2$  are (3):

$$f_1 = 1,12 \frac{1}{\pi}; f_2 = 1,15 \frac{4}{\pi(2-\nu)}$$



Una vez definida la expresión del tamaño crítico y tras proceder a la discretización de la placa, considerando un número finito de elementos pequeños, de tamaño  $\Delta x \Delta y$ , en los que se supone imaginariamente dividida aquélla, y su caracterización mediante las coordenadas y la tensión de su punto central, se procede al cálculo de la probabilidad de rotura correspondiente a un elemento, admitiendo una única fisura "crítica" en él.

La probabilidad de que se produzca la rotura de la placa en uno de esos elementos, excluyendo la rotura en todos los restantes, viene dada por la función de probabilidad (3):

$$P(R=1) = \frac{1}{mn} \sum_{c=1}^{c=m} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} (1 - F_{a\theta_i}(a^*_{\theta_i})) \right]_c$$

donde,  $m$  es el número de celdillas o elementos,  $n$  es el número discreto de posibles orientaciones consideradas, que dan lugar, en principio, a diferentes funciones de distribución (f.d.d.) del tamaño máximo de fisura,  $F_{a\theta_i}(a^*_{\theta_i})$  es la f.d.d. de defectos críticos, que representa la probabilidad de que, para las condiciones tensionales del elemento, la fisura existente sea menor que la crítica en un sector de orientaciones, caracterizado por su ángulo central  $\theta_i$ . En el caso ideal, se conocería la función tridimensional de la función de densidad de defectos máximos, en función de la orientación, de la que se deduciría la probabilidad de rotura.

## 6. DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE DEFECTOS MÁXIMOS

Por consideraciones de la teoría estadística de valores extremos (4), avaladas por la experimentación, se puede suponer que, en un elemento de placa, el tamaño máximo de las microfisuras superficiales,  $a$ , sigue una distribución de Gumbel de máximos definida por la expresión:

$$G(a) = \exp \left\{ -\exp \left[ \frac{\lambda - a}{\delta} \right] \right\} \text{ para } -\infty < a < \infty ; \delta > 0$$

en la que  $\lambda$  y  $\delta$  son los parámetros de escala y de forma respectivamente, a determinar por vía experimental. En el presente caso, la estimación de los parámetros se realizó a partir de ensayos a rotura por flexión en tres puntos, con vigas de vidrio de  $600 \times 100 \text{ mm}^2$  y de espesor  $e = 5,85 \text{ mm}$ , en los que se anotó la carga de rotura y la localización de ésta. Este procedimiento presenta ventajas, frente a la experimentación directa con placas de vidrio, por su fácil ejecución, así como por la determinación directa de la tensión de rotura en la fisura crítica, a partir de la carga externa de rotura y

Once the expression related to the critical crack size has been defined, the discretization of the plate into a finite number of small elements of area  $\Delta x \Delta y$  in which the plate is hypothetically divided, is undertaken, the characterization of said elements by means of the coordinates of the mid-point and its stress state, allows us to calculate the probability of failure for a single element containing a unique critical crack.

The probability that a failure in the plate occurs in one of these elements, excluding the occurrence in all the remaining ones, is given by the probability function (3):

$$P(R=1) = \frac{1}{mn} \sum_{c=1}^{c=m} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} (1 - F_{a\theta_i}(a^*_{\theta_i})) \right]_c$$

where  $m$  is the number of the cells or elements,  $n$  is the discrete number of possible orientations to be considered, which in principle yield different cumulative distribution functions (c.d.f.) of the maximal crack size,  $F_{a\theta_i}(a^*_{\theta_i})$  is the c.d.f. of the critical flaws, representing the probability that, for a given stress state in the element, the existing crack would be less than the critical one in a certain sector of orientations, characterized by its central angle  $\theta_i$ . In the ideal case, an attempt would be made to ascertain the three-dimensional function of the probability density function of the maximal flaws as a function of the orientation, from which the probability of failure could be derived.

## 6. DEDUCTION OF THE DISTRIBUTION FUNCTION FOR THE MAXIMAL CRACKS

Based on Extreme Value Theory considerations (4), ratified by experimentation, it may be assumed that in an element of the plate the maximal size of the superficial microcracks,  $a$ , follows a Gumbel distribution for maxima, defined by the expression:

$$G(a) = \exp \left\{ -\exp \left[ \frac{\lambda - a}{\delta} \right] \right\} \text{ para } -\infty < a < \infty ; \delta > 0$$

in which  $\lambda$  and  $\delta$  are, respectively, the scale and shape parameter to be determined experimentally. In the present case, the estimation of the parameter followed from three-point bending tests to failure, using glass beams, 600 mm length, 100 mm wide, 5.85 mm thick, in which the failure loading and its location were noted down. This procedure presents some advantages compared with direct experimentation on glass plates, since its execution is simpler, and the determination of the failure stress follows directly from the acting external failure loading and additional consideration

de la localización de la misma. Con ello es posible un cálculo inmediato de los tamaños críticos de fisura en cada ensayo, a partir de los cuales se deduce fácilmente la ley de defectos.

Ante la práctica imposibilidad de determinar la orientación de la microfisura determinante de la rotura y, por consiguiente, el tamaño asociado de la misma, se recurrió a un método alternativo, consistente en suponer, simplifícadamente, que la microfisura determinante de la rotura real queda sustituida por una "microfisura equivalente", orientada perpendicularmente al eje de la viga. Se postula, así, una rotura en modo I, de la que resulta el mínimo tamaño crítico de defecto. A partir del momento flector y de la expresión presentada en el apartado 5, se obtiene el valor del tamaño crítico de la microfisura equivalente para cada ensayo:

$$a^*(x,q) = 0,0695e^4K_{Ic}^2/q^2x^2$$

en la que  $x$  es la distancia de la localización de la rotura hasta el apoyo. A partir de las  $a^*$ , se deduce la f.d.d. de defectos máximos, con los que aparece acoplada la orientación. Por esta razón, los ensayos se repitieron con vigas cortadas, según diferentes orientaciones, con el fin de determinar los parámetros estadísticos de las respectivas funciones acopladas de distribución de defectos, confirmándose así la orientación preferencial de las microfisuras superficiales. Los resultados obtenidos para las diferentes orientaciones aparecen recogidos en la Tabla I.

Como la f.d.d. buscada debe quedar referida a un área determinada (influencia del tamaño), se consideraron solamente los resultados obtenidos para los casos de roturas situadas en un entorno de  $\pm 10$  mm del centro teórico de la viga. Con ello se pretendió adoptar un

of its location. Accordingly, the critical crack size for each test could be easily calculated, and the flaws law consequently deduced.

Due to the practical impossibility of determining the orientation of the microcrack leading to failure, and therefore of knowing its associated size, an alternative method is needed, consisting of assuming in a simplified manner that the microcrack causing real failure would be replaced by an "equivalent microcrack", oriented transversal to the glass beam axis. A failure in mode I would be assumed here, from which the minimal critical crack size results. Using the bending moment and the expression proposed in section 5, a value for the critical equivalent microcrack size for every test is obtained:

$$a^*(x,q) = 0,0695e^4K_{Ic}^2/q^2x^2$$

in which  $x$  is the distance of the failure location to the support. The c.d.f. for the maximal flaws, which, incidentally, are coupled with the orientation, can be so deduced from  $a^*$ . For this reason, the tests were applied using beams cut at different orientations with the aim of determining the parameters of the respective coupled c.d.fs. This confirmed preferential orientations for the superficial microcracks. The results obtained for different orientations are presented in Table I.

Since the desired c.d.f. is to be related to a determined area - size effect -, only the results obtained for the cases in which failures were located in a range of  $\pm 10$  mm from the central axis of the beam have been considered. The intention here was to find a

TABLA I (TABLE I)

Valores de los parámetros de Gumbel en la función de defectos máximos para diferentes orientaciones

Values of the Gumbel parameters as a function of the maximal flaw sizes for different orientations

$\theta$	$\lambda$	$\delta$
0°	0,04686	0,01711
30°	0,06386	0,02073
45°	0,06974	0,02146
60°	0,06981	0,02850
90°	0,06627	0,02764

compromiso entre un número de ensayos, razonablemente alto, y un área de referencia, suficientemente pequeña. Para futuros programas se prevé realizar ensayos de flexión a cuatro puntos, en lugar de a tres puntos, lo que mejorará la fiabilidad de la f.d.d. de defectos máximos, al aumentar considerablemente la zona de la viga para la que el momento flector es máximo y constante (todo el tercio central).

Deducidos los parámetros de la distribución de Gumbel para el área de referencia en el ensayo,  $G_{a\theta_i}(a)$ , por ejemplo, mediante un programa de evaluación estadística (5), la conversión hacia la f.d.d. de defectos máximos,  $F_{a\theta_i}(a)$ , para una cuadrícula de área  $\Delta x \Delta y$ , es ahora inmediata:

$$F_{a\theta_i}(a) = G_{a\theta_i}(a)^{\Delta x \Delta y}$$

## 7. CONTRASTE EXPERIMENTAL

Con el fin de comprobar la validez del modelo teórico, el Centro de Investigación y Desarrollo de Avilés (CIDA) de Cristalería Española S.A. realizó ensayos a rotura con acristalamientos de diferentes dimensiones, relaciones geométricas y espesores, según se especifica:

- (1). 2.000 x 2.000 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (2). 2.000 x 1.600 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (3). 2.000 x 1.330 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (4). 2.000 x 1.000 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (5). 2.000 x 2.000 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (6). 2.000 x 1.600 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (7). 2.000 x 1.330 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (8). 2.000 x 1.000 x 3,9 mm<sup>3</sup>

Para ello se utilizó un bastidor, preparado al efecto, en el que se ensayaban dos placas simultáneamente, sometiénolas a una presión neumática lateral que garantizaba la uniformidad de la carga, y cuya magnitud en el momento de la rotura quedaba registrada.

En la Tabla II se recogen, los resultados de las cargas de rotura para las placas ensayadas, mientras que la Tabla III permite comparar los resultados de la carga de rotura en N/mm<sup>2</sup>, correspondientes a los ensayos realizados para los ocho tipos de placas empleadas, con los resultados predichos a partir del modelo teórico, para diferentes probabilidades de rotura ( $P = 0,05, 0,25, 0,50, 0,75$ ). Los valores experimentales de las cargas de rotura se obtuvieron mediante ajuste de una

*compromise between the reasonably high number of tests and a sufficiently small reference surface. For future experimental programmes, it is considered advisable to carry out four-point bending tests, instead of three-point ones, which will improve the reliability of the c.d.f. for the maximal crack size, due to considerably increasing the beam zone in which the bending moment is maximal and constant, i.e. all the central third part.*

*Once the parameters of the Gumbel distribution,  $G_{a\theta_i}(a)$ , are deduced from the tests for the reference area, for instance, by means of a program for statistical evaluation (5), the conversion to the c.d.f. of maximal crack size,  $F_{a\theta_i}(a)$ , for an element of area  $\Delta x \Delta y$  is now straightforward:*

$$F_{a\theta_i}(a) = G_{a\theta_i}(a)^{\Delta x \Delta y}$$

## 7. EXPERIMENTAL CONTRAST

*With the aim of testing the validity of the theoretical model, the CIDA (Center for Research and Development in Avilés) of Cristalería Española S.A. carried out failure tests on glass plates with different dimensions, geometrical relations and thicknesses, as follows:*

- (1). 2.000 x 2.000 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (2). 2.000 x 1.600 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (3). 2.000 x 1.330 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (4). 2.000 x 1.000 x 5,9 mm<sup>3</sup>
- (5). 2.000 x 2.000 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (6). 2.000 x 1.600 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (7). 2.000 x 1.330 x 3,9 mm<sup>3</sup>
- (8). 2.000 x 1.000 x 3,9 mm<sup>3</sup>

*A test frame, specifically designed for the occasion, was used for the tests. Two glass plates could be simultaneously loaded employing lateral pneumatic pressure, which ensured the intensity and uniformity of the load. Said intensity was registered when failure occurred.*

*Table II presents the results of the failure load for the tested plates, whilst Table III allows us to compare the results for the failure load in N/mm<sup>2</sup> obtained from the tests performed using the eight different types of plates tested with the results predicted with the theoretical model for different probabilities of failure ( $P = 0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ ). The experimental values of the failure load were deduced through adjustment of a Weibull distribution. For a probability of failure,*

TABLA II (TABLE II)

Valores de las cargas de rotura para las placas ensayadas en N/m<sup>2</sup>  
(Values of the failure loads in N/m<sup>2</sup> for the tested glass plates)

1	2	3	4	5	6	7	8
3.067	3.195	3.734	4.528	1.862	1.862	1.470	4.263
3.734	3.332	2.401	3.861	1.597	1.735	2.666	4.126
3.067	2.528	4.528	5.331	1.862	2.528	2.666	5.067
3.195	3.332	3.734	6.399	1.735	1.597	3.067	7.595
3.067	3.195	3.734	5.067	1.735	2.803	1.862	5.067
2.136	2.930	3.734	6.527	1.735	1.597	2.930	4.126
3.195	2.264	3.734	5.998	2.264	1.735	3.332	3.469
3.195	3.469	5.331	5.194	2.136	2.401	2.930	3.195
2.930	3.067	4.400		1.862	1.862	1.597	
2.401	3.195					3.195	

TABLA III (TABLE III)

Cargas correspondientes a distintos niveles de probabilidad de rotura en N/m<sup>2</sup>  
(Loads in N/m<sup>2</sup> corresponding to the different levels of probability of failure)

PLACA (PLATE)	CITAV	5% Teórico (Theoretic)	25% Teórico (Theoretic)	25% Ensayos (Test)	50% Teórico (Theoretic)	50% Ensayo (Test)	75% Teórico (Theoretic)	75% Ensayo (Test)
1	627	1.862	2.166	2.940	2.332	3.067	2.489	3.136
2	706	2.283	2.636	2.744	2.891	3.136	3.028	3.234
3	843	2.842	3.254	2.744	3.342	3.234	3.724	4.361
4	1.156	3.234	3.773	4.508	4.047	5.194	4.292	5.978
5	274	1.029	1.303	1.666	1.470	1.764	1.715	1.862
6	314	1.294	1.519	1.617	1.666	1.764	1.911	2.156
7	372	1.480	1.725	1.715	1.862	2.597	1.989	2.989
8	510	2.117	2.430	3.430	2.597	4.116	2.744	4.557

distribución de Weibull. Para el valor de probabilidad  $P = 0,05$ , se consideran solamente los resultados teóricos, con el fin de evitar una extrapolación de los resultados experimentales que, en general, podría ser poco fiable por el limitado número de ensayos en cada grupo. Este valor es el que se corresponde con el habitual del diseño estructural.

Por último, en la Tabla IV se presentan los coeficientes de seguridad, comprobados para las tablas de CITAV y

$P = 0.05$ , only the theoretical results are considered, in order to avoid an extrapolation of the experimental results, which, in general, might not be too reliable, on account of the limited number of tests in each group. This is the value corresponding to the one usually considered in structural design.

Finally, Table IV presents the safety coefficients calculated for both the CITAV charts and the

TABLA IV (TABLE IV)

Coefficientes de seguridad para las tablas CITAV y para el modelo teórico  
(Safety coefficients for both CITAV charts and the theoretical model)

PLACA (PLATE)	CITAV	5% Teórico (Theoretic)	Desviaciones de la media (%) (Deviations from average)	
			CITAV	5% Teórico (Theoretic)
1	4,78	1,61	19,39	0,6
2	4,18	1,30	29,51	19,75
3	4,66	1,38	21,41	14,81
4	4,64	1,66	21,75	-2,5
5	6,79	1,81	-14,50	-11,73
6	6,42	1,55	-8,26	-4,32
7	6,91	1,49	-16,53	-8,02
8	9,05	2,18	-52,61	-34,56
Media (Average)	5,93	1,62	22,99	12,03

para el modelo teórico, en el caso  $P = 0,05$ . Los coeficientes se determinaron dividiendo la mediana de los resultados experimentales, obtenidos para el tipo concreto de placa ensayado, entre los resultados de diseño para aquellos dos casos.

## 8. CONCLUSIONES

De los resultados presentados en los apartados anteriores, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El método probabilístico, propuesto en el presente trabajo, se acredita como un procedimiento válido para el dimensionamiento a rotura de placas de acristalamiento. En la práctica totalidad de los casos estudiados (más de 70), los resultados teóricos, calculados para una probabilidad de rotura del 5%, son inferiores a los experimentales, de donde se deduce que el dimensionamiento, en general, está del lado de la seguridad.
2. En los casos analizados, la mediana de los valores teóricos es inferior en un 20%, aproximadamente, a la de los resultados experimentales. Se puede comprobar que esta diferencia se mantiene también para el cuantil del 5%. En consecuencia, en la presente investigación, el valor de la carga de rotura para  $P = 0,05$ , calculado

*theoretical model, for the case of  $P = 0.05$ . The coefficients were determined by dividing the median of the experimental results, corresponding to a certain type of plate tested, by the design results obtained for the two aforementioned cases.*

## 8. CONCLUSIONS

*The results discussed in the foregoing sections have lead us to the following conclusions:*

1. *The probabilistic approach, presented in this paper, proves itself to be a valid procedure for designing glass plates to failure. In the practical totality of the cases under study -more than 70-, the theoretical results calculated for a probability of failure of 5% are lower than the experimental ones, from which it follows that the dimensioning is, in general, on the safe side.*
2. *In the cases studied, the median of the theoretical values is approximately 20% lower than that of the experimental results. This difference can also be seen to hold for the 5% quantile. Consequently, the loading value for  $P = 0.05$  calculated with the theoretical model, exhibits a safety coefficient of about 1.20 with*

según el modelo teórico, presenta un coeficiente de seguridad de 1,20 aproximadamente, frente a los resultados experimentales.

3. Los valores de la carga de diseño, deducidos de las tablas del CITAV, son notablemente inferiores a los valores para el 5% de probabilidad de rotura, calculados con ayuda del modelo teórico. Los coeficientes de seguridad varían entre 4,18 y 9,05 para las tablas del CITAV, y entre 1,30 y 2,18, para el método teórico. Esto confirma la ya mencionada heterogeneidad de la reserva de seguridad en las tablas del CITAV para los diferentes espesores de placa, y la mayor congruencia en los resultados obtenidos, según el método de diseño propuesto.

En cualquier caso, la ausencia de reserva plástica del vidrio podría justificar un coeficiente de seguridad muy superior al habitual en el dimensionamiento de otros materiales dúctiles convencionales.

## 9. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) el apoyo económico suministrado en el marco del proyecto PB94-1350, y al Centro de Investigación y Desarrollo de Avilés de la Empresa Cristalería Española, S.A., por su colaboración y constante apoyo.

## 10. BIBLIOGRAFÍA

- (1) ANIANS, D.C.: "Experimental study of edge displacements of laterally loaded window glass plates" Texas Tech University 1980.
- (2) BEASON, W. L.; MORGAN, J.R.: "Glass failure prediction model". Journal of Structural Engineering. 1984.
- (3) BERNARDO SÁNCHEZ, A.: "Cálculo probabilístico en rotura de acristalamientos mediante utilización de parámetros de fractura". Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 1994.
- (4) CASTILLO, E.: "Extrem Value Theory in Engineering". Academic Press, Inc. 1988.
- (5) CASTILLO, E.; ÁLVAREZ, E.; COBO, A.; HERRERO, T.: "An Expert System for the analysis of Extreme Value Problems". Universidad de Cantabria 1993.
- (6) CITAV (Centro de Información Técnica de Aplicaciones del Vidrio): "Manual del vidrio". Madrid 1993.
- (7) EWALDS H. L.; WANHILL R. J. H.: "Fracture Mechanics". Edward Arnold, London 1991.
- (8) FERNÁNDEZ NAVARRO, J.M.: "El vidrio". Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Cerámica y Vidrio. 2ed Madrid 1991.
- (9) MOYA, J. S.; MIRANZO, P.: "Materiales cerámicos tenaces multifusión obtenidos por sinterización reactiva. Determinación de la tenacidad". Anales de Mecánica de Fractura. Vol. 1, pág. 51-58, 1984.
- (10) VIÑA OLAY, I.: "Análisis no lineal de rotura de placas planas de vidrio con consideración de criterios probabilísticos". Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 1987.

*respect to the experimental results for the present work.*

*3. The values for the design loading, deduced from the CITAV charts, are notably lower than the values corresponding to the 5% probability of failure, calculated by means of the theoretical model. The safety coefficients vary between 4.18 and 9.05 for the CITAV charts and between 1.30 and 2.18 for the theoretical model. This confirms the non-homogeneity, already mentioned, of the safety margin of the CITAV charts for different plate thicknesses, as well as the greater congruence of the results obtained using the proposed model.*

*It is worth, however, pointing out that the absence of a plastic reserve for the glass could justify the use of a safety coefficient significantly greater than the one currently used for other conventional materials showing a ductile behaviour.*

## 9. ACKNOWLEDGMENTS

*The authors gratefully acknowledge the Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) in providing financial support for this work (ref. PB 94-1350) and the Centro de Investigación y Desarrollo de Avilés of Cristalería Española S.A. for their collaboration and constant advice.*