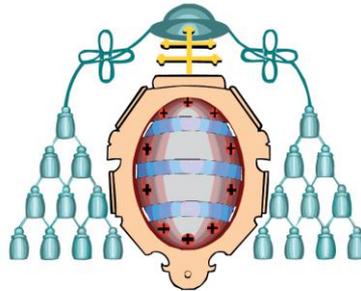


UNIVERSIDAD DE OVIEDO



TESIS DOCTORAL

Estimación de Estados sobre Modelos CAE.
Aplicación a la Dinámica Vehicular

Carlos Cuesta Requena

Ingeniero Industrial

Máster Universitario en Ingeniería Mecánica, Diseño, Construcción y Fabricación
Universidad de Oviedo

Directores: Pablo Luque Rodríguez, Universidad de Oviedo
Daniel Álvarez Mántaras, Universidad de Oviedo

PROGRAMA DE DOCTORADO EN DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y
FABRICACIÓN EN INGENIERÍA

Resumen

La realimentación de las variables de estado permite mejorar el control de los sistemas. Sin embargo, cuando estas variables no se pueden medir, o resulta técnica o económicamente inviable, se recurre a su estimación, es decir, la estimación de estados. La estimación de estados requiere un modelo que establezca las relaciones entre las variables del sistema. Actualmente, los modelos utilizados por la estimación de estados son matemáticos, donde las relaciones entre las variables se expresan con lenguaje matemático, lo que posibilita la implementación del observador de estados, que también está expresado en lenguaje matemático, pero conlleva simplificaciones que limitan el conocimiento que se obtiene del sistema real.

La aplicación de las técnicas de control en dinámica vehicular, campo de la ingeniería que estudia los vehículos terrestres como sistemas multicuerpo, persigue el objetivo principal de aumentar la seguridad activa de los vehículos, haciendo la conducción más sencilla y evitando la pérdida de control de los mismos. Dada la gran importancia social de los vehículos desde mediados del siglo XX, las técnicas de control, incluyendo la estimación de estados, tienen gran relevancia en dinámica vehicular. Paralelamente, el vehículo como sistema multicuerpo es extraordinariamente complejo en cuanto al gran número de cuerpos rígidos y flexibles que interactúan en el tiempo y en el espacio a través de relaciones altamente no lineales. Es por ello que la dinámica vehicular es una de las principales aplicaciones de la ingeniería asistida por ordenador (*Computer Aided Engineering*). Los modelos CAE se han convertido en la herramienta fundamental para el desarrollo, simulación, análisis, optimización y control de sistemas complejos, entre ellos el vehículo como sistema multicuerpo. Una de las principales ventajas de estos modelos es la facilidad y flexibilidad para su creación y modificación, lo que permite la modelización de sistemas complejos manteniendo la fidelidad con el sistema real.

A pesar del interés de la estimación de estados en las técnicas de control de sistemas dinámicos y de las ventajas del uso de modelos CAE en lugar de modelos matemáticos, la estimación de estados sobre modelos CAE aún no ha sido publicada. Además, la aplicación de la estimación de estados sobre modelos CAE a la dinámica vehicular es particularmente interesante dada la relevancia social del control de los vehículos terrestres, que repercute directamente en la seguridad, y su complejidad como sistemas dinámicos multicuerpo, que requiere el uso de modelos igualmente complejos.

Esta Tesis presenta una primera metodología para la estimación de estados sobre modelos CAE que extiende los fundamentos conceptuales y de funcionamiento de la estimación de estados tal y como se ha planteado hasta el momento. La novedosa metodología se aplica en la estimación de los esfuerzos en un neumático a partir de mediciones de los esfuerzos en los elementos de la suspensión. La nueva propuesta para la estimación de los esfuerzos en el neumático es sólo posible gracias al uso de un modelo CAE, que permite disponer todos los efectos presentes en el sistema real, lo que además supone mayor fidelidad a la realidad. El conocimiento de los esfuerzos en el neumático es el objetivo de numerosas publicaciones científicas actuales con el fin de mejorar los sistemas de seguridad activa de los vehículos.

La aplicación de esta metodología en dinámica vehicular proveerá de mayor conocimiento sobre lo que realmente ocurre en el vehículo con la consiguiente mejora de los sistemas de control actuales (como los de seguridad activa) y de los futuros (entre los que se encontrarían sistemas de conducción automática).

Abstract

The feedback of state variables allows improving system control. However, when these variables can not be measured or it is not technically or economically feasible, they are estimated, leading to the state estimation technique. The state estimation technique requires a model establishing the relations among system variables. Currently used models are mathematical ones, where these relations among variables are expressed by means of mathematical language, making possible the state observer implementation, also mathematically expressed, but leading to limitations in the system knowledge.

The application of control techniques in vehicle dynamics (engineering field studying ground vehicles as multibody systems) mainly aims to increase the active safety of vehicles, making driving easier and avoiding loss of control. Given the great social importance of ground vehicles since around the middle of the XX century, control techniques, including state estimation, have an increasing relevance in vehicle dynamics. Moreover, ground vehicles as multibody systems are especially complex as consequence of the large quantity of rigid and flexible bodies interacting along time and space through highly non-linear relations. Vehicle dynamics is consequently a main application of Computer Aided Engineering. CAE models (created by means of Computer Aided Engineering software) have become the essential tool for complex system development, simulation, analysis, optimization and control, such as ground vehicles as multibody systems. One of the main advantages of these models is the easiness and flexibility to create and modify them, allowing the faithfully modelization of complex systems.

Despite the interest of state estimation for control techniques and the advantages of CAE models in front of mathematical models, the use of CAE models in state estimation has not been yet published. Furthermore, the application of the state estimation technique using CAE models on vehicle dynamics is particularly interesting given the social relevance of the control of ground vehicles, affecting directly on its safety, and its complexity as multibody systems, requiring models equally complex.

This PhD dissertation presents a first methodology for state estimation using CAE models extending the conceptual and functional basis of the state estimation as it has been considered until this point. The new methodology is applied in the estimation of tyre forces in a ground vehicle from measurements of efforts in suspension elements. This new proposal for tyre forces estimation is only possible thanks to the use of a CAE model, where all the real effects are actually present in the model. The knowing of tyre forces is the target of many current publications aiming to improve ground vehicle active safety systems.

The application of the presented methodology on vehicle dynamics will provide deeper knowledge about what is actually happening in the ground vehicle, leading to improvement of current control systems (like active safety systems) and future ones (like autonomous driving systems).

Índice

Resumen	1
Abstract.....	2
Índice	3
Nomenclatura.....	6
1 Introducción	14
1.1 Motivación	14
1.2 Objetivo	19
1.3 Estructura de la Tesis	20
2 Estado del Arte	22
2.1 Modelización para la estimación de estados en dinámica vehicular.....	22
2.1.1 Modelos de vehículo	22
2.1.2 Modelos de neumático	26
2.2 Estimación de estados	28
2.2.1 Principios básicos del Filtro Kalman	30
2.2.2 Filtro Kalman lineal y discreto en el tiempo.....	33
2.2.3 Filtro Kalman Extendido discreto en el tiempo	36
2.2.4 Filtro Kalman Extendido continuo en el tiempo	40
2.2.5 <i>Unscented Kalman Filter</i>	40
2.2.6 Filtro Kalman Dual	43
2.2.7 Observador Luenberger.....	44
2.2.8 Observador Proporcional - Integral.....	45
2.2.9 Principios básicos del Observador <i>Sliding Mode</i>	45
2.2.10 Observabilidad	46
2.3 Estimación de estados en dinámica vehicular.....	47
2.3.1 Filtro Kalman Lineal	47
2.3.2 Filtro Kalman Extendido.....	48
2.3.3 <i>Unscented Kalman Filter</i>	50
2.3.4 Filtro Kalman Dual	50
2.3.5 Observador Luenberger.....	51
2.3.6 Observador <i>Sliding Mode</i>	53
2.3.7 Observador Proporcional-Integral.....	54
2.3.8 Otros observadores.....	55
2.4 Conclusión del Estado del Arte.....	56
3 Metodología para la estimación de estados en modelos CAE	58

3.1	Discusión crítica sobre la estimación de estados	58
3.2	Fundamentos de la metodología	61
3.3	Observabilidad en modelos CAE.....	66
3.4	Observador de estados en modelos CAE.....	67
3.5	Formulación de la metodología	68
3.6	Procedimiento de la metodología	70
3.7	Ejemplo de aplicación: Sistema masa-muelle-amortiguador.....	71
3.7.1	Presentación del sistema real	71
3.7.2	Presentación del modelo para la estimación de estados.....	75
3.7.3	Estimación de estados	78
3.7.4	Estimación de estados sobre medida ruidosa.....	82
3.7.5	Conclusiones	86
3.8	Justificación de la innovación.....	89
4	Aplicaciones en dinámica vehicular.....	92
4.1	Suspensión McPherson: Fuerza del amortiguador.....	92
4.1.1	Presentación del sistema real	92
4.1.2	Presentación del modelo para la estimación de estados.....	100
4.1.3	Estimación de estados sobre medida ruidosa.....	104
4.1.4	Conclusiones	111
4.2	Suspensiones de un vehículo: Estimación de fuerzas en suspensiones 112	
4.2.1	Presentación del sistema real	112
4.2.2	Presentación del modelo para la estimación de estados.....	118
4.2.3	Estimación de estados sobre medidas ruidosas.....	125
4.2.4	Conclusiones	137
4.3	Vehículo completo: Esfuerzos en un neumático delantero.....	137
4.3.1	Presentación del sistema real	138
4.3.2	Presentación del modelo para la estimación de estados.....	141
4.3.3	Estimación de estados	145
4.3.4	Conclusiones	165
5	Conclusiones	167
5.1	Futuras líneas de investigación	170
6	Referencias	171
7	Anexo I: Modelo de suspensión McPherson.....	186
8	Anexo II: Modelo de vehículo completo y maniobra	199

8.1	Tren delantero	199
8.2	Tren trasero	201
8.3	Maniobra	214
	Índice de figuras	217
	Índice de tablas	233

Nomenclatura

Las variables utilizadas en la presente Tesis, por orden de aparición, son las siguientes:

x : Variable unidimensional.

z_1 : Valor de la medida de x en el instante t_1 .

t_1 : Instante temporal 1.

σ_{z_1} : Desviación típica de z_1 que materializa su incertidumbre.

t_2 : Instante temporal 2.

z_2 : Valor de la medida de x en el instante t_2 .

σ_{z_2} : Desviación típica de z_2 que materializa su incertidumbre.

μ : Media de valores unidimensionales ponderada según sus incertidumbres.

σ : Desviación típica de μ que materializa su incertidumbre.

$\hat{x}(t_2)$: Valor estimado de x en el instante t_2 .

$\sigma(t_2)$: Desviación típica de $\hat{x}(t_2)$ que materializa su incertidumbre.

K : Ganancia unidimensional para el cálculo de $\hat{x}(t_2)$ y $\sigma(t_2)$.

$K(t_2)$: Valor de K en el instante t_2 .

t_3 : Instante temporal 3.

$\hat{x}^-(t_3)$: Valor *a priori* o predicho de la variable x en el instante t_3 , calculado a partir del modelo del sistema previamente a la aplicación de la corrección del observador de estados.

$\sigma^{-2}(t_3)$: Desviación típica de $\hat{x}^-(t_3)$ que materializa su incertidumbre.

z_3 : Valor de la medida de x en el instante t_3 .

σ_{z_3} : Desviación típica de z_3 que materializa su incertidumbre.

$K(t_3)$: Valor de K en el instante t_3 .

n : Dimensión de la variable de estado \vec{x} .

\vec{x} : Variable de estado vectorial que incluye todas las variables de estado unidimensionales o vectoriales.

m : Dimensión de la variable de entrada \vec{u} .

\vec{u} : Variable de entrada vectorial que incluye todas las variables de entrada unidimensionales o vectoriales.

p : Dimensión de la variable de salida medida \vec{z} .

\vec{z} : Variable de salida medida vectorial que incluye todas las variables de salida medidas unidimensionales o vectoriales.

k : Instante temporal genérico en el dominio discreto del tiempo.

\vec{x}_k : Valor de la variable \vec{x} en el instante k .

\vec{x}_{k-1} : Valor de la variable \vec{x} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\vec{u}_{k-1} : Valor de la variable \vec{u} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\vec{u}_{k-1} : Valor de la variable \vec{u} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\vec{w} : Variable vectorial aleatoria que representa en el modelo el ruido de proceso asociado a la variable de estado.

\vec{w}_{k-1} : Valor de la variable \vec{w} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\vec{z}_k : Valor de la variable \vec{z} en el instante k .

\vec{v} : Variable vectorial aleatoria que representa en el modelo el ruido de medida asociado a la variable de salida medida.

\vec{v}_k : Valor de la variable \vec{v} en el instante k .

A : Matriz del modelo que relaciona temporalmente la variable de estado con ella misma, ya sea en su formulación espacio-estado para un sistema lineal o como el Jacobiano de la función \vec{f} respecto de la variable de estado \vec{x} para un sistema no lineal, y ya sea constante en el tiempo (A) o evaluada en el punto de funcionamiento en el instante calculado, ya sea en el dominio discreto del tiempo A_k o en el dominio continuo $A(t)$.

B : Matriz del modelo que relaciona temporalmente la variable de estado con ella misma en su formulación espacio-estado para un sistema lineal, ya sea constante en el tiempo o evaluada en el punto de funcionamiento en el instante calculado.

H : Matriz del modelo que relaciona temporalmente la variable de salida medida con la variable de estado, ya sea en su formulación espacio-estado para un sistema lineal o como el Jacobiano de la función \vec{h} respecto de la variable de estado \vec{x} para un sistema no lineal, y ya sea constante en el tiempo (H) o evaluada en el punto de funcionamiento en el instante calculado, ya sea en el dominio discreto del tiempo H_k o en el dominio continuo $H(t)$.

Q : Matriz de covarianzas de la variable aleatoria \vec{w} .

R : Matriz de covarianzas de la variable aleatoria \vec{v} .

$\hat{\vec{x}}_k^-$: Valor *a priori* o predicho de la variable de estado \vec{x} en el instante k , calculado a partir del modelo del sistema previamente a la aplicación de la corrección del observador de estados.

\vec{z}_k : Valor de la variable de salida medida \vec{z} en el instante k .

$\hat{\vec{x}}_k$: Valor de la variable \vec{x} estimado o corregido por el observador de estados en el instante k .

\bar{x}_k : Valor real de la variable de estado \bar{x} en el instante k .

\bar{e}_k^- : Error del valor predicho de la variable de estado respecto al valor real.

\bar{e}_k : Error del valor estimado de la variable de estado respecto al valor real.

P_k : Matriz de covarianzas corregidas de \bar{e}_k .

P_k^- : Matriz de covarianzas predichas de \bar{e}_k^- .

\hat{z}_k^- : Valor *a priori* o predicho de la variable de salida medida \bar{z} en el instante k , calculado a partir del modelo del sistema previamente a la aplicación de la corrección del observador de estados.

\tilde{y}_k : Residuo de la innovación o residuo de la medida, calculada como la diferencia entre \bar{z}_k y \hat{z}_k^- .

K_k^{Kalman} : Matriz de ganancias aplicada por el observador de estados para corregir el valor predicho del estado de manera proporcional al residuo de la medida, calculada según el Filtro Kalman, en el instante k .

\hat{x}_{k-1} : Valor estimado o corregido por el observador de estados de la variable \bar{x} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\bar{u}_{k-1} : Valor de la variable de entrada \bar{u} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

P_{k-1} : Valor de la matriz de covarianzas del error de la estimación o corrección en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\hat{x}_0 : Valor inicial estimado de la variable de estado \bar{x} .

P_0 : Valor inicial asignado a la matriz de covarianzas del error del valor inicial \hat{x}_0 .

\bar{f} : Función vectorial del modelo que relaciona temporalmente la variable de estado con ella misma, con la variable de entrada y eventualmente, según la nomenclatura utilizada, con el ruido de proceso, ya sea en el dominio discreto o continuo del tiempo.

\bar{h} : Función vectorial del modelo que relaciona temporalmente la variable de salida medida con la variable de estado y eventualmente, según la nomenclatura utilizada, con el ruido de medida, ya sea en el dominio discreto o continuo del tiempo.

\bar{w}_{k-1} : Valor del ruido de proceso \bar{w} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

\bar{v}_k : Valor del ruido de proceso \bar{v} en el instante k .

\tilde{x}_k : Valor aproximado de la variable de estado \bar{x} en el instante k , calculado a partir del modelo del sistema, sin tener en cuenta el ruido de proceso ni aplicar el observador de estados.

\tilde{z}_k : Valor aproximado de la variable de salida medida \bar{z} en el instante k , calculado a partir del modelo del sistema, sin tener en cuenta el ruido de medida ni aplicar el observador de estados.

\bar{x}_{k-1} : Valor real de la variable de estado \bar{x} en el instante inmediatamente anterior al instante k .

W : Jacobiano de la función \bar{f} respecto de ruido de proceso \bar{w} evaluado en el punto estimado de funcionamiento en el instante calculado, ya sea en el dominio discreto del tiempo W_k o en el dominio continuo $W(t)$.

V : Jacobiano de la función \bar{f} respecto de ruido de medida \bar{v} evaluado en el punto aproximado de funcionamiento en el instante calculado, ya sea en el dominio discreto del tiempo V_k o en el dominio continuo $V(t)$.

\tilde{e}_{xk} : Error de la aproximación de la variable de estado \tilde{x} respecto de su valor real \bar{x} en el instante k .

\tilde{e}_{zk} : Error de la aproximación de la variable de salida medida \tilde{z} respecto de su valor real \bar{z} en el instante k .

$\bar{\varepsilon}_k$: Variable aleatoria que representa el efecto del ruido de proceso \bar{w} en el error de la aproximación de la variable de estado \tilde{e}_{xk} en el instante k .

$\bar{\eta}_k$: Variable aleatoria que representa el efecto del ruido de medida \bar{v} en el error de la aproximación de la variable de salida medida \tilde{e}_{zk} en el instante k .

\hat{e}_{xk} : Estimación del error de la aproximación de la variable de estado \tilde{e}_{xk} en base al error de la aproximación de la variable de salida medida \tilde{e}_{zk} en el instante k .

\hat{e}_{xk}^- : Valor *a priori* o predicho del error \hat{e}_{xk} .

Q_{k-1} : Valor de la matriz Q en el instante inmediatamente anterior al instante k .

R_k : Valor de la matriz R en el instante k .

t : Variable tiempo, independiente y continua: $t \in \mathfrak{R}^+$.

$\bar{x}(t)$: Variable de estado vectorial que incluye todas las variables de estado unidimensionales o vectoriales en el dominio continuo del tiempo.

$\dot{\bar{x}}(t)$: Derivada temporal de la variable de estado $\bar{x}(t)$.

$\bar{u}(t)$: Variable de entrada vectorial que incluye todas las variables de entrada unidimensionales o vectoriales en el dominio continuo del tiempo.

$\bar{z}(t)$: Variable de salida medida vectorial que incluye todas las variables de salida medidas unidimensionales o vectoriales en el dominio continuo del tiempo.

$\vec{w}(t)$: Variable vectorial aleatoria que representa en el modelo el ruido de proceso asociado a la variable de estado en el dominio continuo del tiempo.

$\vec{v}(t)$: Variable vectorial aleatoria que representa en el modelo el ruido de medida asociado a la variable de salida medida en el dominio continuo del tiempo.

$Q(t)$: Matriz de covarianzas de la variable aleatoria $\vec{w}(t)$.

$R(t)$: Matriz de covarianzas de la variable aleatoria $\vec{v}(t)$.

$K^{Kalman}(t)$: Matriz de ganancias aplicada por el observador de estados para corregir el valor predicho de la variable de estado de manera proporcional al residuo de la medida y calculada según el Filtro Kalman, variable en el dominio continuo del tiempo.

$\hat{\vec{x}}(t)$: Estimación de la variable de estados $\vec{x}(t)$.

$\dot{\hat{\vec{x}}}(t)$: Derivada temporal de la variable de estados estimada $\hat{\vec{x}}(t)$.

$P(t)$: Matriz de covarianzas del error del valor estimado de la variable de estado $\hat{\vec{x}}(t)$ respecto al valor real $\vec{x}(t)$.

$\dot{P}(t)$: Derivada temporal de la matriz de covarianzas del error $P(t)$.

$A(t)$: Jacobiano de la función \vec{f} respecto de la variable de estado $\vec{x}(t)$ en el dominio continuo del tiempo.

$H(t)$: Jacobiano de la función \vec{h} respecto de la variable de estado $\vec{x}(t)$ en el dominio continuo del tiempo.

σ_{k-1} : Matriz del conjunto de $(2n + \kappa)$ puntos sigma con media nula en el instante inmediatamente anterior al instante k .

κ : Número natural seleccionado para mejorar la estimación en el *Unscented Kalman Filter*.

$(\vec{\chi}_{k-1})_i$: Punto sigma i ($i \in \mathcal{N} / i \in [1, 2n]$) en el instante inmediatamente anterior al instante k .

$(\vec{\chi}_{k-1})_0$: Punto sigma correspondiente al valor de la estimación de la variable de estado $\hat{\vec{x}}$ en el instante inmediatamente anterior al instante k .

$(\vec{\chi}_k^-)_i$: Punto sigma i en el instante k calculado como la transformación no lineal del punto sigma $(\vec{\chi}_{k-1})_i$ a través del modelo.

$\hat{\vec{x}}_k^-$: Valor *a priori* o predicho de la variable de estado \vec{x} en el instante k , calculado a partir del modelo del sistema previamente a la aplicación de la corrección del observador de estados.

$(\vec{Z}_k^-)_i$: Valor de la variable de salida medida vinculado al punto sigma i en el instante k calculado como la transformación no lineal del punto sigma $(\vec{\chi}_k^-)_i$ a través del modelo.

$(P_k^-)_{zz}$: Matriz de covarianzas de la predicción de la medición.

$(P_k^-)_{vv}$: Matriz de covarianzas de la innovación o residuo de la medición.

$(P_k^-)_{xz}$: Matriz de covarianzas cruzadas entre la estimación de la variable de estado y la estimación de la variable de salida o de medición.

K_k^{UKF} : Matriz de ganancias aplicada por el observador de estados para corregir el valor del estado de manera proporcional al residuo de las medidas, calculada según el *Unscented Kalman Filter*, en el instante k .

L : Matriz de ganancias constantes aplicada por el observador de estados Luenberger para corregir el valor del estado de manera proporcional al residuo de las medidas.

K^p : Matriz de ganancias constantes aplicada por el observador de estados Proporcional-Integral para corregir el valor del estado de manera proporcional al error en las salidas medidas.

K^i : Matriz de ganancias constantes aplicada por el observador de estados Proporcional-Integral para corregir el valor del estado de manera proporcional a la integral del error en las salidas medidas.

\bar{z}_0 : Valor de la variable de salida medida en el instante inicial.

$v(t)$: Velocidad de un cuerpo, variable en el tiempo.

$\dot{s}(t)$: Derivada temporal de la posición de un cuerpo, variable en el tiempo.

$\tilde{\dot{x}}(t)$: Derivada temporal de la aproximación de la variable de estado $\bar{x}(t)$.

α : Dimensión de la variable vectorial de excitaciones virtuales $\vec{v}(t)$.

$\vec{v}(t)$: Variable vectorial de excitaciones virtuales.

$\vec{\omega}$: Función vectorial del modelo que relaciona temporalmente la variable de estado con la variable de excitaciones virtuales.

$F(t)$: Fuerza exterior actuante en el sistema como entrada en el ejemplo de aplicación de la metodología.

K^{muelle} : Constante de rigidez del muelle suponiendo un comportamiento lineal.

$C^{amortiguador}$: Constante de amortiguamiento del amortiguador suponiendo un comportamiento lineal.

$z(t)$: Posición vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\dot{z}(t)$: Velocidad vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\ddot{z}(t)$: Aceleración vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$F_{k-c}(z, \dot{z})$: Fuerza realizada por el muelle-amortiguador, en función de la posición y de la velocidad vertical del cuerpo, en el ejemplo de aplicación de la metodología.

m : Masa del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

g : Aceleración de la gravedad.

$F_v(t)$: Fuerza virtual en la que se materializa la excitación virtual introducida en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\hat{z}(t)$: Estimación de la posición vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\dot{\hat{z}}(t)$: Estimación de la velocidad vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\ddot{\hat{z}}(t)$: Estimación de la aceleración vertical del cuerpo en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})$: Fuerza realizada por el muelle-amortiguador según el modelo en la simulación corregida del ejemplo de aplicación de la metodología.

$\hat{F}_{k-c}(t)$: Fuerza estimada del muelle-amortiguador en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$F_k(z)$: Fuerza realizada por el muelle, en función de la posición vertical del cuerpo, en el ejemplo de aplicación de la metodología.

$F_c(\dot{z})$: Fuerza realizada por el amortiguador, en función de la velocidad vertical del cuerpo, en el ejemplo de aplicación de la metodología.

γ : Ángulo de caída del neumático según su sistema de coordenadas ISO.

r : Radio efectivo del neumático, es decir, distancia entre el eje de giro de la rueda y el punto de contacto en el que se localizan los esfuerzos ejercidos por el neumático.

F_x : Fuerza longitudinal ejercida por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

F_y : Fuerza lateral ejercida por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

F_z : Fuerza vertical ejercida por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

M_y : Par resistente a la rodadura ejercido por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

M_z : Par autoalineante ejercido por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

\vec{F} : Fuerza vectorial ejercida por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

\vec{M} : Par vectorial ejercida por el neumático según su sistema de coordenadas ISO.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: Vectores directores del sistema de coordenadas ISO del neumático.

ψ : Ángulo de cabeceo de la mangueta.

φ : Ángulo de balanceo de la mangueta.

\vec{F}' : Fuerza vectorial ejercida por el neumático según el sistema de coordenadas local de la mangueta.

\vec{M}' : Fuerza vectorial ejercida por el neumático según el sistema de coordenadas local de la mangueta.

$(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$: Vectores directores del sistema de coordenadas local de la mangueta.

$(F_x^v, F_y^v, F_z^v, M_y^v, M_z^v)$: Componentes de los vectores de esfuerzos virtuales en el punto de contacto del neumático con la calzada en el sistema de coordenadas ISO del neumático. Materializan las excitaciones virtuales.

$\vec{F}'v$: Vector de fuerzas virtuales en el punto de articulación de la rueda con la mangueta en el sistema de coordenadas locales de ésta.

$(F_x'^v, F_y'^v, F_z'^v)$: Componentes del vector de fuerzas virtuales en el punto de articulación de la rueda con la mangueta en el sistema de coordenadas locales de ésta.

$\vec{M}'v$: Vector de pares virtuales en el punto de articulación de la rueda con la mangueta en el sistema de coordenadas locales de ésta.

$(M_x'^v, M_y'^v, M_z'^v)$: Componentes del vector de pares virtuales en el punto de articulación de la rueda con la mangueta en el sistema de coordenadas locales de ésta.

F_x^{trap} : Medida de la fuerza en el trapecio en el eje x de la mangueta.

\hat{F}_x^{trap} : Fuerza en el trapecio en el eje x de la mangueta en la simulación corregida.

F_y^{trap} : Medida de la fuerza en el trapecio en el eje y de la mangueta.

\hat{F}_y^{trap} : Fuerza en el trapecio en el eje y de la mangueta en la simulación corregida.

F_n^{tubo} : Medida de la fuerza normal en el tubo del amortiguador.

\hat{F}_n^{tubo} : Fuerza normal en el tubo del amortiguador en la simulación corregida.

v_x : Medida de la velocidad longitudinal del vehículo.

\hat{v}_x : Velocidad longitudinal del vehículo en la simulación corregida.

$F_n^{bieleta}$: Medida de la fuerza normal en la bieleta.

$\hat{F}_n^{bieleta}$: Fuerza normal en la bieleta en la simulación corregida.

$K_{F_x}, K_{F_y}, K_{F_z}, K_{M_y}, K_{M_z}$: Ganancias del observador proporcional en la estimación de los esfuerzos en el neumático.

1 Introducción

1.1 Motivación

Un **sistema** (*system*) es un conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto (definición de la Real Academia Española). Esta definición semántica, amplia y transversal, por ser aplicable a cualquier ámbito, se puede combinar con la definición más próxima al ámbito de la ingeniería propuesta por Karnopp, Margolis y Rosenberg (Karnopp, 2006) en la que se añaden las propiedades de ser una entidad separable del resto del universo (el entorno) por medio de una frontera física o conceptual y de estar compuesto por partes que interactúan. El estudio del comportamiento de los sistemas a lo largo del tiempo se denomina **dinámica de sistemas** (*system dynamics*).

Según la misma obra (Karnopp, 2006), para el estudio de un sistema es primordial la idea de **modelo** (*model*) como construcción abstracta y simplificada del sistema utilizada para predecir su funcionamiento. El modelo tan sólo refleja aquellas características o propiedades del sistema que son importantes para el estudio, asumiendo que el resto de aspectos del sistema no son tenidos en cuenta. En la práctica, ningún sistema puede ser modelado exactamente y es la labor del diseñador la de crear el modelo adecuado a las necesidades del estudio. Los modelos físicos (también denominados prototipos o maquetas) siguen este concepto, ejemplificado por los autores de la citada obra en un túnel de viento. Otro tipo de modelo es el **modelo matemático** (*mathematical model*), en el que las interacciones de los componentes del sistema se expresan mediante conceptos y lenguaje matemáticos, que generalmente se materializa en un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales en el caso de sistemas dinámicos, aunque también se pueden utilizar otras notaciones, como el lenguaje *bond graph* propuesto por los autores.

En la misma obra se define un **sistema dinámico** (*dynamical system*) como aquel sistema cuyo comportamiento en función del tiempo es importante. Las **variables de estado** (*state variables*) son aquellas características del modelo que describen su comportamiento (Figura 1.1). Las **variables de entrada** (*input variables*) representan la acción del entorno sobre el sistema, influenciando por tanto las variables de estado. Por último, las **variables de salida** (*output variables*) son los aspectos observables de la respuesta del sistema o los efectos del sistema que retornan al entorno.

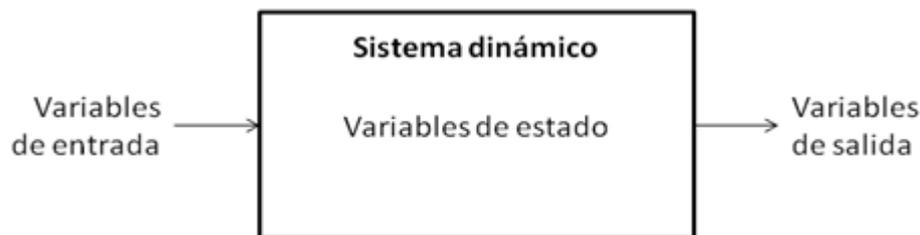


Figura 1.1. Diagrama general de un sistema dinámico (traducido y adaptado de Karnopp, 2006).

Cuando se necesita conocer el valor de las variables de estado, normalmente con el fin de su retroalimentación para el control del sistema, pero no es posible su medición, se recurre a la **estimación de estados** (*state estimation*), como se muestra en la Figura 1.2. La estimación de estados se realiza mediante un algoritmo denominado **observador de estados** (*state observer*) o estimador de estados, que calcula el valor de las variables de estado que se ajusta al valor de las variables de entrada y de las

variables de salida medidas en el sistema real en base al modelo del sistema (Braslavsky, 2001).

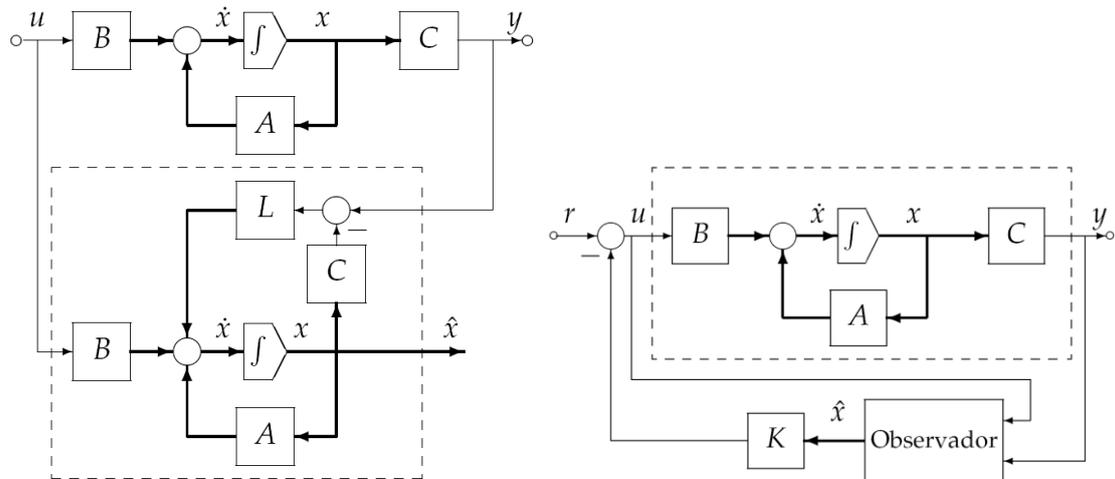


Figura 1.2. Izquierda: Diagrama del proceso de estimación de estados. Derecha: Diagrama de la retroalimentación de la estimación de los estados para el control de un sistema dinámico. (Braslavsky, 2001).

Un tipo particular de sistema dinámico es el **sistema multicuerpo** (*multibody system*), definido como un conjunto de sólidos que pueden considerarse rígidos o deformables y cuyo movimiento está restringido por medio de uniones o pares cinemáticos situados entre ellos (Hidalgo, 2013). Un ejemplo de sistema multicuerpo y su modelo se muestra en la Figura 1.3. Por extensión de la definición de dinámica de sistemas, se define **dinámica de sistemas multicuerpo**, (*multibody system dynamics* o simplemente *MultiBody Dynamics*, también conocida por su acrónimo inglés MBD) como el estudio del comportamiento temporal de los sistemas multicuerpo. Según Karnopp (2006) cuando un número de cuerpos rígidos están restringidos por diferentes tipos de uniones y se desplazan tridimensionalmente a través de grandes movimientos angulares, las relaciones cinemáticas pueden llegar a ser muy complejas, de hecho, añaden los autores, se han desarrollado técnicas específicas para manejar este tipo de sistema dinámico mecánico. Cabe citar como ejemplos de esta aseveración las coordenadas naturales introducidas por García de Jalón (1994) y aplicadas en la actualidad (Hidalgo, 2013).

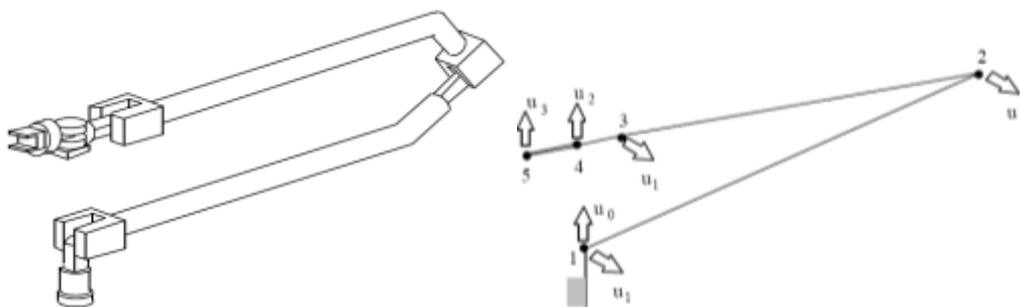


Figura 1.3. Modelo de un brazo robótico espacial con coordenadas naturales (García de Jalón, 1994).

Debido a la complejidad en el modelado y análisis matemático de los sistemas multicuerpo, los avances en computación se han aplicado a la dinámica de sistemas multicuerpo, lo que ha dado como resultado que se haya convertido en un campo de la **ingeniería asistida por ordenador** (CAE, *Computer Aided Engineering*), entendida como el uso de software informático para asistir las tareas en ingeniería, y particularmente dentro de su rama mecánica (MCAE, *Mechanical Computer Aided*

Engineering - García de Jalón, 1994). Este campo de la ingeniería asistida por ordenador se materializa en los **software de simulación dinámica de sistemas multicuerpo** o software de simulación de sistemas multicuerpo (*MultiBody Dynamics simulation, MBD simulation, o MultiBody Simulation, MBS*), que permiten la creación, simulación y análisis de sistemas multicuerpo a través de una interface gráfica de usuario y la resolución de las ecuaciones de movimiento (cinemáticas y dinámicas) mediante un resolutor interno (*solver*) (ver referencia RecurDyn[®]), como Working Model[®] (ver referencia), RecurDyn[®] o, el más extendido y avanzado, MSC.Adams[®] (*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*, ver referencia). Los modelos generados mediante los software de ingeniería asistida por ordenador, como el mostrado en la Figura 1.4 para un sistema multicuerpo, se denominan **modelos CAE** (*CAE model* - Raphael, 2003). En contraposición, se encuentran los modelos matemáticos ya definidos, donde las expresiones matemáticas han de ser planteadas, ya sea para su resolución manual o por ordenador, de manera simbólica o numérica (García de Jalón, 1994).

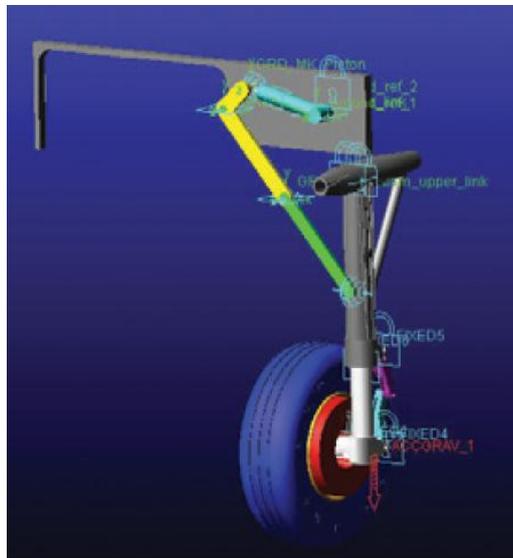


Figura 1.4. Modelo CAE del sistema multicuerpo correspondiente al tren de aterrizaje de un aeronave (MSC.Adams[®]).

Las ventajas de los modelos CAE frente a los modelos matemáticos es la facilidad para crear, modificar, simular y analizar el sistema multicuerpo, primando siempre la comunicación visual con el diseñador a través de entornos gráficos bidimensionales o tridimensionales. La creación del modelo se realiza a través de las herramientas de modelado del software según su campo de aplicación y generalmente con la ayuda de librerías de datos que permiten definir fácilmente las propiedades de los componentes del sistema y cambiarlas con flexibilidad. En el caso particular de los sistemas multicuerpo, la creación del modelo implica la introducción de propiedades geométricas e inerciales de los cuerpos, creando la geometría a partir de las propias herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD, *Computer Aided Design*, otro campo de la ingeniería asistida por ordenador) del software o importando la geometría de un software CAD específico. Las propiedades inerciales (masa y momentos de inercia) se pueden fijar de manera paramétrica o pueden ser calculadas por el propio software en base a la geometría y densidad introducidas para cada cuerpo. Además, se pueden atribuir propiedades de flexibilidad a los cuerpos o importar un modelo de cuerpo flexible de otro software específico de análisis por elementos finitos (FEA, *Finite Element Analysis*, otro campo más de la ingeniería asistida por ordenador). Por

otro lado, se crean las interconexiones cinemáticas (como juntas esféricas, de revolución o traslacionales) y dinámicas (como muelles o amortiguadores) entre los cuerpos, es decir, aquellas relaciones que restringen el movimiento relativo entre los cuerpos y transmiten esfuerzos entre ellos. También se añaden las restricciones externas (entradas del sistema) de manera cinemática, imponiendo desplazamientos, velocidades o aceleraciones, ya sean lineales o angulares, o de manera dinámica, a través de fuerzas lineales o pares. Adicionalmente, se pueden añadir componentes específicos de ciertos campos de la ingeniería, como sistemas de control (sensores y reguladores para conducir el sistema) o elementos de máquinas, como engranajes, correas, cadenas, rodamientos y cables. Una vez creado el modelo de sistema multicuerpo, el propio software realiza la simulación dinámica del mismo, resolviendo internamente las ecuaciones de movimiento. Finalmente, es posible analizar el comportamiento del sistema visualizando su movimiento en el entorno gráfico bidimensional o tridimensional o a través de gráficos bidimensionales (como velocidad-tiempo), así como llevar a cabo análisis específicos, como la optimización del diseño y propiedades paramétricas de los componentes, identificación de parámetros, análisis de vibraciones o de fatiga del material entre otros (MSC.Adams®). En la Figura 1.5 se muestran dos ejemplos de la aplicación de estos análisis en modelos CAE.

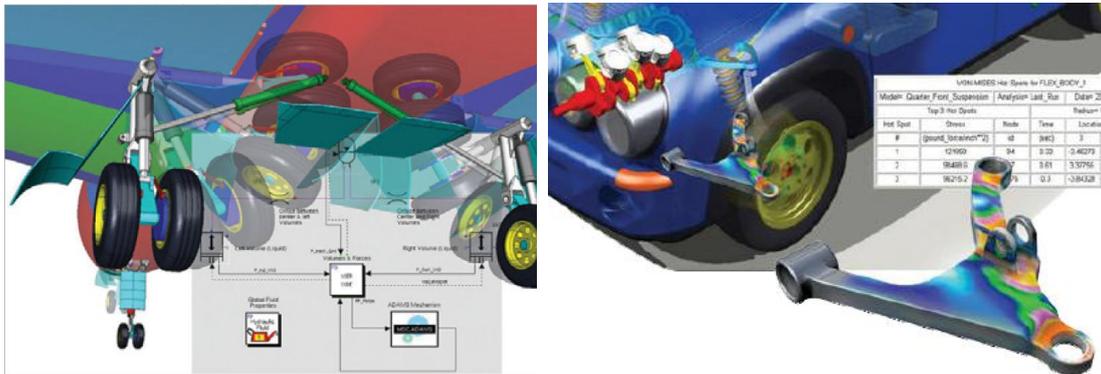


Figura 1.5. Ejemplos de modelos CAE en MSC.Adams® que incluyen técnicas de control, a la izquierda, o cuerpos flexibles por el Método de los Elementos Finitos, a la derecha (MSC.Adams®).

Los vehículos terrestres son, según lo expuesto anteriormente, un caso particular de sistema multicuerpo (así está incluido en Karnopp, 2006, y en García de Jalón, 1994). Dada la importancia de los vehículos terrestres en la sociedad durante el último medio siglo (Rajamani, 2005), la dinámica de este sistema multicuerpo ha tomado el nombre propio de **dinámica vehicular** (*vehicle dynamics*), entendiendo como tal, por extensión de las definiciones ya expuestas, el campo de la ingeniería que estudia el comportamiento temporal del vehículo terrestre como conjunto de cuerpos rígidos o flexibles, cuyo movimiento está restringido por medio de pares y uniones dinámicas cinemáticas situados entre ellos y cuya interacción contribuye a un determinado objeto. La dinámica vehicular también es objeto de la aplicación de la ingeniería asistida por ordenador, de hecho, tal es su importancia que existen softwares específicos para su simulación, como CarSim® (ver referencia) o SCANeR™ (ver referencia), y la compañía MSC Software ofrece complementos específicos para su software de dinámica multicuerpo MSC.Adams®, como son MSC.Adams/Car® o MSC.Adams/Tire® (MSC.Adams®) (Figura 1.6).

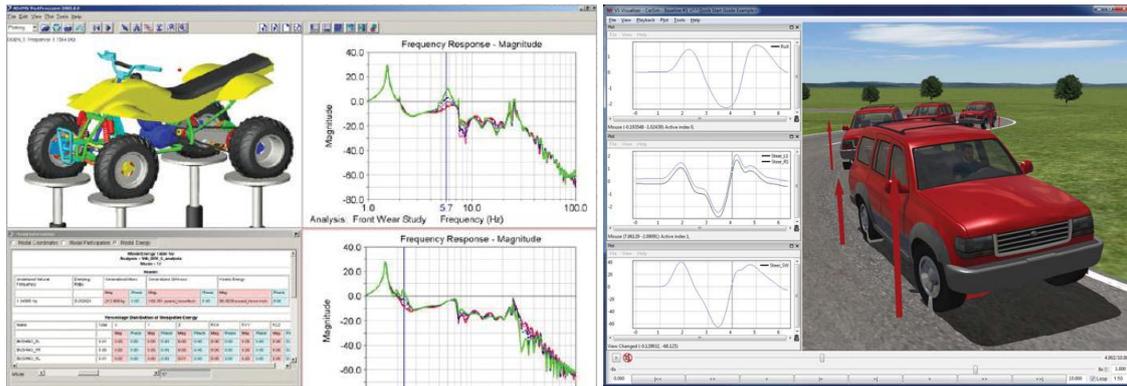


Figura 1.6. Izquierda: Análisis de la suspensión de un vehículo en MSC.Adams/Car® (MSC.Adams®). Derecha: Análisis de una maniobra con un vehículo en CarSim® (CarSim®).

Una de las principales funciones de la aplicación de las técnicas de control a la dinámica vehicular es la seguridad, particularmente el desarrollo y mejora de los **sistemas de seguridad activa** (*active safety systems*), que son aquellos sistemas electrónicos del vehículo que facilitan su conducción de una forma segura, fácil y que previenen los accidentes (Luque, 2004), como el sistema de frenado antibloqueo (ABS, *Antilock Braking System*), el sistema de control de tracción (TCS, *Traction Control System*) o el programa electrónico de estabilidad (ESP®, *Electronic Stability Program* - Figura 1.7) (ver referencia Bosch Automotive Technology). Para estas técnicas resulta especialmente interesante conocer lo que está ocurriendo en el vehículo a través de las variables de estado. Como ya se ha expuesto, cuando no es posible medir estas variables, se recurre a la estimación de estados, lo cual requiere un modelo del vehículo como sistema multicuerpo (Rajamani, 2005; Kiencke, 2005).

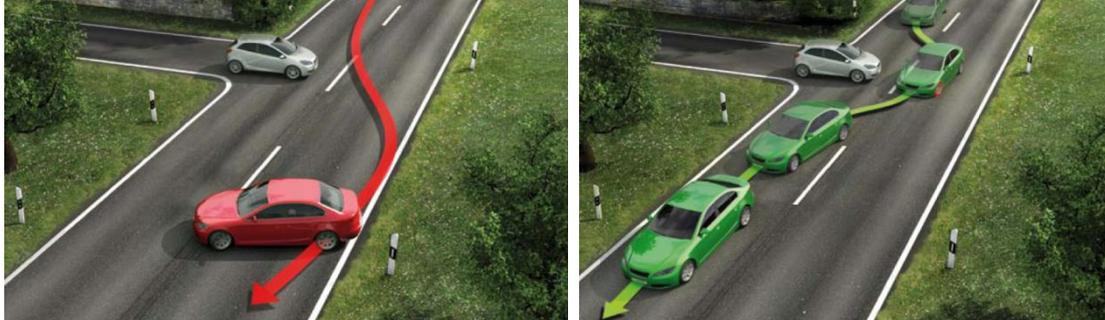


Figura 1.7. Funcionamiento del programa electrónico de estabilidad para evitar el sobreviraje frenando la rueda delantera izquierda (Bosch Automotive Technology).

La **estimación de estados en dinámica vehicular** aún se aplica únicamente a modelos matemáticos relativamente simplificados, de manera que la aplicación de los algoritmos de los observadores de estados sea relativamente sencilla sobre las expresiones matemáticas del modelo (Kiencke, 2005 - Figura 1.8). Como se ha expuesto al inicio, la simplificación de los modelos conlleva obviar efectos del sistema que no se consideran importantes. Sin embargo, en el caso particular de la aplicación de la estimación de estados a la dinámica vehicular, es común realizar simplificaciones con el objetivo de hacer posible la aplicación del algoritmo de estimación de estados sobre el modelo matemático, que de otro modo sería extremadamente complejo (Hidalgo, 2013), adaptando la formulación del modelo a los requerimiento del observador de estado, lo que supone obviar fenómenos ciertamente importantes en la dinámica vehicular, como la no-linealidad en el comportamiento del neumático o el comportamiento de la suspensión del vehículo. Esta situación queda de manifiesto en las numerosas referencias bibliográficas citadas y explicadas en el capítulo del Estado del Arte así

como en la ausencia de referencias bibliográficas sobre estimación de estados en modelos CAE.

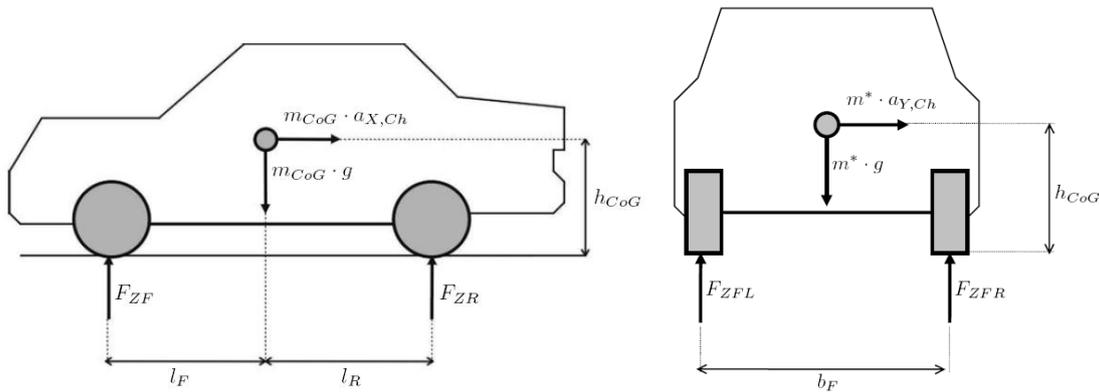


Figura 1.8. Modelo de vehículo utilizado para la estimación de estados (Kiencke, 2005).

Parece interesante pues extender la técnica de la estimación de estados a los modelos CAE, particularmente en dinámica vehicular, con la ventaja principal de aprovechar la facilidad y flexibilidad de estos softwares en el modelado de sistemas dinámicos complejos, lo que permitiría evitar el planteamiento explícito de modelos matemáticos a través de ecuaciones algebraico-diferenciales y realizar modelos más completos y fieles al sistema real.

1.2 Objetivo

En conclusión a lo expuesto anteriormente, el uso de modelos CAE presenta notables ventajas en cuanto a la facilidad y flexibilidad para su creación, modificación y análisis, incluyendo la optimización y el control, lo que permite utilizar fácilmente modelos complejos y fieles a la realidad, en oposición a los modelos matemáticos. Sin embargo, la técnica de la estimación de estados, cuyo objetivo final es el control del sistema, aún se aplica únicamente a modelos matemáticos simplificados donde la aplicación de los algoritmos de los observadores de estados es posible. Esta situación es particularmente visible en la dinámica vehicular, donde el sistema real es especialmente complejo y cuyo control es primordial debido a la importancia de los vehículos terrestres en la sociedad actual.

El objetivo de la presente Tesis es presentar una primera metodología para la estimación de estados sobre modelos CAE, lo que permite aprovechar el potencial de la ingeniería asistida por ordenador para la utilización de modelos complejos y fieles a la realidad. Esta metodología se aplica en primer lugar a la dinámica de sistemas multicuerpo por su complejidad y, concretamente, a la dinámica vehicular dado que se trata de un campo especialmente interesante para las técnicas de control.

La aplicación de esta metodología en dinámica vehicular permite no obviar fenómenos que ciertamente ocurren en el vehículo, con el consiguiente incremento de fidelidad a la realidad, lo que proveería a los sistemas de control actuales (como los de seguridad activa) y a los futuros (entre los que se encontrarían sistemas de conducción automática) de información más completa y exacta de lo que ocurre en el vehículo para actuar en consecuencia.

1.3 Estructura de la Tesis

En este capítulo de Introducción se ha presentado el problema que se plantea actualmente: La estimación de estados se realiza únicamente sobre modelos matemáticos y no sobre modelos CAE, cuya creación es más sencilla y flexible y consecuentemente permiten realizar modelos más completos y fieles a la realidad. Como reacción a esta necesidad detectada, se ha expuesto el objetivo que persigue la presente Tesis: Mostrar una primera metodología para llevar a cabo la estimación de estados en modelos CAE. Por último, se expone la estructura con la que se alcanza el objetivo: se realiza una revisión del estado del arte actual, se explica detalladamente la metodología presentada junto a un ejemplo, se realizan algunas aplicaciones interesantes para el campo de la dinámica vehicular y se obtienen las conclusiones pertinentes.

En el capítulo del Estado del Arte, se presentan en primer lugar las obras fundamentales de dinámica vehicular donde se presentan los conceptos utilizados. A continuación se exponen los modelos, tanto de vehículo como de neumático, utilizados actualmente en la estimación de estados en dinámica vehicular, mostrando sus carencias. Seguidamente se repasa la teoría de la estimación de estados y se presentan los principales observadores de estado. Posteriormente se presentan numerosas referencias bibliográficas actuales de estimación de estados en dinámica vehicular para demostrar que el problema que se pretende resolver efectivamente existe. Finalmente se expone la conclusión del estado del arte en la materia.

En el capítulo de Metodología para la estimación de estados en modelos CAE se parte de la discusión crítica sobre la estimación de estados donde se analizan sus fundamentos, más allá de las formulaciones utilizadas en modelos matemáticos, para posteriormente extenderlos a los modelos CAE. Se explica asimismo la extensión del concepto de observabilidad y de los observadores de estado existentes. Para establecer una analogía con la estimación de estados en modelos matemáticos, se presenta la formulación de la metodología presentada. A continuación se explican el procedimiento para la aplicación de la metodología y la justificación de la innovación junto a los avances que supone. Por último, se presenta un ejemplo de aplicación de la nueva metodología a un sencillo sistema multicuerpo donde se ponen en práctica los conceptos e ideas expuestos a lo largo del capítulo.

En el capítulo de Aplicaciones en dinámica vehicular se presentan tres casos prácticos de estimación de estados en modelos CAE propios de este campo de la ingeniería, desde una más sencilla hasta la más compleja y actualmente interesante en este campo. En la primera de ellas se aísla una suspensión delantera de un vehículo para estimar la fuerza que realiza el amortiguador, suponiendo desconocido su comportamiento, a partir de la lectura de la deformación del muelle. En la segunda de las aplicaciones se extiende la anterior a las cuatro suspensiones de un vehículo, lo cual cobra mayor interés en la dinámica vehicular. En la tercera y última aplicación se plantea una nueva forma de estimar todos los esfuerzos en un neumático, un objetivo actualmente perseguido en el control en dinámica vehicular, sólo posible gracias al uso de un modelo CAE, lo que permite utilizar los esfuerzos transmitidos por los elementos de la suspensión como variables de salida del sistema que se miden en la realidad.

En el capítulo de Conclusiones se resumen las ideas principales y novedosas que se desprenden de esta Tesis así como las potenciales líneas de investigación que surgen.

En el capítulo de Referencias se listan las referencias bibliográficas citadas en el texto por orden alfabético.

En los anexos se describen los modelos CAE que se utilizan en las aplicaciones presentadas así como la maniobra simulada por el vehículo completo.

Finalmente se encuentran los índices de figuras y de tablas.

2 Estado del Arte

Además de los artículos de investigación reseñados en este capítulo, existen libros que suponen referencias indispensables para comprender los principios básicos y conceptos de la dinámica vehicular y de su simulación, control y análisis utilizados en la presente Tesis. En cuanto a la ingeniería vehicular, Luque (2004), Wong (2001) y el glosario de términos SAE (1996) permiten comprender el funcionamiento del vehículo y los conceptos básicos. Jazar (2008), Blundell (2004), Halfmann (2003), Genta (1997), Milliken (1995) y Gillespie (1992) están más enfocados a la dinámica vehicular, es decir, al comportamiento del vehículo como sistema dinámico. Dentro de la dinámica vehicular, el comportamiento de los neumáticos es un tema especialmente importante que queda rigurosamente tratado en Pacejka (2012), Buckhardt (1987 y 1993) y en Moore (1975). La estimación de estados tiene su finalidad práctica en los sistemas de control del vehículo, ampliamente explicados en Rajamani (2005) y en Kiencke (2005). Finalmente, la dinámica vehicular forma parte de los sistemas multicuerpo, cuya simulación es un campo complejo de la ingeniería, donde una de las principales publicaciones es García de Jalón (1994).

2.1 Modelización para la estimación de estados en dinámica vehicular

2.1.1 Modelos de vehículo

La estimación de estados requiere la existencia de una formulación matemática del sistema (modelo matemático) sobre la que aplicar el algoritmo del observador de estados. En dinámica vehicular resulta altamente costoso plantear un modelo matemático completo teniendo en cuenta todos los grados de libertad tridimensionales (6 por cada cuerpo rígido) de todos los componentes (entre 50 y 100 cuerpos, en función de lo que se pretenda estudiar y el diseño de las suspensiones) y las restricciones cinemáticas (articulaciones tridimensionales entre cuerpos) y dinámicas no lineales (muelles, amortiguadores, neumáticos, cuerpos flexibles, articulaciones con juntas elásticas y amortiguadas en los seis grados de libertad denominadas *silent blocks*), lo que daría lugar a un sistema de cientos de ecuaciones de compleja resolución (García de Jalón, 1994; Hidalgo, 2013). Todas estas relaciones basadas en la dinámica de sistemas multicuerpo están particularmente bien expuestas en Blundell (2004) y sus fundamentos técnicos en Luque (2004).

Ante la dificultad de plantear un modelo matemático completo sobre el que aplicar la estimación de estados, se recurre a modelos simplificados como los que se muestran en las referencias bibliográficas que se recopilan posteriormente. Fundamentalmente se trata de los llamados “modelo de bicicleta” (*bicycle model* o *single-track model* - Anderson, 2010 - Figura 2.1 izda.) y “modelo de cuatro ruedas” (Imsland, 2006 - Figura 2.1 dcha.). En estos modelos todo el vehículo se simplifica en una masa rígidamente sustentada por dos o cuatro ruedas, que se mueve en el espacio en virtud de los esfuerzos que le llegan a través de estas ruedas. Estos esfuerzos tienen su origen en los sistemas de tracción, frenado y dirección, las entradas del sistema. Si se considera la influencia de las variables que afectan a estos esfuerzos (como el coeficiente de fricción neumático-calzada o el deslizamiento del neumático) se modeliza también la interacción del neumático con la calzada en función de un modelo de neumático (explicados posteriormente), normalmente también sencillo o simplificado.

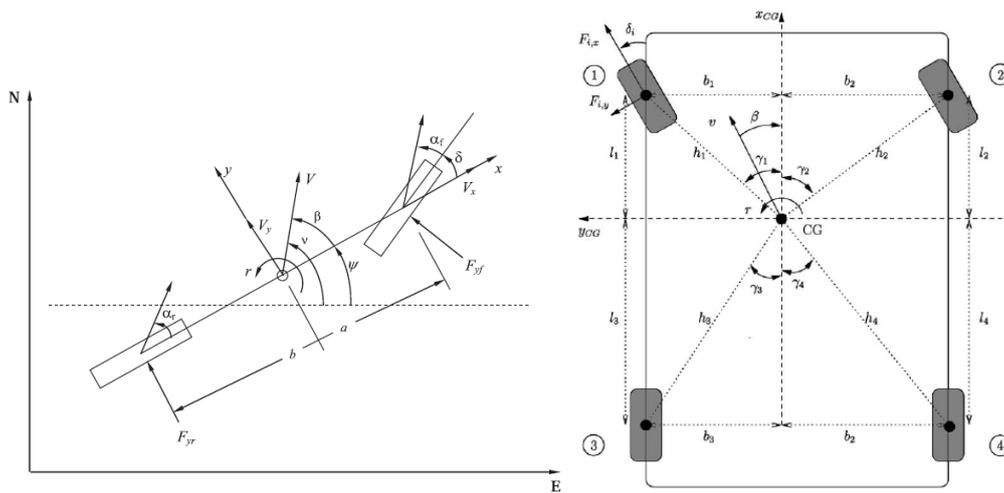


Figura 2.1. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta (Anderson, 2010). Derecha: Esquema de un modelo de cuatro ruedas (Imsland, 2006).

En algunos casos se incluyen las transferencias de carga longitudinal y transversal en función de las aceleraciones en estas direcciones y de la altura del centro de gravedad, si esto es el objeto de la estimación (Wenzel, 2006) o si se considera la influencia de la carga vertical en cada rueda (Dakhlallah, 2008). El movimiento de la carrocería (básicamente cabeceo y balanceo) también se incluye si es el objeto de la estimación (Menhour, 2012) o si se considera su influencia (Khemoudj, 2013), aunque siempre de manera lineal, considerando constante y horizontal el eje instantáneo de balanceo (Doumiati, 2009a - Figura 2.2), o a partir de la lectura de una Unidad de Medida Inercial IMU (Tseng, 2007) o giróscopo (Anderson, 2010).

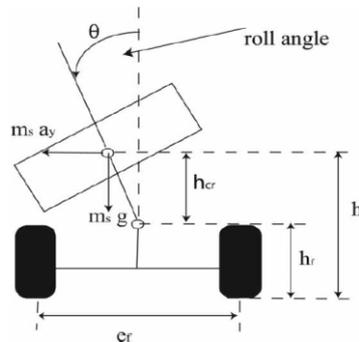


Figura 2.2. Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el movimiento de la carrocería (Doumiati, 2009a).

En aquellos casos en los que, además de la fuerza vertical en cada rueda, es interesante el desplazamiento de la suspensión, todo el mecanismo, independientemente del tipo y diseño cinemático y dinámico, se simplifica en un modelo unidimensional de muelle-amortiguador de un grado de libertad (Siegrist, 2006 - Figura 2.3 izda.) o de dos grados de libertad si se considera el comportamiento vertical del neumático por separado (Imine, 2006 - Figura 2.3 dcha.).

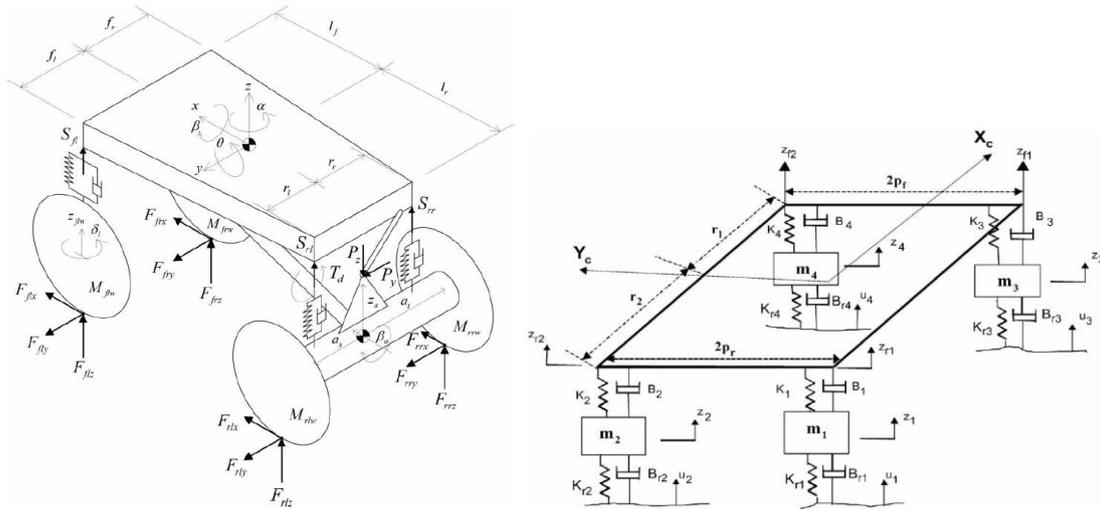


Figura 2.3. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el comportamiento vertical equivalente de la suspensión y del neumático a través de un muelle-amortiguador (Siegrist, 2006).

Derecha: Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el comportamiento vertical equivalente de la suspensión y del neumático de manera independiente a través de dos conjuntos muelle-amortiguador y una masa intermedia correspondiente a la rueda (Imine, 2006).

Por último, ocasionalmente se incluye una modelización más completa de algún subsistema del vehículo (tracción, frenado, dirección, suspensión) si puede aportar información para la estimación de estados. Este es el caso de Hsu (2006a), donde se incluye la dinámica eléctrica de los motores que gobiernan la dirección para transformarla en fuerza en las bieletas de dirección. Esta fuerza se relaciona a su vez con el par autoalineante en el neumático a través de datos obtenidos previamente por simulación en un modelo CAE en MSC.Adams[®] del sistema tridimensional multicuerpo que compone el mecanismo de dirección y suspensión (Figura 2.4). Esta última relación entre fuerza normal en la biqueta de dirección y par autoalineante en el neumático se materializa en una red neuronal en Luque (2013), también a partir de datos obtenidos en la simulación del mecanismo en MSC.Adams[®].

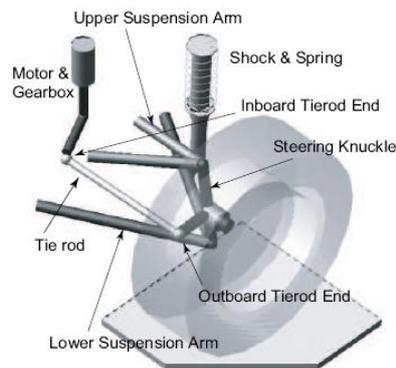


Figura 2.4. Modelo tridimensional CAE de una suspensión tipo McPherson para relacionar la fuerza axial en la biqueta de dirección con el par autoalineante en la rueda (Hsu, 2006a).

En cualquiera de los casos, no se tienen en cuenta los comportamientos y efectos realmente presentes en el vehículo, muchos de los cuales son altamente no lineales como los que se exponen a continuación (Luque, 2004; Rajamani, 2005). Sin entrar en los neumáticos, que se tratan posteriormente, se obvian sistemáticamente los efectos cinemáticos de las suspensiones (diferentes en cada tipo y diseño) en el movimiento de la carrocería (cabeceo y balanceo, que son consecuencia cinemática -directa- de las suspensiones), en el mecanismo de dirección y en el movimiento de la rueda (ángulos

de caída y de deriva que también son consecuencias cinemáticas de la suspensión), perjudicando el conocimiento de las transferencias de carga, del verdadero funcionamiento del mecanismo de dirección, de la orientación de los neumáticos sobre la calzada y, consecuentemente, de los esfuerzos generados por éstos según el modelo de neumático. Tampoco se considera la dinámica de las suspensiones, caracterizada por las masas semisuspendidas (rueda y elementos de la suspensión) y por el comportamiento (generalmente no lineal e incluso variable en el tiempo y con las condiciones de trabajo) del muelle, del amortiguador, de la barra estabilizadora si existe y de la disposición geométrica y restricciones cinemáticas de todos ellos. Si se consideran el muelle y el amortiguador, se simplifica su efecto en la componente vertical entre la calzada y la carrocería y el comportamiento de este “muelle-amortiguador equivalente” se considera lineal, cuando no lo son ni los comportamientos de los elementos ni su ventaja mecánica condicionada por la cinemática de la suspensión. Por último, gran parte de los cuerpos que componen el chasis del vehículo en la realidad no están unidos cinemáticamente, sino dinámicamente a través de bloques de goma (denominados *silent-blocks*) que se deforman con un cierto comportamiento elástico y amortiguado (también generalmente no lineal y variable en el tiempo y con las condiciones de trabajo) afectando a la cinemática y a la dinámica de las suspensiones, hasta el punto de ser necesarios para su funcionamiento, como en una suspensión multibrazo.

Todos los efectos anteriormente citados pueden ser incluidos fácilmente en un modelo CAE, creado en un software como MSC.Adams[®] (Blundell, 1991 y 1996), aunque esto supone no disponer de las ecuaciones para el planteamiento del observador de estados ni de acceso al valor de los estados para su corrección. Sin embargo, los modelos CAE sí son utilizados, por su fidelidad con la realidad, como sistema real del que se obtienen los resultados por simulación para validar la estimación de estados (en lugar de realizar experimentos reales), ya sea sobre software general de simulación de sistemas multicuerpo como MSC.Adams[®] (Khaknejad, 2012; Botha, 2012; Siegrist, 2006;), o específicos de dinámica vehicular como MSC.Adams/Car[®] (Lin, 2009a, 2009b, 2010, 2011, 2013a y 2013b; Khaknejad, 2011), CarSim[®] (Nam, 2012; Cho, 2010; Nishihara, 2009; Chen 2008; Sierra, 2006), TruckSim[®] (ver referencia) (Wenzel, 2006; Cheng, 2011 -Figura 2.5-) u otros menos conocidos, como los de la compañía OKTAL: Callas\Prosper[®] (ver referencia SCANeRTM) (Khemoudj, 2010 y 2013) y SCANeRTM Studio (Jaballah, 2012). También se utilizan para obtener las relaciones entre ciertas variables y modelizar una parte del sistema, como ya se ha explicado para Hsu (2006a). Los modelos CAE también se utilizan para identificar parámetros del modelo buscando el valor que mejor ajusta los resultados de la simulación a las medidas reales mediante simulaciones iterativas variando el valor de los parámetros (Saglam, 2011; Khaknejad, 2011; Awan, 2010) o para validar la identificación de parámetros en modelos matemáticos (Lin, 2012). Finalmente, los modelos CAE de sistemas multicuerpo en MSC.Adams[®] también son utilizados en otros campos de la ingeniería, como en Zhuang (2013) donde se utiliza para el cálculo del par de los motores que accionan un robot, aunque tampoco ha sido publicada su utilización para la estimación de estados en otros campos de la ingeniería ajenos a la dinámica vehicular.



Figura 2.5. Interface gráfica de usuario de TruckSim para la obtención de datos de referencia con el objetivo de validar la estimación de estados frente a simulación (Cheng, 2011).

2.1.2 Modelos de neumático

Los modelos de vehículo deben ir necesariamente combinados con un modelo de neumático (Blundell, 1997). El objetivo del desarrollo de modelos matemáticos es plantear expresiones para la evaluación de las fuerzas y momentos que aparecen en los neumáticos, utilizando unos coeficientes que puedan identificarse con parámetros característicos de los mismos, como son la rigidez transversal y longitudinal o los valores máximos de las fuerzas entre el neumático y la superficie de rodadura (Luque, 2004).

Uno de los primeros modelos aparecidos es el modelo de FIALA (Fiala, 1954), que asume las siguientes hipótesis:

1. La huella de contacto es rectangular.
2. La distribución de presiones es uniforme sobre la huella de contacto.
3. El neumático se modeliza como un elemento rígido sobre un apoyo elástico.
4. El ángulo de caída no tienen efecto en las fuerzas sobre el neumático.

Posteriormente surgió el modelo de Dugoff (Dugoff, 1969 y 1970), ampliamente utilizado en los modelos matemáticos de vehículo para la estimación de estados por su sencillez y bajo coste computacional admitiendo las siguientes simplificaciones:

1. El neumático no tienen ángulo de caída.
2. La carcasa del neumático no se deforma.
3. La distribución de presiones en el área de contacto es uniforme.
4. No se tiene en cuenta el par autoalineante.
5. Las rigideces al deslizamiento y a la deriva son constantes.

Surgieron además otros modelos más avanzados, como el de Burckhardt (Burckhardt, 1987 y 1993), o el de la Universidad de Arizona desarrollado por Gim y Nikravesh (Gim, 1991a, 1991b, 1993, 1997 y 1999), que ya incluye los efectos del deslizamiento, la deriva y el ángulo de caída, y cuyo desarrollo fue continuado por S. Kim (1997, 2002 y 2008) y aplicado por Hankook (Akasaka, 2003).

También apareció el modelo de LuGre desarrollado principalmente por Canudas-de-Wit (1995, 1997a, 1997b, 1999a, 1999b, 1999c, 1999d, 2002, 2003a, 2003b

y 2003c) junto a Olsson (1998), a Claeys (2001a, 2001b, 2001c y 2001d) y a Velenis (2002 y 2003). Barahanov (2000), por su parte, analizó las condiciones de funcionamiento de este modelo.

Sin embargo, el modelo más completo en cuanto a los efectos que incluye y a su fidelidad con la realidad es el llamado modelo de la “Fórmula Mágica” de Pacejka (también denominado modelo de Pacejka), que ha evolucionado durante los años 90 (Pacejka 1989a, 1989b, 1991, 1993a, 1993b, 1993c, 1996a, 1996b y 1997), fruto de sus investigaciones junto a Bakker (1987 y 1989), Jagt (1989), Palkovics (1994), Zegelaar (1996 y 1998), Besselink (1997), Higuchi (1997) y Maurice (1997 y 1999), hasta llegar a su última versión en 2002 (Pacejka 2002) que ha evolucionado fruto de sus últimas investigaciones (Pacejka, 2005) con Besselink (2005 y 2010), Schmeitz (2004a y 2004b) y Lugner (2005) hasta la segunda (Pacejka 2006) y tercera edición (Pacejka 2012) de la obra que lo describe de manera exhaustiva. Es por ello el modelo más extendido para la simulación del comportamiento de los neumáticos, aunque requiere cálculos más laboriosos y altamente no lineales así como los datos experimentales del neumático real. Este modelo se basa en una serie de expresiones algebraicas y trigonométricas cuyos coeficientes pueden identificarse con parámetros característicos de los neumáticos. El propio Pacejka junto a Pasterkamp (1994, 1995, 1996, 1997a y 1997b) propone métodos de identificación de estos parámetros, así como su compañero de investigación Oosten (1993). Otros autores han publicado textos relativos a su uso: Lidner (1991), Cabrera (2004), Braghin (2006b) o Arosio (2005).

Además de los modelos más extendidos, otros investigadores han tratado de modelizar el comportamiento del neumático, como el grupo compuesto por Bernard (1995), Fancher (1997) y Clover (1998) o Svendenius (2007) en su Tesis Doctoral de la Universidad de Lund. También se ha realizado análisis en frecuencias, como los de Weber (1976) y Dorfi (2005) o el de Pohl (1999 y 2000), basado en sensores SAW (*Surface Acoustic Wave*). Bliman (1993, 1995a y 1995b) y Sorine (1998, 2000a y 2000b) presentaron un modelo de comportamiento basado en la histéresis. Y con la llegada del cálculo computacional por Elementos Finitos, también hubo investigadores que trataron de modelizar el neumático por este método, como Ridha (1975) y Faria (1992). Por último, Gipser (2005) desarrolló el modelo FTire (*Flexible Structure Tire Model*) expresamente para el cálculo computacional y utilizado por MSC Software y MathWorks entre otras compañías dedicadas a la ingeniería asistida por ordenador (ver referencia FTire).

En el caso de la estimación de estados, lo más usual es recurrir a modelos muy simples, como el modelo lineal (Anderson, 2010), donde la fuerza longitudinal es proporcional al deslizamiento longitudinal y la fuerza lateral es proporcional a la deriva, sin tener en cuenta ni siquiera la fuerza vertical o la saturación del neumático (lo cual significa que el neumático tiene una capacidad ilimitada de realizar fuerza, por lo que nunca se llegaría a la pérdida de control del vehículo). Su linealidad permite incluso identificar los parámetros de proporción, particularmente el de la fuerza lateral, denominado rigidez a deriva (*cornering stiffness*, rigidez al giro) (Baffet, 2008b). El modelo lineal deriva del modelo de Dugoff (Dakhlallah, 2008), que tiene en cuenta la carga vertical, el coeficiente de fricción y la combinación de esfuerzos longitudinal y transversal. Otros modelos utilizados, aunque de manera minoritaria, son el modelo de FIALA (Hsu, 2006b), el modelo de LuGre (Matusko, 2008; Chen, 2007) e incluso la Fórmula Mágica de Pacejka (Wenzel, 2006), siempre y cuando el modelo de vehículo tenga en cuenta las variables necesarias para alimentar el modelo matemático del neumático o se pueda simplificar (obviando el ángulo de caída o la combinación de

esfuerzos, por ejemplo). En otros casos se plantean modelos propios no lineales aunque simples y sin contrastar (Gao, 2010; Tsunashima, 2006). Finalmente, en algún caso (Matusko, 2008) se combina uno de los modelos anteriores (LuGre) con una red neuronal que se adapta a aquellos efectos que el modelo no es capaz de reproducir.

Por otro lado, los modelos CAE permiten, dada su modularidad y flexibilidad ya explicada, el uso de diferentes modelos de neumático. Además, estos modelos ya están preprogramados y se dispone de bases de datos (librerías) de neumáticos particulares con los parámetros del modelo ajustados a los resultados empíricos (según marca, modelo, tamaño, coeficiente de rozamiento o estado de la calzada –seca o mojada-). Incluso se dispone de módulos (como MSC.Adams/Tire[®]) para el ajuste de los parámetros del modelo según los datos experimentales introducidos. Aunque esta flexibilidad de los modelos de vehículo CAE en cuanto al modelo de neumático no es utilizada directamente en la estimación, al igual que ocurre con la dinámica del vehículo, sí son utilizados para validar la estimación de estados, como en Lin (2013a y 2013b) donde se valida la estimación del coeficiente de fricción de la carretera en base a resultados de varios escenarios MSC.Adams[®] con distintos coeficientes de fricción en la calzada. También se ha utilizado un modelo CAE para crear una base de datos o modelo simplificado que relacione dos variables del neumático, como el coeficiente de fricción y el par autoalineante en Luque (2013), donde se emplea el modelo de Pacejka. También en la Universidad de Oviedo, en Mántaras (2013), se utiliza el mismo modelo de neumático para identificar el coeficiente de fricción comparando los resultados del sistema real con los de la simulación en MSC.Adams[®], haciendo variar en cada simulación el coeficiente de fricción en la simulación y buscando el que mejor se ajusta a los resultados mediante un algoritmo genético (metodología clásica de la identificación de parámetros).

2.2 Estimación de estados

Tal y como explica Braslavsky (2001), la realimentación de los estados (Figura 2.6 – izda.) de un sistema tiene el objeto de satisfacer las especificaciones deseadas de estabilidad, desempeño y robustez. Cuando los estados del sistema no pueden medirse, o resulta técnica o económicamente inviable, se recurre a estimarlos mediante un observador de estados, que reconstruye la variable de estados a partir de mediciones de la variable de salidas y la variable de entradas. Para estimar los estados se recurre a un observador de estados, cuya salida es la estimación del vector de estados (Figura 2.6 – dcha.).

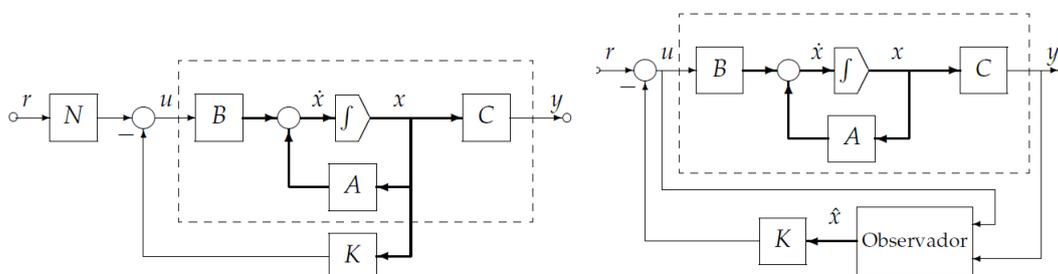


Figura 2.6. Diagramas de bloques de la realimentación de estados para el control del sistema midiendo los estados (izquierda) y estimando los estados mediante un observador de estados (derecha) (Braslavsky, 2001).

El observador de estados tiene en cuenta la dinámica del modelo para la reconstrucción o estimación de la variable de estados. Recupera las variables de entrada y de salida del sistema real y sobre el modelo (Braslavsky utiliza las matrices A, B y C de la notación espacio-estado) del sistema realiza el cálculo de la variable de estado, utilizando además una ganancia (Braslavsky utiliza la matriz L) para realimentar la variable de salida.

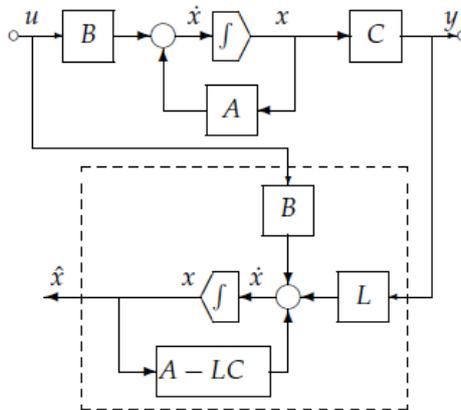


Figura 2.7. Diagrama de bloques de la estimación de estados (Braslavsky, 2001).

El uso de la matriz L para denotar la ganancia que se aplica a la realimentación de las variables de salida medida no es casual, sino hace alusión a David G. Luenberger (Luenberger, 1964). Como expone Braslavsky, el concepto de observador de estados puede atribuirse a Luenberger como resultado de su Tesis Doctoral en la Universidad de Standford en 1963. El Observador Luenberger, que se explica posteriormente, se basa en atribuir un valor constante a dicha ganancia L. Poco antes, en 1960, Rudolph E. Kalman (Kalman, 1960) desarrollaba junto a Richard Bucy la teoría de estimación óptima que se aplicaría precisamente a la estimación de estados para el desarrollo del observador de estados óptimo, el Filtro Kalman. El Filtro Kalman, como también se explica a continuación, se basa en atribuir el valor adecuado en cada instante a la ganancia L (que pasa a llamarse K^{Kalman}) de manera que la estimación de la variable de estados sea estadísticamente óptima bajo ciertas circunstancias.

Una vez que se dispone del valor estimado de la variable de estados, su valor se puede utilizar para el control del sistema real, como muestra la Figura 2.8.

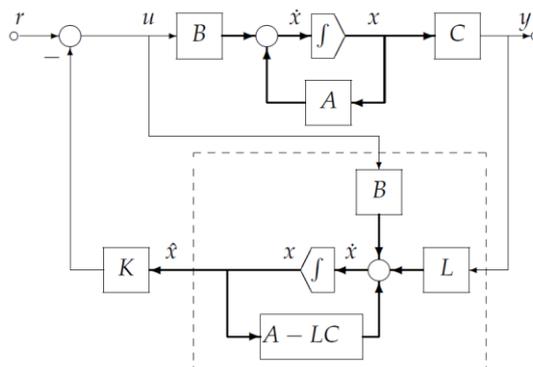


Figura 2.8. Diagrama de bloques de la estimación de estados para su realimentación sobre el sistema (Braslavsky, 2001).

La realimentación para el control del sistema está fuera del alcance de la presente Tesis, que se limita a la estimación de estados. La realimentación de los

estados se presenta aquí para mostrar la necesidad y finalidad de la estimación de estados.

2.2.1 Principios básicos del Filtro Kalman

En 1960, R. E. Kalman (Kalman, 1960) publicó el algoritmo del filtro que lleva su nombre, solucionando el problema del filtrado lineal de datos discretos. Hoy día, es aún objeto de investigación y herramienta en muchas otras investigaciones de todos los campos de la ciencia. El primer capítulo de Maybeck (1979) supone una introducción perfecta al Filtro Kalman y su aplicación a los sistemas estocásticos. Para Maybeck existen tres razones fundamentales que explican la necesidad de los sistemas estocásticos ante los sistemas determinísticos:

1. Ningún modelo matemático es perfecto, ya que en esencia están basados en aproximaciones y se necesitan conocer los parámetros que definen el modelo.
2. Las distorsiones en el sistema son imposibles de controlar.
3. Los sensores no ofrecen la variable que realmente interesa o tienen un coste muy elevado o sus mediciones no son exactas, debido a su propia dinámica y al ruido.

Todo esto plantea la cuestión de cómo tener en cuenta las incertidumbres, cómo realizar estimaciones para controlar estos sistemas y cómo evaluar el rendimiento de estos procesos. El Filtro Kalman es la herramienta fundamental para llevar a cabo estas tareas, ya que se puede definir el Filtro Kalman como un algoritmo óptimo (Kalman, 1963) y recursivo de procesamiento de datos cuyas ventajas se pueden agrupar en las siguientes:

- Tiene en cuenta toda la información disponible.
- Combina distintas mediciones de la misma variable con sus respectivas incertidumbres, ruidos e imprecisiones.
- Tiene en cuenta el conocimiento de la dinámica del sistema y de los sensores.
- Tiene en cuenta la descripción estadística de los ruidos del sistema, de los errores de las mediciones y la incertidumbre de los modelos dinámicos.
- Utiliza cualquier información disponible de las condiciones iniciales.
- No requiere almacenar y reprocesar todos los datos anteriores para cada paso de la estimación.
- Minimiza el error de la estimación en términos estadísticos, minimizando la media del error cuadrático.

Para que la estimación sea óptima, el sistema debe cumplir tres requisitos:

1. Linealidad. Es común que un sistema se pueda modelizar como lineal o que se linealice en torno a un punto de funcionamiento, por lo que el Filtro Kalman es aplicable en un amplio espectro de casos.
2. Ruido blanco, tanto del proceso como de las mediciones. Esto implica que no existe correlación del ruido en el tiempo, es decir, que aunque

existiese conocimiento del valor del mismo en un instante, no se podría predecir su valor en cualquier otro instante. Otra implicación es que el ruido tiene la misma potencia en cualquier frecuencia. Pese a que esto es físicamente imposible, es asumible puesto que el ancho de banda del ruido será normalmente mayor que el del sistema. Asumir que los ruidos son blancos simplifica la matemática del algoritmo.

3. Ruido Gaussiano, tanto del proceso como de las mediciones. Esto implica que la amplitud de ruido sigue una distribución normal, es decir, tiene la forma de una campana de Gauss. Esto se justifica por el hecho de que el ruido está normalmente causado por numerosas fuentes, lo que estadísticamente significa que el sumatorio de sus efectos sigue una distribución normal independientemente de la distribución que siga cada una de las fuentes. Asumir que los ruidos son Gaussianos también simplifica la matemática, puesto que basta con conocer los estadísticos de primer y segundo orden (media y desviación típica, respectivamente) para definir completamente el ruido de manera estadística.

Tal y como explica Maybeck, el funcionamiento del Filtro Kalman es básicamente estadístico. Se trata de combinar las distintas informaciones de una misma variable conocidos los valores y sus incertidumbres, es decir, las funciones de densidad. Estos valores pueden provenir de mediciones o de cálculos según la dinámica del sistema.

Supóngase que se trata de estimar una variable x . Por un lado se obtiene su valor z_1 en un instante t_1 con una determinada incertidumbre determinada por la desviación típica σ_{z_1} . La función de densidad de la variable condicionada a la medición sería la mostrada en la Figura 2.9. Este valor puede provenir de una medición, es decir, de la lectura de un sensor, o del cálculo a partir del conocimiento de las variables en un instante anterior y de la dinámica del sistema.

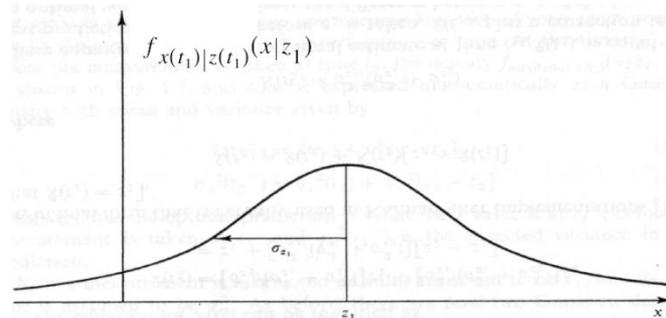


Figura 2.9. Función de densidad del valor de la variable x condicionada a la medida z_1 (Maybeck, 1979).

Por otro lado, en otro instante infinitésimamente inmediato ($t_1 \approx t_2$) tal que el valor verdadero de la variable x no ha cambiado, se obtiene su valor z_2 por otro medio distinto al anterior con una desviación típica σ_{z_2} , es decir, definiendo la función de densidad de la Figura 2.10.

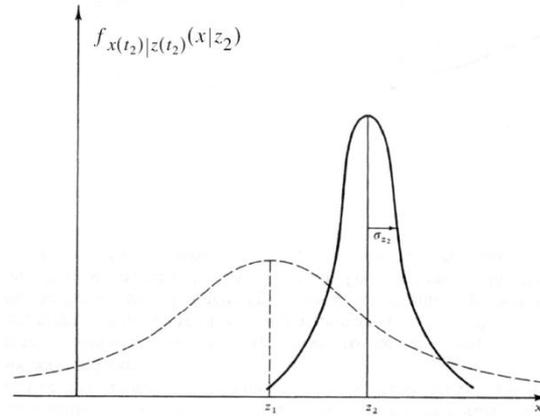


Figura 2.10. Función de densidad del valor de la variable x condicionada a la medida z_2 (Maybeck, 1979).

Estadísticamente, la mejor forma de combinar ambas funciones de densidad es definir otra distribución normal cuyos estadísticos se calculan según la expresión (2.1).

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sigma_{z_2}}{\sigma_{z_1} + \sigma_{z_2}} \cdot z_1 + \frac{\sigma_{z_1}}{\sigma_{z_1} + \sigma_{z_2}} \cdot z_2 \\ \frac{1}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{z_2}^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

De manera que la mejor estimación es $\hat{x}(t_2) = \mu$ y la incertidumbre que existe en esta estimación está definida por $\sigma(t_2) = \sigma$. La función de densidad resultante de la estimación es la mostrada en la Figura 2.11.

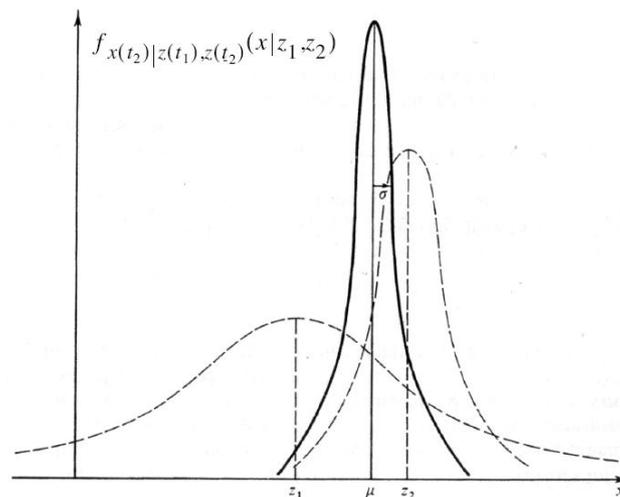


Figura 2.11. Función de densidad de la estimación del valor de la variable x condicionada a las medidas z_1 y z_2 (Maybeck, 1979).

Reordenando las ecuaciones, se puede definir la ganancia K en cada instante según la expresión (2.2).

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t_2) &= z_1 + K(t_2) \cdot (z_2 - z_1) \\
 \sigma^2(t_2) &= [1 - K(t_2)] \cdot \sigma_{z_1}^2 \\
 K(t_2) &= \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nótese que la estimación es óptima en términos estadísticos, que la incertidumbre es menor que las incertidumbres de ambas fuentes del valor de la variable x y que la estimación engloba la información de ambas informaciones. El acento circunflejo sobre la variable indica que se trata de una estimación.

Una vez estimado el valor de la variable x en el instante t_2 , $\hat{x}(t_2)$, y conociendo la dinámica del sistema, se puede calcular el valor de la variable en el instante siguiente, $\hat{x}^-(t_3)$. Del mismo modo, conociendo la incertidumbre de la variable en el instante t_2 , $\sigma^2(t_2)$, y la incertidumbre del sistema (como sistema estocástico), se puede calcular la incertidumbre de $\hat{x}^-(t_3)$, expresada como su desviación típica $\sigma^{-2}(t_3)$. A este proceso se le conoce como predicción, puesto que conocidos los valores de las variables (de entrada y de estado) de un sistema, se calcula *a priori* (previamente al proceso de estimación por combinación de varias fuentes de información) su valor en el instante siguiente. Nótese el superíndice negativo ($-$) que denota que se trata de la predicción de la estimación.

Si ya en el instante siguiente, t_3 , se mide el valor de esta variable, z_3 , con una incertidumbre caracterizada por σ_{z_3} , se tienen de nuevo dos valores de una misma variable para el mismo instante. Como se ha expuesto en el caso anterior, la mejor forma de combinar esta información es aplicando el Filtro Kalman, siendo $\hat{x}^-(t_3)$ lo que antes era z_1 y siendo z_3 lo que antes era z_2 , quedando así la expresión (2.3).

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t_3) &= \hat{x}^-(t_3) + K(t_3) \cdot [z_3 - \hat{x}^-(t_3)] \\
 \sigma^2(t_3) &= [1 - K(t_3)] \cdot \sigma^{-2}(t_3) \\
 K(t_3) &= \frac{\sigma^{-2}(t_3)}{\sigma^{-2}(t_3) + \sigma_{z_3}^2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A este proceso se le conoce como corrección, puesto que corrige el valor predicho según la dinámica del sistema con el valor obtenido de las mediciones teniendo en cuenta las incertidumbres de ambos valores y de manera estadísticamente óptima. En este caso ya no existe el superíndice negativo puesto que ya se trata de la estimación corregida.

2.2.2 Filtro Kalman lineal y discreto en el tiempo

Welch (2006) supone una introducción al Filtro Kalman (*Kalman Filter*, KF) más avanzada y rigurosa que la de Maybeck (1979), y es la referencia utilizada para las siguientes explicaciones del Filtro Kalman y Filtro Kalman Extendido (*Extended Kalman Filter*, EKF). Generalizando lo expuesto anteriormente para un sistema de $n \in \mathbb{N}$ variables de estado ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$), $m \in \mathbb{N}$ variables de entrada ($\vec{u} \in \mathbb{R}^m$) y $p \in \mathbb{N}$ medidas ($\vec{z} \in \mathbb{R}^p$), las ecuaciones en diferencias que rigen un sistema lineal en su

formulación espacio-estado y en el dominio temporal discreto son las que se presentan en la expresión (2.4). Welch utiliza la denominación “medidas” (*measurements*) para referirse a la variable \vec{z} como aquellas variables cuyo valor se mide. Como se ha expuesto anteriormente, las variables de salida del sistema dinámico son aquellos aspectos observables de la respuesta del sistema o los efectos del sistema que retornan al entorno (Karnopp, 2006). Es decir, que las medidas forman parte de las variables de salida y es por ello que otros autores emplean el término “salidas” (*outputs*) para referirse a la variable \vec{z} , aunque en realidad pueden existir salidas, en cuanto a efectos del sistema sobre el entorno, que no se miden y que por tanto no pertenecen a la variable \vec{z} tal y como se utiliza en la estimación de estados. En consecuencia, en la presente Tesis, se emplea la denominación “variables de salida medidas” o “salidas medidas” o simplemente “medidas” para referirse a aquellas variables de salida del sistema que se miden en el sistema real y que se agrupan en la variable vectorial \vec{z} .

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= A \cdot \vec{x}_{k-1} + B \cdot \vec{u}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k &= H \cdot \vec{x}_k + \vec{v}_k\end{aligned}\tag{2.4}$$

En la expresión (2.4) las matrices $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ y $H \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ constituyen el modelo del sistema. Las variables $\vec{w} \in \mathfrak{R}^n$ y $\vec{v} \in \mathfrak{R}^p$ representan el ruido del proceso y el ruido de la medición, respectivamente, y es lo que convierte al sistema en estocástico. Fundamentalmente, la adición de estos ruidos es lo que permite al Filtro Kalman materializar que el modelo no es perfecto y que se requiere una corrección del mismo coherente con ambas fuentes de información (modelo y mediciones) para obtener la mejor estimación posible, estadísticamente, de los estados. Como se ha explicado anteriormente, se asume que se trata de ruidos blancos Gaussianos, que se caracterizan por sus matrices de covarianzas, consideradas constantes en el tiempo, $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, respectivamente (2.5).

$$\begin{aligned}p(\vec{w}) &\approx N(0, Q) \\ p(\vec{v}) &\approx N(0, R)\end{aligned}\tag{2.5}$$

La expresión del modelo (2.4) permite realizar la estimación *a priori* de la variable de estado en el instante $k \in \mathfrak{N}$, es decir $\hat{\vec{x}}_k^- \in \mathfrak{R}^n$, lo que equivale a la etapa o proceso de predicción. Posteriormente, las ecuaciones del Filtro Kalman permiten obtener, a partir de la predicción y de las medidas $\vec{z}_k \in \mathfrak{R}^p$, la estimación *a posteriori* $\hat{\vec{x}}_k \in \mathfrak{R}^n$, es decir, la etapa o proceso de corrección. De esta manera se pueden definir dos errores (2.6), el error *a priori* $\vec{e}_k^- \in \mathfrak{R}^n$ y el error *a posteriori* $\vec{e}_k \in \mathfrak{R}^n$.

$$\begin{aligned}\vec{e}_k^- &= \vec{x}_k - \hat{\vec{x}}_k^- \\ \vec{e}_k &= \vec{x}_k - \hat{\vec{x}}_k\end{aligned}\tag{2.6}$$

Como es lógico, estos errores no se pueden calcular, puesto que se desconoce el valor real de la variable \vec{x} en el instante k , que es lo que se trata de estimar. Sin embargo, sí se pueden minimizar estadísticamente. Para ello se define matriz de covarianzas corregidas $P_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y su correspondiente matriz de predicción $P_k^- \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, según la expresión (2.7).

$$\begin{aligned} P_k^- &= E\left[\tilde{e}_k^- \cdot \tilde{e}_k^{-T}\right] \\ P_k &= E\left[\tilde{e}_k \cdot \tilde{e}_k^T\right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tal y como se mostró anteriormente con una variable unidimensional, la estimación definitiva (*a posteriori*) óptima resulta ser la suma de la predicción y de una combinación lineal de la diferencia entre las mediciones obtenidas (\tilde{z}_k) y las que se hubieran obtenido del sistema si la predicción fuera real, es decir, las mediciones predichas ($\hat{\tilde{z}}_k^- = H \cdot \hat{\tilde{x}}_k^-$), según se establece en la expresión (2.8). A esta diferencia (\tilde{y}_k) también se la conoce como *residuo de la innovación* o *residuo de la medida*.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= \tilde{z}_k - H \cdot \hat{\tilde{x}}_k^- \\ \hat{\tilde{x}}_k &= \hat{\tilde{x}}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot \tilde{y}_k \\ K_k^{Kalman} &= \frac{P_k^- \cdot H^T}{H \cdot P_k^- \cdot H^T + R} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donde la ganancia $K_k^{Kalman} \in \mathfrak{R}^{n \cdot p}$, distinta en cada instante k , es la responsable de la minimización de la covarianza del error *a posteriori* P_k , como se demuestra en Maybeck (1979), Brown (1992) y Jacobs (1993).

Recopilando lo expuesto hasta el momento, el Filtro Kalman es un algoritmo que estima de manera óptima las variables de estado de un sistema realizando en cada instante de tiempo los dos procesos de la expresión (2.9).

$$\begin{aligned} \text{Predicción: } &\begin{cases} \hat{\tilde{x}}_k^- = A \cdot \hat{\tilde{x}}_{k-1} + B \cdot \tilde{u}_{k-1} \\ P_k^- = A \cdot P_{k-1} \cdot A^T + Q \end{cases} \\ \text{Corrección: } &\begin{cases} K_k^{Kalman} = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + R)^{-1} \\ \hat{\tilde{x}}_k = \hat{\tilde{x}}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot (\tilde{z}_k - H \cdot \hat{\tilde{x}}_k^-) \\ P_k = (I - K_k^{Kalman} \cdot H) P_k^- \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Evidentemente, es necesario proveer a este algoritmo de los valores iniciales $\hat{\tilde{x}}_0$ y P_0 y de los valores de las covarianzas de los ruidos de proceso, Q , y de medición, R .

Las condiciones iniciales pueden ser conocidas si el sistema parte de una situación conocida, como el reposo y, en cualquier caso, la veracidad de su valor sólo interviene en la velocidad de la convergencia del algoritmo, como se demuestra en Welch (2006).

En cuanto a las covarianzas de los ruidos, aunque pueden existir métodos más o menos eficientes para su determinación, en la práctica estos parámetros se ajustan por ensayo y error sobre medidas disponibles del sistema (*off-line*). En Grewal (1993) se describe un método de cálculo de estos parámetros.

Una propiedad importante del Filtro Kalman es que la matriz H contribuye en el cálculo de la ganancia K_k^{Kalman} de manera que magnifica aquellas componentes de la variable de salida que son relevantes para la estimación, es decir, aquellas que guardan una relación directa con alguna componente de la variable de estado. Por consiguiente, si no existe una relación entre variables a través de H , el estimador no convergerá en

una solución. En tal caso, cuando no existe una relación directa entre las variables de estado que se tratan de estimar y las medidas, materializada en la matriz H , se dice que es un proceso “no observable”.

En resumen, el Filtro Kalman es fundamentalmente una corrección de los valores de los estados resultantes de la resolución del modelo del sistema, donde esta corrección es proporcional al error de las variables de salida calculadas también según el modelo respecto de las medidas del sistema real. La constante de proporción varía en cada paso temporal y se calcula según un algoritmo que combina las incertidumbres del proceso y de las medidas de manera que el valor estimado es estadísticamente óptimo, bajo las condiciones ya expuestas al inicio.

2.2.3 Filtro Kalman Extendido discreto en el tiempo

Para los sistemas no lineales se desarrolló el Filtro Kalman Extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*) (Slotine, 1987; Botayeb, 1997). Esta variación del Filtro Kalman se basa en linealizar el sistema en torno al punto de funcionamiento en cada instante, convirtiendo así el sistema no lineal en uno lineal que varía en el tiempo.

En el caso genérico de variables vectoriales ($\vec{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\vec{u} \in \mathfrak{R}^m$ y $\vec{z} \in \mathfrak{R}^p$), el sistema queda definido por las funciones vectoriales $\vec{f}: \mathfrak{R}^{n+m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $\vec{h}: \mathfrak{R}^{n+p} \rightarrow \mathfrak{R}^p$ (2.10). La función \vec{f} expresa la variable de estado \vec{x} en un instante en función de su valor en el instante anterior, de la variable de entrada \vec{u} y del ruido de proceso \vec{w} . La función \vec{h} expresa la variable de salida medida \vec{z} en función del valor de la variable de estado \vec{x} y del ruido de las medidas \vec{v} en el mismo instante. Como en el caso anterior, los ruidos blancos Gaussianos tienen la dimensión de los estados y de las salidas respectivamente: $\vec{w} \in \mathfrak{R}^n$ y $\vec{v} \in \mathfrak{R}^p$. Como en el Filtro Kalman lineal, es la inclusión del ruido de proceso lo que convierte al sistema en estocástico y lo que permite aplicar la estimación de estados. Por mantener la coherencia con Welch (2006) se presenta la formulación con los ruidos integrados en las funciones del modelo denominada *non-additive noise EKF*, aunque no sea ésta la más usual (Simon, 2006).

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \vec{f}(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_{k-1}, \vec{w}_{k-1}) \\ \vec{z}_k &= \vec{h}(\vec{x}_k, \vec{v}_k)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Puesto que no se conoce el valor del ruido en cada instante, se pueden aproximar las variables de estado y mediciones despreciando los ruidos. Además, tampoco se conoce el valor de la variable de estado \vec{x}_{k-1} , sólo se tiene la estimación de su valor en el instante anterior. Ambos hechos resulta en la expresión (2.11), donde se calcula el valor aproximado de la variable de estado ($\tilde{\vec{x}}$) y de la variable de salida medida ($\tilde{\vec{z}}$).

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{x}}_k &= \vec{f}(\hat{\vec{x}}_{k-1}, \vec{u}_{k-1}, 0) \\ \tilde{\vec{z}}_k &= \vec{h}(\tilde{\vec{x}}_k, 0)\end{aligned}\tag{2.11}$$

Puesto que se está trabajando con el valor de la estimación en el instante anterior, esta aproximación se puede corregir con el error de la estimación. Es evidente que habrá que convertir ese error del instante anterior al instante actual, es decir, corregir con el efecto de dicho error. Es aquí donde se realiza la linealización, definiendo la matriz $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ como la ganancia que tiene cada variable de estado respecto del valor de todas ellas en torno al punto estimado de funcionamiento del

sistema del instante anterior, es decir, definiendo la matriz A como el Jacobiano de la función \vec{f} respecto de la variable de estado en el instante anterior (2.12).

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &\approx \tilde{\vec{x}}_k + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{\vec{x}}_{k-1}) \\ A_{[i,j]} &= \left. \frac{\partial \vec{f}_{[i]}}{\partial \vec{x}_{[j]}} \right|_{(\hat{\vec{x}}_{k-1}, \hat{\vec{u}}_{k-1}, 0)}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Pero en la aproximación también se eliminó el ruido, por lo que habrá que compensar con el efecto de ese ruido. Del mismo modo, se define la matriz $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, Jacobiano de la función \vec{f} respecto de ruido de proceso en cada estado (2.13).

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &\approx \tilde{\vec{x}}_k + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{\vec{x}}_{k-1}) + W \cdot \vec{w}_{k-1} \\ W_{[i,j]} &= \left. \frac{\partial \vec{f}_{[i]}}{\partial \vec{w}_{[j]}} \right|_{(\hat{\vec{x}}_{k-1}, \hat{\vec{u}}_{k-1}, 0)}\end{aligned}\quad (2.13)$$

El mismo razonamiento se puede seguir con las variables de salida medidas para corregir la aproximación anterior con los efectos del error en la aproximación de la variable de estado y del ruido de medición (2.14).

$$\begin{aligned}\vec{z}_k &\approx \tilde{\vec{z}}_k + H \cdot (\vec{x}_k - \tilde{\vec{x}}_k) + V \cdot \vec{v}_k \\ H_{[i,j]} &= \left. \frac{\partial \vec{h}_{[i]}}{\partial \vec{x}_{[j]}} \right|_{(\tilde{\vec{x}}_k, 0)} \\ V_{[i,j]} &= \left. \frac{\partial \vec{h}_{[i]}}{\partial \vec{v}_{[j]}} \right|_{(\tilde{\vec{x}}_k, 0)}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Las ecuaciones resultantes se expresan en (2.15).

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &\approx \tilde{\vec{x}}_k + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{\vec{x}}_{k-1}) + W \cdot \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k &\approx \tilde{\vec{z}}_k + H \cdot (\vec{x}_k - \tilde{\vec{x}}_k) + V \cdot \vec{v}_k\end{aligned}\quad (2.15)$$

Donde:

- \vec{x}_k y \vec{z}_k son los valores reales de las variables de estado y de salida.
- $\tilde{\vec{x}}_k$ y $\tilde{\vec{z}}_k$ son las aproximaciones de las variables de estado y de salida despreciando los ruidos de proceso y de medida, es decir, la resolución del modelo del sistema.
- $\hat{\vec{x}}_{k-1}$ es la estimación de la variable de estado en el instante anterior
- \vec{w}_{k-1} y \vec{v}_k son los ruidos de proceso y de medición, asumidos como ruidos blancos Gaussianos.
- A es el Jacobiano de \vec{f} respecto de la variable de estado \vec{x} en el punto estimado de funcionamiento del sistema en el instante anterior.

- W es el Jacobiano de \vec{f} respecto de ruido \vec{w} en el punto estimado de funcionamiento del sistema en el instante anterior.
- H es el Jacobiano de \vec{h} respecto de la variable de estado \vec{x} en el punto aproximado de funcionamiento del sistema.
- V es el Jacobiano de \vec{h} respecto de ruido \vec{v} en el punto aproximado de funcionamiento del sistema.

Puesto que los Jacobianos hay que evaluarlos en el punto de funcionamiento adecuado, son diferentes en cada instante y deben de ser siempre recalculados.

Se pueden definir ahora el error de la aproximación de la variable de estado y de la aproximación de las medidas según la expresión (2.16).

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{xk} &= \bar{x}_k - \hat{x}_k \\ \tilde{e}_{zk} &= \bar{z}_k - \hat{z}_k\end{aligned}\quad (2.16)$$

Puesto que los valores reales no se conocen, es necesario aproximar estos errores con el efecto del error en el instante anterior (2.17). Donde las nuevas variables $\bar{\epsilon}_k \in \mathfrak{R}^n$ y $\bar{\eta}_k \in \mathfrak{R}^p$ corresponden a los efectos de los ruidos de proceso y medición, respectivamente, siendo variables aleatorias de media nula y matrices de covarianza $W \cdot Q \cdot W^T$ y $V \cdot R \cdot V^T$, respectivamente (2.18). Estas expresiones son lineales y tienen la forma de las ecuaciones en diferencias del Filtro Kalman original (2.4), por lo que se puede aplicar otro Filtro Kalman sobre este modelo del error de la estimación no lineal para obtener la mejor estimación del error en la estimación no lineal.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{xk} &\approx A(\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \bar{\epsilon}_k \\ \tilde{e}_{zk} &\approx H \cdot \tilde{e}_{xk} + \bar{\eta}_k\end{aligned}\quad (2.17)$$

Las variables aleatorias utilizadas en este particular Filtro Kalman que trabaja sobre los errores son las expresadas en la expresión (2.18).

$$\begin{aligned}p(\tilde{e}_{xk}) &\approx N(0, E[\tilde{e}_{xk} \cdot \tilde{e}_{xk}^T]) \\ p(\bar{\epsilon}) &\approx N(0, W \cdot Q \cdot W^T) \\ p(\bar{\eta}) &\approx N(0, V \cdot R \cdot V^T)\end{aligned}\quad (2.18)$$

Es decir, que el error de la medición \tilde{e}_{zk} se puede utilizar para estimar el error de la aproximación del estado \tilde{e}_{xk} . Esta estimación, llamada por tanto \hat{e}_{xk} , se puede utilizar para corregir la aproximación de la expresión (2.16) y obtener una estimación *a posteriori* de los estados (2.19).

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + \hat{e}_{xk}\quad (2.19)$$

Y consecuentemente se llegaría a la expresión del Filtro Kalman de la expresión (2.20).

$$\begin{aligned}\hat{e}_{xk} &= \hat{e}_{xk}^- + K_k^{Kalman}(\tilde{e}_{zk} - H \cdot \hat{e}_{xk}^-) \\ K_k^{Kalman} &= \frac{P_k^- \cdot H^T}{H \cdot P_k^- \cdot H^T + V \cdot R \cdot V^T}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Si se obvia el paso de calcular una estimación *a priori* o predicción del error \hat{e}_k^- y se deja con valor nulo, la expresión se simplifica hasta la ecuación (2.21).

$$\hat{e}_{xk}^- = K_k^{Kalman} \cdot \tilde{e}_{zk}^- \quad (2.21)$$

Substituyendo la ecuación (2.21) en la ecuación (2.19) y recordando el significado del error de la aproximación de la medición (2.16) y del significado de esta última aproximación (2.11), se tiene la ecuación de corrección del Filtro Kalman Extendido en la ecuación (2.22).

$$\hat{x}_k^- = \tilde{x}_k^- + \hat{e}_{xk}^- = \tilde{x}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot \tilde{e}_{zk}^- = \tilde{x}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot (\tilde{z}_k^- - \tilde{z}_k^-) = \tilde{x}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot (\tilde{z}_k^- - \tilde{h}(\tilde{x}_k^-, 0)) \quad (2.22)$$

Donde la aproximación de la variable de estado \tilde{x}_k^- es en realidad la predicción o estimación *a priori* \hat{x}_k^- proveniente del conocimiento del sistema (función \tilde{f}) y del valor de las variables o de su estimación en el instante anterior (2.11), obviando el ruido de proceso.

Reagrupando todas las ecuaciones anteriores y añadiendo los subíndices adecuados a aquellas variables que varían en función del instante, se tiene el algoritmo del Filtro Kalman Extendido expresado en la expresión (2.23).

$$\begin{aligned} \text{Predicción: } & \begin{cases} \hat{x}_k^- = \tilde{f}(\hat{x}_{k-1}^-, \bar{u}_{k-1}, 0) \\ P_k^- = A_k \cdot P_{k-1} \cdot A_k^T + W_k \cdot Q_{k-1} \cdot W_k^T \end{cases} \\ \text{Corrección: } & \begin{cases} K_k^{Kalman} = P_k^- \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + V_k \cdot R_k \cdot V_k^T)^{-1} \\ \hat{x}_k^- = \hat{x}_k^- + K_k^{Kalman} \cdot (\tilde{z}_k^- - \tilde{h}(\hat{x}_k^-, 0)) \\ P_k = (I - K_k^{Kalman} \cdot H_k) \cdot P_k^- \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Las matrices Q y R incluyen ahora subíndices que permiten definir diferentes covarianzas de los ruidos en cada instante. Como en el caso del Filtro Kalman lineal, se puede asumir que las covarianzas son constantes en el tiempo.

Es interesante remarcar que la función \tilde{h} a través de su Jacobiano H_k contribuye en el cálculo de la ganancia K_k^{Kalman} al igual que ocurre con la matriz H en un sistema lineal. En consecuencia, si no existe una relación entre variables de estado y de salida a través de la función \tilde{h} , el estimador no convergerá en una solución, concluyendo que se trata de un proceso “no observable”.

Finalmente, cabe destacar que si bien el Filtro Kalman sobre un sistema lineal es estadísticamente óptimo, el Filtro Kalman Extendido no lo es necesariamente, puesto que el efecto de las variables aleatorias con distribución normal (\bar{w} y \bar{v}) sobre el sistema ya no sigue necesariamente esta misma distribución, lo que puede provocar inestabilidad en presencia de ruido (Picard, 1991). Al tratarse de un sistema no lineal, estas variables sufren también una transformación no lineal, perdiéndose su distribución normal. Se trata por tanto de una aproximación por linealización de la optimización por el Teorema de Bayes aplicado por el Filtro Kalman lineal (Welch, 2006).

2.2.4 Filtro Kalman Extendido continuo en el tiempo

El Filtro Kalman Extendido se puede aplicar también al dominio continuo del tiempo, expresando el modelo mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (*Ordinary Differential Equations*, ODEs). En este caso, se cambia la formulación anterior extrayendo la acción del ruido de las funciones \vec{f} y \vec{h} (2.24), la formulación más usual del EKF en el dominio continuo del tiempo, con el objetivo de que conceptualmente sea equiparable a la metodología que se presentará posteriormente (Simon, 2006).

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) + \vec{w}(t) \\ \vec{z}(t) &= \vec{h}(\vec{x}(t)) + \vec{v}(t)\end{aligned}\quad (2.24)$$

Donde los ruidos también son funciones temporales, según la expresión (2.25).

$$\begin{aligned}p(\vec{w}(t)) &\approx N(0, Q(t)) \\ p(\vec{v}(t)) &\approx N(0, R(t))\end{aligned}\quad (2.25)$$

En el caso del dominio continuo del tiempo, las fases de predicción y corrección se calculan conjuntamente según la expresión (2.26). La deducción de este algoritmo sigue un proceso similar al explicado anteriormente con las adaptaciones propias al dominio continuo del tiempo y extrayendo la transformación de los ruidos a través de la dinámica del sistema, por lo que no se repite aquí y se muestra directamente el resultado.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\vec{x}}}(t) &= \vec{f}(\hat{\vec{x}}(t), \vec{u}(t)) + K^{Kalman}(t) \cdot (\vec{z}(t) - \vec{h}(\hat{\vec{x}}(t))) \\ \dot{P}(t) &= A(t) \cdot P(t) + P(t) \cdot A(t)^T + Q(t) - K^{Kalman}(t) \cdot H(t) \cdot P(t) \\ K^{Kalman}(t) &= P(t) \cdot H(t)^T \cdot R(t)^{-1}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Es importante señalar que no existen las fases de predicción y de corrección porque los valores corregidos o estimados se tienen en cuenta para la resolución de las ecuaciones diferenciales del modelo, es decir, que el algoritmo del Filtro Kalman Extendido está integrado en el modelo. La solución de las ecuaciones diferenciales (el punto de equilibrio del sistema dinámico en cada instante) está afectado por las correcciones introducidas por el algoritmo del observador de estados ($K^{Kalman}(t) \cdot (\vec{z}(t) - \vec{h}(\hat{\vec{x}}(t)))$).

Los Jacobianos se calculan también en el dominio continuo del tiempo, según la expresión (2.27).

$$\begin{aligned}A(t) &= \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\hat{\vec{x}}(t), \vec{u}(t)} \\ H(t) &= \left. \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{x}} \right|_{\hat{\vec{x}}(t)}\end{aligned}\quad (2.27)$$

2.2.5 Unscented Kalman Filter

Simon J. Julier y Jeffrey K. Uhlmann han desarrollado en la Universidad de Oxford una variante del Filtro Kalman aplicable a sistemas no lineales y alternativa al Filtro Kalman Extendido. En Julier (1995) se presenta este nuevo filtro que ambos autores han ido desarrollando (Julier 1997, 2002 y 2004) y que ha terminado

denominándose *Unscented Kalman Filter* (UKF). Estos autores corrigen el principal problema del Filtro Kalman Extendido gracias al método desarrollado inicialmente por ambos autores para aproximar transformaciones no lineales sobre distribuciones probabilísticas (Julier, 1994), que consiste fundamentalmente en transformar individualmente una muestra de puntos de dichas distribuciones y calcular posteriormente los estadísticos (media y desviación típica) de la distribución transformada sobre la muestra de puntos transformados individualmente (Figura 2.12).

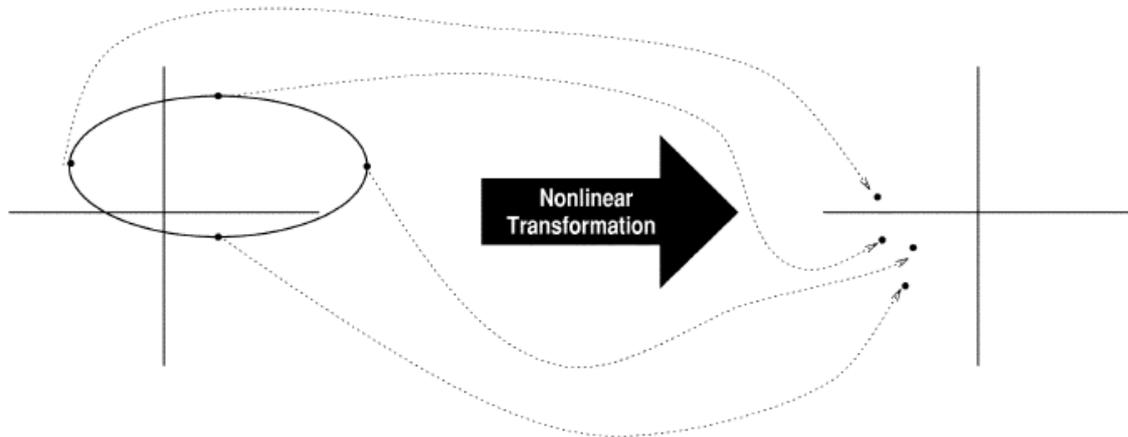


Figura 2.12. Transformación no lineal de una muestra de puntos correspondiente a una distribución estadística (Julier, 1994).

Estos autores defienden que una solución óptima al problema del filtrado no lineal requiere mantener una descripción completa de la densidad de probabilidad condicionada. Esto conlleva un número muy elevado de parámetros y puntos, por lo que es común el uso del Filtro Kalman Extendido pese a sus tres inconvenientes principales desde el punto de vista práctico:

1. La linealización puede producir un filtro altamente inestable si el paso de integración (*timestep*) no es suficientemente pequeño.
2. El cálculo del Jacobiano suele llevar a dificultades en la implementación.
3. Un paso de integración suficientemente pequeño suele conllevar un coste computacional demasiado elevado.

Desde el punto de vista teórico, el Filtro Kalman Extendido calcula la media de la variable de estado del nuevo instante como la transformación de la media de la estimación del instante anterior, calculando independientemente la transformación de los errores sobre el sistema linealizado. Esto es debido a la dificultad de definir los errores como variables aleatorias de manera que puedan ser tratados por el sistema no lineal. Julier, sin embargo, propone un método para su definición que facilita su transformación no lineal.

La hipótesis de partida es: “Con un número determinado de parámetros debería ser más sencillo aproximar una función Gaussiana que una función no-lineal arbitraria”. Se trata por tanto de buscar una parametrización que recoja la media y la covarianza al mismo tiempo que permita la propagación de la información a través de un conjunto de ecuaciones no lineales. Esto se logra definiendo la distribución de manera discreta con un cierto número de puntos, llamados “puntos sigma”, que mantienen los primeros momentos estadísticos (media y covarianza) y que se transforman individualmente de manera no lineal. Los puntos sigma dan nombre a otro observador de estados variante

de este desarrollado por Julier junto a otros autores (Merwe, 2004). Otros similares han surgido bajo el nombre genérico de “Filtros de Partículas” (*Particle Filter* - Lin, 2011).

En primer lugar, se procede al cálculo de los puntos sigma a partir de la matriz $P_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y de la estimación en el instante anterior según la ecuación (2.28). Nótese que se ha modificado la notación original utilizada por los autores para mantener la coherencia con la utilizada hasta este punto, sustituyendo la notación $X(k|k)$ por X_k para denotar el valor corregido de la variable genérica X en el instante k y sustituyendo $X(k+1|k)$ por X_{k+1}^- para denotar el valor predicho de la misma variable en el instante siguiente. Nótese igualmente que los autores parten del instante k para realizar la estimación en el instante $k+1$, lo cual se ha cambiado aquí para mantener la coherencia con todo lo anterior, realizando la estimación en el instante k a partir del instante $k-1$; se sustituye por tanto k por $k-1$ y $k+1$ por k , sin que esto altere el algoritmo.

$$\begin{aligned} \sigma_{k-1} &\leftarrow 2 \cdot n \text{ columnas de } \pm \sqrt{(n+\kappa) \cdot P_{k-1}} \\ (\bar{\chi}_{k-1})_0 &= \hat{x}_{k-1} \\ (\bar{\chi}_{k-1})_i &= (\sigma_{k-1})_i + \hat{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Donde:

- σ_{k-1} es la matriz del conjunto de $(2n + \kappa)$ puntos sigma con media nula.
- κ un número natural seleccionado para mejorar la estimación dando más peso al punto central.
- $(\bar{\chi}_{k-1})_i$ es el punto sigma i ($i \in \mathbb{N} / i \in [1, 2n]$) de manera que la media de todos ellos sea el valor de la estimación corregida en el instante inmediatamente anterior al instante k .

A continuación se transforma cada punto sigma a través de la dinámica del sistema no lineal, expresada por la función \bar{f} , según la ecuación (2.29), donde $(\bar{\chi}_k^-)_i$ es la transformación del punto sigma i .

$$(\bar{\chi}_k^-)_i = \bar{f}((\bar{\chi}_{k-1})_i, \bar{u}_{k-1}) \quad (2.29)$$

A continuación se realiza la estimación *a priori* como la media de las transformaciones de los puntos sigma según la ecuación (2.30).

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa \cdot (\bar{\chi}_k^-)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (\bar{\chi}_k^-)_i \right\} \quad (2.30)$$

Y como matriz de covarianzas *a priori* se calcula la covarianza de las transformaciones de los puntos sigma, según la ecuación (2.31).

$$P_k^- = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa \cdot [(\bar{\chi}_k^-)_0 - \hat{x}_k^-][(\bar{\chi}_k^-)_0 - \hat{x}_k^-]^T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [(\bar{\chi}_k^-)_i - \hat{x}_k^-][(\bar{\chi}_k^-)_i - \hat{x}_k^-]^T \right\} \quad (2.31)$$

El siguiente paso es la simulación de la medición a partir de las transformaciones de los puntos sigma a través de la dinámica del sistema no lineal expresada por la

función \bar{h} , según la ecuación (2.32), donde $(Z_k^-)_i$ es la simulación de la medición a partir de la transformación puntos sigma i .

$$(Z_k^-)_i = \bar{h}((\chi_k^-)_i) \quad (2.32)$$

Se calcula la medida *a priori* como media de las simulaciones de las mediciones a partir de las transformaciones de los puntos sigma (2.33).

$$\hat{z}_k^- = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa \cdot (Z_k^-)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (Z_k^-)_i \right\} \quad (2.33)$$

Y se calcula la covarianza de la predicción de la medición $((P_k^-)_{zz})$ como covarianza de las simulaciones de las mediciones a partir de las transformaciones de los puntos sigma (2.34).

$$(P_k^-)_{zz} = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa \cdot [(Z_k^-)_0 - \hat{z}_k^-][(Z_k^-)_0 - \hat{z}_k^-]^T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [(Z_k^-)_i - \hat{z}_k^-][(Z_k^-)_i - \hat{z}_k^-]^T \right\} \quad (2.34)$$

Con la matriz anterior, se realiza el cálculo de la covarianza de la innovación o residuo de la medición $((P_k^-)_{vv})$, según la ecuación (2.35), teniendo en cuenta la covarianza del ruido de medición (R_k) . Esta covarianza se corresponde con el denominador en el cálculo de la ganancia del Filtro Kalman $(H \cdot P_k^- \cdot H^T + R)$.

$$(P_k^-)_{vv} = (P_k^-)_{zz} + R_k \quad (2.35)$$

También se calcula la covarianza cruzada $(P_k^-)_{xz}$ entre la estimación del estado y de la medición (2.36) que se corresponde con el numerador en el cálculo de la ganancia del Filtro Kalman $(P_k^- \cdot H^T)$.

$$(P_k^-)_{xz} = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa \cdot [(\chi_k^-)_0 - \hat{x}_k^-][(Z_k^-)_0 - \hat{z}_k^-]^T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [(\chi_k^-)_i - \hat{x}_k^-][(Z_k^-)_i - \hat{z}_k^-]^T \right\} \quad (2.36)$$

La etapa de corrección es similar a la del Filtro Kalman adaptada a la nueva nomenclatura (2.37).

$$\begin{aligned} K_k^{UKF} &= (P_k^-)_{xz} \cdot (P_k^-)_{vv}^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k^{UKF} \cdot (\bar{z}_k - \hat{z}_k^-) \\ P_k &= P_k^- - K_k^{UKF} \cdot (P_k^-)_{vv} \cdot (K_k^{UKF})^T \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.6 Filtro Kalman Dual

Cabe reseñar que también es posible plantear dos Filtros Kalman (lineales o en su versión extendida) anidados de manera que se mejora la convergencia (Wan, 1997 y 2001) o con el fin de estimar simultáneamente parámetros y estados, como ya se ha realizado en la dinámica vehicular en la Universidad de Coventry (Wenzel, 2006) o en la Universidad Cambridge (Cheng, 2011 -Figura 2.13).

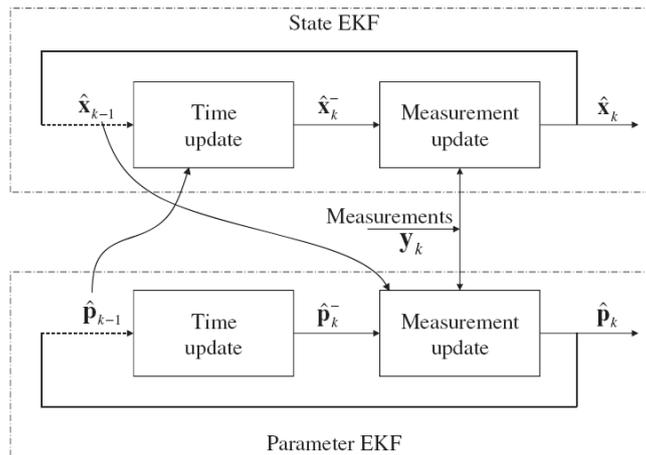


Figura 2.13. Esquema del funcionamiento del Filtro Kalman Extendido Dual para la estimación simultánea de parámetros y estados (Cheng, 2011).

2.2.7 Observador Luenberger

El Observador Luenberger (*Luenberger Observer*) fue presentado por su autor, David Luenberger, en 1964 (Luenberger, 1964), investigador de la Universidad de Stanford especializado en estos algoritmos (Luenberger, 1971). Fundamentalmente se trata de un regulador proporcional que actúa realimentando el error en las salidas sobre los estados.

Se parte del sistema dinámico lineal genérico en su formulación espacio-estado en el dominio discreto del tiempo (2.38).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &= A \cdot \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + B \cdot \bar{\mathbf{u}}_{k-1} \\ \bar{\mathbf{z}}_k &= H \cdot \bar{\mathbf{x}}_k\end{aligned}\quad (2.38)$$

El Observador Luenberger aplica una corrección a la proporcional al error en las salidas cuya constante es denotada por la matriz $L \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, invariable en el tiempo (2.39). Al igual que las covarianzas de los ruidos de proceso y de medida en los Filtros Kalman, la ganancia L se ajusta por ensayo y error sobre medidas disponibles del sistema (*off-line*).

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= A \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + B \cdot \bar{\mathbf{u}}_{k-1} + L \cdot (\bar{\mathbf{z}}_{k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_k &= H \cdot \hat{\mathbf{x}}_k\end{aligned}\quad (2.39)$$

Si se parte del dominio continuo del tiempo, el sistema queda definido matricialmente por la expresión (2.40).

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= A \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + B \cdot \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \bar{\mathbf{z}}(t) &= H \cdot \bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\quad (2.40)$$

Sobre esta formulación también resulta inmediato aplicar el Observador Luenberger (2.41).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= A \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + B \cdot \bar{\mathbf{u}}(t) + L \cdot (\bar{\mathbf{z}}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)) \\ \hat{\mathbf{z}}(t) &= H \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\quad (2.41)$$

En resumen, el observador de estados Luenberger utiliza una ganancia constante en la corrección, a diferencia del Filtro Kalman, cuya ganancia varía a lo largo del

tiempo en busca de una corrección óptima. En contrapartida se trata de un algoritmo mucho más sencillo de implementar y con menor coste computacional.

Si la ganancia L es alta, el Observador Luenberger converge rápidamente, aunque puede llegar a ser inestable, especialmente en presencia de ruido en las medidas, y no elimina el error en régimen permanente. Estas es una característica heredada del regulador proporcional y subsanada por otras técnicas de regulación que también pueden ser utilizadas como observador de estados, como la técnica *Sliding Mode* para la inestabilidad o la adición de la componente integral del regulador proporcional-integral.

Birk (1988) y Zeitz (1987) han extendido el Observador Luenberger para ser utilizado en modelos matemáticos no-lineales (Kiencke, 1997).

2.2.8 Observador Proporcional - Integral

Entendiendo el Observador Luenberger como un regulador proporcional, surge inmediatamente la mejora de añadir una componente integral para eliminar el error residual en régimen permanente (2.42). Así surge el Observador Proporcional-Integral (*PI Observer*), presentado por Kaczorek (1979) en Polonia y aplicado en primer lugar en la Universidad de Boston por Shafai y su equipo en los años 80 (Shafai, 1985; Beale, 1988, 1989 y 1990; Kim, K., 1989). Este observador destaca por su simplicidad similar a la del Observador Luenberger, su teórica mejor convergencia en régimen permanente y un coste computacional similar.

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= \vec{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + K^p \cdot \tilde{y}(t) + K^i \cdot \int_0^t \tilde{y}(t) \cdot dt \\ \hat{z}(t) &= \vec{h}(\hat{x}(t))\end{aligned}\tag{2.42}$$

Al igual que las covarianzas de los ruidos de proceso y de medida en los Filtros Kalman y la ganancia del Observador Luenberger, las constantes $K^p, K^i \in \mathfrak{R}^{n-p}$ se ajustan generalmente por ensayo y error sobre medidas disponibles del sistema (*off-line*).

2.2.9 Principios básicos del Observador *Sliding Mode*

El Observador *Sliding Mode* (*Sliding Mode Observer*, SMO) aplica la técnica de control del mismo nombre (*Sliding Mode Control*) para evitar la inestabilidad del Observador Luenberger, siendo más robusto ante la presencia de ruido. En Drakunov (1992) se exponen ampliamente los principios y fundamentos matemáticos de este observador, cuyos aspectos más prácticos se explican mejor en Drakunov (1995). Barbot (2002) y Perruquetti (2002) son otras publicaciones interesantes sobre este observador de estados. Utkin (1992) es una amplia obra sobre la técnica de control en la que se basa este observador de estados.

Este observador utiliza una alta ganancia no lineal para corregir los estados llevándolos hacia una hipersuperficie definida por el residuo de la medida nulo (2.8). La ganancia normalmente sigue una función discontinua, como la del signo del residuo, haciendo que las trayectorias del observador, por las que se desplaza (literalmente traducido, se desliza, *slide*) el residuo, estén prioritariamente orientadas hacia la hipersuperficie de residuo nulo, asegurando así la convergencia. Teóricamente, al utilizar el signo del residuo para definir la función de deslizamiento, las trayectorias no están afectadas por el ruido, como sí ocurre con el Observador Proporcional-Integral y el Luenberger.

El Observador *Sliding Mode* tiene por tanto interesantes propiedades en la estimación de estados en sistemas no lineales, aunque su implementación es más compleja que la del Observador Luenberger y la del Observador Proporcional-Integral. Por otro lado, tiene menor coste computacional que el Filtro Kalman Extendido (penalizado siempre por el cálculo de los Jacobianos), aunque no está diseñado para ser estadísticamente óptimo como el Filtro Kalman lineal.

2.2.10 Observabilidad

Por definición, un sistema es observable si para cualquier estado inicial desconocido, existe un tiempo finito tal que el conocimiento de la entrada y la salida sobre el intervalo de tiempo es suficiente para determinar en forma única el estado inicial. En caso contrario, no es observable (Braslavsky, 2001).

Retomando el sistema genérico lineal y discreto en el tiempo (2.43), se dice que es observable si existe un número finito de pasos temporales k de manera que el conocimiento de la secuencia de las variables de entradas hasta ese momento ($\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}$) y de la misma secuencia de las variables de salida medidas ($\vec{z}_0, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{k-1}$) es suficiente para determinar el estado inicial del sistema (\vec{x}_0).

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= A \cdot \vec{x}_{k-1} + B \cdot \vec{u}_{k-1} \\ \vec{z}_k &= H \cdot \vec{x}_k\end{aligned}\tag{2.43}$$

Expresando la secuencia temporal del sistema y asumiendo, por simplicidad, que las entradas son nulas ($\vec{u} = 0$), se obtiene la expresión (2.44).

$$\begin{aligned}\vec{z}_0 &= H \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{z}_1 &= H \cdot \vec{x}_1 = H \cdot A \cdot \vec{x}_0 \\ &\dots \\ \vec{z}_{k-1} &= H \cdot \vec{x}_{k-1} = H \cdot A^{k-1} \cdot \vec{x}_0\end{aligned}\tag{2.44}$$

Expresando las ecuaciones anteriores de forma matricial, se obtiene el sistema de la (2.45). Este sistema es compatible determinado si el rango de su matriz de coeficientes es igual al número de variables de estado, $k = n$.

$$\begin{bmatrix} H \\ H \cdot A \\ \dots \\ H \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \\ \dots \\ \vec{z}_{n-1} \end{bmatrix}\tag{2.45}$$

Por consiguiente, es condición única y suficiente que el determinante de la llamada “matriz de observabilidad” (2.46) sea no nulo.

$$\text{Matriz de observabilidad: } \begin{bmatrix} H \\ H \cdot A \\ \dots \\ H \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

2.3 Estimación de estados en dinámica vehicular

2.3.1 Filtro Kalman Lineal

Dado que el vehículo como sistema dinámico es altamente no lineal, el Filtro Kalman lineal no ha sido muy aplicado, puesto que requiere una fuerte simplificación de la dinámica para llegar a obtener un sistema lineal. Un ejemplo de su aplicación es Doumiati (2009a), de la Universidad Técnica de Compiègne (UTC, Francia) y siguiendo sus trabajos previos (Doumiati, 2008a y 2008b). Doumiati utiliza el Filtro Kalman para estimar el ángulo de balanceo (Figura 2.2) y la transferencia de carga dentro de un proceso de tres etapas, el cual tiene el objetivo de estimar la fuerza vertical sobre cada neumático (Figura 2.14).

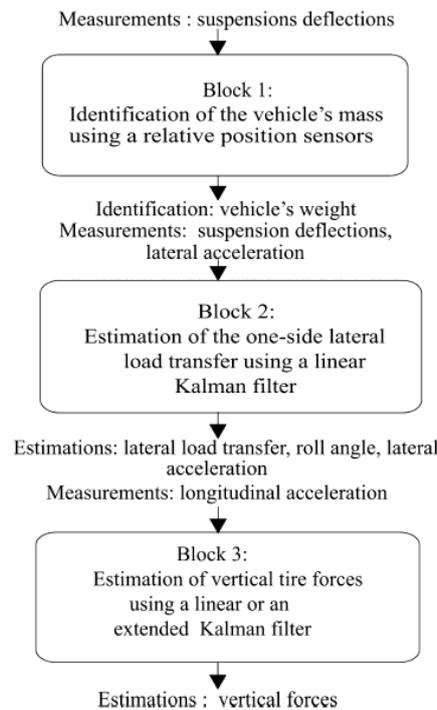


Figura 2.14. Diagrama del proceso de estimación de las fuerzas verticales mediante la aplicación sucesiva de el Filtro Kalman Lineal y el Filtro Kalman Extendido (Doumiati, 2009a).

Otro ejemplo es Anderson (2010), donde se aplica sólo a la parte cinemática (*kinematic Kalman Filter*) sobre un modelo de bicicleta (sin transferencia de masas, velocidad constante, sin peralte ni inclinación en la carretera, asumiendo que el vehículo tiene un comportamiento perfectamente neutro -ni subvirador ni sobrevirador-) y modelo lineal de neumáticos. El Filtro Kalman se utiliza para combinar la medida del GPS y del giróscopo y estimar así del ángulo de deriva, la velocidad de guiñada y la orientación del vehículo

2.3.2 Filtro Kalman Extendido

El Filtro Kalman Extendido es posiblemente el más utilizado en dinámica vehicular. Los textos de los años 90 de Laura R. Ray (1995a, 1995b, 1996, 1997, 1998a, 1998b, 2001), en los que se utiliza el EKF para la estimación de los esfuerzos en los neumáticos y el coeficiente de fricción, son quizá las referencias más utilizadas en este contexto (Figura 2.15).

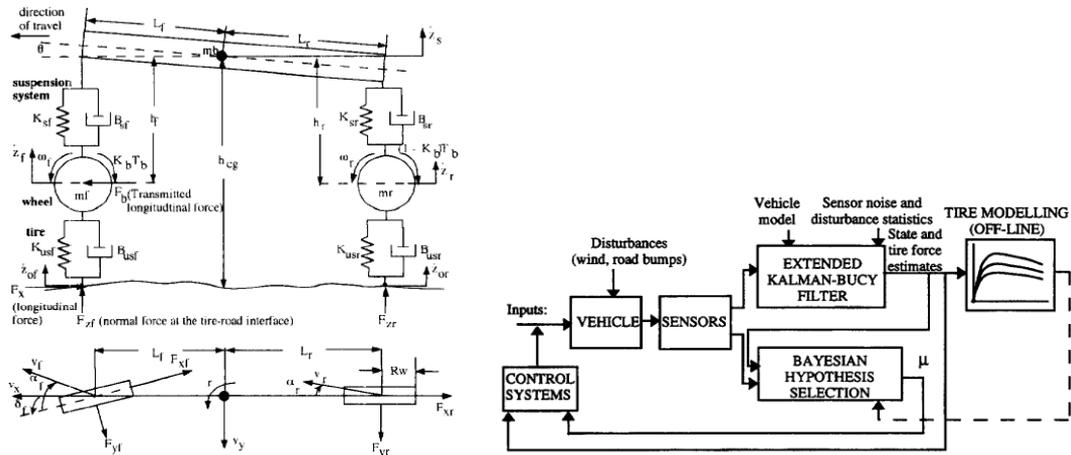


Figura 2.15. Izquierda: Modelo de bicicleta que considera el movimiento de la carrocería y los comportamientos verticales equivalentes de la suspensión y de los neumáticos. Derecha: Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido y consiguiente estimación del coeficiente de fricción. (Ray 1995a).

En Baffet (2008b y 2009a), de la UTC, también se utiliza el EKF para estimar en dos etapas los esfuerzos en los neumáticos, la velocidad de guiñada, la deriva del vehículo y la rigidez a deriva de los neumáticos (Figura 2.16).

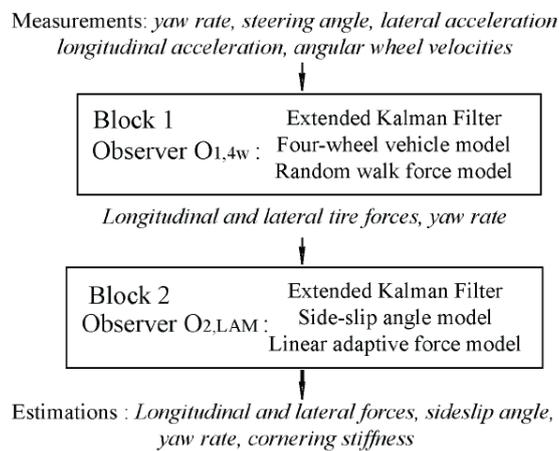


Figura 2.16. Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos, el ángulo de deriva, la velocidad de guiñada y la rigidez a deriva de los neumáticos mediante dos Filtros Kalman Extendidos sucesivos (Baffet, 2009a).

Una aplicación interesante es la que propone Tsunashima (2006), donde se realizan diferentes estimaciones suponiendo diferentes coeficientes de fricción (modos). A continuación, para cada instante y en función del resultado de cada estimación y de la lectura del vehículo, se calcula la probabilidad de cada uno de los modos y se calcula el coeficiente de fricción como suma de todos los coeficientes ponderados con la probabilidad de su modo (Figura 2.17).

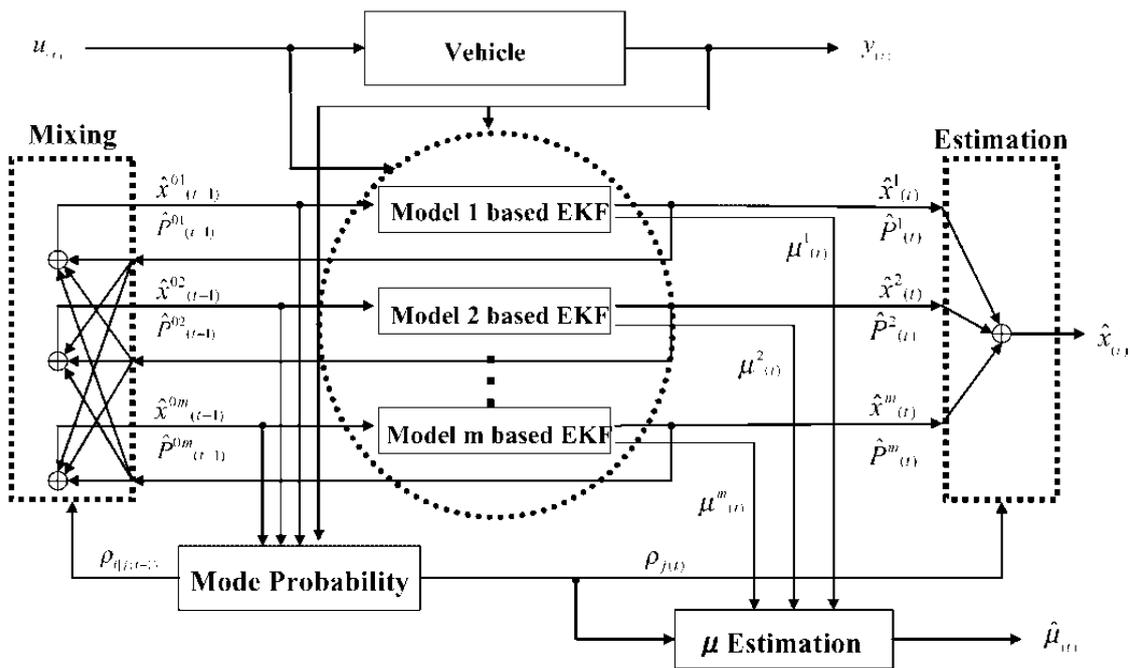


Figura 2.17. Diagrama de la estimación del coeficiente de fricción mediante ponderación probabilística de estimaciones de estados paralelas con el Filtro Kalman Extendido asumiendo distintos valores del coeficiente (Tsunashima, 2006).

En Dakhllallah (2008), Laboratorio sobre las Interacciones Vehículo–Infraestructura–Conductor de Versailles (LIVIC), se plantea un Filtro Kalman Extendido sobre un modelo de vehículo de cuatro ruedas con transferencias de carga longitudinal y transversal en función de las aceleraciones correspondientes (sin tener en cuenta cabeceo ni balanceo) junto al modelo matemático de Dugoff sobre cada una de las cuatro ruedas (Figura 2.18). De esta manera, el Filtro Kalman Extendido permite estimar el ángulo de deriva y el deslizamiento de cada una de las cuatro ruedas así como la velocidad longitudinal y transversal del vehículo a partir de la velocidad de giro de cada rueda, el giro de volante, las aceleraciones longitudinal y transversal y la velocidad angular de guiñada. A partir de estas estimaciones, se calculan los esfuerzos longitudinales y transversales sobre los neumáticos y, junto a las cargas verticales calculadas con las transferencias de carga, se estima el coeficiente de fricción.

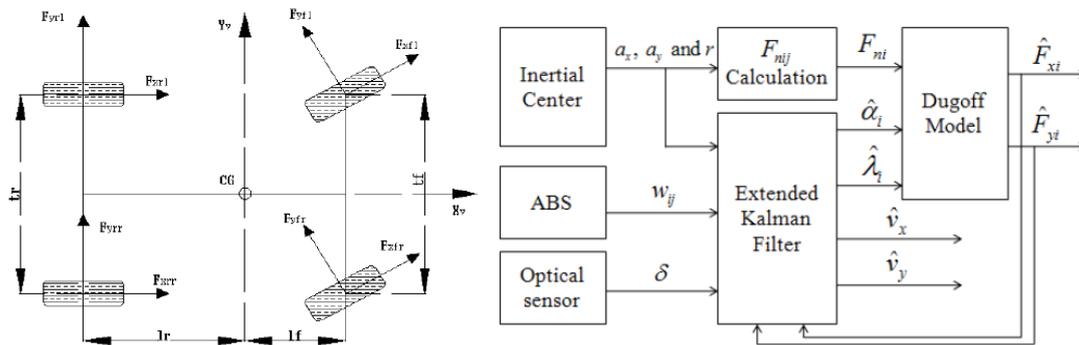


Figura 2.18. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Diagrama de la estimación de las fuerzas en los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido y el modelo de neumático de Dugoff. (Dakhllallah, 2008).

En Kim, J. (2013) se utiliza un sencillo modelo de vehículo con el modelo de neumático de Pacejka para estimar las fuerzas laterales en el neumático aplicando el EKF sobre datos experimentales de varias maniobras y se validan las fuerzas frente a las

mediciones en el banco de ensayos del neumático. En Gao (2012) se realiza la estimación de la velocidad y la deriva del vehículo con la medición de los esfuerzos en los neumáticos para mayor robustez y precisión de la estimación. En Nam (2012) se añade la estimación de la rigidez a deriva de los neumáticos para alimentar al control de estabilidad. En Louis (2012) se realiza la estimación de los esfuerzos en los neumáticos sobre un modelo más complejo, de 14 grados de libertad. En Luque (2013) se utiliza el EKF junto a una red neuronal para estimar el par autoalineante y, posteriormente, el coeficiente de fricción.

2.3.3 Unscented Kalman Filter

Este observador de estados especialmente desarrollado para sistemas altamente no lineales es cada vez más utilizado en dinámica vehicular desde su aparición en 2004. El grupo de la UTC lo implementó ya en 2009 (Doumiati, 2009b) para el cálculo de las fuerzas laterales en los neumáticos y la deriva del vehículo, en un modelo de bicicleta (habiendo previamente calculado las cargas verticales según Doumiati, 2009a) con el modelo de neumático de Dugoff, demostrando mejores resultados que el Filtro Kalman Extendido, por lo que continuó con su aplicación en la dinámica vehicular (Doumiati, 2010, 2011 y 2012) incluyendo la estimación de la deriva. En Wang (2012), también de la UTC, se presenta igualmente la estimación de los esfuerzos en los neumáticos y la deriva del vehículo, sobre un modelo de cuatro ruedas combinado con el modelo de neumático de Dugoff, mediante un EKF, para la ejecución en tiempo real, y un Filtro de Partículas. En Hartung (2010) también se pone de manifiesto la ventaja del UKF frente al EKF en la estimación de los esfuerzos en los neumáticos.

Lin (2011, 2012 y 2013), de la Universidad de Aeronáutica y Astronáutica de Nanjing, plantea el Filtro de Partículas para la estimación del deslizamiento y de la fuerza longitudinal de los neumáticos, lo que le permite calcular la pendiente de la relación entre ellos y calcular el coeficiente de fricción sobre una base de datos que relaciona dicho coeficiente con la pendiente de la curva deslizamiento-fuerza longitudinal.

Por último, Botha (2012) utiliza el UKF junto con mediciones de GPS, AHRS (*Attitude Heading Reference System*) y giróscopo para estimar la deriva lateral del vehículo.

2.3.4 Filtro Kalman Dual

En Cheng (2011) se utiliza un Filtro Kalman Extendido Dual para la identificación de parámetros y estados de un vehículo articulado (cabeza tractora más semirremolque), para identificar aquellos parámetros que resultan desconocidos al variar la carga (como la masa y posición del centro de gravedad del remolque), además de los desconocidos en cualquier vehículo (como las rigideces de los neumáticos) sobre un modelo de vehículo articulado basado en dos bicicletas unidas (Figura 2.19) y utilizando un modelo lineal de neumático.

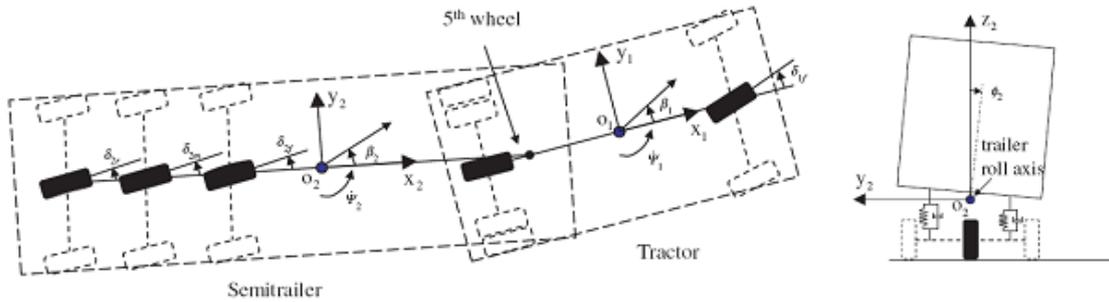


Figura 2.19. Esquema de un modelo de vehículo articulado basado en el modelo de bicicleta considerando el balanceo de la carrocería (Cheng, 2011).

En Wenzel (2006) se utiliza un modelo de vehículo de cuatro ruedas (Figura 2.20) relativamente complejo, lo que permite la utilización del modelo de neumático de Pacejka, aunque sin incluir todos los efectos. Se estiman la masa, el momento de inercia sobre el eje vertical y la posición longitudinal del centro de gravedad como parámetros y la velocidad y aceleración lateral, el ángulo de deriva del vehículo y de cada neumático y la fuerza vertical y el deslizamiento de cada neumático como estados. Este procedimiento se valida sobre simulación, partiendo de datos obtenidos del software TruckSim[®], y sobre experimentación, adquiriendo los datos de un vehículo articulado experimental instrumentado. Es interesante remarcar que algunos estados (como las fuerzas verticales en los neumáticos) no son precisos hasta que algún parámetro relacionado (como la masa) ha convergido y que el Filtro Kalman Extendido Dual es capaz de compensar la imprecisión en los parámetros de los modelos de vehículo y neumáticos y que su identificación es sensible al modelo de vehículo, al modelo de neumáticos y a las matrices de covarianza de ruido del proceso, pero no así la estimación de estados.

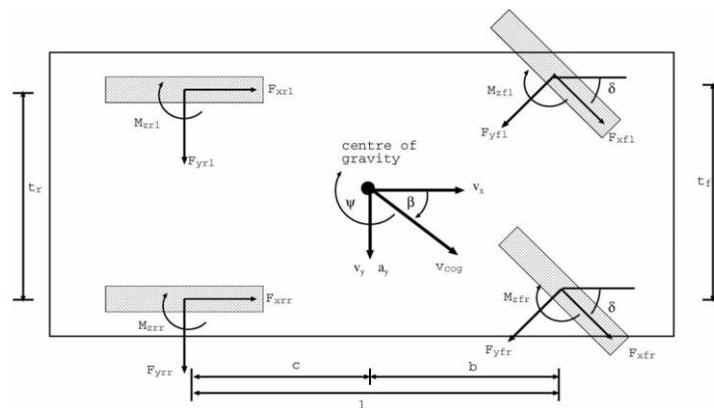


Figura 2.20. Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas (Wenzel, 2006).

Otro ejemplo lo aporta Lin (2009b) quien también aplica un Filtro Kalman Extendido Dual para también estimar parámetros y estados.

2.3.5 Observador Luenberger

El Observador Luenberger ha sido utilizado en dinámica vehicular por la Universidad de Standford, como por ejemplo en Hsu (2006a), donde se presenta un observador no lineal capaz de estimar el coeficiente de fricción y el ángulo de deriva de los neumáticos a través del sistema de dirección eléctrico (Figura 2.21), no mecánico como es habitual. En primer lugar, y mediante un Observador Luenberger discreto, se estima el par autoalineante sobre el neumático tomando como entradas las corrientes a

los motores de dirección y como salida los ángulos de dirección de los neumáticos medidos con *encoders*. Esta primera parte se valida experimentalmente midiendo la fuerza en las bieletas de dirección mediante células de carga y transformándola en par autoalineante en un programa de simulación de sistemas multicuerpo (MSC.Adams®). En una segunda etapa, se utiliza un observador que estima y corrige las estimaciones de coeficiente de adherencia y ángulos de deriva basándose en el par autoalineante y en la fuerza lateral sobre un modelo de bicicleta plana. La metodología se valida experimentalmente en distintas maniobras midiendo los ángulos de deriva con ayuda de un GPS y midiendo el coeficiente de adherencia de la calzada.

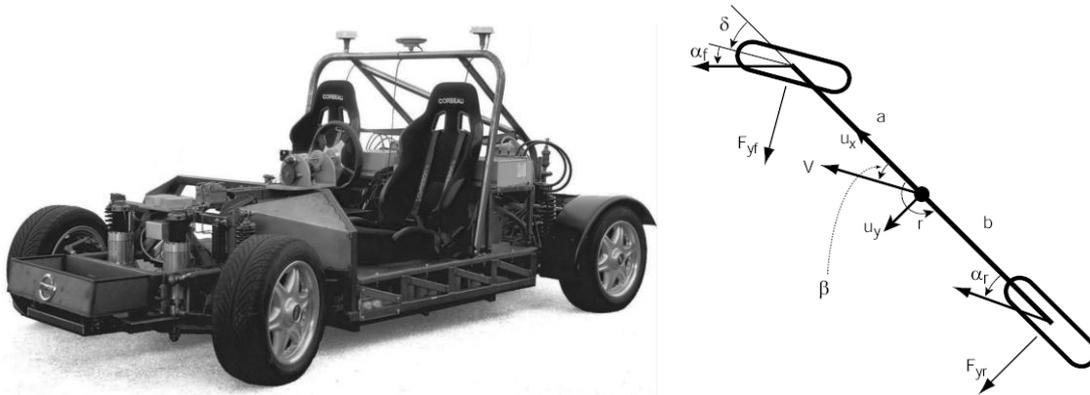


Figura 2.21. Izquierda: Fotografía de un vehículo experimental con sistema de dirección eléctrico. Derecha: Esquema de un modelo de bicicleta. (Hsu, 2006).

En Sebsadji (2008a) se añade al trabajo de Dakhallah (2008), también del LIVIC, un Observador Luenberger para la estimación de la pendiente de la calzada. Se utiliza el EKF con mediciones (de aceleraciones longitudinal y transversal, velocidad de guiñada y de cada una de las cuatro ruedas) sobre un modelo de vehículo de cuatro ruedas para estimar las variables que permiten el cálculo de los esfuerzos en los neumáticos a través del modelo de Dugoff, suponiendo conocido el coeficiente de fricción entre neumático y carretera para cada una de las cuatro ruedas y las rigideces a deslizamiento longitudinal y deriva. Con la velocidad longitudinal y los esfuerzos de los neumáticos estimados, se plantea un Observador Luenberger sobre la dinámica longitudinal del vehículo para la estimación de la pendiente de la carretera (Figura 2.22).

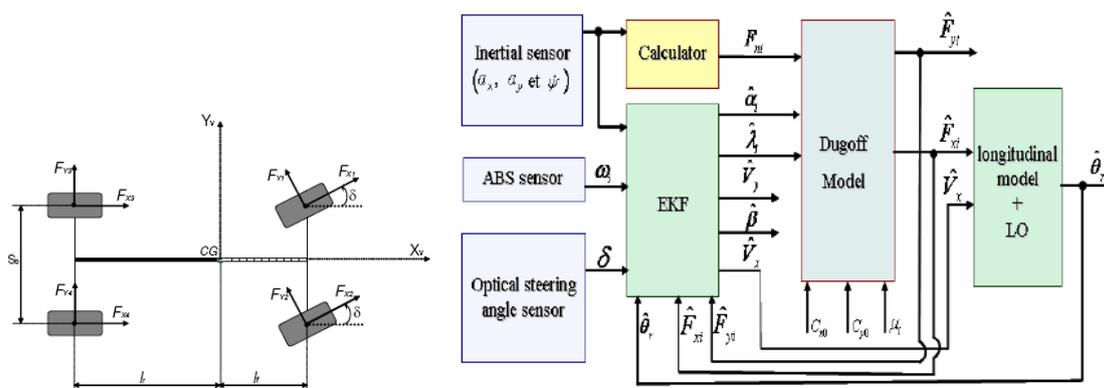


Figura 2.22. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Diagrama de la estimación de la inclinación de la calzada mediante la aplicación del Filtro Kalman Extendido, el modelo de neumático de Dugoff y el Observador Luenberger. (Sebsadji, 2008a).

Otros ejemplos de la aplicación del Observador Luenberger en dinámica vehicular son Kiencke (1997) y Zhu (2012).

2.3.6 Observador *Sliding Mode*

En Imine (2006), de la Universidad de Versailles, se desarrolla un método para la estimación del perfil de la calzada basado en el Observador *Sliding Mode* sobre un modelo de vehículo tridimensional simplificado (Figura 2.3 dcha.), que permite su formulación espacio-estado y el planteamiento de este observador. Se estima el desplazamiento vertical del punto de contacto de cada uno de los cuatro neumáticos en base a medidas del desplazamiento vertical de cada rueda y del vehículo y ángulos de balanceo, cabeceo y guiñada del vehículo. Esta línea de investigación continuó (Imine, 2008), y el mismo autor publicó junto a Khemoudj (2010 y 2013) otra aplicación del Observador *Sliding Mode* un método para la estimación de los esfuerzos en los neumáticos de vehículos pesados sobre un modelo basado en la guiñada y el balanceo.

El Observador *Sliding Mode* también fue usado originariamente en la UTC, como en Stéphant (2007), donde se presenta un observador de estados aplicado al ángulo de deriva del vehículo sobre un modelo de bicicleta plana combinado con un modelo de neumáticos lineal. De esta manera se plantea la formulación espacio-estado no lineal siendo los estados la velocidad del vehículo, su ángulo de deriva y su velocidad de guiñada, las entradas son el ángulo girado por las ruedas directrices y las fuerzas longitudinales en los neumáticos. Se utiliza un observador de estados *Sliding Mode* con ganancia variable de forma trigonométrica para estimar el ángulo de deriva, que se compara con las mediciones reales obtenidas a partir de un sensor Correvit® (ver referencia) (Figura 2.23).

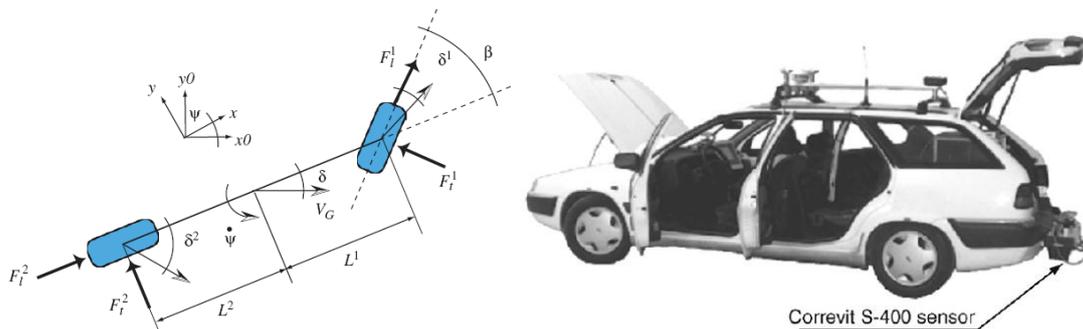


Figura 2.23. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Fotografía de un vehículo instrumentado para la obtención de datos experimentales con el fin de validar la estimación de estados. (Stéphant, 2007a).

En Baffet (2007a), también de la UTC, se propone la estimación de las fuerzas longitudinales y transversales y de la rigidez a deriva de los neumáticos y del ángulo de deriva del vehículo a través de dos pasos (Figura 2.24). En el primer paso se utiliza un *Sliding Mode Observer* (SMO) para la estimación de los esfuerzos longitudinales y laterales en las ruedas delantera y trasera de un modelo de bicicleta. A continuación, se plantea un Filtro Kalman Extendido para la estimación del ángulo de deriva del vehículo, sobre el mismo modelo, del que se obtienen los ángulos de deriva de cada rueda, y de la rigidez a deriva de ambos neumáticos. Se utiliza un modelo lineal de neumático en el que la rigidez es la suma de una constante y una variable que se estima. Este procedimiento se aplica sobre experimentos con un vehículo real que permite medir los estados estimados para su validación. En Baffet (2009b) se presenta la misma metodología pero utilizando un modelo de neumático que tiene en cuenta la variación del coeficiente de fricción neumático-calzada.

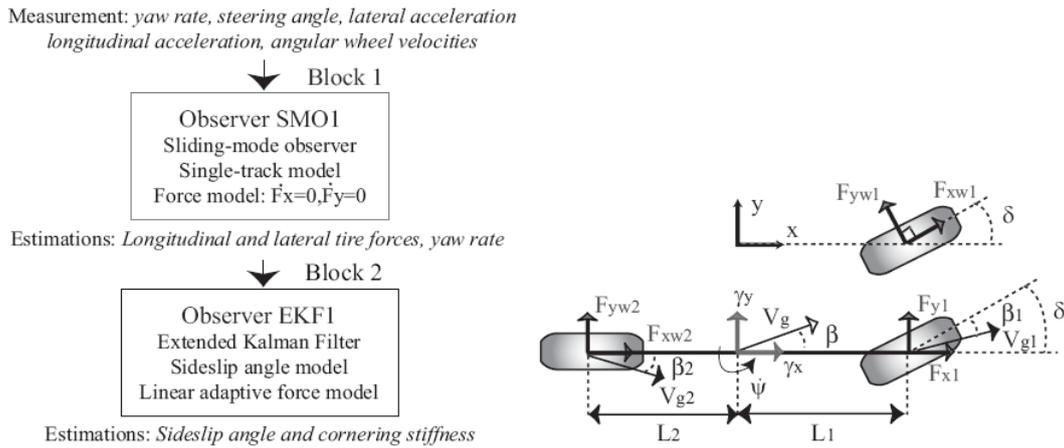


Figura 2.24. Izquierda: Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos mediante el *Sliding Mode Observer* y la consiguiente estimación de la deriva del vehículo y de las rigideces a deriva de los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido. Derecha: Esquema de un modelo de bicicleta. (Baffet, 2007).

En Jaballah (2012) se utiliza sólo el modelo dinámico del giro de una rueda y la lectura de su velocidad para estimar la fuerza longitudinal en el neumático mediante un SMO de segundo orden. Lin también utilizó el SMO en 2010 (Lin, 2010) para estimar las fuerzas longitudinales en los neumáticos y combinarlo con la estimación del deslizamiento longitudinal para calcular el coeficiente de fricción neumático-calzada. En Zhang (2011) se estiman primero los esfuerzos en los neumáticos y después la velocidad y la deriva del vehículo, en ambos casos aplicando un SMO sobre un modelo de bicicleta. Arat (2012) también utiliza un SMO para estimar las fuerzas longitudinales en los neumáticos, lo cual utiliz posteriormente para estimar la deriva de cada uno de ellos mediante un Observador Luenberger sobre un modelo de bicicleta. En Guo (2013) se materializa la misma estimación de esfuerzos en los neumáticos con su aplicación en tiempo real.

2.3.7 Observador Proporcional-Integral

Koenig y Mammar (Koenig, 2002) retomaron este observador para su aplicación en dinámica vehicular. En Mammar (2006) ya se propone este observador para estimar la dinámica lateral del vehículo incluso en presencia de peralte.

Siguiendo a Mammar, Sentouth (2006a, 2006b, 2006c, 2007) lo aplica en 2008 (Sentouth, 2008) para estimar simultáneamente la dinámica del vehículo, el peralte y el coeficiente de fricción de la calzada, donde también propone un procedimiento para estimar la pendiente de la calzada incluso en presencia de cabeceo del vehículo por efectos inerciales.

Sebsadji prosigue con esta línea de investigación (Sebsadji, 2008a), donde aún se utiliza el EKF y el Observador Luenberger sobre un modelo de vehículo de cuatro ruedas (Figura 2.25) para estimar las fuerzas en los neumáticos con el modelo de Dugoff y la pendiente de la calzada (similar a la publicación de Dakhlallah (2008), quien también es autor de esta publicación).

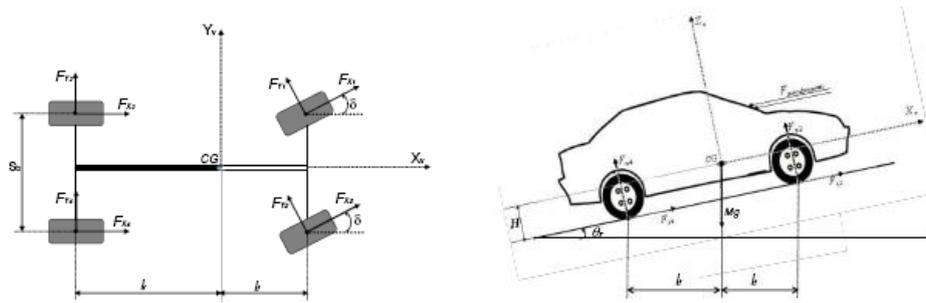


Figura 2.25. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Esquema de un vehículo sometido a la inclinación de la calzada. (Sebsadji, 2008a).

Pero en Sebsadji (2008b) se realiza la estimación de la deriva mediante el EKF sobre el modelo de bicicleta para alimentar a la estimación del balanceo y el peralte mediante el Observador PI (Figura 2.26). Y en Sebsadji (2008c) realiza la cartografía 3D de la calzada estimando el peralte y la pendiente y localizando el vehículo también a través del EKF y del Observador PI sobre las medidas de la unidad inercial (INS).

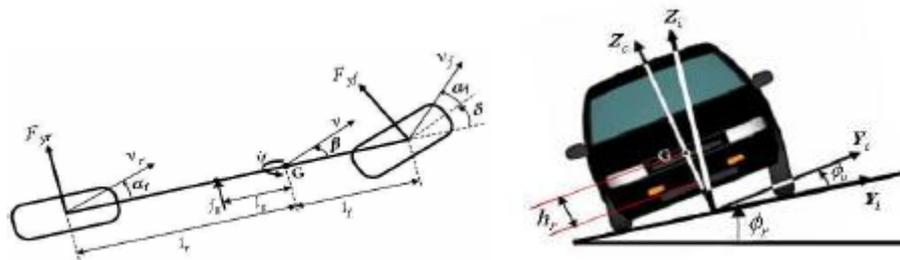


Figura 2.26. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Esquema de un vehículo sometido al peralte de la calzada. (Sebsadji, 2008b).

Menhour (2012), junto con Koenig, aplica también el Observador PI para estimar el peralte y el balanceo del vehículo sobre un modelo de bicicleta y en base a medidas de la deriva del vehículo, las velocidades de guiñada y balanceo y el ángulo de la dirección.

2.3.8 Otros observadores

Como ya se ha explicado, el algoritmo de cálculo de la ganancia del observador es lo que identifica a cada uno de ellos, sea una constante de Luenberger, una ganancia de Kalman calculada para ser óptima, una función discontinua en el Observador *Sliding Mode*, o teniendo en cuenta la integración de los errores pasados como en el Observador PI. En consecuencia, es posible desarrollar infinidad de nuevos observadores aplicando distintos algoritmos de cálculo en busca de una mejor convergencia en determinados sistemas. Usualmente, se utiliza la dinámica del propio sistema para el cálculo de la ganancia, como también hace el Filtro Kalman, aunque sin tener en cuenta las covarianzas del error. Esto es cierto en cualquier campo en el que se apliquen los estimadores de estado y, por supuesto, en la dinámica vehicular. Se exponen aquí sólo algunos ejemplos en este campo.

En Gao (2010) se propone un observador del ángulo de deriva del vehículo basado en el modelo de bicicleta plana y un modelo de neumático no lineal trigonométrico muy simple (Figura 2.27). Se utiliza un denominado Observador de Alta Ganancia (*High Gain Observer*, HGO) que utiliza la inversa de la matriz de derivadas de la función \vec{h} , que relaciona los estados con las medidas (2.24), para linealizar la corrección en el punto de funcionamiento. Se estiman el ángulo de deriva y el

coeficiente de fricción de la calzada, lo que requiere una aceleración mínima para converger. Se demuestra que el observador propuesto es, en este caso, el doble de rápido que el Observador Luenberger, el cual es a su vez un 15% más rápido que el EKF.

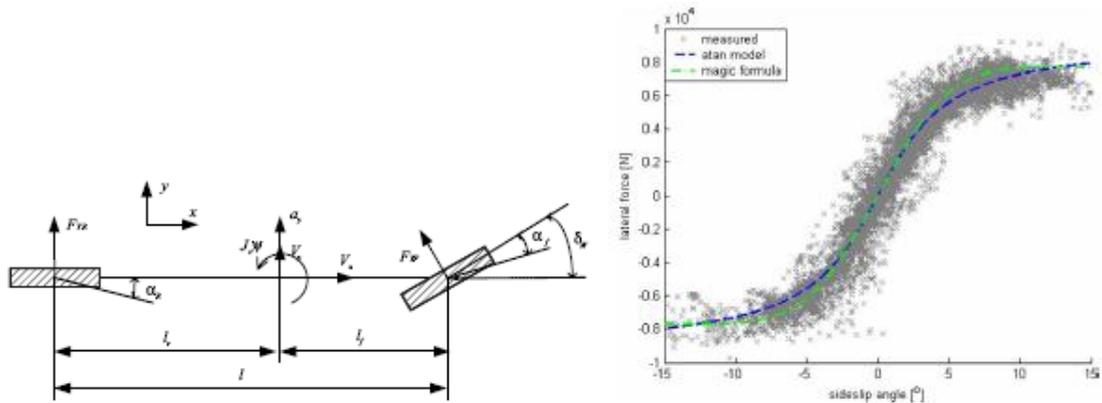


Figura 2.27. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Gráfico de la fuerza lateral en el neumático frente a su ángulo de deriva comparando mediciones, un modelo de neumático trigonométrico simple y el modelo de Pacejka. (Gao, 2010).

En Tseng (2007) se proponen dos observadores basados únicamente en la cinemática para la estimación de los movimientos de cabeceo y balanceo usando una unidad de medida inercial (*Inertial Measurement Unit*, IMU). Entendiendo que la unidad inercial está localizada en el centro de gravedad del vehículo y perfectamente alineada con él, se plantean las ecuaciones cinemáticas de los seis grados de libertad. A continuación, se simplifican hasta llegar a un sistema lineal variante en el tiempo, sobre el que se aplica la teoría de control lineal para la observación de estados, utilizando como ganancia la inversa de la matriz H (2.4), que relaciona los estados con las medidas.

Otro ejemplo de este tipo de observadores es Imsland (2006), donde se estiman las velocidades longitudinal y transversal de un vehículo mediante observador de estados no lineales. En primer lugar se plantea un modelo de vehículo rígido (sin suspensión) de cuatro ruedas y sin transferencias de carga (Figura 2.1 dcha.) combinado con un modelo de neumático no lineal de complejidad similar a la “Fórmula Mágica” de Pacejka. Se estiman las velocidades longitudinal, lateral y de guiñada a partir de mediciones de las mismas aceleraciones y de la velocidad de giro de las ruedas utilizando una ganancia que es función de las propias medidas y que deriva de la dinámica del propio sistema.

2.4 Conclusión del Estado del Arte

La realimentación de las variables de estado permite mejorar el control de los sistemas. Sin embargo, cuando estas variables no se pueden medir, o resulta técnica o económicamente inviable, se recurre a su estimación, es decir, la estimación de estados.

La estimación de estados se basa en el observador de estados, quien realiza el cálculo del valor de las variables de estado correspondiente a las variables de entrada y a las variables de salida medidas en el sistema real. Para realizar dicho cálculo, la estimación de estados requiere un modelo del sistema que reproduzca su dinámica, es decir, que tenga en cuenta las relaciones entre las variables de entrada, de estado y de salida.

Hasta el momento, la estimación de estados utiliza modelos matemáticos, puesto que los observadores de estado son algoritmos cuya aplicación resulta directa sobre el modelo del sistema expresado mediante lenguaje matemático (como las ecuaciones algebraico-diferenciales). Sin embargo, para que estos modelos sean compatibles con la formulación de los observadores de estado se requieren simplificaciones de la realidad que obvian efectos que ciertamente ocurren en el sistema y que pueden tener relevancia.

Por el contrario, cuando el objetivo del modelo del sistema no es la estimación de estados, sino simplemente la simulación del sistema real para su desarrollo, análisis, optimización o implementación de técnicas de control, es frecuente el uso de la ingeniería asistida por ordenador. El uso de softwares específicos de los distintos campos de la ingeniería permite modelizar los sistemas reales con facilidad y flexibilidad, lo que supone la creación de modelos más completos y fieles al sistema real.

El caso particular de los sistemas multicuerpo es un buen ejemplo de esta situación. Las relaciones geométricas, cinemáticas y dinámicas, generalmente no lineales entre numerosos cuerpos rígidos y flexibles que interactúan en el tiempo y en el espacio dando lugar a grandes desplazamientos lineales y angulares, llegan a ser extremadamente complejas. De hecho, requieren el desarrollo de técnicas específicas para su planteamiento matemático y para la resolución de las ecuaciones generadas con el fin de simular el sistema. La dinámica vehicular, por ser un caso particular de los sistemas multicuerpo, combina esta característica con la circunstancia de que los vehículos terrestres tienen una gran importancia en la sociedad actual (economía, transporte, medio ambiente, seguridad, etc.). En consecuencia, la ingeniería asistida por ordenador tiene una de sus principales aplicaciones en la simulación de sistemas multicuerpo, particularmente en la dinámica vehicular.

Por otra parte, y también como consecuencia de la importancia de los vehículos terrestres, las técnicas de control encuentran asimismo en la dinámica vehicular un interesante campo de trabajo. Las técnicas de control pretenden generalmente gobernar los sistemas de manera que su respuesta se mantenga dentro de las especificaciones deseadas. En el caso de la dinámica vehicular este objetivo se traduce en aumentar la seguridad activa de los vehículos terrestres. Resulta evidente que aumentar la seguridad activa de los vehículos, es decir, prevenir la pérdida de control del mismo, cobra actualmente una gran importancia social y económica. Y es por ello que la estimación de estados, como técnica de control, es ampliamente utilizada en la dinámica vehicular para ser capaz de conocer lo que realmente está ocurriendo en el vehículo, aunque no se pueda medir, para actuar en consecuencia y mantener el nivel de seguridad.

Sin embargo, pese al interés de la estimación de estados y a las ventajas de los modelos CAE (como se denominan a los modelos generados mediante software de ingeniería asistida por ordenador), aún no existe ninguna referencia bibliográfica de la combinación de ambos elementos, ni siquiera para su aplicación en dinámica vehicular. La aplicación de modelos CAE en la estimación de estados en dinámica vehicular resulta interesante por su complejidad y por su relevancia social. En conclusión, la estimación de estados sobre modelos CAE es algo novedoso y su aplicación en dinámica vehicular es especialmente interesante.

3 Metodología para la estimación de estados en modelos CAE

3.1 Discusión crítica sobre la estimación de estados

La aplicación de un observador de estados (por ejemplo el Filtro Kalman Extendido) a un modelo matemático de sistema dinámico (por ejemplo un vehículo) se ha convertido en una práctica común en la ingeniería. Sin embargo, extender esta técnica a modelos CAE requiere volver a la base conceptual de la misma para comprender por qué es interesante, qué objetivo persigue, en qué consiste y cómo alcanza su objetivo.

Según lo expuesto anteriormente, un sistema dinámico recibe la acción del entorno en forma de variables de entrada (\vec{u}), lo que altera su estado, caracterizado por las variables de estado (\vec{x}), de manera que sus efectos reaccionan sobre el entorno o son visibles a través de las variables de salida (\vec{z}) (Figura 3.1).

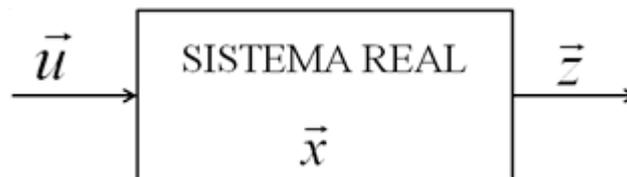


Figura 3.1. Diagrama del sistema dinámico real.

Para estudiar este sistema dinámico se crea un modelo que trata de reproducir su comportamiento (Figura 3.2). Sin embargo, la creación del modelo siempre conlleva unas simplificaciones, lo que significa que la simulación tendrá un error respecto al sistema real, es decir, se trata de una aproximación. Es importante remarcar que el error de la simulación se debe, generalmente, a que el modelo no es perfectamente fiel a la realidad, es decir, que no reproduce todos los efectos realmente presentes en el sistema, lo que origina que el resultado de la simulación no sea el mismo que el observado en el sistema real. En el caso particular del Filtro Kalman, el observador de estados más extendido, el error del modelo se materializa en los ruidos de proceso y de medida, convirtiendo el modelo del sistema en un modelo estocástico.



Figura 3.2. Diagrama del modelo del sistema dinámico.

El error de la simulación resulta visible al comparar los valores de las variables de salida medidas en el sistema real \vec{z} con las mismas variables de salida obtenidas de la simulación del modelo $\tilde{\vec{z}}$. La diferencia cuantitativa entre ambas se denomina residuo de la medida $\tilde{\vec{y}}$ (o de la innovación), según la ecuación (3.1). Resulta lógico pensar que el valor obtenido en la simulación para las variables de estado $\tilde{\vec{x}}$ tampoco coincidirá con su valor real \vec{x} , aunque este último no se conozca.

$$\tilde{\vec{y}}(t) = \vec{z}(t) - \tilde{\vec{z}}(t) \quad (3.1)$$

En el caso de los modelos matemáticos, las relaciones entre las variables se expresan con lenguaje matemático, lo que en un sistema dinámico y en el dominio continuo del tiempo se materializa generalmente en un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales para el cálculo de las variables de estado y en un sistema de ecuaciones algebraicas para el cálculo de las variables de salida.

Como se muestra en la Figura 3.3, la función genérica \vec{f} permite calcular las variables de estado y sus derivadas a partir de ellas mismas y de las variables de entrada en cada paso de integración en el dominio continuo del tiempo. Es decir, que en cada paso de integración se resuelve el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales para calcular el valor de las variables de estado y de sus derivadas. Este cálculo se representa en la Figura 3.3 mediante un primer rectángulo con línea a trazos. Una vez resuelto el sistema y hallado el estado del sistema, la función genérica \vec{h} permite calcular el valor de las variables de salida a partir de las variables de estado. Este segundo cálculo se representa en la Figura 3.3 mediante un segundo rectángulo con línea a trazos.

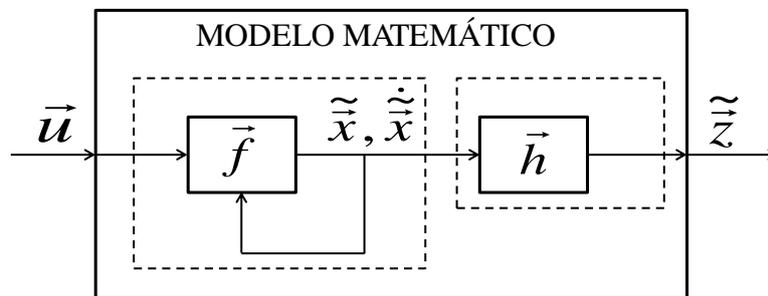


Figura 3.3. Diagrama de la simulación del modelo matemático de un sistema dinámico.

Cuando resulta interesante conocer el valor de las variables de estado, normalmente para la aplicación de técnicas de control sobre el sistema, pero su medida no es viable (técnica o económicamente), se recurre a la estimación de estados. La estimación de estados pretende corregir el error de la simulación respecto del sistema real de manera que los valores obtenidos para las variables de estado sean fiables.

La estimación de estados considera que la simulación es fiel a la realidad si los efectos visibles de la realidad (variables de salida medidas) coinciden con los mismos efectos calculados por la simulación, y que cuando esto ocurre, se puede asumir que el valor de las variables de estado obtenido en la simulación es el valor de las variables de estado en el sistema real. Por ello, tal y como muestra la Figura 3.4, la estimación de estados se basa en realimentar el residuo de la medida a través del algoritmo denominado observador de estados para tenerlo en cuenta en la resolución del sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales de manera que se minimice dicho residuo. Es interesante remarcar que, en el caso de un sistema no lineal en el dominio continuo del tiempo, todo el conjunto de las ecuaciones se resuelve de manera simultánea en cada paso de integración, lo que conlleva que la estimación de estados está incluida en el equilibrio del sistema, por lo que todo el proceso se muestra en la Figura 3.4 dentro de un único rectángulo de línea a trazos. Puesto que los modelos CAE son, generalmente, no lineales y se resuelven en el dominio continuo del tiempo, es sobre esta formulación de los modelos sobre la que se presenta la nueva metodología.

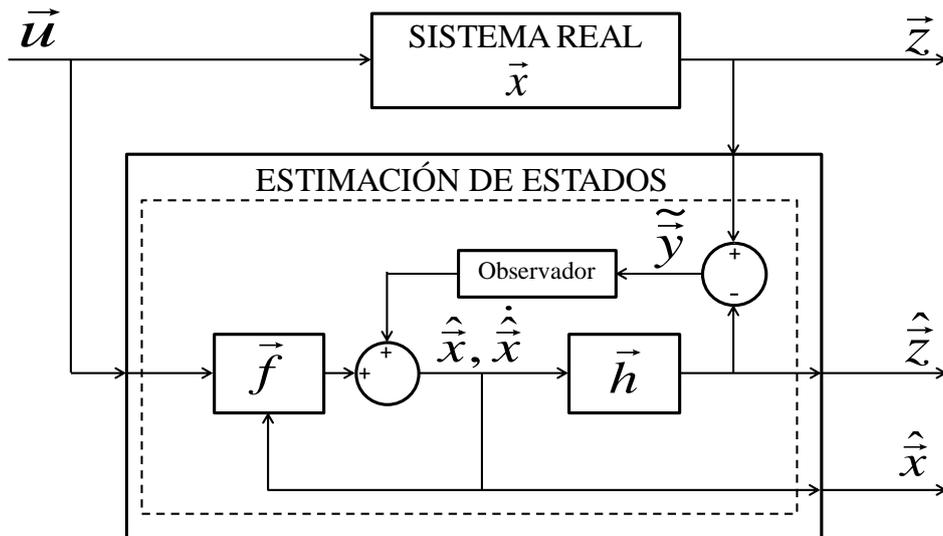


Figura 3.4. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo matemático de un sistema dinámico.

Tal y como muestra la Figura 3.4, la estimación de estados es un proceso que toma las variables de entrada y las de salida medidas del sistema real y, en base al modelo del sistema y al observador de estados, obtiene la estimación de las variables de salida y de las variables de estado.

De esta manera, y si la estimación de estados es exitosa, el valor de las variables de salida de la simulación se aproxima o converge con el valor de las mismas variables de salida medidas en el sistema real. Esto significa que se ha corregido la simulación y que el valor así obtenido de las variables de estado es una buena estimación de su valor real.

Los observadores de estados, como algoritmos matemáticos, están concebidos para ser utilizados sobre modelos matemáticos, de manera que la formulación del modelo es “accesible”, es decir, se pueden modificar las ecuaciones diferenciales originales (3.2) para integrar este algoritmo. De esta forma, se incluye en el sistema de ecuaciones la corrección resultante de aplicar el observador de estados sobre el residuo de la medida, por ejemplo, multiplicándolo por una ganancia calculada según el Filtro Kalman Extendido (3.3).

$$\dot{\tilde{\vec{x}}}(t) = \vec{f}(\tilde{\vec{x}}(t), \vec{u}(t)) \quad (3.2)$$

$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = \vec{f}(\hat{\vec{x}}(t), \vec{u}(t)) + K^{Kalman}(t) \cdot \tilde{\vec{y}}(t) \quad (3.3)$$

En conclusión, y retomando las cuestiones planteadas inicialmente:

- **¿Por qué es interesante la estimación de estados?** La estimación de estados es interesante porque es necesario conocer el valor de las variables de estado del sistema, pero el modelo no reproduce fielmente el sistema real, por lo que los valores calculados a partir de la simulación no son fiables y es necesario corregirla.
- **¿Qué objetivo persigue la estimación de estados?** La estimación de estados pretende corregir la simulación del sistema de manera que se acerque lo más posible al sistema real y, por consiguiente, el valor de las variables de estado así calculado sea una buena estimación de su valor real.

- **¿En qué consiste la estimación de estados?** La estimación de estados consiste en corregir la simulación del sistema actuando sobre el cálculo de las variables de estado de manera que las variables de salida calculadas a partir de ellas se acerquen o converjan con las mismas variables de salida medidas en el sistema real, asumiendo que si las variables de salida coinciden, el valor correspondiente de las variables de estado es una buena estimación de su valor real.
- **¿Cómo alcanza su objetivo la estimación de estados?** La estimación de estados realimenta el residuo de la medida (diferencia entre el valor de las variables de salida medidas en el sistema real y las mismas variables calculadas por la simulación corregida) a través de un algoritmo (observador de estados) cuyo resultado se añade al cálculo de las variables de estado. En el dominio continuo del tiempo, el algoritmo se integra en las ecuaciones del modelo que se han de resolver en la simulación del sistema de manera que afecta a la dinámica del sistema.

3.2 Fundamentos de la metodología

Extender la estimación de estados a los modelos CAE supone aplicar sus fundamentos conceptuales, tal y como han sido discutidos previamente, a este nuevo dominio.

Como muestra la Figura 3.5, en la simulación de un modelo CAE no existen de manera explícita las ecuaciones, sino que el cálculo de las variables de estado y de sus derivadas, así como de las variables de salida, se realiza a partir de las variables de entrada impuestas al modelo. Como ya se ha expuesto, el modelo del sistema se crea a través de las herramientas de modelado del software de ingeniería asistida por ordenador (en el caso particular de los sistemas multicuerpo, este software es del tipo de simulación dinámica de sistemas multicuerpo) y es este software quien genera las ecuaciones del sistema según su lenguaje interno y las resuelve para obtener los valores de las variables de estado y de salida.



Figura 3.5. Diagrama de la simulación del modelo CAE de un sistema dinámico, particularmente de un vehículo.

Resulta evidente que la estimación de estados también es interesante cuando se trata de modelos CAE. Si bien estos modelos son normalmente más completos y fieles a la realidad que los modelos matemáticos, puesto que la labor de creación del modelo resulta más sencilla y flexible a través del software de ingeniería asistida por ordenador por las razones ya expuestas, también se establecía en el capítulo de Introducción que en

la práctica ningún sistema puede ser modelado con exactitud. Por ello, la simulación de sistemas sobre modelos CAE también es, rigurosamente, una aproximación del sistema real con un cierto error inherente al propio error del modelo a la hora de reproducir los efectos que ciertamente están presentes en la realidad.

En el caso concreto de la dinámica vehicular, aunque se cuente con un modelo exacto y completo del vehículo siempre es imposible garantizar que la simulación tiene en cuenta todos los efectos presentes en el sistema real. Estos efectos pueden estar relacionados con las perturbaciones provenientes del entorno, como la acción variable e impredecible del viento o el estado de la calzada, con la influencia del entorno en el propio sistema, como la variación del comportamiento del neumático en función de la temperatura, con situaciones variables del sistema, como la carga del vehículo variable en cantidad y distribución debida a los ocupantes y los objetos en el interior de la carrocería, con la propia variación inherente al sistema a lo largo del tiempo, como la variación del comportamiento de los amortiguadores con su uso, etc.

Además, las técnicas de control también son aplicadas en modelos CAE para su desarrollo y posterior implementación en el sistema real, lo que requiere conocer con el mayor rigor posible lo que está ocurriendo en el sistema a través de sus variables de estado.

En consecuencia, resulta también necesario corregir la simulación del sistema basada en el modelo CAE con el objetivo de que el valor de las variables de estado así calculado sea una buena estimación del valor real. Es decir, que una vez implementada la estimación de estados en el modelo CAE, y si ésta resulta exitosa, se puede asumir que el valor de las variables de estado así calculado es su valor real.

Al igual que en su aplicación en los modelos matemáticos, la estimación de estados sobre modelos CAE también debe actuar sobre el cálculo de las variables de estado para intentar que las variables de salida calculadas a partir de ellas converjan con las mismas variables de salida medidas en el sistema real. Se parte así mismo de la consideración de que si el valor de las variables de salida en la simulación corregida se converge con el de las mismas variables en el sistema real, también lo harán las variables de estado.

Por último, el observador de estados implementado sobre el modelo CAE también debe realimentar el residuo de la medida en el cálculo de los estados de manera que minimice dicho residuo. Sin embargo, en el caso de los modelos CAE las ecuaciones del modelo no son “accesibles” para el diseñador, puesto que no se pueden modificar como en los modelos matemáticos, sino que el software las plantea sobre el modelo generado por el diseñador a través de las herramientas de modelado del sistema presentes en el mismo y las resuelve internamente.

Por tanto, la aplicación de la estimación de estados sobre modelos CAE, si bien tiene la misma motivación, objetivo y principio funcional que su aplicación a modelos matemáticos, debe integrar el observador de estados en el modelo, no como un algoritmo explícitamente integrado en sus ecuaciones, sino como un componente más del sistema de manera que su interacción dentro del mismo genere el efecto de corrección del error de la simulación.

En un modelo CAE no es posible actuar directamente sobre una variable de estado, sólo sobre las variables de entrada, ya que las primeras se calculan únicamente según la dinámica del sistema y deben ser coherentes entre sí. En el caso concreto de un sistema multicuerpo, la posición y la velocidad de un cuerpo, por ejemplo, deben ser

coherentes dinámicamente (la segunda es la derivada temporal de la primera, según la ecuación (3.4). Si se actúa sobre el cálculo de una de las dos, es porque se trata una entrada del sistema y esto restringe un grado de libertad. A diferencia de la estimación de estados sobre un modelo matemático, en un modelo CAE la coherencia dinámica debe mantenerse, por lo que la velocidad no puede ser calculada como la derivada de la posición más otra componente, como muestra la ecuación (3.5).

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad (3.4)$$

$$v(t) = \dot{s}(t) + K^{Kalman}(t) \cdot \tilde{y}(t) \quad (3.5)$$

En un modelo CAE, la única manera de actuar sobre el cálculo de las variables de estado es, por lo explicado anteriormente, mediante una excitación del sistema, análoga a una entrada del sistema o una perturbación proveniente del entorno. Puesto que esta excitación no está realmente presente en el sistema, se la denomina **excitación virtual**. Esta excitación virtual debe actuar sobre el sistema en el sentido de minimizar el residuo de la medida, por lo que viene controlada por la realimentación de dicho residuo, al igual que en la estimación de estados sobre modelos matemáticos. Sin embargo, en los modelos CAE, el observador de estados no actúa directamente sobre el cálculo de las variables los estados, es decir, sobre las ecuaciones, sino gobernando la excitación virtual, que es quien actúa sobre el cálculo de las variables de estado a través de la propia dinámica del sistema. Como no puede ser de otra manera en un modelo CAE, la dinámica del sistema que determina la influencia de la excitación virtual sobre las distintas variables de estado queda definida por el propio modelo CAE a través de los componentes del sistema creados sobre el software y las ecuaciones planteadas y resueltas internamente por éste.

La variable vectorial que designa el conjunto de excitaciones virtuales se denota por \vec{v} . La dinámica del sistema que determina la influencia de las excitaciones virtuales sobre las variables de estados se denota por $\vec{\omega}$. La Figura 3.6 muestra el diagrama de la estimación de estados sobre el modelo CAE de manera análoga al diagrama presentado para la estimación de estados sobre el modelo matemático en la Figura 3.4. Nótese que en este caso el observador de estados no actúa sumando su resultado al cálculo de las variables de estado sobre el modelo denotado por \vec{f} , sino que se utiliza para el cálculo de las excitaciones virtuales \vec{v} , las cuales actúan sobre el modelo \vec{f} a través de su propia dinámica $\vec{\omega}$. De esta manera, el efecto de las excitaciones virtuales ya está incluido en el cálculo del equilibrio en cada paso de integración para la determinación de las variables de estado, como muestra el rectángulo de línea a trazos de la Figura 3.6, al igual que en la estimación de estados sobre modelos matemáticos.

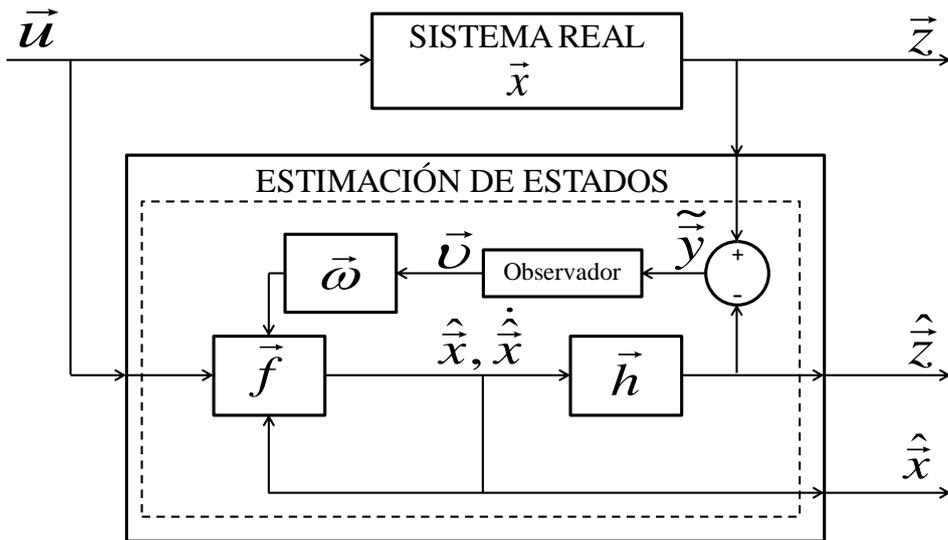


Figura 3.6. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo CAE de un sistema dinámico por analogía con su aplicación sobre el modelo matemático (Figura 3.4).

Sin embargo, en el caso de los modelos CAE no existen explícitamente las ecuaciones denotadas por las funciones vectoriales \vec{f} , \vec{h} y $\vec{\omega}$ mostradas en la Figura 3.6, sino que las ecuaciones las plantea y resuelve internamente el software de ingeniería asistida por ordenador en base al modelo creado por el diseñador a través de sus herramientas para el modelado del sistema. Por esta razón, la Figura 3.7 muestra con mayor rigor el proceso de estimación de estados en modelos CAE, particularmente para un modelo de vehículo. Es interesante remarcar que el cálculo del residuo de la medida y el observador de estados que calcula las excitaciones virtuales están incluidos dentro del rectángulo de línea a trazos, puesto que estos cálculos se realizan simultáneamente al cálculo del equilibrio en cada paso de integración, afectando por tanto al valor de las variables de estado de manera que se trata de minimizar el residuo de la medida. En consecuencia, el modelo CAE debe tomar del exterior las variables de salida medidas en el sistema real, incluir el cálculo del residuo de la medida y de las excitaciones virtuales a partir de dicho residuo en base al algoritmo del observador de estados y finalmente aplicar las excitaciones virtuales sobre el modelo general a través de la dinámica del sistema.

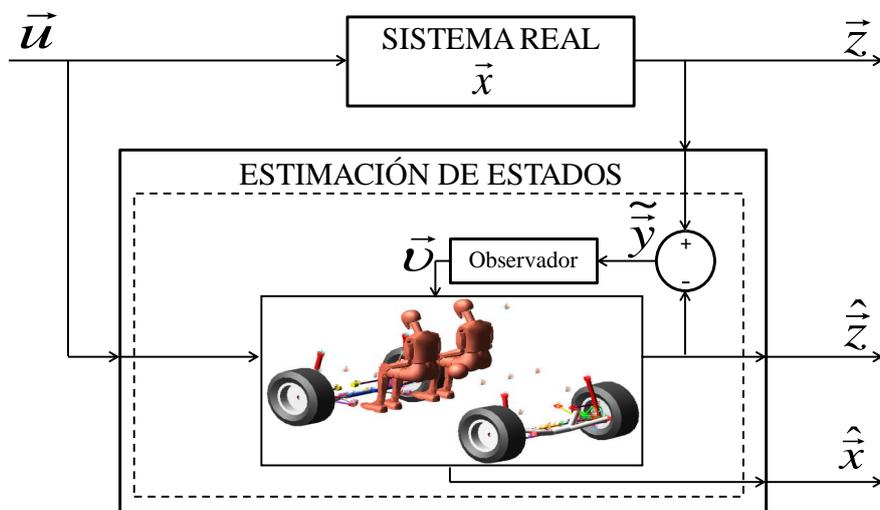


Figura 3.7. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo CAE de un sistema dinámico, particularmente de un vehículo.

Surge a continuación la cuestión de qué excitaciones virtuales crear para corregir la simulación del modelo. Al igual que en la propia creación del modelo, es el diseñador quien debe aplicar sus criterios en función a su conocimiento del sistema real y a los efectos del mismo que considere importantes. En este caso, el diseñador debe analizar qué defectos contiene o podría contener el modelo respecto del sistema real y que puedan tener un efecto sobre el modelo tal que pudiera provocar que aquellas variables de estado cuyo valor resulta interesante conocer no coincidan con su valor en el sistema real. Una vez identificados los potenciales defectos del modelo, habrá que analizar su efecto sobre el sistema y crear una excitación virtual. Esta excitación virtual deberá ser capaz de corregir la desviación de las variables de estado respecto al sistema real a la vista del error de las variables de salida del modelo respecto de las mismas variables medidas en el sistema real. Es decir, que la excitación virtual complementa el efecto erróneo proveniente del defecto del modelo de manera que el efecto conjunto de ambos sobre el resto del modelo sea el correcto. Por consiguiente, la excitación virtual tiene un significado físico de la misma naturaleza que el efecto que trata de corregir.

Por otro lado, la excitación virtual no debe eliminar ningún grado de libertad del sistema, es decir, no se debe restringir ninguna variable de estado del sistema, tan sólo actuar sobre el sistema de la misma manera que el defecto que corrige. De esta manera, no se altera la dinámica del sistema. En el ejemplo de un cuerpo y su velocidad, no se puede fijar el valor de una de ellas a lo largo del tiempo, lo que equivaldría a convertir este estado en una entrada, sino que hay que encontrar la forma de actuar sobre ellas para que modifiquen su valor sin alterar la dinámica del sistema. Una manera posible de lograr esto es a través de una fuerza virtual añadida a las fuerzas existentes que determinan el movimiento del cuerpo y cuya reacción también debe ser coherente con la dinámica del sistema.

Anticipando el ejemplo expuesto posteriormente, considérese un muelle que soporta verticalmente un cuerpo sometido a otras fuerzas externas (Figura 3.9). El comportamiento de dicho muelle (la fuerza que realiza en función a su deformación) es, rigurosamente, desconocida. Es decir, que si se crea un modelo de un sistema que contenga dicho muelle, su comportamiento definido en el modelo es un potencial defecto del mismo. El efecto inmediato del muelle es la fuerza que realiza sobre el cuerpo que soporta en función de su deformación, la cual, dada una cierta deformación del muelle, no será similar en el modelo y en la realidad. He aquí el efecto erróneo en el sistema: la fuerza que realiza el muelle. Esta fuerza se puede corregir si se complementa en el modelo con una fuerza paralela (misma dirección y actuando entre los mismos cuerpos, el entorno y el cuerpo que soporta) de manera que la suma de ambas sea similar a la fuerza del muelle en el sistema real. Puesto que esta fuerza complementaria no existe en la realidad, se trata de una fuerza virtual, es decir, la excitación virtual. En consecuencia, el significado físico de dicha excitación virtual es el error de la fuerza del muelle en el modelo. Además, no altera la coherencia dinámica del resto del sistema, ya que actúa de la misma manera que la fuerza del propio muelle, sin que para el resto del sistema se pueda discernir si la fuerza proviene del muelle o de la fuerza virtual, y las relaciones fuerza-aceleración-velocidad-posición fundamentales en un sistema multicuerpo se conservan. Admitiendo que la estimación de estados es exitosa, la fuerza resultante del muelle según el modelo erróneo y de la fuerza virtual es similar a la del sistema real, el resto del sistema se comporta como en el sistema real (en ausencia de otros defectos), por lo que la simulación se corrige y se puede asumir que el valor de las variables de estado en el modelo coinciden con su valor en el sistema real: fuerzas entre los cuerpos, aceleraciones, velocidades, posiciones, etc. Únicamente habrá que

considerar que la estimación de la fuerza ejercida por el muelle no es la obtenida por el modelo, sino la suma de ésta más la fuerza virtual, como resulta evidente.

Por el contrario, la estimación de estados sobre modelos matemáticos añade a las ecuaciones de éstos una corrección artificial en el sentido de que no tiene significado físico. Como muestra la ecuación (3.3), tan sólo se suma al valor de las derivadas de las variables de estado, resultante de la resolución de las ecuaciones diferenciales en cada paso de integración, un valor calculado a partir del error en las variables de salida medidas según un algoritmo que no tiene en cuenta la dinámica del sistema. La consecuencia es que se pierde la coherencia dinámica del sistema, puesto que se alteran sus ecuaciones independientemente de dicha coherencia, con lo que las variables pierden generalmente las relaciones que según la naturaleza del sistema real deberían tener, como ejemplifica la ecuación (3.5) en el caso de la velocidad y la posición. En definitiva, la metodología propuesta para la estimación de estados en modelos CAE, a diferencia de las existentes en modelos matemáticos, no altera la coherencia dinámica del sistema.

3.3 Observabilidad en modelos CAE

Retomando lo expuesto hasta el momento, la estimación de estados pretende corregir el error en la simulación del modelo haciendo que las variables de salida converjan con las mismas variables medidas en el sistema real, de manera que el valor de las variables de estado obtenido en base al modelo sea una buena estimación de su valor real. En la metodología presentada, este proceso se lleva a cabo actuando sobre el modelo mediante unas excitaciones virtuales con significado físico y manteniendo la coherencia dinámica del sistema. Surge así la cuestión de qué variables de salida medidas deben converger para garantizar que se corrige la simulación del modelo, al menos en lo relativo a las variables de estado cuyo valor se pretende extraer de la misma. Esta cuestión es la observabilidad de los estados que se pretende estimar. Es evidente que al no disponer del modelo matemático del sistema no se pueden aplicar los criterios algorítmicos existentes para los modelos matemáticos. Es necesario recurrir de nuevo al fundamento para aplicar también este concepto al modelo CAE.

Básicamente, para que un sistema sea observable en un cierto instante es condición necesaria y suficiente que conocidas sus entradas y sus salidas en un periodo de tiempo finito posterior sea posible determinar el valor de los estados en dicho instante. Por lo tanto, dadas las entradas del sistema y las medidas disponibles, todo ello a lo largo del tiempo, ¿existe una única combinación de los estados que se pretenden estimar coherente con el comportamiento dinámico del sistema? La respuesta a esta pregunta determinará qué estados son observables.

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, se pretende encontrar qué variables de salida hacen observables unos determinados estados, por lo que es necesario enfocar el problema de observabilidad de otro modo: dado el valor de las variables de entrada y de las variables de estado que se pretenden estimar a lo largo del tiempo, ¿qué variables de salida medibles en el sistema real adquieren una única combinación a lo largo del mismo periodo? Es decir, se buscan aquellas variables de salida que se puedan medir en el sistema real y que tengan una relación temporal unívoca con las variables de estado que interesa conocer. La elección de estas variables, al igual que la modelización del sistema y la creación de las excitaciones virtuales, queda al criterio del diseñador según su conocimiento del sistema.

Es importante remarcar que mientras que la aplicación de los criterios de observabilidad en modelos matemáticos es relativamente inmediata, puesto que se limita a aplicar un criterio matemático sobre el modelo del sistema (como es el cálculo del determinante de la matriz de observabilidad), en el caso de modelos CAE requiere que el diseñador comprenda en detalle el sistema real y el modelo para ser capaz de encontrar las variables de estado y las variables medibles en el sistema real cuyas relaciones temporales sean unívocas. En ocasiones, como en el ejemplo del muelle que se expone a continuación, éste será un problema trivial. Sin embargo, en sistemas más complejos, donde la cantidad de interrelaciones entre las variables aumenta, es posible que sea necesario un análisis previo del sistema, como en la última de las aplicaciones presentadas en esta Tesis para estimar los esfuerzos en el neumático.

Retomando el ejemplo de la estimación de la fuerza que realiza un muelle, resulta inmediato concluir que la medida de la longitud del muelle guarda una relación temporalmente unívoca con la fuerza que éste realiza. La fuerza realizada por el muelle influye directamente en la aceleración de los cuerpos que une según la Segunda Ley de Newton, lo cual determina la evolución temporal de la velocidad, lo cual determina a su vez la evolución temporal de la posición de los cuerpos. Puesto que por el extremo opuesto el muelle está fijo (no se mueve), la posición del cuerpo soportado por el muelle determina la longitud del muelle. En consecuencia, dada una evolución temporal de la longitud del muelle, existe una única evolución temporal de la fuerza del muelle dinámicamente compatible con ella. En conclusión, asumiendo que en el sistema real es posible medir dicha longitud (lo que en la práctica depende de las condiciones del sistema real), la longitud del muelle hace observable la fuerza realizada por el muelle.

3.4 Observador de estados en modelos CAE

Finalmente, surge la cuestión de cómo controlar las excitaciones virtuales a partir del residuo de la medida de manera que éste tienda a ser nulo. Como ya se ha expuesto, esto se realiza mediante un observador de estados, que no es más que un regulador que realimenta el residuo de la medida sobre el sistema para influir en el cálculo de las variables de estado. En el caso de su aplicación en modelos CAE, es necesario implementar este algoritmo dentro del modelo, como ya se ha explicado en los fundamentos. En el caso particular de los sistemas multicuerpo modelados en MSC.Adams[®] esto es posible dado que este software, como ya se exponía en el capítulo de Introducción, permite incluir en el modelo técnicas de control.

La complejidad de la implementación depende del observador de estados particular que se pretenda implementar y de las herramientas de control disponibles en el software. Resulta evidente que implementar un Observador Luenberger, que se trata fundamentalmente de un regulador proporcional, o un Observador Proporcional-Integral, que se trata de un regulador del mismo nombre, es más complejo que implementar un Observador *Sliding-Mode*, donde habrá que implementar una función discontinua. La implementación de un Filtro Kalman Extendido parece extremadamente compleja ya que requiere gran número de cálculos, principalmente para evaluar la ganancia lineal de cada variable de estado y de cada variable de salida medida respecto de las variables de estado (Jacobianos) y realizar los cálculos matriciales.

Las medidas del sistema real pueden provenir del registro de datos anterior (*off-line*) o de la medición en el mismo instante, en tiempo real (*on-line* o *real-time*), en función de las herramientas disponibles en el software. En ambos casos, estos datos pueden haber sido generados a partir de la experimentación (del sistema real o de un

prototipo) o a partir de la simulación de otro modelo que se admite como real, como se realiza en las aplicaciones de la presente Tesis. Una vez introducidas las medidas reales en el modelo CAE, se implementa el algoritmo del observador de estados mediante las herramientas de control del software de ingeniería asistida por ordenador. Dicho algoritmo parte del residuo de la medida (la diferencia entre el valor de las variables de salida medidas en el sistema real y las mismas variables de salida calculadas sobre el modelo) y aplica el resultado en las excitaciones virtuales.

3.5 Formulación de la metodología

Para formular la metodología se retoma el sistema dinámico genérico, no lineal y en el dominio continuo del tiempo, presentado en el Estado del Arte, definido por las $n \in \mathbb{N}$ variables de estado ($\vec{x} \in \mathfrak{R}^n$), las $m \in \mathbb{N}$ variables de entrada ($\vec{u} \in \mathfrak{R}^m$) y las $p \in \mathbb{N}$ variables de salida medidas ($\vec{z} \in \mathfrak{R}^p$). El sistema real se modeliza según las ecuaciones vectoriales $\vec{f}: \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $\vec{h}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$, según la expresión (3.6). Cabe recordar aquí que en el caso de los modelos CAE, estas ecuaciones no son planteadas de manera explícita. Estas funciones tan sólo se utilizan aquí para representar la relación existente entre las variables y mantener así la analogía con los observadores de estados sobre modelos matemáticos presentados en el Estado del Arte. Por consiguiente, simular el modelo CAE equivale a resolver el sistema ecuaciones en cada instante temporal.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \vec{f}(\tilde{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \tilde{z}(t) = \vec{h} \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Nótese que ya se ha utilizado la nomenclatura que indica que se trata de una aproximación ($\tilde{x}(t)$, $\dot{\tilde{x}}(t)$ y $\tilde{z}(t)$), puesto que las funciones del modelo no representan exactamente la realidad. Se recuerda que si se quisiera formular el sistema real habría que añadir una cierta incertidumbre, que en el caso del Filtro Kalman se materializa en los ruidos de proceso y de medida, ($\vec{w}(t)$ y $\vec{v}(t)$), según la expresión (3.7).

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \vec{f}(\hat{x}(t), \vec{u}(t)) + \vec{w}(t) \\ \hat{z}(t) = \vec{h} \cdot \hat{x}(t) + \vec{v}(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

Una vez establecidos el sistema real y el modelo, se determina el sistema corregido, es decir, sobre el que se aplica el observador de estados. La notación adquiere entonces el acento circunflejo.

En primer lugar se recuerda la formulación para el Filtro Kalman Extendido (3.8), donde la ganancia matricial $K^{Kalman}(t) \in \mathfrak{R}^{n \cdot p}$ se calcula según el algoritmo que identifica a este observador de estados, que ya se expuso en el Estado del Arte, y que tiene en cuenta las incertidumbres del modelo y de las medidas a través de las covarianzas de los ruidos Gaussianos blancos $\vec{w}(t)$ y $\vec{v}(t)$ y el efecto linealizado de cada uno de los estados sobre las funciones del modelo a través de los Jacobianos.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \vec{f}(\hat{x}(t), \vec{u}(t)) + K^{Kalman}(t) \cdot \tilde{y}(t) \\ \hat{z}(t) = \vec{h}(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (3.8)$$

Fundamentalmente, lo que se está haciendo es sumar al vector de estados proveniente de la simulación $\dot{\hat{x}}(t) = \vec{f}(\hat{x}(t), \vec{u}(t))$ otro vector $(K^{Kalman}(t) \cdot \tilde{y}(t)) \in \mathfrak{R}^n$ que corrige sus valores.

De manera genérica para cualquier observador de estados, se denota aquí por $\vec{\tau}: \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^n$ a la función del algoritmo del observador de estados que calcula las correcciones en función del residuo de las medidas, según la expresión (3.9).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \vec{f}(\hat{x}(t), \vec{u}(t)) + \vec{\tau}(\tilde{y}(t)) \\ \hat{z}(t) &= \vec{h}(\hat{x}(t))\end{aligned}\quad (3.9)$$

De esta manera, la función $\vec{\tau}$ varía dependiendo de qué observador de estados se aplique. En la expresión (3.10) se presenta la forma que toma esta función para algunos de ellos.

$$\begin{aligned}\text{Observador Luenberger: } \vec{\tau}(\tilde{y}(t)) &= L \cdot \tilde{y}(t) \\ \text{Filtro Kalman: } \vec{\tau}(\tilde{y}(t)) &= K^{Kalman}(t) \cdot \tilde{y}(t) \\ \text{Observador PI: } \vec{\tau}(\tilde{y}(t)) &= K^p \cdot \tilde{y}(t) + K^i \cdot \int_0^t \tilde{y}(t) \cdot dt\end{aligned}\quad (3.10)$$

Pues bien, en la metodología presentada, se corrige el vector estados sumándole los efectos de $\alpha \in \mathfrak{N}$ excitaciones virtuales $\vec{v}(t) \in \mathfrak{R}^\alpha$ a través de la propia dinámica del sistema, materializada en la función vectorial $\vec{\omega}: \mathfrak{R}^\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^n$ (3.11). Las excitaciones virtuales $\vec{v}(t)$ incluidas tienen significado físico (por ejemplo fuerzas en un sistema multicuerpo) y la dinámica del sistema $\vec{\omega}$ queda determinada por el propio modelo CAE, al igual que las funciones del modelo \vec{f} y \vec{h} , para mantener la coherencia dinámica del sistema.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \vec{f}(\hat{x}(t), \vec{u}(t)) + \vec{\omega}(\vec{v}(t))\quad (3.11)$$

Serán estas excitaciones virtuales $\vec{v}(t)$ las que corrijan los defectos del modelo mediante su efecto a través de la dinámica del sistema $\vec{\omega}$, redirigiendo la simulación tratando de hacer que las variables de salida sigan las medidas del sistema real. Por lo tanto, su elección es de vital importancia en esta metodología y requiere del conocimiento profundo del sistema real y del modelo por parte del diseñador del observador de estados, como ya se ha comentado.

Una vez creadas las excitaciones virtuales, es necesario que adquieran un valor temporal que haga converger al modelo hacia el sistema real. Cualquiera de los observadores de estados presentados en el Estado del Arte es, *a priori*, válido. Cabe remarcar que si la dinámica del sistema está incluida dentro del algoritmo, como en el Filtro Kalman, hay que tener en cuenta la función $\vec{\omega}$. De manera genérica las excitaciones virtuales $\vec{v}(t)$ se calculan aplicando la función del observador de estados $\vec{\tau}$ al residuo de las medidas $\tilde{y}(t)$, según la ecuación (3.12). Sin embargo, la dimensión de la función vectorial pasa a ser ahora $\vec{\tau}: \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^\alpha$, ya que se calculan las α componentes del vector de excitaciones virtuales $\vec{v}(t)$ y no las n componentes de la corrección de las derivadas de los estados $\dot{\hat{x}}(t)$. Para mantener el paralelismo con los

modelos matemáticos, se conserva el mismo nombre de la función, ya que además el algoritmo es el mismo, el del observador de estados, aunque la dimensión sea distinta.

$$\bar{v}(t) = \bar{\tau}(\tilde{y}(t)) \quad (3.12)$$

Comparando la formulación de la metodología presentada con la estimación de estados en modelos matemáticos, se sustituye la corrección numérica de las derivadas de los estados calculada según el observador de estados, por una corrección también calculada a través del observador de estados pero materializada en unas excitaciones virtuales $\bar{v}(t)$ con significado físico y cuyo efecto llega a través de la propia dinámica del sistema $\bar{\omega}$, tal y como muestra la expresión (3.13).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + \bar{\tau}(\tilde{y}(t)) & \bar{\tau} : \mathfrak{R}^p &\rightarrow \mathfrak{R}^n \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + \bar{\omega}(\bar{\tau}(\tilde{y}(t))) & \bar{\tau} : \mathfrak{R}^p &\rightarrow \mathfrak{R}^\alpha \end{aligned} \quad (3.13)$$

La expresión (3.13) se puede particularizar para el Observador Proporcional-Integral, que se utiliza en las primeras aplicaciones presentadas en esta Tesis, como muestra la expresión (3.14).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + K^p \cdot \tilde{y}(t) + K^i \cdot \int_0^t \tilde{y}(t) \cdot dt & K^p, K^i &\in \mathfrak{R}^{n \cdot p} \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + \bar{\omega} \left(K^p \cdot \tilde{y}(t) + K^i \cdot \int_0^t \tilde{y}(t) \cdot dt \right) & K^p, K^i &\in \mathfrak{R}^{\alpha \cdot p} \end{aligned} \quad (3.14)$$

También se puede particularizar la expresión (3.13) para el Observador Luenberger, que se utiliza en última y principal de las aplicaciones presentadas en esta Tesis, como muestra la expresión (3.15).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + L \cdot \tilde{y}(t) & L &\in \mathfrak{R}^{n \cdot p} \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{f}(\hat{x}(t), \bar{u}(t)) + \bar{\omega}(L \cdot \tilde{y}(t)) & L &\in \mathfrak{R}^{\alpha \cdot p} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.6 Procedimiento de la metodología

A continuación se resume el procedimiento de la estimación de estados en modelos CAE incluyendo, por claridad, el sencillo ejemplo de sistema multicuerpo utilizado hasta el momento y desarrollado a continuación como ejemplo de aplicación de la metodología presentada.

1. Localizar un posible defecto del modelo y su efecto sobre el sistema. En el caso de un muelle que soporta un cuerpo, si el modelo no refleja exactamente el comportamiento fuerza-deformación real del muelle, la fuerza generada por el muelle (estado del sistema) en el modelo es distinta de la fuerza generada por el muelle real, con la consiguiente propagación dinámica del error (aceleraciones, velocidades y posiciones, llegando de nuevo a la deformación del muelle y una acumulación del error en su fuerza). En este caso el posible defecto del modelo es la definición del comportamiento del muelle y su efecto es el error en la fuerza que genera.
2. Definir la excitación virtual que compensará el defecto del modelo sobre el efecto implicado. En el ejemplo expuesto, la excitación virtual puede ser una fuerza paralela al muelle, actuando entre los mismos puntos de los mismos cuerpos y en la misma dirección, que compense el error en la fuerza

generada por el muelle, complementándola, para que este error no se propague dinámicamente por el sistema (aceleraciones, velocidades y posiciones). El efecto dinámico de esta fuerza virtual (similar al de la fuerza del muelle) ya está incluido en el propio modelo CAE a través de las masas y momentos de inercia de los cuerpos entre los que actúa y las restricciones dinámicas y cinemáticas que les afectan. El estado corregido, la fuerza del muelle real, es entonces la suma de la fuerza realizada por el muelle del modelo y de la fuerza virtual.

3. Analizar qué medidas del sistema real hacen observable el estado que se pretende corregir. En el caso del muelle, cualquier posición, velocidad o aceleración del mecanismo en el que está incluido estará afectado, en mayor o menor medida según la ganancia mecánica y la derivación temporal, por la fuerza en este elemento. Lo más sencillo y directo puede ser medir la elongación del propio muelle, aunque quizá esto no sea técnica o económicamente posible y en la práctica haya que recurrir a una medida más indirecta sobre el sistema multicuerpo.
4. Implementar el observador de estados en el modelo. En el caso del muelle y utilizando, por ejemplo, un Observador Luenberger, se resta a la medida real de la longitud del muelle (ya sea medida en ese mismo momento o proveniente de un registro anterior y ya sea obtenida de un sistema real o de otro modelo) la longitud calculada en el modelo. Esta diferencia se multiplica por una ganancia constante y el resultado es el valor de la fuerza virtual. Será necesario ajustar convenientemente el valor de dicha ganancia para que la estimación de estados converja sin llegar a ser inestable.

La Figura 3.8 muestra gráficamente este procedimiento.

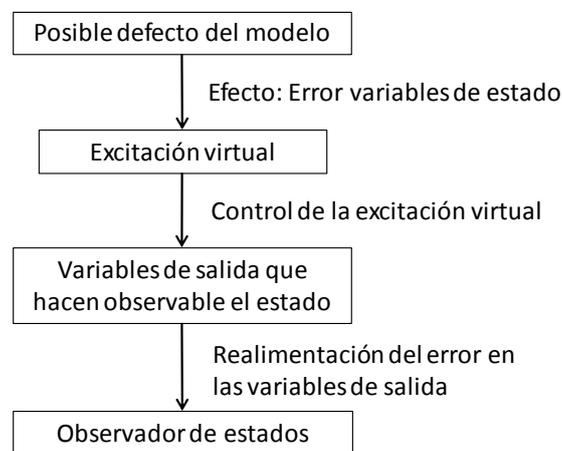


Figura 3.8. Procedimiento de la metodología presentada para la estimación de estados en modelos CAE.

3.7 Ejemplo de aplicación: Sistema masa-muelle-amortiguador

3.7.1 Presentación del sistema real

Este sistema (Figura 3.9) está compuesto por un único cuerpo (verde) de una cierta masa soportado por un conjunto muelle-amortiguador (rojo) que está anclado al suelo, de manera que el movimiento del cuerpo está limitado a la dirección vertical (restricción cinemática traslacional, cian). Sobre el cuerpo actúa su propio peso (debido

a la gravedad, azul) y una fuerza vertical variable en el tiempo (magenta). En este sistema se mide la posición vertical del cuerpo, es decir, su altura respecto del suelo, que coincide con la longitud del muelle-amortiguador. La posición inicial se corresponde con la longitud natural del muelle, sin elongación ni compresión. En este sencillo sistema multicuerpo unidimensional, la entrada es, por tanto, la fuerza actuante sobre el cuerpo y la salida medida su posición vertical. El estado que se desea estimar es la fuerza realizada por el conjunto muelle-amortiguador.

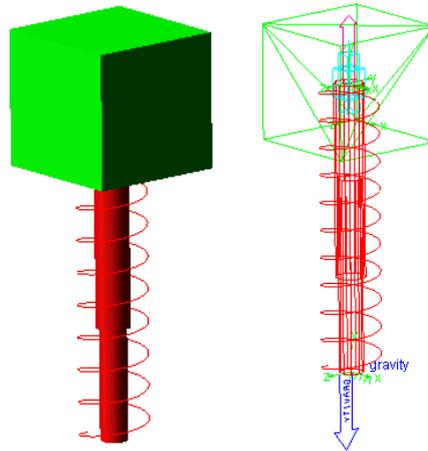


Figura 3.9. Imagen del modelo masa-muelle-amortiguador en MSC.Adams®.

Si se supone conocido el comportamiento del muelle-amortiguador, es decir, la fuerza que realiza en función de su elongación y de la velocidad de su elongación, el cálculo de esta fuerza resulta muy sencillo, pues basta con medir la posición, calcular su derivada en el tiempo y aplicar directamente sus curvas de comportamiento para conocer la fuerza resultante. En muchas ocasiones, estos comportamientos se suponen lineales, es decir, el muelle realiza una fuerza proporcional a su elongación y el amortiguador realiza una fuerza proporcional a la velocidad de su desplazamiento. Sin embargo, en la realidad, conocer con precisión el comportamiento de un muelle y, sobre todo, el de un amortiguador es complicado. Si bien es cierto que se pueden realizar mediciones en bancos de ensayo particularmente pensados para determinar estos comportamientos, estos variarán a lo largo del tiempo y bajo las condiciones de uso. Por lo tanto, suponer conocido el comportamiento del muelle-amortiguador e incluirlo en el modelo es un posible error en el modelo, cuanto más si se simplifica y se supone lineal. Por consiguiente, tiene lugar aquí la aplicación de un estimador de estado para compensar el desconocimiento del sistema real y posible defecto del modelo.

Por otro lado, si la fuerza que actúa sobre el cuerpo es la entrada del sistema, en teoría puede ser conocida, por lo que bastaría con aplicar la Segunda Ley de Newton sobre el cuerpo, obteniendo su aceleración derivando dos veces la medida de la posición, para conocer la fuerza que realiza el conjunto muelle-amortiguador. Esto es cierto en este caso particular tan sencillo, donde la entrada, el estado y la salida están directamente relacionados y la única ecuación del sistema (sistema unidimensional) es perfectamente conocida, como se demuestra posteriormente. Sin embargo, esto no es posible en un caso general más complejo, donde es de aplicación la técnica presentada. En consecuencia, aunque por ser éste un sistema extremadamente simple no sería necesaria la aplicación de una técnica de estimación de estados, es un caso útil para explicar de manera sencilla el funcionamiento de la estimación de estados en modelos CAE según la nueva metodología.

Supóngase el sistema real definido por el cuerpo de masa 10Kg inicialmente a 0,5m del suelo y por las curvas de comportamiento del muelle-amortiguador de la Figura 3.10 y de la Figura 3.11.

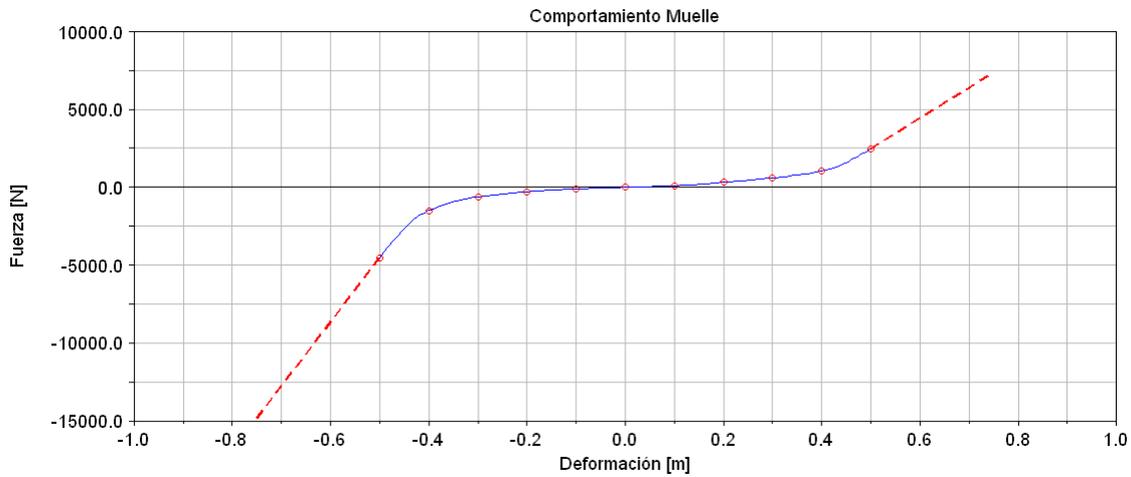


Figura 3.10. Gráfico del comportamiento del muelle.

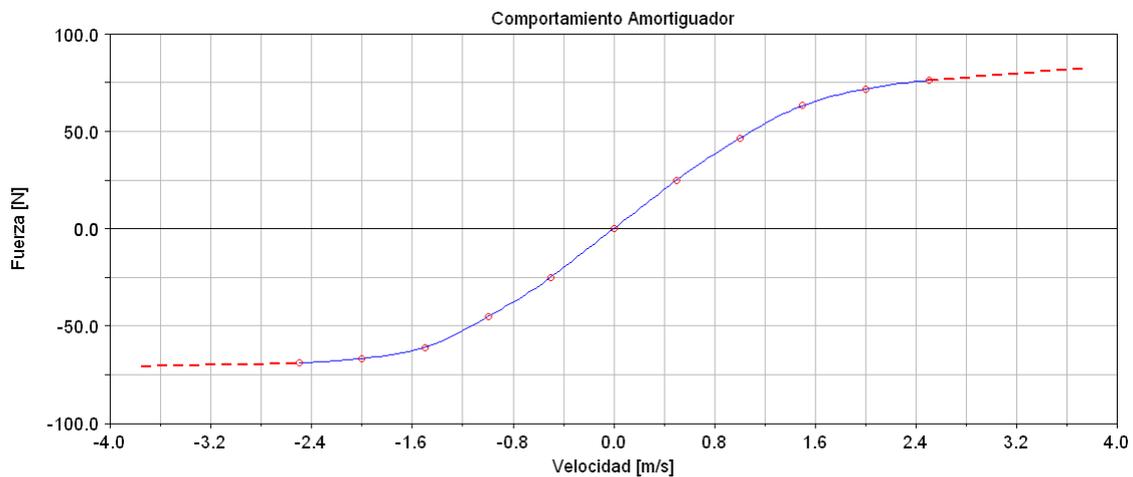


Figura 3.11. Gráfico del comportamiento del amortiguador.

Y supóngase además la fuerza actuante sobre el cuerpo con la función de la ecuación (3.16), representada en la Figura 3.12.

$$F(t) = 100N \cdot \sin(10t) \quad (3.16)$$

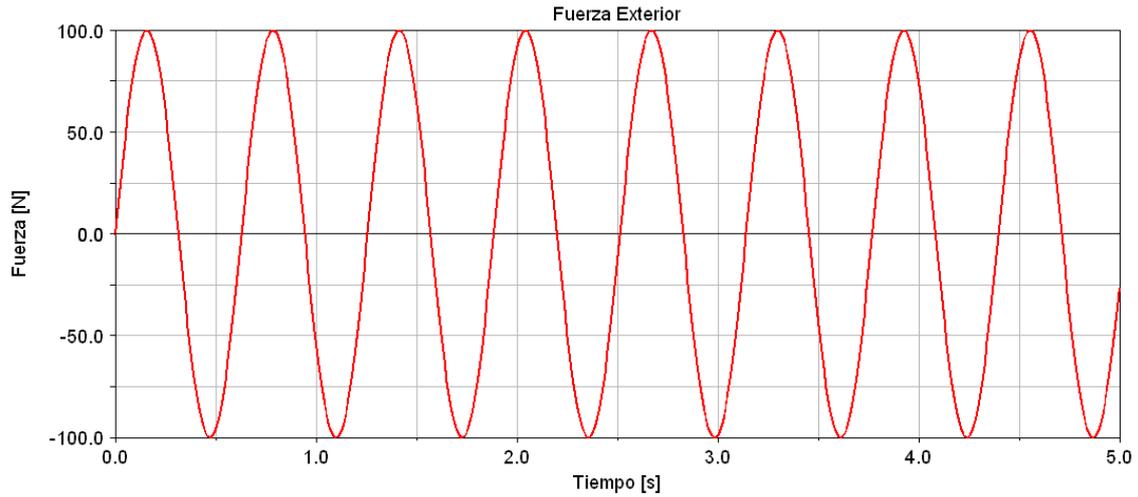


Figura 3.12. Gráfico de la fuerza exterior, vertical sobre el centro de gravedad del cuerpo, a lo largo del tiempo.

Definido el sistema con toda la información anterior, se simula en MSC.Adams[®], siendo la posición vertical del cuerpo resultante la representada en la Figura 3.13.

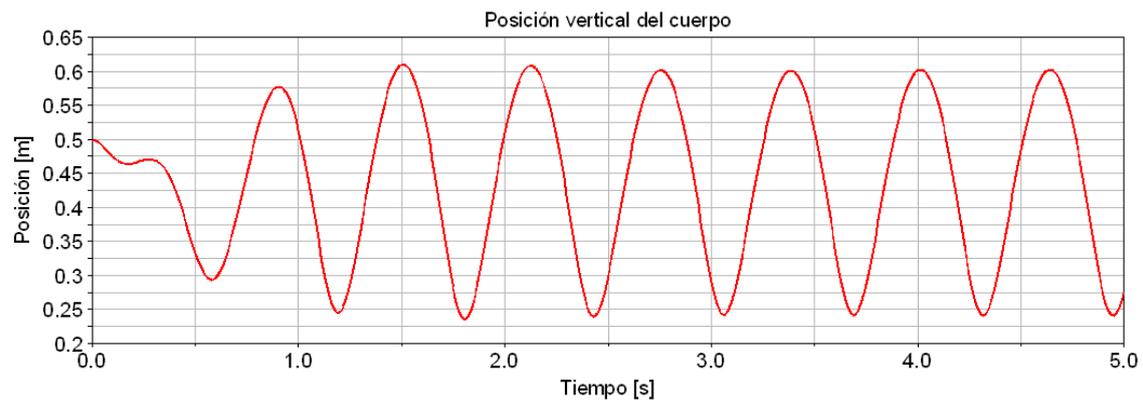


Figura 3.13. Gráfico de la posición vertical del cuerpo en el sistema real.

De donde se pueden extraer sus derivadas primera y segunda, es decir, velocidad y aceleración verticales, representadas en la Figura 3.14 y en la Figura 3.15, respectivamente.

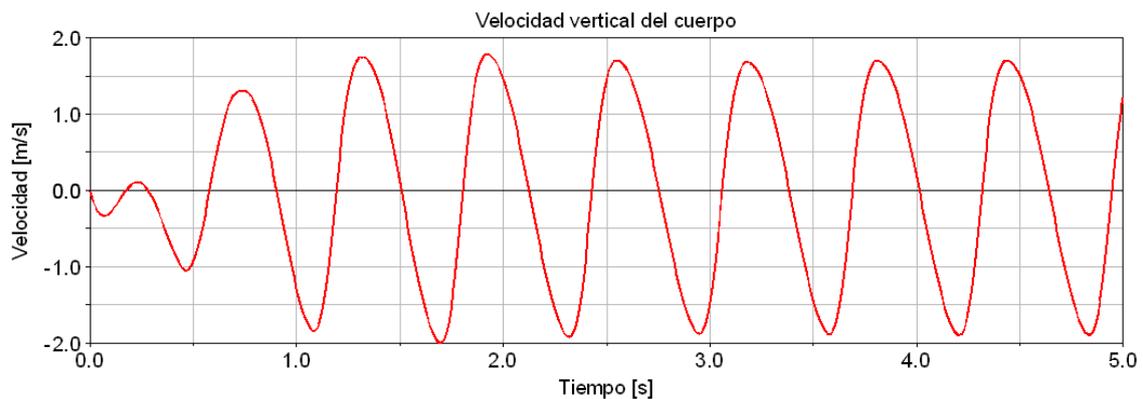


Figura 3.14. Gráfico de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real.

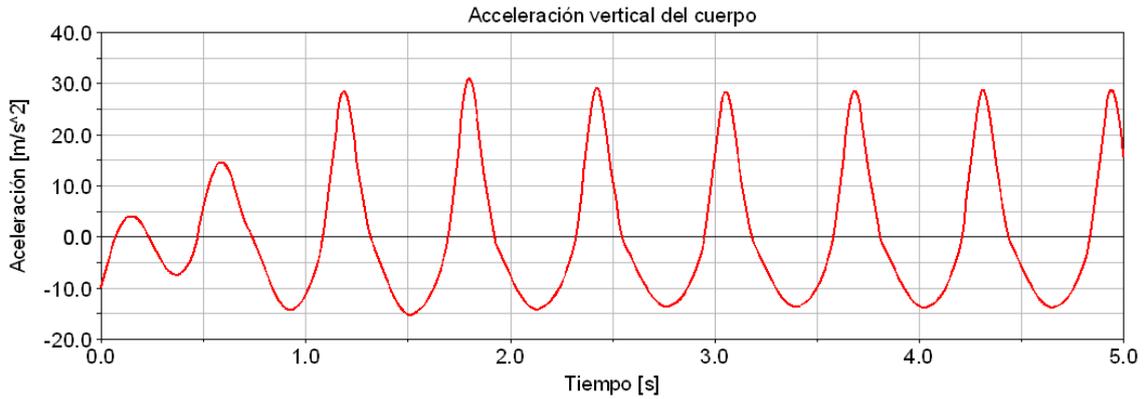


Figura 3.15. Gráfico de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real.

Además, gracias a que se trata de una simulación, se tiene acceso a las variables de estado, por lo que se conoce la fuerza real realizada por el sistema muelle-amortiguador, representada en la Figura 3.16.

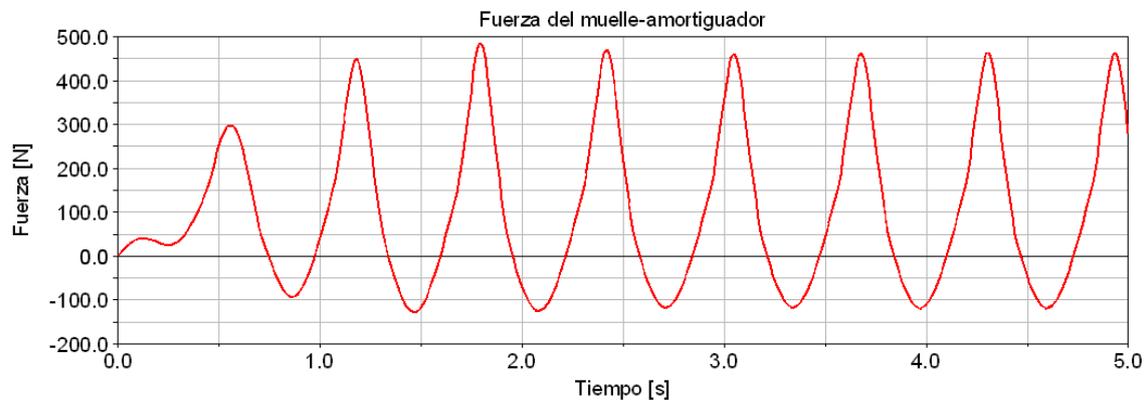


Figura 3.16. Gráfico de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real.

Por último, se puede comprobar que se cumple la Segunda Ley de Newton, comparando la curva calculada al multiplicar la curva de aceleración por la masa con la curva obtenida de la suma de todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo: su propio peso, la fuerza de entrada y el muelle-amortiguador (Figura 3.17).

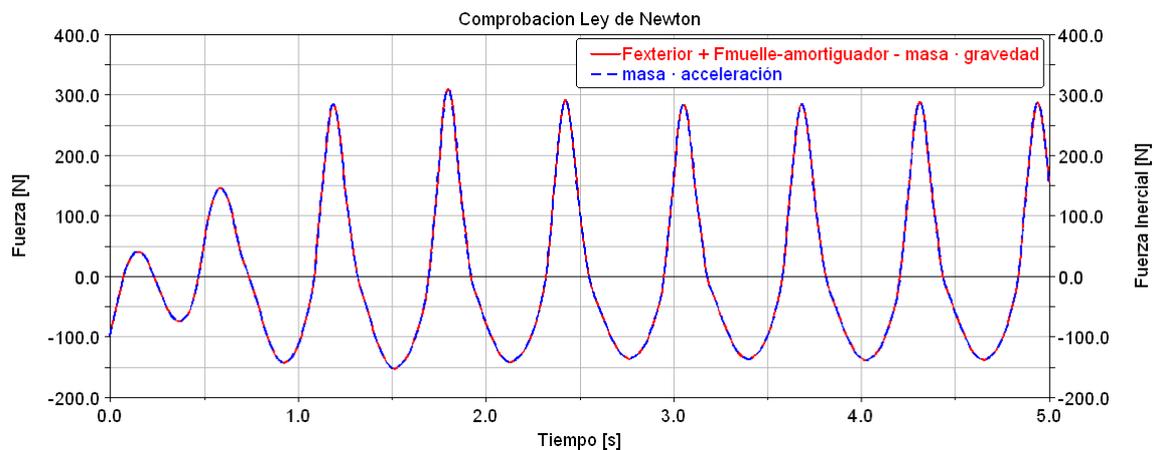


Figura 3.17. Gráfico de la comprobación de la Segunda Ley de Newton sobre el cuerpo en el sistema real.

3.7.2 Presentación del modelo para la estimación de estados

En cuanto al modelo, se parte del sistema real modelizado. Sin embargo, puesto que ya se ha explicado que en realidad no se conoce el comportamiento del muelle-

amortiguador, se va a suponer un comportamiento lineal, como se suele simplificar, definido por las constantes $K^{\text{muelle}}=500\text{N/m}$ y $C^{\text{amortiguador}}=100\text{N}\cdot\text{s/m}$, totalmente distintas a los comportamientos utilizados en el sistema real. En la Figura 3.18 y en la Figura 3.19, se muestra en azul el comportamiento real del muelle-amortiguador y en rojo el comportamiento modelizado. En la Figura 3.20 se muestra el detalle de la zona central del comportamiento del muelle correspondiente a la zona de trabajo.

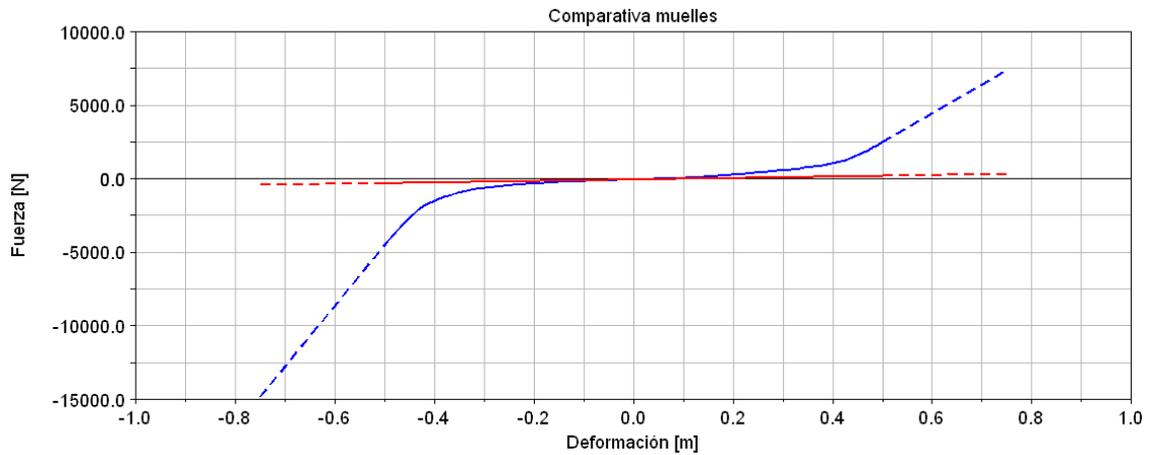


Figura 3.18. Gráfico comparativo del comportamiento del muelle real (azul) y en el modelo (rojo).

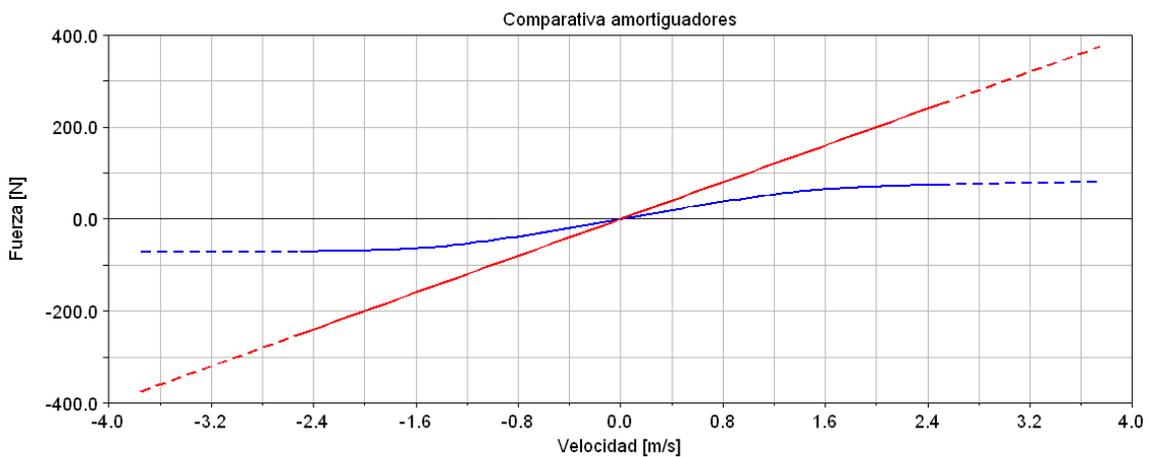


Figura 3.19. Gráfico comparativo del comportamiento del amortiguador real (azul) y en el modelo (rojo).

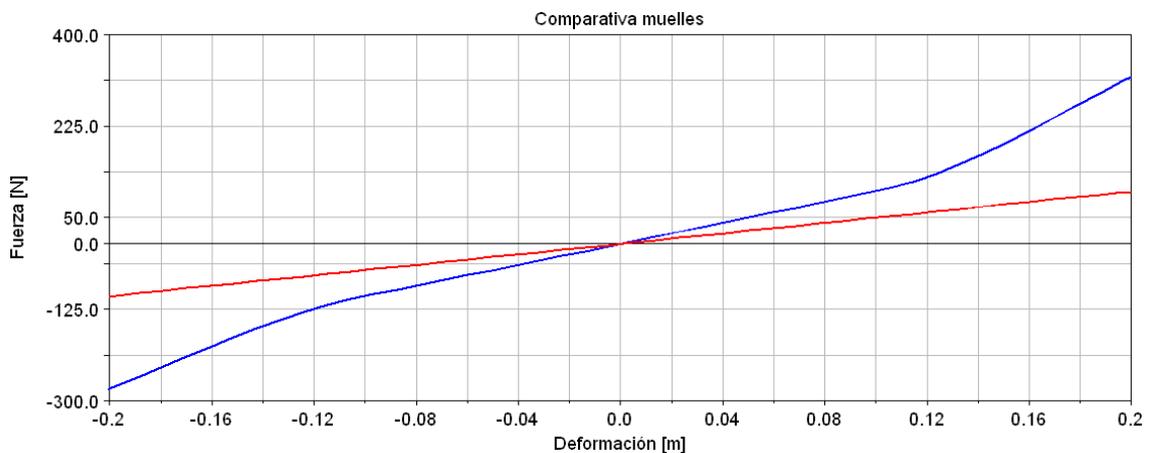


Figura 3.20. Gráfico comparativo del comportamiento del muelle real (azul) y en el modelo (rojo) en la zona de trabajo.

Con este modelo, y manteniendo la misma entrada que en el sistema real, la salida del sistema, es decir, la posición del cuerpo, es totalmente errónea, como muestra la Figura 3.21.

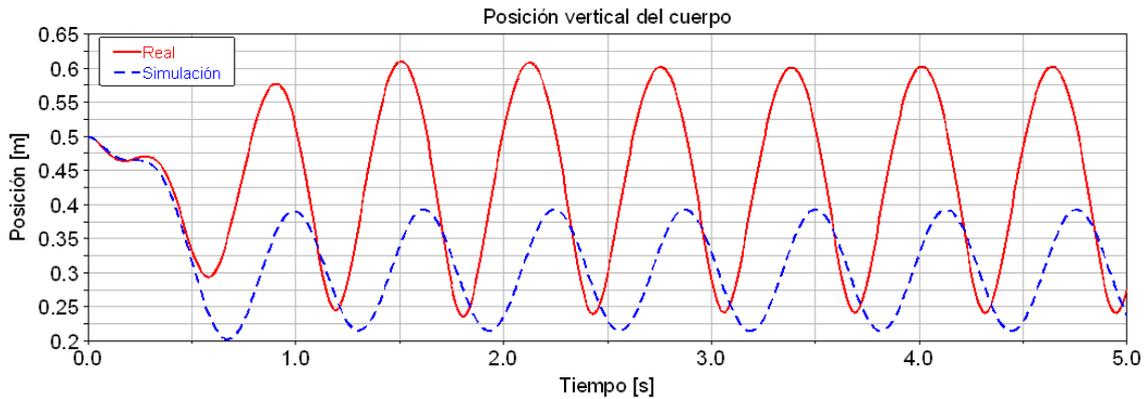


Figura 3.21. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.

Evidentemente, la fuerza del muelle-amortiguador calculada por el modelo también es alejada de la realidad, como muestra la Figura 3.22.

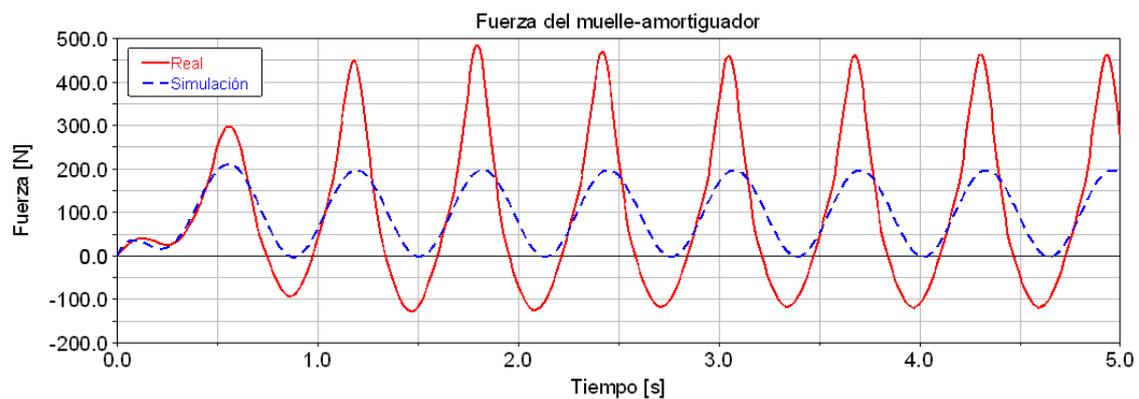


Figura 3.22. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.

Finalmente, la velocidad (Figura 3.23) y la aceleración (Figura 3.24) vertical del cuerpo en la simulación también difieren de los valores reales, puesto que son derivadas temporales consecutivas de la posición vertical.

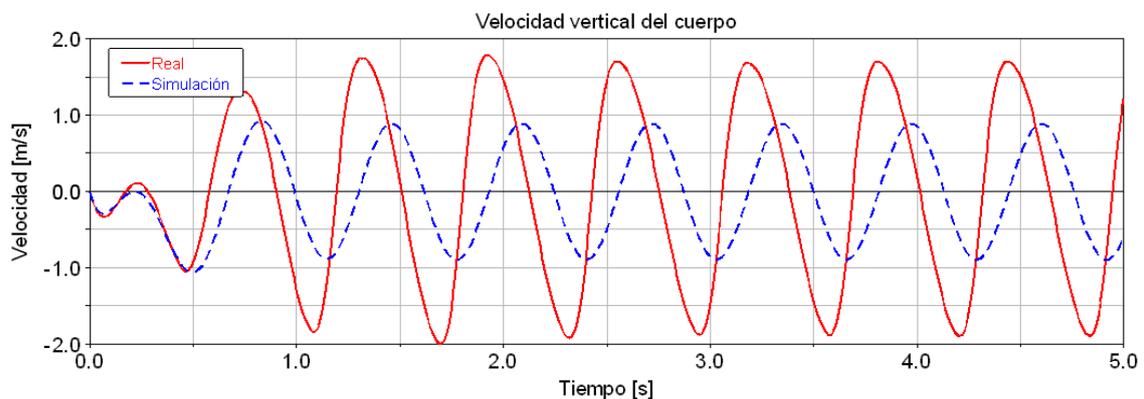


Figura 3.23. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.

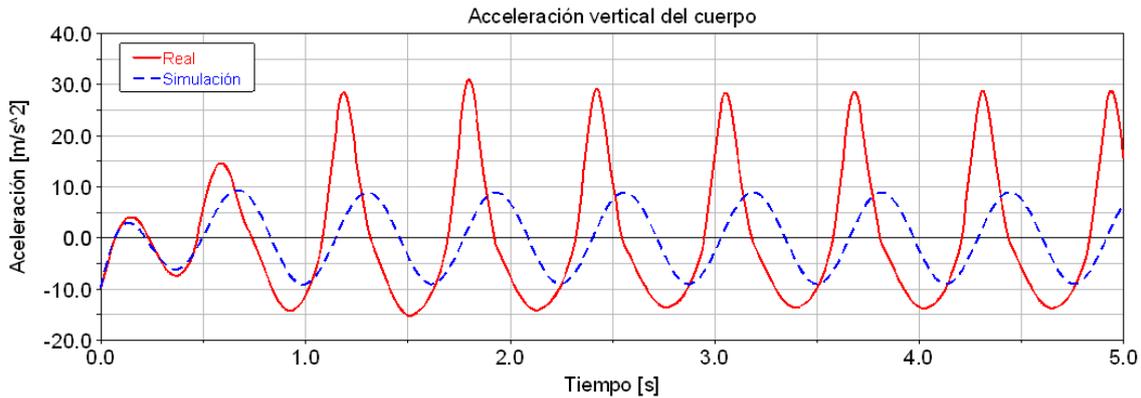


Figura 3.24. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.

3.7.3 Estimación de estados

Una vez definidos el sistema real y el modelo y demostrada la carencia de este último, cobra interés la estimación de estados con el objetivo particular de conocer la fuerza realizada por el muelle-amortiguador. Lo primero que cabe preguntarse es si el estado es observable. En este sistema dinámico sólo existe un cuerpo con un único grado de libertad: su desplazamiento vertical. Dada una determinada masa, la relación entre el conjunto de fuerzas actuantes (externas o provenientes del propio sistema, como el muelle-amortiguador) y el desplazamiento de este cuerpo es unívoco, y viene determinada por la Segunda Ley de Newton (3.17).

$$\ddot{z}(t) = \frac{F_{k-c}(z, \dot{z})}{m} - g + \frac{F(t)}{m} \quad (3.17)$$

Donde:

- $z(t)$: Posición vertical del cuerpo.
- $\dot{z}(t)$: Primera derivada temporal de la posición vertical del cuerpo respecto al tiempo, es decir, la velocidad vertical del cuerpo.
- $\ddot{z}(t)$: Segunda derivada temporal de la posición vertical del cuerpo respecto al tiempo, es decir, la aceleración vertical del cuerpo.
- $F_{k-c}(z, \dot{z})$: Fuerza realizada por el muelle-amortiguador, que es función de la posición y de la velocidad vertical del cuerpo.
- m : Masa del cuerpo.
- g : Aceleración de la gravedad.
- $F(t)$: Fuerza exterior actuante sobre el cuerpo, variable en el tiempo.

Es decir, que dadas las entradas del sistema (en este caso la fuerza $F(t)$) y conocidas las salidas (la posición vertical $z(t)$) en un periodo de tiempo (lo que también determina las derivadas temporales de la posición: velocidad y aceleración), la fuerza del muelle-amortiguador se puede determinar, ya que es la única incógnita de la ecuación (3.17). En este caso tan sencillo, esto es fácil de aseverar, como ya se exponía anteriormente, ya que el modelo matemático, derivado de la Segunda Ley de Newton, es muy simple. Sin embargo, lo importante es reconocer que dada una cierta fuerza

exterior actuante sobre el cuerpo y conocida la evolución temporal de su posición, sólo existe una única fuerza posible para el muelle-amortiguador que satisfaga la Segunda Ley de Newton y, por tanto, la resolución del modelo matemático.

Para la estimación de la fuerza del muelle-amortiguador, se crea una fuerza virtual paralela a ella como excitación virtual, es decir, actuando sobre el cuerpo y con la reacción en el suelo, que compensará el error de la fuerza del muelle-amortiguador calculada por el modelo, en base a curvas de comportamiento erróneas, de manera que el desplazamiento del cuerpo en el modelo siga la realidad. En este caso particular, se utiliza un Observador Proporcional-Integral, donde la fuerza se calcula aplicando el algoritmo de un controlador PI al residuo de la medida, en este caso, la diferencia entre la posición del cuerpo según el modelo y la posición medida en la realidad, según la ecuación (3.18).

$$v(t) = F_v(t) = K^p \cdot (z(t) - \hat{z}(t)) + K^i \cdot \int_0^t (z(t) - \hat{z}(t)) \cdot dt \quad (3.18)$$

Donde:

- $F_v(t)$: Fuerza virtual, variable en el tiempo.
- $\hat{z}(t)$: Valor estimado de la posición vertical del cuerpo.
- K^p, K^i : Constantes proporcional e integral del Observador PI.

Introduciendo la estimación de estados en el modelo, la ecuación diferencial pasa a ser la ecuación (3.19).

$$\ddot{\hat{z}}(t) = \frac{\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})}{m} - g + \frac{F(t)}{m} + \frac{F_v(t)}{m} \quad (3.19)$$

Donde:

- $\hat{z}(t)$: Estimación de la posición vertical del cuerpo.
- $\dot{\hat{z}}(t)$: Estimación de la velocidad vertical del cuerpo.
- $\ddot{\hat{z}}(t)$: Estimación de la aceleración vertical del cuerpo.
- $\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})$: Fuerza realizada por el muelle-amortiguador según el modelo en la simulación corregida.

Nótese que se utiliza la notación $\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})$ para denotar que se trata del valor no corregido, es decir, la fuerza del muelle-amortiguador calculada sobre el sistema corregido (puesto que \hat{z} y $\dot{\hat{z}}$ sí están corregidas), pero no es la fuerza corregida, ya que el comportamiento del muelle-amortiguador no es el correcto.

En la ecuación (3.19) se pueden reagrupar la fuerza del muelle-amortiguador del modelo con la fuerza virtual, puesto que ambas actúan entre los mismos cuerpos en la misma dirección (3.20).

$$\ddot{\hat{z}}(t) = \frac{\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}}) + F_v(t)}{m} - g + \frac{F(t)}{m} \quad (3.20)$$

Comparando la ecuación del sistema corregido (3.20) con la del sistema original (3.17), se comprueba que efectivamente la fuerza corregida del muelle-amortiguador

resulta de la suma de la fuerza calculada sobre el sistema corregido más la fuerza virtual (3.21).

$$\hat{F}_{k-c}(t) = \tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \ddot{\hat{z}}) + F_v(t) \quad (3.21)$$

Donde:

- $\hat{F}_{k-c}(t)$: Fuerza estimada del muelle-amortiguador.

Y además, la excitación virtual está sometida a la dinámica del sistema, en este caso materializada en la masa del cuerpo (3.22).

$$\omega(v(t)) = \omega(F_v(t)) = \frac{F_v(t)}{m} \quad (3.22)$$

De esta manera, la fuerza virtual adquirirá, a lo largo del tiempo, el valor necesario para que la solución de la nueva ecuación coincida con la solución de la ecuación original, es decir, para que la salida del sistema corregido sea la misma que la del sistema original. El valor de la fuerza virtual se suma al de la fuerza realizada por el muelle-amortiguador, con el significado físico de ser una fuerza que corrige la fuerza calculada erróneamente por el modelo.

En la práctica, se trata de ajustar los parámetros del Observador PI hasta que la posición del cuerpo resultante del modelo se asemeje a la posición del cuerpo en el sistema real. Tras algunas iteraciones, se llega a los valores mostrados en la expresión (3.23), sin intención de buscar los óptimos, tan sólo aquellos que muestren un resultado satisfactorio y demuestren el funcionamiento de la estimación de estados.

$$\begin{aligned} K^p &= 1,0e5 \\ K^i &= 1,0e4 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Con todo lo anterior, se obtiene que la posición vertical estimada, obtenida del modelo corregido, es prácticamente similar a la medida en el sistema real (Figura 3.25).

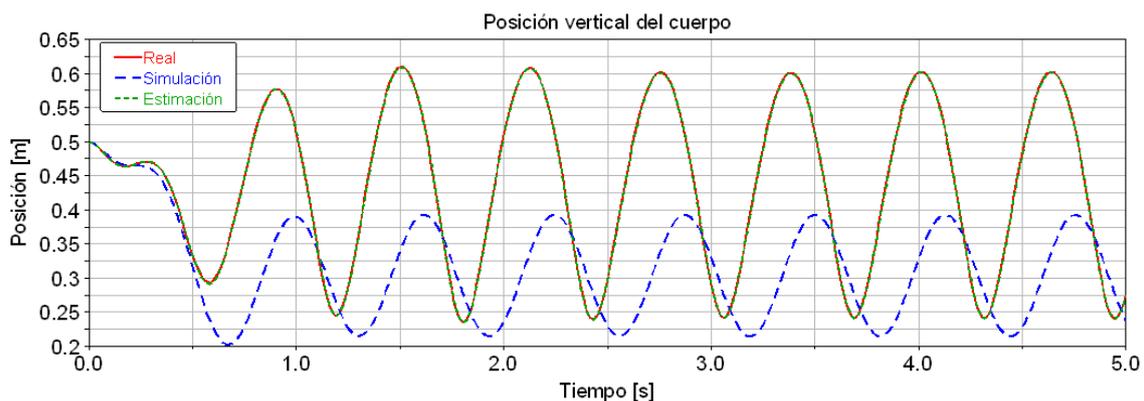


Figura 3.25. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

El error en la salida corregida es en todo caso inferior a 2,5mm sobre los 600mm de altura máxima del cuerpo (Figura 3.26), un 0,42% de error.

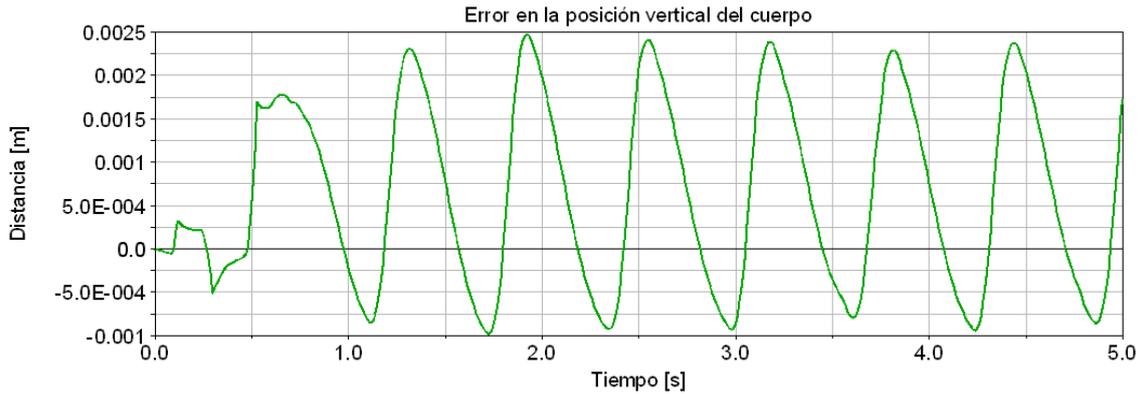


Figura 3.26. Gráfico del error de la posición vertical del cuerpo en la estimación de estados respecto del sistema real.

Y la fuerza estimada del muelle-amortiguador, calculada como suma de la obtenida por el modelo y la fuerza virtual, es similar a la fuerza real (Figura 3.27).

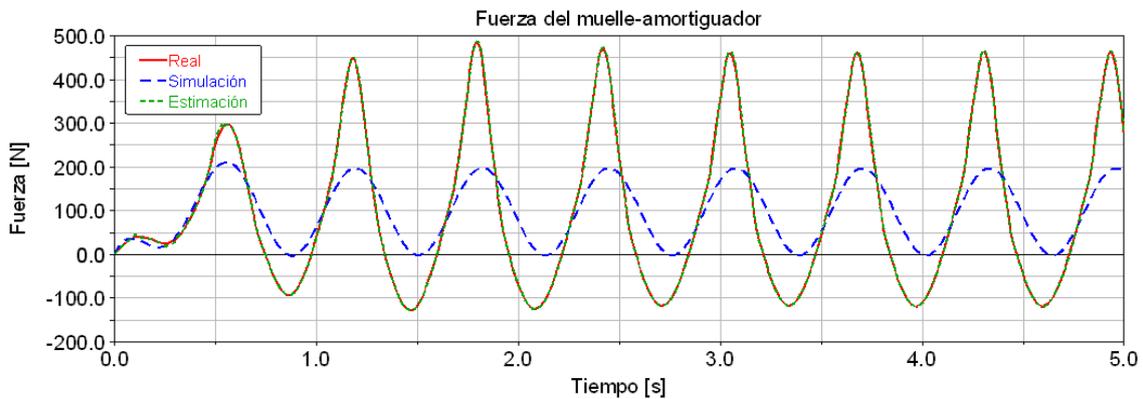


Figura 3.27. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

El error en la estimación se puede fijar en 5N (aunque en algún instante de inestabilidad ha llegado a los 10N) sobre los 440N que alcanza la fuerza real (Figura 3.28), un 1,14% de error.



Figura 3.28. Gráfico del error de la fuerza del muelle-amortiguador en la estimación de estados respecto del sistema real.

Obviamente, la velocidad (Figura 3.29) y la aceleración (Figura 3.30) verticales del cuerpo también resultan corregidas y coherentes con la posición y entre ellas.

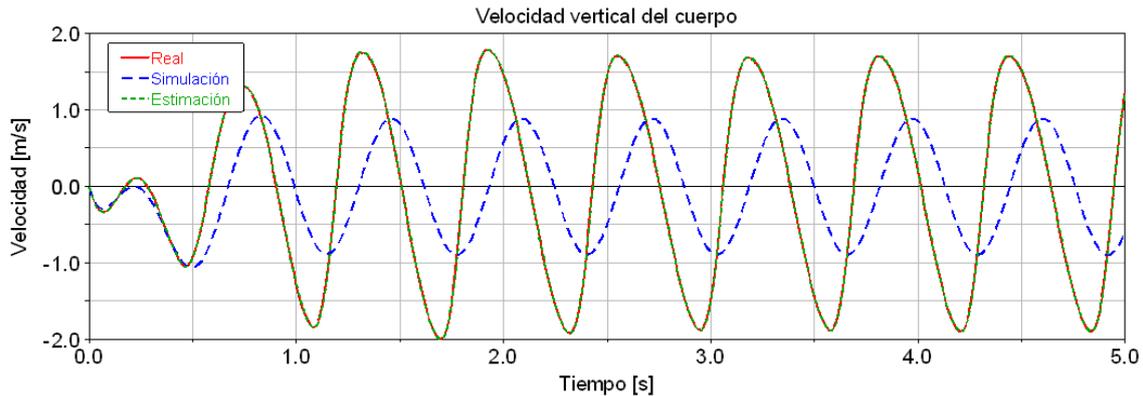


Figura 3.29. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

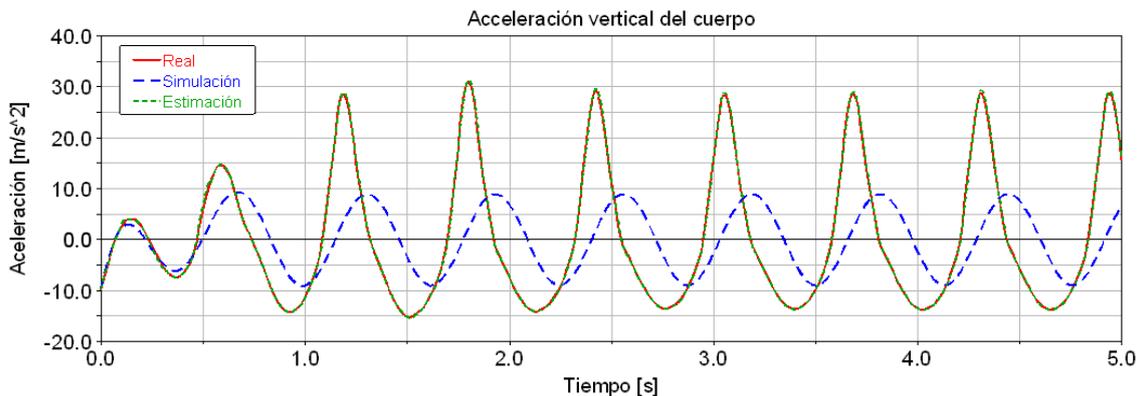


Figura 3.30. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

En conclusión, la estimación de estados ha resultado exitosa, puesto que es posible construir un modelo CAE admitiendo que se desconoce una cierta característica de la realidad y, a través de la técnica presentada, corregir su efecto para conocer el valor real del estado, haciendo que el resultado de la simulación converja con el de la realidad.

3.7.4 Estimación de estados sobre medida ruidosa

Para probar la robustez de la estimación de estados se contamina la medida real, es decir, la obtenida de la simulación del sistema real. Al valor de la posición medido con una frecuencia de 100Hz se le añade un valor aleatorio entre -1 y 1mm según una distribución uniforme (Figura 3.31).

Una manera usual de medir una posición es mediante un transductor LVDT, cuyo error es inferior a 0,1mm. Además, en una medida de posición la frecuencia del ruido es inferior a 100Hz. Por último, en general, el ruido de medida es Gaussiano, es decir, sigue una distribución normal de media nula. Asimismo, las medidas se someten a un filtrado para eliminar este tipo de ruidos. Por lo tanto, se está incluyendo aquí un ruido de medida muy exagerado con el fin de probar la robustez de la estimación de estados en condiciones extremadamente desfavorables.

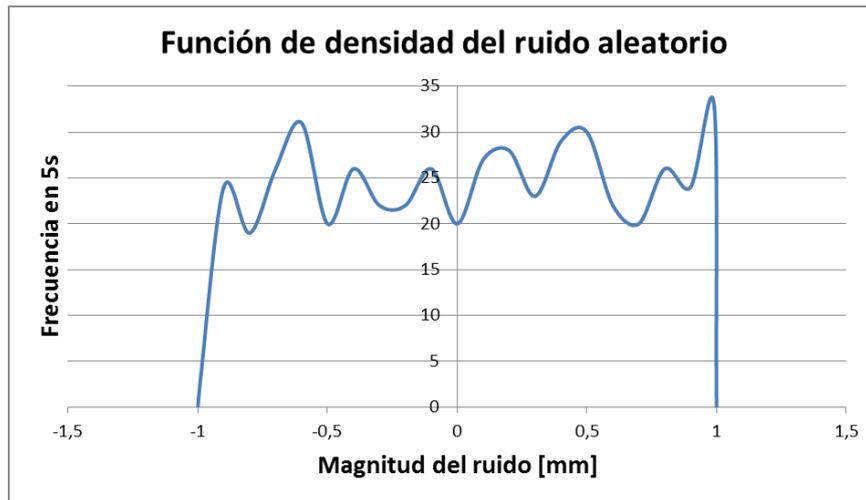


Figura 3.31. Función de densidad del ruido añadido a la posición vertical del cuerpo obtenida de la simulación del sistema real.

Aunque este ruido pasa desapercibido en la medida de posición (Figura 3.32), puesto que su amplitud es menor de 1mm (Figura 3.34), se magnifica en sus derivadas, la velocidad (Figura 3.34) y la aceleración (Figura 3.35).

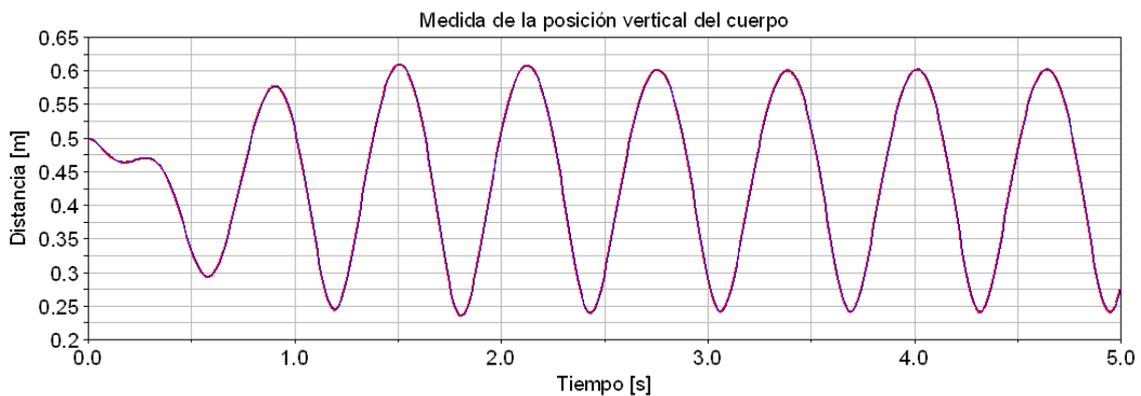


Figura 3.32. Gráfico de la posición vertical del cuerpo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).

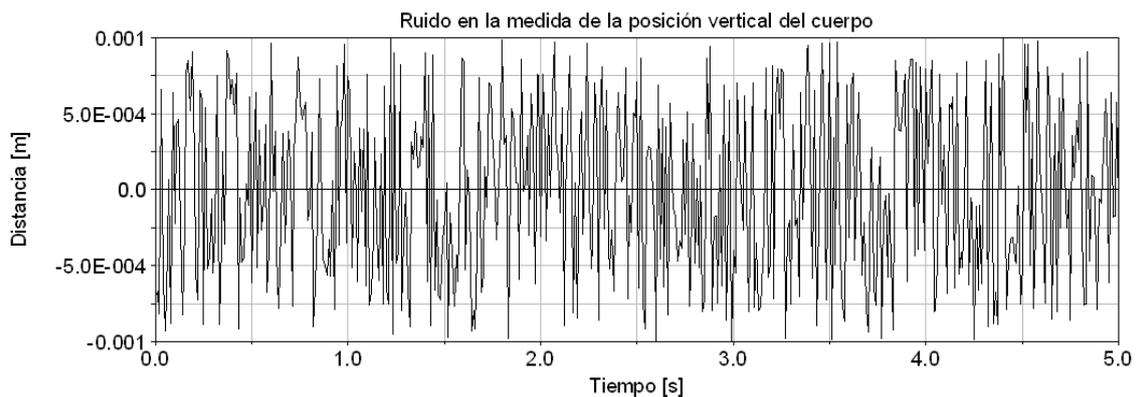


Figura 3.33. Ruido añadido a la posición vertical del cuerpo resultante de la simulación del sistema real.

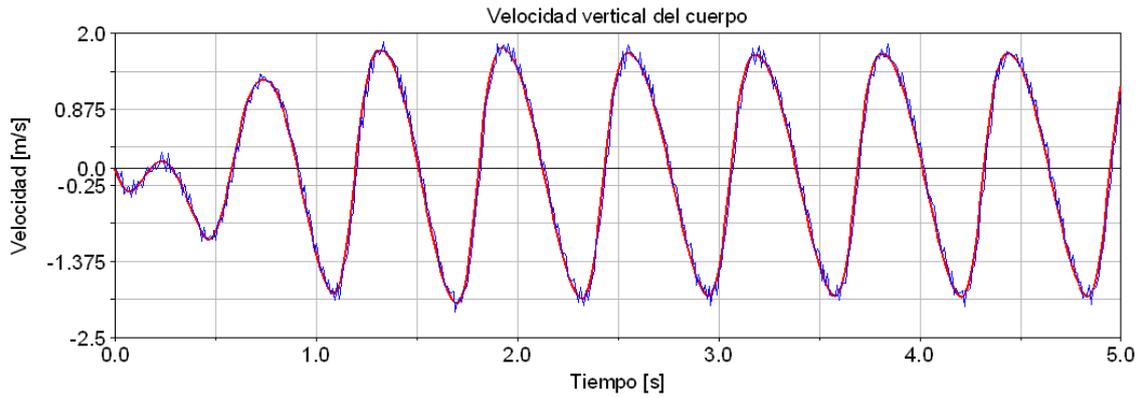


Figura 3.34. Gráfico de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la posición tras añadir un ruido aleatorio (azul).

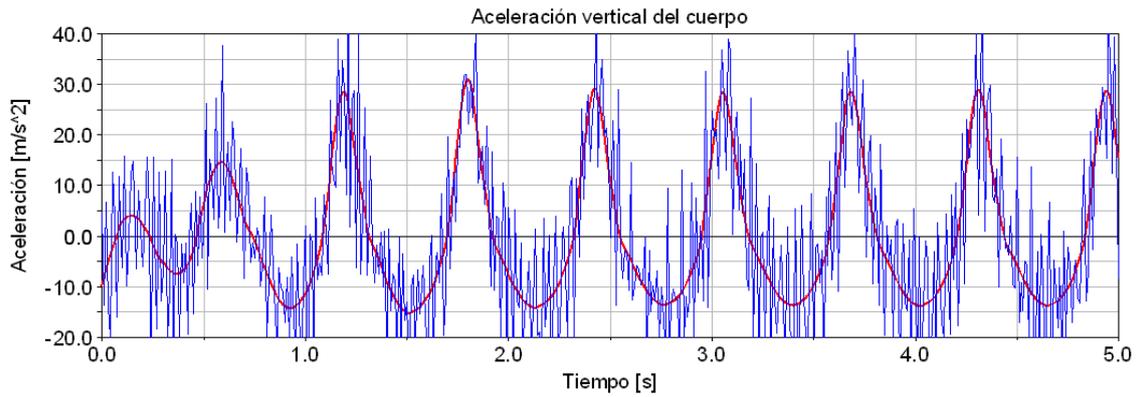


Figura 3.35. Gráfico de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la posición tras añadir un ruido aleatorio (azul).

Tras algunas iteraciones en busca de valores satisfactorios para las constantes del Observador PI, se llega a los valores mostrados en la expresión (3.24).

$$\begin{aligned} K^p &= 1,0e4 \\ K^i &= 1,0e3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con estos valores, y utilizando la señal ruidosa como referencia, el comportamiento del sistema, reflejado en la posición vertical del cuerpo, es similar al comportamiento real (Figura 3.36).

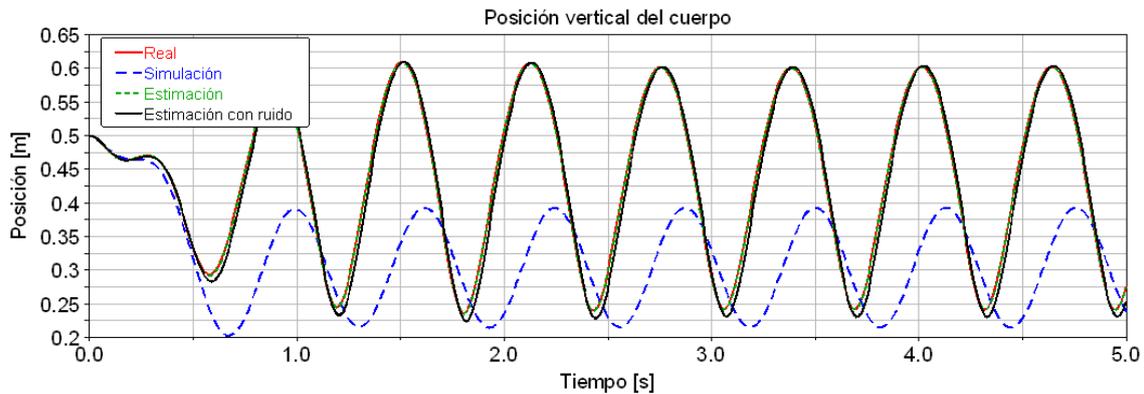


Figura 3.36. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.

El error en la salida del sistema asciende ahora a casi 30mm (Figura 3.37), un 5% de la medida máxima.

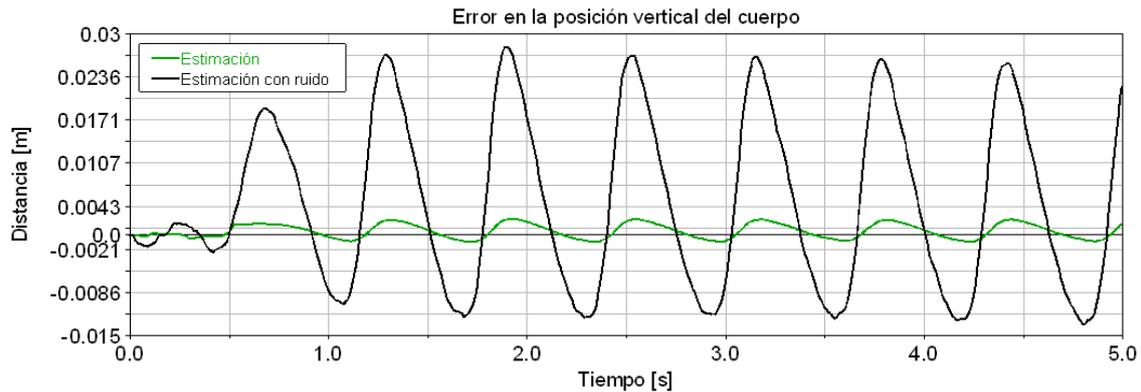


Figura 3.37. Gráfico del error de la posición vertical del cuerpo en la estimación de estados, con y sin ruido en la medida, respecto del sistema real.

Lo mismo ocurre con la fuerza estimada del muelle-amortiguador, que se ve afectada por el ruido de la medida, pero que en término medio converge al valor del sistema real (Figura 3.38).

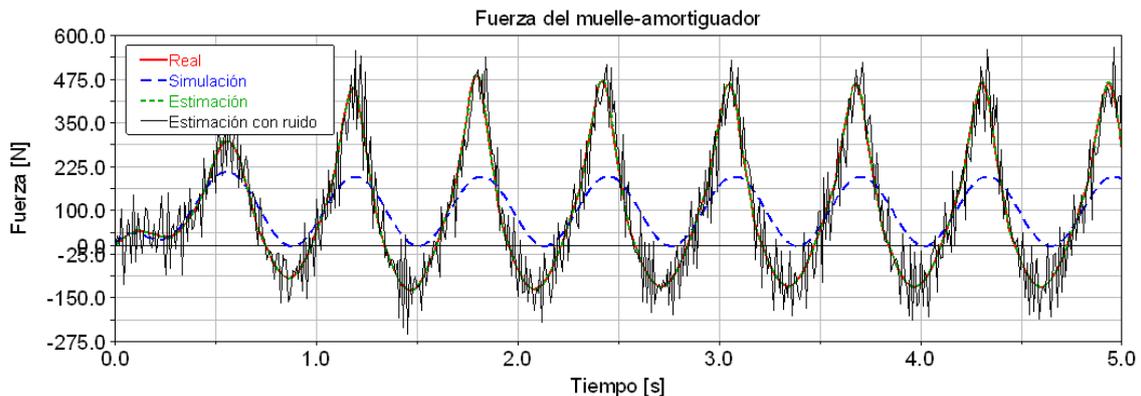


Figura 3.38. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en el muelle-amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.

En este caso, el error máximo en la fuerza asciende ahora a 200N (Figura 3.39), aunque puntualmente y evidentemente a causa del ruido de la medida real. Puesto que la referencia en posición varía bruscamente de un paso de integración a otro, la estimación de estados trata de seguir esa misma referencia, lo que requiere una fuerza mucho mayor en ese paso de integración, dando lugar a grandes variaciones en la fuerza estimada pero que, en término medio puesto que el ruido tiene medida nula, converge con la fuerza real, sin que la estimación de estados no se vuelva inestable.

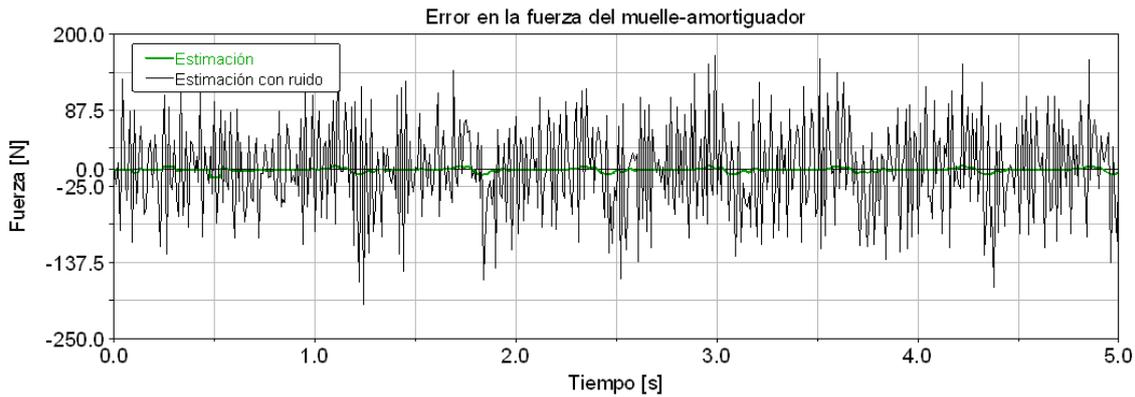


Figura 3.39. Gráfico del error de la fuerza vertical en el muelle-amortiguador en la estimación de estados, con y sin ruido en la medida, respecto del sistema real.

Por último, tanto la velocidad (Figura 3.40) como la aceleración (Figura 3.41) del cuerpo también resultan corregidas y coherentes con la posición y entre ellas, aunque afectadas lógicamente por el ruido de referencia.

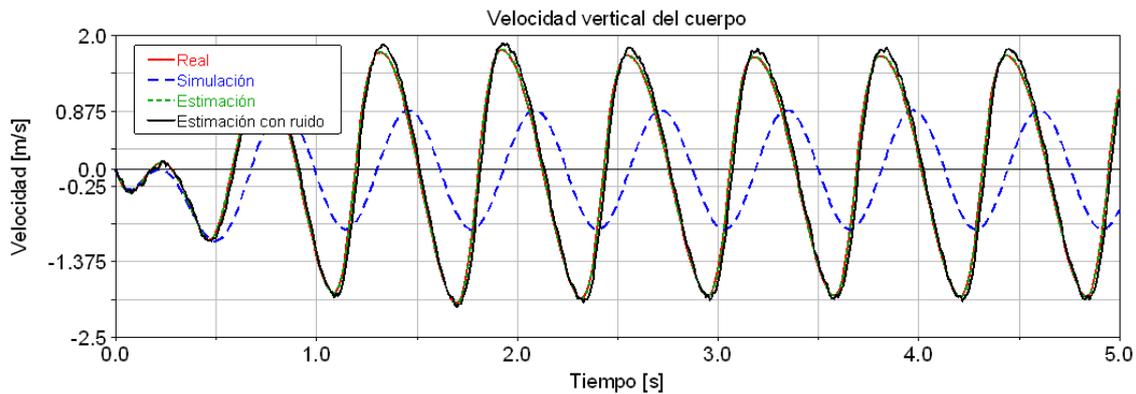


Figura 3.40. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.

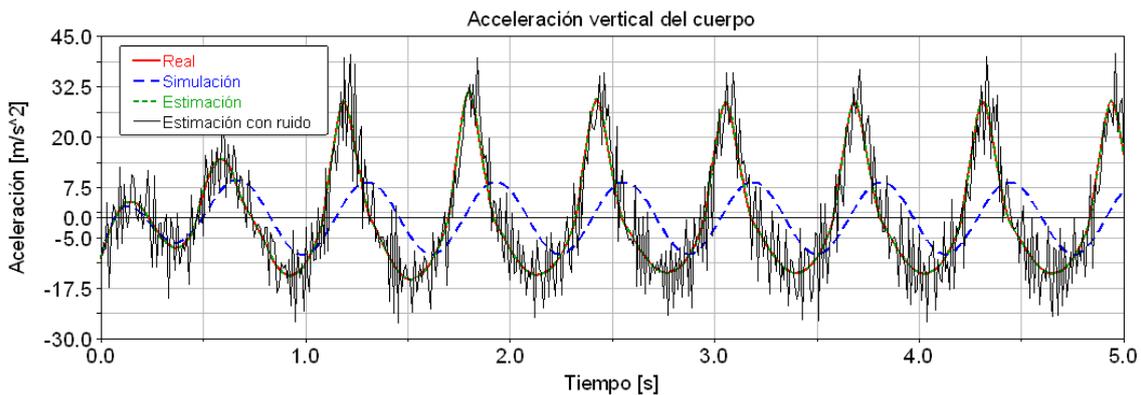


Figura 3.41. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.

3.7.5 Conclusiones

La estimación de estados tiene un funcionamiento plenamente satisfactorio sin presencia de ruido, puesto que se obtiene el valor temporal del estado buscado y el comportamiento del modelo resulta similar al del sistema real.

Sin embargo, si la medida está contaminada por ruido, éste se traslada a la estimación. Cabe destacar se está utilizando un Observador Proporcional-Integral

ajustado manualmente (seguramente lejos de su ajuste óptimo) y señales extremadamente ruidosas no sometidas a filtrados previos. Tal y como se expuso en el Estado del Arte, este observador de estados se ve muy afectado por el ruido de las medidas. Estos hechos aumentan el error de la estimación de estados, con errores cuantitativamente elevados y muy variables, aunque ponen de manifiesto la versatilidad de la metodología, al no exigir el uso de un observador de estados complejo ni tareas adyacentes para obtener un resultado aceptable incluso con medidas extremadamente ruidosas, en el sentido de que cualitativamente corrigen el comportamiento del sistema, acercándose la salida del modelo corregido a la medida real respecto a la salida del modelo sin corregir. Cobra interés la línea de investigación en busca de una mejor eliminación del ruido en caso de señales ruidosas, consistente en la aplicación de observadores de estado más sofisticados y eficientes que el Proporcional-Integral en este sentido, como el *Sliding Mode*.

Por otro lado, si en lugar de estimar en su conjunto la fuerza del muelle-amortiguador, se pretendiese estimar por separado la componente debida al muelle y la debida al amortiguador, el resultado serían dos estados no observables. Puesto que ambas fuerzas actúan entre los mismos cuerpos en la misma dirección, existen infinitas combinaciones de ambas tales que su suma, combinada con la fuerza actuante desde el exterior, son coherentes con el movimiento del cuerpo. A la vista de la ecuación (3.25), es inmediato obtener esta misma conclusión, ya que existen dos incógnitas y una única igualdad.

$$\ddot{z}(t) = \frac{F_k(z)}{m} + \frac{F_c(\dot{z})}{m} - g + \frac{F(t)}{m} \quad (3.25)$$

Por último, nótese que los estados que realmente se están estimando, desde el punto de vista estricto de la estimación de estados en modelos matemáticos, son la velocidad y la posición, puesto que son éstos los estados del sistema y sobre sus ecuaciones diferenciales es donde se aplica la corrección (en forma de fuerza virtual). Para mostrar esto fácilmente, se linealiza el sistema y se expresa en su formulación espacio-estado en el dominio continuo del tiempo (3.26).

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{amortiguador}}{m} & \frac{K_{muelle}}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F(t) \\ g \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Tanto la fuerza actuante sobre el cuerpo como la gravedad se consideran entradas y la posición vertical del cuerpo es la salida del sistema. Particularmente en esta formulación linealizada, la posición está medida con referencia a la posición inicial, donde el muelle no realiza ningún esfuerzo, no respecto del suelo.

Si se tiene en cuenta la no-linealidad del muelle-amortiguador, se cambia la formulación espacio-estado, lineal, por la formulación de las ecuaciones diferenciales en el dominio continuo del tiempo, no lineal, según la expresión (3.27).

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{k-c}(z, \dot{z})}{m} + \frac{F(t)}{m} - g \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$z(t) = z(t)$$

De donde se deduce la formulación utilizada para el sistema real (3.28).

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{k-c}(z, \dot{z})}{m} + \frac{F(t)}{m} - g \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \ddot{z}(t) = \frac{F_{k-c}(z, \dot{z})}{m} + \frac{F(t)}{m} - g \quad (3.28)$$

Pues bien, desde el punto de vista del observador de estados, se están estimando la velocidad y la posición, coincidiendo además uno de ellos con la medida o salida del sistema real. De hecho, a la vista de los resultados de la estimación, efectivamente ambos estados convergen con sus valores reales. Sin embargo, puesto que la corrección introducida por el observador de estados según la metodología presentada tiene un significado físico y está sometida a la dinámica del sistema, manteniendo su coherencia, se está corrigiendo el sistema completo manteniendo la coherencia del mismo, lo que permite extraer de la simulación corregida otras variables de estado interesantes. Es por esto que, pese a que la fuerza del muelle-amortiguador no es propiamente un estado en la formulación matemática de ecuaciones diferenciales tal y como se plantea en los observadores de estado sobre modelos matemáticos, se puede decir que su valor se corrige con la aplicación de esta metodología y, como no deja de ser un cálculo basado en comparar las salidas del modelo con las del sistema real, también se puede decir que se trata de una estimación de estados.

Por el contrario, la corrección numérica introducida por los observadores de estados sobre modelos matemáticos no tiene, al menos directamente, un sentido físico, por lo que se corrigen únicamente los estados del sistema según la formulación, es decir, los grados de libertad del sistema, sin poder extraer más conocimiento del sistema. Retomando el caso estudiado, y aplicando el Filtro Kalman Extendido, la formulación se plantea en la expresión (3.29).

$$\begin{bmatrix} \ddot{\hat{z}}(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})}{m} + \frac{F(t)}{m} - g + K_{(1,1)}^{Kalman}(t) \cdot (z(t) - \hat{z}(t)) \\ \dot{\hat{z}}(t) + K_{(2,1)}^{Kalman}(t) \cdot (z(t) - \hat{z}(t)) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t)$$

Los términos de la matriz de la constante de Kalman (K^{Kalman}) se calculan según el algoritmo que tiene en cuenta las covarianzas de los ruidos de proceso, de medida y de la estimación del paso anterior, lo cual se demuestra como estadísticamente óptimo en el caso lineal (no es óptimo en el caso del no lineal, es decir, el Filtro Kalman Extendido, como ya se expuso en el Estado del Arte) pero sin significado físico. Es decir, ¿cuál es la fuerza realizada por muelle amortiguador tras realizar la estimación de estados? Y, si $\dot{\hat{z}}(t)$ es la velocidad y $\hat{z}(t)$ es la posición vertical, está claro que la primera es la derivada de la segunda, ¿qué corrección cabe hacer aquí? En un caso tan sencillo, se puede responder a estas dos preguntas.

Para responder a la primera, basta comparar la formulación anterior con la presentada para la estimación según la metodología defendida (3.30).

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\hat{z}}(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}})}{m} + \frac{F(t)}{m} - g + K_{(1,1)}^{Kalman}(t) \cdot (z(t) - \hat{z}(t)) \\ \dot{\hat{z}}(t) + K_{(2,1)}^{Kalman}(t) \cdot (z(t) - \hat{z}(t)) \end{bmatrix} \\
 \hat{z}(t) &= \hat{z}(t) \\
 \ddot{\hat{z}}(t) &= \frac{\tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}}) + F_v(t)}{m} - g + \frac{F(t)}{m}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \hat{F}_{k-c}(t) = \tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}}) + m \cdot K_{(1,1)}^{Kalman}(t) \cdot (z(t) - \hat{z}(t))$$

Aunque en la práctica no es algo habitual extraer el significado físico de la corrección introducida por el Filtro Kalman u otros observadores, precisamente por no ser casos tan simples. Por el contrario, en la metodología defendida se obtiene directamente gracias al significado físico de la corrección, es decir, de la variable virtual (3.31).

$$\hat{F}_{k-c}(t) = \tilde{F}_{k-c}(\hat{z}, \dot{\hat{z}}) + F_v(t) \quad (3.31)$$

En cuanto a la segunda pregunta, parece que lo lógico sería tomar como nulas la covarianzas del ruido de proceso para la segunda variable de estado respecto de ella misma y respecto del otro estado, para evitar la incoherencia física de que la derivada de la posición no sea exactamente la velocidad.

Sin embargo, en un caso más general, como los que se presentan posteriormente, lo resulta tan evidente obtener el valor corregido de otras variables del sistema ni mantener la coherencia física del sistema, es decir, comprender lo que está ocurriendo en el sistema al aplicar la estimación de estados. De hecho, no resulta evidente ni sencillo (quizá imposible) plantear el modelo matemático del sistema tan sólo con ecuaciones diferenciales.

3.8 Justificación de la innovación

Como se concluía en el capítulo de Estado del Arte, pese al interés de la estimación de estados y a las ventajas de los modelos CAE, aún no existe ninguna referencia bibliográfica de la combinación de ambos elementos, ni siquiera para su aplicación en dinámica vehicular.

Se ha presentado una primera metodología que hace posible la estimación de estados en modelos CAE, particularmente aplicable a sistemas multicuerpo y, dentro de los cuales, la dinámica vehicular es especialmente interesante.

La primera de las ventajas que derivan de esta metodología es la mayor facilidad a la hora de crear el modelo del sistema real, puesto que se evita el planteamiento explícito del modelo mediante lenguaje matemático. Se utiliza la potencia y flexibilidad del software de ingeniería asistida por ordenador que, a través de su interface gráfica de usuario y sus librerías de datos, facilita la labor de creación y modificación del modelo. Esta labor permite ahorrar costes y tiempo.

La segunda de las ventajas, que en parte es consecuencia de la primera, es que la realización de modelos más complejos y, por tanto, más completos y fieles a la realidad es factible técnica y económicamente. En la estimación de estados sobre modelos matemáticos es necesario que la formulación del modelo sea compatible con la

formulación del observador de estados, por ejemplo a través de las matrices de la notación espacio-estado en los sistemas lineales o sólo mediante ecuaciones diferenciales (no algebraicas) en los sistemas no lineales para expresar explícitamente sólo las derivadas de aquellas variables de estado cuyas derivadas se calculan. Este hecho obliga a eliminar aquellos efectos que no se pueden incluir en la formulación, por lo que no se obtiene ningún conocimiento de lo que ocurre en el sistema real respecto de dichos efectos y se puede perjudicar la fidelidad de aquellos efectos que sí se calculan. Este factor limitante a la hora de la creación del modelo se elimina, permitiendo obviar menos efectos ciertamente presentes en el sistema real, con la consiguiente ganancia de precisión y conocimiento de los que ocurre en el sistema.

La tercera de las ventajas es que generalmente, al menos en el caso de la dinámica vehicular, siempre existe un modelo CAE independientemente de la estimación de estados. Este modelo se utiliza para la simulación con el objetivo de desarrollar el sistema real, analizarlo, optimizarlo y desarrollar técnicas de control sobre él. Esta metodología permite utilizar también este modelo para la estimación de estados sin necesidad de crear uno nuevo, que además sería matemático, con las desventajas ya expuestas. Esta ventaja permite ahorrar tiempo y costes en el desarrollo e implementación de la estimación de estados.

La cuarta ventaja es que la complejidad de la estimación de estados es prácticamente independiente de la complejidad del modelo. En el caso de un vehículo completo, existen cientos de grados de libertad y sus respectivas restricciones, pero la dificultad de la implementación de la nueva metodología es similar a su aplicación en un sistema unidimensional, como el ejemplo del cuerpo soportado por un muelle. En el caso de modelos matemáticos, la dificultad aumenta de manera cuadrática con el número de grados de libertad (número de variables de estado) del sistema, puesto que es necesario calcular Jacobianos, plantear matrices de covarianzas de ruidos o matrices de ganancias de todos los estados entre sí. En consecuencia, la estimación de estados es mucho más sencilla, lo que permite llevarla a cabo especialmente en sistemas complejos.

La quinta ventaja es que el observador de estados adquiere un significado físico para el sistema. Al contrario que su implementación en modelos matemáticos, donde se trata simplemente de una corrección numérica en las ecuaciones del cálculo de las variables de estado, su implementación en modelos CAE supone que esa corrección se puede traducir en un concepto consistente para el sistema, como el error de una fuerza, por ejemplo. Esto permite obtener conclusiones incluso de la corrección introducida por el observador de estados y no sólo de las variables de estado explícitamente expresadas por la formulación, lo que permite obtener más conocimiento de lo que realmente ocurre en el sistema.

La sexta ventaja es que no se altera la coherencia dinámica del sistema. La corrección numérica de las ecuaciones del sistema en un modelo matemático supone alterar artificiosamente cada una de ellas de manera independiente de las relaciones que las ligaban, es decir, se alteran las relaciones entre las variables del sistema, lo que significa que se altera la dinámica del sistema (por ejemplo, una velocidad puede dejar de ser la derivada de una posición porque se le suma una corrección calculada sin tener en cuenta dicha relación). Por el contrario, el modelo CAE mantiene siempre la coherencia dinámica del sistema original, ya que las ecuaciones son resueltas internamente según los principios que rigen su naturaleza (como la Segunda Ley de Newton en los sistemas multicuerpo o la definición de velocidad como derivada de la posición). Consecuentemente, el resto de variables de estado existentes (no sólo

aquellas explícitamente expresadas según las ecuaciones del modelo matemático) son coherentes con la corrección introducida por la estimación de estados y su valor también se puede considerar estimado, lo que aumenta el conocimiento del estado real del sistema.

La séptima ventaja es que se pueden corregir distintos errores en el modelo de manera independiente si no están conectados entre sí o corregirlos todos a la vez si existe una interrelación. Como se ve en las aplicaciones presentadas posteriormente, se puede corregir el defecto en una única suspensión o en todas las suspensiones de un vehículo, el defecto en el modelo de un neumático pero no en los demás neumáticos y, de manera simultánea, en todos los esfuerzos generados por este. Esto permite una estrategia modular que facilita la labor de corrección de modelos complejos, comenzando por un defecto, extendiéndolo a otros componentes del sistema después y enfrentándose posteriormente a otro defecto del modelo sin tener que modificar lo anterior o incluso eliminándolo si ya no se considera necesario.

Como desventaja, cabe citar que el diseñador de la estimación de estados necesita un conocimiento y comprensión detallados del sistema real y del modelo para ser capaz de implementar exitosamente esta metodología. Es necesario analizar los potenciales errores del modelo y su efecto sobre el sistema así como las relaciones entre las variables del sistema para introducir la corrección adecuada a partir de las medidas correctas del sistema real. En este caso no es suficiente con aplicar el algoritmo matemático del observador de estados sobre las ecuaciones del sistema, se requiere una labor de análisis y comprensión.

4 Aplicaciones en dinámica vehicular

En este capítulo se presentan varias aplicaciones de la metodología de estimación de estados sobre modelos CAE de sistemas dinámicos multicuerpo propios de la dinámica vehicular creados en MSC.Adams®.

En todas las aplicaciones presentadas, el sistema real es un sistema simulado del que se obtienen las variables de entrada, de estado y de salida con el fin de validar la metodología. Los principales motivos de evitar la experimentación práctica son, en primer lugar, disponer del valor real de las variables de estado para evaluar y cuantificar la convergencia de la estimación de estados, en segundo lugar, la limitación en los recursos disponibles y, en tercer y último lugar, evitar la presencia de efectos ligados a la propia experimentación ajenos a la metodología presentada que se pretende validar y que no añadirían más que incertidumbre a los resultados.

4.1 Suspensión McPherson: Fuerza del amortiguador

4.1.1 Presentación del sistema real

Como primera aplicación dentro del campo de la dinámica vehicular se plantea un caso sencillo: la estimación de la fuerza realizada por el amortiguador en una suspensión tipo McPherson (Figura 4.1) a partir de la medida de la deformación del muelle.

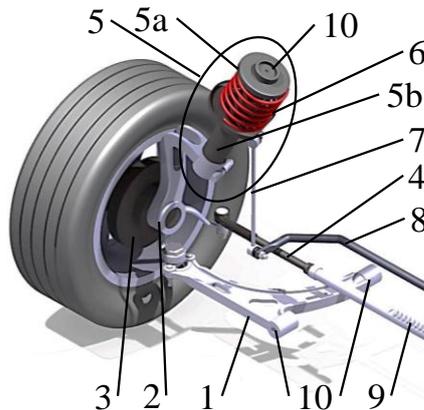


Figura 4.1. Esquema tridimensional de la suspensión McPherson con sus elementos: 1.-Trapezio; 2.- Mangueta; 3.-Buje; 4.-Bieleta de dirección; 5.-Amortiguador; 5a.-Vástago del amortiguador; 5b.- Tubo del amortiguador; 6.- Muelle; 7.- Tirante de la barra estabilizadora; 8.-Barra estabilizadora; 9.-Cremallera de dirección; 10.-*Silent-block*.

El sistema de suspensión de un vehículo recibe fuerzas del resto del vehículo y las transmite a la calzada a través de los neumáticos. Paralelamente, recibe fuerzas de la interacción neumático-calzada (debidas a la acción del motor, los frenos y en ángulo de dirección fijado por el volante) y las transmite al resto del vehículo.

Las primeras fuerzas tienen su origen en la masa del propio vehículo, la cual está sometida a aceleraciones (fuerzas de origen inercial) y a la acción de elementos externos (como la gravedad o la fuerza aerodinámica). La gravedad causa la fuerza vertical conocida como peso, el cual se distribuye entre las cuatro suspensiones en función de la posición tridimensional del centro de gravedad del conjunto del vehículo, que varía a su vez con la orientación tridimensional del vehículo respecto de la calzada (cabeceo y

balanceo, definidas principalmente por los desplazamientos de las suspensiones) y la orientación de la propia calzada (inclinación y peralte). Cuando el vehículo se mueve (gracias a las fuerzas provenientes de la interacción neumático-calzada), aparecen además las fuerzas inerciales (debidas a la aceleración, al frenado y al giro), y las debidas a los factores externos (como la fuerza aerodinámica debida a la propia velocidad del vehículo). Las fuerzas longitudinales (aceleración-frenado) y transversales (giro), según los ejes del vehículo, tienen su origen en la interacción neumático-calzada y se transmiten principalmente por la timonería de la suspensión (trapecio, bieleta y cuerpo del amortiguador).

En la suspensión McPherson, la fuerza vertical se transmite principalmente por el muelle y por el amortiguador y llega al neumático originando su carga vertical. Como reacción a esta fuerza vertical variable en el tiempo, el muelle y el amortiguador presentan un desplazamiento a lo largo del tiempo, haciendo que el vástago del amortiguador se deslice dentro del tubo o camisa del mismo, obligando a que el muelle se deforme y que el trapecio gire en torno a los *silent-blocks* que lo unen a la carrocería (o al subchasis). Además, si este movimiento no es idéntico y simultáneo en ambas ruedas del mismo tren, la barra estabilizadora sufre un movimiento principalmente de torsión (aunque también tiene una cierta componente de flexión), lo que provoca un esfuerzo transmitido a través del tirante al tubo del amortiguador. Por último, la bieleta de dirección gira respecto a la cremallera, interactuando en la cinemática del movimiento y transmitiendo esfuerzos al resto del vehículo y, particularmente, al volante. Todos estos movimientos generan un cambio en la orientación del neumático sobre el suelo, es decir, una variación del ángulo de caída y del ángulo de dirección o convergencia, y por supuesto un desplazamiento vertical de la carrocería respecto del suelo. La Figura 4.2 muestra el desplazamiento de la suspensión McPherson: compresión a la izquierda (la carrocería en una posición inferior) y elongación a la derecha (la carrocería en una posición superior). Se observa cómo varía el ángulo de caída (*camber angle*), la orientación del trapecio (azul) y de la bieleta de dirección (verde), el giro de la barra estabilizadora (roja) y el desplazamiento del muelle (hélice roja) y del vástago del amortiguador (amarillo) dentro del tubo (azul oscuro).

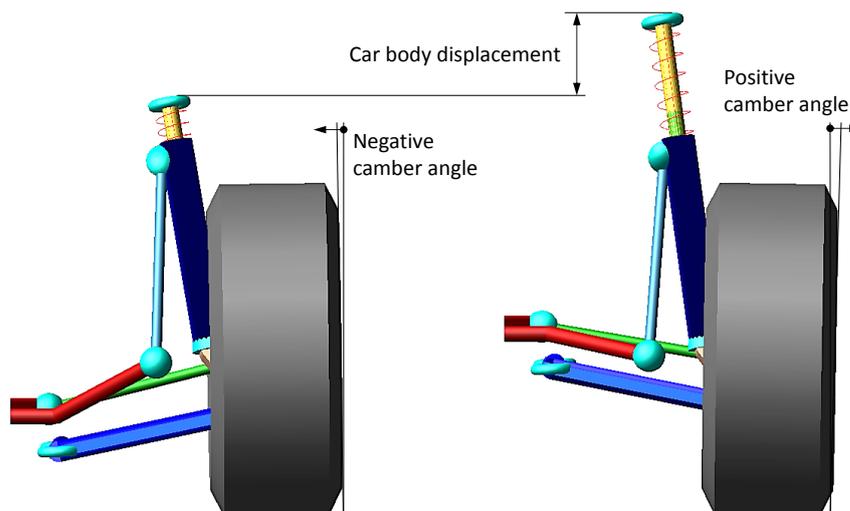


Figura 4.2. Esquema de la geometría de la suspensión McPherson en posición comprimida (izquierda) y extendida (derecha).

En cuanto al comportamiento vertical de la suspensión como sistema dinámico, la entrada es la fuerza proveniente de la carrocería, principalmente a través de la copela

(punto de unión entre la carrocería y el vástago del amortiguador a través de un *silent-block*). La salida es el desplazamiento de la suspensión, materializado en la altura de la carrocería sobre la suspensión, el desplazamiento del muelle y el desplazamiento del amortiguador. El estado o variable que se pretende estimar es la fuerza realizada por el amortiguador.

Este sistema propio de la dinámica vehicular mantiene un paralelismo con la primera aplicación práctica presentada correspondiente a un sistema masa-muelle-amortiguador, y es por ello que se comenzó analizando este sistema mucho más simple. El sistema que ahora se estudia es mucho más complejo. En primer lugar, existen más cuerpos, lo que aumenta el número de grados de libertad, es decir, las posibilidades de movimiento de cada uno de ellos, y el número de restricciones geométricas, cinemáticas y dinámicas. En segundo lugar, se trata de un sistema dinámico multicuerpo tridimensional, es decir, que cada cuerpo tiene seis grados de libertad, lo que conlleva que cada uno de ellos da lugar a seis ecuaciones diferenciales para definir sus movimientos en el espacio, se requiere mayor número de interconexiones entre ellos y más parámetros para caracterizarlos: no basta con su masa, sino que también se necesitan sus tensores de inercia. En tercer y último lugar, existen más relaciones dinámicas además del muelle-amortiguador, como son el neumático, los *silent-blocks* y la barra estabilizadora. Además, al igual que se expuso para el muelle-amortiguador en la primera aplicación, aunque el comportamiento de estos elementos en ocasiones se linealiza para simplificarlo, en general su comportamiento es no-lineal y viene determinado por sus curvas de rigidez (fuerza-deformación) y amortiguamiento (fuerza-velocidad de deformación). Así, generalmente un *silent-block* está definido por doce curvas de comportamiento, correspondientes a la rigidez y amortiguamiento en cada uno de los seis grados de libertad de deformación. Todo ello sin perjuicio, por supuesto, de que estos comportamientos no son constantes a lo largo del tiempo y evolucionan a lo largo de la vida útil del elemento según las condiciones de trabajo y ambientales a las que ha estado sometido.

Todo esto ya remarca la dificultad de plantear la formulación matemática de este sistema y la necesidad de realizar un modelo CAE en una herramienta informática, donde los tres aspectos anteriores pueden ser incluidos fielmente (sin simplificaciones) y sin gran dificultad a través de las herramientas de modelado del software de simulación dinámica de sistemas multicuerpo (todos los cuerpos, con todos sus grados de libertad y restricciones cinemáticas y con todas las características dinámicas). Sobre semejante modelo CAE se puede plantear la estimación de estados según la metodología presentada, como se verá posteriormente. Sin embargo, aún planteando la formulación matemática de este sistema, el desarrollo del estimador de estados sería difícil dado el elevado número de estados (covarianzas de errores, planteamiento de Jacobianos, etc.).

En cuanto al sistema en sí, es evidente que la entrada natural del sistema es la fuerza proveniente de la carrocería y, como en la aplicación anterior, se presupone desconocida, ya que en el sistema real no se conoce, es decir, aunque se le atribuye un valor temporal para simular el sistema real, este valor no se utiliza en la estimación. La medida del sistema es la elongación del muelle, ya que ésta es una instrumentación común en los vehículos de laboratorio y en los ensayos, materializado generalmente en transductores LVDT o sensores de hilo. Es decir, que en la realidad la medida de desplazamiento del muelle es accesible y relativamente común. Por último, y al igual que se exponía en el sistema simple masa-muelle-amortiguador, estimar la fuerza que ejerce el amortiguador puede resultar interesante ya que permite admitir como

desconocido su comportamiento de este elemento, que aunque generalmente se puede ensayar para medir sus características, éstas evolucionan con el tiempo.

Además, desde el punto de vista conceptual, esta aplicación supone un salto respecto de la anterior, ya que aquí se estima una variable (fuerza) vinculada a un elemento (el amortiguador) gracias a la lectura de otra variable de otro tipo (desplazamiento) en otro elemento (muelle), existiendo entre ambas variables una relación compleja, difícilmente expresable matemáticamente, puesto que ambos elementos forman parte de un sistema multicuerpo tridimensional, actuando sobre cuerpos diferentes, en direcciones distintas y con restricciones cinemáticas particulares. Estas características diferencian esta aplicación de la anterior, en la que se podría aplicar otro tipo de método (como la resolución de la Segunda Ley de Newton) para el cálculo de la fuerza del muelle-amortiguador de comportamiento desconocido. En este caso, la creación de un modelo matemático resultaría muy compleja o supondría numerosas simplificaciones, como de hecho se realizan en las referencias citadas en el Estado del Arte, para hacer posible la estimación de la fuerza existente a través de la suspensión.

El sistema que aquí se analiza es sólo una parte del vehículo total, llamado generalmente “cuarto de vehículo”, ya que se analiza sólo una de las cuatro suspensiones. Esto es así para continuar la progresión de aplicaciones más simples a más complejas de la metodología presentada. Como es lógico, aislar este sistema de su entorno real conlleva asumir ciertas limitaciones, que se exponen a continuación.

En primer lugar, es el desplazamiento de las cuatro suspensiones el que determina el movimiento de la carrocería, no sólo en cuanto a su desplazamiento vertical, sino también en cuanto a su orientación respecto a los ejes horizontales, es decir, los movimientos de cabeceo y balanceo. Puesto que sólo se analiza una de las suspensiones, no es posible incluir los movimientos de cabeceo y balanceo y sólo se puede asumir que el desplazamiento vertical de la carrocería es igual al que tiene lugar en esta única suspensión, por lo que artificialmente se restringe el movimiento de la carrocería en el sistema al eje vertical, es decir, se guía el movimiento de la carrocería correspondiente según el eje perpendicular a la calzada.

En segundo lugar, la masa de la carrocería a la que se somete la suspensión en el sistema estudiado tendría que ver con la posición espacial del centro de gravedad, que varía con la orientación de la carrocería, efecto que no está considerado. Para esta aplicación se supondrá un valor de masa equivalente a un cuarto de la masa total de la carrocería.

En tercer lugar, la deformación y, por tanto, la fuerza de la barra estabilizadora es función de la posición relativa de ambos lados de la carrocería sobre el mismo tren, delantero o trasero. Es decir, que si la carrocería se desplaza en la misma medida arriba o abajo en ambos lados del tren delantero, la deformación de la barra estabilizadora es nula y, por lo tanto, no realiza ninguna fuerza. Es cuando ambas suspensiones tienen un desplazamiento diferente cuando la barra estabilizadora realiza la misma fuerza sobre ambas pero en sentidos opuestos, tendiendo siempre a igualar sus posiciones. En este caso, puesto que no se analiza todo el tren delantero, se incluye la restricción de la barra estabilizadora que elimina su desplazamiento torsional en el eje de simetría del vehículo. El significado físico de esta restricción es que la suspensión opuesta sobre el mismo tren sufre un desplazamiento similar al de la suspensión analizada pero en sentido inverso. Es evidente que al analizar el vehículo completo, los desplazamientos de las suspensiones serán coherentes con la dinámica global del vehículo, incluyendo el esfuerzo de la barra torsional.

Con todas las consideraciones anteriores, el modelo CAE en el software MSC.Adams[®] se presenta en el Anexo I: Modelo de suspensión McPherson.

Supóngase que la fuerza vertical actuante sobre la carrocería, proveniente de la dinámica del vehículo viene expresada por la ecuación (4.1), representada en la Figura 4.3.

$$F(t) = 900N \cdot \sin(5 \cdot t) \quad (4.1)$$

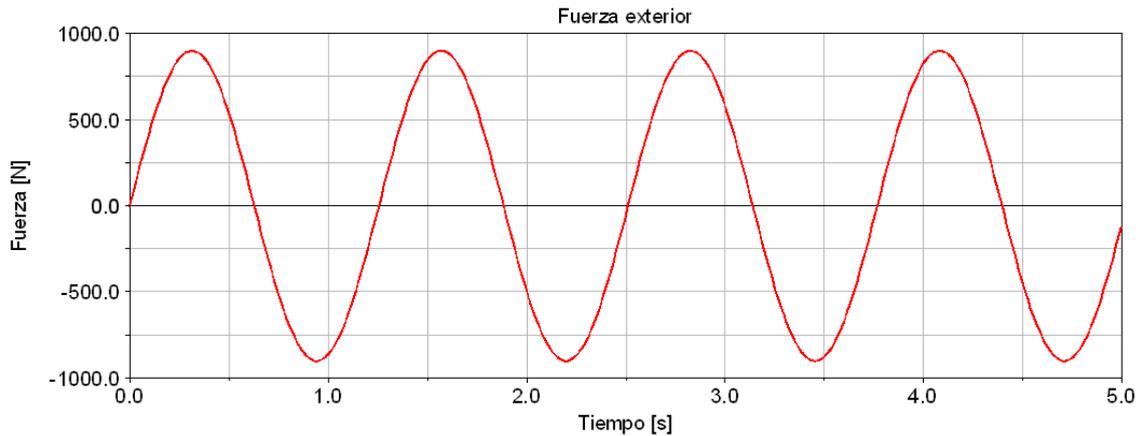


Figura 4.3. Gráfico de la fuerza exterior, vertical sobre el centro de gravedad de la carrocería, a lo largo del tiempo.

Pues bien, simulado el sistema en MSC.Adams[®] para tomarlo como sistema real, el desplazamiento del muelle, es decir, la salida del sistema, es el mostrado en la Figura 4.4.

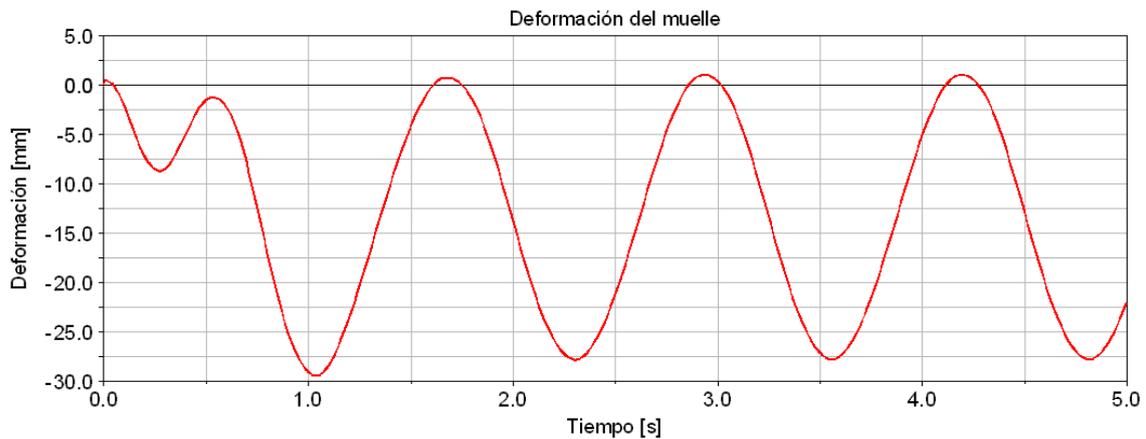


Figura 4.4. Gráfico de la deformación del muelle en el sistema real.

También es interesante su derivada, la velocidad de deformación, mostrada en la Figura 4.5.

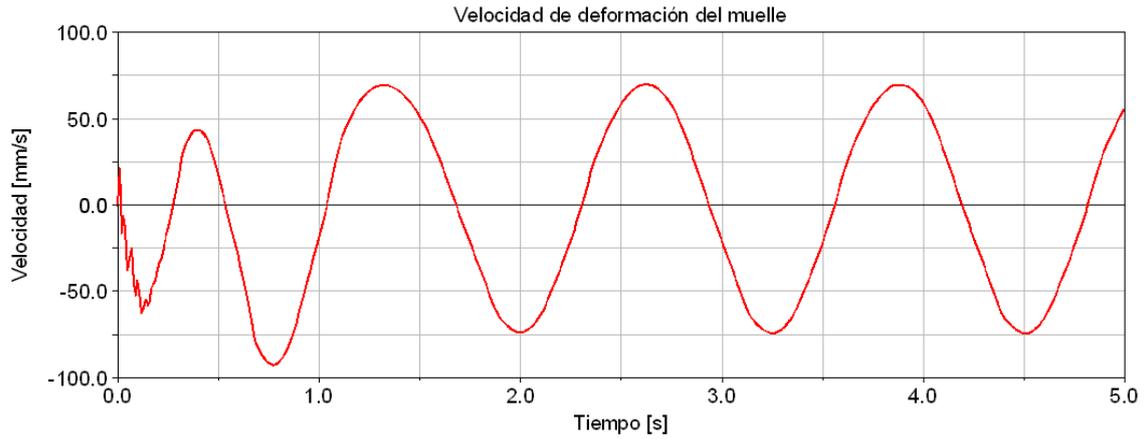


Figura 4.5. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real.

En cuanto a la variable que se pretende estimar, la fuerza del amortiguador, presenta la curva de la Figura 4.6.

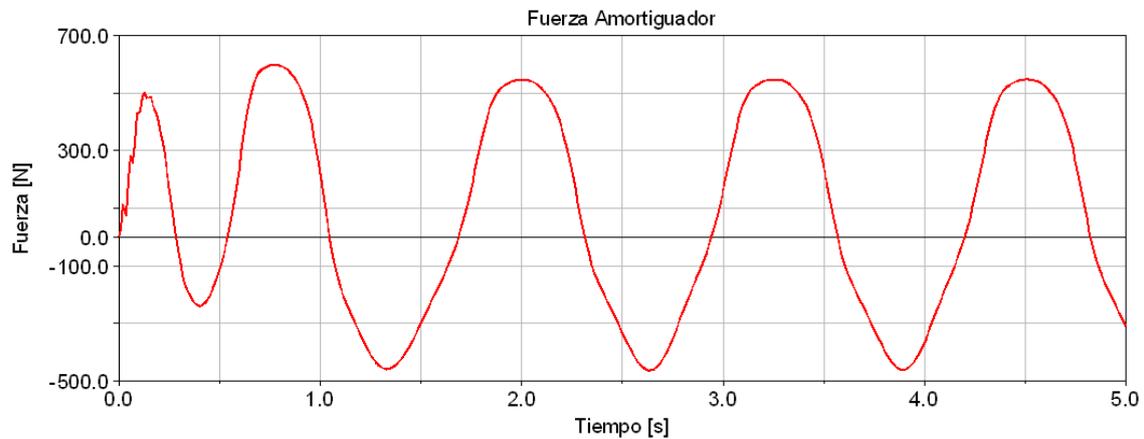


Figura 4.6. Gráfico de la fuerza en el amortiguador en el sistema real.

Siendo la deformación del amortiguador la mostrada en la Figura 4.7.

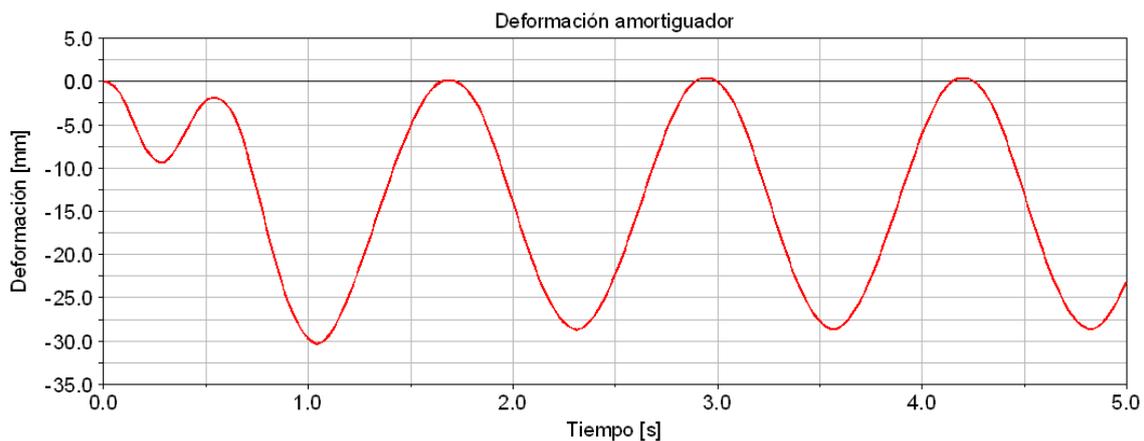


Figura 4.7. Gráfico de la deformación del amortiguador en el sistema real.

De nuevo, es fácil obtener el resto de estados interesantes para caracterizar el comportamiento del sistema, como la fuerza realizada por el muelle (Figura 4.8) o el movimiento vertical de la carrocería en posición (Figura 4.9), velocidad (Figura 4.10) y aceleración (Figura 4.11).

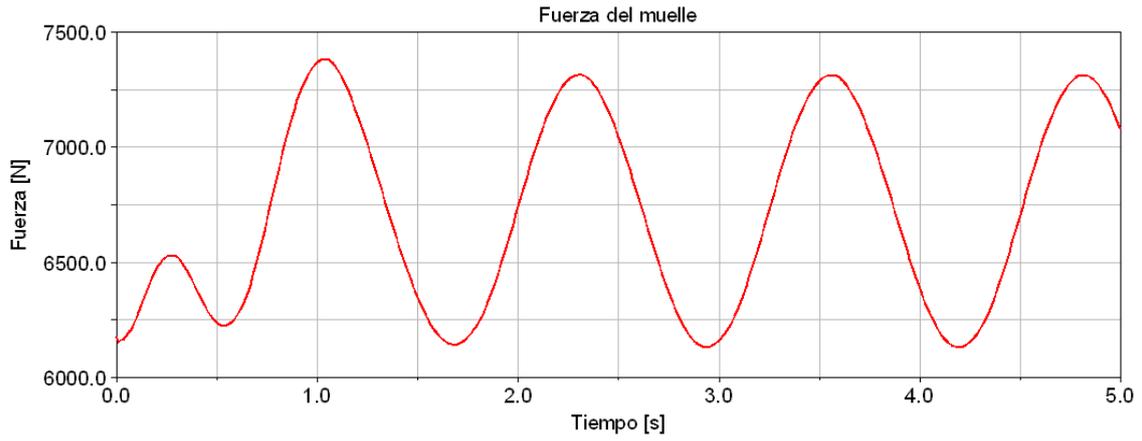


Figura 4.8. Gráfico de la fuerza en el muelle en el sistema real.

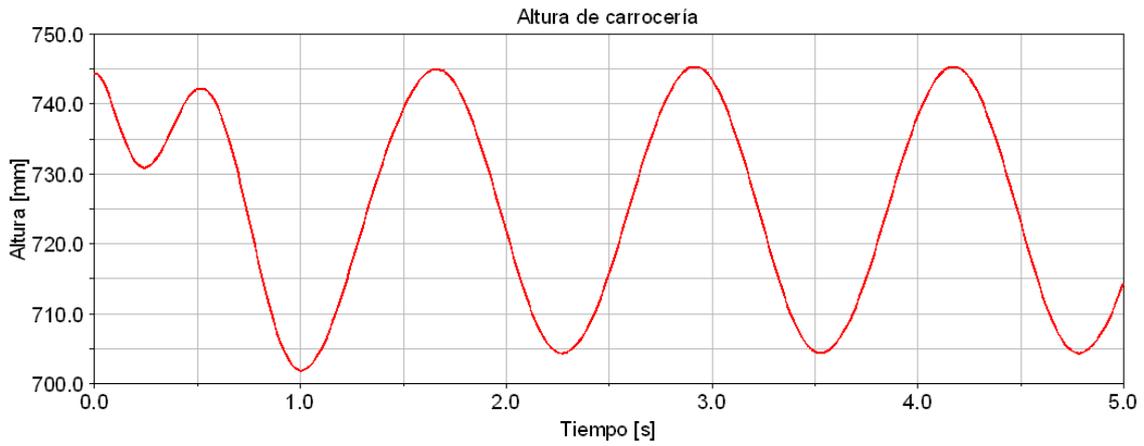


Figura 4.9. Gráfico de la altura de la carrocería en el sistema real.

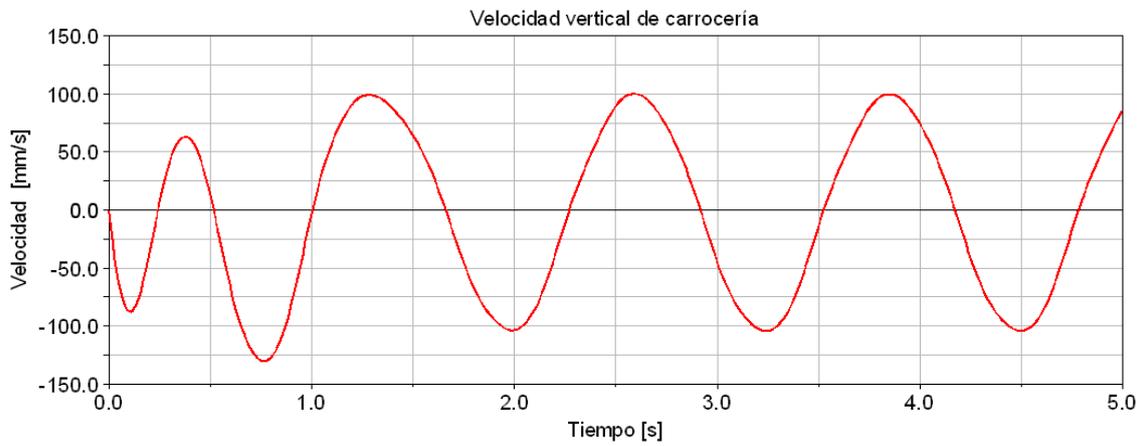


Figura 4.10. Gráfico de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real.

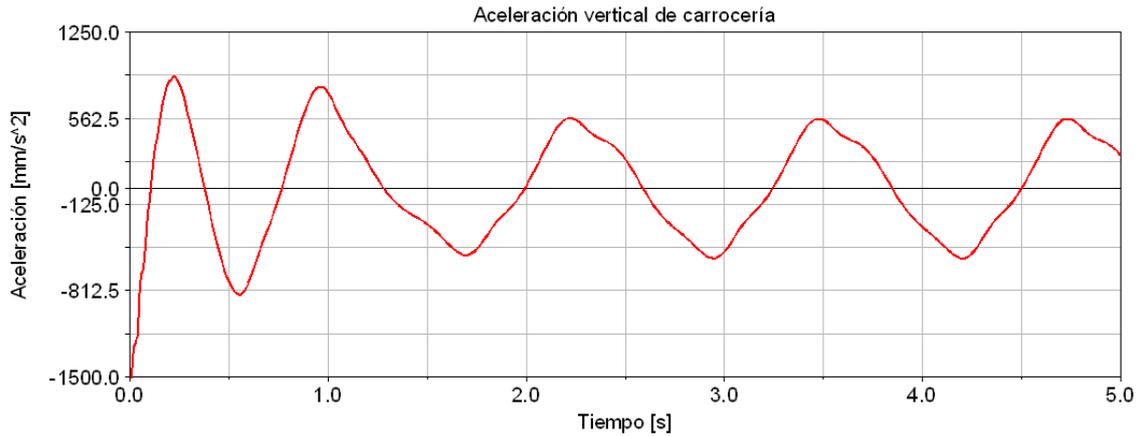


Figura 4.11. Gráfico de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real.

También es posible obtener información de lo que ocurre en la rueda, como la carga vertical que soporta (Figura 4.12) o su movimiento vertical en posición (Figura 4.13), velocidad (Figura 4.14) y aceleración (Figura 4.15).



Figura 4.12. Gráfico de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real.



Figura 4.13. Gráfico de la altura del eje de la rueda en el sistema real.

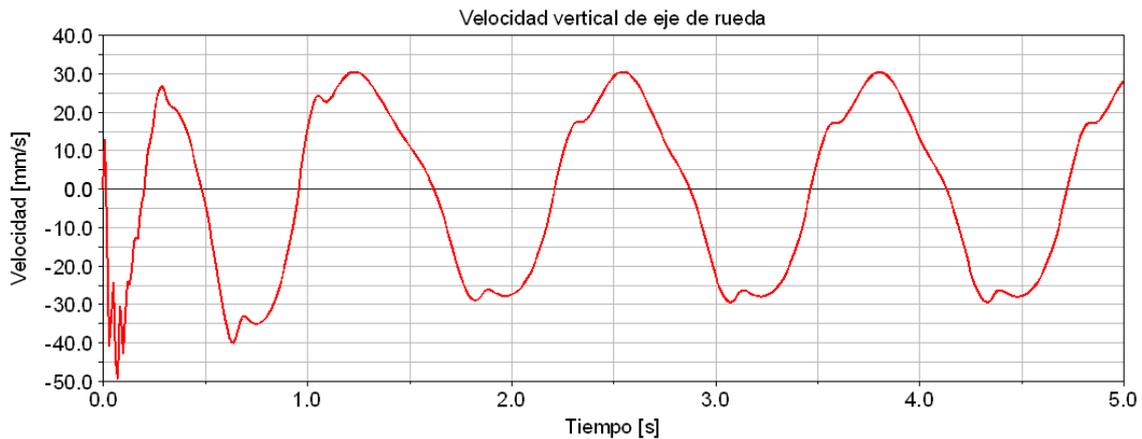


Figura 4.14. Gráfico de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real.

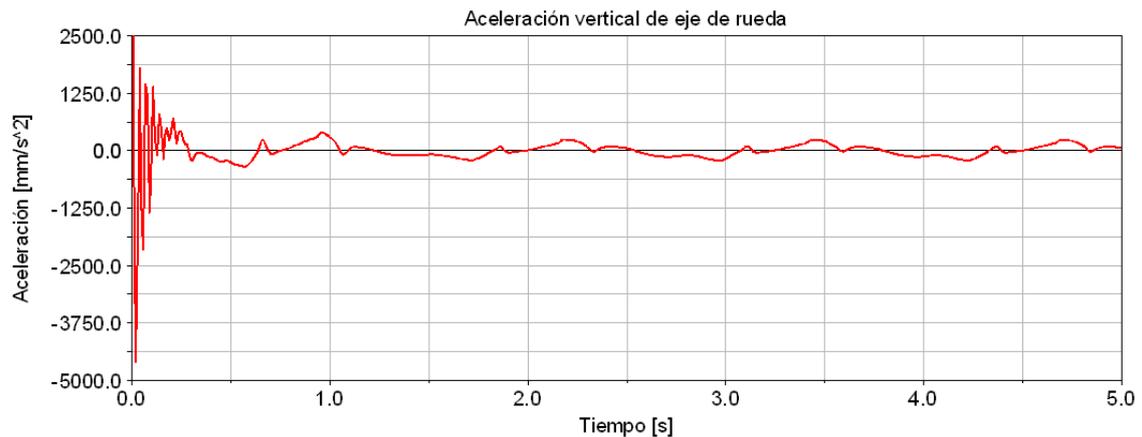


Figura 4.15. Gráfico de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real.

4.1.2 Presentación del modelo para la estimación de estados

De nuevo, el modelo parte del sistema real pero incluyendo algún error propio de la modelización: el comportamiento del amortiguador que se supondrá lineal y definido por la constante $C^{\text{amortiguador}}=0,2\text{N}\cdot\text{s}/\text{mm}$. La Figura 3.24 muestra la comparación entre el comportamiento real del amortiguador (rojo) y el comportamiento modelizado (azul).

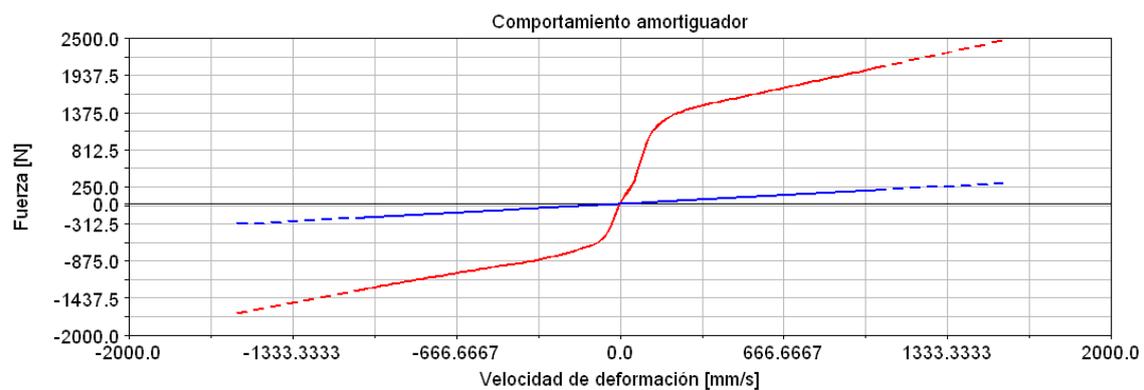


Figura 4.16. Gráfico comparativo del comportamiento real (rojo) y en el modelo (azul) para el amortiguador.

Con este modelo, y manteniendo la misma entrada que en el sistema real, la salida del sistema, es decir, el desplazamiento del muelle, es totalmente erróneo, como

muestra la Figura 4.17. Evidentemente, también su velocidad se ve afectada (Figura 4.18).

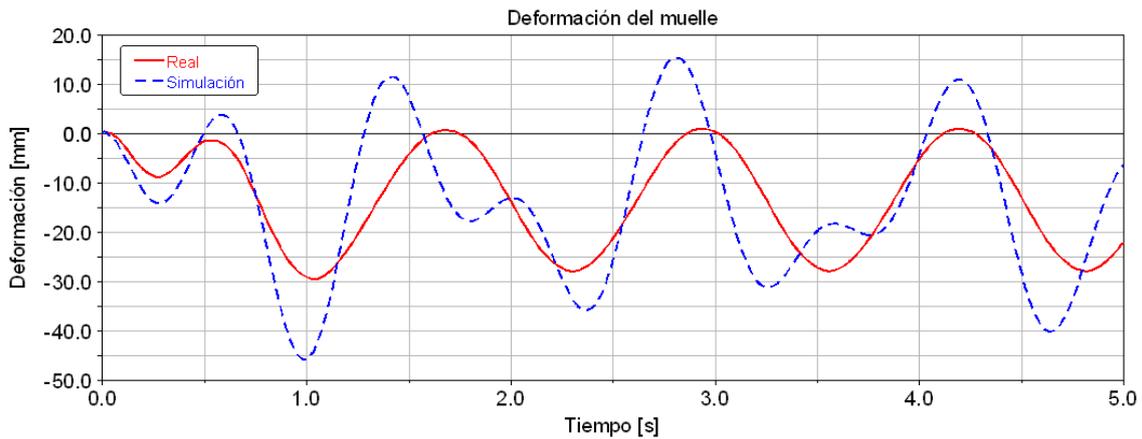


Figura 4.17. Gráfico comparativo de la deformación del muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.

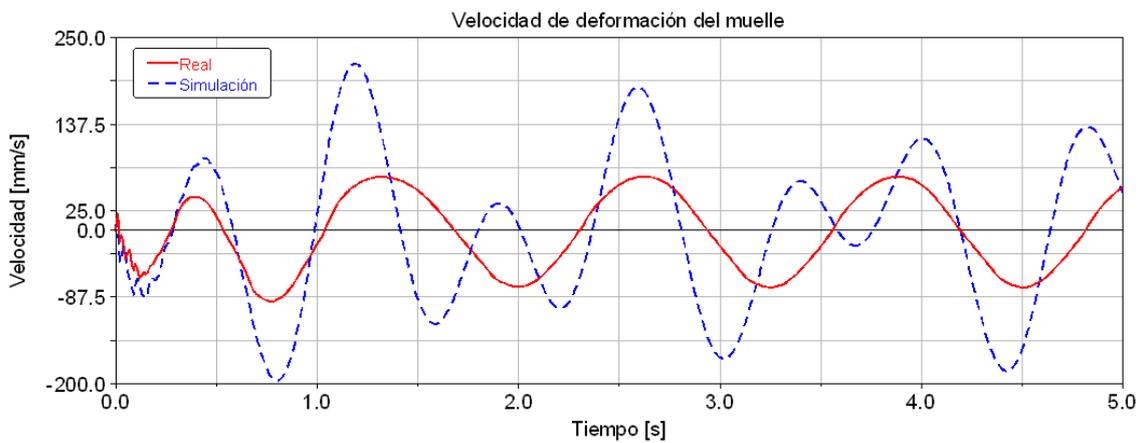


Figura 4.18. Gráfico comparativo de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.

La variable que se pretende estimar, la fuerza realizada por el amortiguador, también diverge de la curva real en varios órdenes de magnitud, como muestra la Figura 4.19.

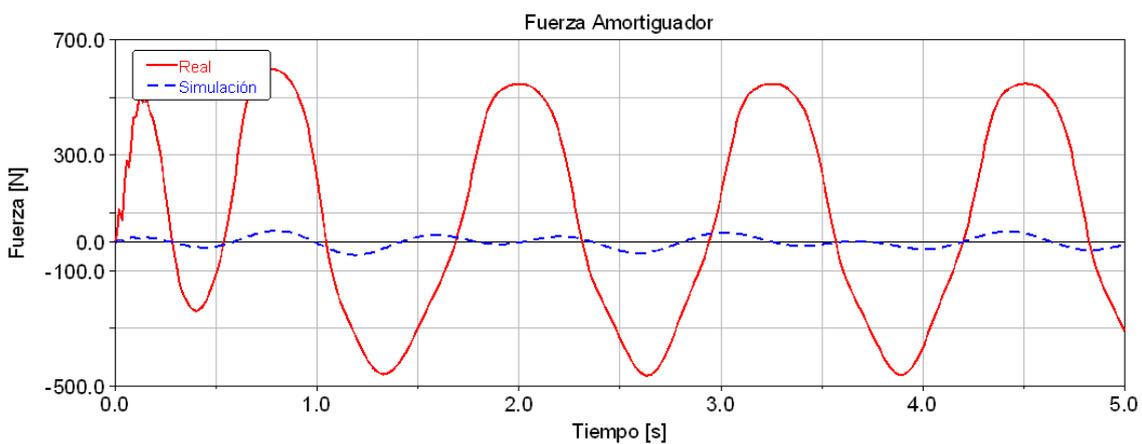


Figura 4.19. Gráfico comparativo de la fuerza en el amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.

Y evidentemente el resto de estados en la simulación también divergen de su valor temporal en el sistema real: la deformación del amortiguador (Figura 4.20), la fuerza ejercida por el muelle (Figura 4.21), el movimiento vertical de la carrocería (Figura 4.22, Figura 4.23 y Figura 4.24), la fuerza vertical en la rueda (Figura 4.25) y el movimiento vertical de la rueda (Figura 4.26, Figura 4.27 y Figura 4.28).

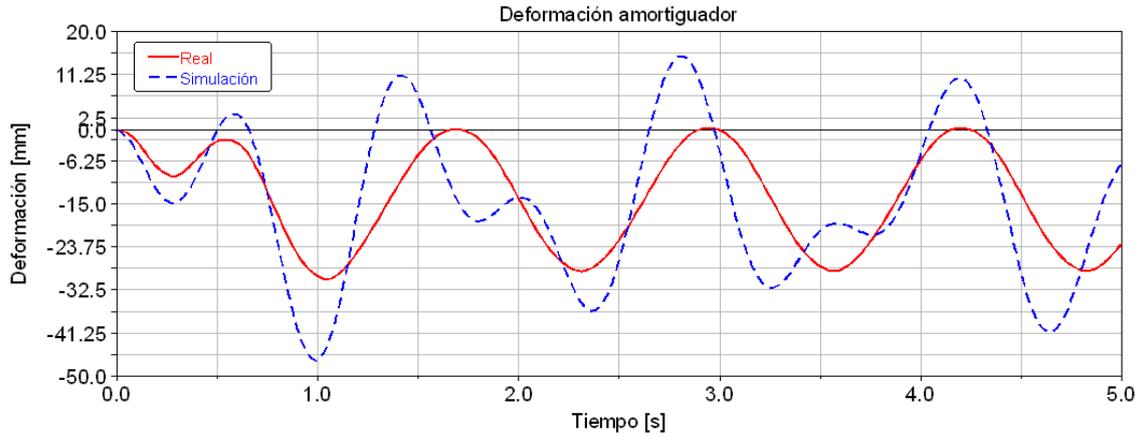


Figura 4.20. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.

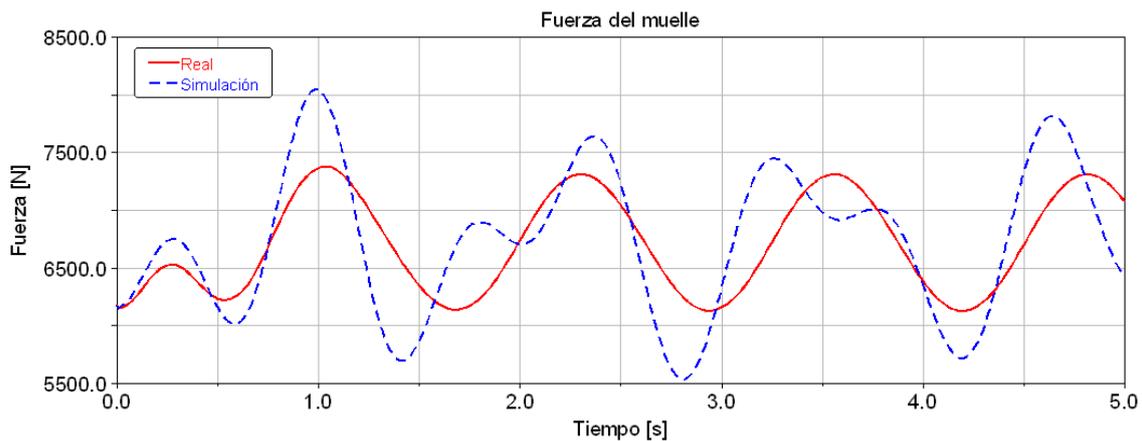


Figura 4.21. Gráfico comparativo de la fuerza en el muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.

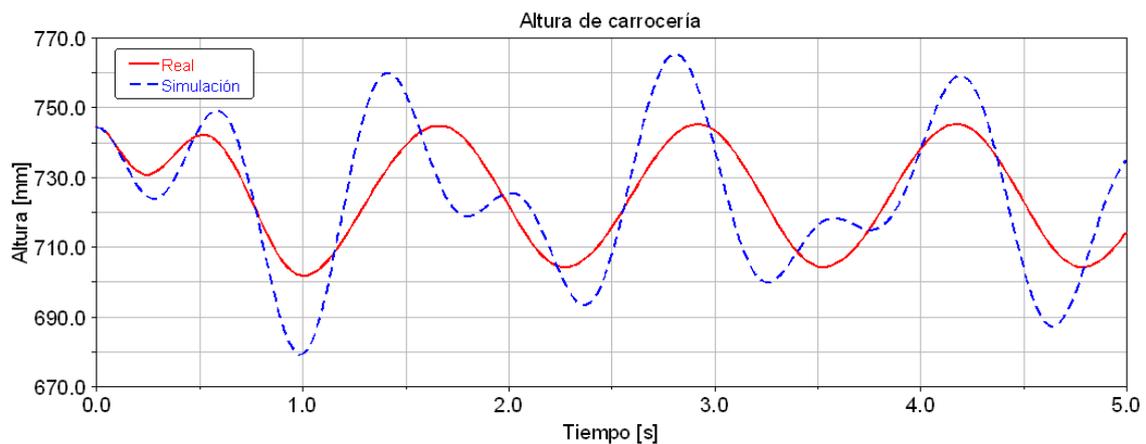


Figura 4.22. Gráfico comparativo de la altura de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.

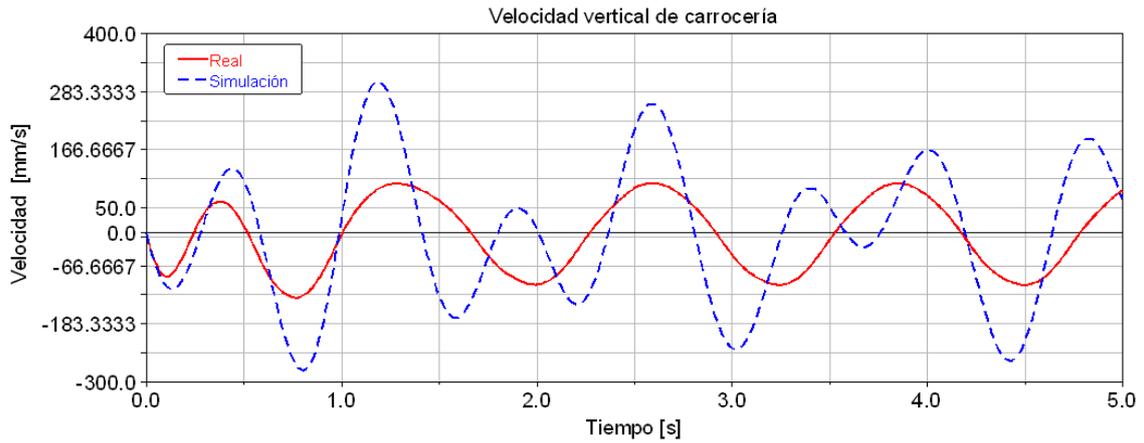


Figura 4.23. Gráfico comparativo de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.

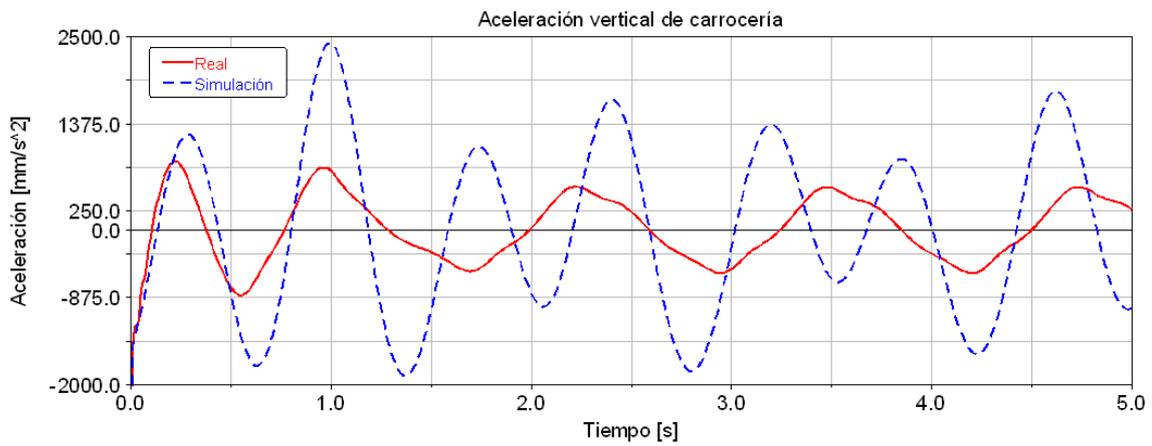


Figura 4.24. Gráfico comparativo de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.

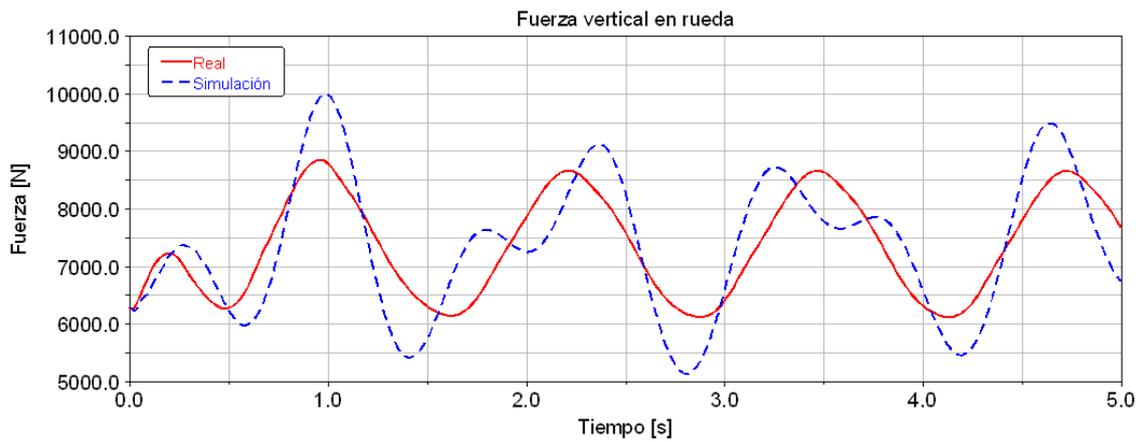


Figura 4.25. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.

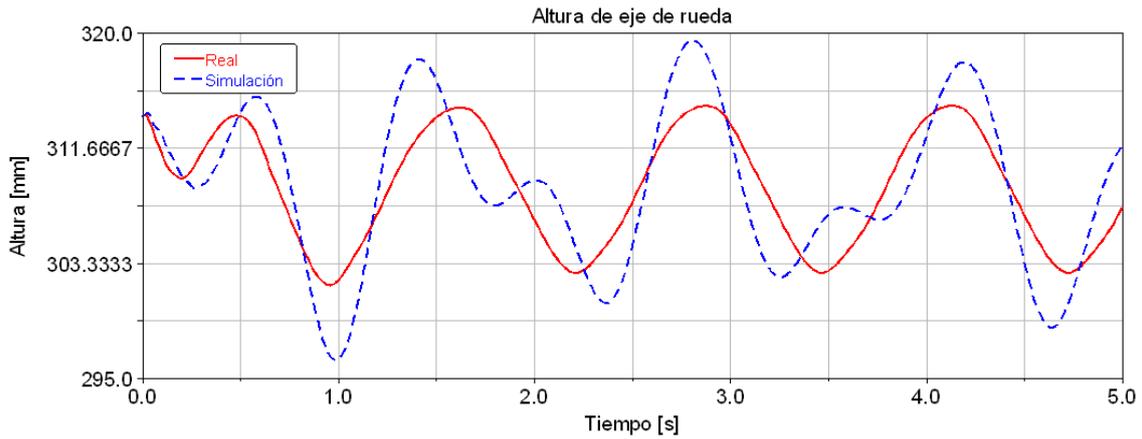


Figura 4.26. Gráfico comparativo de la altura del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.

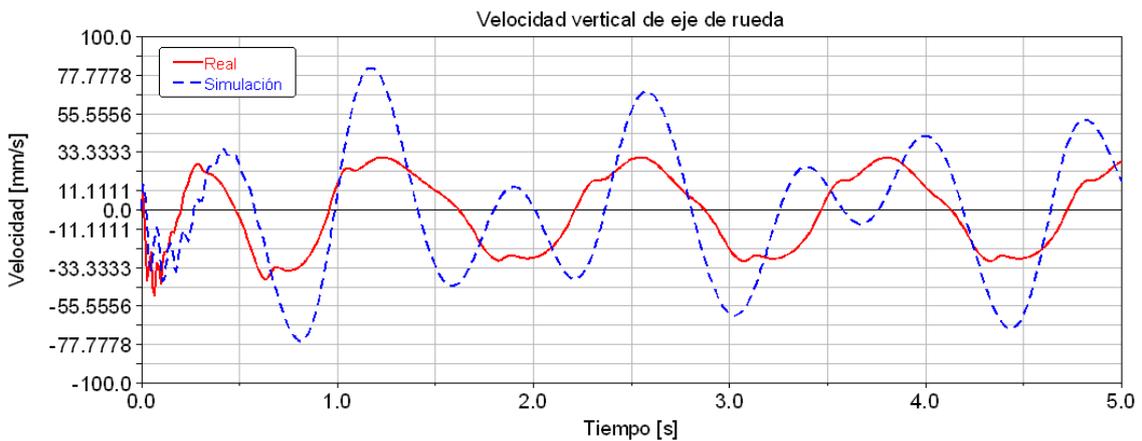


Figura 4.27. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.

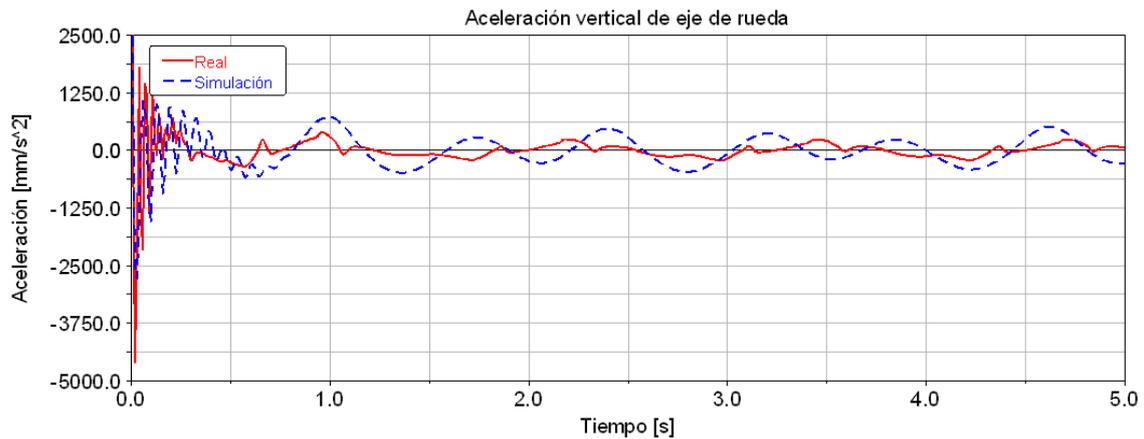


Figura 4.28. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.

4.1.3 Estimación de estados sobre medida ruidosa

De nuevo, una vez definidos el sistema real y el modelo y demostrada la carencia de este último, cobra interés la estimación de estados con el objetivo de conocer la fuerza realizada por el amortiguador. Lo primero que cabe preguntarse es si el sistema es observable, es decir, dadas las entradas del sistema (en este caso la fuerza vertical sobre la carrocería) y conocidas las salidas (el desplazamiento del muelle) en un

periodo de tiempo (lo que también determina las derivadas temporales del desplazamiento: velocidad y aceleración), ¿se puede determinar la fuerza del amortiguador? O, de otro modo, ¿puede haber dos valores distintos de la fuerza del amortiguador tales que para obtener un mismo desplazamiento temporal del muelle superior la fuerza actuante sea la misma?

En este caso, y una vez realizada la simulación del modelo erróneo, resulta bastante sencillo afirmar que una fuerza distinta en el amortiguador provoca un movimiento del mecanismo de suspensión diferente. Dos valores distintos en la fuerza del amortiguador en un determinado momento provocarán aceleraciones relativas distintas entre los cuerpos entre los que actúa (tubo y vástago), provocando por derivación temporal un error en la velocidad y posteriormente en la posición. Esta geometría distinta del mecanismo será visible en el desplazamiento del muelle, puesto que la relación entre su elongación y la posición del mecanismo también es unívoca, ya que está determinada por la cinemática del mecanismo.

Para la estimación de la fuerza del amortiguador, se crea una fuerza virtual paralela a ella, es decir, actuando sobre el vástago y con la reacción en el tubo, que compensará la desviación calculada por el modelo, en base a la curva de comportamiento errónea, de manera que el desplazamiento del muelle en el modelo siga la realidad. Esta fuerza se calcula de nuevo aplicando el Observador Proporcional-Integral al residuo de la medida, en este caso, la diferencia entre el desplazamiento del muelle según el modelo y el desplazamiento medido en la realidad. El significado físico es una fuerza que corrige la fuerza del amortiguador, calculada erróneamente por el modelo en este elemento, de manera que el sistema siga los valores que toma en el sistema real. La estimación de la fuerza del amortiguador es la suma de la fuerza ejercida por el amortiguador del modelo y la fuerza virtual.

De nuevo, se contamina la medida del sistema real (proveniente de simulación) con un ruido aleatorio de 0,5mm, 100Hz y según una distribución uniforme, que no tiene un gran efecto relativo sobre la medida de deformación (Figura 4.29), ya que su amplitud es menor de 0,5mm (Figura 4.30), pero sí sobre la velocidad (Figura 4.31) y la aceleración (Figura 4.32) calculadas a partir de ella. De nuevo cabe destacar que se trata de un ruido exagerado en la medida de una posición y que se trata por tanto de condiciones extremadamente desfavorables.

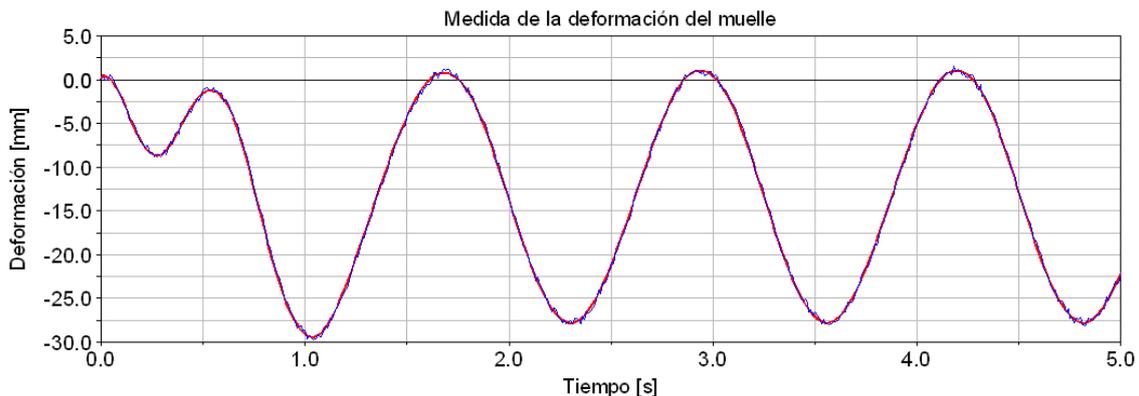


Figura 4.29. Gráfico de la deformación del muelle en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).

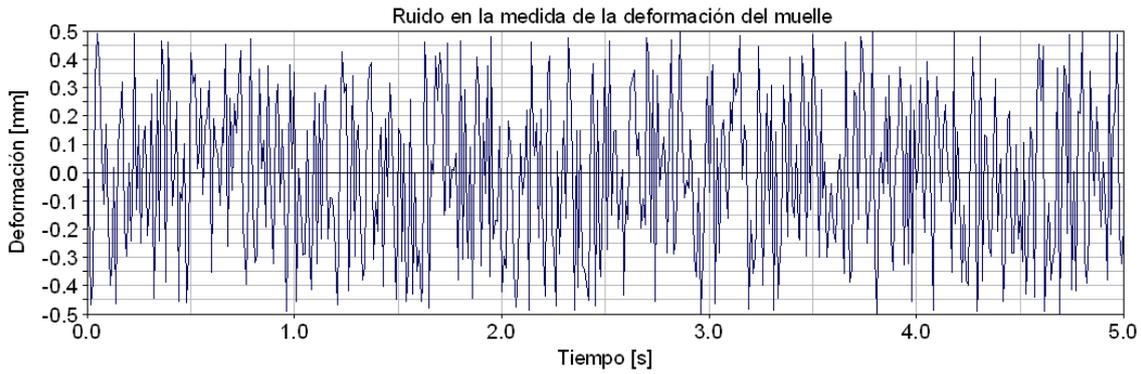


Figura 4.30. Ruido añadido a la deformación del muelle resultante de la simulación del sistema real.

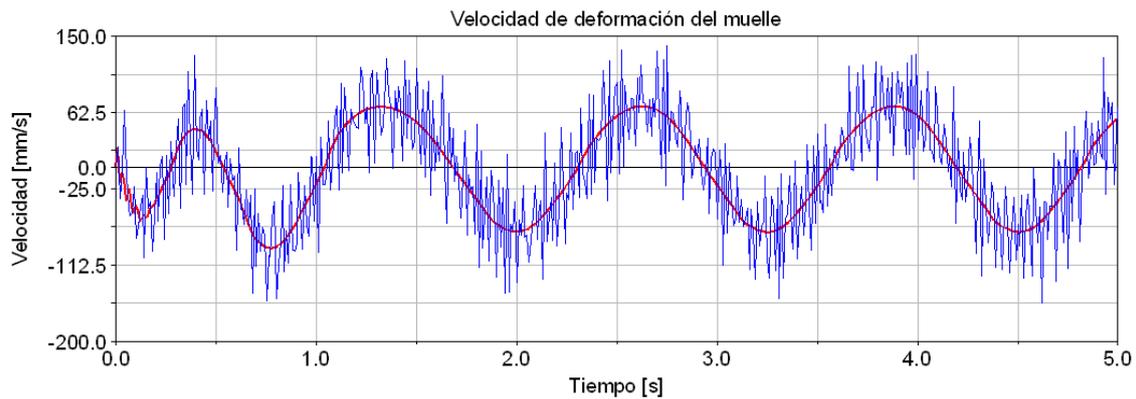


Figura 4.31. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

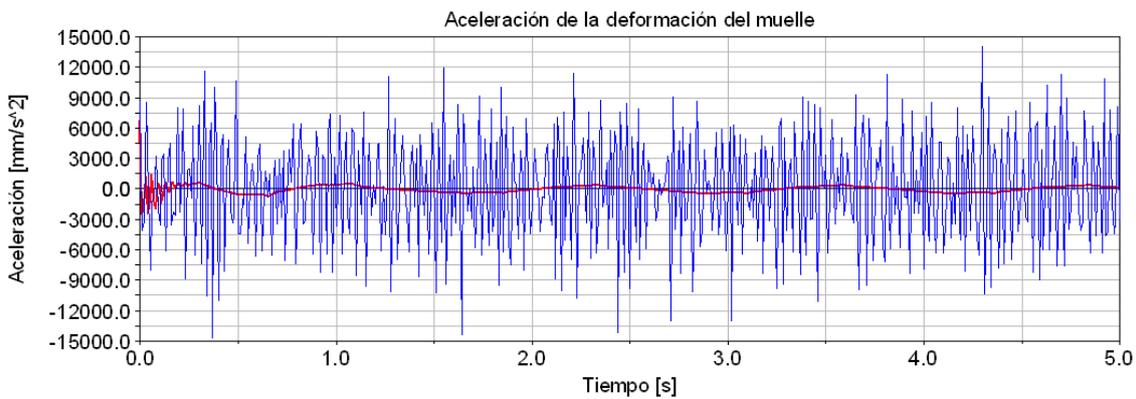


Figura 4.32. Gráfico de la aceleración de deformación del muelle en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

Tras ajustar los parámetros del Observador Proporcional-Integral a los valores mostrados en la expresión (4.2), se obtiene que el desplazamiento del muelle obtenido del modelo corregido es prácticamente similar a la medida en el sistema real (Figura 4.33), siendo el error máximo de unos 2mm (Figura 4.34).

$$\begin{aligned}
 K^p &= 400 \\
 K^i &= 1
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

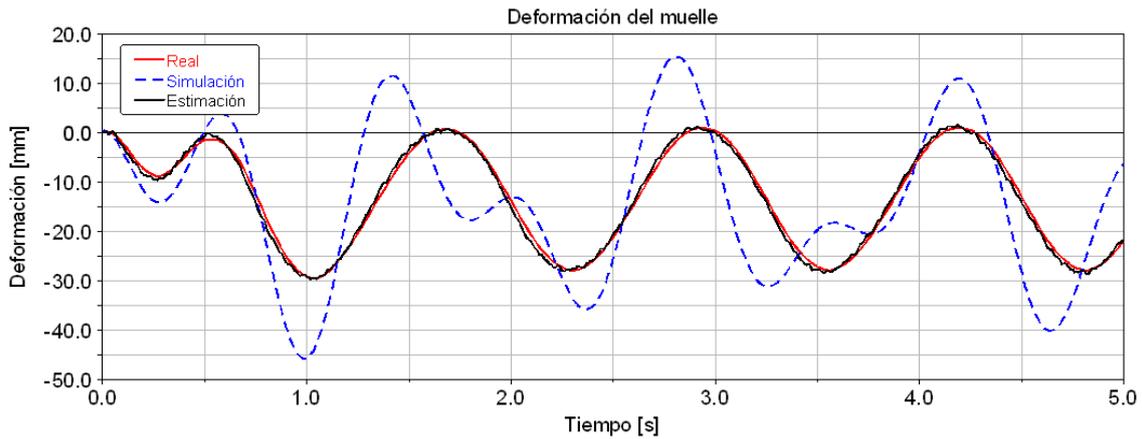


Figura 4.33. Gráfico comparativo de la deformación del muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

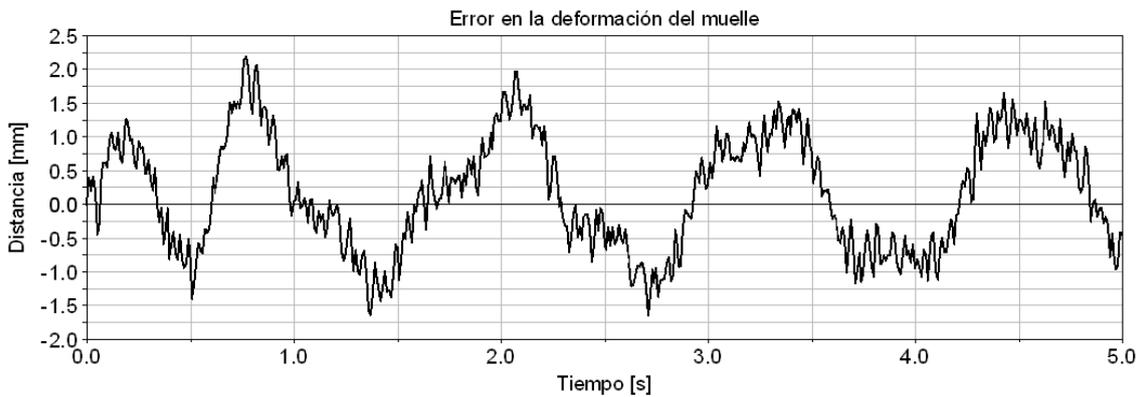


Figura 4.34. Gráfico del error de la deformación del muelle en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

Y con ello, la fuerza estimada para el amortiguador muestra un comportamiento mucho más cercano al real (Figura 4.35), con un error muy afectado por el ruido (Figura 4.36), evidentemente. Al igual que en la aplicación anterior, el ruido supone una variación repentina de la posición de referencia, de un paso de integración al siguiente, lo que significa una gran aceleración y, por tanto, una requiere una gran fuerza.

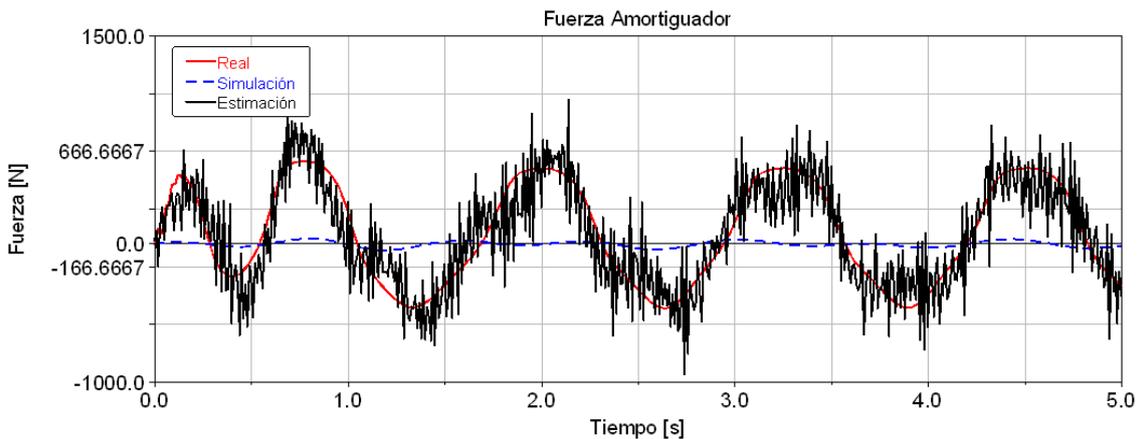


Figura 4.35. Gráfico comparativo de la fuerza en el amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

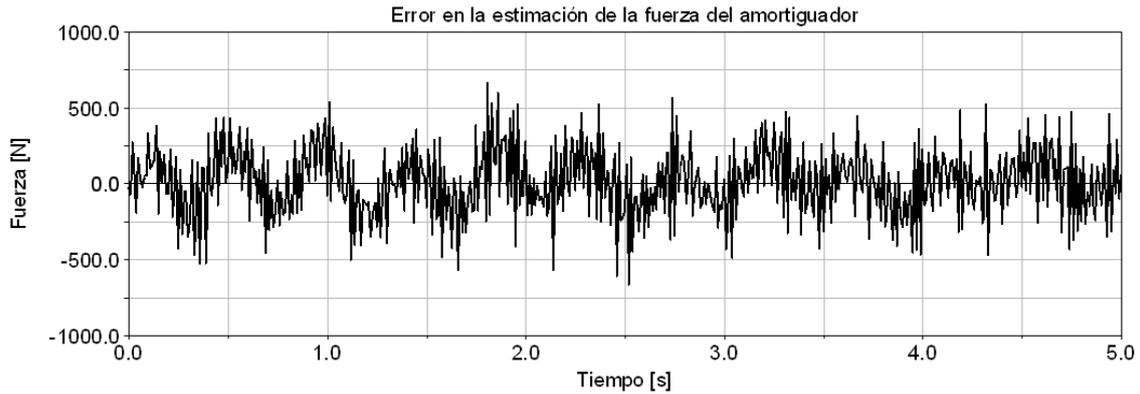


Figura 4.36. Gráfico del error de la fuerza en el amortiguador en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

El resto de variables del sistema también muestran un comportamiento mucho más cercano al comportamiento del sistema real: Velocidad de deformación del muelle (Figura 4.37), deformación del amortiguador (Figura 4.38), fuerza del muelle (Figura 4.39), movimiento vertical de la carrocería (Figura 4.40, Figura 4.41 y Figura 4.42), fuerza vertical en la rueda (Figura 4.43) y movimiento vertical de la rueda (Figura 4.44, Figura 4.45 y Figura 4.46). Como era de esperar, el valor temporal de todas estas variables de estado está afectado por el ruido en la medida.

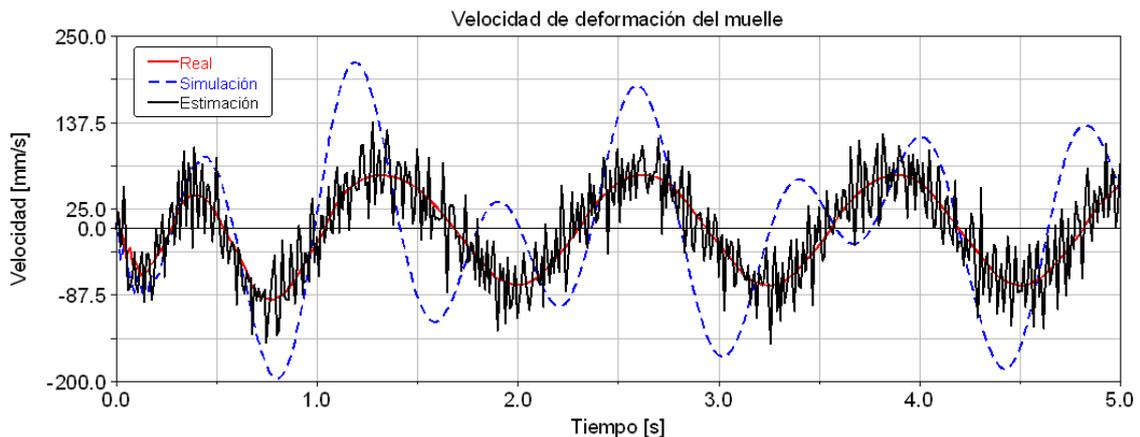


Figura 4.37. Gráfico comparativo de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

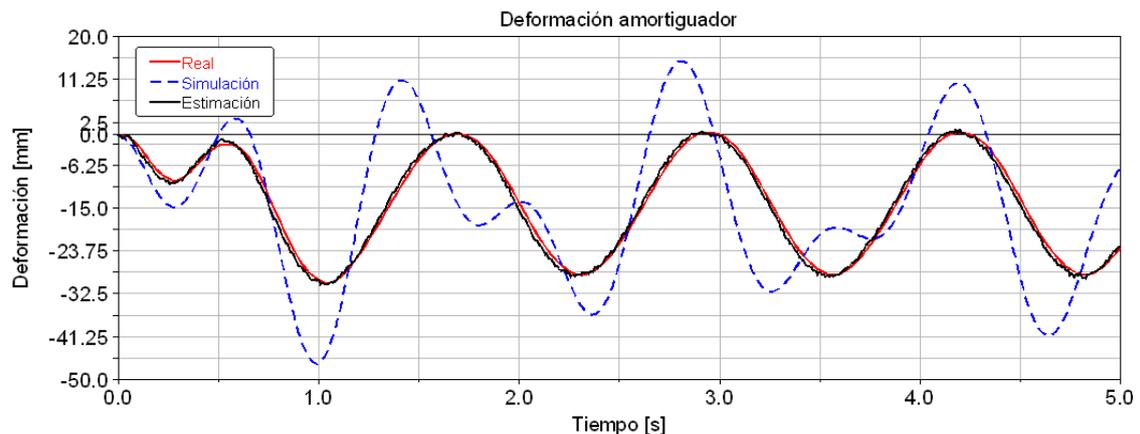


Figura 4.38. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

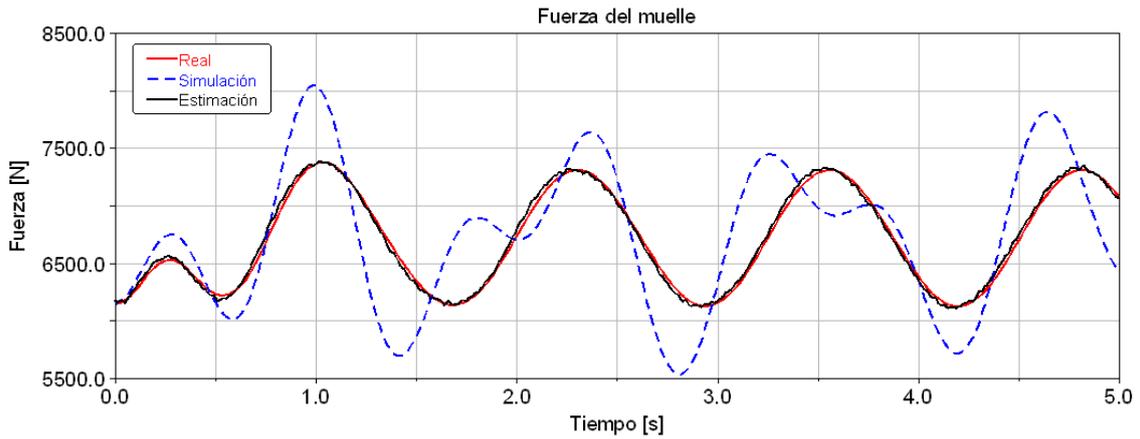


Figura 4.39. Gráfico comparativo de la fuerza en el muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

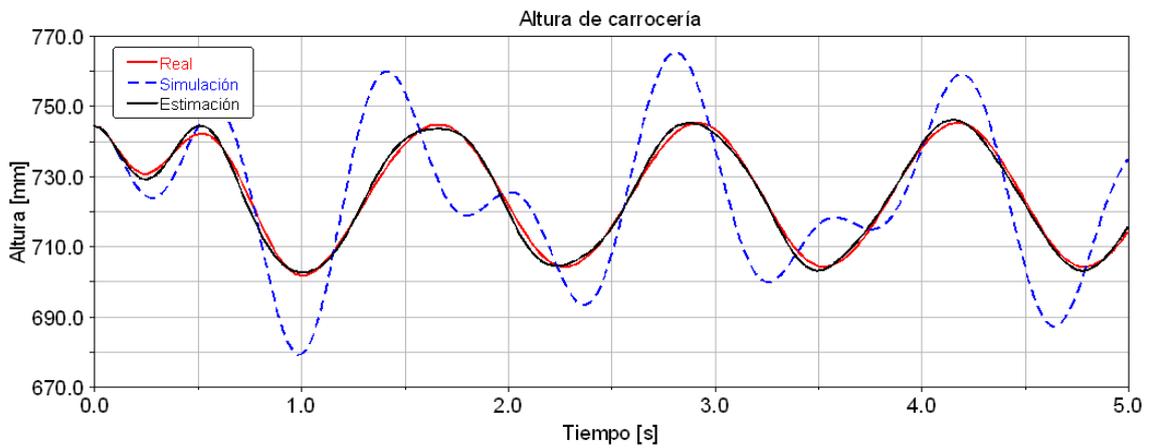


Figura 4.40. Gráfico comparativo de la altura de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

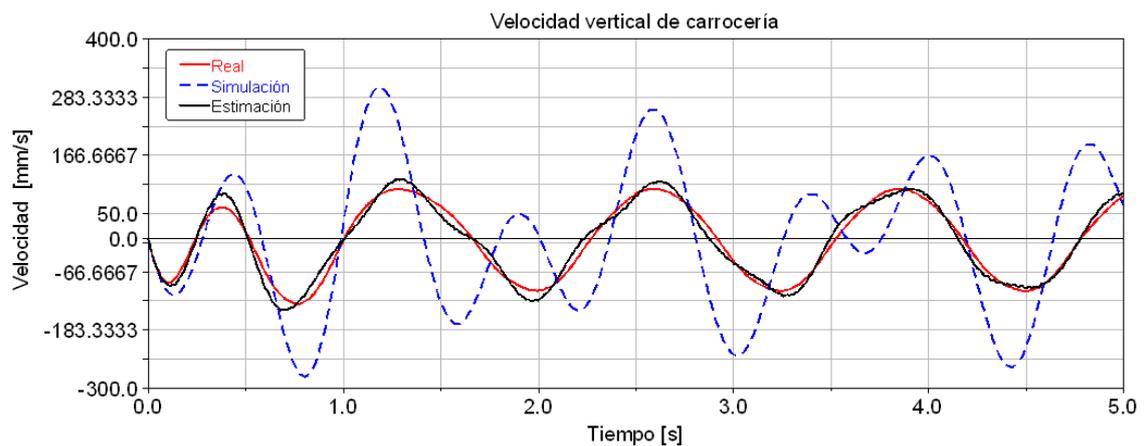


Figura 4.41. Gráfico comparativo de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

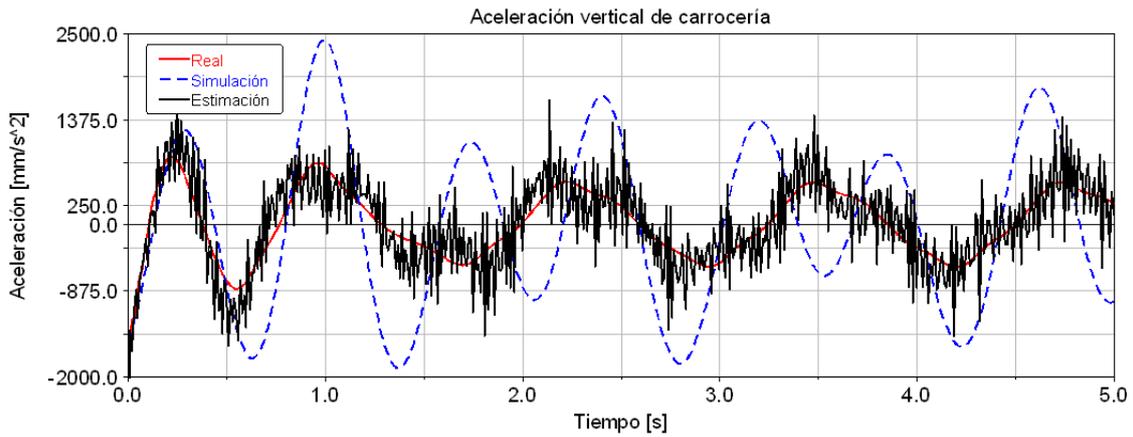


Figura 4.42. Gráfico comparativo de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

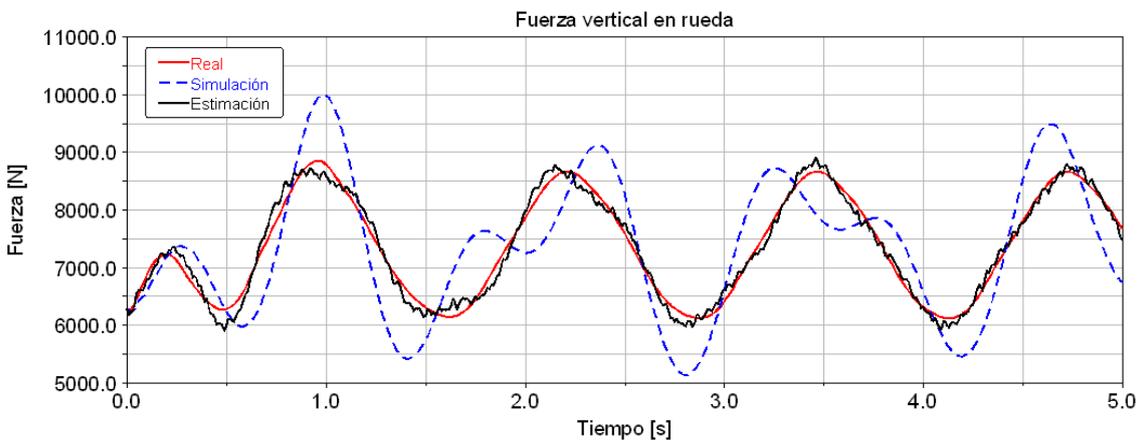


Figura 4.43. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

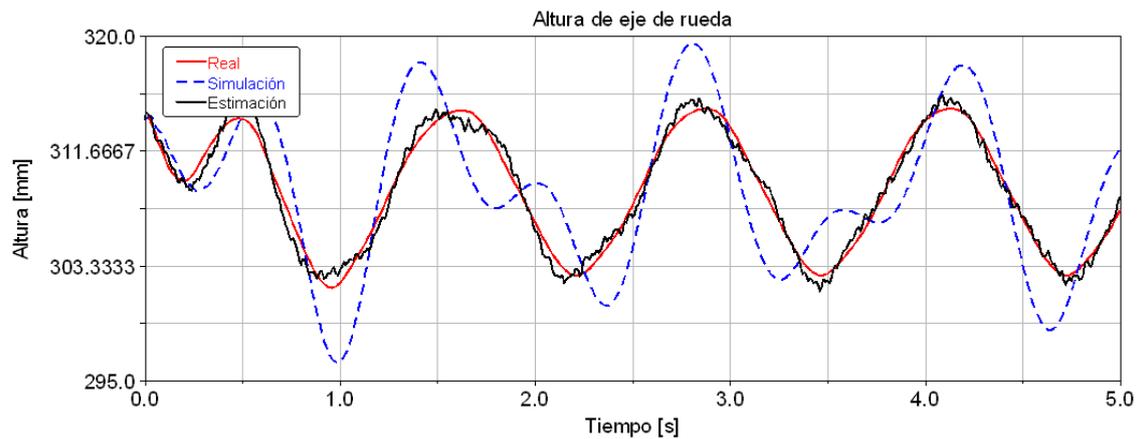


Figura 4.44. Gráfico comparativo de la altura del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

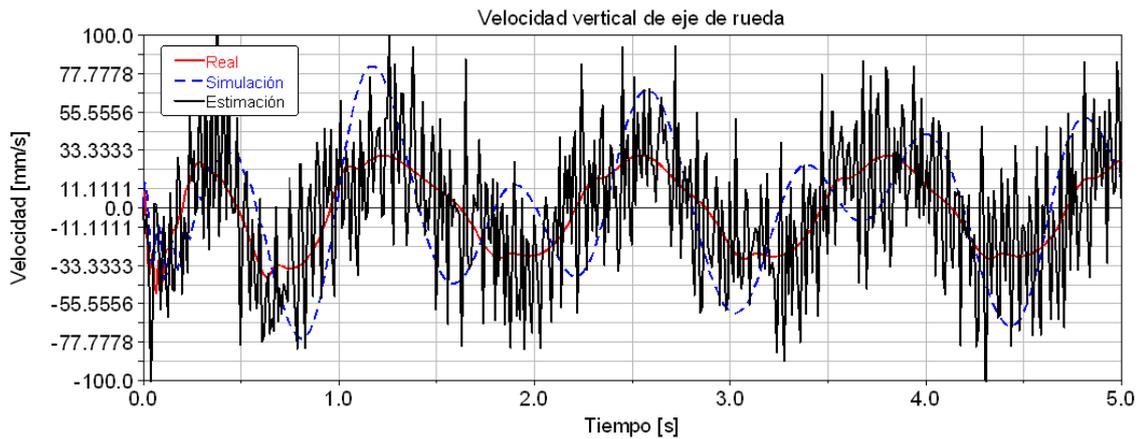


Figura 4.45. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

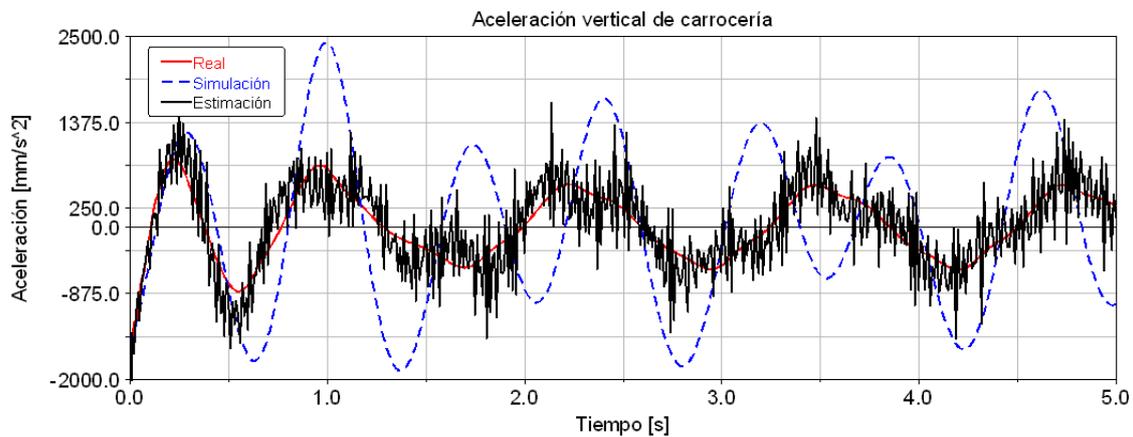


Figura 4.46. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

4.1.4 Conclusiones

La estimación de estados ha resultado exitosa, puesto que es posible construir un modelo CAE admitiendo que se desconoce una cierta característica de la realidad (la curva de comportamiento del amortiguador) y, a través de la técnica presentada, corregir su efecto para conocer el valor real del estado (la fuerza realizada por el amortiguador), haciendo que el comportamiento del modelo sea similar al del sistema real, particularmente en sus salidas (el desplazamiento del muelle).

De nuevo cabe resaltar que la eficacia del observador de estados utilizado, Observador Proporcional-Integral, tan sólo es suficiente para mostrar el funcionamiento de la técnica en la medida en la que el comportamiento del modelo se acerca al del sistema real al incluir la estimación de estados. Sin embargo, en términos cuantitativos, los errores son elevados y requerirían del uso de técnicas de control más avanzadas y elaboradas para eliminar el error debido, principalmente, al ruido de la medida.

4.2 Suspensiones de un vehículo: Estimación de fuerzas en suspensiones

4.2.1 Presentación del sistema real

En este caso se implementa la aplicación anterior, de estimación de fuerza en el amortiguador a partir de la medida de deformación del muelle en la suspensión de un vehículo, en la totalidad de un vehículo, es decir, sobre las cuatro suspensiones. No supone por tanto ningún avance conceptual respecto de la aplicación anterior, sino su aplicación a un caso más próximo a la realidad (puesto que ya se estudia el vehículo completo y no un cuarto del mismo, con las limitaciones que ello supuso) y ya interesante para el campo de la dinámica vehicular.

Las suspensiones traseras, de tipo multibrazo, son mucho más complejas que las delanteras, de tipo McPherson, por lo que la utilización de un modelo CAE está más justificada aún en este caso frente al planteamiento de un modelo matemático. Particularmente, la relación entre el desplazamiento del muelle y el del amortiguador es en este caso mucho más compleja, ya que unen cuerpos distintos del mecanismo.

En este sistema, las entradas son los efectos en la dinámica vehicular de las acciones del conductor, es decir, el desplazamiento de la cremallera de dirección correspondiente al giro del volante, el par que actúa sobre los palieres de las ruedas motrices correspondiente a la combinación de la acción del conductor sobre el acelerador, la caja de cambios y la respuesta del motor, y los pares de frenado que actúan directamente en las cuatro ruedas correspondientes a la acción del conductor sobre el freno y al funcionamiento del sistema de frenado, normalmente hidráulico.

Estas entradas y otros esfuerzos (el peso de los componentes debido a la gravedad y la fuerza aerodinámica debida a la velocidad y al rozamiento con el aire) provocan los esfuerzos en los neumáticos y junto a ellos y a las características del vehículo provocan el movimiento del mismo. En características del vehículo se incluyen las geométricas (geometría de los componentes del vehículo), cinemáticas (las relaciones entre los movimientos de los componentes) y dinámicas (masas y momentos de inercia de los componentes así como el comportamiento de los elementos dinámicos, como los amortiguadores). Se generan por tanto en el vehículo infinidad de variables geométricas (posiciones), cinemáticas (velocidades y aceleraciones) y dinámicas (fuerzas) que definen el estado del vehículo como sistema dinámico multicuerpo, es decir, lo que está ocurriendo en él. Todas estas variables son los estados del sistema, entendiendo como tales las variables internas cuyas causas y consecuencias están dentro del propio sistema y no desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales propias de la formulación matemática.

Por otro lado existen perturbaciones propias del entorno del sistema, como son la acción del viento y de la calzada, principalmente su inclinación, peralte e irregularidades.

Por último, sólo algunas de estas variables son accesibles o medibles. Unas pocas variables se miden y se muestran al conductor como información para sus acciones, como es la velocidad del vehículo. Algunas variables son medidas en la mayoría de los vehículos modernos y, aunque son desconocidas para el conductor, se utilizan en los innumerables sistemas electrónicos de control, como la velocidad de giro de cada rueda para el sistema de frenado anti-bloqueo (ABS). Por último, otras variables sólo son medidas gracias a la instrumentación adicional añadida en el caso de vehículos

de laboratorio o de competición, donde pueden resultar particularmente interesantes, como el desplazamiento de la suspensión.

En esta aplicación se utiliza como sistema real un modelo CAE de vehículo completo en el que se prescinde de los agentes externos propios del entorno: el viento y la inclinación, el peralte y las irregularidades de la calzada. Se imponen las entradas del sistema de manera que el modelo de vehículo realiza una determinada maniobra, es decir, un determinado movimiento, y se obtienen los valores de las medidas interesantes, principalmente los desplazamientos de los cuatro muelles, que se utilizan, como se ha mostrado en la aplicación anterior, para estimar el esfuerzo que realizan los amortiguadores aún desconociendo su comportamiento. Además, gracias a que se trata de una simulación, se obtienen otras variables interesantes de analizar, como es la orientación de la carrocería. El movimiento de la carrocería es interesante porque determina el comportamiento global del vehículo, y fundamentalmente lo que se pretende es corregir el comportamiento global del sistema.

El modelo de vehículo utilizado así como la maniobra están detalladamente descritos en el Anexo II: Modelo de vehículo.

Las medidas del sistema real, es decir, los desplazamientos de los muelles, son los mostrados en la Figura 4.47, la Figura 4.48, la Figura 4.49 y en la Figura 4.50.



Figura 4.47. Gráfico de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real.



Figura 4.48. Gráfico de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real.



Figura 4.49. Gráfico de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real.

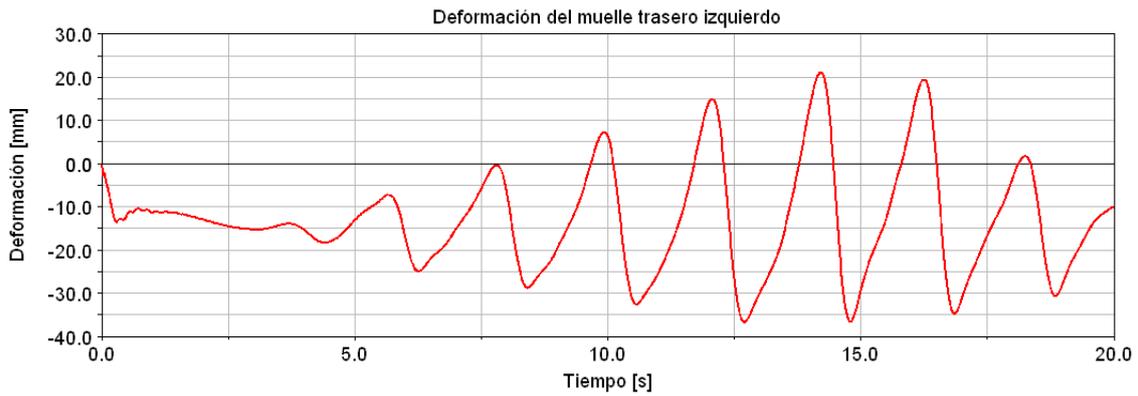


Figura 4.50. Gráfico de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real.

Las fuerzas realizadas por los amortiguadores, que se pretenden estimar, son las mostradas en la Figura 4.51, Figura 4.52, Figura 4.53 y Figura 4.54.

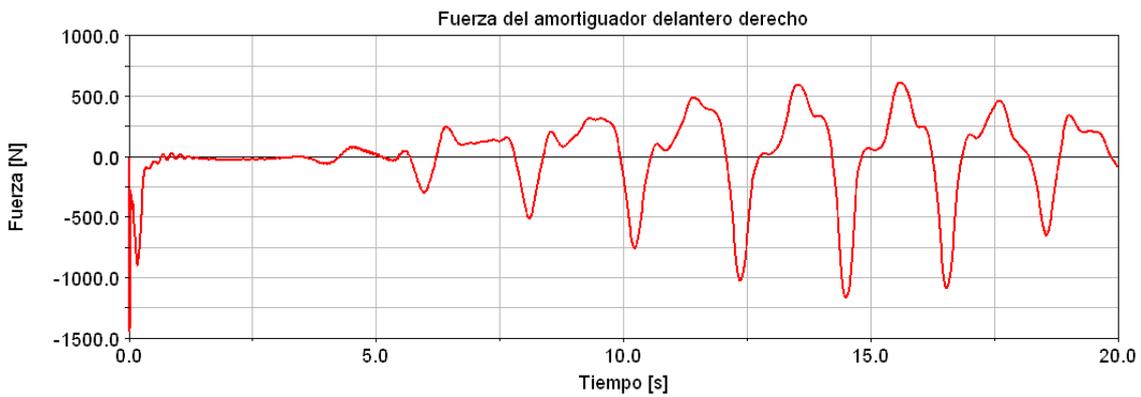


Figura 4.51. Gráfico de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real.

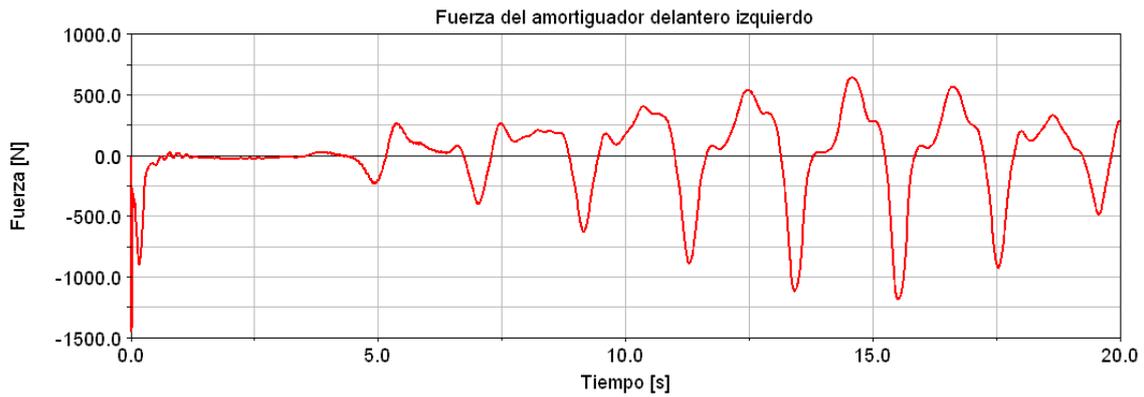


Figura 4.52. Gráfico de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real.

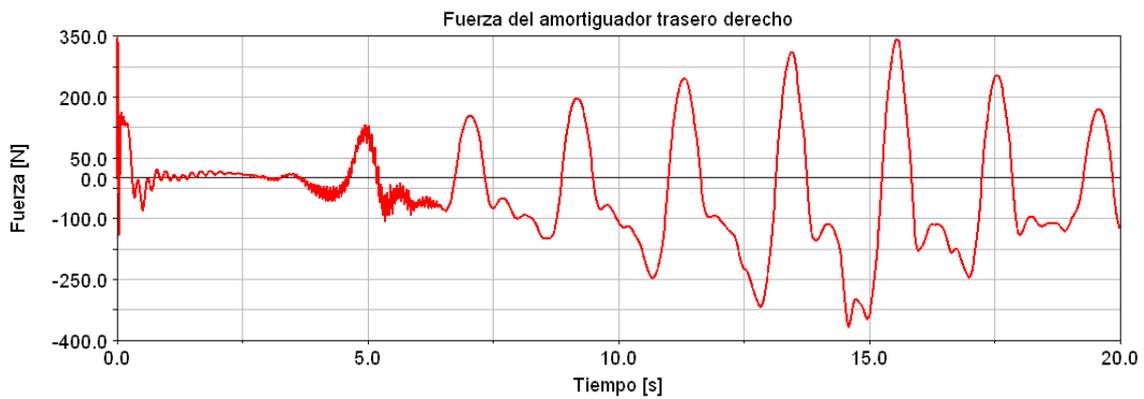


Figura 4.53. Gráfico de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real.

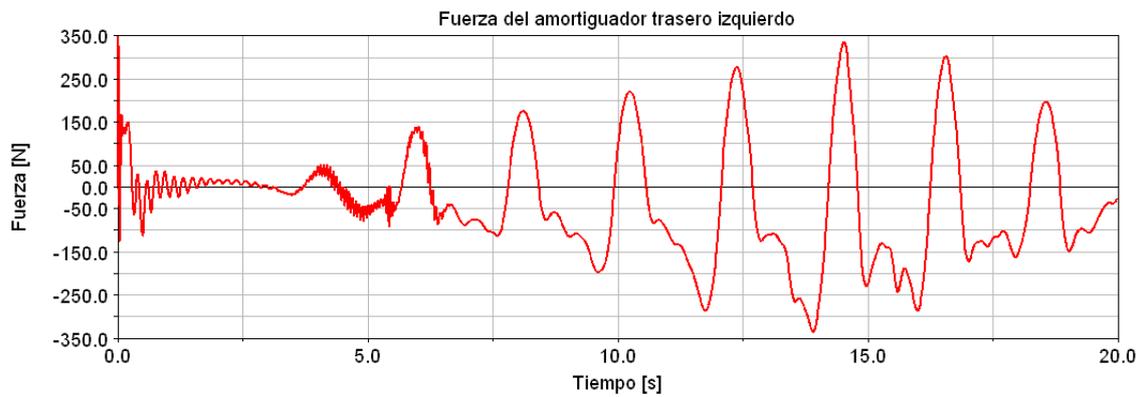


Figura 4.54. Gráfico de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real.

El movimiento de la carrocería, balanceo (Figura 4.55) y cabeceo (Figura 4.56), revelan el movimiento de las suspensiones, también reflejado por los desplazamientos de los amortiguadores (Figura 4.57, Figura 4.58, Figura 4.59 y Figura 4.60).

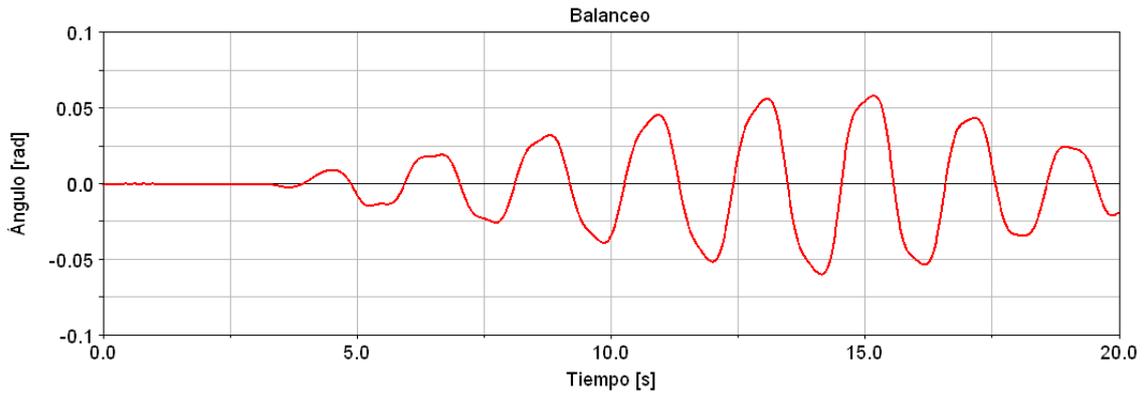


Figura 4.55. Gráfico del balanceo de la carrocería en el sistema real.

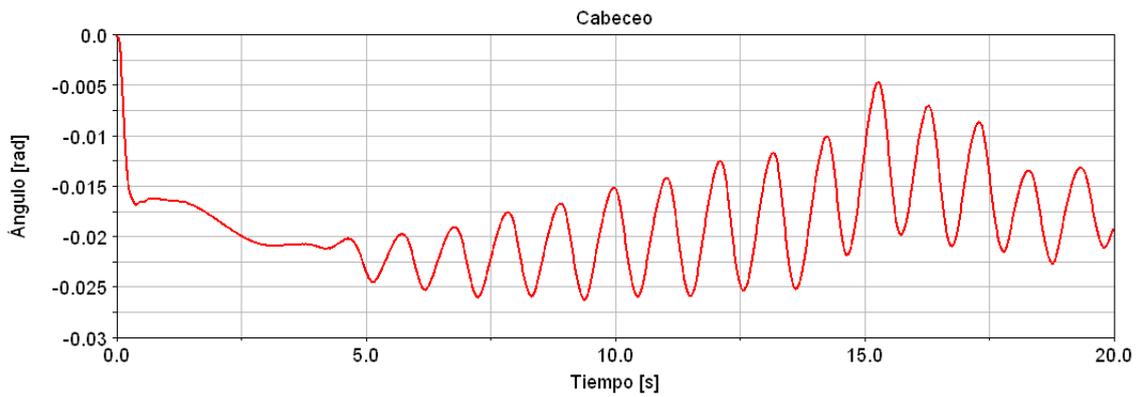


Figura 4.56. Gráfico del cabeceo de la carrocería en el sistema real.

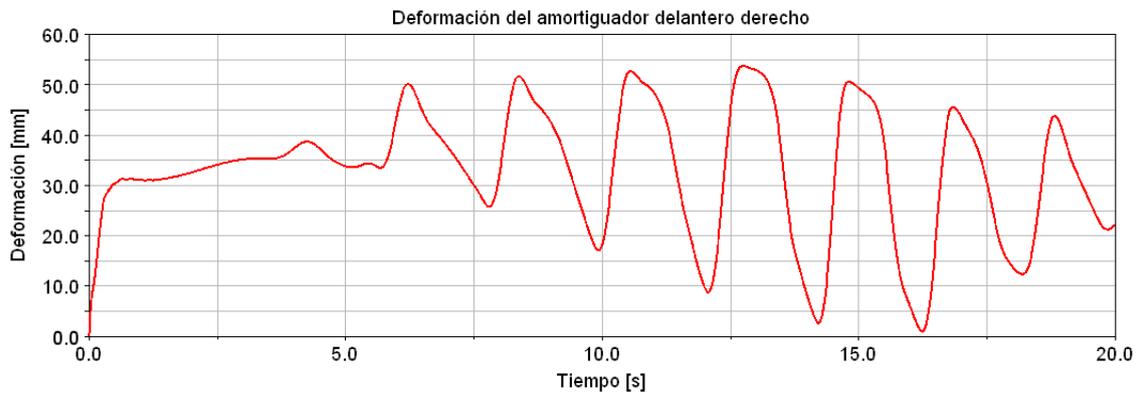


Figura 4.57. Gráfico de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real.



Figura 4.58. Gráfico de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real.

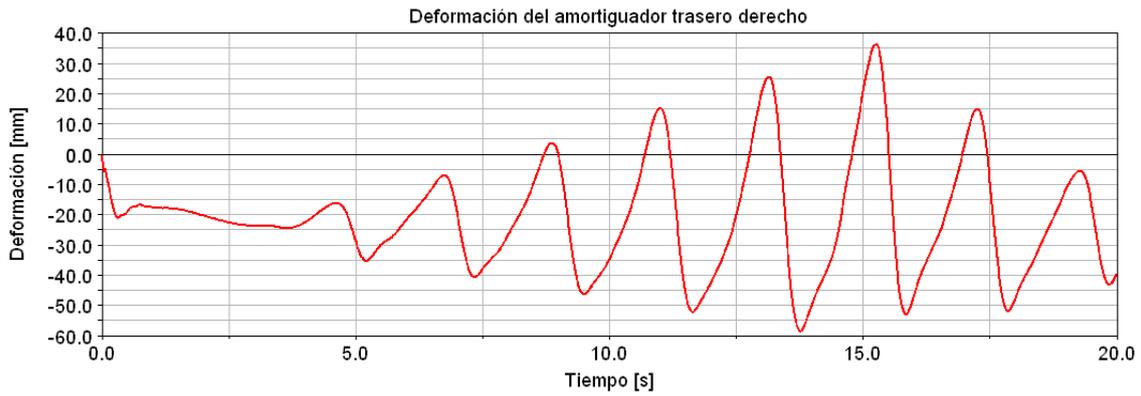


Figura 4.59. Gráfico de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real.

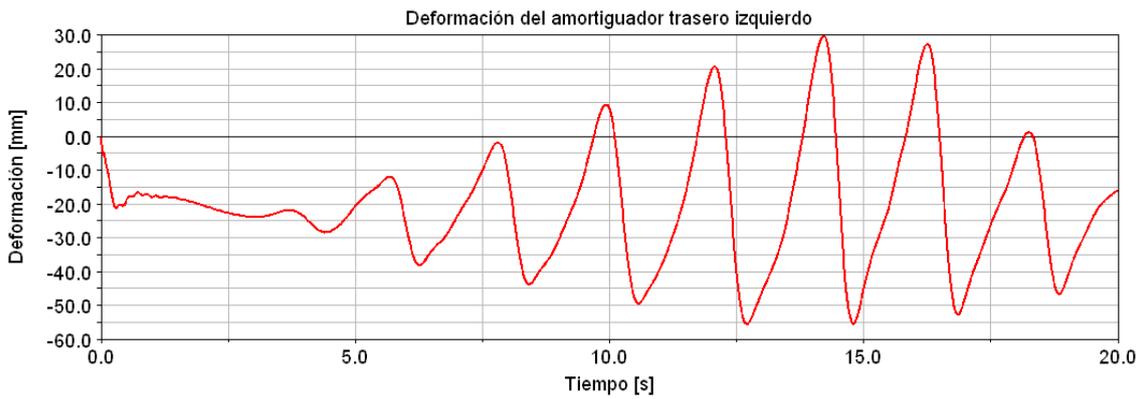


Figura 4.60. Gráfico de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real.

El error en la fuerza en los amortiguadores repercutirá en la fuerza en los muelles (Figura 4.61, Figura 4.62, Figura 4.63 y Figura 4.64).

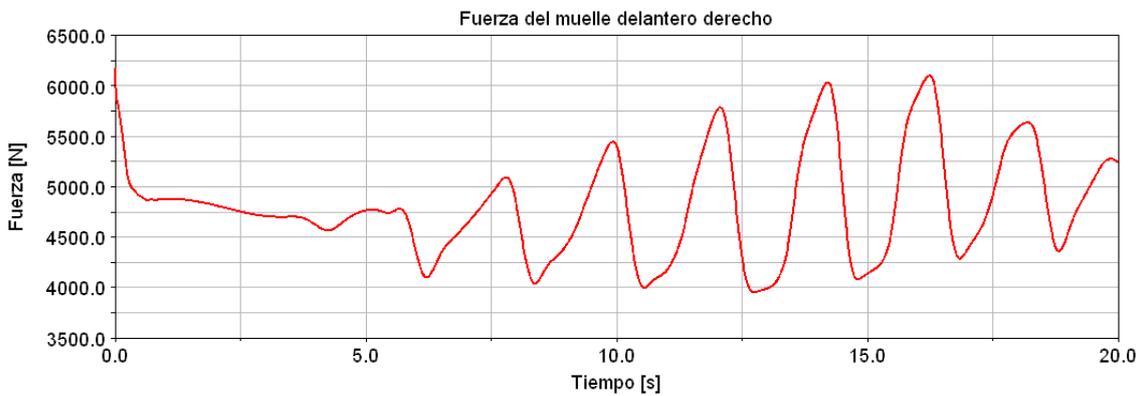


Figura 4.61. Gráfico de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real.



Figura 4.62. Gráfico de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real.

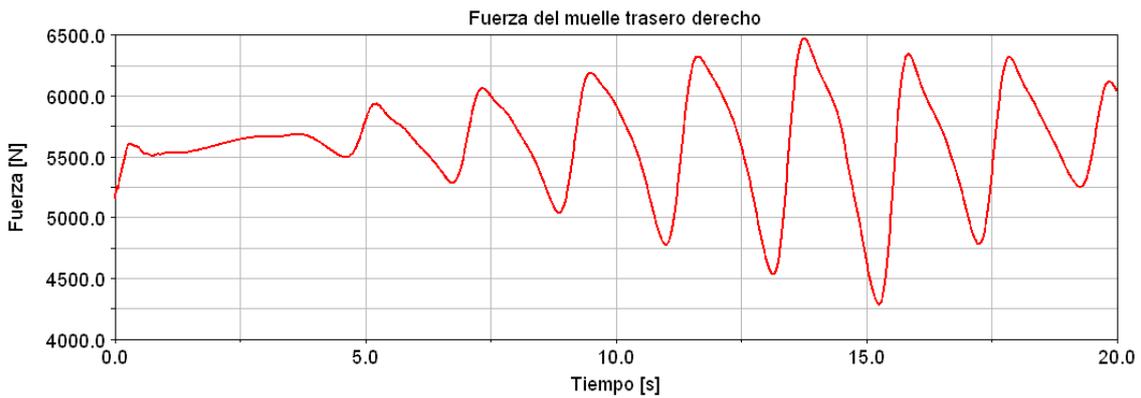


Figura 4.63. Gráfico de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real.

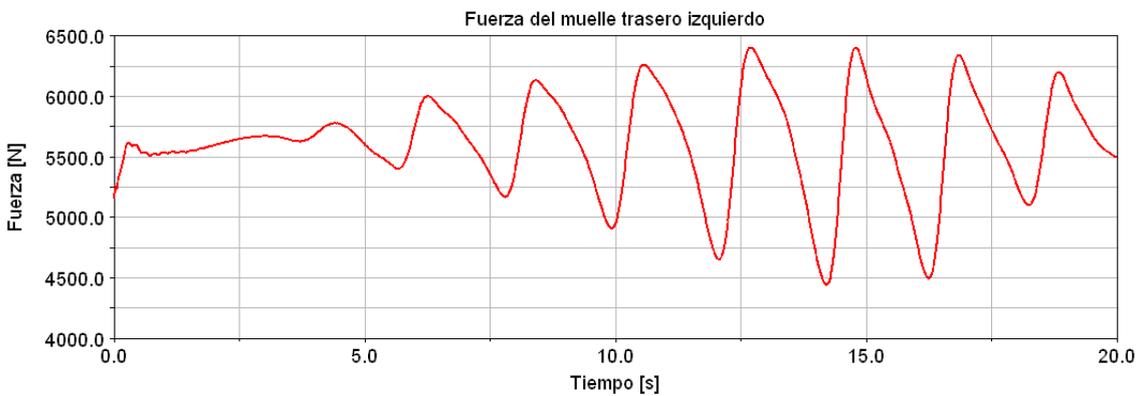


Figura 4.64. Gráfico de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real.

4.2.2 Presentación del modelo para la estimación de estados

A partir del modelo anterior, se modifican los comportamientos de los amortiguadores para representar el hecho de que no son rigurosamente conocidos. Se supone un comportamiento lineal con $C^{\text{amortiguador}}=0,2\text{N}\cdot\text{s}/\text{mm}$ en todos los amortiguadores. La comparativa de los comportamientos se muestra en la Figura 4.65 para los amortiguadores delanteros y en Figura 4.66 para los amortiguadores traseros, donde se representa en rojo el comportamiento real y en azul el comportamiento modelizado.

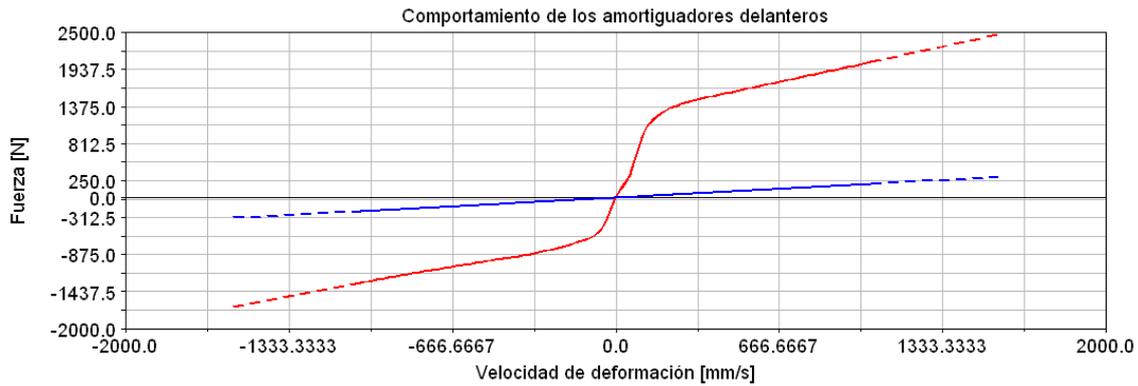


Figura 4.65. Gráfico comparativo del comportamiento real de los amortiguadores delanteros (rojo) y su comportamiento en el modelo (azul).

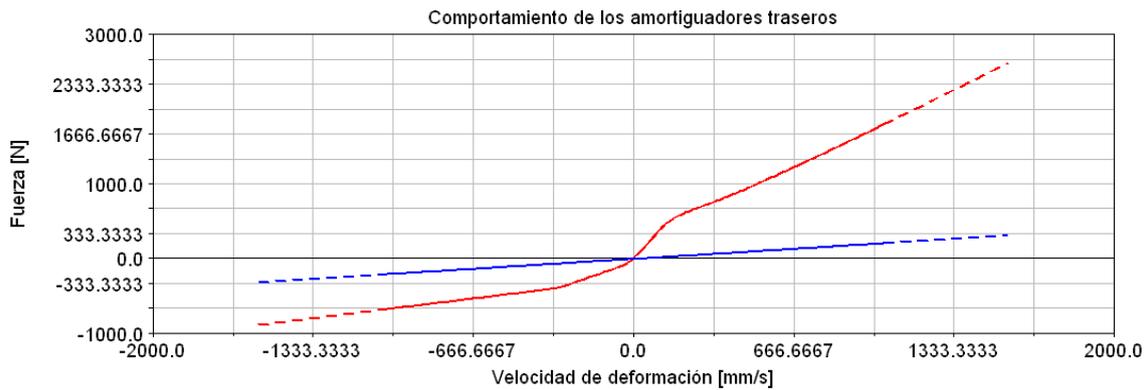


Figura 4.66. Gráfico comparativo del comportamiento real de los amortiguadores traseros (rojo) y su comportamiento en el modelo (azul).

Este error en el comportamiento de los amortiguadores provoca que el movimiento de la carrocería sea distinto, particularmente en cuanto a la orientación de la carrocería (cabeceo y balanceo), ya que ante las mismas fuerzas provenientes de la carrocería los desplazamientos de las suspensiones son distintos. Al cambiar la geometría, cambia la cinemática y por tanto la dinámica, es decir, que se originan esfuerzos distintos, particularmente en los neumáticos. En consecuencia, el movimiento global del modelo divergirá del sistema real.

En cuanto a las medidas, éstas muestran un comportamiento distinto, aunque con rasgos similares, según muestran la Figura 4.67, la Figura 4.68, la Figura 4.69 y la Figura 4.70.

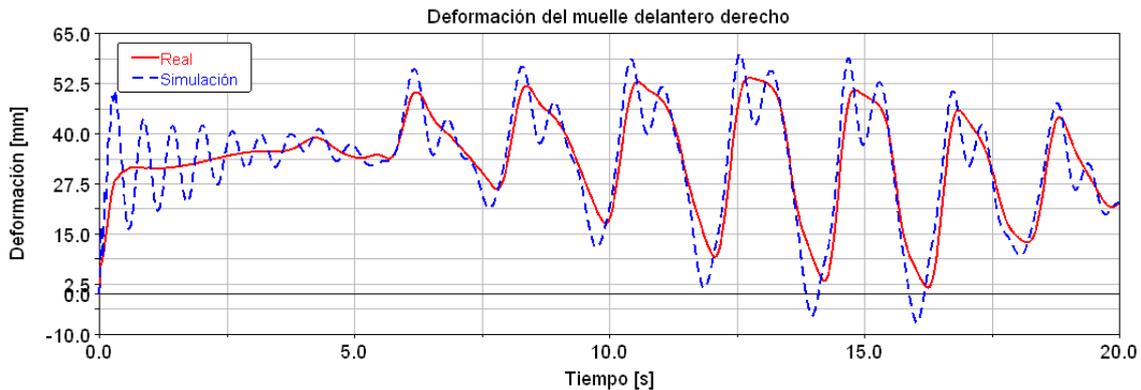


Figura 4.67. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

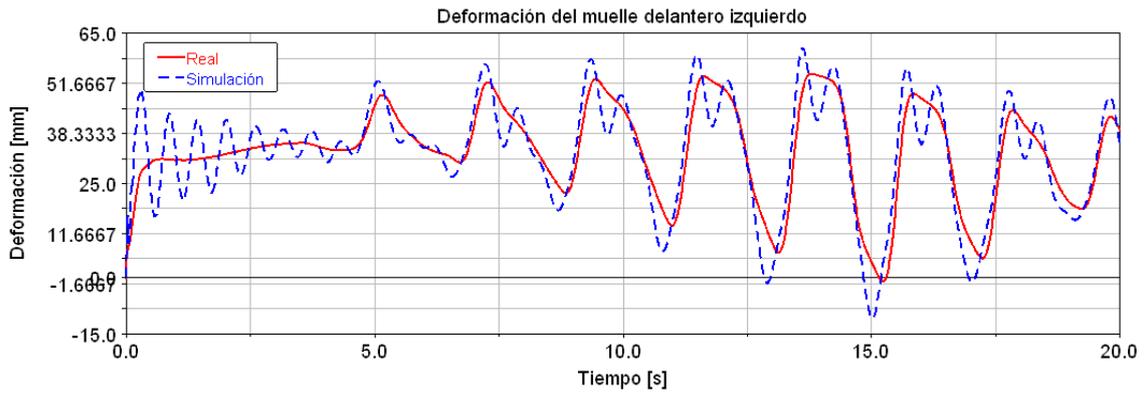


Figura 4.68. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

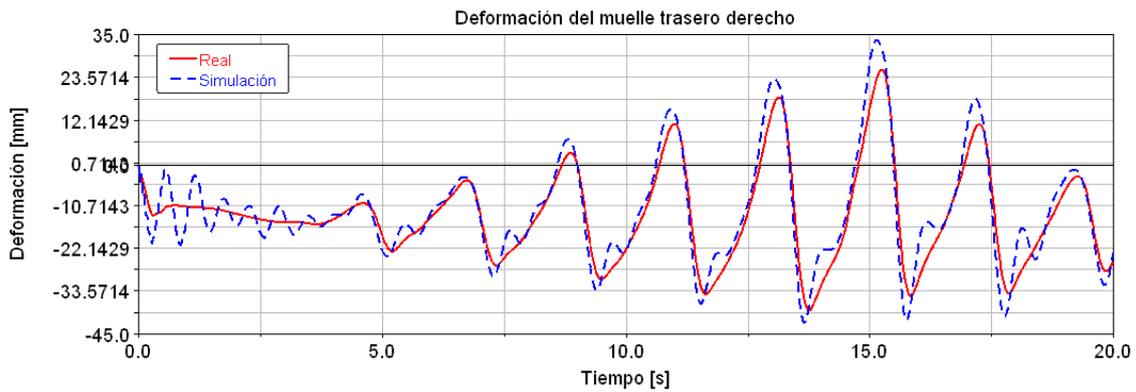


Figura 4.69. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

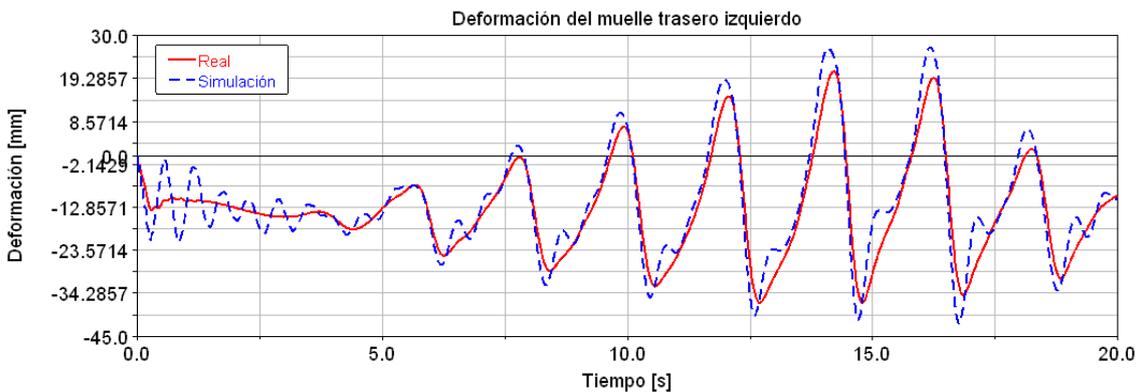


Figura 4.70. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

Sin embargo los esfuerzos en los amortiguadores adquieren valores totalmente distintos, como muestran la Figura 4.71, la Figura 4.72, la Figura 4.73 y la Figura 4.74.

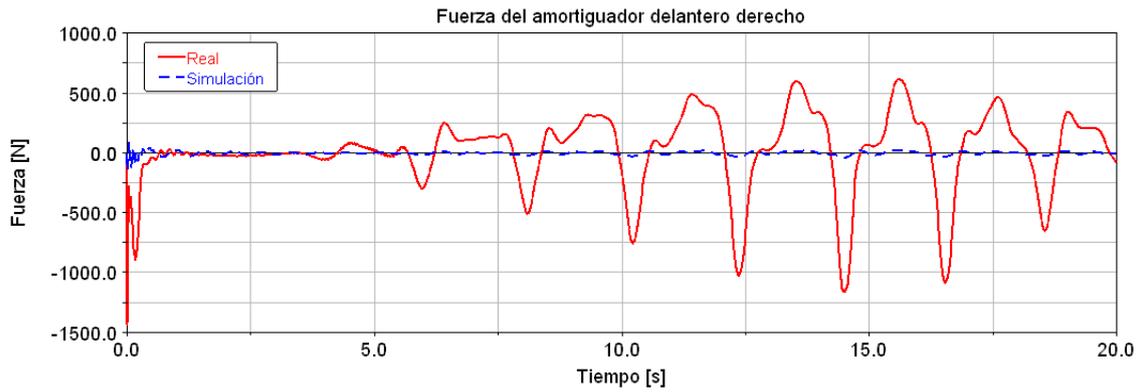


Figura 4.71. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

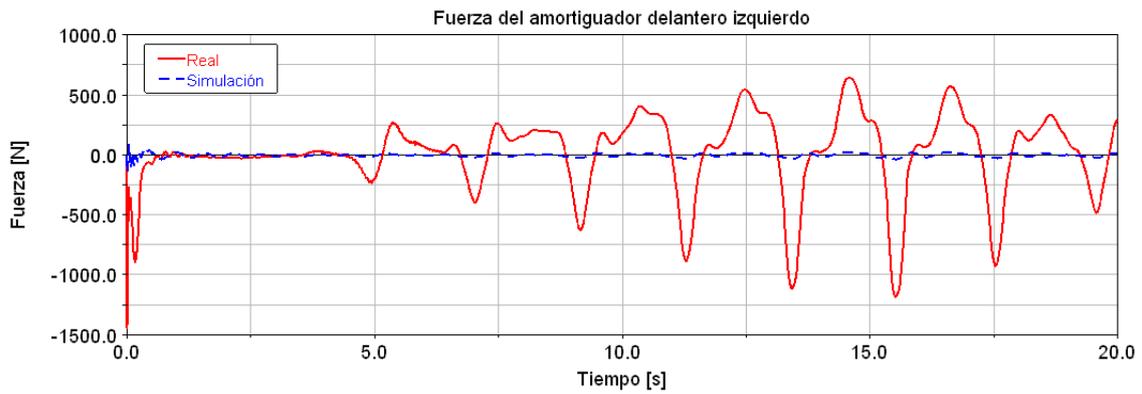


Figura 4.72. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

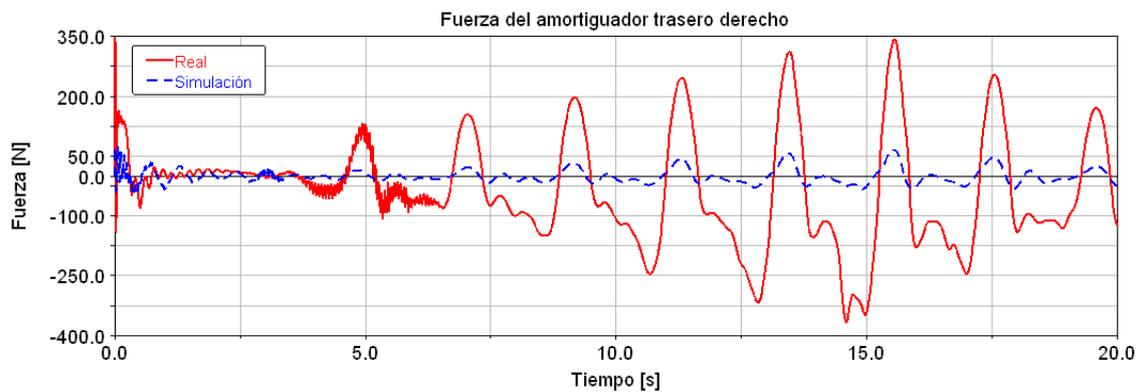


Figura 4.73. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

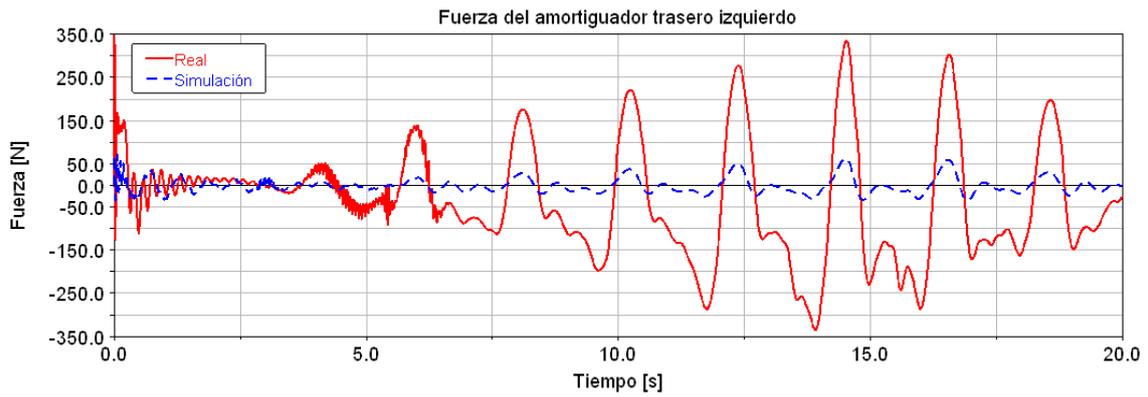


Figura 4.74. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

El resto de variables también muestran rasgos parecidos a los del sistema real, aunque diferentes (Figura 4.75 a Figura 4.84).

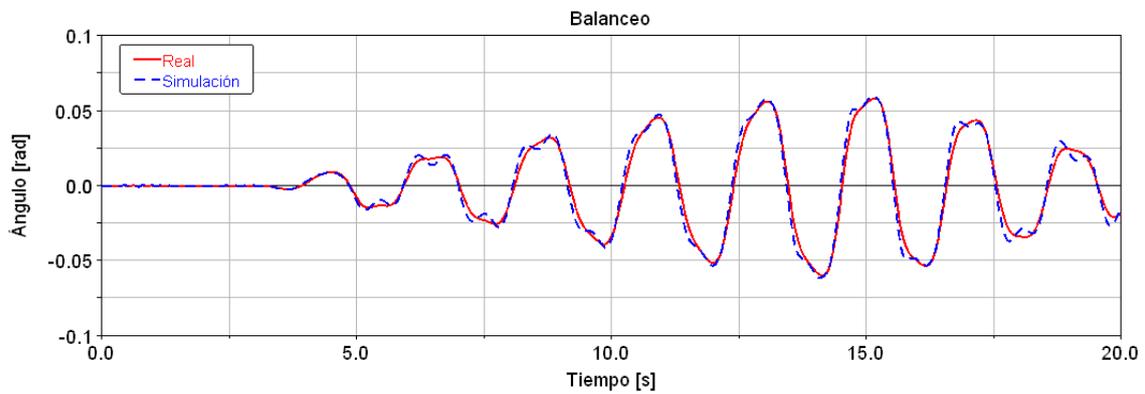


Figura 4.75. Gráfico comparativo del balanceo de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.

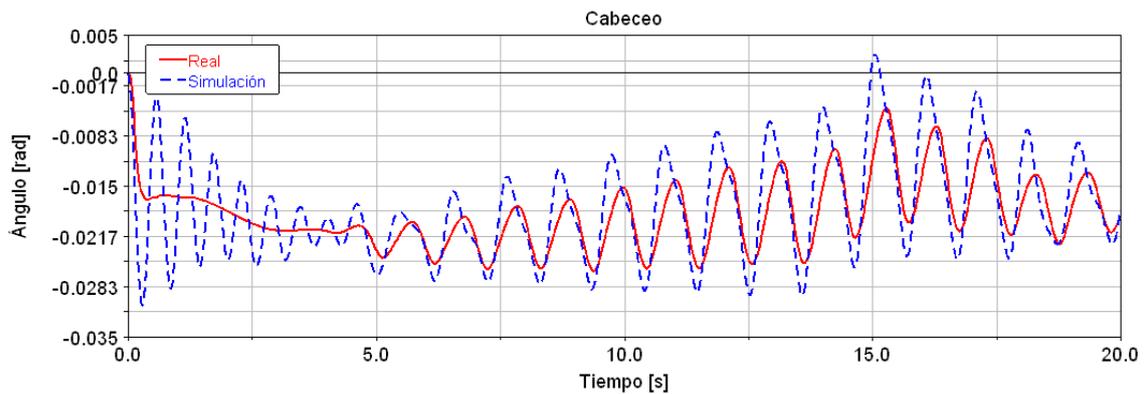


Figura 4.76. Gráfico comparativo del cabeceo de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.

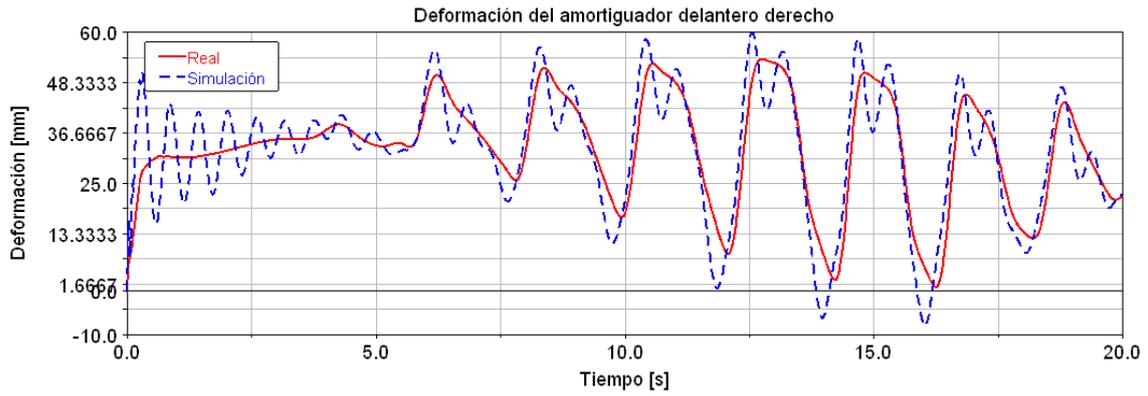


Figura 4.77. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

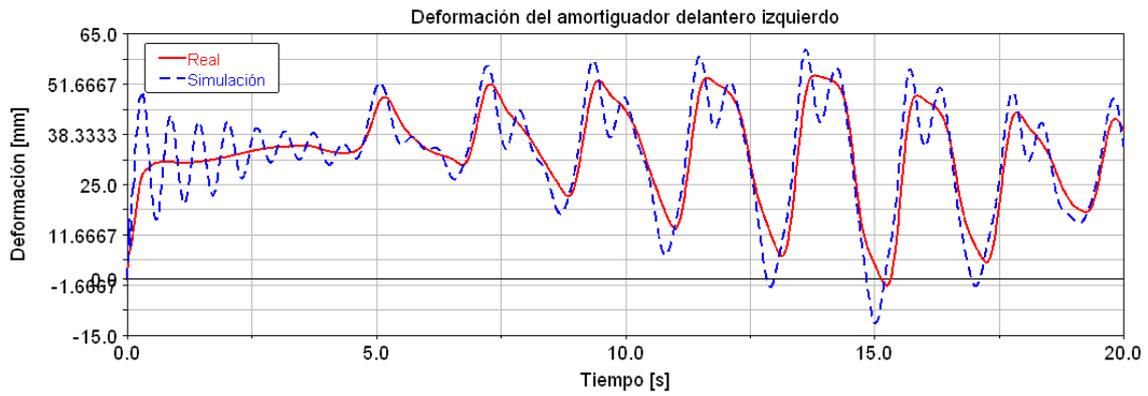


Figura 4.78. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

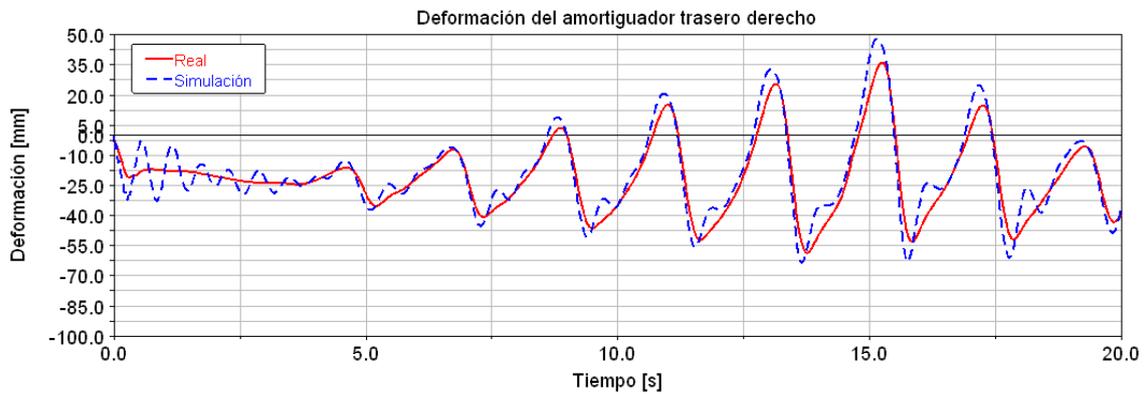


Figura 4.79. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

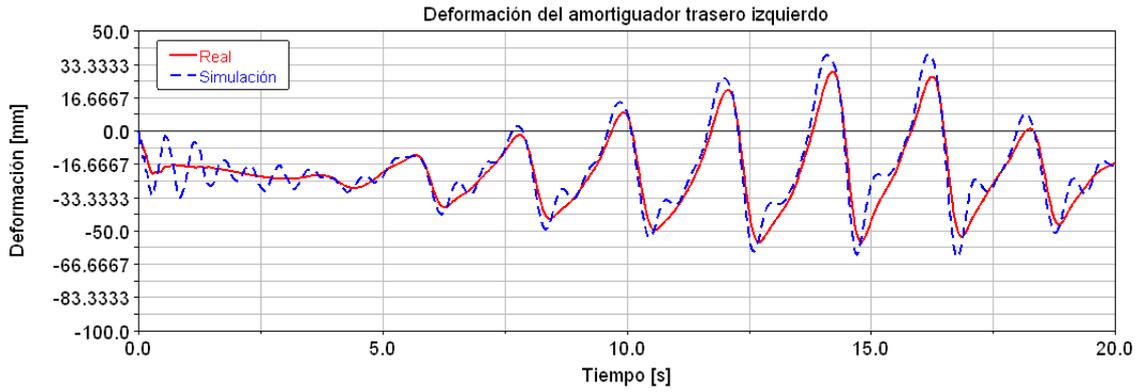


Figura 4.80. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

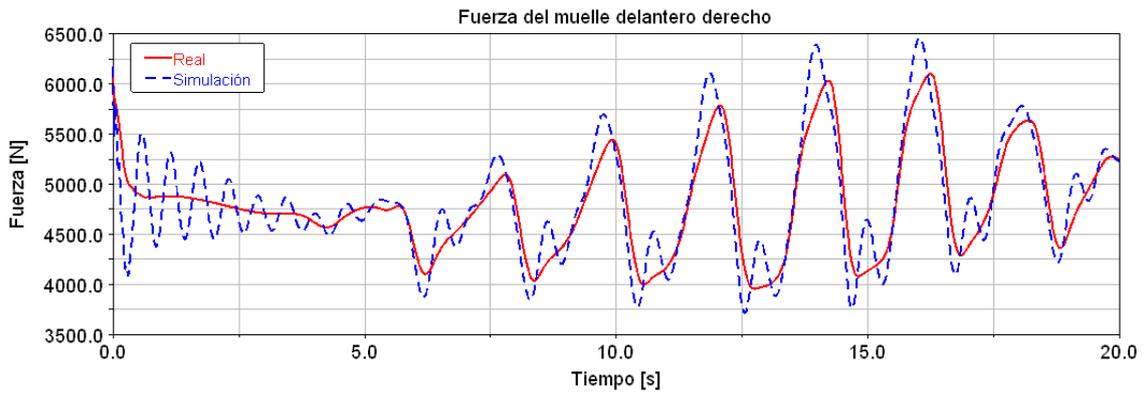


Figura 4.81. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

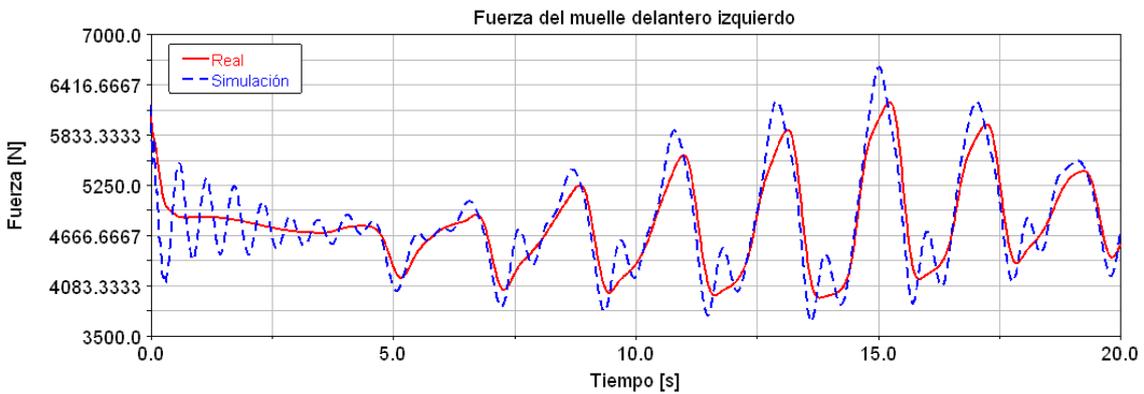


Figura 4.82. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

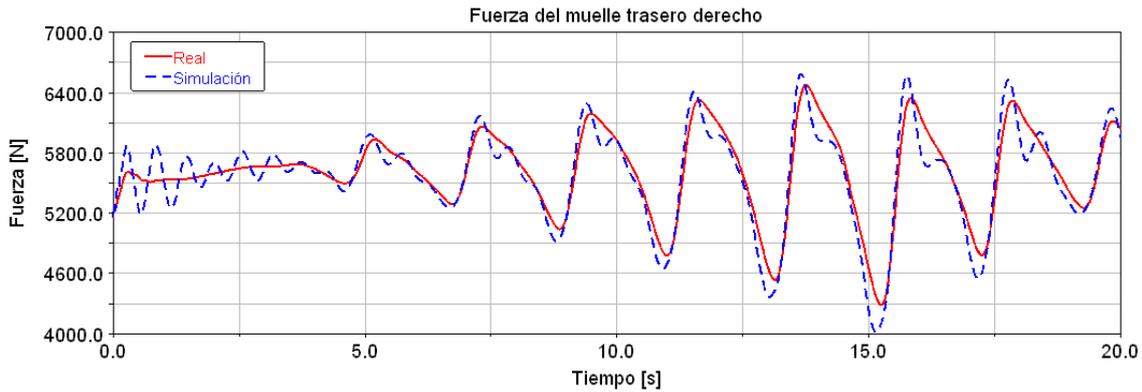


Figura 4.83. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

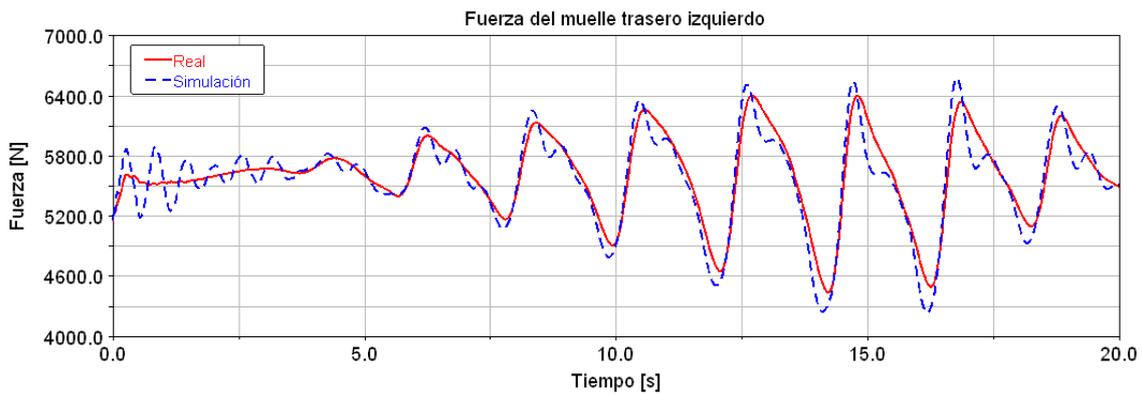


Figura 4.84. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.

4.2.3 Estimación de estados sobre medidas ruidosas

Del mismo modo que se ha realizado en la aplicación anterior, se introduce una fuerza virtual paralela a cada amortiguador con el objetivo de compensar la fuerza errónea que realiza éste para conseguir que el desplazamiento del muelle de la misma suspensión en el modelo sea similar al del sistema real. Previamente, se contaminan las medidas de desplazamiento de los muelles con ruido aleatorio de 0,5mm, 100Hz y distribución uniforme, lo que perturba poco las propias medidas (Figura 4.85, Figura 4.86, Figura 4.87, Figura 4.88) pero mucho sus derivadas, las velocidades (Figura 4.89, Figura 4.90, Figura 4.91 y Figura 4.92) y las aceleraciones, las cuales se ven tan afectadas que no resulta interesante mostrarlas. Basta con observar las velocidades calculadas a partir de las medidas ruidosas para concluir de nuevo que el ruido es muy superior al que existiría en la realidad, tratándose por tanto de un caso extremadamente desfavorable.



Figura 4.85. Gráfico de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).



Figura 4.86. Gráfico de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).

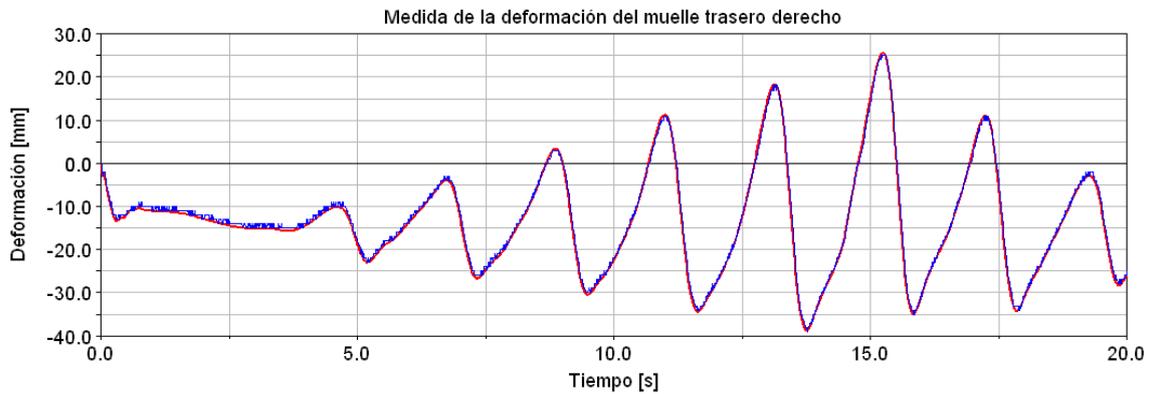


Figura 4.87. Gráfico de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).

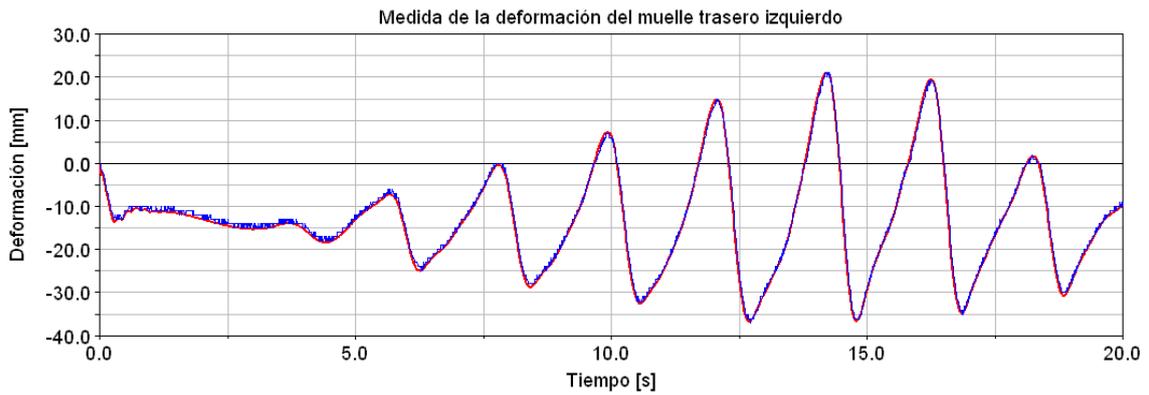


Figura 4.88. Gráfico de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).

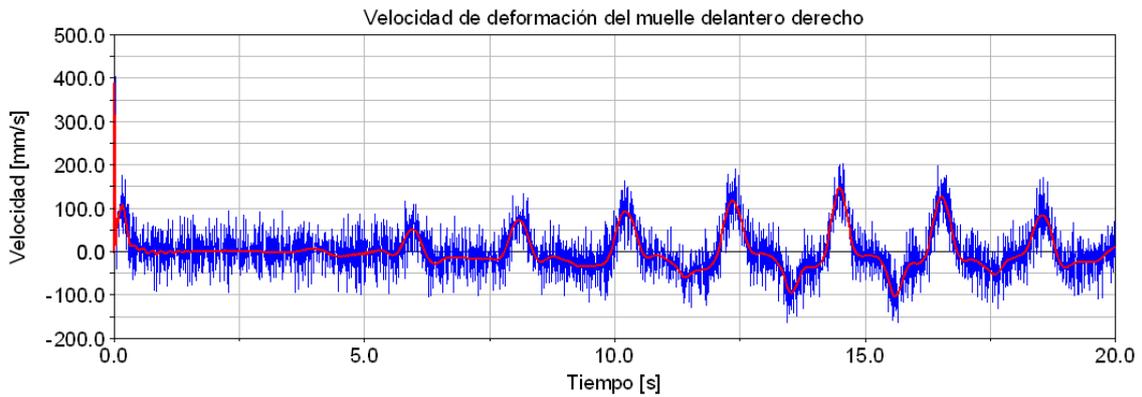


Figura 4.89. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle delantero derecho en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

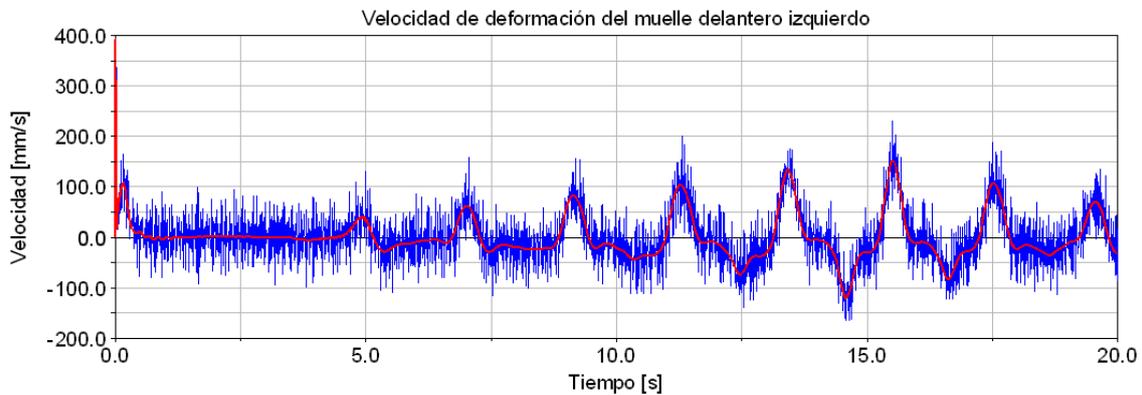


Figura 4.90. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

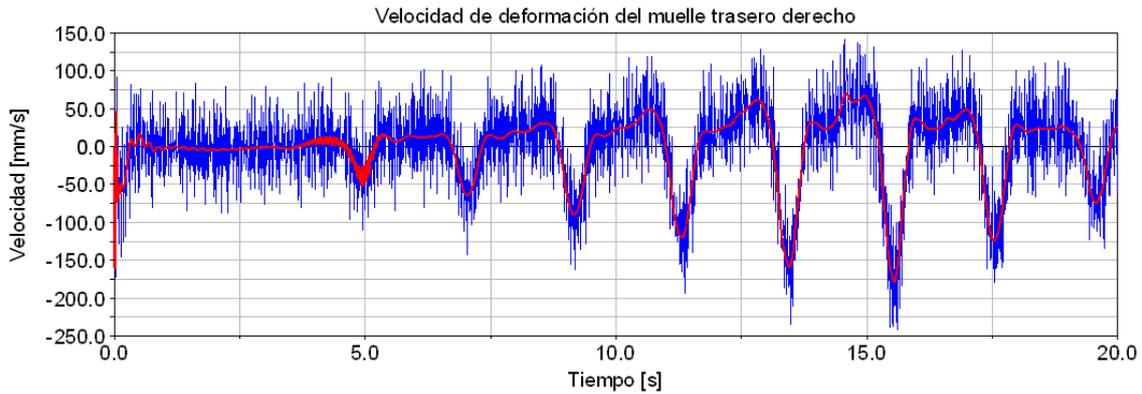


Figura 4.91. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle trasero derecho en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

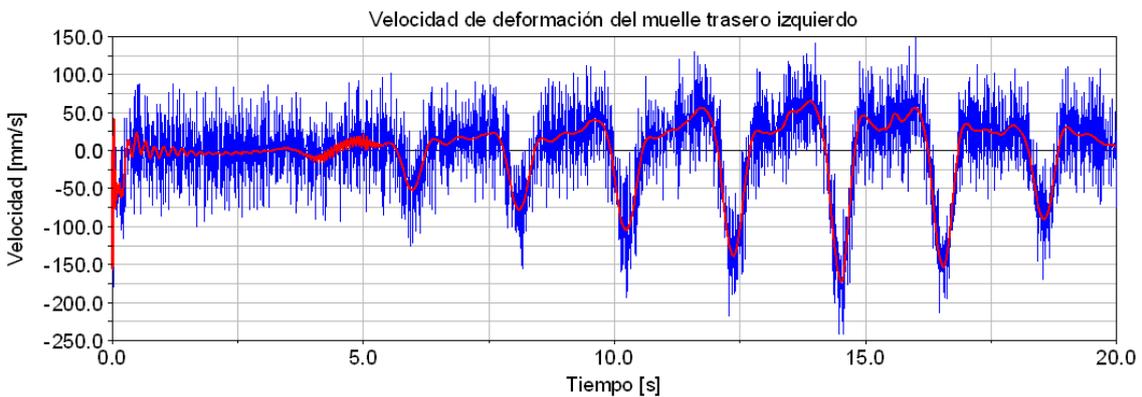


Figura 4.92. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).

Se ajustan los valores de las constantes de los Observadores Proporcional-Integral hasta llegar a los mostrados en la expresión (4.3), distintos para cada tren (los subíndices “d” y “t” indican delantero y trasero, respectivamente).

$$\begin{aligned} K_d^p &= 400 & K_t^p &= 400 \\ K_d^i &= 1 & K_t^i &= 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se simula el modelo corregido y se obtienen los resultados en las medidas del sistema mostrados en la Figura 4.93, la Figura 4.94, la Figura 4.95 y en la Figura 4.96, que se acercan a las medidas reales con errores de hasta 2mm (Figura 4.97, Figura 4.98, Figura 4.99, Figura 4.100).

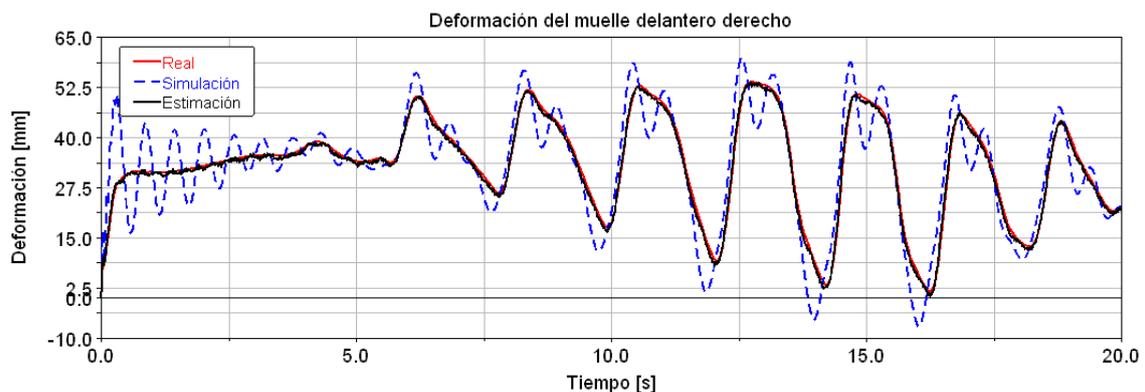


Figura 4.93. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

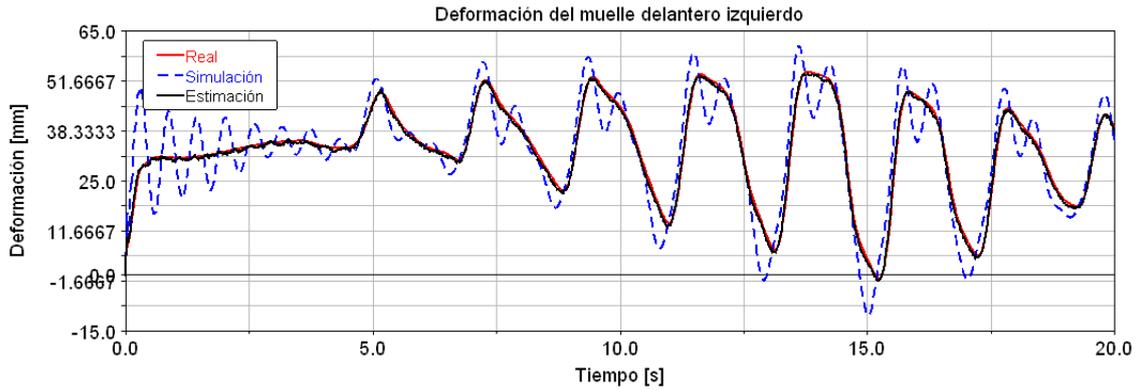


Figura 4.94. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

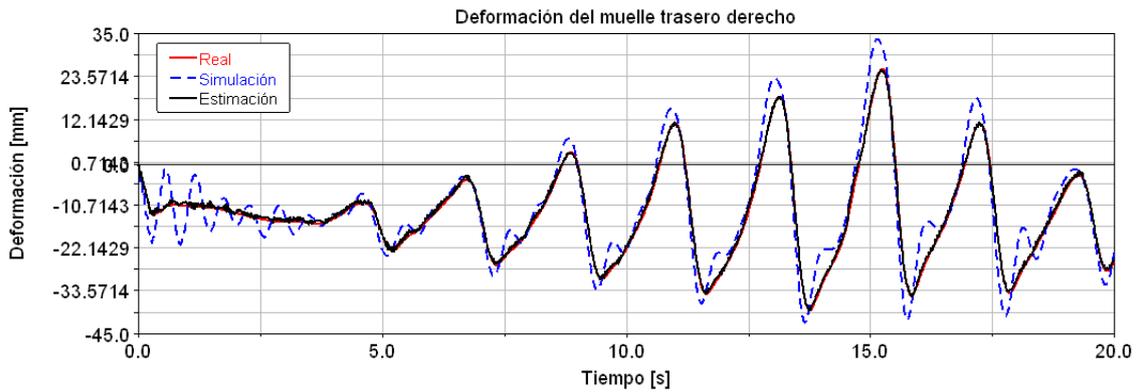


Figura 4.95. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

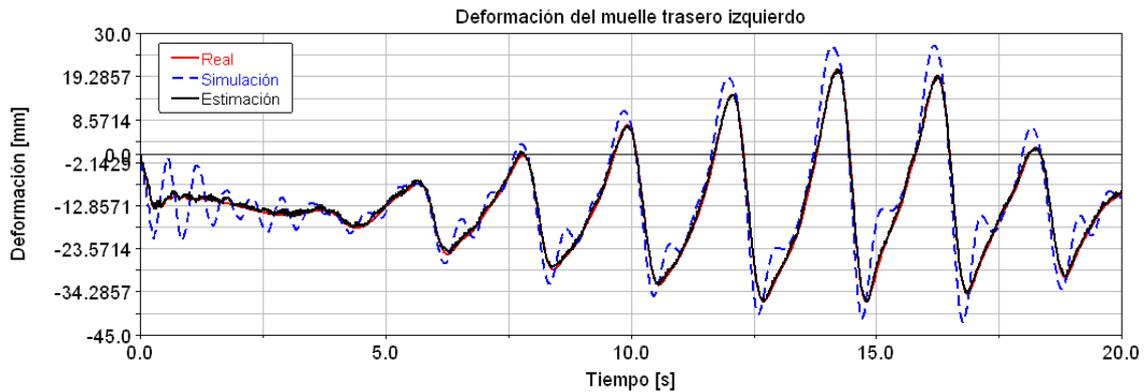


Figura 4.96. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

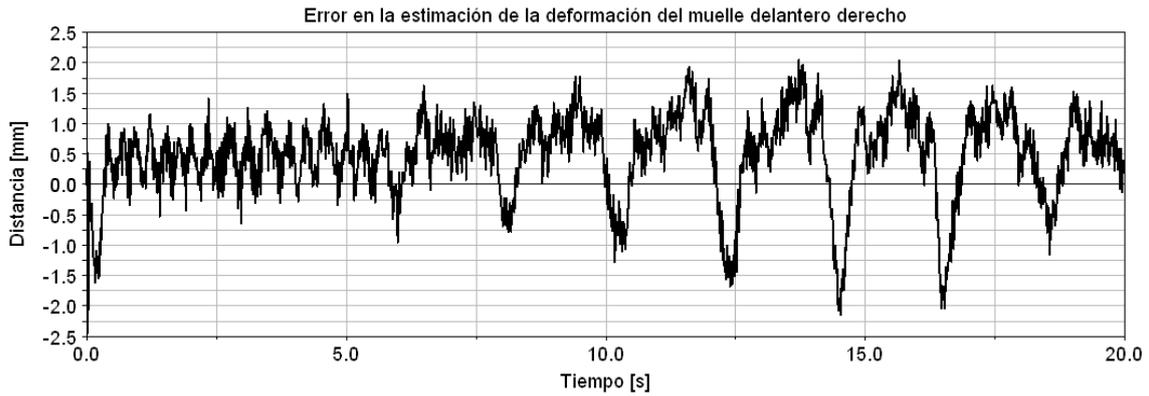


Figura 4.97. Gráfico del error de la deformación del muelle delantero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

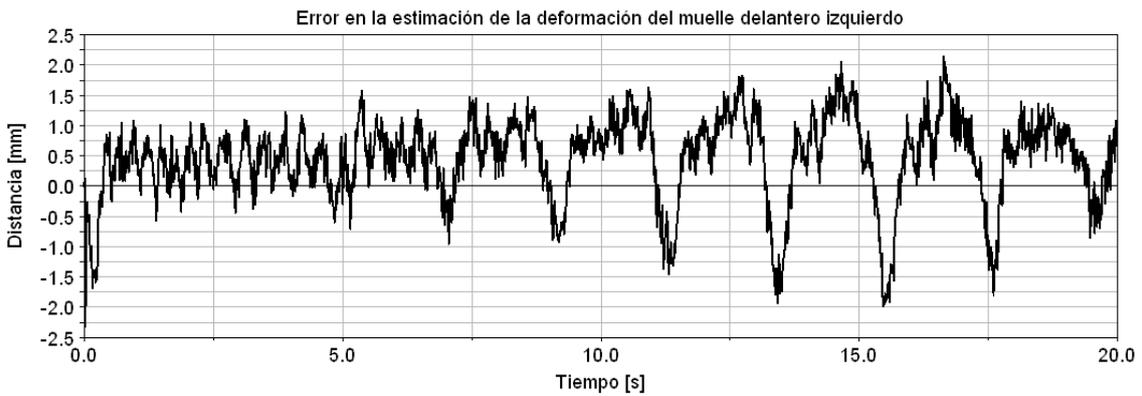


Figura 4.98. Gráfico del error de la deformación del muelle delantero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

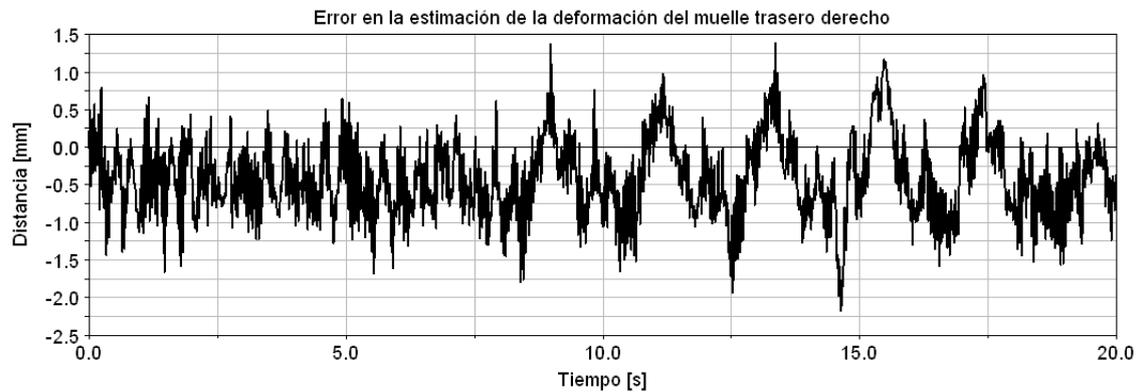


Figura 4.99. Gráfico del error de la deformación del muelle trasero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

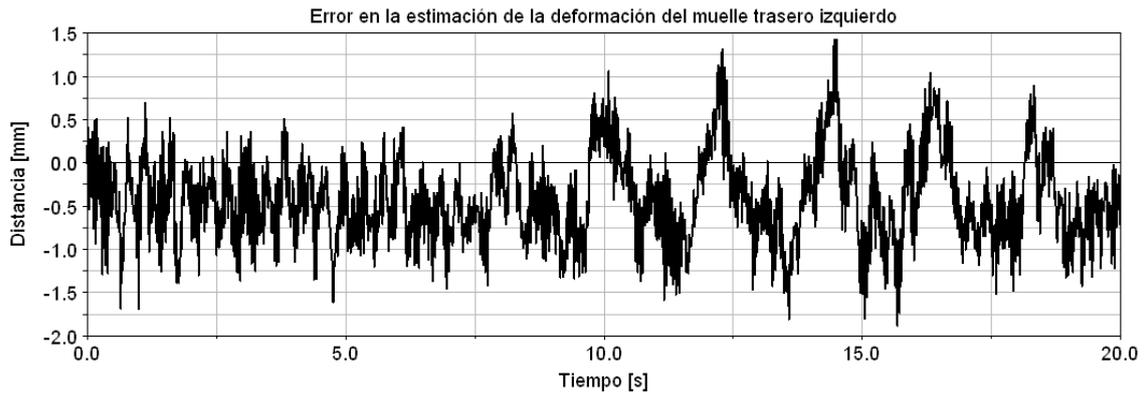


Figura 4.100. Gráfico del error de la deformación del muelle trasero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

Lo que permite estimar las fuerzas en los amortiguadores, que muestran el mismo comportamiento que en el sistema real (Figura 4.101, Figura 4.102, Figura 4.103, Figura 4.104) aunque con errores puntuales muy elevados debido al ruido introducido en la referencia (Figura 4.105, Figura 4.106, Figura 4.107, Figura 4.108).

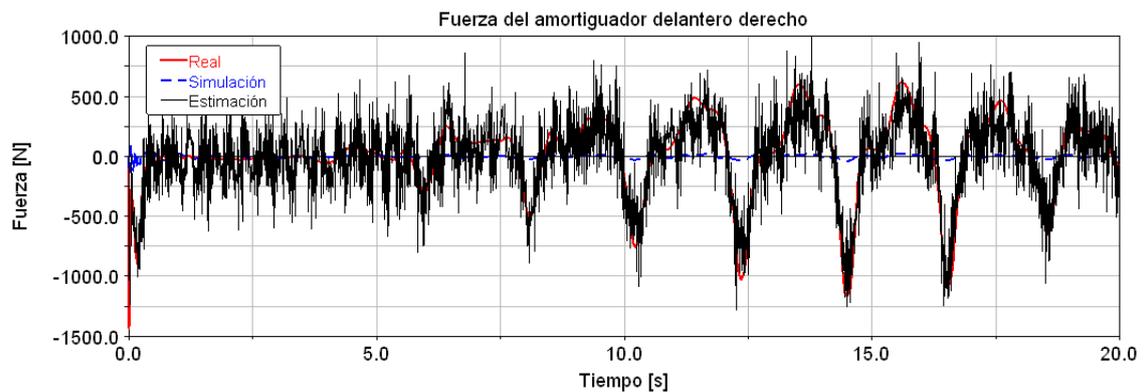


Figura 4.101. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

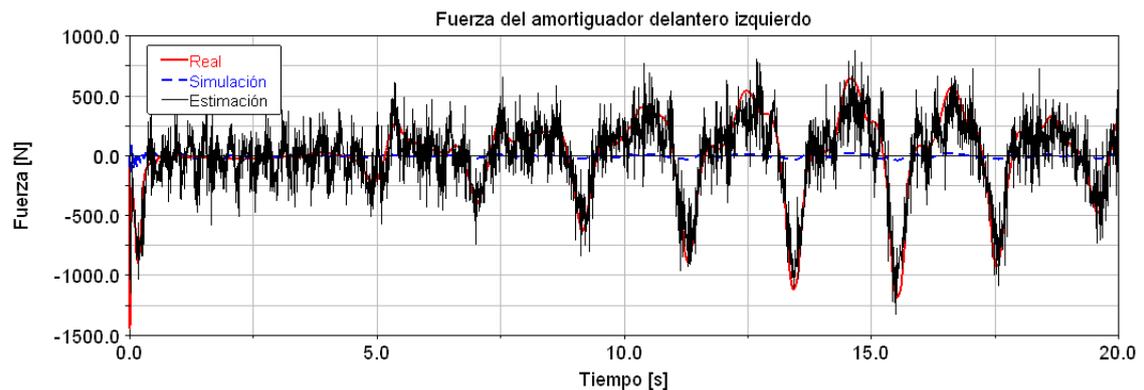


Figura 4.102. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

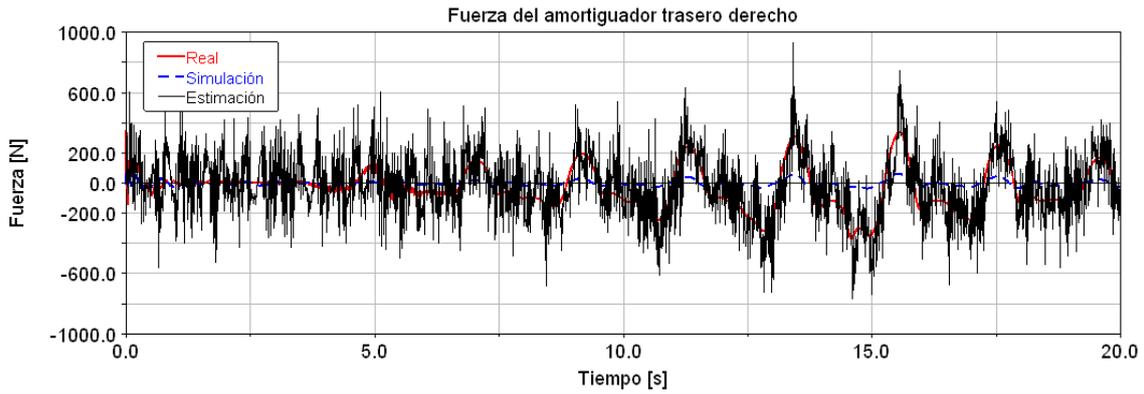


Figura 4.103. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

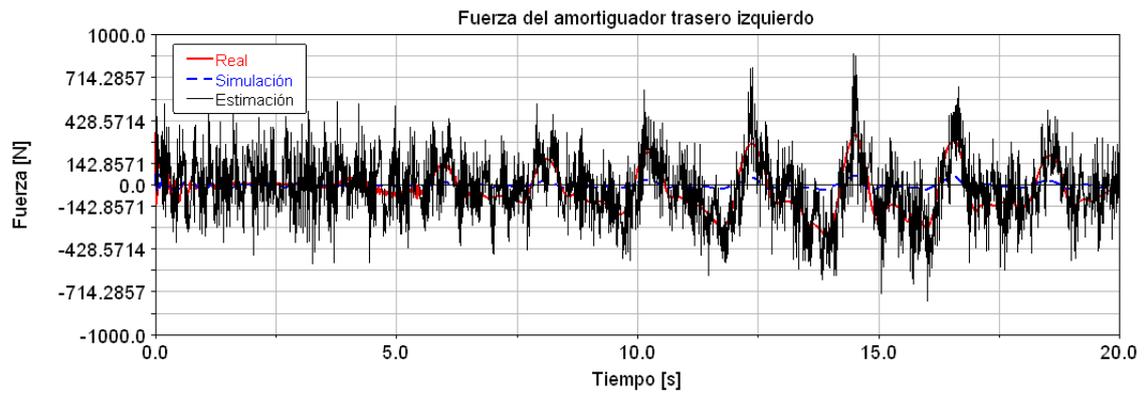


Figura 4.104. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

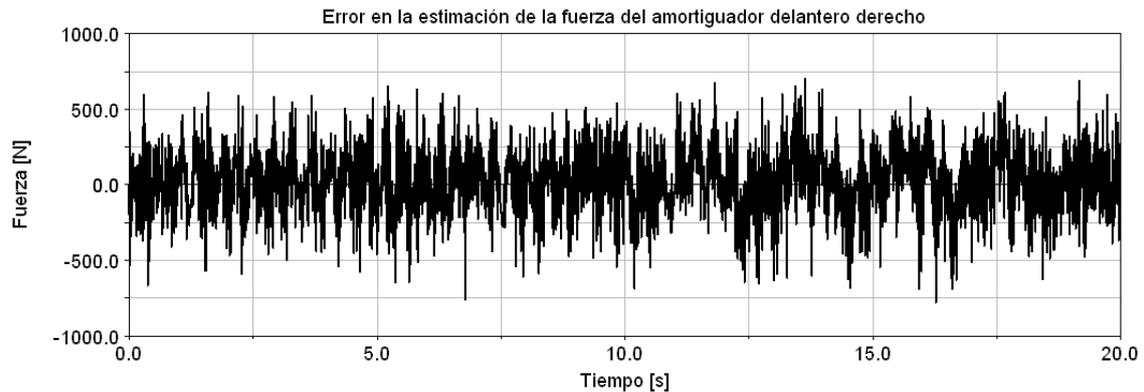


Figura 4.105. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador delantero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

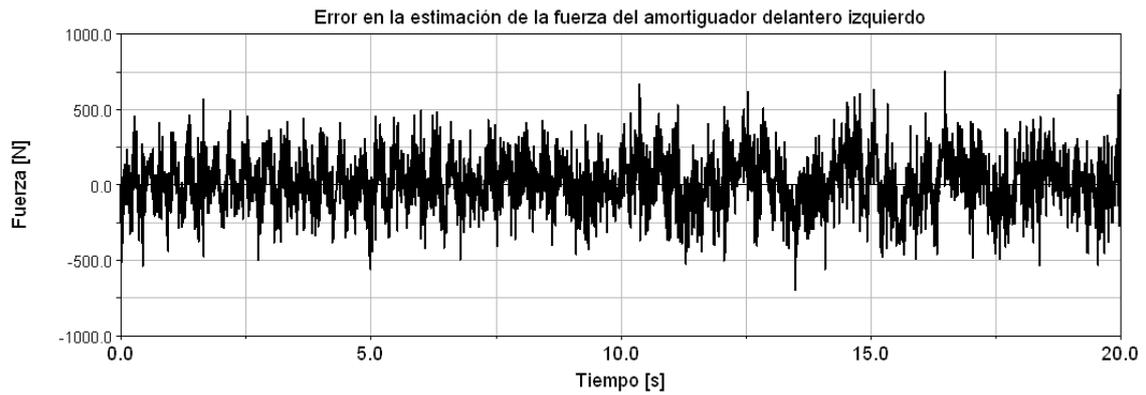


Figura 4.106. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

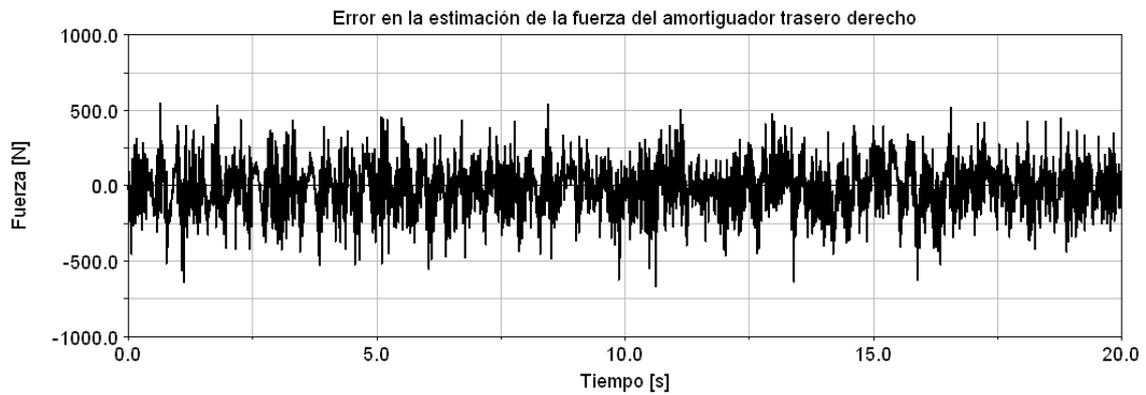


Figura 4.107. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador trasero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

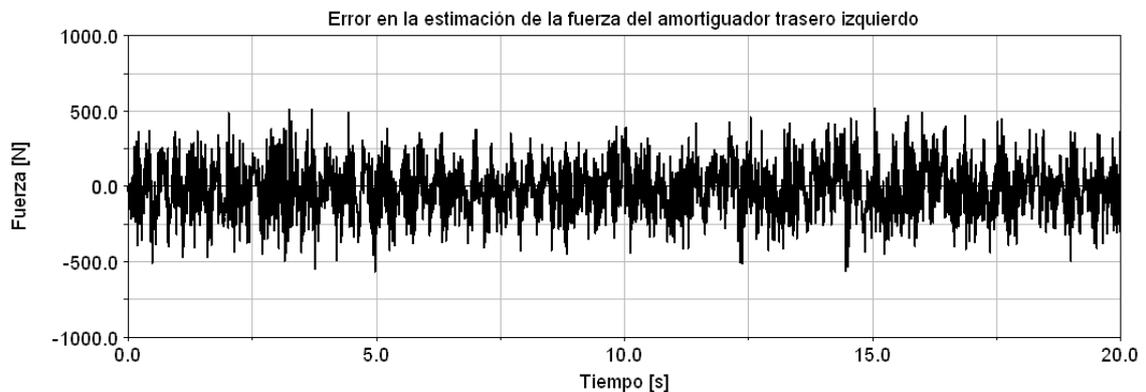


Figura 4.108. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

En cuanto al resto de variables, demuestran que efectivamente el comportamiento del vehículo ha sido corregido (Figura 4.109 a Figura 4.118).

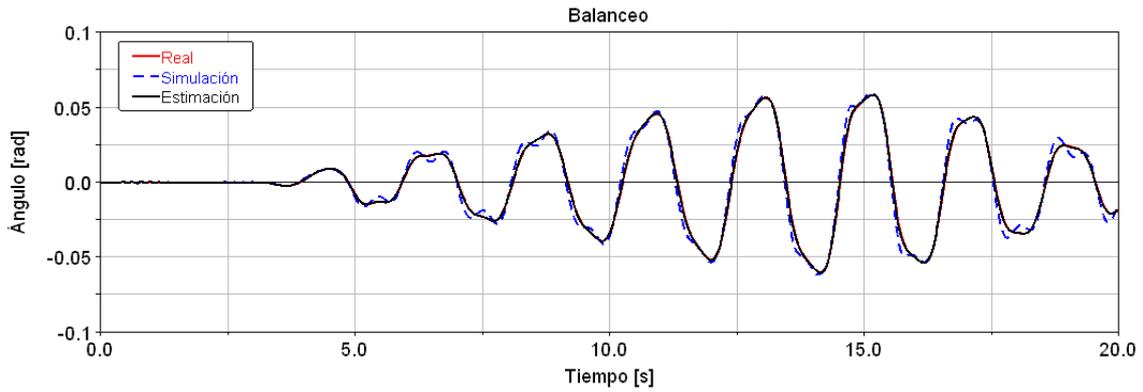


Figura 4.109. Gráfico del error del balanceo del vehículo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

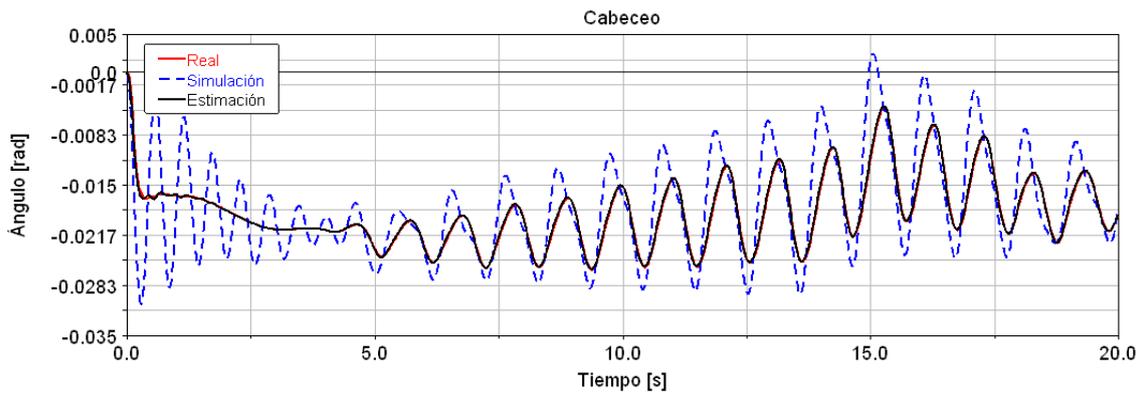


Figura 4.110. Gráfico del error del cabeceo del vehículo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.

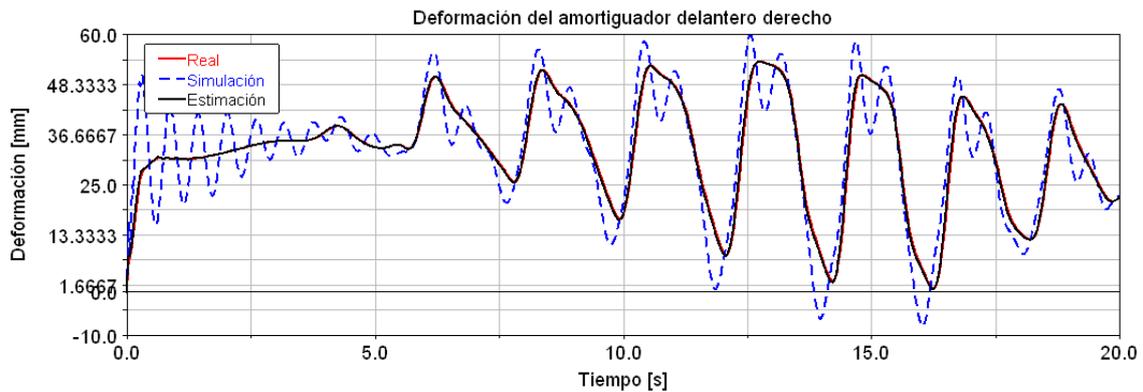


Figura 4.111. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

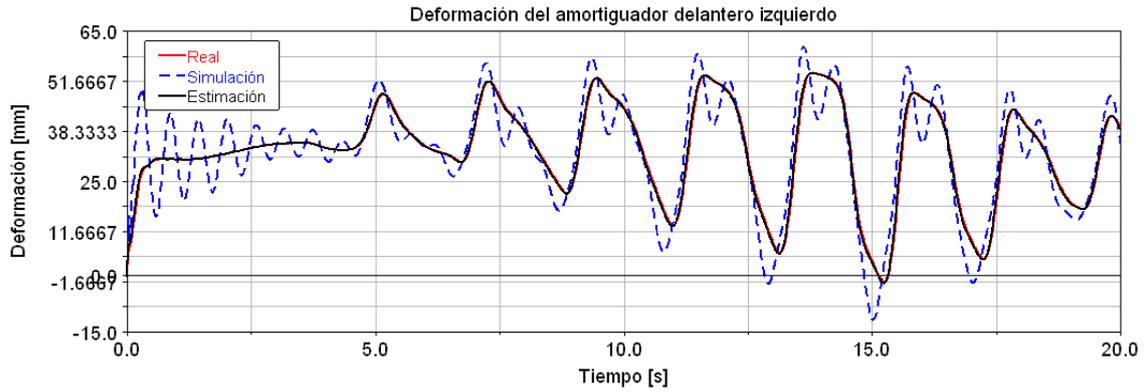


Figura 4.112. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

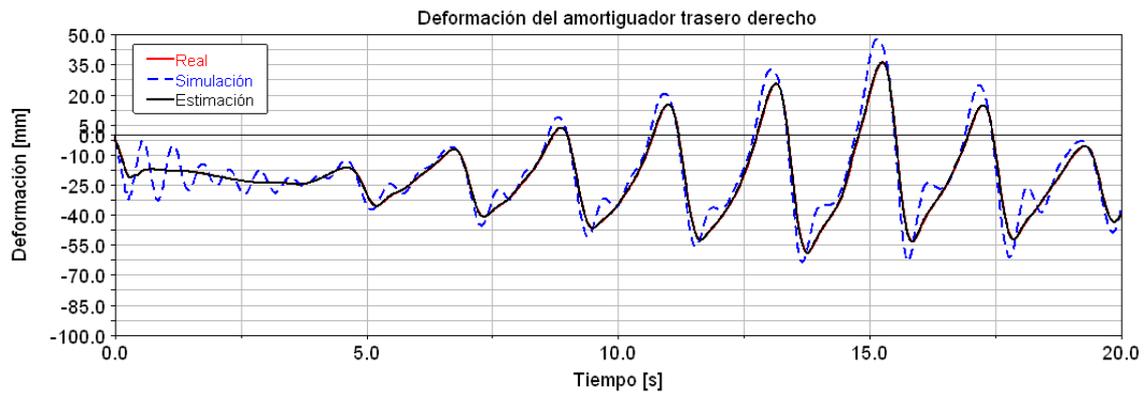


Figura 4.113. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

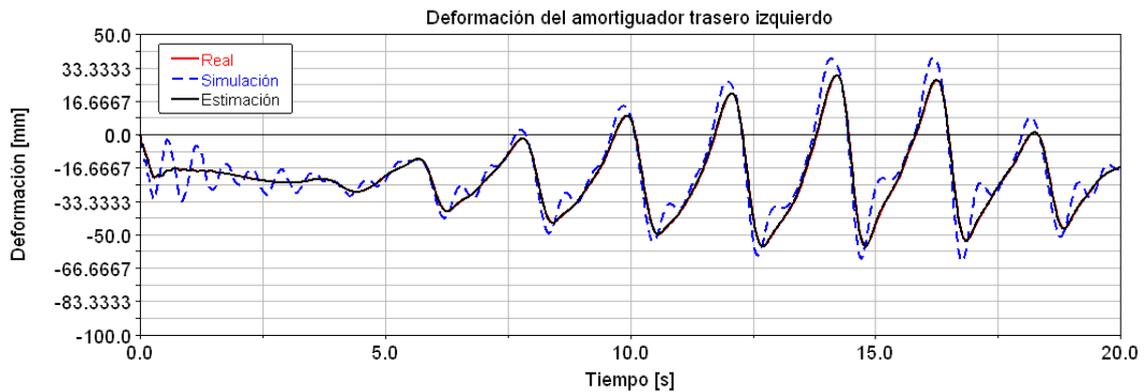


Figura 4.114. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

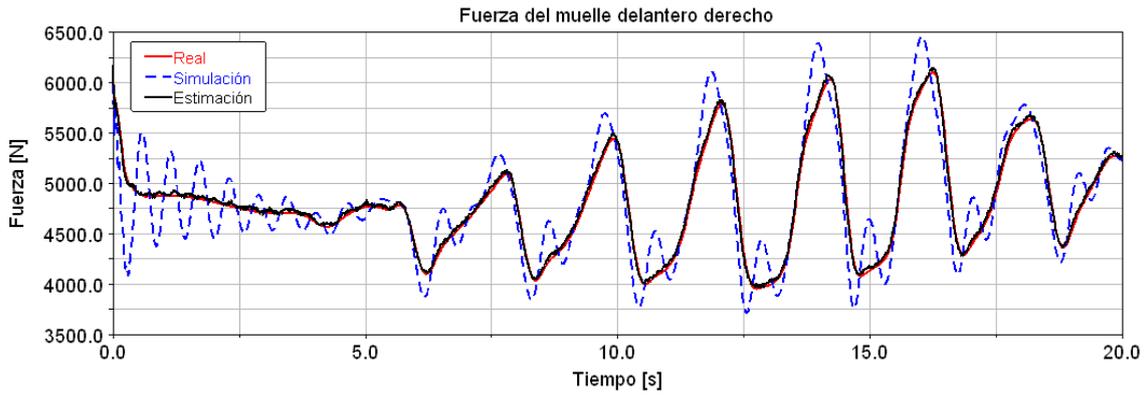


Figura 4.115. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

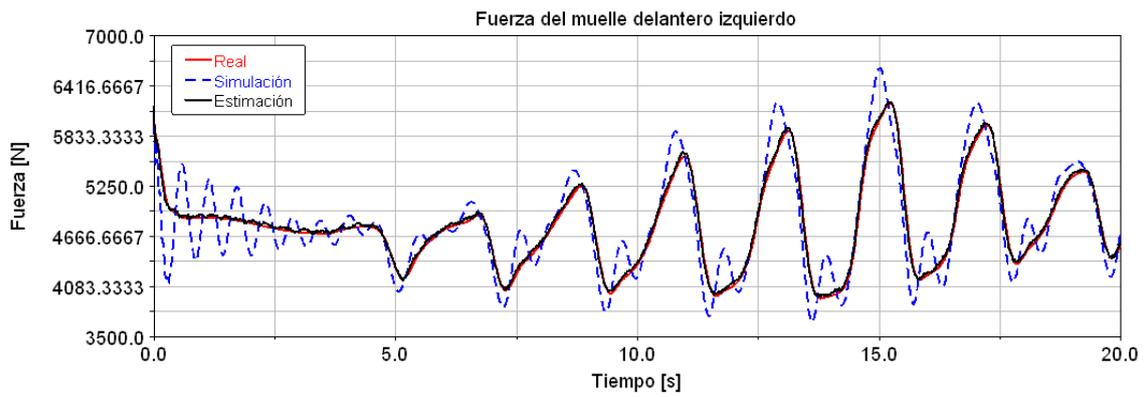


Figura 4.116. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

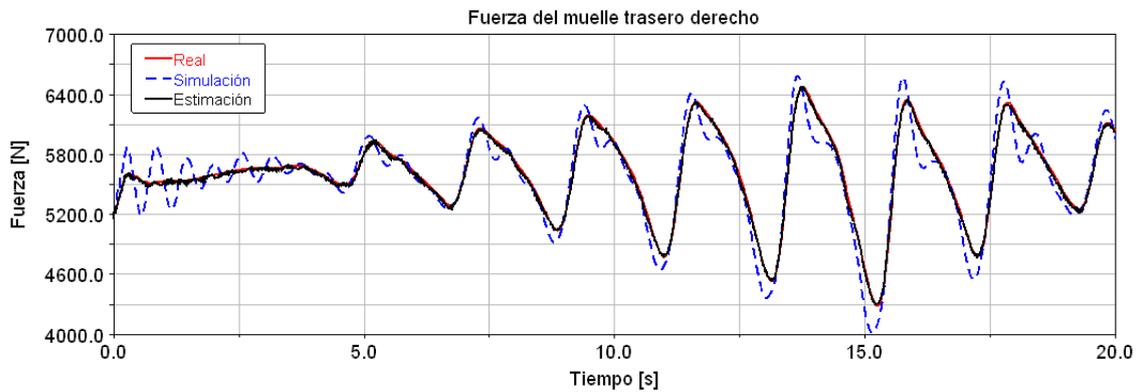


Figura 4.117. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

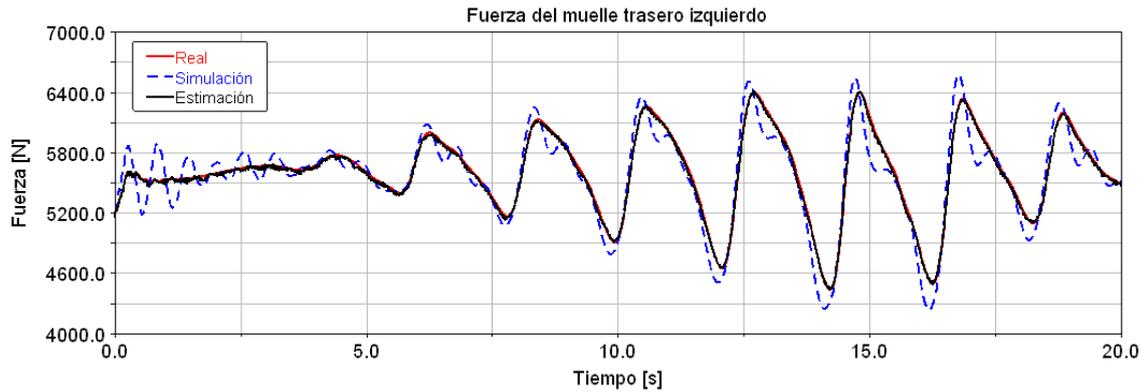


Figura 4.118. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.

4.2.4 Conclusiones

De nuevo, si bien el estimador de estados cumple cualitativamente su función de corregir el comportamiento del modelo para acercarse al sistema real, su eficacia cuantitativa en presencia de ruido no es sobresaliente.

4.3 Vehículo completo: Esfuerzos en un neumático delantero

La estimación de los esfuerzos en el neumático es un objetivo actualmente perseguido en el campo de la dinámica de vehículos, puesto que el conocimiento de estas variables sería de gran valor para los sistemas de seguridad activa.

El comportamiento de los neumáticos es extremadamente complejo, de hecho los modelos matemáticos están aún en desarrollo, lo que supone un obstáculo en la estimación de los esfuerzos. Además, estos modelos están basados en coeficientes cuya determinación también resulta compleja. Y por último, es sabido que el comportamiento de los neumáticos varía de manera importante bajo las condiciones de utilización (presión de inflado del neumático) y su histórico (desgaste).

Hasta ahora, se han utilizado modelos matemáticos de vehículo para la estimación de estos esfuerzos, como para el resto de estados del vehículo, basándose en lecturas de fenómenos existentes en estos modelos simplificados: posición GPS del vehículo, aceleraciones y velocidades de rotación de la carrocería e incluso mediciones de la velocidad de deriva en cada rueda o del esfuerzo realizado en la dirección. En casi todos estos casos no sólo se utiliza un modelo simplificado de vehículo, sino también un modelo simplificado del neumático y muy alejado del estado del arte actual en la materia.

En esta aplicación se demuestra que la metodología presentada es aplicable también a este problema de estimación de estados. Por una parte, el uso de un modelo CAE completo del vehículo incluye efectos que existen en el vehículo real pero no en los modelos simplificados, lo que permite utilizarlos en la estimación de estados. Por ejemplo, los modelos matemáticos no incluyen los elementos de la suspensión (trapezio, amortiguador, bieleta, etc.) sino, en el mejor de los casos, un muelle-amortiguador vertical sobre el neumático. Mientras tanto, en el modelo CAE existen todos estos elementos con su geometría, cinemática y dinámica, lo que permite observar su comportamiento en el modelo para compararlo con el del sistema real y utilizarlo en el estimador de estados, como se mostrará posteriormente. Por otra parte, el modelo CAE permite además el uso de modelos de neumático complejos y avanzados, cuyo

comportamiento es mucho más cercano a la realidad que el de los modelos simplificados. Por ejemplo, los modelos simplificados de vehículo suelen utilizar modelos de neumático lineales, como el modelo de Dugoff, para poder incluirlos en la formulación del observador de estados, aunque estos modelos sólo sean válidos en unas condiciones de utilización muy limitadas. Por el contrario, los modelos CAE, gracias a la flexibilidad en el modelado de sistemas de dinámica vehicular, permiten incluir cualquier tipo de modelo de neumático avanzado disponible en la librería del software, como el modelo de Pacejka de 2002 con efectos tridimensionales, que se basa en una formulación compleja con multitud de parámetros para recrear el comportamiento del neumático bajo condiciones muy diversas: combinación de esfuerzos, ángulos de caída, estados transitorios, irregularidades del terreno, etc.

4.3.1 Presentación del sistema real

Tomando el modelo CAE de vehículo completo ya presentado y la misma maniobra (Anexo II: Modelo de vehículo completo y maniobra) con el modelo de neumático que se asume como real, el comportamiento del vehículo queda definido por la velocidad del vehículo (Figura 4.119), su velocidad lateral (Figura 4.120), su orientación o guiñada (Figura 4.120), el cabeceo (Figura 4.121) y el balanceo (Figura 4.122).

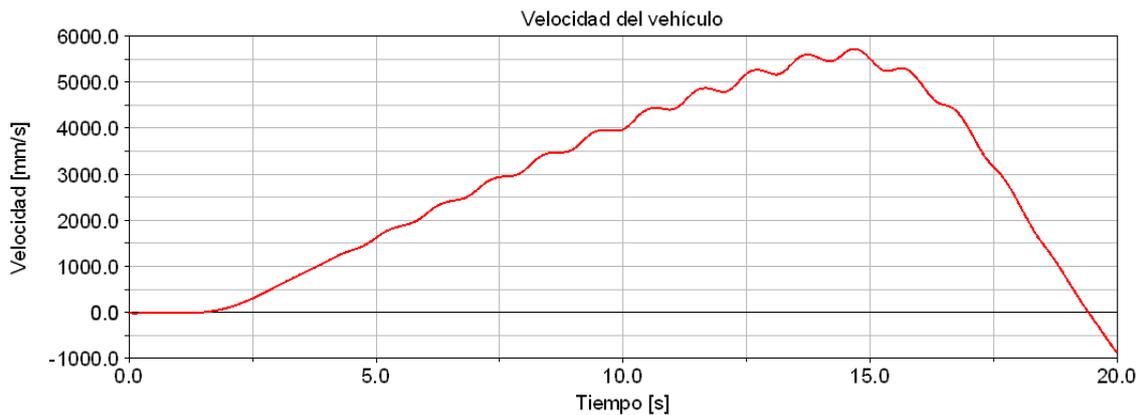


Figura 4.119. Gráfico de la velocidad del vehículo en el sistema real.

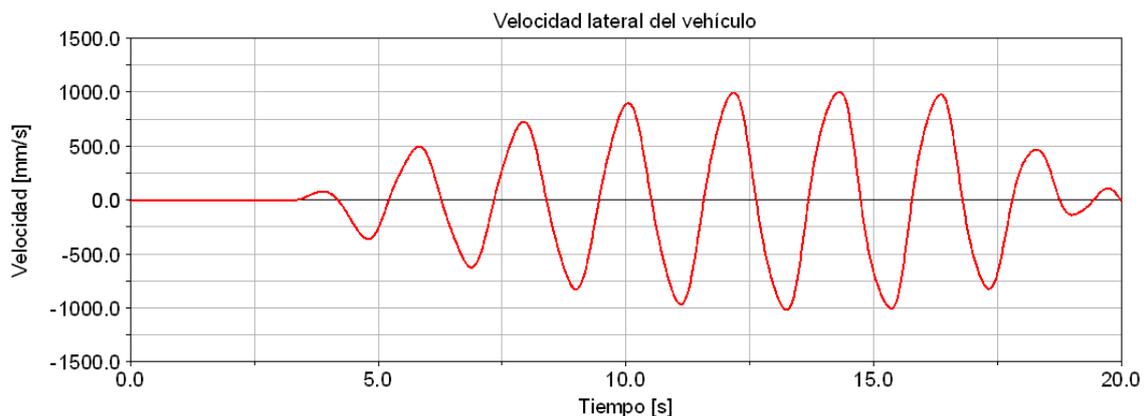


Figura 4.120. Gráfico de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real.



Figura 4.121. Gráfico de la guiñada del vehículo en el sistema real.

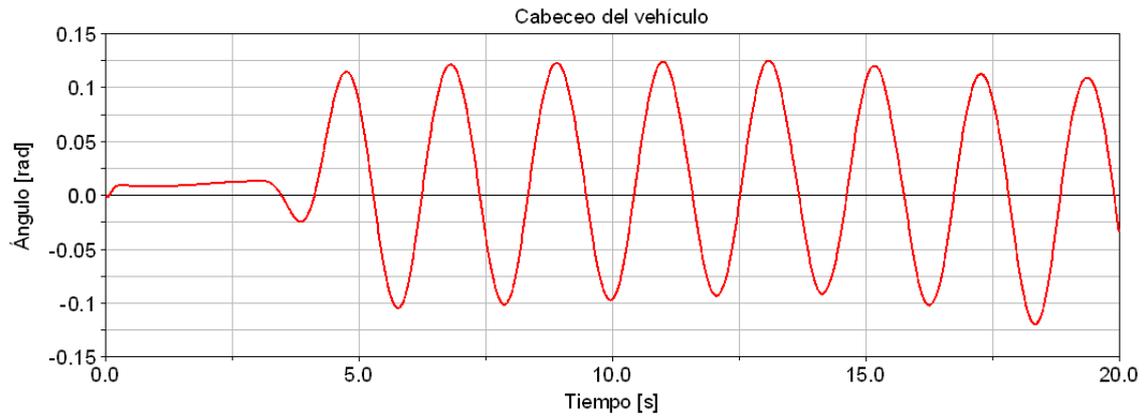


Figura 4.122. Gráfico del cabeceo del vehículo en el sistema real.

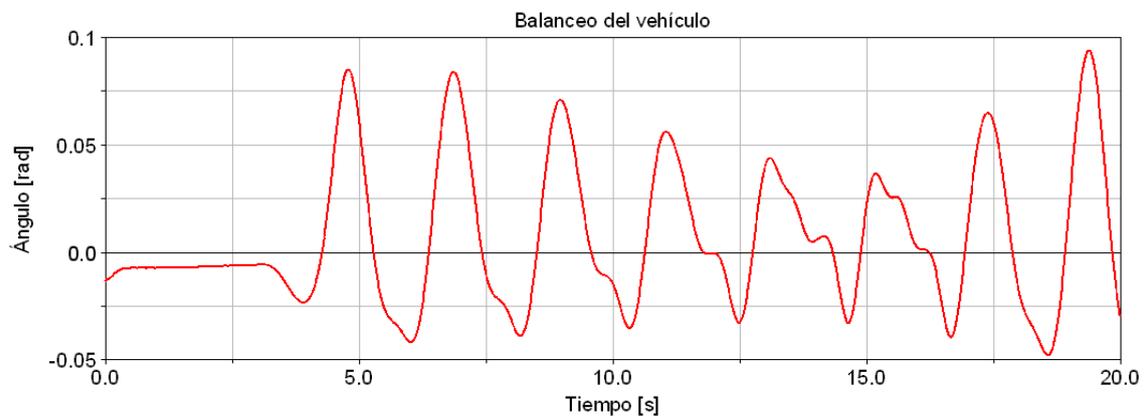


Figura 4.123. Gráfico del balanceo del vehículo en el sistema real.

Este comportamiento es la consecuencia de los esfuerzos en los neumáticos. Particularmente, se trabajará con el neumático delantero derecho. Gracias a que el sistema real es una simulación, se puede conocer el valor de los estados: fuerza longitudinal (Figura 4.124), lateral (Figura 4.125), vertical (Figura 4.126), par de resistencia a la rodadura (Figura 4.127) y par autoalineante (Figura 4.128).

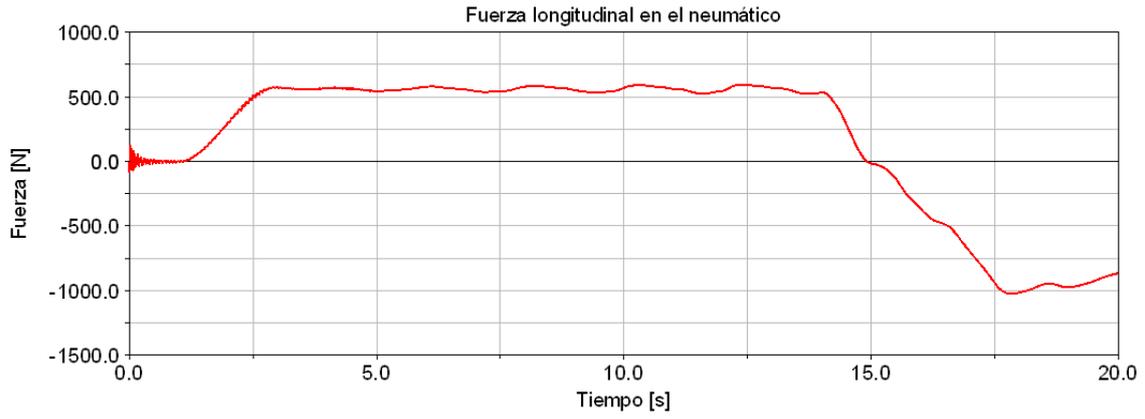


Figura 4.124. Gráfico de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real.

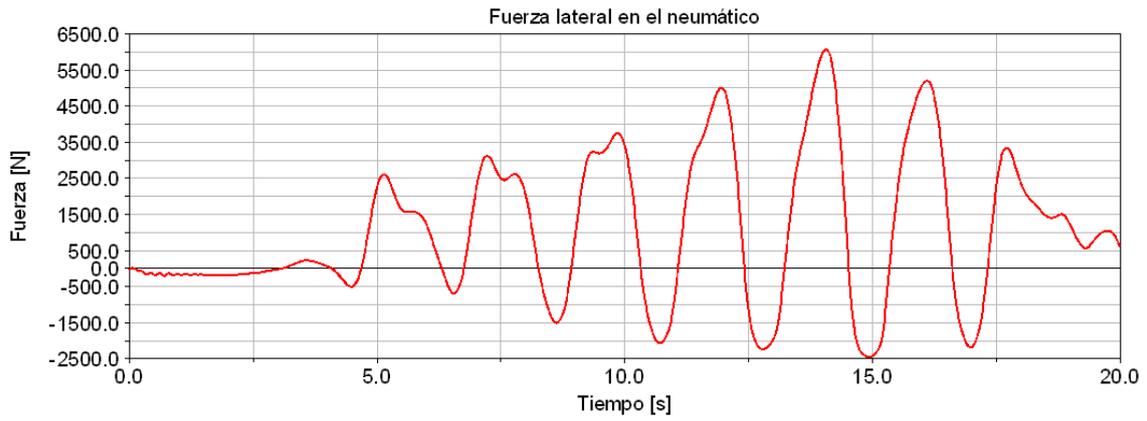


Figura 4.125. Gráfico de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real.

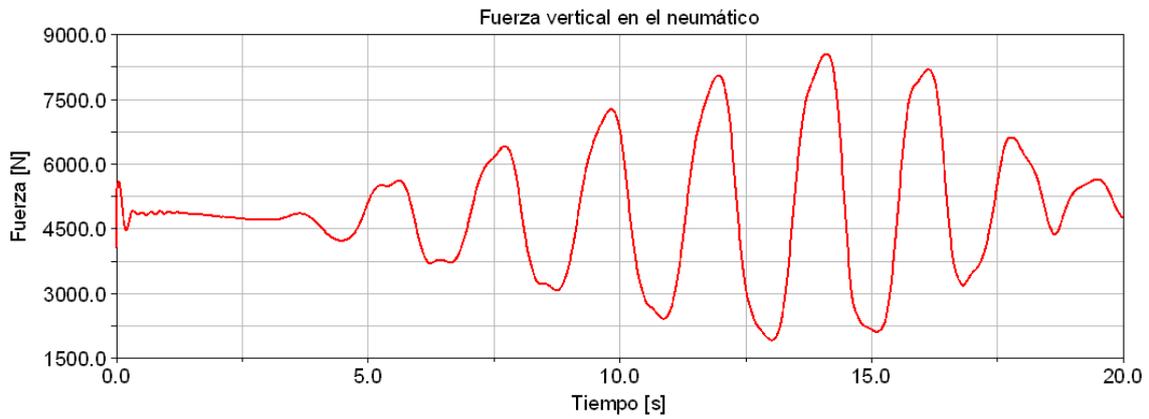


Figura 4.126. Gráfico de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real.



Figura 4.127. Gráfico de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real.

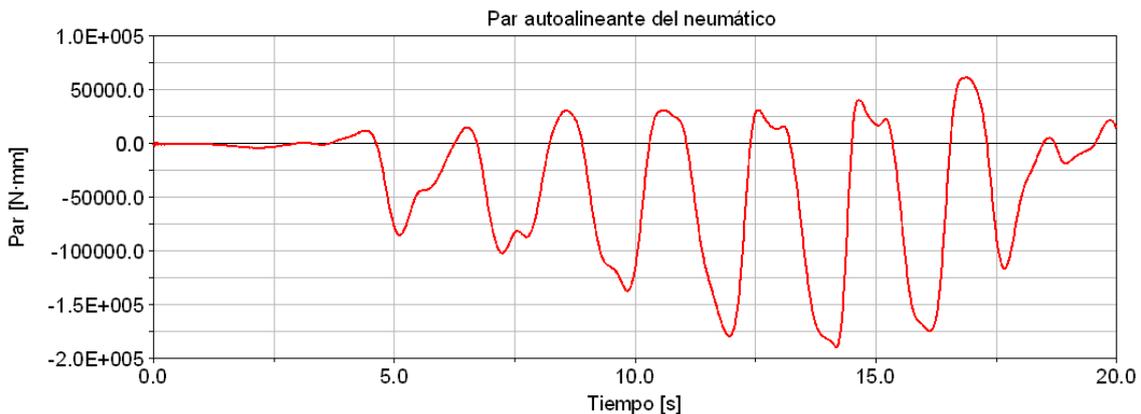


Figura 4.128. Gráfico del par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real.

Cabe remarcar que el par según el sentido longitudinal del neumático (*overturning*) es considerado nulo en el modelo de Pacejka 2002 para los neumáticos de turismo (no así para los de motocicleta).

4.3.2 Presentación del modelo para la estimación de estados

Sin embargo, como se ha expuesto anteriormente, el modelo de neumático utilizado puede no ser fiel al comportamiento real. En este caso, como en las aplicaciones anteriores, se modifica el modelo para representar este hecho. Se dividen a la mitad todos los coeficientes de escala del modelo de neumático de Pacejka 2002 del neumático delantero derecho. Tan sólo con este cambio o error en el modelo, la simulación ya diverge del comportamiento real del vehículo (Figura 4.129 a Figura 4.133).

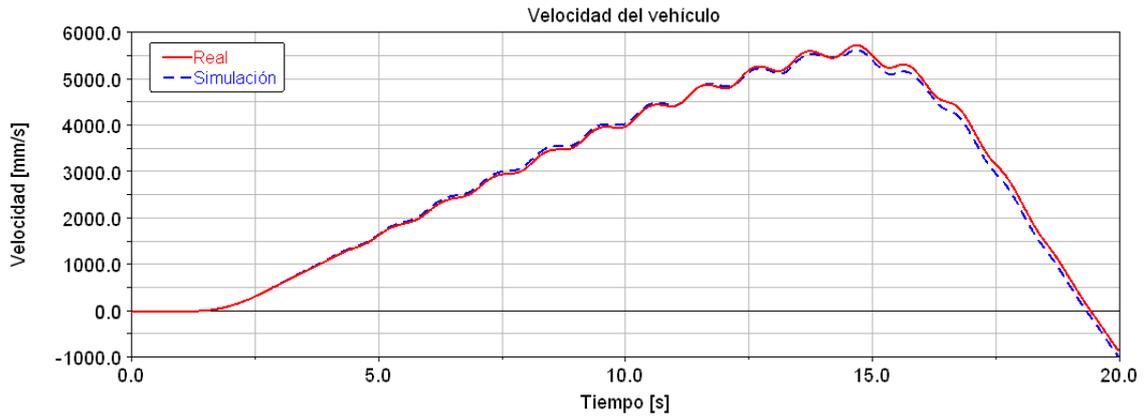


Figura 4.129. Gráfico comparativo de la velocidad del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.

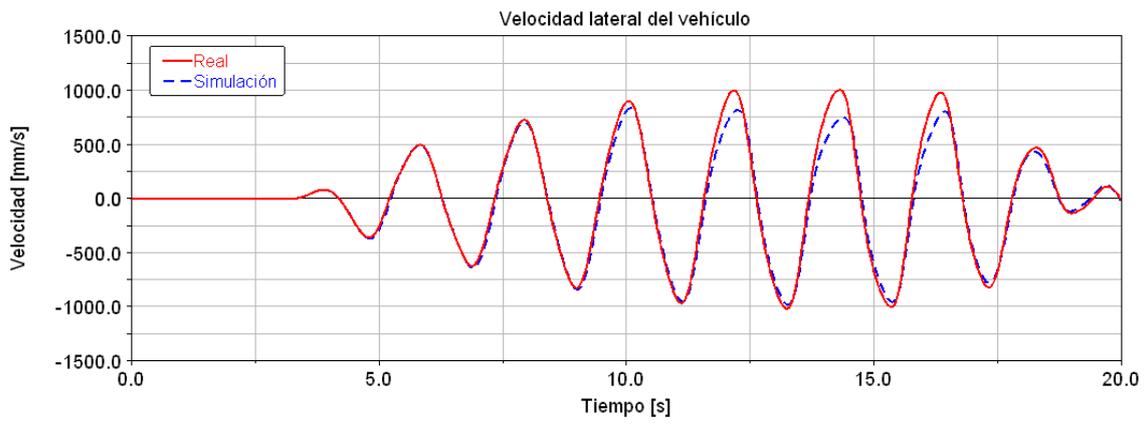


Figura 4.130. Gráfico comparativo de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.

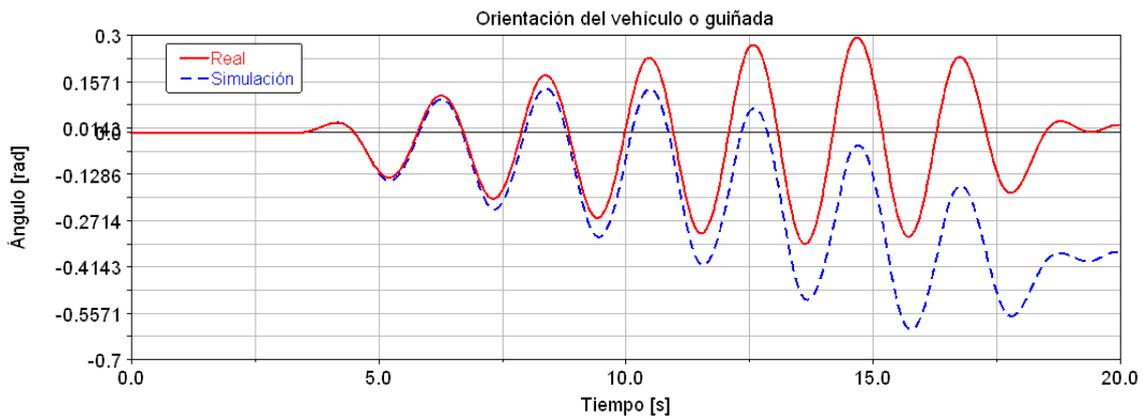


Figura 4.131. Gráfico comparativo de la guiñada del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.

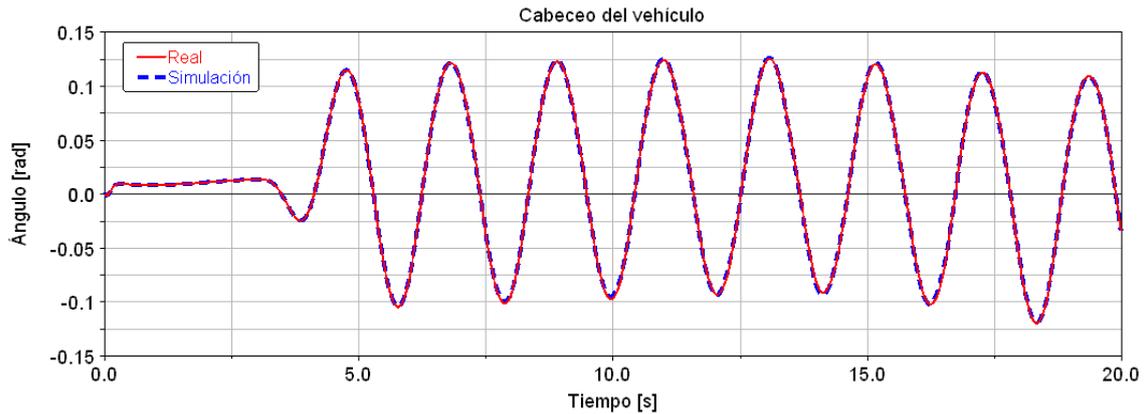


Figura 4.132. Gráfico comparativo del cabeceo del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.

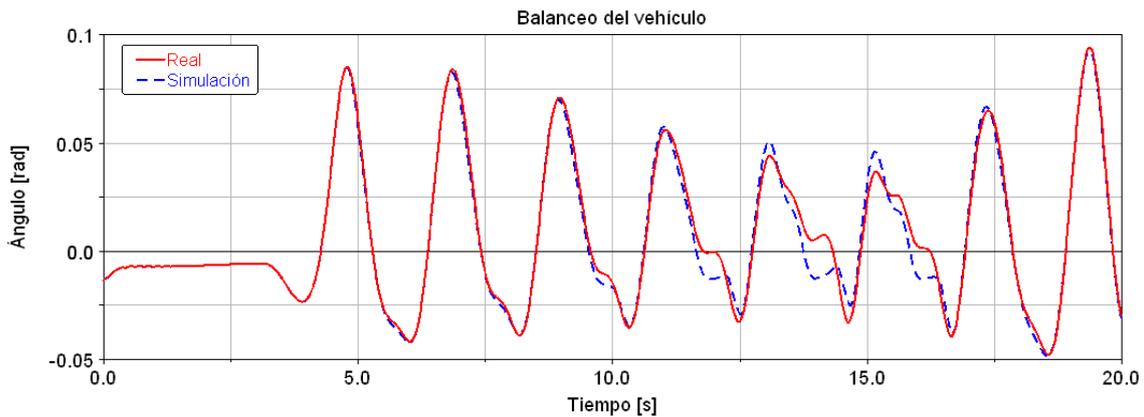


Figura 4.133. Gráfico comparativo del balanceo del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.

Aunque el efecto tan sólo es realmente importante en el comportamiento lateral del vehículo (velocidad lateral y guiñada) y su consecuencia más directa (balanceo). Esto es debido a que el esfuerzo longitudinal viene mayoritariamente impuesto por el par en el palier, que está fijado como una entrada del sistema, lo que hace que el comportamiento longitudinal (velocidad y cabeceo) difieran mínimamente debido a la diferencia de deslizamiento que habrá en el neumático para alcanzar la fuerza longitudinal requerida. Sin embargo, puesto que los esfuerzos en el neumático no son independientes (mayor requerimiento en el sentido longitudinal limita la capacidad de esfuerzo en el sentido lateral), esto tiene el impacto mencionado sobre el comportamiento lateral, lo que se suma a la modificación del comportamiento lateral. Esta diferencia en el comportamiento lateral provoca que la transferencia de carga vertical también sea distinta. En cuanto a los pares de resistencia a la rodadura y autoalineante, se ven directamente afectados por la divergencia en los esfuerzos anteriores y la disminución de los factores de escala. Esto se confirma con los esfuerzos observados en el neumático con el modelo erróneo (Figura 4.134 a Figura 4.138).

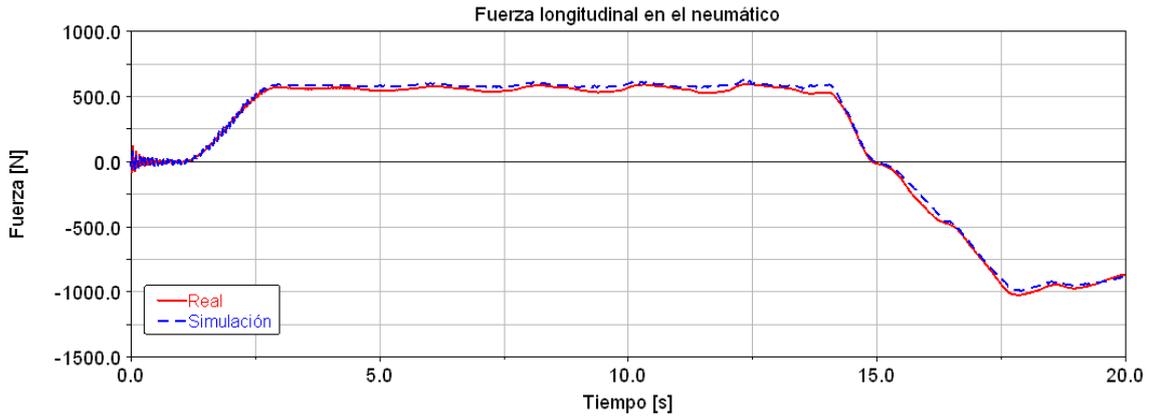


Figura 4.134. Gráfico de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

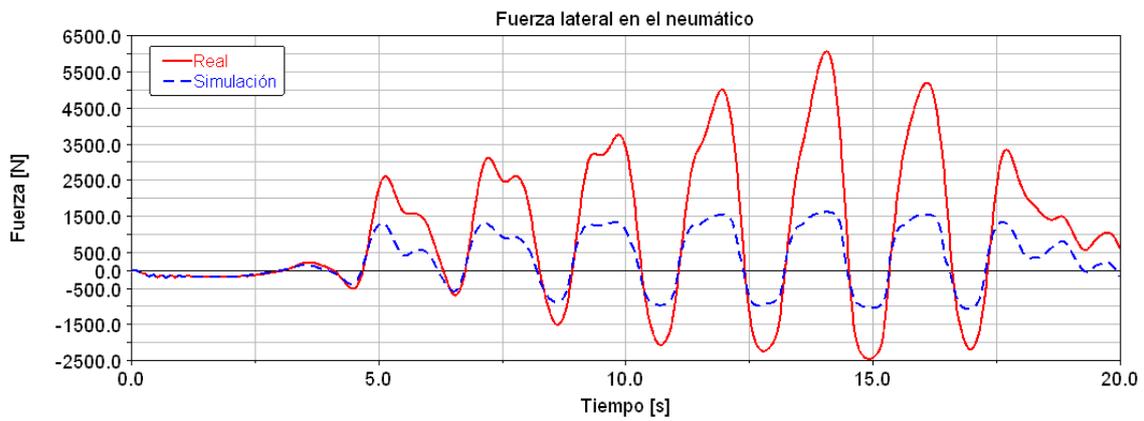


Figura 4.135. Gráfico de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

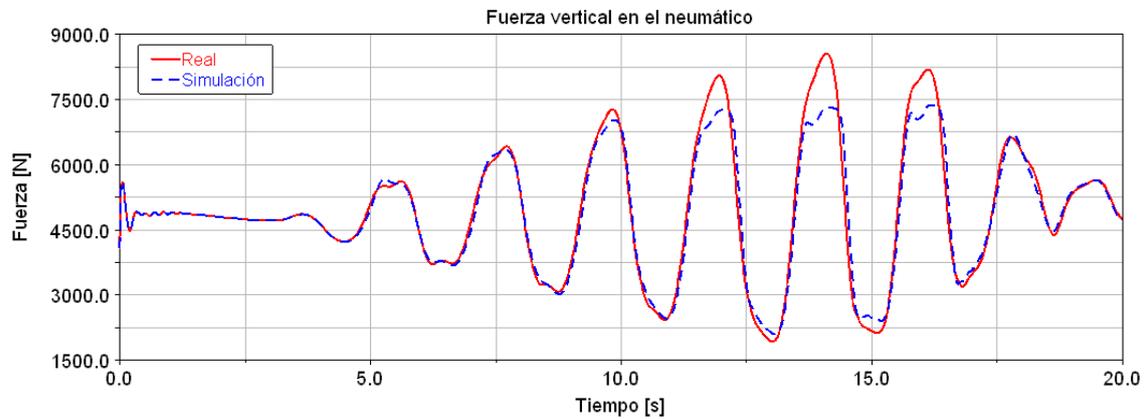


Figura 4.136. Gráfico de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

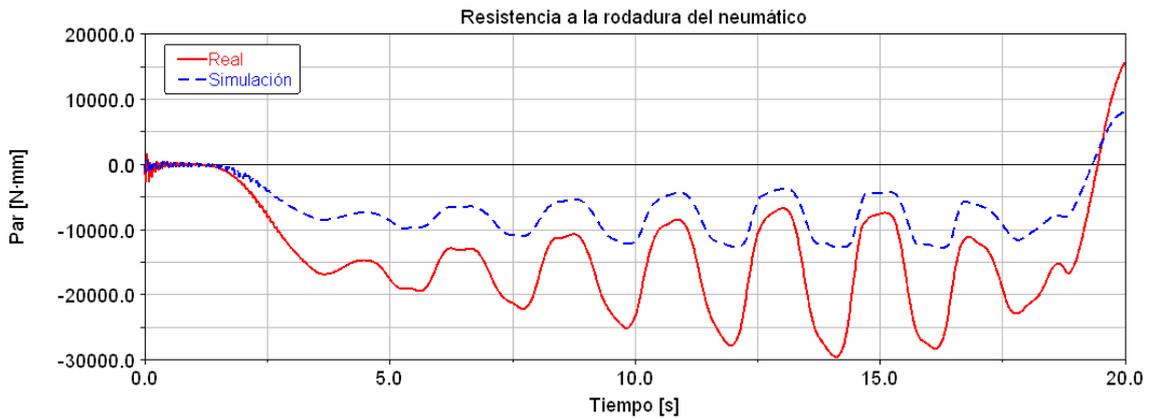


Figura 4.137. Gráfico de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

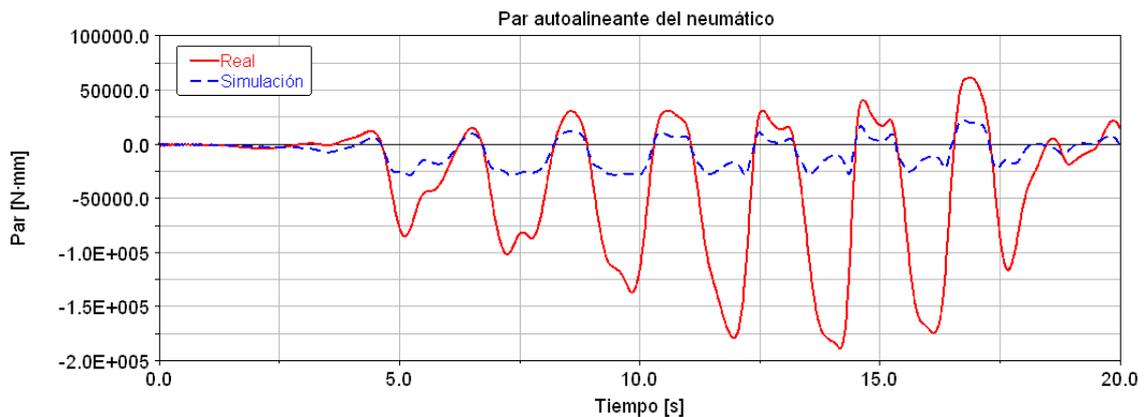


Figura 4.138. Gráfico par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.

En consecuencia, si bien los esfuerzos en un neumático divergen, el comportamiento del vehículo no difiere tan drásticamente, ya que existen otros tres neumáticos. Una consecuencia de esto es que la observabilidad de los esfuerzos en un neumático en base al movimiento de la carrocería es limitada. Una segunda consecuencia es que, siendo el movimiento de la carrocería el resultado de la combinación de esfuerzos en cuatro neumáticos, parece difícil, en cuanto a la observabilidad, estimar los esfuerzos en cada uno de ellos por separado.

4.3.3 Estimación de estados

Cabe preguntarse entonces cómo estimar estos esfuerzos de manera que, aunque el modelo de neumático no sea el adecuado, se corrija el comportamiento del vehículo. Se trata pues de buscar otras variables existentes en el modelo, que sean medibles en la realidad y que hagan observables los esfuerzos en un neumático. Como se exponía anteriormente, la ventaja del modelo CAE completo es que permite observar otros efectos no existentes en los modelos matemáticos simplificados, como los esfuerzos en la timonería, responsables de transmitir precisamente los esfuerzos del neumático a la carrocería.

Los esfuerzos llegan a la carrocería a través de la mangueta, sobre la que gira el cubo en el que se atornilla la rueda. A excepción del par de resistencia a la rodadura y del par provocado por la fuerza longitudinal, todos los esfuerzos pasan por esta articulación y desde la mangueta se reparten a los elementos de la timonería de la suspensión: trapecio, amortiguador y bieleta de dirección. Para una posición del

mecanismo de suspensión y del mecanismo de dirección dada y simulada por el modelo CAE, estos esfuerzos se reparten de manera que se cumple el equilibrio dinámico tridimensional (fuerzas, momentos y aceleraciones lineales y angulares) en todo el conjunto. De esta manera, parece que puede existir una relación unívoca entre la combinación de esfuerzos en el neumático y la combinación de esfuerzos en los elementos de la suspensión. Consecuentemente, la lectura de estos esfuerzos en la suspensión permitiría estimar o corregir los esfuerzos en el neumático de la simulación de manera que la combinación de esfuerzos simulados en la suspensión converja con las medidas. Simplificando el proceso, bastará con identificar aquel o aquellos esfuerzos en la suspensión principalmente relacionados con cada esfuerzo determinado en el neumático.

Por otro lado, es importante destacar que los esfuerzos en el neumático tal y como se mostraban previamente, son calculados por el modelo matemático de neumático incluido en el modelo CAE del vehículo en el punto de contacto del neumático con la calzada y transformados en esfuerzos al punto de articulación de la rueda, es decir, a la mangueta, teniendo en cuenta la disposición tridimensional de la rueda. Por consiguiente, es en este punto donde se puede incluir un esfuerzo virtual paralelo a la rueda y con su reacción en el suelo que complemente el esfuerzo realizado por el neumático para llegar a obtener los mismos esfuerzos en la suspensión, siguiendo la metodología presentada. Si bien los esfuerzos de los neumáticos están expresados según el sistema de coordenadas propio del neumático (tan sólo sometido al ángulo de dirección, siendo el eje vertical siempre ortogonal a la calzada), el esfuerzo virtual sobre la mangueta se expresa en las coordenadas locales de este elemento (sometidas a su guiñada, cabeceo y balanceo coherentes con el movimiento de la carrocería y el de la suspensión). Es por esto que se traduce el esfuerzo realizado por el neumático sobre la mangueta en las mismas coordenadas locales de este elemento (Figura 4.139 a Figura 4.143).

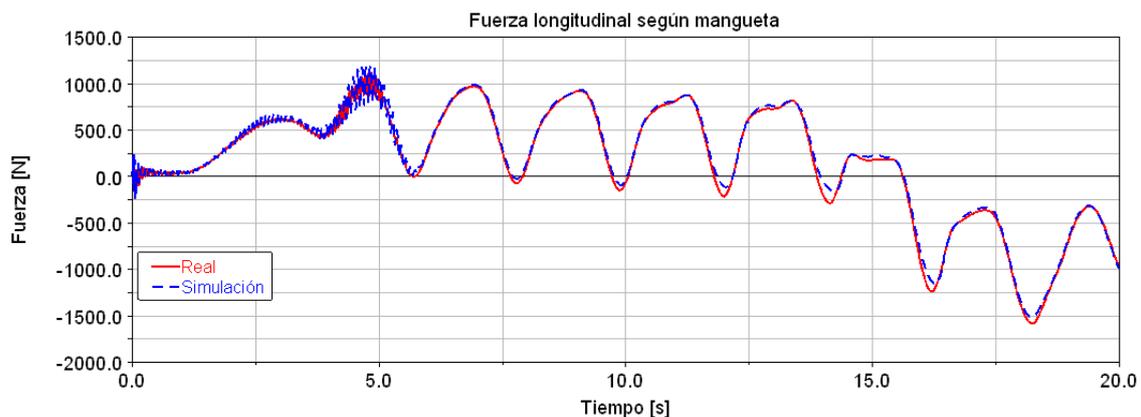


Figura 4.139. Gráfico de la fuerza longitudinal en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.

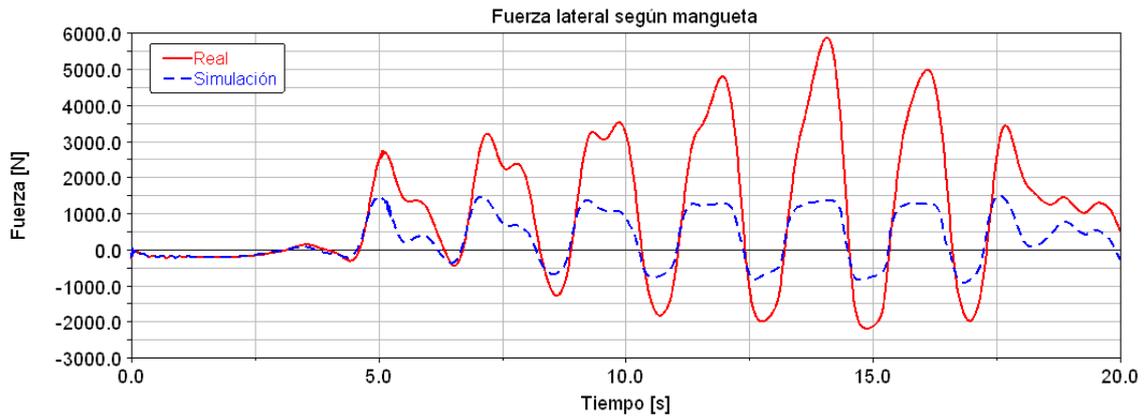


Figura 4.140. Gráfico de la fuerza lateral en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.

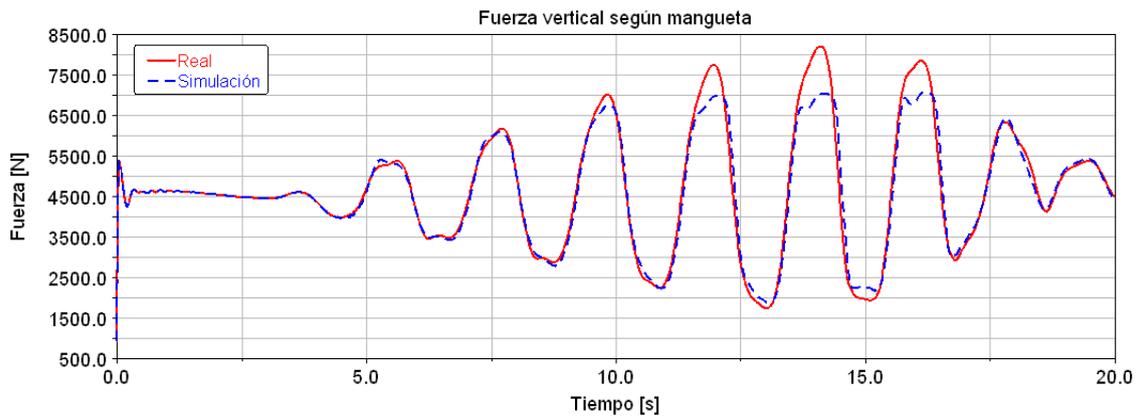


Figura 4.141. Gráfico de la fuerza vertical en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.

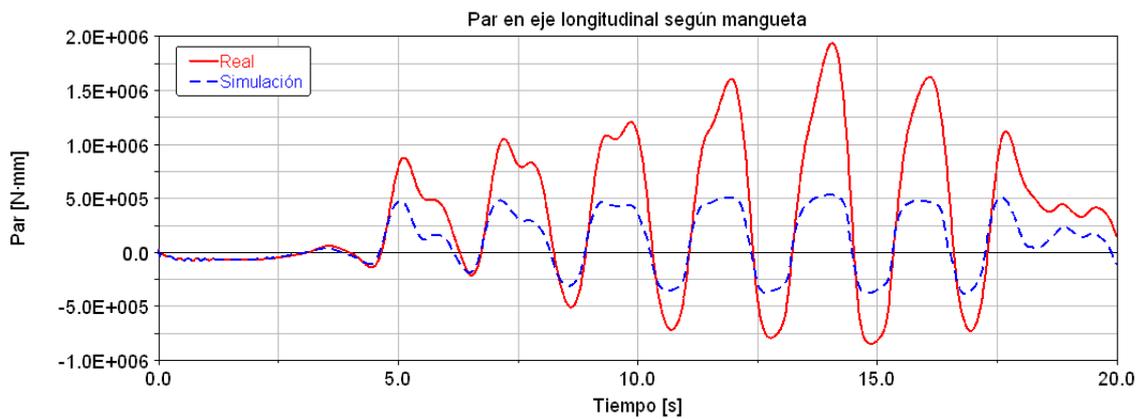


Figura 4.142. Gráfico del par en torno al eje longitudinal en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.

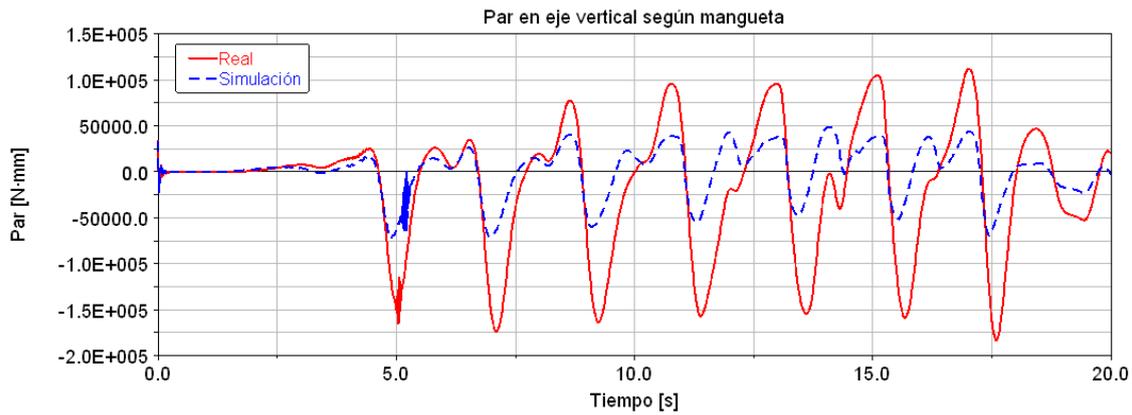


Figura 4.143. Gráfico del par en torno al eje vertical en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.

Puesto que la rueda gira en torno a la mangueta, el par según el eje de giro no se transmite a ésta, sino al palier. Como ya se ha explicado, el par en el palier está impuesto como entrada, por lo que la variación en este caso es mínima y sólo debida a diferencias en la aceleración de los elementos ligados a la transmisión, debidas a su vez al distinto deslizamiento que sufre la rueda en virtud de sus coeficientes de comportamiento distintos (Figura 4.144 y Figura 4.145).

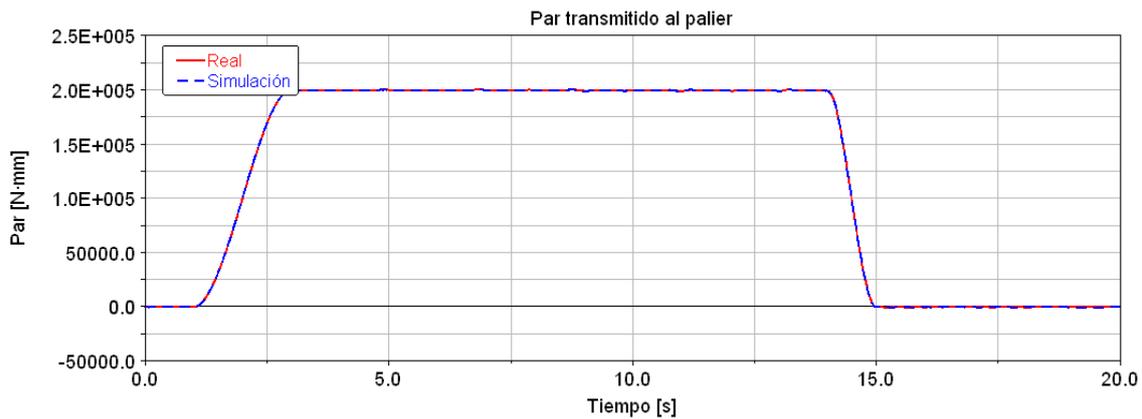


Figura 4.144. Gráfico del par transmitido de la rueda al palier en el sistema real y en la simulación del modelo.

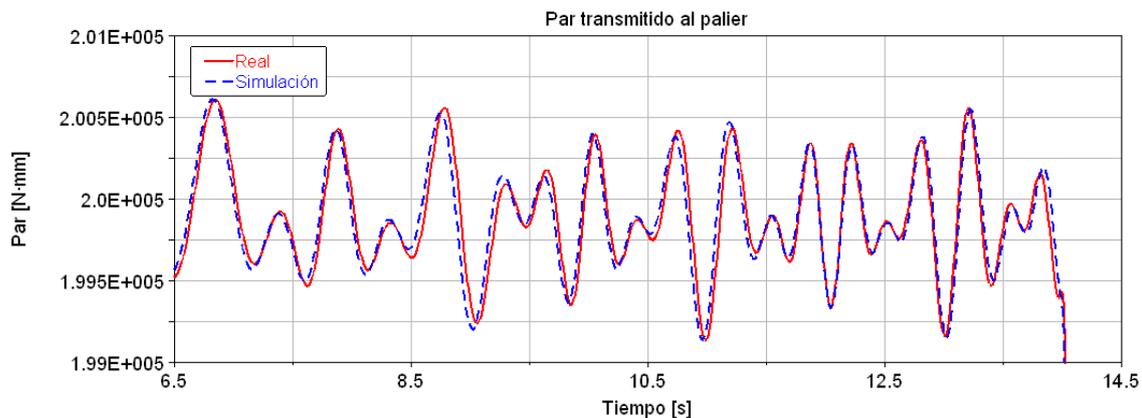


Figura 4.145. Gráfico de detalle del par transmitido de la rueda al palier en el sistema real y en la simulación del modelo.

Por su disposición horizontal y sus articulaciones que no transmiten momentos (salvo los debidos al comportamiento de los *silent-blocks*), el trapecio transmite

principalmente los esfuerzos longitudinal y transversal frente a la fuerza vertical (Figura 4.146). La lectura de estos esfuerzos es técnicamente posible por extensometría en esta pieza. Puesto que la posición de la suspensión es conocida, estos esfuerzos se pueden expresar en los sentidos longitudinal y transversal según la mangueta, de manera que su relación con los esfuerzos longitudinal y lateral transmitidos por el neumático y expresados en este mismo sistema de coordenadas sea unívoca.

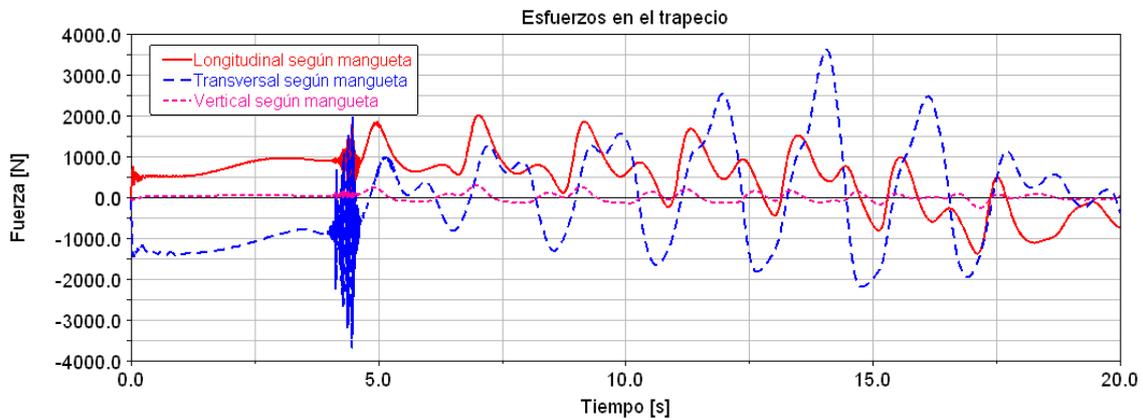


Figura 4.146. Gráfico de esfuerzos en el trapecio en el sistema real según el sistema de coordenadas local de la mangueta.

Aunque la relación entre las fuerzas longitudinales en el trapecio y la mangueta (Figura 4.147) es menos directa que entre las fuerzas laterales (Figura 4.148), esto es debido al efecto del resto de fuerzas y momentos actuantes, por lo que al corregir todos ellos de manera simultánea para obtener el mismo esfuerzo en la mangueta, el esfuerzo en el trapecio también convergerá.

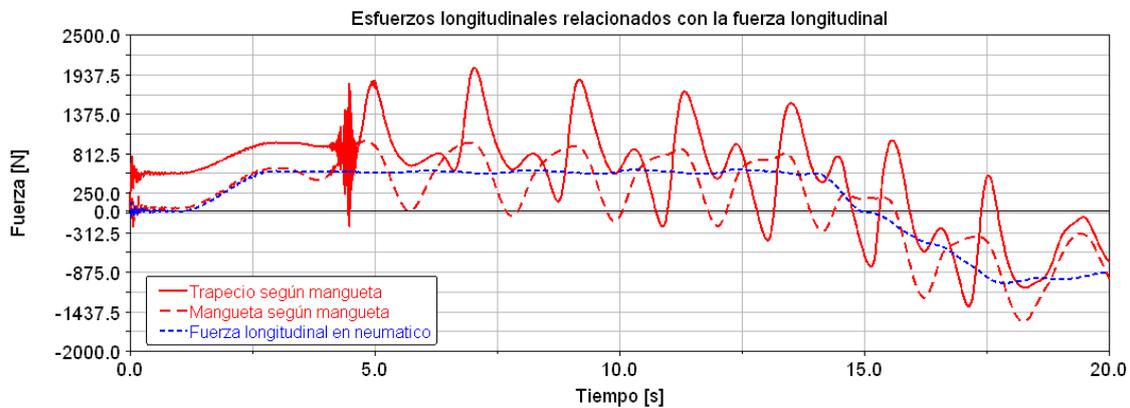


Figura 4.147. Gráfico comparativo de esfuerzos longitudinales en trapecio, mangueta y rueda en el sistema real según el eje de la mangueta, que coincide con el del neumático.

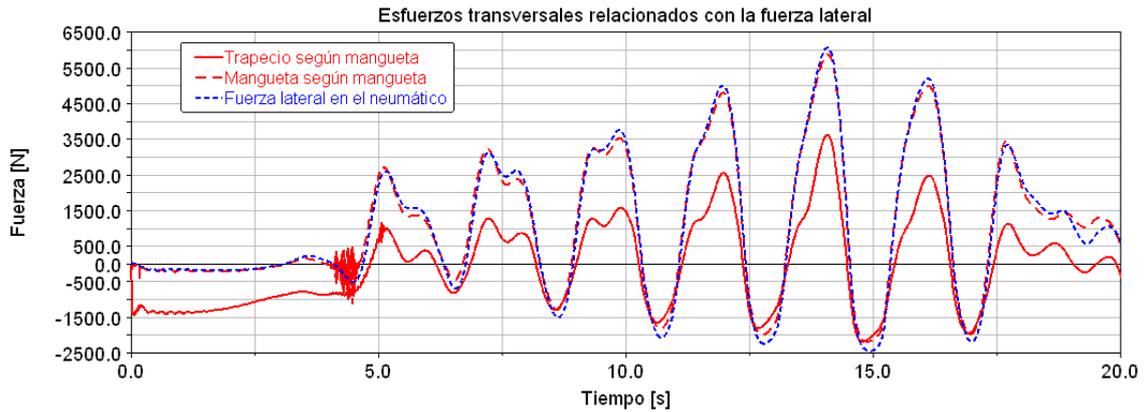


Figura 4.148. Gráfico comparativo de esfuerzos transversales en trapezio, mangueta y rueda en el sistema real según el eje de la mangueta, que coincide con el del neumático.

En cuanto al amortiguador, tiene una capacidad limitada de transmitir esfuerzos horizontales, ya que se dispone casi verticalmente y se ancla a la carrocería a través de un elemento elástico. Por ello, como se ha visto en aplicaciones anteriores, transmite prácticamente la totalidad de los esfuerzos verticales. En este caso, se expresa el esfuerzo que transmite según su propio sistema de coordenadas, siendo la componente normal (axial) la más importante frente a los esfuerzos cortantes perpendiculares entre sí, ya que este elemento trabaja fundamentalmente en compresión (Figura 4.149). La medida del esfuerzo normal en este elemento es realizable por extensometría sobre el tubo del amortiguador.

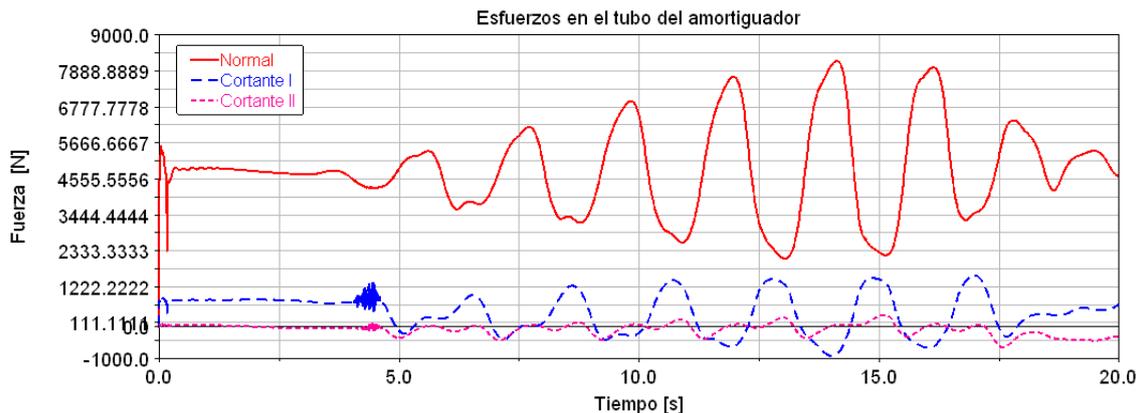


Figura 4.149. Gráfico de esfuerzos en el tubo del amortiguador en el sistema real según su sistema de coordenadas local.

Además, la fuerza vertical transmitida por el neumático a la mangueta tiene una relación muy directa con la fuerza normal transmitida por el tubo del amortiguador (Figura 4.150). Pese a que ambas fuerzas no están expresadas en el mismo sistema de coordenadas, estos elementos están unidos rígidamente, por lo que ambos sistemas de coordenadas se mueven de manera similar.

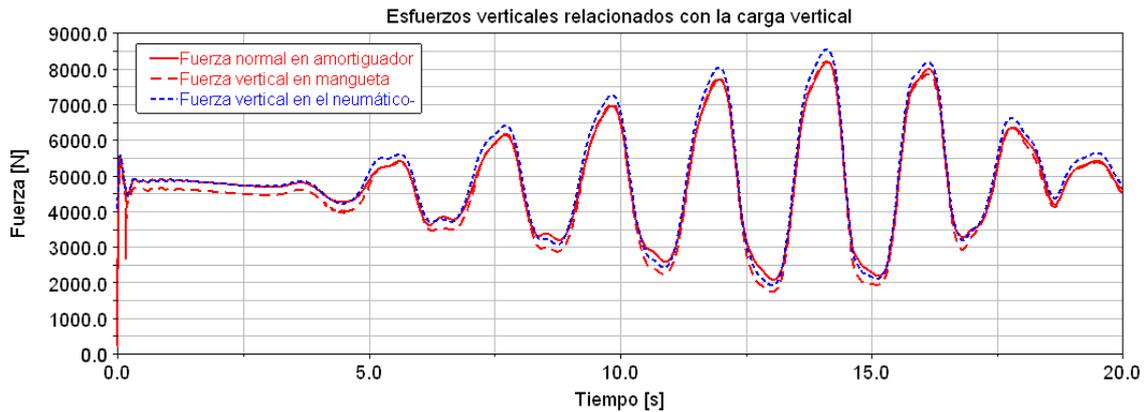


Figura 4.150. Gráfico comparativo del esfuerzo normal en el tubo del amortiguador, la fuerza vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local y la fuerza vertical en el neumático en el sistema real.

Por último, la bieleta, por estar articulada entre dos rótulas esféricas, tan sólo es capaz de transmitir esfuerzos normales. Y por su disposición casi ortogonal (variable en función de la disposición de los mecanismos de la suspensión y de dirección) al plano de la rueda, este esfuerzo se corresponde fundamentalmente a la fuerza lateral y, particularmente, al par autoalineante del neumático, ya que está desplazada respecto de su eje de giro sobre el que se orienta la rueda definido por la mangueta (Figura 4.151). Por tanto, una vez corregida la fuerza lateral, se podrá corregir el par autoalineante para que la medida del esfuerzo normal en la bieleta se corresponda con la realidad. Esta medida también se puede realizar por extensometría.

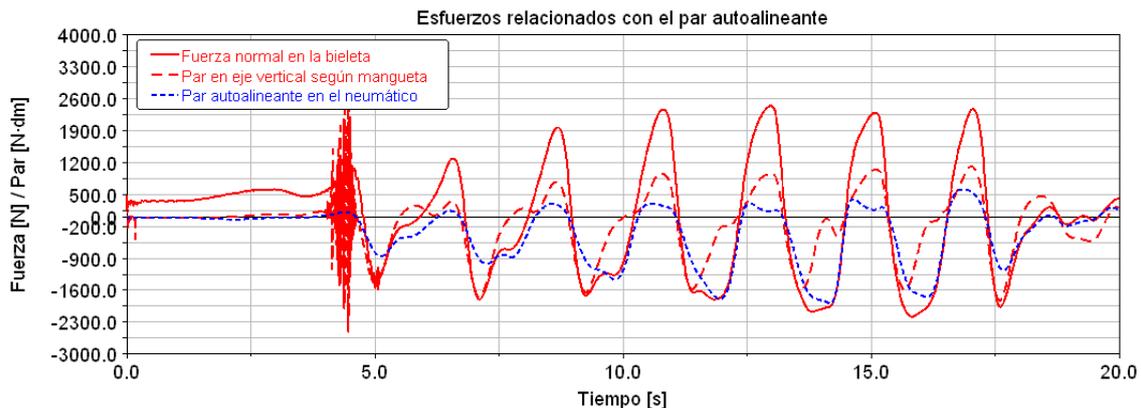


Figura 4.151. Gráfico comparativo del esfuerzo normal en la bieleta de dirección, el par en torno al eje vertical local de la mangueta y el par autoalineante en el neumático en el sistema real.

En cuanto al par en torno al eje de giro de la rueda, es debido la combinación de dos efectos: una componente debida a la fuerza longitudinal y otra componente debida a la resistencia a la rodadura. Puesto que fuerza longitudinal esta desplazada respecto del eje de giro y está en un plano perpendicular a éste, provoca el par que se opone o bien al par que llega del palier (en el caso de tracción) o bien al par que llega del freno (en el caso de frenado). Por otro lado, la fuerza vertical es el resultado de la presión sobre la superficie de contacto, cuya integral generalmente no está en el plano vertical que pasa por el eje de giro, por lo que también provoca un par que se opone a la rodadura en tracción (puesto que la huella se desplaza hacia delante) pero que la favorece en frenado (puesto que el neumático tiende a deslizar sobre la calzada y la huella se desplaza hacia atrás). Dado que la fuerza longitudinal se estima a partir de los esfuerzos en el trapecio, tan sólo queda por corregir la componente debida a la resistencia a la rodadura, que tiene influencia sobre la velocidad de giro de la rueda, sobre el par en el palier y sobre la

velocidad del vehículo. En la realidad el conductor actúa sobre el acelerador, lo que marca un punto de trabajo del motor y, según la velocidad de giro del mismo y otros parámetros, resulta en un determinado par. Quizá en la realidad la resistencia a la rodadura fuera observable con las dos primeras variables, ya que influye sobre ellas. Sin embargo, en la simulación se fija el par en el palier, con lo que el par de reacción en la rueda está fijado, por lo que no resulta observable con estas variables. Sin embargo, sí tiene una influencia suficiente sobre la velocidad del vehículo, puesto que se trata de energía mecánica que se produce en el motor y se transmite por el palier pero que no llega a la calzada, sino que se disipa. Estos criterios son difíciles de aseverar *a priori*, siendo necesario probar la observabilidad con todos ellos para llegar a la conclusión precedente. El hecho de utilizar una variable global del vehículo y no propia de la rueda estudiada limitará la extensión de la estimación a todos los neumáticos, puesto que la resistencia a la rodadura en todas las ruedas tiene el mismo efecto en la velocidad del vehículo, lo que imposibilitará repartir la corrección entre todas ellas. En tal caso será necesario establecer algún otro criterio para repartir dicha corrección entre las cuatro ruedas, como usar una proporcionalidad con la carga vertical (causante fundamental de la resistencia a la rodadura). Sin embargo, el efecto de la resistencia a la rodadura de los neumáticos no tiene ningún efecto importante lejos de la velocidad del vehículo y, ajustado el total de la resistencia a la rodadura de todos los neumáticos para reproducir ésta, el comportamiento del vehículo simulado no diferirá de la realidad. En ningún caso es comparable la importancia de este esfuerzo con la del resto de los esfuerzos, determinantes en el comportamiento y control del vehículo.

Pese a que los esfuerzos virtuales se aplican en la articulación de la rueda con la mangueta (técnicamente del cubo, que es el cuerpo que gira sobre la mangueta) según el sistema de coordenadas locales de ésta, se calcula la corrección de las fuerzas del neumático en mismo punto que éstas (en el punto de contacto del neumático con la calzada) y en el mismo sistema de coordenadas (sistema ISO del neumático) para que la estimación de las mismas sea inmediata sumando las fuerzas realizadas por el modelo de neumático erróneo con la corrección en cada dirección. Para su aplicación en la mangueta y en el sistema de coordenadas de ésta, se transforma el vector de fuerzas y el de momentos de un sistema a otro. La suma de estas fuerzas virtuales con los esfuerzos transmitidos por la rueda a la mangueta, ya todos en el sistema de coordenadas locales de la mangueta, permite comprobar que los esfuerzos que llegan al vehículo coinciden. Puesto que coinciden los esfuerzos, coincidirá también la dinámica, por lo que el movimiento del mecanismo de la suspensión será idéntico en la realidad y en la simulación corregida. En consecuencia, el reparto de los esfuerzos que llegan de la mangueta a los elementos de la suspensión ha de ser similar en la realidad y en la simulación corregida, es decir, que las medidas coincidirán. Por otra parte, puesto que los esfuerzos que llegan a la mangueta y por tanto a la carrocería son similares, el movimiento del vehículo ha de converger igualmente. En cuanto a la resistencia a la rodadura, este par se aplica directamente sobre el cubo de la rueda, contrarrestando el par del palier y por tanto regulando la velocidad del vehículo de manera que converja igualmente con la velocidad real.

Esquemáticamente, se consideran las fuerzas (bien del neumático o bien las correcciones) en el punto de contacto del neumático según el sistema de coordenadas ISO, que es perpendicular a la calzada horizontal. Este sistema de coordenadas tan sólo sufre la rotación en torno al eje vertical (z) global, para mantener en eje longitudinal (x) siempre alineado con el neumático al actuar la dirección. El eje transversal (y) se mantiene por tanto horizontal y perpendicular a la orientación del neumático y el eje

vertical (z) coincide con el eje vertical global. Suponiendo un ángulo de caída γ (Figura 4.152), trasladar los esfuerzos ejercidos por el neumático en el punto de contacto (\vec{F} y \vec{M}) al centro de la rueda supone tener en cuenta también los momentos provocados en este punto según la expresión (4.4). Se debe considerar que la resistencia a la rodadura M_y se considera positiva si el sentido de giro es negativo respecto al eje y , por lo que se incluye como $-M_y$.

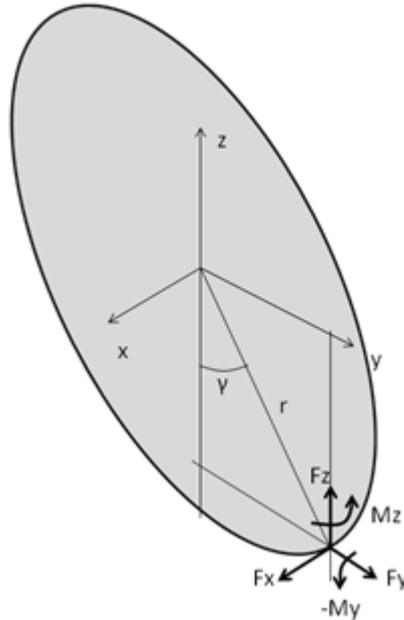


Figura 4.152. Esquema de los esfuerzos en el punto de contacto teórico del neumático con la calzada para su traslación al eje de giro de la rueda sobre la mangueta.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \\ \vec{r} &= 0 \cdot \vec{i} + r \cdot \sin \gamma \cdot \vec{j} - r \cdot \cos \gamma \cdot \vec{k} \\ \vec{M} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & r \cdot \sin \gamma & -r \cdot \cos \gamma \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_z \cdot r \cdot \sin \gamma + F_y \cdot r \cdot \cos \gamma \\ -M_y - F_x \cdot r \cdot \cos \gamma \\ M_z + F_x \cdot r \cdot \sin \gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}; \\ \vec{M} &= M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Se trata entonces de cambiar de sistema de coordenadas estos dos vectores según el sistema de coordenadas local de la mangueta. Se define este sistema de coordenadas por sus rotaciones consecutivas 3-2-1 (ejes z - y - x o guiñada, cabeceo y balanceo). Puesto que la mangueta se orienta (guiñada) junto con la rueda, la primera rotación es nula. A continuación, debido a la posición de todo el mecanismo de suspensión y a la orientación de la carrocería, la mangueta rotará en torno al eje transversal un ángulo ψ independientemente de la rueda, puesto que es precisamente sobre este eje sobre el que la rueda gira libremente respecto a la mangueta. Por último, y de nuevo debido a la suspensión y a la carrocería, la mangueta rotará en torno al eje longitudinal un ángulo ϕ (Figura 4.153). Tomando el vector de esfuerzos en el neumático \vec{F} , expresado en las coordenadas de los esfuerzos del neumático, su expresión en el sistema de coordenadas locales de la mangueta se denota como \vec{F}' (4.5).

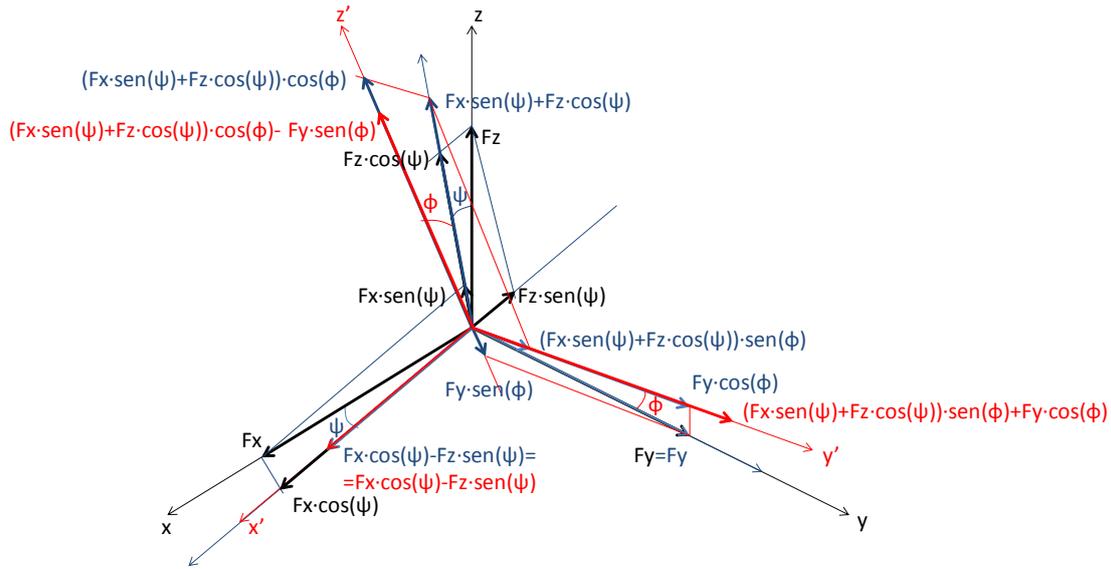


Figura 4.153. Esquema de los sistemas de coordenadas sucesivos desde el sistema de coordenadas del neumático (x-y-z) hasta el sistema de coordenadas de la mangueta (x'-y'-z') teniendo en cuenta su cabeceo primero y su balanceo después.

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F}' = \begin{bmatrix} F_x \cdot \cos\psi - F_z \cdot \sin\psi \\ F_y \cdot \cos\phi + (F_x \cdot \sin\psi + F_z \cdot \cos\psi) \cdot \sin\phi \\ -F_y \cdot \sin\phi + (F_x \cdot \sin\psi + F_z \cdot \cos\psi) \cdot \cos\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix} = F'_x \cdot \vec{i}' + F'_y \cdot \vec{j}' + F'_z \cdot \vec{k}' \quad (4.5)$$

Cabe destacar que aunque la mangueta se incline con la rueda según su ángulo de caída, éste ángulo y el balanceo de la mangueta son muy similares (Figura 4.154) pero no coinciden rigurosamente (Figura 4.155), puesto que no están expresados en un mismo sistema de coordenadas: el ángulo de caída se mide sobre el eje x de la rueda, que es siempre horizontal puesto que la rueda no sufre cabeceo, mientras que el ángulo de balanceo de la mangueta se mide sobre el eje x de ésta, que generalmente no es horizontal porque este sistema de coordenadas locales sufre previamente un cabeceo.

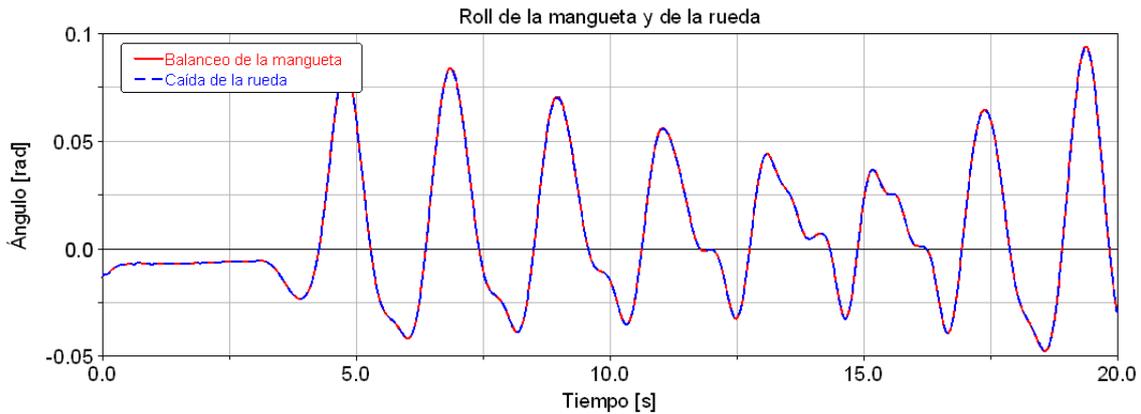


Figura 4.154. Gráfico comparativo del ángulo de balanceo de la mangueta y del ángulo de caída de la rueda.

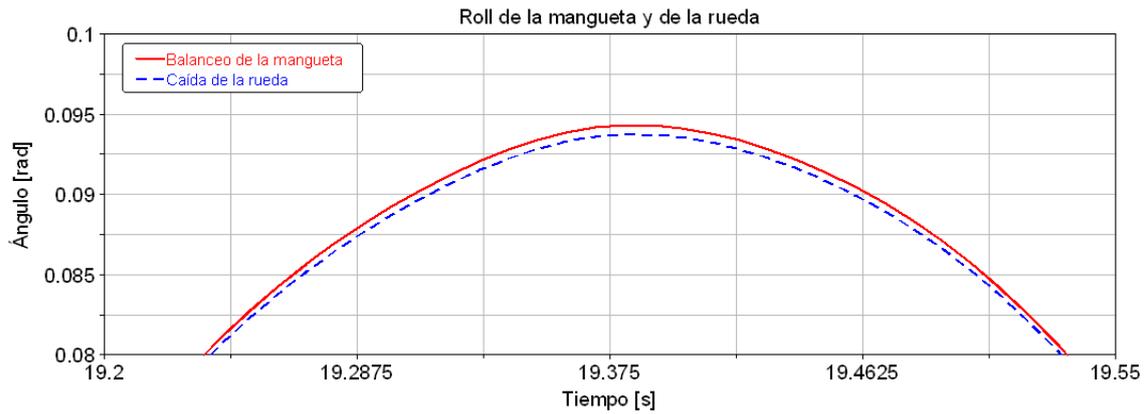


Figura 4.155. Gráfico de detalle del comparativo del ángulo de balanceo de la mangueta y del ángulo de caída de la rueda.

Aplicando esta misma transformación al vector de momentos, se obtienen los esfuerzos vectoriales ejercidos por el neumático y expresados en la articulación con la mangueta en su sistema de coordenadas local, indicados en la expresión (4.6).

$$\vec{F}' = \begin{bmatrix} F_x \cdot \cos\psi - F_z \cdot \sin\psi \\ F_y \cdot \cos\phi + (F_x \cdot \sin\psi + F_z \cdot \cos\psi) \cdot \sin\phi \\ -F_y \cdot \sin\phi + (F_x \cdot \sin\psi + F_z \cdot \cos\psi) \cdot \cos\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix} = F'_x \cdot \vec{i}' + F'_y \cdot \vec{j}' + F'_z \cdot \vec{k}'$$

$$\vec{M}' = \begin{bmatrix} [r \cdot \cos\psi \cdot (F_y \cdot \cos\gamma + F_z \cdot \sin\gamma) - \sin\psi \cdot (M_z - F_x \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ [r \cdot \sin\psi \cdot \sin\phi \cdot (F_y \cdot \cos\gamma + F_z \cdot \sin\gamma) + \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot (M_z - F_x \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ -\cos\phi \cdot (M_y + F_x \cdot r \cdot \cos\gamma) \\ [r \cdot \sin\psi \cdot \cos\phi \cdot (F_y \cdot \cos\gamma + F_z \cdot \sin\gamma) + \cos\psi \cdot \cos\phi \cdot (M_z - F_x \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ +\sin\phi \cdot (M_y + F_x \cdot r \cdot \cos\gamma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix}; \quad (4.6)$$

$$\vec{M}' = M'_x \cdot \vec{i}' + M'_y \cdot \vec{j}' + M'_z \cdot \vec{k}'$$

La misma transformación se puede aplicar a las correcciones de los esfuerzos de los neumáticos en el punto de contacto $(F_x^v, F_y^v, F_z^v, M_y^v, M_z^v)$, que materializan en este caso las excitaciones virtuales, obteniéndose el vector de esfuerzos en la articulación con la mangueta (o con el palier) y en el sistema de coordenadas local de la mangueta $(F_x^{iv}, F_y^{iv}, F_z^{iv}, M_x^{iv}, M_y^{iv}, M_z^{iv})$, según la expresión (4.7).

$$\vec{F}'^v = \begin{bmatrix} F_x^v \cdot \cos\psi - F_z^v \cdot \sin\psi \\ F_y^v \cdot \cos\phi + (F_x^v \cdot \sin\psi + F_z^v \cdot \cos\psi) \cdot \sin\phi \\ -F_y^v \cdot \sin\phi + (F_x^v \cdot \sin\psi + F_z^v \cdot \cos\psi) \cdot \cos\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}'^v = \begin{bmatrix} [r \cdot \cos\psi \cdot (F_y^v \cdot \cos\gamma + F_z^v \cdot \sin\gamma) - \sin\psi \cdot (M_z^v - F_x^v \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ [r \cdot \sin\psi \cdot \sin\phi \cdot (F_y^v \cdot \cos\gamma + F_z^v \cdot \sin\gamma) + \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot (M_z^v - F_x^v \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ +\cos\phi \cdot (M_y^v - F_x^v \cdot r \cdot \cos\gamma) \\ [r \cdot \sin\psi \cdot \cos\phi \cdot (F_y^v \cdot \cos\gamma + F_z^v \cdot \sin\gamma) + \cos\psi \cdot \cos\phi \cdot (M_z^v - F_x^v \cdot r \cdot \sin\gamma)] \\ -\sin\phi \cdot (M_y^v - F_x^v \cdot r \cdot \cos\gamma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix}; \quad (4.7)$$

El cálculo de las correcciones se realiza aplicando un observador proporcional (mismo fundamento que el Observador Luenberger) a cada una de ellas sobre el error de la medida correspondiente (4.8). Se elimina la componente integral por simplificar la implementación y porque los resultados son satisfactorios tan sólo con la componente proporcional.

$$\begin{aligned}
 F_x^v &= K_{F_x} \cdot (F_x^{trap} - \hat{F}_x^{trap}) \\
 F_y^v &= K_{F_y} \cdot (F_y^{trap} - \hat{F}_y^{trap}) \\
 F_z^v &= K_{F_z} \cdot (F_n^{tubo} - \hat{F}_n^{tubo}) \\
 M_y^v &= K_{M_y} \cdot (v_x - \hat{v}_x) \\
 M_z^v &= K_{M_z} \cdot (F_n^{bieleta} - \hat{F}_n^{bieleta})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Donde:

- F_x^{trap} : Medida de la fuerza en el trapecio en el eje x de la mangueta.
- \hat{F}_x^{trap} : Fuerza en el trapecio en el eje x de la mangueta en la simulación corregida.
- F_y^{trap} : Medida de la fuerza en el trapecio en el eje y de la mangueta.
- \hat{F}_y^{trap} : Fuerza en el trapecio en el eje y de la mangueta en la simulación corregida.
- F_n^{tubo} : Medida de la fuerza normal en el tubo del amortiguador.
- \hat{F}_n^{tubo} : Fuerza normal en el tubo del amortiguador en la simulación corregida.
- v_x : Medida de la velocidad longitudinal del vehículo.
- \hat{v}_x : Velocidad longitudinal del vehículo en la simulación corregida.
- $F_n^{bieleta}$: Medida de la fuerza normal en la bieleta.
- $\hat{F}_n^{bieleta}$: Fuerza normal en la bieleta en la simulación corregida.
- $K_{F_x}, K_{F_y}, K_{F_z}, K_{M_y}, K_{M_z}$: Constantes de proporción para el observador de cada una de las correcciones.

Tras algunas iteraciones, se encuentra un resultado satisfactorio con la combinación de constantes de proporción para las correcciones mostrada en la expresión (4.9).

$$\begin{aligned}
 K_{F_x} &= 1 \\
 K_{F_y} &= 30 \\
 K_{F_z} &= 1 \\
 K_{M_y} &= 4.000 \\
 K_{M_z} &= 2.800
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Con todo lo anterior, la estimación de los esfuerzos en el neumático resulta exitosa. En la Figura 4.156 se muestra que la fuerza longitudinal del neumático estimada se acerca más a la fuerza real que la fuerza calculada en la simulación, aunque el error (Figura 4.157) es relativamente elevado debido a la imposición del par en el palier.

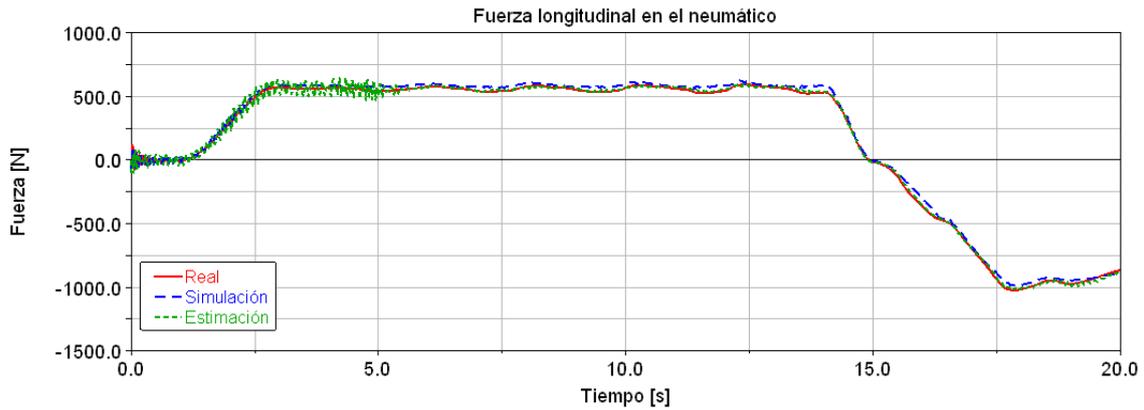


Figura 4.156. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

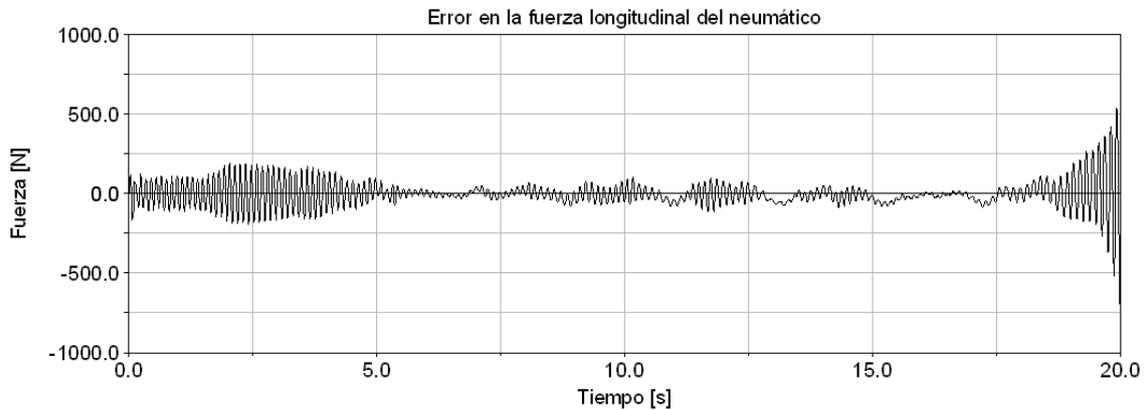


Figura 4.157. Gráfico del error en la estimación de la fuerza longitudinal del neumático delantero derecho.

En la Figura 4.158 se muestra que la fuerza lateral del neumático estimada converge con la fuerza real con un error máximo de 125N (Figura 4.159), un 2% de su valor en el mismo instante (6.000N).

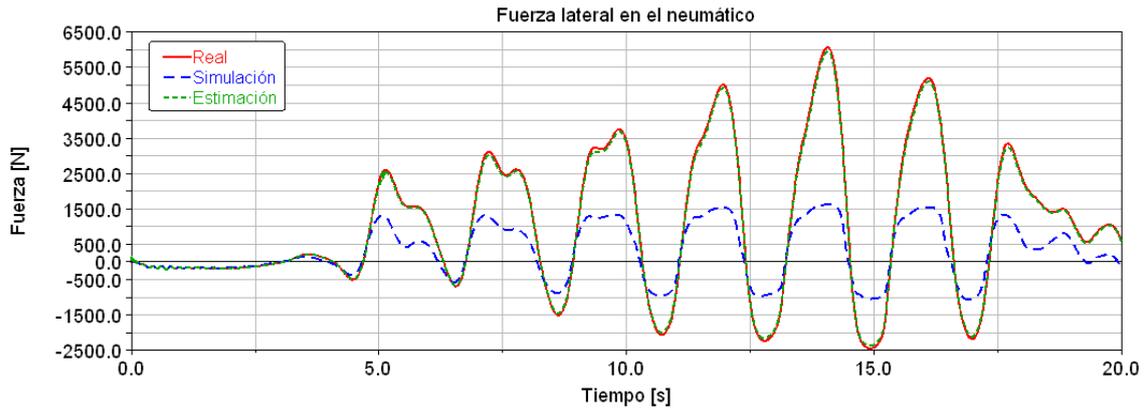


Figura 4.158. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

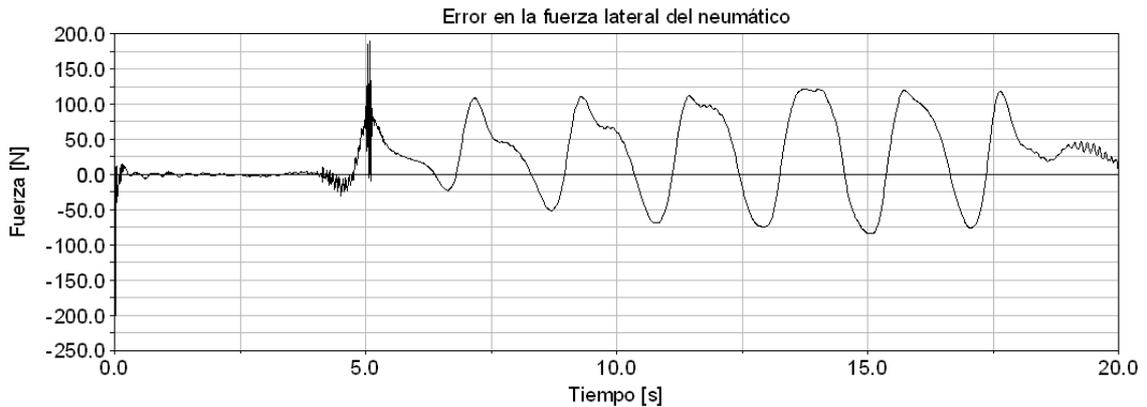


Figura 4.159. Gráfico del error en la estimación de la fuerza lateral del neumático delantero derecho.

En la Figura 4.160 se muestra que la fuerza vertical del neumático estimada converge con la fuerza real con un error máximo de unos 100N (Figura 4.159), un 1,2% de su máximo (unos 8.500N). El error en los primeros instantes, cuando el vehículo alcanza el equilibrio estático, no se tiene en cuenta, aunque no es excesivamente elevado.

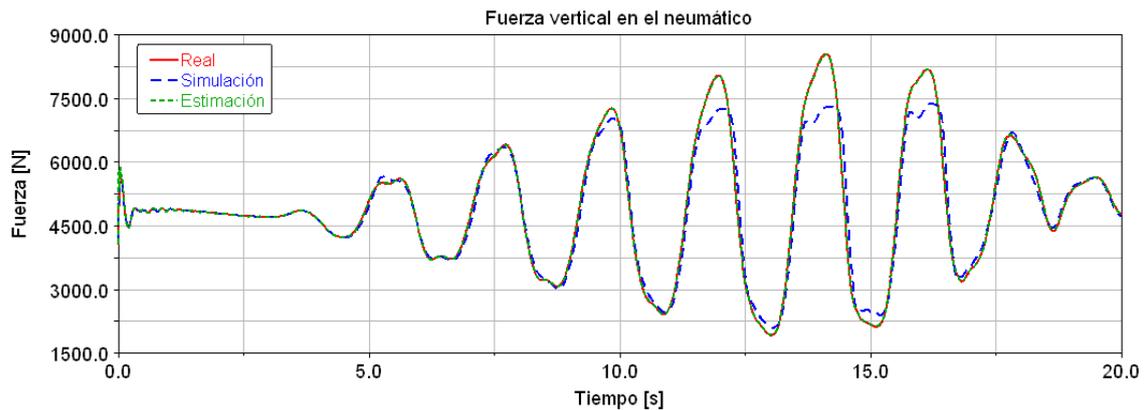


Figura 4.160. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

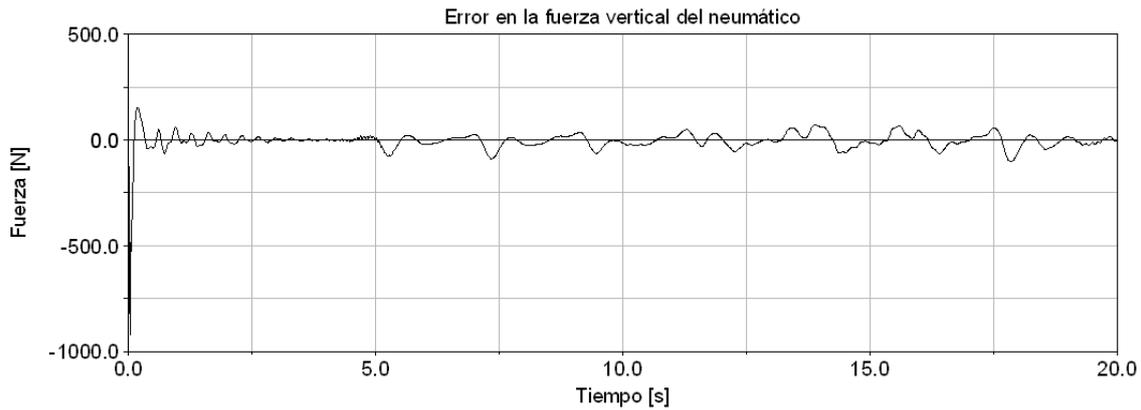


Figura 4.161. Gráfico del error en la estimación de la fuerza vertical del neumático delantero derecho.

En la Figura 4.162 se muestra que el par resistente a la rodadura del neumático estimado converge con el par real con un error relativamente elevado, que llega a los 9.000N·mm (Figura 4.163), un 30% de su máximo (unos 30.000N·mm). En este caso, al igual en la estimación de la fuerza longitudinal, penaliza el hecho de fijar el par en el palier. Pese a esto, la estimación corrige la simulación, mucho más alejada del par resistente a la rodadura real.

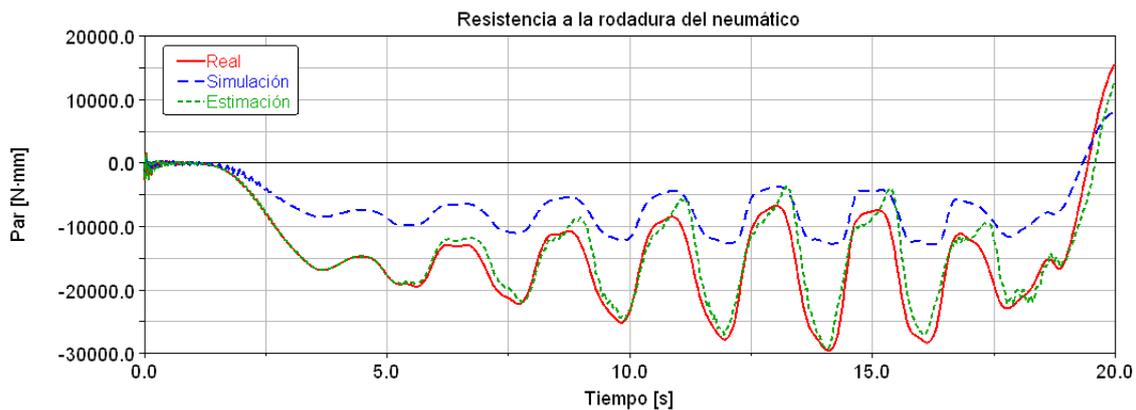


Figura 4.162. Gráfico comparativo de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

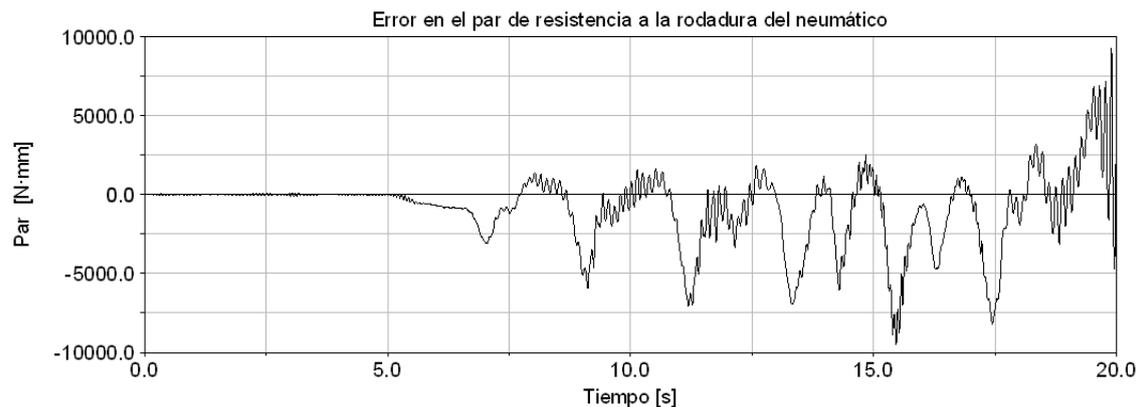


Figura 4.163. Gráfico del error en la estimación del par de resistencia a la rodadura del neumático delantero derecho.

En la Figura 4.164 se muestra que el par autoalineante del neumático estimado converge con el par real con un error máximo de unos 6.000N·mm (Figura 4.165), un 3% de su máximo (unos 190.000N·mm). No se tiene en cuenta el error en los instantes de inestabilidad en torno al segundo 5.

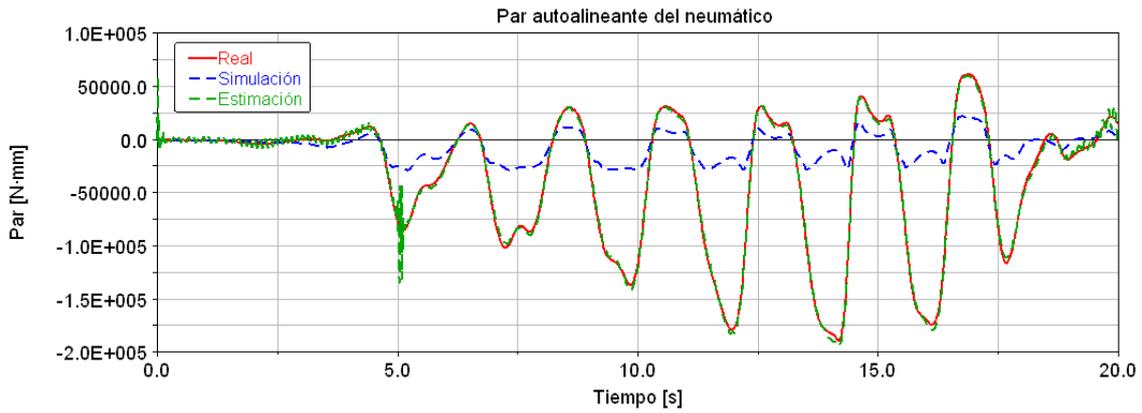


Figura 4.164. Gráfico comparativo del par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

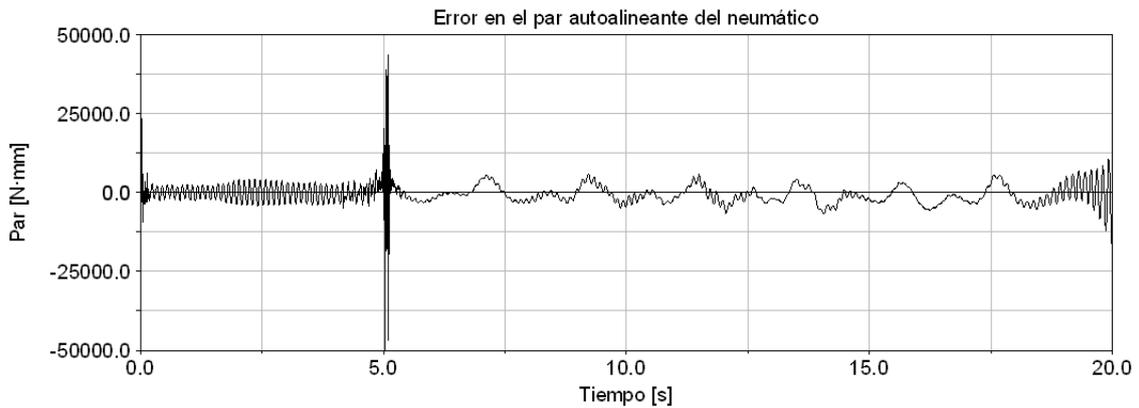


Figura 4.165. Gráfico del error en la estimación del par autoalineante del neumático delantero derecho.

La estimación de los esfuerzos en el neumático converge gracias a que el observador de estados logra hacer converger las salidas con las medidas del sistema real (Figura 4.166 a Figura 4.170).

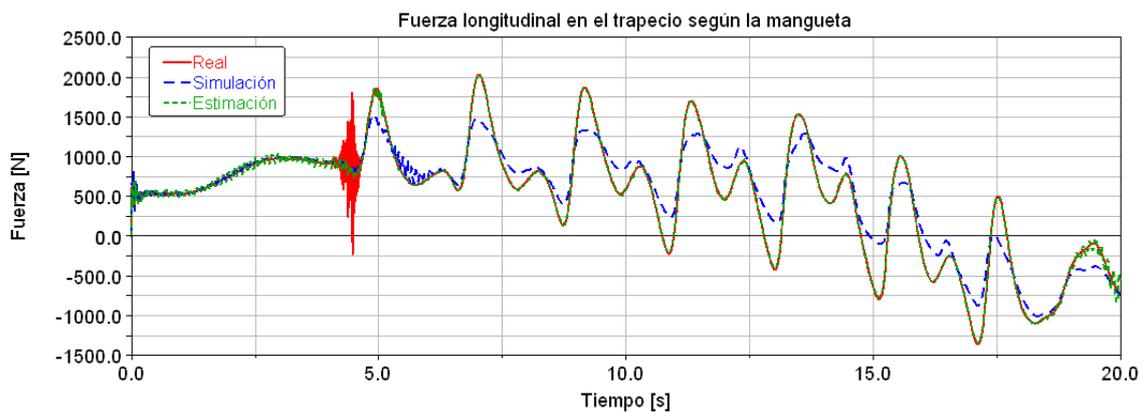


Figura 4.166. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en el trapecio según el sistema de coordenadas local de la mangueta en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

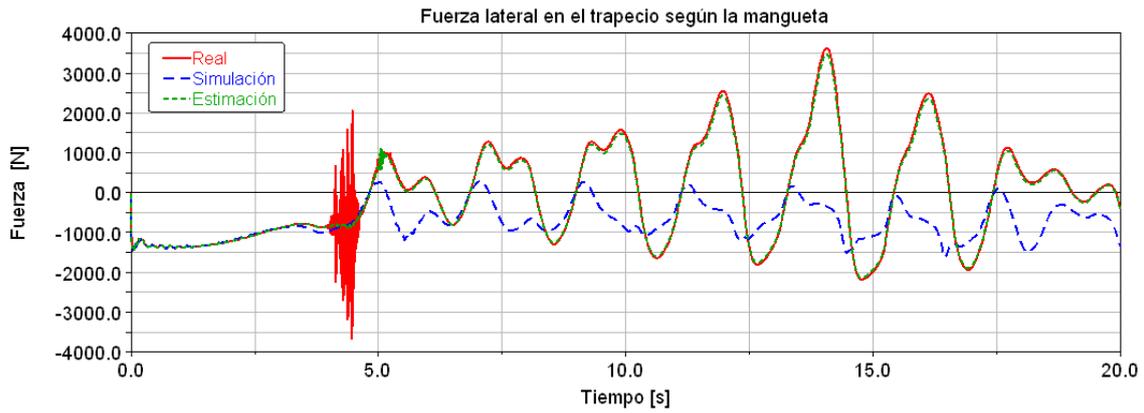


Figura 4.167. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en el trapecio según el sistema de coordenadas local de la mangueta en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

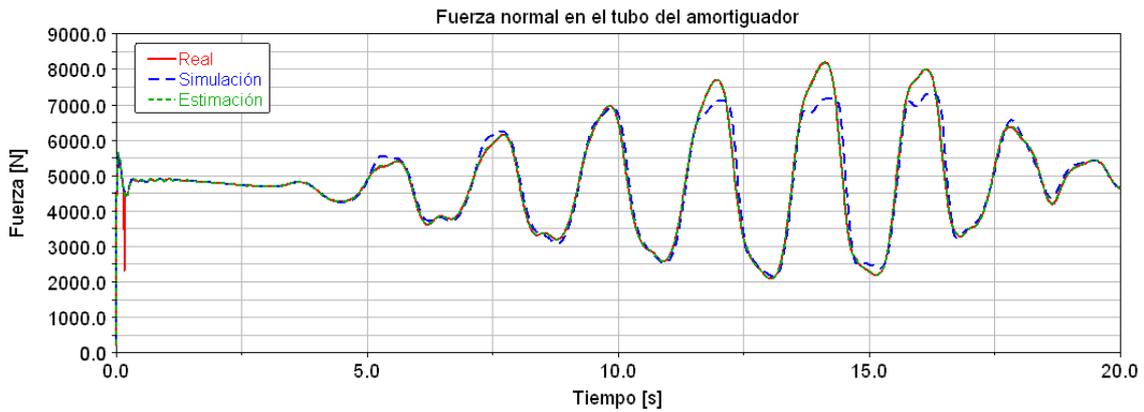


Figura 4.168. Gráfico comparativo de la fuerza normal en el tubo del amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

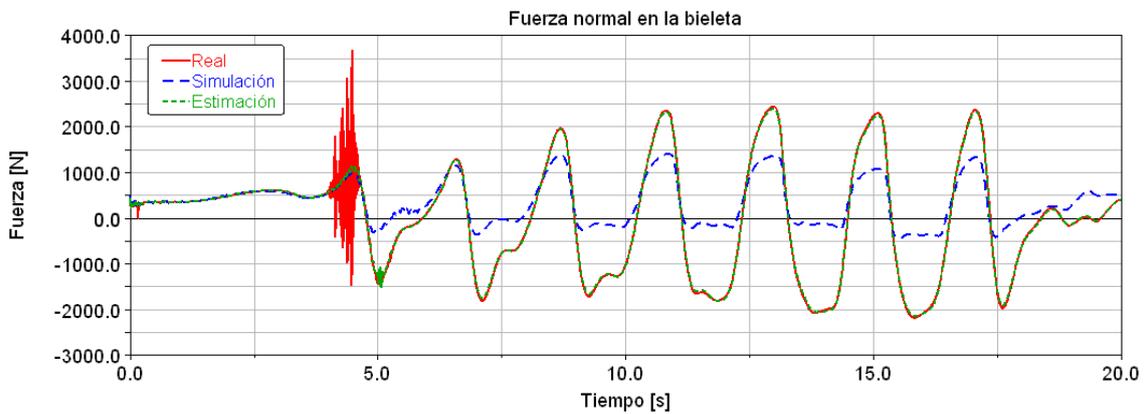


Figura 4.169. Gráfico comparativo de la fuerza normal en la bieleta de dirección en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

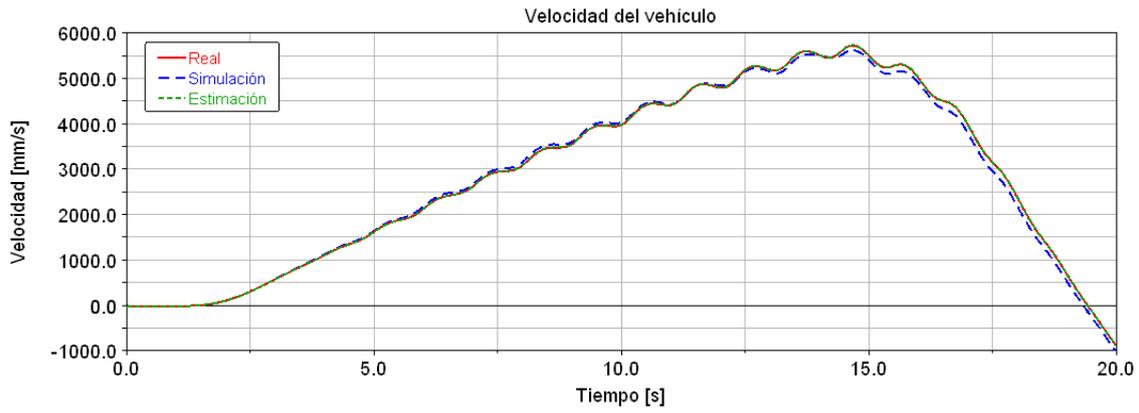


Figura 4.170. Gráfico comparativo de la velocidad del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

Del mismo modo se comprueba que los esfuerzos a través de la articulación de la rueda son semejantes (Figura 4.171 a Figura 4.176).

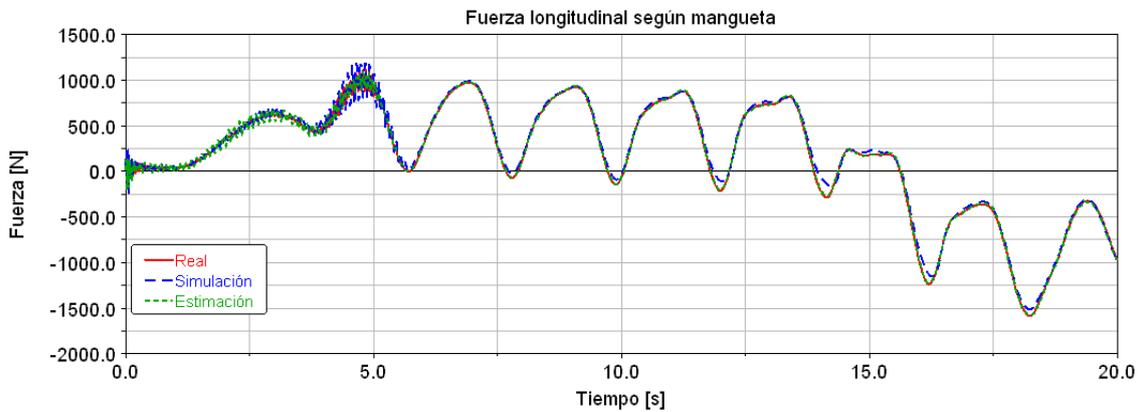


Figura 4.171. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

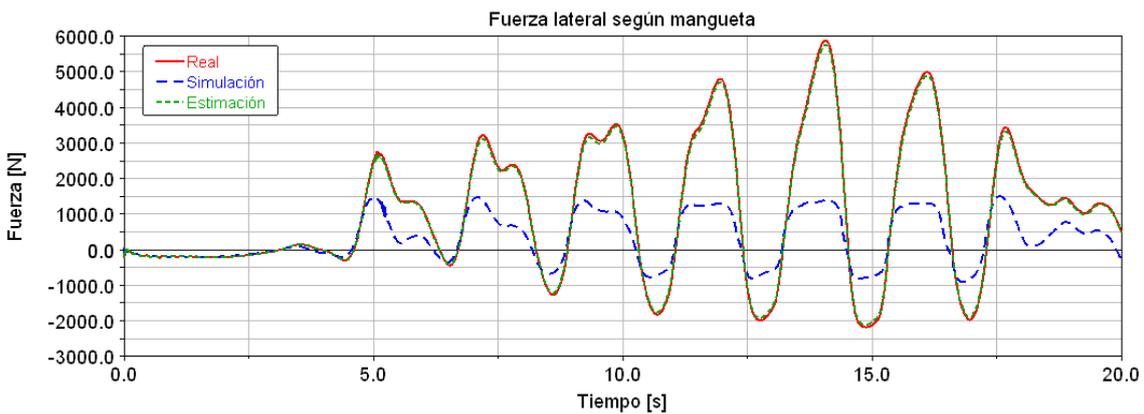


Figura 4.172. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

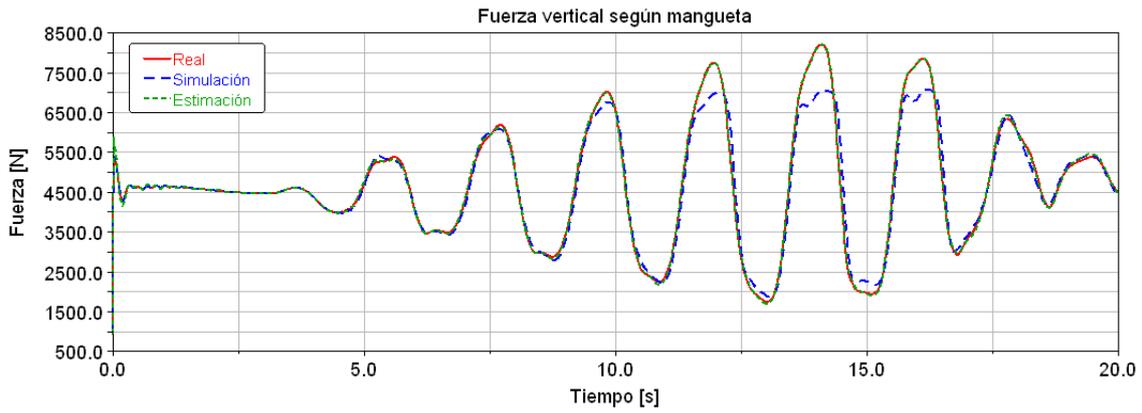


Figura 4.173. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

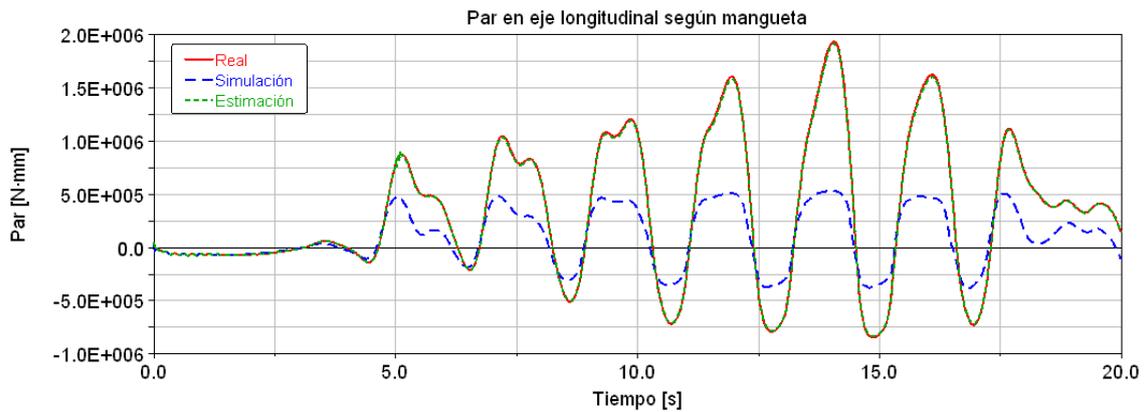


Figura 4.174. Gráfico comparativo del par en torno al eje longitudinal en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

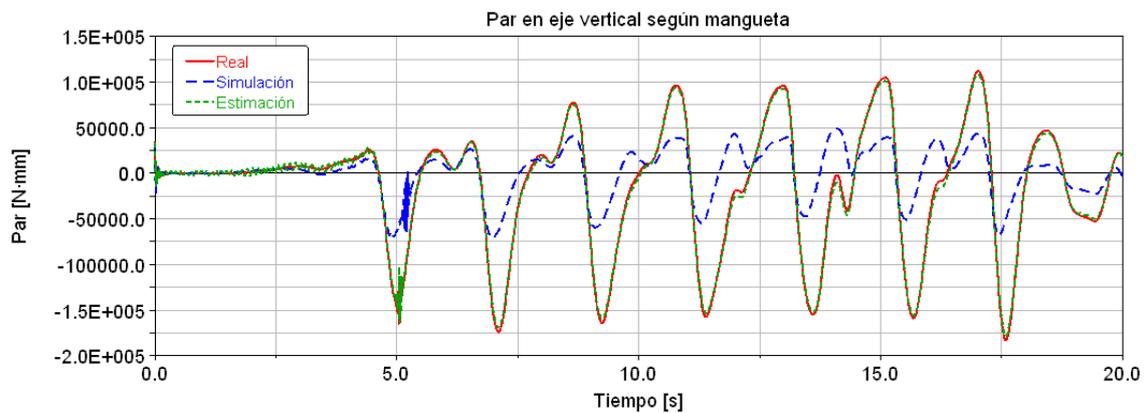


Figura 4.175. Gráfico comparativo del par en torno al eje vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

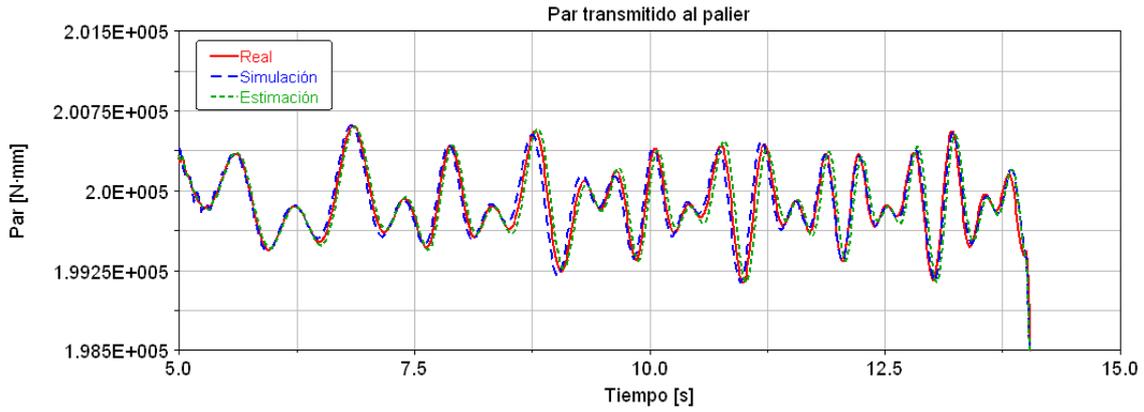


Figura 4.176. Gráfico de detalle del comparativo del par transmitido entre la rueda y el palier en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

Y por último, puesto que los esfuerzos que llegan al resto del vehículo son semejantes, el comportamiento del vehículo, el sistema completo, también se corrige (Figura 4.177 a Figura 4.180).

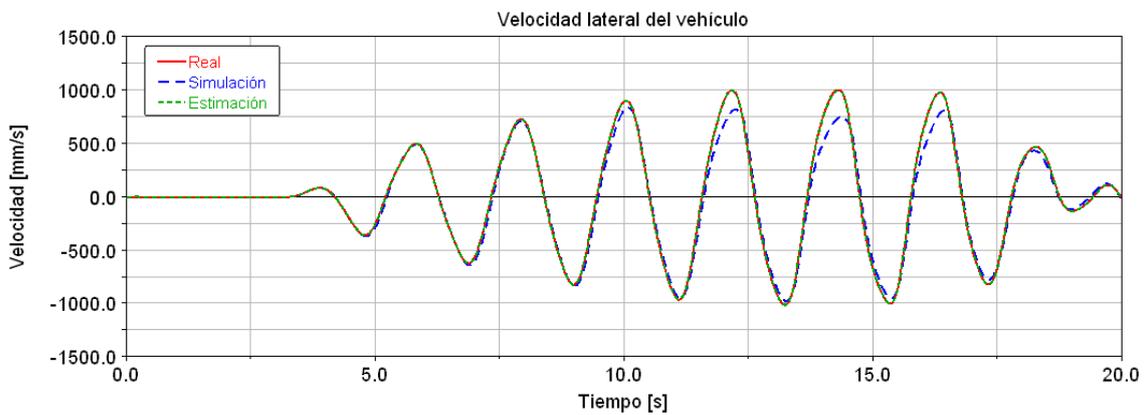


Figura 4.177. Gráfico comparativo de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

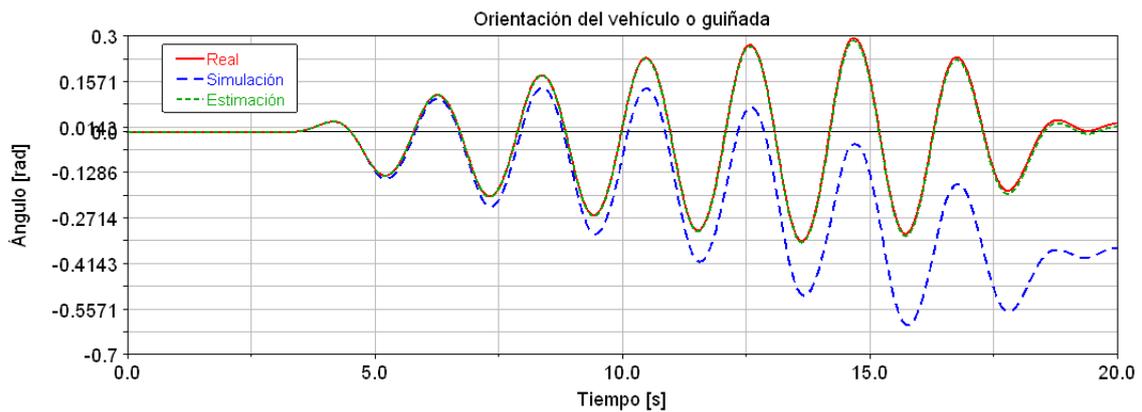


Figura 4.178. Gráfico comparativo de la guiñada del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

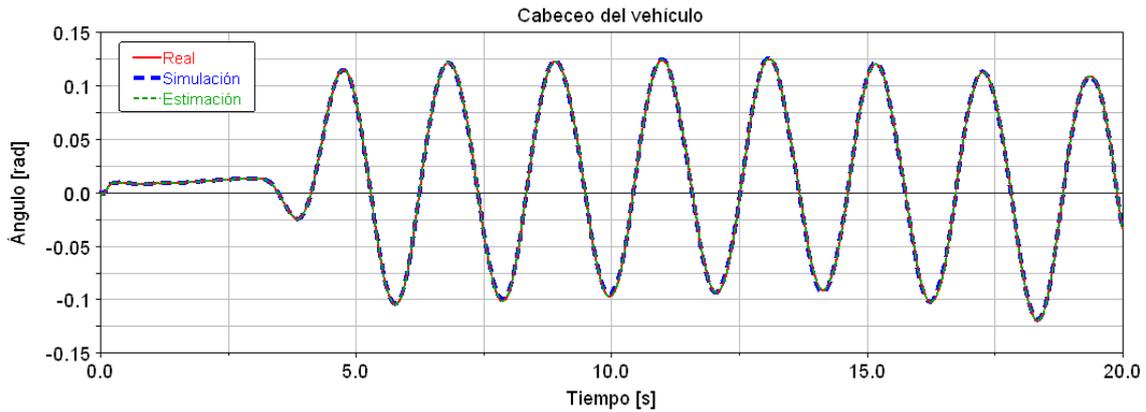


Figura 4.179. Gráfico comparativo del cabeceo del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

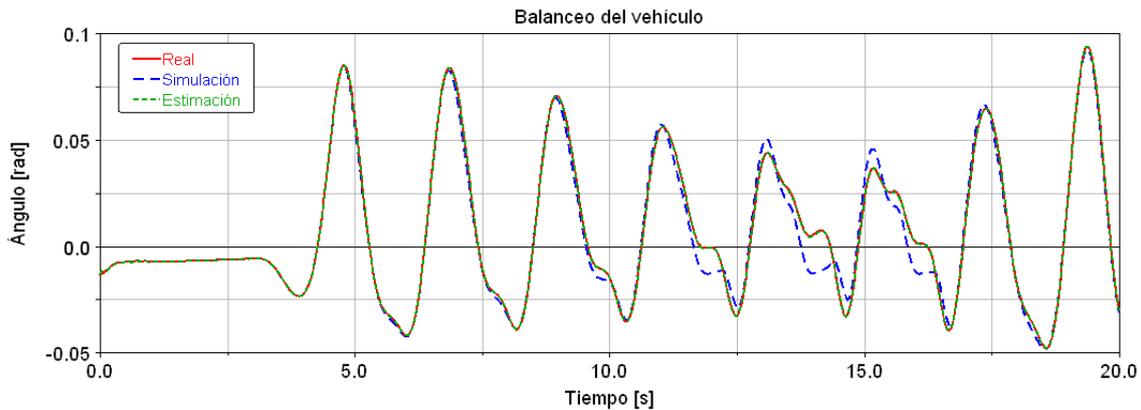


Figura 4.180. Gráfico comparativo del balanceo del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.

4.3.4 Conclusiones

En este caso no se ha aplicado ruido a las medidas dada la relevancia de la aplicación: se pretende demostrar que esta técnica es apta para la estimación de los esfuerzos en un neumático. Se excluye el ruido para no perturbar la claridad de esta conclusión especialmente cuando ya se ha demostrado en las aplicaciones anteriores que el observador de estados no es efectivo en la eliminación del ruido.

La primera limitación de esta aplicación es la citada anteriormente sobre la estimación del par resistente a la rodadura en cuatro ruedas con la única medida de la velocidad del vehículo, ya que resultaría necesario aplicar algún otro criterio para repartir la corrección necesaria para hacer converger la velocidad del vehículo entre los cuatro estados a estimar. Sin embargo, como también se ha explicado, este esfuerzo en el neumático no cobra actualmente gran interés por su despreciable efecto sobre la dinámica del vehículo.

La segunda limitación que cabe destacar es la relativa dificultad tecnológica en la medición de esfuerzos en los elementos de la suspensión. Si bien es una técnica muy avanzada y aplicada en la ingeniería, cada caso requiere un estudio pormenorizado de resistencia de materiales y análisis de los resultados. Como precedente, el grupo de investigación en el que se presenta esta Tesis ya realizó la medición del esfuerzo normal en la bieleta por extensometría (Figura 4.181) para la estimación del par autoalineante mediante redes neuronales (Luque, 2013). Por otro lado, si bien la instalación *a posteriori* puede resultar complicada en la práctica, si la presente técnica fuera aplicada

de manera industrial en los vehículos, esta técnica podría ser implementada en la fabricación de los componentes y éstos calibrados previamente a su montaje (de manera similar a las células de carga).



Figura 4.181. Instrumentación de la bieleta de dirección por extensometría para la medición de la fuerza normal (Luque, 2013).

5 Conclusiones

La estimación de estados es una técnica que permite mejorar el control de los sistemas dinámicos. Esta técnica se basa en calcular el valor de las variables de estado, que no pueden ser medidas en el sistema real, para realimentar su valor sobre la regulación del sistema de manera que su gobierno sea más eficaz. La estimación de estados se materializa en el algoritmo denominado observador de estados, que parte de los valores temporales de las variables de entrada y de salida medidas en el sistema real y, en base al modelo del sistema, calcula los valores de las variables de estado compatibles con ellos. El modelo del sistema es, por tanto, quien establece las relaciones entre las variables.

Actualmente, los modelos utilizados por la estimación de estados son matemáticos, donde las relaciones entre las variables se expresan con lenguaje matemático, lo que facilita la implementación del observador de estados, que también está expresado en lenguaje matemático. En el caso de sistemas complejos, el planteamiento de la formulación matemática se convierte en un trabajo arduo. Además, cuando se trata de la estimación de estados, la formulación debe ser compatible con la integración del observador de estado. Esto hace que los modelos matemáticos utilizados en estimación de estados impliquen grandes simplificaciones que limitan el conocimiento que se obtiene del sistema real.

Por otro lado existen los modelos CAE (modelos creados en software de ingeniería asistida por ordenador), ampliamente utilizados para el desarrollo, simulación, análisis, optimización y control de los sistemas. Una de las principales ventajas de estos modelos es la facilidad y flexibilidad para su creación y modificación, lo que permite la modelización de sistemas complejos manteniendo la fidelidad con el sistema real. Sin embargo, la utilización de modelos CAE para la estimación de estado aún no ha sido publicada.

La aplicación de las técnicas de control en dinámica vehicular, campo de la ingeniería que estudia los vehículos terrestres como sistemas multicuerpo, persigue el objetivo principal de aumentar la seguridad activa de los vehículos, haciendo la conducción más sencilla y evitando la pérdida de control de los mismos. Dada la gran importancia social de los vehículos desde mediados del siglo XX, el control en dinámica vehicular tiene una gran relevancia, y, por extensión, la estimación de estados en este campo. Paralelamente, el vehículo como sistema multicuerpo es extraordinariamente complejo en cuanto al gran número de cuerpos rígidos y flexibles que interactúan en el tiempo y en el espacio a través de relaciones altamente no lineales. Es por ello que la dinámica vehicular es un campo fundamental de la ingeniería asistida por ordenador y los modelos CAE son utilizados de manera extensiva para modelizar el comportamiento de los vehículos.

A pesar del interés de la estimación de estados en las técnicas de control de sistemas dinámicos y de las ventajas del uso de modelos CAE en lugar de modelos matemáticos, la estimación de estados sobre modelos CAE aún no ha sido publicada. Además, la aplicación de la estimación de estados sobre modelos CAE a la dinámica vehicular es particularmente interesante dada la relevancia social del control de los vehículos terrestres, que repercute directamente en la seguridad, y su complejidad como sistemas dinámicos multicuerpo, que requiere el uso de modelos igualmente complejos.

Se ha presentado una primera metodología para la estimación de estados sobre modelos CAE que mantiene los fundamentos conceptuales y de funcionamiento de la

estimación de estados tal y como se ha planteado hasta el momento sobre modelos matemáticos y los extiende a los modelos CAE.

En lugar de alterar la formulación del modelo introduciendo correcciones directamente en el cálculo de los estados, como hacen los observadores de estados sobre modelos matemáticos, la metodología presentada propone dirigir o conducir el sistema gracias a excitaciones virtuales, coherentes con la dinámica del sistema y con significado físico, de manera que el valor de las variables salida de la simulación converja con el valor de las variables correspondientes medidas en el sistema real, siendo estas excitaciones virtuales las correcciones del sistema. Al igual que en la estimación de estados actual, se admite que si las variables de salida calculadas sobre el modelo convergen con su valor medido en la realidad, entonces el valor correspondiente de las variables de estado calculado sobre el modelo es una buena estimación de su valor real.

La primera de las ventajas que derivan de esta metodología es la mayor facilidad a la hora de crear el modelo del sistema real, puesto que se evita el planteamiento explícito del modelo mediante lenguaje matemático. Se utiliza la potencia y flexibilidad del software de ingeniería asistida por ordenador que, a través de su interface gráfica de usuario y sus librerías de datos, facilita la labor de creación y modificación del modelo. Esta labor permite ahorrar costes y tiempo.

La segunda de las ventajas, que en parte es consecuencia de la primera, es que la realización de modelos más complejos y, por tanto, más completos y fieles a la realidad es factible técnica y económicamente. En la estimación de estados sobre modelos matemáticos es necesario que la formulación del modelo sea compatible con la formulación del observador de estados, por ejemplo a través de las matrices de la notación espacio-estado en los sistemas lineales o sólo mediante ecuaciones diferenciales (no algebraicas) en los sistemas no lineales para expresar explícitamente sólo las derivadas de aquellas variables de estado cuyas derivadas se calculan. Este hecho obliga a eliminar aquellos efectos que no se pueden incluir en la formulación, por lo que no se obtiene ningún conocimiento de lo que ocurre en el sistema real respecto de dichos efectos y se puede perjudicar la fidelidad de aquellos efectos que sí se calculan. Este factor limitante a la hora de la creación del modelo se elimina, permitiendo obviar menos efectos ciertamente presentes en el sistema real, con la consiguiente ganancia de precisión y conocimiento de los que ocurre en el sistema.

La tercera de las ventajas es que generalmente, al menos en el caso de la dinámica vehicular, siempre existe un modelo CAE independientemente de la estimación de estados. Este modelo se utiliza para la simulación con el objetivo de desarrollar el sistema real, analizarlo, optimizarlo y desarrollar técnicas de control sobre él. Esta metodología permite utilizar también este modelo para la estimación de estados sin necesidad de crear uno nuevo, que además sería matemático, con las desventajas ya expuestas. Esta ventaja permite ahorrar tiempo y costes en el desarrollo e implementación de la estimación de estados.

La cuarta ventaja es que la complejidad de la estimación de estados es prácticamente independiente de la complejidad del modelo. En el caso de un vehículo completo, existen cientos de grados de libertad y sus respectivas restricciones, pero la dificultad de la implementación de la nueva metodología es similar a su aplicación en un sistema unidimensional, como el ejemplo del cuerpo soportado por un muelle. En el caso de modelos matemáticos, la dificultad aumenta de manera cuadrática con el número de grados de libertad (número de variables de estado) del sistema, puesto que es

necesario calcular Jacobianos, plantear matrices de covarianzas de ruidos o matrices de ganancias de todos los estados entre sí. En consecuencia, la estimación de estados es mucho más sencilla, lo que permite llevarla a cabo en sistemas especialmente en sistemas complejos.

La quinta ventaja es que el observador de estados adquiere un significado físico para el sistema. Al contrario que su implementación en modelos matemáticos, donde se trata simplemente de una corrección numérica en las ecuaciones del cálculo de las variables de estado, su implementación en modelos CAE supone que esa corrección se puede traducir en un concepto consistente para el sistema, como el error de una fuerza, por ejemplo. Esto permite obtener conclusiones incluso de la corrección introducida por el observador de estados y no sólo de los variables de estado explícitamente expresadas por la formulación, lo que permite obtener más conocimiento de lo que realmente ocurre en el sistema.

La sexta ventaja es que no se altera la coherencia dinámica del sistema. La corrección numérica de las ecuaciones del sistema en un modelo matemático supone alterar artificiosamente cada una de ellas de manera independiente de las relaciones que las ligaban, es decir, se alteran las relaciones entre las variables del sistema, lo que significa que se altera la dinámica del sistema (por ejemplo, una velocidad puede dejar de ser la derivada de una posición porque se le suma una corrección calculada sin tener en cuenta dicha relación). Por el contrario, el modelo CAE mantiene siempre la coherencia dinámica del sistema original, ya que las ecuaciones son resueltas internamente según los principios que rigen su naturaleza (como la Segunda Ley de Newton en los sistemas multicuerpo o la definición de velocidad como derivada de la posición). Consecuentemente, el resto de variables de estado existentes (no sólo aquellas explícitamente expresadas según las ecuaciones del modelo matemático) son coherentes con la corrección introducida por la estimación de estados y su valor también se puede considerar estimado, lo que aumenta el conocimiento del estado real del sistema.

La séptima ventaja es que se pueden corregir distintos errores en el modelo de manera independiente si no están conectados entre sí o corregirlos todos a la vez si existe una interrelación. Como se ve en las aplicaciones presentadas posteriormente, se puede corregir el defecto en una única suspensión o en todas las suspensiones de un vehículo, el defecto en el modelo de un neumático pero no en los demás neumáticos y, de manera simultánea, en todos los esfuerzos generados por este. Esto permite una estrategia modular que facilita la labor de corrección de modelos complejos, comenzando por un defecto, extendiéndolo a otros componentes del sistema después y enfrentándose posteriormente a otro defecto del modelo sin tener que modificar lo anterior o incluso eliminándolo si ya no se considera necesario.

Como desventaja, cabe citar que el diseñador de la estimación de estados necesita un conocimiento y comprensión detallados del sistema real y del modelo para ser capaz de implementar exitosamente esta metodología. Es necesario analizar los potenciales errores del modelo y su efecto sobre el sistema así como las relaciones entre las variables del sistema para introducir la corrección adecuada a partir de las medidas correctas del sistema real. En este caso no es suficiente con aplicar el algoritmo matemático del observador de estados sobre las ecuaciones del sistema, se requiere una labor de análisis y comprensión.

La metodología propuesta se ha aplicado primeramente a un sencillo sistema multicuerpo para ejemplificar los conceptos presentados así como las ventajas. A

continuación se ha aplicado la novedosa metodología a la dinámica vehicular dado el interés de mejorar el control de los vehículos terrestres y la complejidad de los mismos como sistemas multicuerpo, donde el uso de modelos CAE resulta muy ventajoso.

Es especialmente interesante la última de las aplicaciones donde se realiza la estimación de los esfuerzos en un neumático en base a mediciones de los esfuerzos en los elementos de la suspensión. La estimación de estas variables es de gran interés en la dinámica vehicular con el objetivo principal de mejorar los sistemas electrónicos de seguridad activa de los vehículos y actualmente surgen numerosas publicaciones con este objetivo. El hecho de contar con un modelo completo del vehículo, particularmente de la suspensión, permite disponer todos los efectos cinemáticos y dinámicos presentes en el sistema real con el fin de utilizar las variables interesantes en la estimación. Esta aplicación es por tanto una manera novedosa de estimar los esfuerzos en el neumático, un objetivo de gran interés científico-tecnológico actual.

La aplicación sucesiva de esta metodología en dinámica vehicular proveerá de mayor conocimiento sobre lo que ocurre realmente en el vehículo con la consiguiente mejora de los sistemas de control actuales (como los de seguridad activa) y de los futuros (entre los que se encontrarían sistemas de conducción automática).

5.1 Futuras líneas de investigación

Una potencial línea de investigación sobre esta metodología podría ir encaminada en la sistematización de la evaluación de la observabilidad, ya que los criterios establecidos para modelos matemáticos no son aplicables en modelos CAE, puesto que no se dispone de las ecuaciones. En la presente Tesis la evaluación de la observabilidad se basa en el conocimiento y análisis del modelo a través de simulaciones en busca de la influencia de los estados que se pretenden corregir, lo que supone una gran dependencia del diseñador. Por el contrario, se podría investigar un procedimiento que permitiese determinar la medición de qué variables hacen observable unos determinados estados.

Se han aplicado los observadores de estados equivalentes al Observador Proporcional-Integral y al Observador Luenberger por su simplicidad, verificándose, en el primero de los casos, los problemas de filtrado en señales ruidosas ya previamente expuestos en el Estado del Arte. Otra interesante línea de mejora de la presente metodología es la aplicación de observadores de estados más avanzados y sofisticados con el objetivo de mejorar la eliminación del ruido y robustez de la aplicación de la estimación de estados en ciertas aplicaciones.

Las aplicaciones se han validado frente a datos de simulación y no frente a experimentación puesto que el objetivo principal de esta Tesis es presentar y validar teóricamente la nueva metodología, lo que requiere el conocimiento del valor real de las variables de estado, disponible en la simulación. La obtención de los datos a partir de experimentación tan sólo añadiría incertidumbre ligada a la misma, que podría restar claridad a los resultados, y requeriría recursos adicionales. Sin embargo, una vez cumplido el objetivo de la presente Tesis, la aplicación de la metodología a casos prácticos reales para su validación real es la continuación lógica.

Por último, resulta interesante la aplicación de la metodología presentada a otros casos de estimación de estados dinámica vehicular e incluso su extensión en otros tipos de sistemas multicuerpo, como los robots articulados, y campos de la ingeniería asistida por ordenador, como los análisis por elementos finitos.

6 Referencias

1. Akasaka, T. and Kim, S. (2003) *Dynamic Enveloping Characteristics of a Tire*, Hankook Tire R&D Center, 2003.
2. Anderson, R. and Bevly, D. M. (2010) *Using GPS with a model-based estimator to estimate critical vehicle states*, *Vehicle System Dynamics*, vol.48, no. 12, 2010, pp. 1413-1438.
3. Arat, M.A., Singh, K. and Taheri, S. (2012) *An adaptive vehicle stability control algorithm based on tire slip-angle estimation*, *SAE Technical Papers*, vol. 8, 2012.
4. Arosio, D., Braghin, F., Cheli, F. and Sabbioni, E. (2005b) *Identification of Pacejka's scaling factors from full-scale experimental tests*, *Vehicle System Dynamics*, vol. 43,no. 1, 2005, pp. 457-474.
5. Awan, M.A. and Hameed, A. (2010) *Vehicle handling parameters estimation in a virtual environment*, *ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2010, Vancouver, BC, Canada, 12-18 November 2010*, vol. 1, pp. 855-862.
6. Baffet, G., Charara, A. and Lechner, D. (2007a) *Experimental evaluation of a sliding mode observer for tire-road forces and an Extended Kalman Filter for vehicle sideslip angle*, *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007, pp. 3877-3882.
7. Baffet, G., Charara, A. and Lechner, D. and Thomas, D. (2008b) *Experimental evaluation of observers for tire-road forces, sideslip angle and wheel cornering stiffness*, *Vehicle System Dynamics*, vol. 46, no. 6, pp. 501-520.
8. Baffet, G., Charara, A. and Lechner, D. and Thomas, D. (2009a) *An estimation process for tire-road forces and sideslip angle for automotive safety systems*, *Lecture Notes in the International Conference on Informatics in Control Automation and Robotics, ICINCO 2007, Angers, France, 9-12 May 2007, Volume 24 LNEE*, pp. 125-138.
9. Baffet, G., Charara, A. and Lechner, D. (2009b) *Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness* *Control Engineering Practice*, vol. 17, no. 11, November 2009, pp. 1255-1264.
10. Bakker, E., Nyborg, L. and Pacejka, H. (1987) *Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies*, *Society of Automotive Engineers*, Paper 870421.
11. Bakker, E., Pacejka, H. B. and Linder, L. (1989). *A new tyre model with application in vehicle dynamics studies*, *SAE Paper No. 890087*, 1989.
12. Barahanov, N. and Ortega, R. (2000) *Necessary and Sufficient Conditions for Passivity of the LuGre Friction Model*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, 2000, pp. 830-832.
13. Barbot, J.P., Djemai, M., and Boukhobza, T. (2002) *Sliding mode observers*, *Sliding Mode Control in Engineering*, ser. Control Engineering, W. Perruquetti and J. P. Barbot, Eds. New York: Marcel Dekker, pp. 103-130.
14. Beale, S.R. and Shafai, B. (1988) *Robust control system design with the proportional integral observer*, *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, TX, USA, 7 December 1988, pp. 554-557.

15. Beale, S.R. and Shafai, B. (1989) *Robust control system design with a proportional integral observer*, International Journal of Control, Vol. 50, No.1, July 1989, pp. 97-111.
16. Beale, S.R. and Shafai, B. (1990) *Loop transfer recovery via a proportional integral observer*, Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Systems Engineering, Pittsburg, PA, USA, 9-11 August 1990, code 14488.
17. Bernard, J. and Clover, C.L. (1995) *Tire Modeling for Low-Speed and High-Speed Calculations*, Society of Automotive Engineers Paper 950311, 1995.
18. Besselink, I.J.M. and Pacejka, H.B. (1997) *Magic formula tyre model with transient properties*, Vehicle System Dynamics, vol. 27 Supplement, 1997.
19. Besselink, I.J.M., Pacejka, H.B., Schmeitz, A.J.C. and Jansen, S.T.H. (2005) *The MF-Swift tyre model: Extending the Magic Formula with rigid ring dynamics and an enveloping model*, Review of Automotive Engineering, vol. 26, no. 2, April 2005, pp. 245-252.
20. Besselink, I.J.M., Schmeitz, A.J.C. and Pacejka, H.B. (2010) *An improved Magic Formula/Swift tyre model that can handle inflation pressure changes*, Vehicle System Dynamics, vol. 48, suppl. 1, pp. 337-352.
21. Birk, J. and Zeitz, M. (1988) *Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems*, International Journal Control, 1988.
22. Bliman P. and Sorine, M. (1993) *A system-theoretic approach of systems with hysteresis application to friction modeling and compensation*, Proceedings of 2nd European Control Conference, Groningen, The Netherlands, 1993.
23. Bliman, P.A., Bonald, T. and Sorine, M. (1995a) *Hysteresis Operators and Tire Friction Models: Application to Vehicle Dynamic Simulations*, Proceedings of International Congress of Industrial & Applied Mathematics, Hamburg, Germany, 3-7 July 1995.
24. Bliman P. and Sorine, M. (1995b) *Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control*, Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy, September 1995, pp. 3788-3794.
25. Blundell, M. V. (1991) *Full vehicle modelling and simulation using the MSC.Adams software system*, Proceedings of Autotech, Birmingham, 1991.
26. Blundell, M. V., Phillips, B. D. A. and Mackie, A. (1996) *The role of multibody systems analysis in vehicle design*, Journal Engineering Design, vol. 7, no. 4, 1996, pp. 377-396.
27. Blundell, M. V. (1997) *The Influence of Suspension and Tyre Modelling on Vehicle Handling Simulation*, PhD Dissertation, Coventry University, UK, 1997.
28. Blundell, M. and Harty, D. (2004) *Multi-Body Systems Approach to Vehicle Dynamics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
29. Bosch Automotive Technology, Robert Bosch GmbH, URL: <http://www.bosch-automotivetechology.com>.
30. Botayeb, M., Rafaralahy, H. and Darouach, M. (1997) *Convergence analysis of the extended Kalman Filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 4, 1997, pp.581-586.

31. Botha, T.R., Els, P.S. (2012) *Vehicle sideslip estimation using unscented kalman filter, AHRS and GPS*, ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, IL, United States, 12 August 2012, Vol. 6, pp. 651-659.
32. Braghin, F., Cheli, F. and Sabbioni, E. (2006b) *Environmental effects on Pacejka's scaling factors*, *Vehicle System Dynamics* 2006, vol. 44, no. 7, 2006, pp. 547–68.
33. Braslavsky, J.H. (2001) *Control Automático 2. Notas de Clase*, Ingeniería en Automatización y Control Industrial, Universidad Nacional de Quilmes, URL: <http://iaci.unq.edu.ar/>
34. Brown, R.G. and Hwang, P.Y.C. (1992) *Introduction to random signals and applied Kalman Filtering, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc, 1992.
35. Burckhardt, M. (1987) *ABS und ASR, Sicherheitsrelevantes, Radschlupf-Regel System*. Lecture Scriptum, University of Braunschweig, Germany, 1987.
36. Burckhardt, M. (1993) *Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme*, Vogel-Verlag, Würzburg, Germany, 1993.
37. Cabrera, J.A., Ortiz, A., Carabias, E. et al. (2004) *An alternative method to determine the magic tyre model parameters using genetic algorithms*, *Vehicle System Dynamics*, vol. 41, no. 2, Feb. 2004, pp. 109–127.
38. Canudas de Wit, C., Olsson, H., Åstrom, K. J. and Lischinsky, P. (1995) *A New Model for Control of Systems With Friction*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, 1995, pp. 419–425.
39. Canudas de Wit, C. and Ge, S.S. (1997a) *Adaptive friction compensation for systems with generalized velocity/position friction dependency*, *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, December 1997.
40. Canudas de Wit, C. and Lischinsky, P. (1997b) *Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model*, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 11, 1997, pp. 65-85.
41. Canudas de Wit, C., Horowitz, R. and Tsiotras, P. (1999) *Model-based observers for tire/road contact friction prediction*, in *New directions in Nonlinear Observer Design*, Nijmeijer, H. and Fossen, T.I. (Eds), Springer Verlag, Lectures Notes in control and Information Science, May 1999.
42. Canudas de Wit, C. and Tsiotras, P. (1999b) *Dynamic tire friction models for vehicle traction control*, *Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control*, Phoenix, Arizona, December 1999.
43. Canudas de Wit, C. and Horowitz, R. (1999c) *Observers for tire/road contact friction using only wheel angular velocity information*, *Proceedings of the 35th Conference on Decision & Control*, Phoenix, Arizona, December 1999.
44. Canudas de Wit, C., Horowitz, R. and Tsiotras, P. (1999d) *Model-based observers for tire/road contact friction prediction*, in *New Directions in Nonlinear Observer Design* (H. Nijmeijer and T. Fossen, eds.), vol. 244 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pp. 23–42, London: Springer-Verlag, 1999.
45. Canudas de Wit, C., Tsiotras, P. and Velenis, E. (2002) *Dynamic friction models for longitudinal road/tire interaction: Theoretical advances*, in *21st IASTED*

- Conference Modelling, Identification and Control, Innsbruck, Austria, 2002, pp. 48–53.
46. Canudas de Wit, C., Tsiotras, P., Velenis, E., Basset, M. and Gissinger, G. (2003) *Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction*, Vehicle System Dynamics, vol. 39, no. 3, 2003, pp.189-226
47. Canudas de Wit, C., Petersen, M.L. and Shiriaev, A. (2003b) *A new nonlinear observer for tire/road distributed contact friction*, Proceedings Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, December 2003.
48. Canudas de Wit, C., Tsiotras, P., Claeys, X., Yi, J. and Horowitz, R. (2003c) *Friction Tyre–Road Modeling*, in *Estimation and Optimal Braking Control in Nonlinear and Hybrid Systems in Automotive Control*, R. Johansson and A. Rantzer Eds, Springer-Verlag, London, UK, 2003.
49. CarSim[®], Mechanical Simulation Corporation. URL: <http://www.carsim.com/>.
50. Chen, B.-C. and Hsieh, F.-C.(2008) *Sideslip angle estimation using Extended Kalman Filter*, Vehicle System Dynamics, vol. 46, no. 1, pp. 353-364.
51. Cheng, C. and Cebon, D. (2011) *Parameter and state estimation for articulated heavy vehicles*, Vehicle System Dynamics, Volume 49, No. 1-2, January 2011, Pages 399-418.
52. Chen, M.-C., Wang, W.-Y., Li, I-H. and Su, S.-F. (2007) *Dynamic slip ratio estimation and control of antilock braking systems considering wheel angular velocity*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Montreal, Quebec, 7-10 October 2007, pp. 3282-3287.
53. Cho, W., Yoon, J., Yim, S., Koo, B. and Yi, K. (2010) *Estimation of tire forces for application to vehicle stability control*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 59, no. 2, February 2010, pp. 638-649.
54. Claeys, X., Yi, J., Alvarez, L., Horowitz, R. and Canudas de Wit, C. (2001) *A New 3-D Dynamic Tire/Road Friction Model for Vehicle Control and Simulation*, Proceedings IEEE Intelligent Transportation Systems, Oakland, 2001, pp. 485–490.
55. Claeys, X., Yi, J., Alvarez, L., Horowitz, R. and Canudas de Wit, C. (2001b) *A New 3-D Dynamic Tire/Road Friction Model for Vehicle Control and Simulation*, Proceedings ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New York, 11-16 November 2001, pp. 485–490.
56. Claeys, X., Yi, J., Alvarez, L., Horowitz, R., Canudas de Wit, C. and Richard, L. (2001c) *Tire friction modeling under road conditions*, Proceedings American Control Conference, Arlington, VA, 25-27 June 2001, pp. 1794–1799.
57. Claeys, X., Yi, J., Alvarez, L., Horowitz, R., Canudas de Wit, C. and Richard, L. (2001d) *A simple 3D parametric dynamic tire/road friction model for vehicle simulation and control*, Proceedings ASME - International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2001.
58. Clover, C.L. and Bernard, J.E. (1998) *Longitudinal Tire Dynamics*, Vehicle System Dynamics, vol. 29, 1998, pp. 231-259.
59. Correvit[®], Kistler Automotive GmbH, URL: <http://www.corrsys-datron.com/> .
60. Dakhllallah, J., Glaser, S., Mammar, S. and Sebsadji, Y. (2008) *Tire-road forces estimation using Extended Kalman Filter and sideslip angle evaluation*, 2008

- American Control Conference, Seattle, Washington, USA, 11-13 June 2008, pp. 4597-4602.
61. Dorfi, H.R., Wheeler, R.L. and Keum, B.B. (2005) *Vibration modes of radial tires: application to non-rolling and rolling events*, SAE Noise and Vibration, Paper 2005-01-2526, 2005.
 62. Doumiati, M., Baffet, G., Lechner, D., Victorino, A. and Charara, A. (2008a) *Embedded Estimation of the Tyre/Road Forces and Validation in a Laboratory Vehicle*, 9th International symposium on Advanced Vehicle Control, Kobe, Japan, October 2008.
 63. Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A. and Lechner, D. and Baffet, G. (2008b) *An estimation process for vehicle wheel-ground contact normal forces*, IFACWC'08, Seoul, Korea, July 2008.
 64. Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A. and Lechner, D. (2009a) *Lateral load transfer and normal forces estimation for vehicle safety: experimental test*, Vehicle System Dynamics, vol. 47, no. 12, 2009, pp. 1511-1533.
 65. Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A., Lechner, D. (2009b) *Unscented Kalman filter for real-time vehicle lateral tire forces and sideslip angle estimation*, Proceedings of the 2009 IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Xi'an, China, 3-5 June 2009, pp. 901-906.
 66. Doumiati, M., Victorino, A., Lechner, D., Baffet, G. and Charara, A. (2010) *Observers for vehicle tyre/road forces estimation: experimental validation*, Vehicle System Dynamics, vol. 48, no. 11, 2010, pp. 1345-1378.
 67. Doumiati, M., Victorino, A. C., Charara, A. and Lechner, D. (2011) *Onboard real-time estimation of vehicle lateral tire-road forces and sideslip angle*, IEEE/ASME Transactions Mechatronics, vol. 16, no. 4, August 2011, pp. 601-614.
 68. Doumiati, M., Charara, A., Victorino, A., Lechner, D. (2012) *Road safety: Embedded observers for estimation of vehicle's vertical tyre forces*, International Journal of Vehicle Autonomous Systems, vol. 10, no. 1-2, July 2012, pp. 117-143.
 69. Drakunov, S.V. (1992) *Sliding-Mode Observers Based on Equivalent Control Method*, Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Tucson, Arizona, 16 -18 December 1992, pp. 2368-2370.
 70. Drakunov, S.V. and Utkin, V.I. (1995) *Sliding mode observers: tutorial*, In Proceedings of 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995, pp. 3376-3378.
 71. Dugoff, H., Fancher, P.S. and Segel, L. (1969) *Tyre performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking inputs*, Highway safety research institute, Ann Harbor, 1969
 72. Dugoff, H., Francher, P. and Segel, L. (1970) *An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance*, SAE Transactions, vol. 79, SAE Document No. 700377, 1970, pp. 341-366.
 73. Fancher, P., Bernard, J., Clover, C. and Winkler, C. (1997) *Representing truck tire characteristics in simulations of braking and braking-in-a turn manoeuvres*, Vehicle System Dynamics Supplement, vol. 27, 1997, pp.207-220.

74. Faria, L.O., Oden, J.T., Yavari, B.T., Tworzydło, W.W., Bass, J.M. and Becker, E.B. (1992) *Tire Modeling by Finite Elements*, Tire Science and Technology, vol. 20, no. 1, 1992, pp. 33–56.
75. Fiala, E. (1954) *Seitenkräfte am rollenden luftreifen*, Zeitschrift der VDI, vol. 96, no. 29, 1954, pp. 27–59.
76. FTire, Cosin Scientific Software, URL: <http://www.cosin.eu/> .
77. Gao, B. and Chen, H. (2012) *State estimation for 4WD vehicle based on information of tyre force sensor*, Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, vol. 43, no. 12, December 2012, pp. 22-27.
78. Gao, X., Yu, Z., Neubeck, J. and Wiedemann, J. (2010) *Sideslip angle estimation based on input-output linearisation with tire-road friction adaptation*, Vehicle System Dynamics, vol. 48, no. 2, 2010, pp. 217- 234.
79. García de Jalón, J.; Bayo, E. (1994) *Kinematic and Dynamic of Multibody Systems - The Real Time Challenge-*, Springer-Verlag, Mechanical Engineering Series, 1994.
80. Genta, G. (1997). *Motor vehicle dynamics: Modelling and simulation*, World Scientific, 1997.
81. Gillespie, T.D. (1992) *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, SAE, 1992.
82. Gim G. and Nikravesh, P.E.(1991a) *An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamics simulations, part 1: Pure slips*, International Journal of Vehicle Design, vol. 11, no. 6, 1990, pp. 589–618.
83. Gim G. and Nikravesh, P.E.(1991b) *An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamics simulations, part 2: Comprehensive slips*, International Journal of Vehicle Design, vol. 12, no. 1, January 1991, pp. 19–39.
84. Gim, G. and Nikravesh, P.E. (1993) *A three dimensional tire model for steady-state simulations of vehicles*, SAE Paper 931913, 1993.
85. Gim, G. and Kim, S. (1997) *A semi-physical tire model for practical cornering simulations of vehicles*, IPC-9, Paper 971283, 1997.
86. Gim, G. and Nikravesh, P.E. (1999) *A Unified Semi-Empirical Tire Model with Higher Accuracy and Less Parameters*, SAE International Congress and Exposition, Detroit, MI, 1999.
87. Gipser, M. (2005) *FTire: a physically based application-oriented tire model for use with detailed MBS and finite-element suspension models*, Vehicle System Dynamics, vol. 43 Supplement, 2005, pp. 76-91.
88. Grewal, M.S. and Andrews A.P. (1993) *Kalman Filtering theory and practice*, Englewoods Cliffs, New Jersey, USA, Prentice Hall, 1993.
89. Guo, H., Chen, H. and Song, T. (2009) *Tire-road forces estimation based on sliding mode observer*, Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, ICMA 2009, Changchun, China, 9-12 August 2009, pp. 4577-4582.
90. Halfmann, C. and Holzmann, H. (2003) *Adaptive models for vehicle dynamics* (in german), Berlin, Germany, Springer, 2003.
91. Hartung, C., Nuthong, C. and Svaricek, F. (2010) *Stochastic models for tyre force estimation: An overview about recent developments and trends*, Proceedings of the

- 6th IFAC Symposium Advances in Automotive Control, AAC 2010, Munich, Germany, 12-14 July 2010, pp. 610-615.
92. Hidalgo, A.F. (2013) *Simulación en tiempo real de vehículos industriales con modelos multicuerpos de gran complejidad*, Tesis Doctoral de la Universidad Politécnica de Madrid.
93. Higuchi, A. and Pacejka, H.B. (1997) *The relaxation length concept at large wheel slip and camber*, Vehicle System Dynamics, vol. 27 Supplement, 1997.
94. Hsu, Y.H.J. and Gerdes, J.C. (2006a) *A feel for the road: A method to estimate tire parameters using steering torque*, Proceedings of the International Symposium on Advanced Vehicle Control, Taipei, Taiwan, 2006.
95. Hsu, Y.H.J., Laws, S., Gadda, C.D. and Gerdes, J.C. (2006b) *A method to estimate the friction coefficient and tire slip angle using steering torque*, Proceedings of 2006 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Chicago, Illinois, USA, 5-10 November 2006.
96. Imine, H., Delanne, Y. and M'Sirdi, N.K. (2006) *Road profile input estimation in vehicle dynamics simulation*, Vehicle System Dynamics, vol. 44, no. 4, 2006, pp. 285-303.
97. Imine, H. and Dolcemascolo, V. (2008) *Sliding mode observers to heavy vehicle vertical forces estimation*, International Journal of Heavy Vehicle Systems, vol. 15, no.1, 2008.
98. Imsland, L., Johansen, T.A., Fossen, T.I., Grip, H.F., Kalkkuhl, J.C. and Suissa, A. (2006) *Vehicle velocity estimation using nonlinear observers*, Automatica, vol. 42, no. 12, 2006, pp. 2091-2103.
99. Jaballah, B., M'Sirdi, N., Naamane, A. and Messaoud, H. (2012) *Estimation of longitudinal tire forces for all-terrain vehicle*, 2nd International Conference on Communications Computing and Control Applications, CCCA 2012, Marseille, France, 6-8 December 2012, Article number 6417926.
100. Jacobs, O.L.R. (1993) *Introduction to control theory, 2nd edition*, Oxford University Press, 1993.
101. Jagt, P. van der, Pacejka, H.B. and Savkoor, A.R. (1989) *Influence of tyre and suspension dynamics on the braking performance of an anti-lock system on uneven roads*, IMechE, C382/047, 1989, pp. 453-460.
102. Jazar, R.N. (2008) *Vehicle dynamics: Theory and applications*, Springer, 2008.
103. Julier, S.J. and Uhlmann, J.K. (1994) *A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions*, can be downloaded from <http://www.robots.ox.ac.uk/~siju>, August 1994.
104. Julier, S.J., Uhlmann, J.K. and Durrant-Whyte, H.F. (1995) *A New Approach for Filtering Nonlinear Systems*. Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington, 1995, pp. 1628-1632.
105. Julier, S.J. and Uhlmann, J.K. (1997) *A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems*, Proceedings AeroSense: 11th Int. Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, 1997, pp.182-193.
106. Julier, S.J. and Uhlmann, J.K. (2002) *The scaled unscented transformation*, Proceedings American Control Conference, 2002, pp. 4555-4559.

107. Julier, S. J., and Uhlmann, J. K. (2004) *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*, Proceedings of the IEEE, vol. 92, no. 3, March 2004, pp. 401–422.
108. Kaczorek, T. (1979) *Proportional-Integral observers for linear multivariable time-varying systems*, Regelungstechnik RT, Vol. 27, No. 11, November 1979, pp. 359-363.
109. Kalman, R.E. (1960) *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transaction of the ASME Journal of Basic Engineering, vol. 82, ser. D, March 1960, pp. 35-45.
110. Kalman, R.E. (1963) *The Theory of Optimal Control*, The RAND corporation, 1963.
111. Karnopp, D.C., Margolis, D.L. and Rosenberg, R.C (2006) *System Dynamics. Modelling and simulation of mechatronic systems*, 4th edition, Hoboken, NJ (USA): John Wiley & Sons Inc.
112. Khaknejad, M.B., Kazemi, R., Azadi, Sh and, Keshavarz, A. (2011) *Identification of vehicle parameters using modified least square method in MSC.Adams/Car*, Proceedings of 2011 International Conference on Modelling, Identification and Control, ICMIC 2011, Shanghai, China; 26-29 June 2011, pp. 98-103.
113. Khaknejad, M.B., Janbakhsh, A.A., Keshavarz, A., Kazemi, R. (2012) *Developing an analytical tyre model that estimates tyre forces using a least squares method*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, vol. 226, no. 9, October 2012, pp. 1193-1207.
114. Khemoudj, O., Imine, H., Djemaï, M. and Fridman, L. (2010) *Variable gain sliding mode observer for heavy duty vehicle tyre forces estimation*, Proceedings of the 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems, VSS 2010, Mexico City, Mexico, 26-28 June 2010, pp. 522-527.
115. Khemoudj, O. , Imine, H. , Djemaï, M. (2013) *Heavy duty vehicle tyre forces estimation using variable gain sliding mode observer*, International Journal of Vehicle Design, Vol. 62, No. 2-4, pp. 274-288.
116. Kiencke, U. and Daiss, A. (1997) *Observation of lateral vehicle dynamics*, Control Engineering Practice, Vol. 5, No. 8, 1997, pp. 1145-1150.
117. Kiencke, U. and Nielsen, L. (2005) *Automotive control systems: For engine, driveline and vehicle*, Springer, 2005.
118. Kim, J., Kim, S. (2013) *Estimation of lateral tire force from objective measurement data for handling analysis*, SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems, vol. 6, no. 2.
119. Kim, K., Shafai, B. et al. (1989) *Proportional Integral Estimator*. SPIE Signal and Data Processing of Small Targets, 1989.
120. Kim S. and Savkoor A.R. (1997) *The contact problem of in-plane of tires on a flat road*, Vehicle System Dynamics, vol. 27 Supplement, 1997, pp. 189–206.
121. Kim, S. (2002) *A comprehensive analytical model for pneumatic tires*, Ph.D. thesis, University of Arizona, 2002.
122. Kim, S. Nikravesh, P.E. and Gim, G. (2008) *A two-dimensional tire model on uneven roads for vehicle dynamic simulation*, Vehicle System Dynamics, vol. 46, no. 10, 2008, pp. 913-930.

- 123.Koenig, D. and Mammar, S. (2002) *Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 12, 2002.
- 124.Lidner, L. (1991) *Experience with the magic formula tyre model*, Proceedings of the 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- 125.Lin, F., Zhao, Y.-Q., Song, G.-X. (2009a) *Vehicle axles disturbing forces estimation based on adaptive Kalman filter*, Journal of System Simulation, vol. 21, no. 5, 5 March 2009, pp. 1339-1342.
- 126.Lin, F., Zhao, Y. (2009b) *Vehicle state and parameter estimation based on dual extended adaptive Kalman filter*, China Mechanical Engineering, vol. 20, no. 6, 25 March 2009, pp. 750-755.
- 127.Lin, F. (2010) *A new method for estimating road friction coefficient*, 2010 International Conference on Manufacturing Engineering and Automation, ICMEA2010, Guangzhou, China, 7-9 December 2010, pp. 2622-2625.
- 128.Lin, F., Zhao, Y. and Xu, S. (2011) *Vehicle states estimation technology based on particle filter algorithm*, Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, vol. 42, no. 2, February 2011, pp. 23-27+22.
- 129.Lin, F., Huang, C. and Wang, W. (2012) *Serial RLS-based dual-parameter combined identification for vehicles*, Journal of South China University of Technology (Natural Science), vol. 40, no. 12, December 2012, pp. 105-110.
- 130.Lin, F. and Huang, C. (2013a) *Unscented Kalman filter for road friction coefficient estimation*, Journal of Harbin Institute of Technology, Vol. 45, no. 7, July 2013, pp. 115-120.
- 131.Lin, F. and Huang, C. (2013b) *Slip-slope estimation of mutative road friction coefficient based on unscented particle filter*, Applied Mechanics and Materials, vol. 249-250, 2013, pp. 337-342.
- 132.Louis, L. and Schramm, D. (2012) *Nonlinear state estimation of tire-road contact forces using a 14 DoF vehicle model*, Applied Mechanics and Materials, vol. 165, pp. 155-159.
- 133.Luenberger, D.G. (1964) *Observing the state of a linear system*, IEEE Transactions on Military Electronics, vol. 8, 1964, pp. 74-80.
- 134.Luenberger, D.G. (1971) *An introduction to observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16, 1971, pp. 896-602.
- 135.Lugner, P., Pacejka, H. and Plöchl, M. (2005) *Recent advances in tyre models and testing procedures*, Vehicle System Dynamics, vol. 43, no. 6-7, June 2005, pp. 413-436.
- 136.Luque, P., Álvarez, D. and Vera, C. (2004) *Ingeniería del automóvil. Sistemas y comportamiento dinámico*, Thomson, 2004.
- 137.Luque, P., Mántaras, D.A., Fidalgo, E., Álvarez, J., Riva, P., Girón, P., Compadre, D., Ferran, J. (2013) *Tyre-road grip coefficient assessment - Part II: Online estimation using instrumented vehicle, extended Kalman filter, and neural network*, Vehicle System Dynamics, Vol. 51, No. 12, 1 December 2013, pp. 1872-1893.

138. Mántaras, D.A., Luque, P., Nava, J.A., Riva, P., Girón, P., Compadre, D., Ferran, J. (2013) *Tyre-road grip coefficient assessment. Part 1: Off-line methodology using multibody dynamic simulation and genetic algorithms*, Vehicle System Dynamics, vol. 51, no. 10, pp. 1603-1618.
139. Mammar, S., Glaser, S. and Netto, M. (2006) *Vehicle lateral dynamics estimation using unknown input proportional-integral observers*, American Control Conference, 2006.
140. Matusko, J., Petrovic, I. and Peric, N. (2008) *Neural network based tire/road friction force estimation*, Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 21, 2008, pp. 442-456.
141. Maurice, J.P. and Pacejka, H.B. (1997) *Relaxation Length Behaviour of Tyres*, Vehicle System Dynamics, Vol. 27 supplement, 1997.
142. Maurice, J.P., Berzeri, M. and Pacejka, H.B. (1999) *Pragmatic tyre model for short wavelength side slip variations*, Vehicle System Dynamics, vol. 31, no. 2, February 1999, pp. 65-94.
143. Maybeck, P.S. (1979) *Stochastic models, estimation, and control - Volume 1*, Academic Press, San Francisco, 1979.
144. Menhour, L. , Koenig, D. and D'Andréa-Novel, B. (2012) *Road bank and vehicle roll angles estimation based on proportional-integral observer*, 8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS 2012, Mexico City, Mexico, 29-31 August 2012; Vol. 8, No. 1, pp. 1185-1190.
145. Merwe, R. van der, Wan, E., Julier, S., Bogdanov, A., Harvey, G. and Hunt, J. (2004) *Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor Fusion: Applications to Integrated Navigation*, Proceedings of the AIAA Guidance Navigation & Control Conference, Providence, RI, August 2004.
146. Milliken, W.F. and Milliken, D.L. (1995) *Race car vehicle dynamics*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, USA, 1995.
147. Moore, D.F. (1975) *The Friction of Pneumatic Tyres*, Elsevier Scientific Publishing Co., New York, 1975.
148. MSC.Adams[®], MSC Software Corporation. URL: www.mscsoftware.com.
149. Nam, K., Fujimoto, H. and Hori, Y. (2012) *Lateral stability control of in-wheel-motor-driven electric vehicles based on sideslip angle estimation using lateral tire force sensors*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 61, no. 5, 2012, pp. 1972-1985.
150. Nishihara, O., Kurishige, M. and Sakatani, Y. (2009) *Estimation of road friction coefficient based on brush model for optimization of tire force distribution in independent steering vehicles*, Review of Automotive Engineering, vol. 30, no. 3, 2009, pp. 299-306.
151. Olsson, H., Astrom, K. J. and Canudas de Wit C. (1998) *Friction models and friction compensation*, European Journal Control, vol. 4, no. 3, December 1998, pp. 176-195.
152. Oosten, J.J.M. van, and Bakker, E. (1993) *Determination of magic tyre model parameters*, Vehicle System Dynamics, vol. 21 Supplement, pp.19-29, 1993.

153. Pacejka, H.B. (1989a) *Modeling of the Pneumatic Tyre and Its Impact on Vehicle Dynamic Behavior*, Vehicle Research Laboratory, Delft University of Technology, The Netherlands, 1989.
154. Pacejka, H.B., Bakker, E. and Lidner, L. (1989b) *A new tire model with an application in vehicle dynamics studies*, SAE paper, 1989
155. Pacejka, H.B. and Sharp R.S. (1991) *Shear force developments by pneumatic tires in steady-state conditions: A review of modeling aspects*, Vehicle System Dynamics, vol. 20, 1991, pp. 121-176.
156. Pacejka, H.B. and Bakker, E. (1993a) *Magic formula tyre model*, Vehicle System Dynamics, vol. 21 Supplement, 1993, pp. 1-18.
157. Pacejka, H.B. and Bakker, E. (1993b) *The magic formula tire model, Tyre models for vehicle dynamics analysis*, Proceedings 1st Int. Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, Amsterdam, 1993.
158. Pacejka, H.B. and Sharp, R.S. (1993c) *Tyre models for vehicle dynamics analysis*, Vehicle System Dynamics, vol. 21, 1993.
159. Pacejka, H.B. (1996a) *The Tyre as a Vehicle Component*, XXVI FISITA Congress, Prague, 1996.
160. Pacejka, H.B. and Besselink, I. (1996b) *MF-Tyre User Manual. A Design and Analysis Tool for Modelling and Simulation of Tyre Behaviour*, Delft Tyre, Delft University, The Netherlands, 1996.
161. Pacejka H.B. and Besselink, I. (1997) *Magic formula tyre model with transient properties*, 2nd International Tyre Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, Berlin, Germany, 1997.
162. Pacejka, H.B. (2002) *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, first edition.
163. Pacejka, H.B. (2005). *Spin: Camber and turning*, Vehicle System Dynamics, vol. 43, suppl., pp. 3-17.
164. Pacejka, H.B. (2006) *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, Second edition.
165. Pacejka, H.B. (2012) *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, April 2012, third edition.
166. Palkovics, L., El-Cindy, M. and Pacejka, H.B. (1994) *Modelling of The Cornering Characteristics of Tyres on an Uneven Road surface : A Dynamic Version of The Nuero-Tyre*, International Journal of Vehicle Design, vol. 15, 1994, pp. 189-215.
167. Pasterkamp, W.R. and Pacejka, H.B. (1994) *On line estimation of tire characteristics for vehicle control*, International Symposium on Advanced Vehicle Control, Tsukuba, Japan, 1994.
168. Pasterkamp, W. R. and Pacejka, H. B. (1995) *On Line Estimation of Tyre Characteristics for Vehicle Control*, American Control Conference, 1995.
169. Pasterkamp, W. R. and Pacejka, H. B. (1996) *The Tyre as a Sensor to Estimate Friction*, Proceedings of AVEC'96, International Symposium on Advanced Vehicle Control, Aachen, Germany, June, 1996, pp. 839-853.

170. Pasterkamp, W.R. and Pacejka (1997a) *The tire as a sensor to estimate friction*, Vehicle System Dynamics, vol. 29, 1997, pp. 409-422.
171. Pasterkamp, W.R. and Pacejka, H.B. (1997b) *Application of Neural Networks in the Estimation of Tire/Road Friction Using the Tire as a Sensor*, SAE Paper 971122, 1997.
172. Perruquetti, W. and Barbot J.-P. (2002) *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, 2002.
173. Picard, J. (1991) *Efficiency of the Extended Kalman Filter for nonlinear systems with small noise*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 51, no. 3, 1991, pp. 843-885.
174. Pohl, A., Steindl, R. and Reindl, L. (1999) *The 'intelligent tire' utilizing passive SAW sensors measurement of tire friction*, IEEE Transactions Instrumentation Measurement, vol. 48, no. 6, December 1999, pp. 1041-1046.
175. Pohl, A. (2000) *A review of wireless SAW sensors*, IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectrics, Frequency Control, vol. 47, no. 2, March 2000, pp. 317-332.
176. Rajamani, R. (2005) *Vehicle Dynamics and Control*, Springer-Verlag, Mechanical Engineering Series, New York, 2005.
177. Raphael B. and Smith I.F.C. (2003) *Fundamentals of computer aided engineering*, Hoboken, NJ (USA): John Wiley & Sons Inc.
178. Ray, L.R. (1995) *Real-time determination of road coefficient of friction for IVHS and advanced vehicle control*, Proceedings American Control Conference, Seattle, Washington, June 1995.
179. Ray, L.R. (1995b) *Nonlinear state and tire force estimation for advanced vehicle control*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 3, no. 1, 1995, pp. 117-124.
180. Ray, L.R. (1996) *Nonlinear Tire Force Estimation and Road Friction Identification: Field Results*, SAE-960181, 1996.
181. Ray, L.R. (1997) *Nonlinear tire force estimation and road friction identification: Simulation and experiments*, Automatica, vol. 33, no. 10, 1997, pp. 1819-1833.
182. Ray, L.R., and Remine, J. (1998). *Machine friction estimation for modeling, diagnostics, and control*, Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, PA, 1998 pp. 2737-2741.
183. Ray, L.R. (1998b) *Experimental determination of tire forces and road friction*, Proceedings of the American Control Conference, 1998, pp. 1843-1847.
184. Ray, L.R., Ramasubramanian, A. and Townsend, J. (2001). *Adaptive friction compensation using extended Kalman-Bucy filter friction estimation*, Control Engineering Practice, vol. 9, 2001, pp. 169-179.
185. RecurDyn[®], FunctionBay GmbH, URL: <http://www.functionbay.de/>.
186. Ridha, R.A., Satyamurthy, K. and Hirscheft, L.R. (1985) *Finite element modeling of a homogeneous pneumatic tire subjected to footprint loadings*, Tire Science Technology, vol. 13, 1985, pp. 91-110.
187. SAE Publication (1996) *Vehicle Dynamics Terminology. Handbook*, J670e Supplement, 1996.

- 188.Saglam, F. and Unlusoy, Y.S. (2011) *Identification of low order vehicle handling models from multibody vehicle dynamics models*, Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Mechatronics, ICM 2011, Istanbul, Turkey, 13-15 April 2011, pp. 96-101
- 189.SCANeR™, OKTAL. URL: <http://www.oktal.fr/en/>.
- 190.Schmeitz, A.J.C. and Pacejka, H.B. (2004a) A semi-empirical, three-dimensional, tyre model for rolling over arbitrary road unevennesses, *Vehicle System Dynamics*, vol. 41, suppl., pp. 341-350.
- 191.Schmeitz, A.J.C., Jansen, S.T.H., Pacejka, H.B., Davis, J.C., Kota, N.M., Liang, C.G. and Lodewijks, G. (2004b) *Application of a semi-empirical dynamic tyre model for rolling over arbitrary road profiles*, *International Journal of Vehicle Design*, vol. 36, no. 2-3, pp. 194-215.
- 192.Sebsadji, Y., Glaser, S., Mammar, S. and Dakhlallah, J. (2008a) *Road slope and vehicle dynamics estimation*, 2008 American Control Conference, Seattle, Washington, USA, 11-13 June 2008, pp. 4603-4608.
- 193.Sebsadji, Y., Glaser, S., Mammar, S. and Netto, M. (2008b) *Vehicle roll and road bank angles estimation*, 17th World Congress, International Federation of Automatic Control, IFAC, Seoul, South Korea, 6-11 July 2008, Vol. 17, No. 1, 2008, Code 79403.
- 194.Sebsadji, Y. , Benmansour, N., Glaser, S. , Mammar, S. , Aubert, D. , Gruyer, D. (2008c) *3D estimation of road cartography using vehicle localization and observers*, 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2008, Hanoi, Vietnam; 17-20 December 2008, pp. 451-457.
- 195.Sentouth, C., Glaser, S., Mammar, S. and Bestaoui, Y. (2006a) *Estimation des paramètres d'un modèle dynamique de véhicule par filtrage de Kalman étendu*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique, France, 2006.
- 196.Sentouh, C., Glaser, S. and Mammar, S. (2006b) *Advanced vehicle-infrastructure-driver speed profile for road departure accident prevention*, *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, no. 1, 2006, pp. 612-623.
- 197.Sentouh, C., Glaser, S., Mammar, S., Bestaoui, Y. and Lussetti, B. (2006c) *Adaptive lane departure and negotiation warning system*, 8th International Symposium on Advanced Vehicle Control, Taiwan, 20-24 August 2006, pp. 19-24.
- 198.Sentouh, C., Sebsadji, Y., Mammar, S. and Glaser S. (2007) *Road Bank Angle and Faults Estimation Using Unknown Input Proportional-Integral Observer*, European Control Conference, Greece, 2007, pp. 5131-5138.
- 199.Sentouth, C., Mammar, S. and Glaser, S. (2008) *Simultaneous vehicle state and road attributes estimation using unknown input proportional-integral observer*, 2008 IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 4-6 June 2008, pp. 690-696.
- 200.Shafai, B. and Carroll, R. L. (1985) *Design of Proportional-Integral observer for linear time-varying multivariable systems*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, FL, USA, pp. 597-599.
- 201.Siegrist, P.M. and Mcaree, P.R. (2006) *Tyre-force estimation by Kalman inverse filtering: applications to off-highway mining trucks*, *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, no. 12, 2006, pp. 921-937.

202. Sierra, C., Tseng, E., Jain, A. and Peng, H. (2006) *Cornering stiffness estimation based on vehicle lateral dynamics*, Vehicle System Dynamics, vol. 44, no. 1, pp. 24-38.
203. Simon, D. (2006) *Optimal State Estimation*, Hoboken, NJ (USA): John Wiley & Sons Inc.
204. Slotine, J.J.E., Hedrick, J.K. and Misawa, E.A. (1987) *On sliding observers for nonlinear systems*, Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 109, 1987, pp. 245–252.
205. Sorine, M. (1998) *Applications of hysteresis models: Contact friction in tires, muscle contraction*, IEEE CDC 98 Workshop #2, Tampa, Florida, 1998.
206. Sorine, M. and Szymanski, J. (2000) *A new all-vehicle-speed dynamic tire model*, IFAC Symposium on Control in Transportation Systems, Braunschweig, Germany, 13-15 June 2000.
207. Sorine, M. and Szymanski, J. (2000b) *A new dynamic multi d.o.f. tire model*, in Transportation Systems, Braunschweig, Germany, 13-15 June 2000.
208. Stéphant, J., Charara, A. and Meizel, D. (2007) *Evaluation of a sliding mode observer for vehicle sideslip angle*, Control Engineering Practice, vol. 15, no. 7, 2007, pp. 803-812.
209. Svendenius, J. (2007) *Tire modeling and friction estimation*, Ph.D. thesis, Lund University, Sweden, 2007.
210. TruckSim[®], Mechanical Simulation Corporation. URL: <http://www.carsim.com/>.
211. Tseng, H.E., Xu, L. and Hrovat, D. (2007) *Estimation of land vehicle roll and pitch angles*, Vehicle System Dynamics, vol. 45, no. 5, 2007, pp. 433-443.
212. Tsunashima, H., Murakami, M. and Miyataa, J. (2006) *Vehicle and road state estimation using interacting multiple model approach*, Vehicle System Dynamics, vol. 44, no. 1, 2006, pp. 750-758.
213. Utkin, V.I. (1992) *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
214. Velenis, E., Tsiotras, P., and Canudas de Wit, C. (2002) *Extension of the LuGre dynamic tire friction model to 2D motion*, in Proceedings 10th Mediterranean Conference Control and Automation, Lisbon, Portugal, 2002.
215. Velenis, E., Tsiotras, P., Canudas de Wit, C. and Sorine, M. (2003) *Dynamic tire friction models for combined longitudinal and lateral vehicle motion*, Vehicle System Dynamics, vol. 43, no. 1, January 2005, pp. 3-29.
216. Wan, E.A., and Nelson, A.T. (1997) *Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, smoothing, and estimation*, Advances in Neural Information Processing Systems, M.C. Mozer, M.I. Jordan and F. Petsche eds., The MIT Press, MA, USA, 1997.
217. Wan, E.A., and Nelson, A.T. (2001) *Dual extended Kalman filter methods*, in *Kalman Filtering and Neural Networks*, Chapter 5, S. Haykin, ed., John Wiley & Sons, New York, 2001.
218. Wang, B., Cheng, Q., Victorino, A.C. and Charara, A. (2012) *Nonlinear observers of tire forces and sideslip angle estimation applied to road safety: Simulation and*

- experimental validation*, Proceedings of the 15th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, ITSC 2012, Anchorage, AK, United States, 16-19 September 2012, pp. 1333-1338.
219. Weber, R. and Persch, H.-G. (1976) *Frequency response of tires – slip angle and lateral force*, SAE paper no: 760030, 1976.
220. Welch, G., Bishop, G. (2006) *An introduction to the Kalman Filter*, TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 24 July 2006.
221. Wenzel, T.A., Burnham, K.J., Blundell, M.V. and Williams, R.A. (2006) *Dual extended Kalman filter for vehicle state and parameter estimation*, Vehicle System Dynamics, vol.44, no. 2, 2006, pp. 153-171.
222. Wong, J.Y. (2001) *Theory of Ground Vehicles* (Third Edition), John Wiley & Sons Inc., New York, 2001.
223. Working Model[®], Design Simulation Technologies, Inc. URL: <http://www.design-simulation.com/>.
224. Zegelaar, P.W.A. and Pacejka, H.B. (1996) *The in-plane dynamics of tyres on uneven roads*, Vehicle System Dynamics, vol. 25 Supplement, January 1996, pp. 714-730.
225. Zegelaar, P.W.A. (1998) *The dynamic response of tyres to brake torque variations and road unevennesses*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1998.
226. Zeitz, M. (1987) *The extended Luenberger observer for nonlinear systems*, Systems and Control Letters 9, North Holland, 1987.
227. Zhang, W., Yu, G.-Z., Wang, J. and Ding, N.-G. (2011) *Virtual sensors design in tire-road forces and vehicle states estimation*, Journal of Beijing University of Technology, vol. 37, no. 8, August 2011, pp. 1196-1204.
228. Zhu, S., Gao, X. and Yu, Z. (2009) *Vehicle sideslip angle estimation under extreme driving condition*, Journal of Tongji University, vol. 37, no. 8, August 2009, pp. 1070-1074+1114.
229. Zhuang, H., Gao, H., Ding, L., Liu, Z. and Deng, Z. (2013) *Method for analyzing articulated torques of heavy-duty six-legged robot*, Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition), vol. 26, no. 4, April 2013, pp. 801-812.

7 Anexo I: Modelo de suspensión McPherson

En este anexo se describe el modelo de un cuarto de vehículo delantero izquierdo con suspensión McPherson utilizado en la segunda aplicación (Figura 7.1).

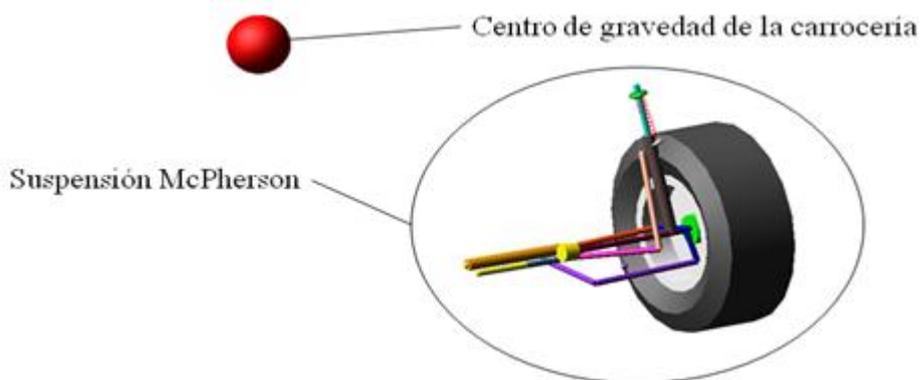


Figura 7.1. Imagen general del modelo de suspensión McPherson en MSC.Adams®.

En primer lugar cabe destacar los artificios realizados para eliminar el resto del vehículo:

1. La carrocería está guiada respecto de la calzada gracias a una restricción traslacional en el eje vertical, de manera que ésta sólo se desplaza verticalmente (Figura 7.2 izda.).
2. El eje de simetría de la barra estabilizadora es solidario a la carrocería (Figura 7.2 dcha.). En la práctica, esta restricción equivale a un comportamiento simétrico de la barra estabilizadora, es decir, que la suspensión opuesta (la derecha) haría un movimiento opuesto al realizada por la suspensión estudiada (la izquierda)
3. Puesto que en la aplicación no se estudia el comportamiento de la dirección, se bloquea el desplazamiento de la cremallera del modelo haciéndola solidaria a la carrocería (Figura 7.2 dcha.).

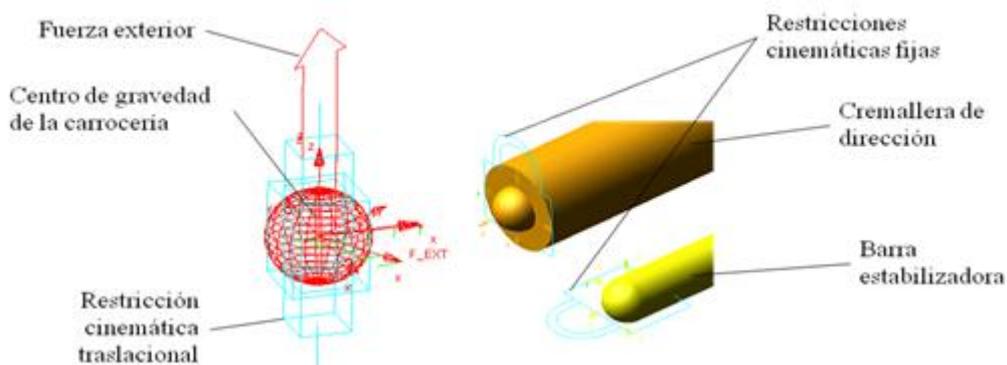


Figura 7.2. Izquierda: Imagen de la restricción traslacional vertical impuesta al centro de gravedad de la carrocería y de la fuerza vertical exterior actuante sobre él. Derecha: Imagen de las restricciones cinemáticas fijadas en el plano de simetría longitudinal del vehículo sobre la cremallera de dirección y la barra estabilizadora.

4. La fuerza exterior está aplicada verticalmente en el centro de gravedad de la carrocería y pretende reproducir la fuerza vertical que llega a la suspensión del resto del vehículo (Figura 7.2 izda.).

El modelo de suspensión McPherson contiene los cuerpos de la Figura 7.3.

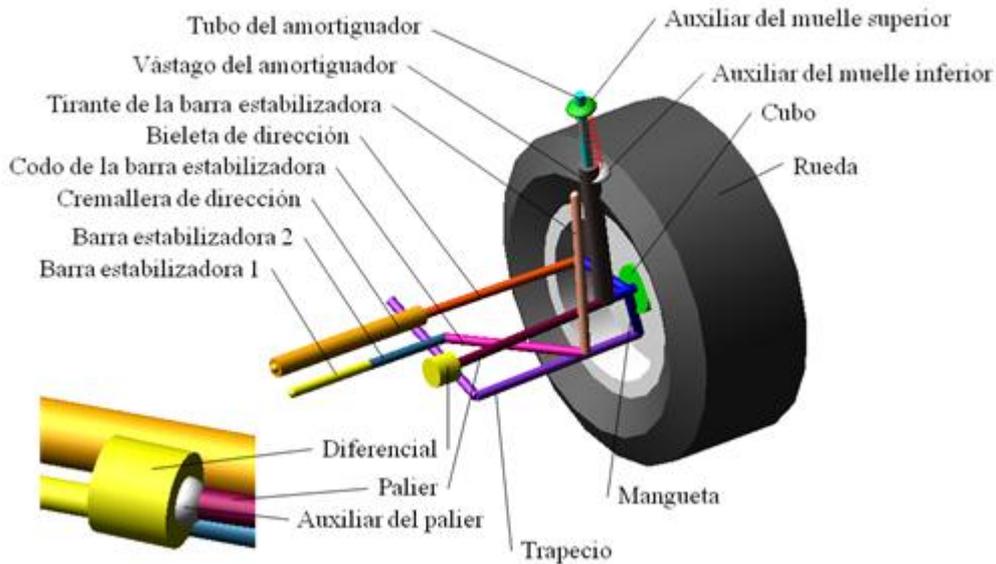


Figura 7.3. Imagen del modelo de suspensión McPherson en MSC.Adams® con todos sus elementos identificados.

El trapecio está unido a la carrocería por dos *silent-block* que principalmente le permiten girar sobre el eje que los une pero que además le permiten desplazarse y rotar en menor medida en el resto de direcciones de manera elástica y amortiguada para absorber vibraciones (Figura 7.4).

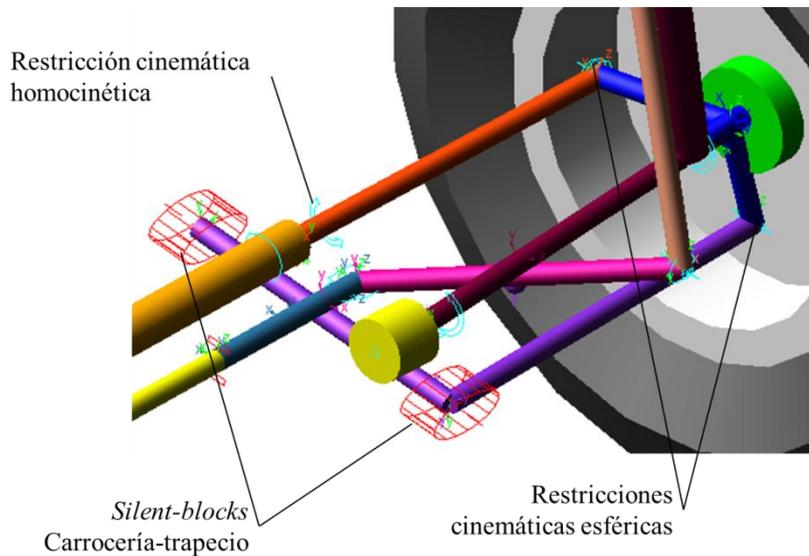


Figura 7.4. Imagen de las restricciones sobre el trapecio y la bieleta de dirección.

La bieleta de dirección también puede rotar en torno a la cremallera y a la mangueta para acompañar el movimiento vertical de ésta. Sin embargo, entre la cremallera y la bieleta no se incluye una restricción cinemática esférica sino homocinética, lo que también le permite girar en dos ejes pero no sobre sí misma, puesto que de lo contrario este grado de libertad no quedaría restringido.

El vástago del amortiguador está unido a la carrocería a través de otro *silent-block* para limitar las vibraciones que se transfieren de la calzada a los pasajeros (Figura 7.5). En el otro extremo, el tubo del amortiguador es solidario a la mangueta gracias a una restricción cinemática fija. En cuanto al muelle, que no es paralelo al amortiguador puesto que suele estar alineado con el punto de contacto neumático-calzada, no actúa directamente entre la carrocería y el tubo, sino entre dos cuerpos auxiliares, uno superior y otro inferior los cuales se unen a la carrocería y al tubo, respectivamente, a través de dos muelles-amortiguadores auxiliares cortos y muy rígidos para simular la rigidez y el amortiguamiento de los asientos del muelle. Estos cuerpos auxiliares están guiados de manera que únicamente se trasladan en la dirección de los muelles

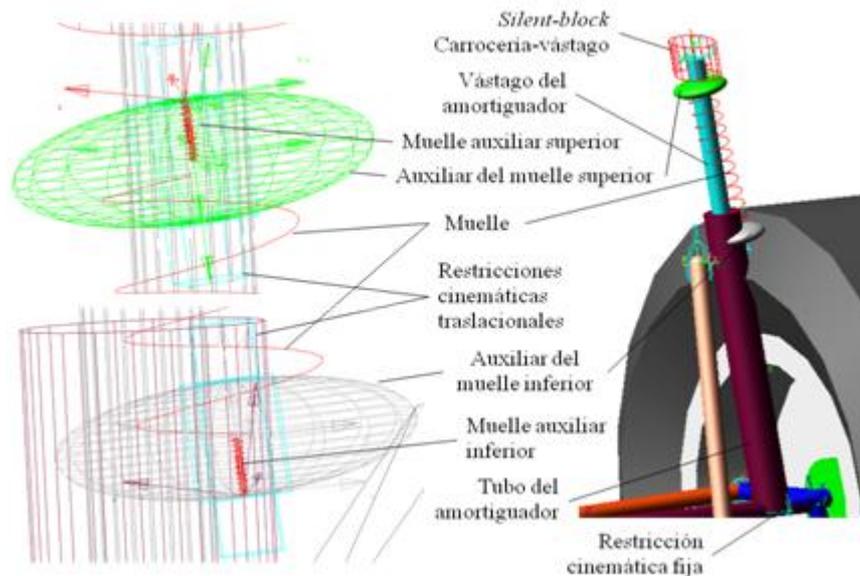


Figura 7.5. Imagen de las restricciones correspondientes al muelle y al amortiguador.

En cuanto al palier, transmite su movimiento de giro del diferencial al palier a través de dos juntas homocinéticas, permitiéndole además rotar para adaptarse a los movimientos de la rueda (Figura 7.6). El diferencial no rota directamente respecto a la carrocería, sino que es un cuerpo auxiliar quien rota respecto a la carrocería. A su vez, el diferencial tiene la capacidad de trasladarse transversalmente respecto a este cuerpo auxiliar, permitiendo así a todo el conjunto absorber las variaciones de distancia transversal entre la articulación con la rueda y el diferencial al moverse ésta. En la realidad, estas variaciones se absorben gracias a que el palier está formado por un eje y un tubo estriados que transmiten el par torsor a la vez que permiten variar la longitud de la transmisión.

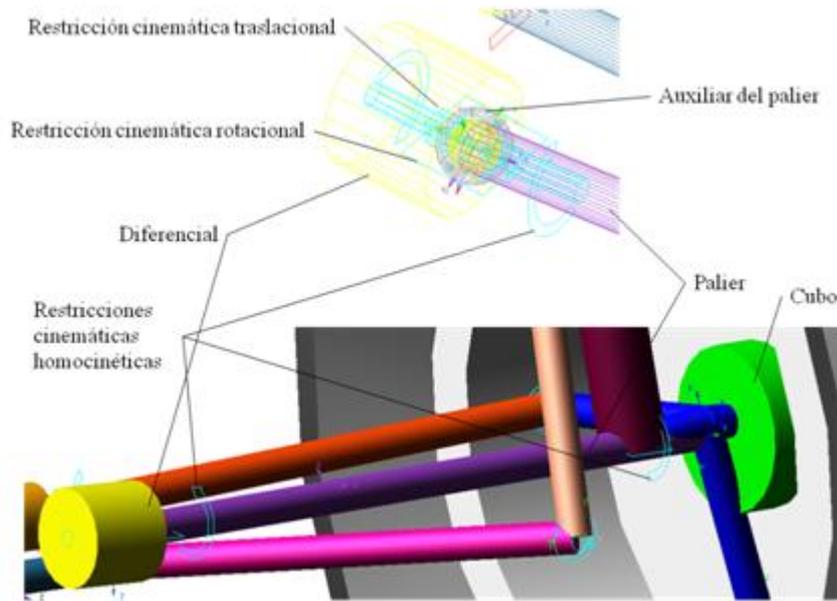


Figura 7.6. Imagen de las restricciones sobre los elementos de la transmisión.

En cuanto a la barra estabilizadora, está compuesta por dos partes unidas por una restricción dinámica de cuerpo flexible entre sus dos extremos más alejados, lo cual significa que se comportan como una única barra que se deforma elásticamente y con una cierta componente de amortiguamiento en función de los esfuerzos que recibe y de las características propias de la resistencia de materiales que se definen (Figura 7.7). La segunda parte está unida rígidamente al codo de la misma que traslada el esfuerzo al tirante a través de una rótula esférica. El tirante está anclado al tubo del amortiguador a través de una junta universal, que le permite orientarse para seguir los movimientos del tubo pero no girar sobre su propio eje para no dejar este grado de libertad indefinido.

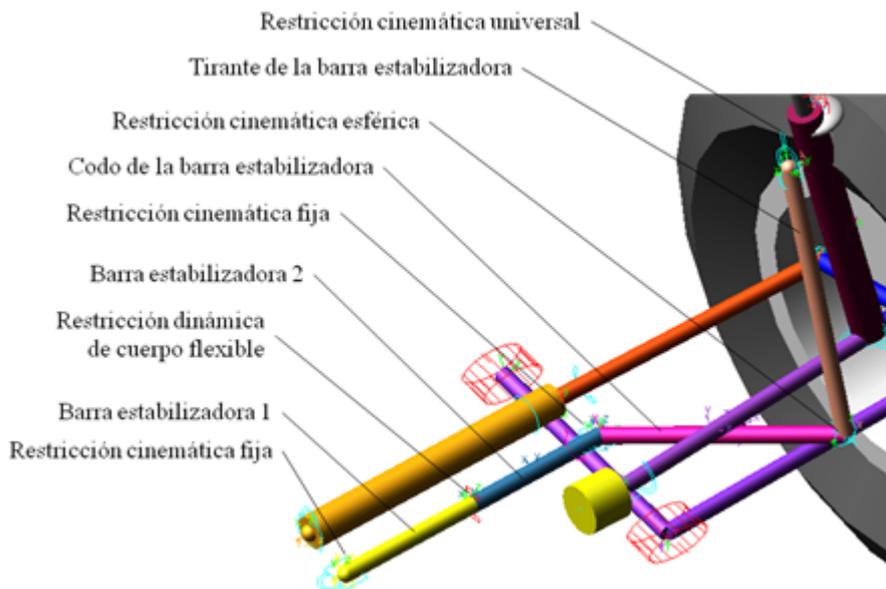


Figura 7.7. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora.

En cuanto al cubo, es solidario a la rueda, por lo que gira con ella en torno a la mangueta, a la que está unido a través de una restricción rotacional (Figura 7.8). El cubo recibe el movimiento de giro del palier a través de la restricción homocinética y recibe, a su vez, los esfuerzos del neumático.

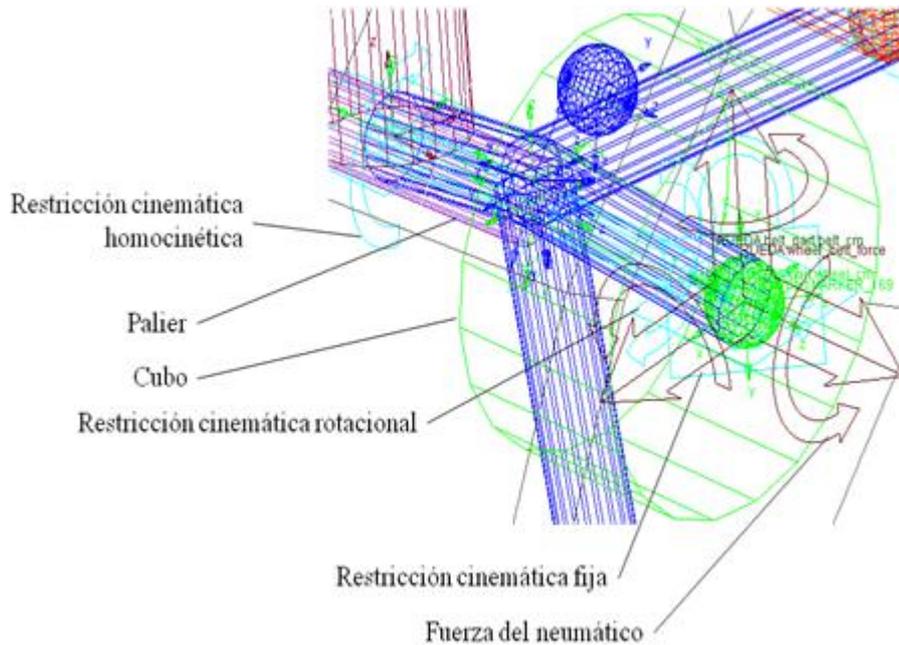


Figura 7.8. Imagen de las restricciones sobre la mangueta, el cubo y la rueda y de los esfuerzos en el neumático.

Finalmente, en la Figura 7.9 se muestran dos posiciones del mecanismo de suspensión al trasladarse verticalmente la carrocería, donde se observa como el palier, la bieleta de dirección, el trapecio y el codo de la barra estabilizadora rotan para acompañar el movimiento. También se observa la deformación de la parte transversal al vehículo de la barra estabilizadora, al cambiar el alineamiento de las dos partes y el recorrido del amortiguador comprimiendo a su vez el muelle. Por último, se observa la variación en el ángulo de caída de la rueda.

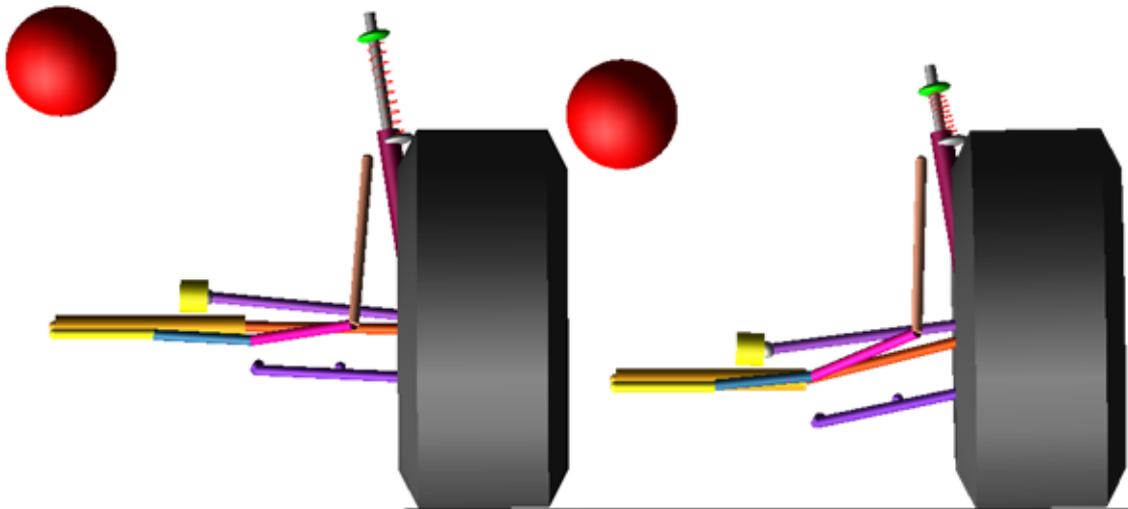


Figura 7.9. Imagen de dos posiciones de la suspensión McPherson: extendida a la izquierda y comprimida a la derecha.

Los cuerpos rígidos del modelo están recogidos en la Tabla 7.1.

Carrocería	Palier	Auxiliar del muelle sup.
Cremallera de dirección	Estabilizadora 2	Vástago
Trapezio	Estabilizadora 1	Tubo
Bieleta de dirección	Codo estabilizadora	Mangueta
Diferencial	Tirante estabilizadora	Cubo
Auxiliar palier	Auxiliar del muelle inf.	Rueda

Tabla 7.1. Cuerpos rígidos incluidos en el modelo de suspensión McPherson.

Cinemáticamente, los cuerpos están relacionados por las restricciones de la Tabla 7.2.

Tipo	Elemento 1	Elemento 2
Fija	Estabilizadora 1	Carrocería
Traslacional	Carrocería	Cremallera dirección
Traslacional	Carrocería	Calzada
Esférica	Trapezio	Mangueta
Esférica	Estabilizadora	Tirante estabilizadora
Esférica	Bieleta direcc.	Mangueta
Fija	Estabilizadora 2	Codo estabilizadora
Fija	Tubo	Mangueta
Fija	Cubo	Rueda
Traslacional	Diferencial	Auxiliar palier
Traslacional	Tubo	Auxiliar muelle inferior
Traslacional	Carrocería	Auxiliar muelle superior
Homocinética	Cremallera	Bieleta
Homocinética	Diferencial	Palier
Homocinética	Palier	Cubo
Rotacional	Carrocería	Auxiliar palier
Rotacional	Cubo	Mangueta
Cilíndrica	Vástago	Tubo
Universal	Tirante estab.	Tubo

Tabla 7.2. Restricciones cinemáticas del modelo de suspensión McPherson.

Además, el modelo contiene las restricciones dinámicas definidas en la Tabla 7.3.

Restricción	Elementos
Muelle	Aux. muelle sup.
	Aux. muelle inf.
Muelle auxiliar superior	Aux. muelle sup.
	Carrocería
Muelle auxiliar inferior	Aux. muelle inf.
	Tubo
Amortiguador	Tubo
	Vástago
Barra estabilizadora	Estabilizadora 1
	Estabilizadora 2
Silent-block #1	Carrocería
	Vástago
Silent-block #2	Carrocería
	Trapezio
Silent-block #3	Carrocería
	Trapezio

Tabla 7.3. Restricciones dinámicas del modelo de suspensión McPherson.

La calzada es completamente horizontal y plana, definida por el archivo rdf con la siguiente información:

```

$-----MDI_HEADER
[MDI_HEADER]
FILE_TYPE = 'rdf'
FILE_VERSION = 5.00
FILE_FORMAT = 'ASCII'
(COMMENTS)
{comment_string}
'flat 2d contact road for testing purposes'
$-----UNITS
[UNITS]
LENGTH      = 'mm'
FORCE       = 'newton'
ANGLE       = 'radians'
MASS        = 'kg'
TIME        = 'sec'
$-----MODEL
[MODEL]
METHOD      = '2D'
FUNCTION_NAME = 'ARC901'
ROAD_TYPE   = 'flat'
$-----GRAPHICS
[GRAPHICS]
LENGTH      = 160000.0
WIDTH       = 80000.0
NUM_LENGTH_GRIDS = 16
NUM_WIDTH_GRIDS  = 8
LENGTH_SHIFT = 10000.0
WIDTH_SHIFT  = 0.0
$-----PARAMETERS
[PARAMETERS]
MU          = 1.0
$-----REFSYS
[REFSYS]
    
```

```
OFFSET          = 0.0000.0
ROTATION_ANGLE_XY_PLANE = 0.0
```

En cuanto al neumático, se utiliza el modelo de Pacejka 2002 según el archivo tir con la información siguiente:

```
[MDI_HEADER]
FILE_TYPE          ='tir'
FILE_VERSION       =3.0
FILE_FORMAT        ='ASCII'
! : TIRE_VERSION :   PAC2002
! : COMMENT :       Tire                235/60R16
! : COMMENT :       Manufacturer
! : COMMENT :       Nom. section with (m) 0.235
! : COMMENT :       Nom. aspect ratio (-) 60
! : COMMENT :       Infl. pressure (Pa) 200000
! : COMMENT :       Rim radius (m) 0.19
! : COMMENT :       Measurement ID
! : COMMENT :       Test speed (m/s) 16.6
! : COMMENT :       Road surface
! : COMMENT :       Road condition      Dry
! : FILE_FORMAT :   ASCII
! : Copyright (C) 2004-2011 MSC Software Corporation
!
! USE_MODE specifies the type of calculation performed:
!   0: Fz only, no Magic Formula evaluation
!   1: Fx,My only
!   2: Fy,Mx,Mz only
!   3: Fx,Fy,Mx,My,Mz uncombined force/moment calculation
!   4: Fx,Fy,Mx,My,Mz combined force/moment calculation
! +10: including relaxation behaviour
! *-1: mirroring of tyre characteristics
!
! example: USE_MODE = -12 implies:
!   -calculation of Fy,Mx,Mz only
!   -including relaxation effects
!   -mirrored tyre characteristics
!
!-----units
[UNITS]
LENGTH          ='meter'
FORCE            ='newton'
ANGLE           ='radians'
MASS            ='kg'
TIME            ='second'
!-----model
[MODEL]
PROPERTY_FILE_FORMAT ='PAC2002'
USE_MODE          = 14                $Tyre use switch (IUSED)
VXLOW            = 1
LONGVL          = 16.6                $Measurement speed
TYRESIDE         = 'LEFT'             $Mounted side of tyre at
vehicle/test bench
!-----dimensions
[DIMENSION]
UNLOADED_RADIUS = 0.344                $Free tyre radius
WIDTH           = 0.235                $Nominal section width of the
tyre
ASPECT_RATIO    = 0.6                  $Nominal aspect ratio
RIM_RADIUS      = 0.19                 $Nominal rim radius
RIM_WIDTH       = 0.16                 $Rim width
!-----shape
[SHAPE]
{radial width}
1.0 0.0
1.0 0.4
1.0 0.9
0.9 1.0
```

\$-----parameter		
[VERTICAL]		
VERTICAL_STIFFNESS	= 2.1e+005	\$Tyre vertical stiffness
VERTICAL_DAMPING	= 50	\$Tyre vertical damping
BREFF	= 8.4	\$Low load stiffness e.r.r.
DREFF	= 0.27	\$Peak value of e.r.r.
FREFF	= 0.07	\$High load stiffness e.r.r.
FNOMIN	= 4850	\$Nominal wheel load
\$-----long_slip_range		
[LONG_SLIP_RANGE]		
KPUMIN	= -1.5	\$Minimum valid wheel slip
KPUMAX	= 1.5	\$Maximum valid wheel slip
\$-----slip_angle_range		
[SLIP_ANGLE_RANGE]		
ALPMIN	= -1.5708	\$Minimum valid slip angle
ALPMAX	= 1.5708	\$Maximum valid slip angle
\$-----inclination_slip_range		
[INCLINATION_ANGLE_RANGE]		
CAMMIN	= -0.26181	\$Minimum valid camber angle
CAMMAX	= 0.26181	\$Maximum valid camber angle
\$-----vertical_force_range		
[VERTICAL_FORCE_RANGE]		
FZMIN	= 225	\$Minimum allowed wheel load
FZMAX	= 10125	\$Maximum allowed wheel load
\$-----scaling		
[SCALING_COEFFICIENTS]		
LFZO	= 1	\$Scale factor of nominal
(rated) load		
LCX	= 1	\$Scale factor of Fx shape
factor		
LMUX	= 1	\$Scale factor of Fx peak
friction coefficient		
LEX	= 1	\$Scale factor of Fx curvature
factor		
LKX	= 1	\$Scale factor of Fx slip
stiffness		
LHX	= 1	\$Scale factor of Fx horizontal
shift		
LVX	= 1	\$Scale factor of Fx vertical
shift		
LGAX	= 1	\$Scale factor of camber for Fx
LCY	= 1	\$Scale factor of Fy shape
factor		
LMUY	= 1	\$Scale factor of Fy peak
friction coefficient		
LEY	= 1	\$Scale factor of Fy curvature
factor		
LKY	= 1	\$Scale factor of Fy cornering
stiffness		
LHY	= 1	\$Scale factor of Fy horizontal
shift		
LVY	= 1	\$Scale factor of Fy vertical
shift		
LGAY	= 1	\$Scale factor of camber for Fy
LTR	= 1	\$Scale factor of Peak of
pneumatic trail		
LRES	= 1	\$Scale factor for offset of
residual torque		
LGAZ	= 1	\$Scale factor of camber for Mz
LXAL	= 1	\$Scale factor of alpha
influence on Fx		
LYKA	= 1	\$Scale factor of alpha
influence on Fx		
LVYKA	= 1	\$Scale factor of kappa induced
Fy		
LS	= 1	\$Scale factor of Moment arm of
Fx		

LSGKP	= 1	\$Scale factor of Relaxation
length of Fx		
LSGAL	= 1	\$Scale factor of Relaxation
length of Fy		
LGYR	= 1	\$Scale factor of gyroscopic
torque		
LMX	= 1	\$Scale factor of overturning
couple		
LVMX	= 1	\$Scale factor of Mx vertical
shift		
LMY	= 1	\$Scale factor of rolling
resistance torque		
\$-----longitudinal		
[LONGITUDINAL_COEFFICIENTS]		
PCX1	= 1.6411	\$Shape factor Cfx for
longitudinal force		
PDX1	= 1.1739	\$Longitudinal friction Mux at
Fznom		
PDX2	= -0.16395	\$Variation of friction Mux
with load		
PDX3	= 0	\$Variation of friction Mux
with camber		
PEX1	= 0.46403	\$Longitudinal curvature Efx at
Fznom		
PEX2	= 0.25022	\$Variation of curvature Efx
with load		
PEX3	= 0.067842	\$Variation of curvature Efx
with load squared		
PEX4	= -3.7604e-005	\$Factor in curvature Efx while
driving		
PKX1	= 22.303	\$Longitudinal slip stiffness
Kfx/Fz at Fznom		
PKX2	= 0.48896	\$Variation of slip stiffness
Kfx/Fz with load		
PKX3	= 0.21253	\$Exponent in slip stiffness
Kfx/Fz with load		
PHX1	= 0.0012297	\$Horizontal shift Shx at Fznom
PHX2	= 0.0004318	\$Variation of shift Shx with
load		
PVX1	= -8.8098e-006	\$Vertical shift Svz/Fz at
Fznom		
PVX2	= 1.862e-005	\$Variation of shift Svz/Fz
with load		
RBX1	= 13.276	\$Slope factor for combined
slip Fx reduction		
RBX2	= -13.778	\$Variation of slope Fx
reduction with kappa		
RCX1	= 1.2568	\$Shape factor for combined
slip Fx reduction		
REX1	= 0.65225	\$Curvature factor of combined
Fx		
REX2	= -0.24948	\$Curvature factor of combined
Fx with load		
RHX1	= 0.0050722	\$Shift factor for combined
slip Fx reduction		
PTX1	= 2.3657	\$Relaxation length SigKap0/Fz
at Fznom		
PTX2	= 1.4112	\$Variation of SigKap0/Fz with
load		
PTX3	= 0.56626	\$Variation of SigKap0/Fz with
exponent of load		
\$-----overturning		
[OVERTURNING_COEFFICIENTS]		
QSX1	= 0	\$Lateral force induced
overturning moment		
QSX2	= 0	\$Camber induced overturning
couple		
QSX3	= 0	\$Fy induced overturning couple

\$-----lateral		
[LATERAL_COEFFICIENTS]		
PCY1	= 1.3507	\$Shape factor Cfy for lateral forces
PDY1	= 1.0489	\$Lateral friction Muy
PDY2	= -0.18033	\$Variation of friction Muy
with load		
PDY3	= -2.8821	\$Variation of friction Muy
with squared camber		
PEY1	= -0.0074722	\$Lateral curvature Efy at Fznom
PEY2	= -0.0063208	\$Variation of curvature Efy
with load		
PEY3	= -9.9935	\$Zero order camber dependency of curvature Efy
PEY4	= -760.14	\$Variation of curvature Efy with camber
PKY1	= -21.92	\$Maximum value of stiffness Kfy/Fznom
PKY2	= 2.0012	\$Load at which Kfy reaches maximum value
PKY3	= -0.024778	\$Variation of Kfy/Fznom with camber
PHY1	= 0.0026747	\$Horizontal shift Shy at Fznom
PHY2	= 8.9094e-005	\$Variation of shift Shy with load
PHY3	= 0.031415	\$Variation of shift Shy with camber
PVY1	= 0.037318	\$Vertical shift in Svy/Fz at Fznom
PVY2	= -0.010049	\$Variation of shift Svy/Fz with load
PVY3	= -0.32931	\$Variation of shift Svy/Fz with camber
PVY4	= -0.69553	\$Variation of shift Svy/Fz with camber and load
RBY1	= 7.1433	\$Slope factor for combined Fy reduction
RBY2	= 9.1916	\$Variation of slope Fy reduction with alpha
RBY3	= -0.027856	\$Shift term for alpha in slope Fy reduction
RCY1	= 1.0719	\$Shape factor for combined Fy reduction
REY1	= -0.27572	\$Curvature factor of combined Fy
REY2	= 0.32802	\$Curvature factor of combined Fy with load
RHY1	= 5.7448e-006	\$Shift factor for combined Fy reduction
RHY2	= -3.1368e-005	\$Shift factor for combined Fy reduction with load
RVY1	= -0.027825	\$Kappa induced side force Svyk/Muy*Fz at Fznom
RVY2	= 0.053604	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with load
RVY3	= -0.27568	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with camber
RVY4	= 12.12	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with alpha
RVY5	= 1.9	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with kappa
RVY6	= -10.704	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with atan(kappa)
PTY1	= 2.1439	\$Peak value of relaxation length SigAlp0/R0
PTY2	= 1.9829	\$Value of Fz/Fznom where SigAlp0 is extreme

\$-----rolling resistance		
[ROLLING_COEFFICIENTS]		
QSY1	= 0.01	\$Rolling resistance torque
coefficient		
QSY2	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on Fx		
QSY3	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on speed		
QSY4	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on speed ^4		
\$-----aligning		
[ALIGNING_COEFFICIENTS]		
QBZ1	= 10.904	\$Trail slope factor for trail
Bpt at Fznom		
QBZ2	= -1.8412	\$Variation of slope Bpt with
load		
QBZ3	= -0.52041	\$Variation of slope Bpt with
load squared		
QBZ4	= 0.039211	\$Variation of slope Bpt with
camber		
QBZ5	= 0.41511	\$Variation of slope Bpt with
absolute camber		
QBZ9	= 8.9846	\$Slope factor Br of residual
torque Mzr		
QBZ10	= 0	\$Slope factor Br of residual
torque Mzr		
QCZ1	= 1.2136	\$Shape factor Cpt for
pneumatic trail		
QDZ1	= 0.093509	\$Peak trail Dpt" =
Dpt*(Fz/Fznom*R0)		
QDZ2	= -0.0092183	\$Variation of peak Dpt" with
load		
QDZ3	= -0.057061	\$Variation of peak Dpt" with
camber		
QDZ4	= 0.73954	\$Variation of peak Dpt" with
camber squared		
QDZ6	= -0.0067783	\$Peak residual torque Dmr" =
Dmr/(Fz*R0)		
QDZ7	= 0.0052254	\$Variation of peak factor Dmr"
with load		
QDZ8	= -0.18175	\$Variation of peak factor Dmr"
with camber		
QDZ9	= 0.029952	\$Variation of peak factor Dmr"
with camber and load		
QEZ1	= -1.5697	\$Trail curvature Ept at Fznom
QEZ2	= 0.33394	\$Variation of curvature Ept
with load		
QEZ3	= 0	\$Variation of curvature Ept
with load squared		
QEZ4	= 0.26711	\$Variation of curvature Ept
with sign of Alpha-t		
QEZ5	= -3.594	\$Variation of Ept with camber
and sign Alpha-t		
QHZ1	= 0.0047326	\$Trail horizontal shift Sht at
Fznom		
QHZ2	= 0.0026687	\$Variation of shift Sht with
load		
QHZ3	= 0.11998	\$Variation of shift Sht with
camber		
QHZ4	= 0.059083	\$Variation of shift Sht with
camber and load		
SSZ1	= 0.033372	\$Nominal value of s/R0: effect
of Fx on Mz		
SSZ2	= 0.0043624	\$Variation of distance s/R0
with Fy/Fznom		
SSZ3	= 0.56742	\$Variation of distance s/R0
with camber		

```
SSZ4          = -0.24116          $Variation of distance s/R0
with load and camber
QTZ1          = 0.2              $Gyration torque constant
MBELT         = 5.4              $Belt mass of the wheel
$-----contact patch parameters
[CONTACT_COEFFICIENTS]
CONTACT_MODEL = '3D_ENVELOPING'
```

8 Anexo II: Modelo de vehículo completo y maniobra

En este anexo se describe el modelo de vehículo completo y la maniobra utilizados en las aplicaciones tercera y cuarta.

La carrocería como estructura resistente autoportante del vehículo está rígidamente unida a todos los elementos mostrados en la Figura 8.1, los cuales se soportan sobre el chasis. De esta manera, el modelo permite variar las cargas presentes en el vehículo y sus posiciones.

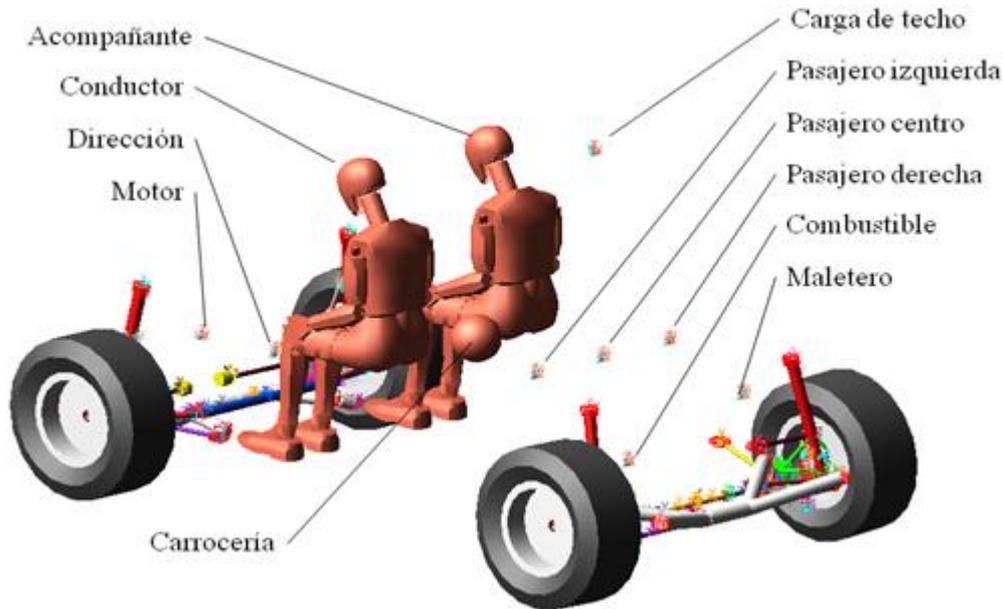


Figura 8.1. Imagen general del modelo de vehículo completo en MSC.Adams®.

8.1 Tren delantero

Básicamente el tren delantero es similar al explicado en el Anexo I: Modelo de suspensión McPherson, salvo por los aspectos expuestos a continuación.

La carrocería ya no está guiada respecto de la calzada, sino que ahora su movimiento, y el de todos los elementos portados por ella, es el resultante de la dinámica completa del vehículo.

No existe una fuerza exterior actuante sobre la carrocería. Los esfuerzos que llegan a ésta son los derivados de los neumáticos.

La cremallera de dirección, que ahora llega de una suspensión a otra, se desplaza transversalmente respecto de la carrocería (Figura 8.2). Su desplazamiento está impuesto como una entrada del sistema, correspondiente en la realidad al giro de volante realizado por el conductor. La cremallera está unida mediante restricciones homocinéticas a ambas bieletas.

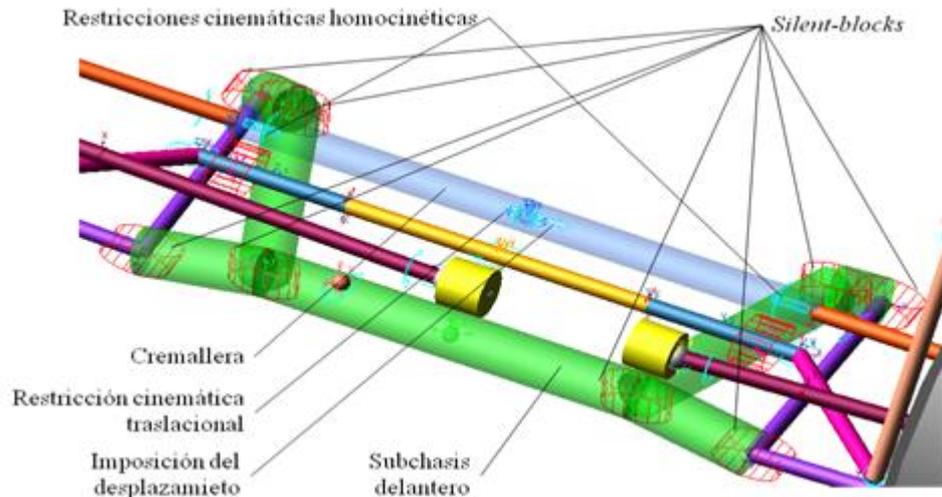


Figura 8.2. Imagen de las restricciones sobre el subchasis delantero.

Los trapecios se unen ahora al subchasis delantero mediante los mismos *silent-blocks* (Figura 8.3). Por su parte el subchasis se une a la carrocería a través de otros cuatro *silent-blocks*.

Las partes centrales de ambas barras estabilizadoras están rígidamente unidas. Esto significa que los esfuerzos se transmiten íntegramente entre ambas partes y, puesto que a ambos lados existe una restricción dinámica del comportamiento de un cuerpo flexible, toda ella se comportará como tal. La barra estabilizadora se fija al subchasis mediante *silent-blocks*.

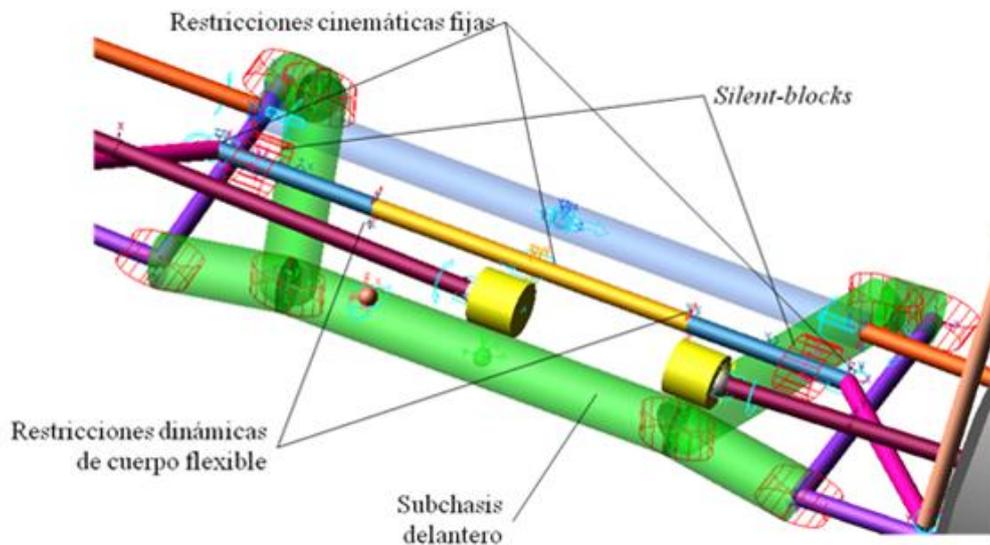


Figura 8.3. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora delantera.

El par motor se aplica sobre ambos diferenciales equitativamente, siendo una entrada del modelo (Figura 8.4).

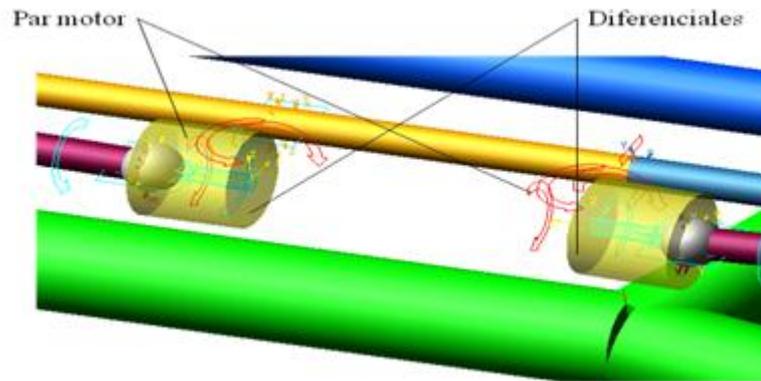


Figura 8.4. Imagen de la aplicación del par motor sobre ambas salidas del diferencial en el tren delantero.

Por último, en cada cubo se aplica un par correspondiente al freno, también impuesto como entrada del sistema (Figura 8.5).

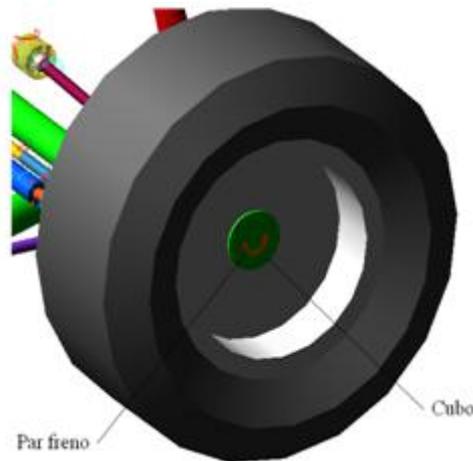


Figura 8.5. Imagen de la aplicación del par del freno sobre el cubo de la rueda delantera.

8.2 Tren trasero

La suspensión del tren trasero es del tipo multibrazo, cada una de ellas compuesta por los elementos mostrados en la Figura 8.6.

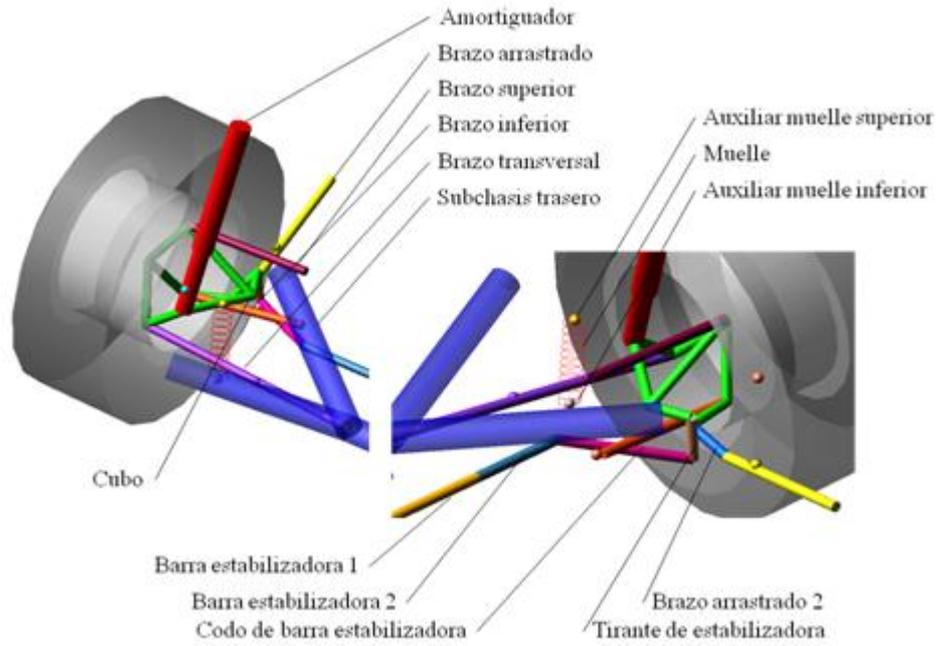


Figura 8.6. Imagen de la suspensión trasera tipo multibrazo con todos sus elementos identificados.

En el tren trasero, también se imponen como entradas los pares de freno sobre las ruedas (Figura 8.7).

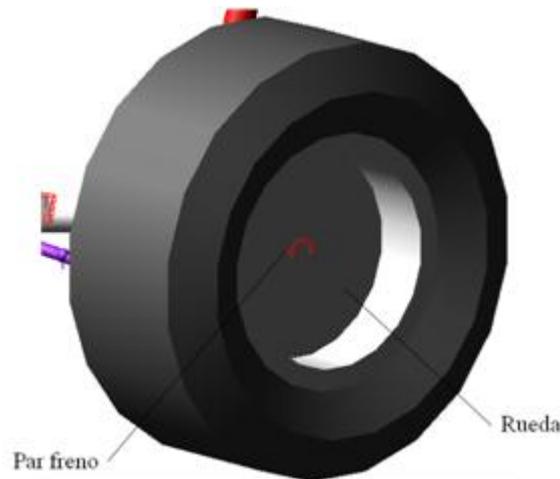


Figura 8.7. Imagen de la aplicación del par de freno sobre la rueda trasera.

El subchasis trasero se soporta a la carrocería mediante cuatro *silent-blocks* (Figura 8.8). Los brazos transversales se unen al subchasis y a los cubos mediante *silent-blocks*.

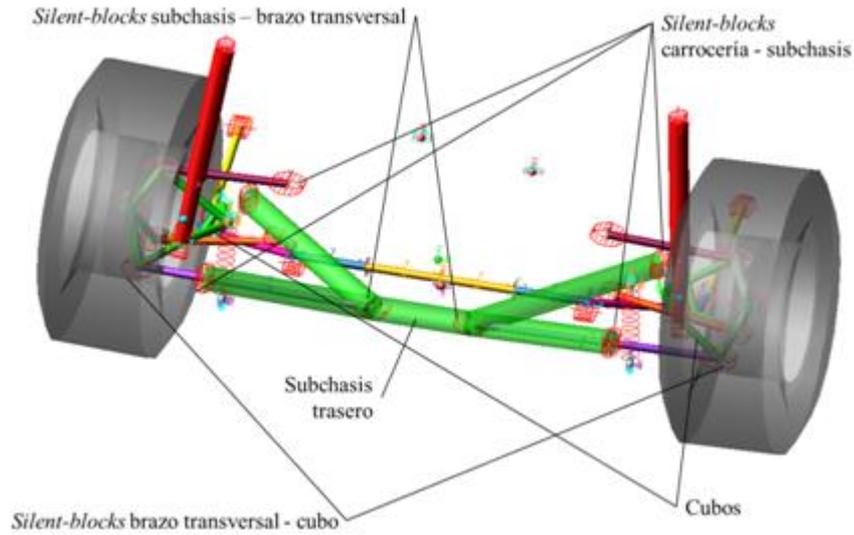


Figura 8.8. Imagen de las restricciones sobre el subchasis trasero.

Los brazos superior e inferior también se unen a la carrocería y al cubo a través de *silent-blocks* (Figura 8.9).

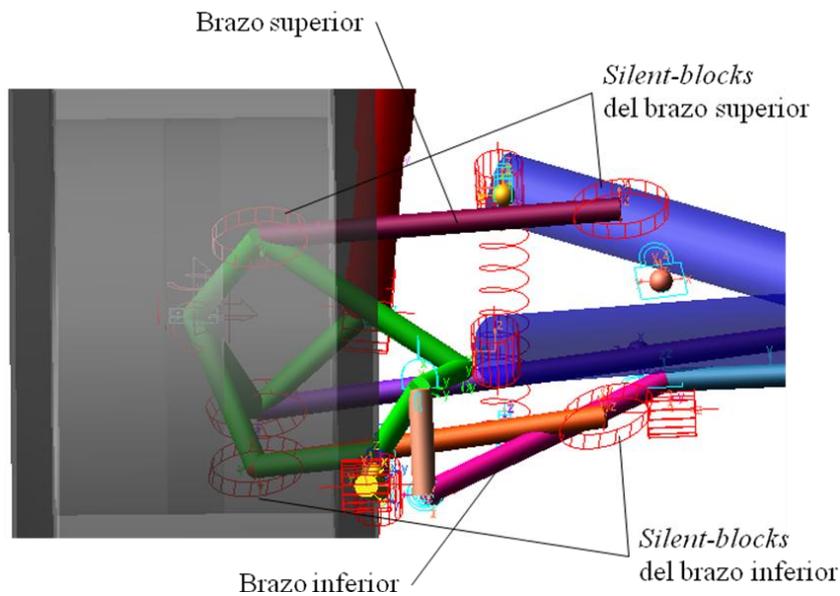


Figura 8.9. Imagen de las restricciones sobre los brazos superior e inferior.

También el brazo arrastrado se une a la carrocería y al brazo arrastrado 2 mediante *silent-blocks* (Figura 8.10). Además, entre ambos brazos arrastrados existe una restricción cinemática esférica, de manera que de *silent-block* que los une sólo son efectivos las rigideces y amortiguamientos ante las rotaciones. Finalmente, el brazo arrastrado 2 se une solidariamente al cubo.

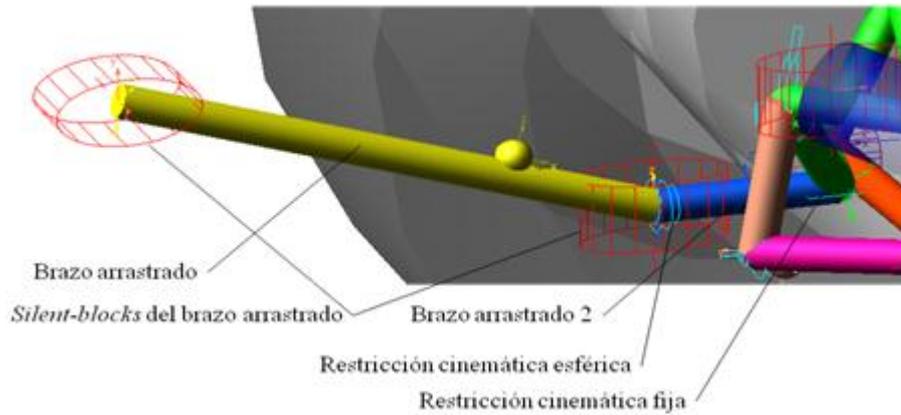


Figura 8.10. Imagen de las restricciones sobre el brazo arrastrado trasero.

Al igual que en el tren delantero, el muelle actúa entre dos cuerpos auxiliares guiados por restricciones cinemáticas traslacionales (Figura 8.11). El cuerpo auxiliar superior se une a la carrocería y el cuerpo auxiliar inferior se une al brazo transversal, en ambos casos a través de muelles-amortiguadores muy cortos y muy rígidos que simulan los asientos del muelle principal.

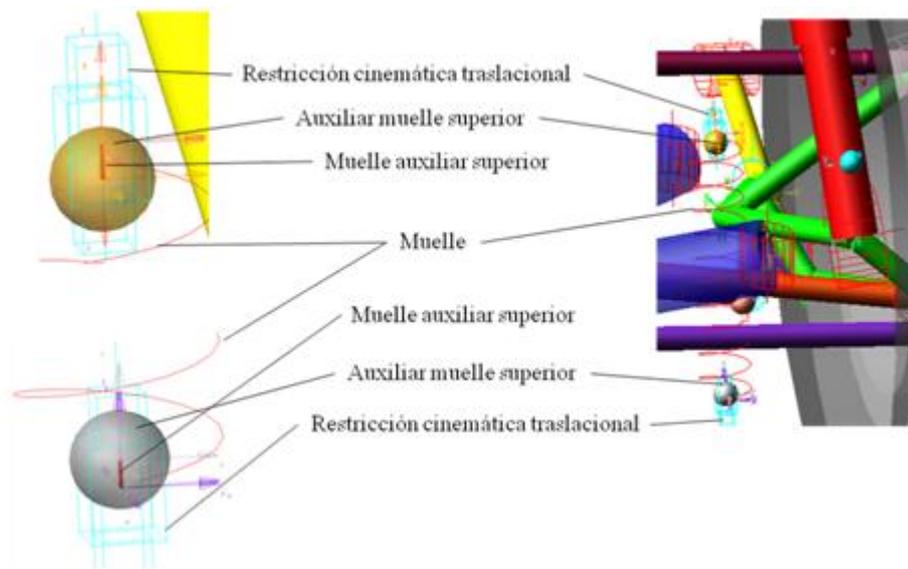


Figura 8.11. Imagen de las restricciones correspondientes al muelle.

El amortiguador se une a la carrocería y al cubo a través de *silent-blocks* (Figura 8.12). En este caso no existe una relación cinemática entre el tubo y el vástago, puesto que no tiene una función estructural como en el caso de la suspensión McPherson. Tan sólo es una restricción dinámica entre la carrocería y el cubo.

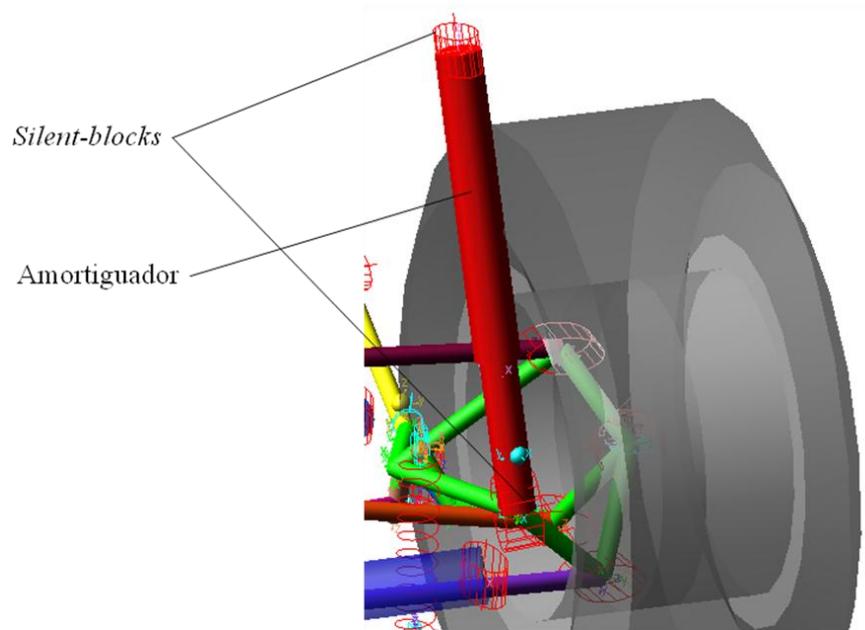


Figura 8.12. Imagen de la restricción correspondiente al amortiguador.

En cuanto a la barra estabilizadora (Figura 8.13), está compuesta por dos partes unidas por una restricción dinámica de cuerpo flexible entre sus dos extremos más alejados, lo cual significa que se comporta como una única barra que se deforma elásticamente y con una cierta componente de amortiguamiento en función de los esfuerzos que recibe y de las características propias de la resistencia de materiales que se definen. La segunda parte está unida rígidamente al codo de la misma que traslada el esfuerzo al tirante a través de una rótula esférica. El tirante está anclado al tubo del amortiguador a través de una junta universal, que le permite orientarse para seguir los movimientos del tubo pero no girar sobre su propio eje para no dejar este grado de libertad indefinido. Finalmente, el codo se une a la carrocería mediante un *silent-block*, que permite a todo el conjunto deformarse para trasladar esfuerzos de una suspensión a otra.

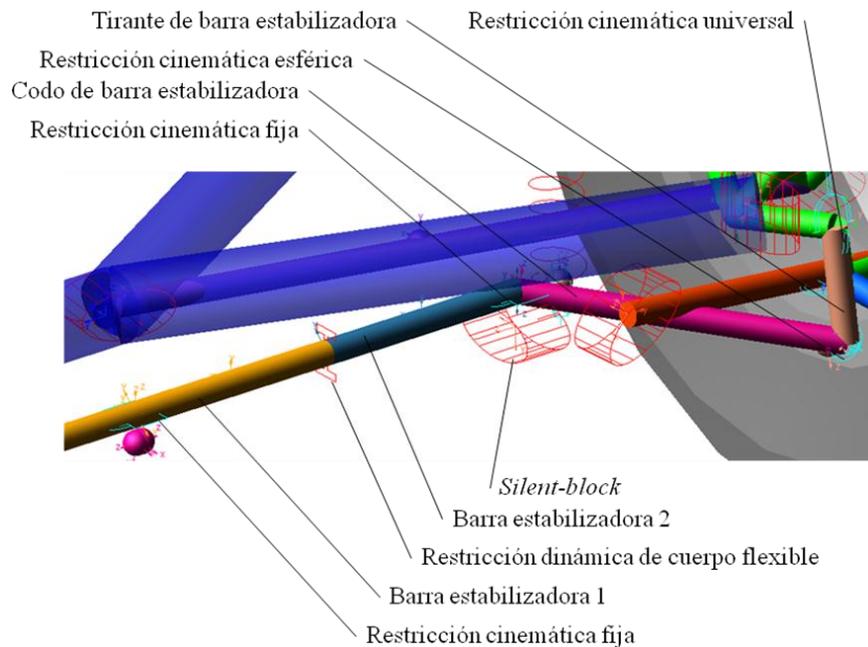


Figura 8.13. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora.

Por último, la rueda gira libremente sobre su eje respecto del cubo de la rueda gracias a una restricción cinemática rotacional (Figura 8.14).

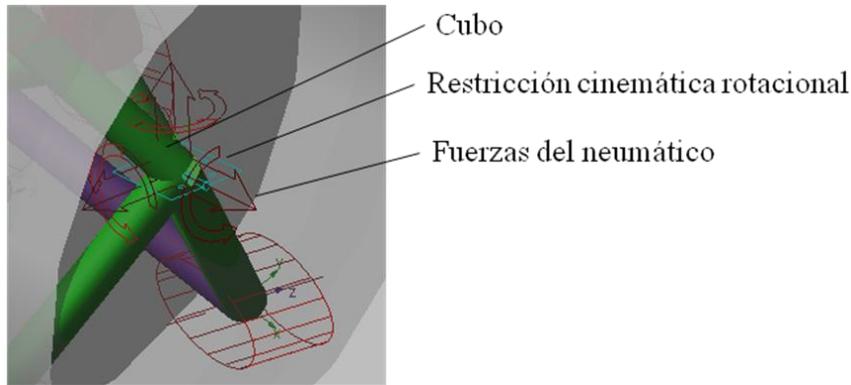


Figura 8.14. Imagen de la restricción entre mangueta y rueda y de los esfuerzos en el neumático.

El modelo está compuesto por los cuerpos rígidos de la Tabla 8.1.

Carrocería	Auxiliar muelle sup. DI	Auxiliar muelle sup. TI
Cremallera de dirección	Vástago DI	Brazo arrastrado I
Subchasis delantero	Tubo DI	Brazo arrastrado 2 I
Subchasis trasero	Mangueta I	Estabilizadora 1 TI
Motor	Cubo DI	Estabilizadora 2 TI
Combustible	Rueda DI	Codo estabilizadora TI
Conductor	Trapezio D	Tirante estabilizadora TI
Acompañante	Bieleta D	Cubo TI
Pasajero izquierda	Diferencial D	Rueda TI
Pasajero derecha	Auxiliar palier D	Brazo transversal D
Pasajero centro	Palier D	Auxiliar muelle inf. TD
Maletero	Estabilizadora 1 DD	Auxiliar muelle sup. TD
Carga techo	Estabilizadora 2 DD	Brazo arrastrado D
Dirección	Codo estabilizadora DD	Brazo arrastrado 2 D
Trapezio I	Tirante estabilizadora DD	Brazo superior D
Bieleta I	Auxiliar muelle inf. DD	Brazo inferior D
Diferencial I	Auxiliar muelle sup. DD	Tubo TD
Auxiliar palier I	Vástago DD	Vástago TD
Palier I	Tubo DD	Estabilizadora 1 TD
Estabilizadora 2 DI	Mangueta D	Estabilizadora 2 TD
Estabilizadora 1 DI	Cubo DD	Codo estabilizadora TD
Codo estabilizadora DI	Rueda DD	Tirante estabilizadora TD
Tirante estabilizadora DI	Brazo transversal I	Cubo TD
Auxiliar muelle inf. DI	Auxiliar muelle inf. TI	Rueda TD

Tabla 8.1. Cuerpos rígidos incluidos en el modelo de vehículo completo.

Estos cuerpos están relacionados cinemáticamente por las restricciones de la Tabla 8.2.

TIPO	Elemento 1	Elemento 2	TIPO	Elemento 1	Elemento 2
Fija	Carrocería	Motor	Fija	Estabilizadora 2 DD	Codo estabilizadora DD
Fija	Carrocería	Combustible	Fija	Tubo DD	Mangueta DD
Fija	Carrocería	Conductor	Fija	Cubo DD	Rueda DD
Fija	Carrocería	Acompañante	Traslacional	Diferencial D	Auxiliar palier D
Fija	Carrocería	Pasajero izquierda	Traslacional	Tubo DD	Auxiliar muelle inf. DD
Fija	Carrocería	Pasajero derecha	Traslacional	Carrocería	Auxiliar muelle sup. DD
Fija	Carrocería	Pasajero centro	Homocinética	Cremallera	Bieleta D
Fija	Carrocería	Maletero	Homocinética	Diferencial D	Palier D
Fija	Carrocería	Carga techo	Homocinética	Palier D	Cubo DD
Fija	Carrocería	Dirección	Rotacional	Bastidor	Auxiliar palier D
Fija	Estabilizadora 1 DI	Estabilizadora 1 DD	Rotacional	Cubo DD	Mangueta DD
Traslacional	Carrocería	Cremallera direc.	Cilíndrica	Vástago DD	Tubo DD
Esférica	Trapezio DI	Mangueta DI	Universal	Tirante estab. DD	Tubo DD
Esférica	Codo estabilizadora DI	Tirante estab. DI	Esférica	Brazo arrastrado I	Brazo arrastrado 2 I
Esférica	Bieleta I	Mangueta DI	Esférica	Codo estabilizadora TI	Tirante estab. TI
Fija	Estabilizadora 2 DI	Codo estabilizadora DI	Fija	Estabilizadora 2 TI	Codo estabilizadora TI
Fija	Tubo DI	Mangueta I	Fija	Brazo arrastrado 2 I	Cubo TI
Fija	Cubo DI	Rueda DI	Traslacional	Brazo transversal I	Auxiliar muelle inf. TI
Traslacional	Diferencial I	Auxiliar palier I	Traslacional	Carrocería	Auxiliar muelle sup. TI
Traslacional	Tubo DI	Auxiliar muelle inf. DI	Cilíndrica	Tubo TI	Vástago TI
Traslacional	Carrocería	Auxiliar muelle sup. DI	Rotacional	Cubo TI	Rueda TI
Homocinética	Cremallera	Bieleta I	Universal	Tirante estab. TI	Cubo TI
Homocinética	Diferencial I	Palier I	Esférica	Brazo arrastrado D	Brazo arrastrado 2 D
Homocinética	Palier I	Cubo DI	Esférica	Codo estabilizadora TD	Tirante estab. TD
Rotacional	Bastidor	Auxiliar palier I	Fija	Estabilizadora 2 TD	Codo estabilizadora TD
Rotacional	Cubo DI	Mangueta I	Fija	Brazo arrastrado 2 D	Cubo TD
Cilíndrica	Vástago DI	Tubo DI	Traslacional	Brazo transversal D	Auxiliar muelle inf. TD
Universal	Tirante estab. DI	Tubo DI	Traslacional	Carrocería	Auxiliar muelle sup. TD
Esférica	Trapezio DD	Mangueta DD	Cilíndrica	Tubo TD	Vástago TD
Esférica	Codo estabilizadora DD	Tirante estab. DD	Rotacional	Cubo TD	Rueda TD
Esférica	Bieleta D	Mangueta DD	Universal	Tirante estab. TD	Cubo TD

Tabla 8.2. Restricciones cinemáticas del modelo de vehículo completo.

Las restricciones dinámicas quedan recogidas en la Tabla 8.3.

Restricción	Elementos	Restricción	Elementos	Restricción	Elementos
Muelle DI	Auxiliar muelle sup. DI	Silent-block #1	Carrocería	Silent-block #21	Carrocería
	Auxiliar muelle inf. DI		Subchasis delantero		Brazo superior I
Muelle auxiliar sup. DI	Auxiliar muelle sup. DI	Silent-block #2	Carrocería	Silent-block #22	Brazo superior I
	Carrocería		Subchasis delantero		Cubo TI
Muelle auxiliar inf. DI	Auxiliar muelle inf. DI	Silent-block #3	Carrocería	Silent-block #23	Carrocería
	Tubo DI		Subchasis delantero		Brazo inferior I
Amortiguador DI	Tubo DI	Silent-block #4	Carrocería	Silent-block #23	Brazo inferior I
	Vástago DI		Subchasis delantero		Cubo TI
Muelle DD	Auxiliar muelle sup. DD	Silent-block #5	Carrocería	Silent-block #25	Carrocería
	Auxiliar muelle inf. DD		Subchasis trasero		Vástago TI
Muelle auxiliar sup. DD	Auxiliar muelle sup. DD	Silent-block #6	Carrocería	Silent-block #26	Tubo TI
	Carrocería		Subchasis trasero		Cubo TI
Muelle auxiliar inf. DD	Auxiliar muelle inf. DD	Silent-block #7	Carrocería	Silent-block #2	Carrocería
	Tubo DD		Subchasis trasero		Estabilizadora TI
Amortiguador DD	Tubo DD	Silent-block #8	Carrocería	Silent-block #28	Subchasis trasero
	Vástago DD		Subchasis trasero		Brazo transversal D
Muelle TI	Auxiliar muelle sup. TI	Silent-block #9	Carrocería	Silent-block #29	Brazo transversal D
	Auxiliar muelle inf. TI		Vástago DI		Cubo TD
Muelle auxiliar sup. TI	Auxiliar muelle sup. TI	Silent-block #10	Subchasis delantero	Silent-block #30	Carrocería
	Carrocería		Trapezio DI		Brazo arrastrado D
Muelle auxiliar inf. TI	Auxiliar muelle inf. TI	Silent-block #11	Subchasis delantero	Silent-block #31	Brazo arrastrado D
	Brazo transversal I		Trapezio DI		Brazo arrastrado 2 D
Amortiguador TI	Tubo TI	Silent-block #12	Subchasis delantero	Silent-block #32	Carrocería
	Vástago TI		Estabilizadora DI		Brazo superior D
Muelle TD	Auxiliar muelle sup. TD	Silent-block #13	Carrocería	Silent-block #33	Brazo superior D
	Auxiliar muelle inf. TD		Vástago DD		Cubo TD
Muelle auxiliar sup. TD	Auxiliar muelle sup. TD	Silent-block #14	Subchasis delantero	Silent-block #34	Carrocería
	Carrocería		Trapezio DD		Brazo inferior D
Muelle auxiliar inf. TD	Auxiliar muelle inf. TD	Silent-block #15	Subchasis delantero	Silent-block #35	Brazo inferior D
	Brazo transversal D		Trapezio DD		Cubo TD
Amortiguador TD	Tubo TD	Silent-block #16	Subchasis delantero	Silent-block #36	Carrocería
	Vástago TD		Estabilizadora DD		Vástago TD
Estabilizadora DI	Estabilizadora 1 DI	Silent-block #17	Subchasis trasero	Silent-block #37	Tubo TD
	Estabilizadora 2 DI		Brazo transversal I		Cubo TD
Estabilizadora DD	Estabilizadora 1 DD	Silent-block #18	Brazo transversal I	Silent-block #38	Carrocería
	Estabilizadora 2 DD		Cubo TI		Estabilizadora TD
Estabilizadora TI	Estabilizadora 1 TI	Silent-block #19	Carrocería		
	Estabilizadora 2 TI		Brazo arrastrado I		
Estabilizadora TD	Estabilizadora 1 TD	Silent-block #20	Brazo arrastrado I		
	Estabilizadora 2 TD		Brazo arrastrado 2 I		

Tabla 8.3. Restricciones dinámicas del modelo de vehículo completo.

La calzada es completamente horizontal y plana, definida por el archivo rdf con la siguiente información:

```

$-----MDI_HEADER
[MDI_HEADER]
FILE_TYPE = 'rdf'
FILE_VERSION = 5.00
FILE_FORMAT = 'ASCII'
(COMMENTS)
{comment_string}
'flat 2d contact road for testing purposes'
$-----UNITS
[UNITS]
LENGTH = 'mm'
FORCE = 'newton'
ANGLE = 'radians'
MASS = 'kg'
TIME = 'sec'
$-----MODEL
[MODEL]
METHOD = '2D'
FUNCTION_NAME = 'ARC901'
ROAD_TYPE = 'flat'
$-----GRAPHICS
[GRAPHICS]
LENGTH = 160000.0
WIDTH = 80000.0
NUM_LENGTH_GRIDS = 16
NUM_WIDTH_GRIDS = 8
LENGTH_SHIFT = 10000.0
WIDTH_SHIFT = 0.0
$-----PARAMETERS
[PARAMETERS]
MU = 1.0
$-----REFSYS
[REFSYS]
OFFSET = 0.0 0.0 0.0
ROTATION_ANGLE_XY_PLANE = 0.0
    
```

En cuanto al neumático, se utiliza el modelo de Pacejka 2002 según el archivo tir con la información siguiente:

```

[MDI_HEADER]
FILE_TYPE = 'tir'
FILE_VERSION = 3.0
FILE_FORMAT = 'ASCII'
! : TIRE_VERSION : PAC2002
! : COMMENT : Tire 235/60R16
! : COMMENT : Manufacturer
! : COMMENT : Nom. section with (m) 0.235
! : COMMENT : Nom. aspect ratio (-) 60
! : COMMENT : Infl. pressure (Pa) 200000
! : COMMENT : Rim radius (m) 0.19
! : COMMENT : Measurement ID
! : COMMENT : Test speed (m/s) 16.6
! : COMMENT : Road surface
! : COMMENT : Road condition Dry
! : FILE_FORMAT : ASCII
! : Copyright (C) 2004-2011 MSC Software Corporation
!
! USE_MODE specifies the type of calculation performed:
! 0: Fz only, no Magic Formula evaluation
! 1: Fx,My only
! 2: Fy,Mx,Mz only
! 3: Fx,Fy,Mx,My,Mz uncombined force/moment calculation
! 4: Fx,Fy,Mx,My,Mz combined force/moment calculation
! +10: including relaxation behaviour
    
```

```

!      *-1: mirroring of tyre characteristics
!
!      example: USE MODE = -12 implies:
!              -calculation of Fy,Mx,Mz only
!              -including relaxation effects
!              -mirrored tyre characteristics
!
!-----units
$-----units
[UNITS]
LENGTH           ='meter'
FORCE            ='newton'
ANGLE            ='radians'
MASS             ='kg'
TIME             ='second'
$-----model
[MODEL]
PROPERTY_FILE_FORMAT  ='PAC2002'
USE_MODE             = 14           $Tyre use switch (IUSED)
VXLOW               = 1
LONGVL              = 16.6         $Measurement speed
TYRESIDE            = 'LEFT'       $Mounted side of tyre at
vehicle/test bench
$-----dimensions
[DIMENSION]
UNLOADED_RADIUS     = 0.344        $Free tyre radius
WIDTH               = 0.235        $Nominal section width of the
tyre
ASPECT_RATIO        = 0.6          $Nominal aspect ratio
RIM_RADIUS          = 0.19         $Nominal rim radius
RIM_WIDTH           = 0.16         $Rim width
$-----shape
[SHAPE]
{radial width}
 1.0   0.0
 1.0   0.4
 1.0   0.9
 0.9   1.0
$-----parameter
[VERTICAL]
VERTICAL_STIFFNESS  = 2.1e+005      $Tyre vertical stiffness
VERTICAL_DAMPING    = 50          $Tyre vertical damping
BREFF               = 8.4         $Low load stiffness e.r.r.
DREFF               = 0.27        $Peak value of e.r.r.
FREFF               = 0.07        $High load stiffness e.r.r.
FNOMIN              = 4850        $Nominal wheel load
$-----long_slip_range
[LONG_SLIP_RANGE]
KPUMIN              = -1.5        $Minimum valid wheel slip
KPUMAX              = 1.5        $Maximum valid wheel slip
$-----slip_angle_range
[SLIP_ANGLE_RANGE]
ALPMIN              = -1.5708     $Minimum valid slip angle
ALPMAX              = 1.5708     $Maximum valid slip angle
$-----inclination_slip_range
[INCLINATION_ANGLE_RANGE]
CAMMIN              = -0.26181    $Minimum valid camber angle
CAMMAX              = 0.26181    $Maximum valid camber angle
$-----vertical_force_range
[VERTICAL_FORCE_RANGE]
FZMIN               = 225         $Minimum allowed wheel load
FZMAX               = 10125      $Maximum allowed wheel load
$-----scaling
[SCALING_COEFFICIENTS]
LFZO                = 1          $Scale factor of nominal
(rated) load
LCX                 = 1          $Scale factor of Fx shape
factor

```

LMUX	= 1	\$Scale factor of Fx peak
friction coefficient		
LEX	= 1	\$Scale factor of Fx curvature
factor		
LKX	= 1	\$Scale factor of Fx slip
stiffness		
LHX	= 1	\$Scale factor of Fx horizontal
shift		
LVX	= 1	\$Scale factor of Fx vertical
shift		
LGAX	= 1	\$Scale factor of camber for Fx
LCY	= 1	\$Scale factor of Fy shape
factor		
LMUY	= 1	\$Scale factor of Fy peak
friction coefficient		
LEY	= 1	\$Scale factor of Fy curvature
factor		
LKY	= 1	\$Scale factor of Fy cornering
stiffness		
LHY	= 1	\$Scale factor of Fy horizontal
shift		
LVY	= 1	\$Scale factor of Fy vertical
shift		
LGAY	= 1	\$Scale factor of camber for Fy
LTR	= 1	\$Scale factor of Peak of
pneumatic trail		
LRES	= 1	\$Scale factor for offset of
residual torque		
LGAZ	= 1	\$Scale factor of camber for Mz
LXAL	= 1	\$Scale factor of alpha
influence on Fx		
LYKA	= 1	\$Scale factor of alpha
influence on Fx		
LVIKA	= 1	\$Scale factor of kappa induced
Fy		
LS	= 1	\$Scale factor of Moment arm of
Fx		
LSGKP	= 1	\$Scale factor of Relaxation
length of Fx		
LSGAL	= 1	\$Scale factor of Relaxation
length of Fy		
LGYP	= 1	\$Scale factor of gyroscopic
torque		
LMX	= 1	\$Scale factor of overturning
couple		
LVMX	= 1	\$Scale factor of Mx vertical
shift		
LMY	= 1	\$Scale factor of rolling
resistance torque		
\$-----longitudinal		
[LONGITUDINAL_COEFFICIENTS]		
PCX1	= 1.6411	\$Shape factor Cfx for
longitudinal force		
PDX1	= 1.1739	\$Longitudinal friction Mux at
Fznom		
PDX2	= -0.16395	\$Variation of friction Mux
with load		
PDX3	= 0	\$Variation of friction Mux
with camber		
PEX1	= 0.46403	\$Longitudinal curvature Efx at
Fznom		
PEX2	= 0.25022	\$Variation of curvature Efx
with load		
PEX3	= 0.067842	\$Variation of curvature Efx
with load squared		
PEX4	= -3.7604e-005	\$Factor in curvature Efx while
driving		

PKX1	= 22.303	\$Longitudinal slip stiffness
Kfx/Fz at Fznom		
PKX2	= 0.48896	\$Variation of slip stiffness
Kfx/Fz with load		
PKX3	= 0.21253	\$Exponent in slip stiffness
Kfx/Fz with load		
PHX1	= 0.0012297	\$Horizontal shift Shx at Fznom
PHX2	= 0.0004318	\$Variation of shift Shx with
load		
PVX1	= -8.8098e-006	\$Vertical shift Svz/Fz at
Fznom		
PVX2	= 1.862e-005	\$Variation of shift Svz/Fz
with load		
RBX1	= 13.276	\$Slope factor for combined
slip Fx reduction		
RBX2	= -13.778	\$Variation of slope Fx
reduction with kappa		
RCX1	= 1.2568	\$Shape factor for combined
slip Fx reduction		
REX1	= 0.65225	\$Curvature factor of combined
Fx		
REX2	= -0.24948	\$Curvature factor of combined
Fx with load		
RHX1	= 0.0050722	\$Shift factor for combined
slip Fx reduction		
PTX1	= 2.3657	\$Relaxation length SigKap0/Fz
at Fznom		
PTX2	= 1.4112	\$Variation of SigKap0/Fz with
load		
PTX3	= 0.56626	\$Variation of SigKap0/Fz with
exponent of load		
\$-----overturning		
[OVERTURNING_COEFFICIENTS]		
QSX1	= 0	\$Lateral force induced
overturning moment		
QSX2	= 0	\$Camber induced overturning
couple		
QSX3	= 0	\$Fy induced overturning couple
\$-----lateral		
[LATERAL_COEFFICIENTS]		
PCY1	= 1.3507	\$Shape factor Cfy for lateral
forces		
PDY1	= 1.0489	\$Lateral friction Muy
PDY2	= -0.18033	\$Variation of friction Muy
with load		
PDY3	= -2.8821	\$Variation of friction Muy
with squared camber		
PEY1	= -0.0074722	\$Lateral curvature Efy at
Fznom		
PEY2	= -0.0063208	\$Variation of curvature Efy
with load		
PEY3	= -9.9935	\$Zero order camber dependency
of curvature Efy		
PEY4	= -760.14	\$Variation of curvature Efy
with camber		
PKY1	= -21.92	\$Maximum value of stiffness
Kfy/Fznom		
PKY2	= 2.0012	\$Load at which Kfy reaches
maximum value		
PKY3	= -0.024778	\$Variation of Kfy/Fznom with
camber		
PHY1	= 0.0026747	\$Horizontal shift Shy at Fznom
PHY2	= 8.9094e-005	\$Variation of shift Shy with
load		
PHY3	= 0.031415	\$Variation of shift Shy with
camber		
PVY1	= 0.037318	\$Vertical shift in Svz/Fz at
Fznom		

PVY2	= -0.010049	\$Variation of shift Svy/Fz
with load		
PVY3	= -0.32931	\$Variation of shift Svy/Fz
with camber		
PVY4	= -0.69553	\$Variation of shift Svy/Fz
with camber and load		
RBY1	= 7.1433	\$Slope factor for combined Fy
reduction		
RBY2	= 9.1916	\$Variation of slope Fy
reduction with alpha		
RBY3	= -0.027856	\$Shift term for alpha in slope
Fy reduction		
RCY1	= 1.0719	\$Shape factor for combined Fy
reduction		
REY1	= -0.27572	\$Curvature factor of combined
Fy		
REY2	= 0.32802	\$Curvature factor of combined
Fy with load		
RHY1	= 5.7448e-006	\$Shift factor for combined Fy
reduction		
RHY2	= -3.1368e-005	\$Shift factor for combined Fy
reduction with load		
RVY1	= -0.027825	\$Kappa induced side force
Svyk/Muy*Fz at Fznom		
RVY2	= 0.053604	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with
load		
RVY3	= -0.27568	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with
camber		
RVY4	= 12.12	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with
alpha		
RVY5	= 1.9	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with
kappa		
RVY6	= -10.704	\$Variation of Svyk/Muy*Fz with
atan(kappa)		
PTY1	= 2.1439	\$Peak value of relaxation
length SigAlp0/R0		
PTY2	= 1.9829	\$Value of Fz/Fznom where
SigAlp0 is extreme		
\$-----rolling resistance		
[ROLLING_COEFFICIENTS]		
QSY1	= 0.01	\$Rolling resistance torque
coefficient		
QSY2	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on Fx		
QSY3	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on speed		
QSY4	= 0	\$Rolling resistance torque
depending on speed ^4		
\$-----aligning		
[ALIGNING_COEFFICIENTS]		
QBZ1	= 10.904	\$Trail slope factor for trail
Bpt at Fznom		
QBZ2	= -1.8412	\$Variation of slope Bpt with
load		
QBZ3	= -0.52041	\$Variation of slope Bpt with
load squared		
QBZ4	= 0.039211	\$Variation of slope Bpt with
camber		
QBZ5	= 0.41511	\$Variation of slope Bpt with
absolute camber		
QBZ9	= 8.9846	\$Slope factor Br of residual
torque Mzr		
QBZ10	= 0	\$Slope factor Br of residual
torque Mzr		
QCZ1	= 1.2136	\$Shape factor Cpt for
pneumatic trail		
QDZ1	= 0.093509	\$Peak trail Dpt" =
Dpt*(Fz/Fznom*R0)		

QDZ2	= -0.0092183	\$Variation of peak Dpt" with
load		
QDZ3	= -0.057061	\$Variation of peak Dpt" with
camber		
QDZ4	= 0.73954	\$Variation of peak Dpt" with
camber squared		
QDZ6	= -0.0067783	\$Peak residual torque Dmr" =
Dmr/(Fz*R0)		
QDZ7	= 0.0052254	\$Variation of peak factor Dmr"
with load		
QDZ8	= -0.18175	\$Variation of peak factor Dmr"
with camber		
QDZ9	= 0.029952	\$Variation of peak factor Dmr"
with camber and load		
QEZ1	= -1.5697	\$Trail curvature Ept at Fznom
QEZ2	= 0.33394	\$Variation of curvature Ept
with load		
QEZ3	= 0	\$Variation of curvature Ept
with load squared		
QEZ4	= 0.26711	\$Variation of curvature Ept
with sign of Alpha-t		
QEZ5	= -3.594	\$Variation of Ept with camber
and sign Alpha-t		
QHZ1	= 0.0047326	\$Trail horizontal shift Sht at
Fznom		
QHZ2	= 0.0026687	\$Variation of shift Sht with
load		
QHZ3	= 0.11998	\$Variation of shift Sht with
camber		
QHZ4	= 0.059083	\$Variation of shift Sht with
camber and load		
SSZ1	= 0.033372	\$Nominal value of s/R0: effect
of Fx on Mz		
SSZ2	= 0.0043624	\$Variation of distance s/R0
with Fy/Fznom		
SSZ3	= 0.56742	\$Variation of distance s/R0
with camber		
SSZ4	= -0.24116	\$Variation of distance s/R0
with load and camber		
QTZ1	= 0.2	\$Gyration torque constant
MBELT	= 5.4	\$Belt mass of the wheel
\$-----		contact patch parameters
[CONTACT_COEFFICIENTS]		
CONTACT_MODEL	= '3D_ENVELOPING'	

8.3 Maniobra

La maniobra utilizada para la estimación de estados es un slalom con aceleración y frenado, causado por un desplazamiento sinusoidal de 120mm de amplitud de la cremallera de dirección (Figura 8.15), combinado con una aceleración positiva al principio y negativa al final, consecuencia del par del motor (Figura 8.16) repartido equitativamente entre los dos diferenciales y el par de frenado diferente en las ruedas delanteras (Figura 8.17) y traseras (Figura 8.18).

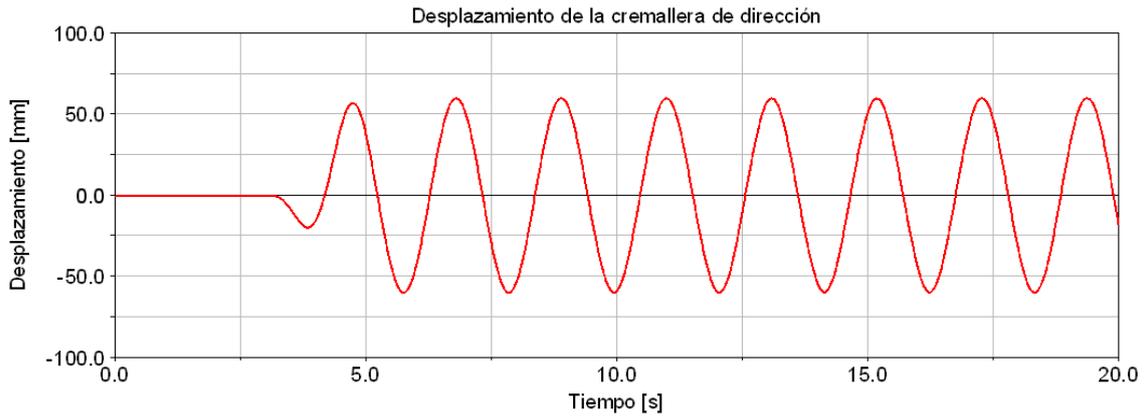


Figura 8.15. Desplazamiento de la cremallera de dirección para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo.

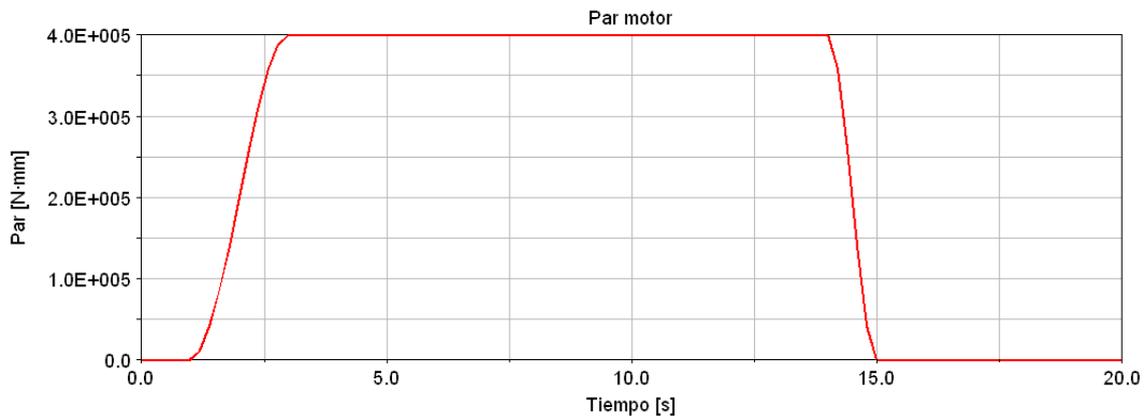


Figura 8.16. Par de salida del motor para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo.



Figura 8.17. Par de frenado en cada rueda delantera para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo.



Figura 8.18. Par de frenado en cada rueda trasera para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo.

Índice de figuras

Figura 1.1. Diagrama general de un sistema dinámico (traducido y adaptado de Karnopp, 2006).....	14
Figura 1.2. Izquierda: Diagrama del proceso de estimación de estados. Derecha: Diagrama de la retroalimentación de la estimación de los estados para el control de un sistema dinámico. (Braslavsky, 2001).....	15
Figura 1.3. Modelo de un brazo robótico espacial con coordenadas naturales (García de Jalón, 1994).....	15
Figura 1.4. Modelo CAE del sistema multicuerpo correspondiente al tren de aterrizaje de un aeronave (MSC.Adams®).....	16
Figura 1.5. Ejemplos de modelos CAE en MSC.Adams® que incluyen técnicas de control, a la izquierda, o cuerpos flexibles por el Método de los Elementos Finitos, a la derecha (MSC.Adams®).	17
Figura 1.6. Izquierda: Análisis de la suspensión de un vehículo en MSC.Adams/Car® (MSC.Adams®). Derecha: Análisis de una maniobra con un vehículo en CarSim® (CarSim®).	18
Figura 1.7. Funcionamiento del programa electrónico de estabilidad para evitar el sobreviraje frenando la rueda delantera izquierda (Bosch Automotive Technology). 18	
Figura 1.8. Modelo de vehículo utilizado para la estimación de estados (Kiencke, 2005).....	19
Figura 2.1. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta (Anderson, 2010). Derecha: Esquema de un modelo de cuatro ruedas (Imsland, 2006).....	23
Figura 2.2. Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el movimiento de la carrocería (Doumiati, 2009a).....	23
Figura 2.3. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el comportamiento vertical equivalente de la suspensión y del neumático a través de un muelle-amortiguador (Siegrist, 2006). Derecha: Esquema de un modelo de vehículo en el que se considera el comportamiento vertical equivalente de la suspensión y del neumático de manera independiente a través de dos conjuntos muelle-amortiguador y una masa intermedia correspondiente a la rueda (Imine, 2006).....	24
Figura 2.4. Modelo tridimensional CAE de una suspensión tipo McPherson para relacionar la fuerza axial en la bieleta de dirección con el par autoalineante en la rueda (Hsu, 2006a).	24
Figura 2.5. Interface gráfica de usuario de TruckSim para la obtención de datos de referencia con el objetivo de validar la estimación de estados frente a simulación (Cheng, 2011).	26
Figura 2.6. Diagramas de bloques de la realimentación de estados para el control del sistema midiendo los estados (izquierda) y estimando los estados mediante un observador de estados (derecha) (Braslavsky, 2001).	28
Figura 2.7. Diagrama de bloques de la estimación de estados (Braslavsky, 2001).	29

Figura 2.8. Diagrama de bloques de la estimación de estados para su realimentación sobre el sistema (Braslavsky, 2001).	29
Figura 2.9. Función de densidad del valor de la variable x condicionada a la medida z_1 (Maybeck, 1979).	31
Figura 2.10. Función de densidad del valor de la variable x condicionada a la medida z_2 (Maybeck, 1979).	32
Figura 2.11. Función de densidad de la estimación del valor de la variable x condicionada a las medidas z_1 y z_2 (Maybeck, 1979).	32
Figura 2.12. Transformación no lineal de una muestra de puntos correspondiente a una distribución estadística (Julier, 1994).	41
Figura 2.13. Esquema del funcionamiento del Filtro Kalman Extendido Dual para la estimación simultánea de parámetros y estados (Cheng, 2011).	44
Figura 2.14. Diagrama del proceso de estimación de las fuerzas verticales mediante la aplicación sucesiva de el Filtro Kalman Lineal y el Filtro Kalman Extendido (Doumiati, 2009a).	47
Figura 2.15. Izquierda: Modelo de bicicleta que considera el movimiento de la carrocería y los comportamientos verticales equivalentes de la suspensión y de los neumáticos. Derecha: Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido y consiguiente estimación del coeficiente de fricción. (Ray 1995a).	48
Figura 2.16. Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos, el ángulo de deriva, la velocidad de guiñada y la rigidez a deriva de los neumáticos mediante dos Filtros Kalman Extendidos sucesivos (Baffet, 2009a).	48
Figura 2.17. Diagrama de la estimación del coeficiente de fricción mediante ponderación probabilística de estimaciones de estados paralelas con el Filtro Kalman Extendido asumiendo distintos valores del coeficiente (Tsunashima, 2006).	49
Figura 2.18. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Diagrama de la estimación de las fuerzas en los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido y el modelo de neumático de Dugoff. (Dakhlallah, 2008).	49
Figura 2.19. Esquema de un modelo de vehículo articulado basado en el modelo de bicicleta considerando el balanceo de la carrocería (Cheng, 2011).	51
Figura 2.20. Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas (Wenzel, 2006).	51
Figura 2.21. Izquierda: Fotografía de un vehículo experimental con sistema de dirección eléctrico. Derecha: Esquema de un modelo de bicicleta. (Hsu, 2006).	52
Figura 2.22. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Diagrama de la estimación de la inclinación de la calzada mediante la aplicación del Filtro Kalman Extendido, el modelo de neumático de Dugoff y el Observador Luenberger. (Sebsadji, 2008a).	52
Figura 2.23. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Fotografía de un vehículo instrumentado para la obtención de datos experimentales con el fin de validar la estimación de estados. (Stéphant, 2007a).	53

Figura 2.24. Izquierda: Diagrama de la estimación de los esfuerzos en los neumáticos mediante el <i>Sliding Mode Observer</i> y la consiguiente estimación de la deriva del vehículo y de las rigideces a deriva de los neumáticos mediante el Filtro Kalman Extendido. Derecha: Esquema de un modelo de bicicleta. (Baffet, 2007).	54
Figura 2.25. Izquierda: Esquema de un modelo de vehículo de cuatro ruedas. Derecha: Esquema de un vehículo sometido a la inclinación de la calzada. (Sebsadji, 2008a).	55
Figura 2.26. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Esquema de un vehículo sometido al peralte de la calzada. (Sebsadji, 2008b).	55
Figura 2.27. Izquierda: Esquema de un modelo de bicicleta. Derecha: Gráfico de la fuerza lateral en el neumático frente a su ángulo de deriva comparando mediciones, un modelo de neumático trigonométrico simple y el modelo de Pacejka. (Gao, 2010). 56	
Figura 3.1. Diagrama del sistema dinámico real.	58
Figura 3.2. Diagrama del modelo del sistema dinámico.	58
Figura 3.3. Diagrama de la simulación del modelo matemático de un sistema dinámico.	59
Figura 3.4. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo matemático de un sistema dinámico.	60
Figura 3.5. Diagrama de la simulación del modelo CAE de un sistema dinámico, particularmente de un vehículo.....	61
Figura 3.6. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo CAE de un sistema dinámico por analogía con su aplicación sobre el modelo matemático (Figura 3.4).....	64
Figura 3.7. Diagrama de la estimación de estados sobre el modelo CAE de un sistema dinámico, particularmente de un vehículo.....	64
Figura 3.8. Procedimiento de la metodología presentada para la estimación de estados en modelos CAE	71
Figura 3.9. Imagen del modelo masa-muelle-amortiguador en MSC.Adams® ..	72
Figura 3.10. Gráfico del comportamiento del muelle.....	73
Figura 3.11. Gráfico del comportamiento del amortiguador.	73
Figura 3.12. Gráfico de la fuerza exterior, vertical sobre el centro de gravedad del cuerpo, a lo largo del tiempo.	74
Figura 3.13. Gráfico de la posición vertical del cuerpo en el sistema real.	74
Figura 3.14. Gráfico de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real.	74
Figura 3.15. Gráfico de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real. ...	75
Figura 3.16. Gráfico de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real... 75	
Figura 3.17. Gráfico de la comprobación de la Segunda Ley de Newton sobre el cuerpo en el sistema real.....	75
Figura 3.18. Gráfico comparativo del comportamiento del muelle real (azul) y en el modelo (rojo).	76

Figura 3.19. Gráfico comparativo del comportamiento del amortiguador real (azul) y en el modelo (rojo).	76
Figura 3.20. Gráfico comparativo del comportamiento del muelle real (azul) y en el modelo (rojo) en la zona de trabajo.	76
Figura 3.21. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.	77
Figura 3.22. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.	77
Figura 3.23. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.	77
Figura 3.24. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real y en la simulación del modelo.	78
Figura 3.25. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	80
Figura 3.26. Gráfico del error de la posición vertical del cuerpo en la estimación de estados respecto del sistema real.	81
Figura 3.27. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle-amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	81
Figura 3.28. Gráfico del error de la fuerza del muelle-amortiguador en la estimación de estados respecto del sistema real.	81
Figura 3.29. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	82
Figura 3.30. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	82
Figura 3.31. Función de densidad del ruido añadido a la posición vertical del cuerpo obtenida de la simulación del sistema real.	83
Figura 3.32. Gráfico de la posición vertical del cuerpo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	83
Figura 3.33. Gráfico de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la posición tras añadir un ruido aleatorio (azul).	84
Figura 3.34. Gráfico comparativo de la posición vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.	84
Figura 3.35. Gráfico del error de la posición vertical del cuerpo en la estimación de estados, con y sin ruido en la medida, respecto del sistema real.	85
Figura 3.36. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en el muelle-amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.	85
Figura 3.37. Gráfico del error de la fuerza vertical en el muelle-amortiguador en la estimación de estados, con y sin ruido en la medida, respecto del sistema real.	86

Figura 3.38. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.....	86
Figura 3.39. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del cuerpo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados con y sin ruido en la medida.....	86
Figura 4.1. Esquema tridimensional de la suspensión McPherson con sus elementos: 1.-Trapezio; 2.-Mangueta; 3.-Buje; 4.-Bieleta de dirección; 5.-Amortiguador; 5a.-Vástago del amortiguador; 5b.- Tubo del amortiguador; 6.- Muelle; 7.- Tirante de la barra estabilizadora; 8.-Barra estabilizadora; 9.-Cremallera de dirección; 10.- <i>Silent-block</i>	92
Figura 4.2. Esquema de la geometría de la suspensión McPherson en posición comprimida (izquierda) y extendida (derecha).....	93
Figura 4.3. Gráfico de la fuerza exterior, vertical sobre el centro de gravedad de la carrocería, a lo largo del tiempo.	96
Figura 4.4. Gráfico de la deformación del muelle en el sistema real.	96
Figura 4.5. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real.	97
Figura 4.6. Gráfico de la fuerza en el amortiguador en el sistema real.	97
Figura 4.7. Gráfico de la deformación del amortiguador en el sistema real.....	97
Figura 4.8. Gráfico de la fuerza en el muelle en el sistema real.....	98
Figura 4.9. Gráfico de la altura de la carrocería en el sistema real.....	98
Figura 4.10. Gráfico de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real.	98
Figura 4.11. Gráfico de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real.	99
Figura 4.12. Gráfico de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real.....	99
Figura 4.13. Gráfico de la altura del eje de la rueda en el sistema real.	99
Figura 4.14. Gráfico de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real.	100
Figura 4.15. Gráfico de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real.	100
Figura 4.16. Gráfico comparativo del comportamiento real (rojo) y en el modelo (azul) para el amortiguador.....	100
Figura 4.17. Gráfico comparativo de la deformación del muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.	101
Figura 4.18. Gráfico comparativo de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.	101
Figura 4.19. Gráfico comparativo de la fuerza en el amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.	101

Figura 4.20. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador en el sistema real y en la simulación del modelo.	102
Figura 4.21. Gráfico comparativo de la fuerza en el muelle en el sistema real y en la simulación del modelo.	102
Figura 4.22. Gráfico comparativo de la altura de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.	102
Figura 4.23. Gráfico comparativo de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.	103
Figura 4.24. Gráfico comparativo de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.	103
Figura 4.25. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.	103
Figura 4.26. Gráfico comparativo de la altura del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.	104
Figura 4.27. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.	104
Figura 4.28. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real y en la simulación del modelo.	104
Figura 4.29. Gráfico de la deformación del muelle en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	105
Figura 4.30.	106
Figura 4.31. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).	106
Figura 4.32.	106
Figura 4.33. Gráfico comparativo de la deformación del muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	107
Figura 4.34. Gráfico del error de la deformación del muelle en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	107
Figura 4.35. Gráfico comparativo de la fuerza en el amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	107
Figura 4.36. Gráfico del error de la fuerza en el amortiguador en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	108
Figura 4.37. Gráfico comparativo de la velocidad de deformación del muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	108
Figura 4.38. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	108

Figura 4.39. Gráfico comparativo de la fuerza en el muelle en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	109
Figura 4.40. Gráfico comparativo de la altura de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	109
Figura 4.41. Gráfico comparativo de la velocidad vertical de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	109
Figura 4.42. Gráfico comparativo de la aceleración vertical de la carrocería en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	110
Figura 4.43. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	110
Figura 4.44. Gráfico comparativo de la altura del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	110
Figura 4.45. Gráfico comparativo de la velocidad vertical del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	111
Figura 4.46. Gráfico comparativo de la aceleración vertical del eje de la rueda en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	111
Figura 4.47. Gráfico de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real.	113
Figura 4.48. Gráfico de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real.	113
Figura 4.49. Gráfico de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real.	114
Figura 4.50. Gráfico de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real.	114
Figura 4.51. Gráfico de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real.	114
Figura 4.52. Gráfico de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real.	115
Figura 4.53. Gráfico de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real.	115
Figura 4.54. Gráfico de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real.	115
Figura 4.55. Gráfico del balanceo de la carrocería en el sistema real.	116
Figura 4.56. Gráfico del cabeceo de la carrocería en el sistema real.	116
Figura 4.57. Gráfico de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real.	116

Figura 4.58. Gráfico de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real.	116
Figura 4.59. Gráfico de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real.	117
Figura 4.60. Gráfico de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real.	117
Figura 4.61. Gráfico de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real.	117
Figura 4.62. Gráfico de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real.	118
Figura 4.63. Gráfico de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real.	118
Figura 4.64. Gráfico de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real.	118
Figura 4.65. Gráfico comparativo del comportamiento real de los amortiguadores delanteros (rojo) y su comportamiento en el modelo (azul).	119
Figura 4.66. Gráfico comparativo del comportamiento real de los amortiguadores traseros (rojo) y su comportamiento en el modelo (azul).	119
Figura 4.67. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	119
Figura 4.68. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	120
Figura 4.69. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	120
Figura 4.70. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	120
Figura 4.71. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	121
Figura 4.72. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	121
Figura 4.73. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	121
Figura 4.74. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	122
Figura 4.75. Gráfico comparativo del balanceo de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.	122
Figura 4.76. Gráfico comparativo del cabeceo de la carrocería en el sistema real y en la simulación del modelo.	122
Figura 4.77. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	123
Figura 4.78. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	123

Figura 4.79. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.....	123
Figura 4.80. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	124
Figura 4.81. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	124
Figura 4.82. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	124
Figura 4.83. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	125
Figura 4.84. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real y en la simulación del modelo.	125
Figura 4.85. Gráfico de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	126
Figura 4.86. Gráfico de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	126
Figura 4.87. Gráfico de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	126
Figura 4.88. Gráfico de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real (rojo) y el resultado de la medida al añadir un ruido aleatorio (azul).	127
Figura 4.89. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle delantero derecho en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).	127
Figura 4.90. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).....	127
Figura 4.91. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle trasero derecho en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).	128
Figura 4.92. Gráfico de la velocidad de deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real (rojo) y calculada respecto a la medida de la deformación tras añadir un ruido aleatorio (azul).	128
Figura 4.93. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	128
Figura 4.94. Gráfico comparativo de la deformación del muelle delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	129
Figura 4.95. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.....	129

Figura 4.96. Gráfico comparativo de la deformación del muelle trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.....	129
Figura 4.97. Gráfico del error de la deformación del muelle delantero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	130
Figura 4.98. Gráfico del error de la deformación del muelle delantero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	130
Figura 4.99. Gráfico del error de la deformación del muelle trasero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	130
Figura 4.100. Gráfico del error de la deformación del muelle trasero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	131
Figura 4.101. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	131
Figura 4.102. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	131
Figura 4.103. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	132
Figura 4.104. Gráfico comparativo de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	132
Figura 4.105. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador delantero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	132
Figura 4.106. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador delantero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	133
Figura 4.107. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador trasero derecho en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	133
Figura 4.108. Gráfico del error de la fuerza del amortiguador trasero izquierdo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	133
Figura 4.109. Gráfico del error del balanceo del vehículo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	134
Figura 4.110. Gráfico del error del cabeceo del vehículo en la estimación de estados sobre medida ruidosa respecto del sistema real.	134
Figura 4.111. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	134
Figura 4.112. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	135

Figura 4.113. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	135
Figura 4.114. Gráfico comparativo de la deformación del amortiguador trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	135
Figura 4.115. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	136
Figura 4.116. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle delantero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	136
Figura 4.117. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	136
Figura 4.118. Gráfico comparativo de la fuerza del muelle trasero izquierdo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados sobre medida ruidosa.	137
Figura 4.119. Gráfico de la velocidad del vehículo en el sistema real.	138
Figura 4.120. Gráfico de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real. .	138
Figura 4.121. Gráfico de la guiñada del vehículo en el sistema real.	139
Figura 4.122. Gráfico del cabeceo del vehículo en el sistema real.....	139
Figura 4.123. Gráfico del balanceo del vehículo en el sistema real.	139
Figura 4.124. Gráfico de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real.....	140
Figura 4.125. Gráfico de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real.	140
Figura 4.126. Gráfico de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real.	140
Figura 4.127. Gráfico de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real.....	141
Figura 4.128. Gráfico del par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real.	141
Figura 4.129. Gráfico comparativo de la velocidad del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.	142
Figura 4.130. Gráfico comparativo de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.	142
Figura 4.131. Gráfico comparativo de la guiñada del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.	142
Figura 4.132. Gráfico comparativo del cabeceo del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.	143

Figura 4.133. Gráfico comparativo del balanceo del vehículo en el sistema real y en la simulación del modelo.	143
Figura 4.134. Gráfico de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	144
Figura 4.135. Gráfico de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	144
Figura 4.136. Gráfico de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	144
Figura 4.137. Gráfico de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	145
Figura 4.138. Gráfico par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real y en la simulación del modelo.	145
Figura 4.139. Gráfico de la fuerza longitudinal en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.	146
Figura 4.140. Gráfico de la fuerza lateral en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.	147
Figura 4.141. Gráfico de la fuerza vertical en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.	147
Figura 4.142. Gráfico del par en torno al eje longitudinal en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.	147
Figura 4.143. Gráfico del par en torno al eje vertical en la mangueta delantera derecha según su sistema de coordenadas local en el sistema real y en la simulación del modelo.	148
Figura 4.144. Gráfico del par transmitido de la rueda al palier en el sistema real y en la simulación del modelo.	148
Figura 4.145. Gráfico de detalle del par transmitido de la rueda al palier en el sistema real y en la simulación del modelo.	148
Figura 4.146. Gráfico de esfuerzos en el trapecio en el sistema real según el sistema de coordenadas local de la mangueta.	149
Figura 4.147. Gráfico comparativo de esfuerzos longitudinales en trapecio, mangueta y rueda en el sistema real según el eje de la mangueta, que coincide con el del neumático.	149
Figura 4.148. Gráfico comparativo de esfuerzos transversales en trapecio, mangueta y rueda en el sistema real según el eje de la mangueta, que coincide con el del neumático.	150
Figura 4.149. Gráfico de esfuerzos en el tubo del amortiguador en el sistema real según su sistema de coordenadas local.	150

Figura 4.150. Gráfico comparativo del esfuerzo normal en el tubo del amortiguador, la fuerza vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local y la fuerza vertical en el neumático en el sistema real.	151
Figura 4.151. Gráfico comparativo del esfuerzo normal en la bieleta de dirección, el par en torno al el eje vertical local de la mangueta y el par autoalineante en el neumático en el sistema real.	151
Figura 4.152. Esquema de los esfuerzos en el punto de contacto teórico del neumático con la calzada para su traslación al eje de giro de la rueda sobre la mangueta.	153
Figura 4.153. Esquema de los sistemas de coordenadas sucesivos desde el sistema de coordenadas del neumático (x-y-z) hasta el sistema de coordenadas de la mangueta (x'-y'-z') teniendo en cuenta su cabeceo primero y su balanceo después... 154	154
Figura 4.154. Gráfico comparativo del ángulo de balanceo de la mangueta y del ángulo de caída de la rueda.....	154
Figura 4.155. Gráfico de detalle del comparativo del ángulo de balanceo de la mangueta y del ángulo de caída de la rueda.	155
Figura 4.156. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	157
Figura 4.157. Gráfico del error en la estimación de la fuerza longitudinal del neumático delantero derecho.	157
Figura 4.158. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	158
Figura 4.159. Gráfico del error en la estimación de la fuerza lateral del neumático delantero derecho.	158
Figura 4.160. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	158
Figura 4.161. Gráfico del error en la estimación de la fuerza vertical del neumático delantero derecho.	159
Figura 4.162. Gráfico comparativo de la resistencia a la rodadura en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	159
Figura 4.163. Gráfico del error en la estimación del par de resistencia a la rodadura del neumático delantero derecho.	159
Figura 4.164. Gráfico comparativo del par autoalineante en el neumático delantero derecho en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	160
Figura 4.165. Gráfico del error en la estimación del par autoalineante del neumático delantero derecho.	160

Figura 4.166. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en el trapecio según el sistema de coordenadas local de la mangueta en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	160
Figura 4.167. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en el trapecio según el sistema de coordenadas local de la mangueta en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	161
Figura 4.168. Gráfico comparativo de la fuerza normal en el tubo del amortiguador en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	161
Figura 4.169. Gráfico comparativo de la fuerza normal en la bieleta de dirección en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	161
Figura 4.170. Gráfico comparativo de la velocidad del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	162
Figura 4.171. Gráfico comparativo de la fuerza longitudinal en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	162
Figura 4.172. Gráfico comparativo de la fuerza lateral en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	162
Figura 4.173. Gráfico comparativo de la fuerza vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	163
Figura 4.174. Gráfico comparativo del par en torno al eje longitudinal en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	163
Figura 4.175. Gráfico comparativo del par en torno al eje vertical en la mangueta según su sistema de coordenadas local en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	163
Figura 4.176. Gráfico de detalle del comparativo del par transmitido entre la rueda y el palier en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.	164
Figura 4.177. Gráfico comparativo de la velocidad lateral del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	164
Figura 4.178. Gráfico comparativo de la guiñada del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	164
Figura 4.179. Gráfico comparativo del cabeceo del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	165
Figura 4.180. Gráfico comparativo del balanceo del vehículo en el sistema real, en la simulación del modelo y en la estimación de estados.....	165
Figura 4.181. Instrumentación de la bieleta de dirección por extensometría para la medición de la fuerza normal (Luque, 2013).....	166
Figura 7.1. Imagen general del modelo de suspensión McPherson en MSC.Adams®.	186

Figura 7.2. Izquierda: Imagen de la restricción traslacional vertical impuesta al centro de gravedad de la carrocería y de la fuerza vertical exterior actuante sobre él. Derecha: Imagen de las restricciones cinemáticas fijas en el plano de simetría longitudinal del vehículo sobre la cremallera de dirección y la barra estabilizadora...	186
Figura 7.3. Imagen del modelo de suspensión McPherson en MSC.Adams® con todos sus elementos identificados.....	187
Figura 7.4. Imagen de las restricciones sobre el trapecio y la biletta de dirección.	187
Figura 7.5. Imagen de las restricciones correspondientes al muelle y al amortiguador.....	188
Figura 7.6. Imagen de las restricciones sobre los elementos de la transmisión.	189
Figura 7.7. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora.	189
Figura 7.8. Imagen de las restricciones sobre la mangueta, el cubo y la rueda y de los esfuerzos en el neumático.	190
Figura 7.9. Imagen de dos posiciones de la suspensión McPherson: extendida a la izquierda y comprimida a la derecha.	190
Figura 8.1. Imagen general del modelo de vehículo completo en MSC.Adams®.	199
Figura 8.2. Imagen de las restricciones sobre el subchasis delantero.....	200
Figura 8.3. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora delantera.....	200
Figura 8.4. Imagen de la aplicación del par motor sobre ambas salidas del diferencial en el tren delantero.	201
Figura 8.5. Imagen de la aplicación del par del freno sobre el cubo de la rueda delantera.....	201
Figura 8.6. Imagen de la suspensión trasera tipo multibrazo con todos sus elementos identificados.	202
Figura 8.7. Imagen de la aplicación del par de freno sobre la rueda trasera.....	202
Figura 8.8. Imagen de las restricciones sobre el subchasis trasero.....	203
Figura 8.9. Imagen de las restricciones sobre los brazos superior e inferior.	203
Figura 8.10. Imagen de las restricciones sobre el brazo arrastrado trasero.	204
Figura 8.11. Imagen de las restricciones correspondientes al muelle.....	204
Figura 8.12. Imagen de la restricción correspondiente al amortiguador.	205
Figura 8.13. Imagen de las restricciones correspondientes a la barra estabilizadora.	205
Figura 8.14. Imagen de la restricción entre mangueta y rueda y de los esfuerzos en el neumático.	206
Figura 8.15. Desplazamiento de la cremallera de dirección para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo.	215

Figura 8.16. Par de salida del motor para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo..... 215

Figura 8.17. Par de frenado en cada rueda delantera para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo..... 215

Figura 8.18. Par de frenado en cada rueda trasera para la realización de la maniobra con el modelo completo de vehículo..... 216

Índice de tablas

Tabla 7.1. Cuerpos rígidos incluidos en el modelo de suspensión McPherson.	191
Tabla 7.2. Restricciones cinemáticas del modelo de suspensión McPherson. .	191
Tabla 7.3. Restricciones dinámicas del modelo de suspensión McPherson.	192
Tabla 8.1. Cuerpos rígidos incluidos en el modelo de vehículo completo.	206
Tabla 8.2. Restricciones cinemáticas del modelo de vehículo completo.....	207
Tabla 8.3. Restricciones dinámicas del modelo de vehículo completo.	208