Trabajo EDAFI

Daniel Fernández Fernández Iyán Méndez Veiga

Curso 2013/2014

1.- Considere el sistema lineal de ecuaciones $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$, donde A y $\vec{f}$ viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Obtener una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, así como su solución general.**

b) **Hallar la solución del sistema completo que satisfaga la condición inicial $\vec{x}(0) = (0, -1, 0, 0)^T$.**

Nota: si se realiza algún cálculo utilizando Maxima, explíquese.

La matriz fundamental del sistema lineal homogéneo es una matriz formada por un sistema fundamental de soluciones (cada columna es una solución independiente del resto), esto es, una base del espacio vectorial solución del sistema. Esta matriz se puede calcular de la siguiente forma:

$$\phi(t) = e^{At}$$

Así que, en la práctica, hallar esta matriz se reduce a calcular la exponencial de la matriz de coeficientes constantes A por la variable independiente t. La solución general de la homogénea será esta matriz multiplicada por un vector de constantes arbitrarias.

Para hallar esta exponencial analíticamente (sin recurrir a Maxima) antes obtendremos la forma de Jordan de A y la base de vectores para conseguir la matriz de paso P. Calcularemos $\phi(t)$ entonces de la siguiente manera:

$$\phi(t) = Pe^{Jt}P^{-1}$$

En primer lugar determinamos los autovalores de A, que son las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\Big[(-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 + (-2-\lambda) + (-1-\lambda) - (-3-\lambda)\Big] =$$

$$= (-2-\lambda)\Big[-6 - 2\lambda - 3\lambda - \lambda^2 - 6\lambda - 2\lambda^2 - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2 - 2 - \lambda - 1 - \lambda + 3 + \lambda\Big] =$$

$$= (-2-\lambda)\Big[-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8\Big] = (2+\lambda)\Big[\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8\Big] = (2+\lambda)(2+\lambda)^3 = (2+\lambda)^4$$

La raíz de esta polinomio es -2, así que tenemos que el espectro de A está formado por un único autovalor $\lambda = -2$ de multiplicidad $m_\lambda = 4$:

$$\sigma(A) = \{-2\}$$

Ahora buscamos una base del subespacio propio asociado a este vector: $N(-2,1) = \ker(A + 2I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De este sistema obtenemos dos ecuaciones independientes entre sí, a partir de las cuales podemos obtener la base.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= -x \end{aligned}\right\} \quad \ker(A + 2I) = \{(x, 0, -x, v) : x, v \in \mathbb{R}\}$$

$$N(-2,1) = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Esta matriz no es diagonalizable ya que para serlo tendríamos que encontrar una base con n vectores propios, en este caso 4 autovectores, y sin embargo, la dimensión del subespacio propio es 2. Con esto ya sabemos que la forma de Jordan tendrá dos cajas. Para encontrar la base en la que la matriz A estará en la forma de

Jordan necesitaremos otros dos vectores (que ya no serán propios) así que seguimos obteniendo los subespacios $N(-2,k) = \ker(A+2I)^k$ hasta alcanzar el índice del autovalor.

$$N(-2,2) = \ker(A+2I)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + z = 0 \Rightarrow x = -z$$

$$\ker(A+2I)^2 = \{(x, y, -x, v) : x, y, v \in \mathbb{R}\}$$

$$N(-2,2) = \langle (1,0,-1,0), (0,1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$$

Cuando calculamos $N(-2,3)$ hallamos la matriz nula, por lo que ya determinamos el índice del autovalor: $\nu(\lambda) = 3$. Esto nos informa del tamaño de la caja más grande, que será de 3×3 mientras que tendremos una caja 1×1 que completa la matriz. Ya conocemos la forma de la matriz de Jordan pero aún nos queda determinar la base para obtener la matriz de paso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A+2I)^3 = \mathbb{R}^4$$

$$N(-2,3) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para conseguir esta matriz, los vectores de la base serán los siguientes. El primero será un vector de $N(-2,3)$ linealmente independiente con los de $N(-2,2)$.

$$e_1 = (1,0,0,0)^T$$

El segundo lo obtenemos de multiplicar $(A+2I)$ por el primero:

$$(A+2I)e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = (1,1,-1,1)^T$$

El tercer vector de la base lo podemos obtener de multiplicar $(A+2I)$ por el segundo o de multiplicar $(A+2I)^2$ por el primero:

$$(A+2I)^2 e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya no podemos obtener más vectores de esta forma, si multiplicamos $(A+2I)^3 e_1$ obtendríamos el vector nulo, así que el último vector de la base será un vector propio de $N(-2,1)$ linealmente independiente con los tres vectores que ya tenemos.

$$e_4 = (0,0,0,1)^T$$

Si escribimos los vectores de la base en columnas obtenemos la matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando Maxima comprobamos rápidamente que efectivamente $P^{-1}AP = J$.

```
(%i7) A:matrix([-1,1,1,0],[1,-2,1,0],[-1,-1,-3,0],[1,1,1,-2]);
       [-1  1  1  0]
       [ 1 -2  1  0]
(%o7)  [-1 -1 -3  0]
       [ 1  1  1 -2]

(%i8) P:matrix([1,1,1,0],[0,1,0,0],[0,-1,-1,0],[0,1,1,1]);
       [0  1  1  0]
       [0  1  0  0]
(%o8)  [0 -1 -1  0]
       [0  1  1  1]

(%i9) P^^(-1).A.P;
       [-2  0  0  0]
       [ 1 -2  0  0]
(%o9)  [ 0  1 -2  0]
       [ 0  0  0 -2]
```

Figura (1): *Obteniendo la forma de Jordan con Maxima*

Ahora vamos a hallar la exponencial de la matriz de Jordan por t: $e^J t$. Para ello es más cómodo trabajar por cajas:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad J_2 = (-2)$$

La exponecial de la caja pequeña es trivial al ser un número. La exponencia de la caja 3×3 tenemos que aplicar la fórmula:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A\,A}{2!} + \frac{A\,A\,A}{3!} + \ldots$$

Pero antes separamos la matriz en suma de una parte diagonal y otra no diagonal. En general $e^{A+B} \neq e^A + e^B$ a no ser que se cumpla que $AB = BA$, es decir, que la matrices conmuten. Como una de ellas es diagonal, sabemos que conmutan y por tanto podemos hacer ese paso. A partir de ahí, la exponencial de la matriz diagonal también es sencilla ya que se hace término a término, y para la otra matriz también es relativamente sencillo hallar su exponencial porque al ser una matriz nilpotente solo tendremos que calcular unos pocos términos de la serie de arriba antes de que la matriz se anule a partir de una cierta potencia.

$$e^{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} t} = e^{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} t}$$

$$e^{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{-2t} I$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} t} = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_1 t} = e^{-2t} I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{J_2 t} = e^{-2t}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos la exponencial de la matriz A en su forma de Jordan, para conseguir la matriz fundamental del sistema solo tendríamos que multiplicar por la izquierda por la matriz de paso y por la derecha por la inversa de la matriz de paso.

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & e^{-2t} + te^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ -te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} & -e^{-2t} - te^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & e^{-2t} + te^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ -te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} & -te^{-2t} & -te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} + e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Ya hemos hallado la matriz fundamental del sistema. La solución general de la homogénea es esta matriz multiplicada por un vector de constantes:

$$\vec{x}_h(t) = \phi(t)\vec{c} = \phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} (e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t})c_1 + te^{-2t}c_2 + (te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t})c_3 \\ te^{-2t}c_1 + e^{-2t}c_2 + te^{-2t}c_3 \\ (-te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t})c_1 - te^{-2t}c_2 - (te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} + e^{-2t})c_3 \\ (te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t})c_1 + te^{-2t}c_2 + (te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t})c_3 + e^{-2t}c_4 \end{pmatrix}$$

Para el segundo apartado nos piden la solución de la completa con una condición inicial. Es decir, se trata de un problema de Cauchy. La solución de la completa será suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la completa:

$$\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{x}_0 + \phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

La matriz fundamental que calculamos para el apartado anterior es la matriz fundamental principal porque cuando $t = t_0$, obtenemos la matriz identidad. Así que podemos obtener la solución general simplemente sustituyendo en la expresión de arriba. Tampoco hace falta calcular la inversa de la matriz fundamental porque $\phi^{-1}(t) = e^{-At} = e^{A(-t)} = \phi(-t)$.

$$\phi(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ -te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} & -te^{-2t} & -te^{-2t} - \frac{t^2}{2} e^{-2t} + e^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & te^{-2t} & te^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ te^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(-s)\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} e^{2s} - se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} & -se^{2s} & -se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} & 0 \\ -se^{2s} & e^{2s} & -se^{2s} & 0 \\ se^{2s} - \frac{s^2}{2}e^{2s} & se^{2s} & se^{2s} - \frac{s^2}{2}e^{2s} + e^{2s} & 0 \\ -se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} & -se^{2s} & -se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} & e^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2s} - se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} \\ -se^{2s} \\ se^{2s} - \frac{s^2}{2}e^{2s} \\ -se^{2s} + \frac{s^2}{2}e^{2s} \end{pmatrix}$$

La integral de una matriz es una matriz de integrales término a término. Esta cuenta la hicimos con Maxima: definimos la matriz fundamental como una función de t y luego calculamos la integral definida de 0 a t:

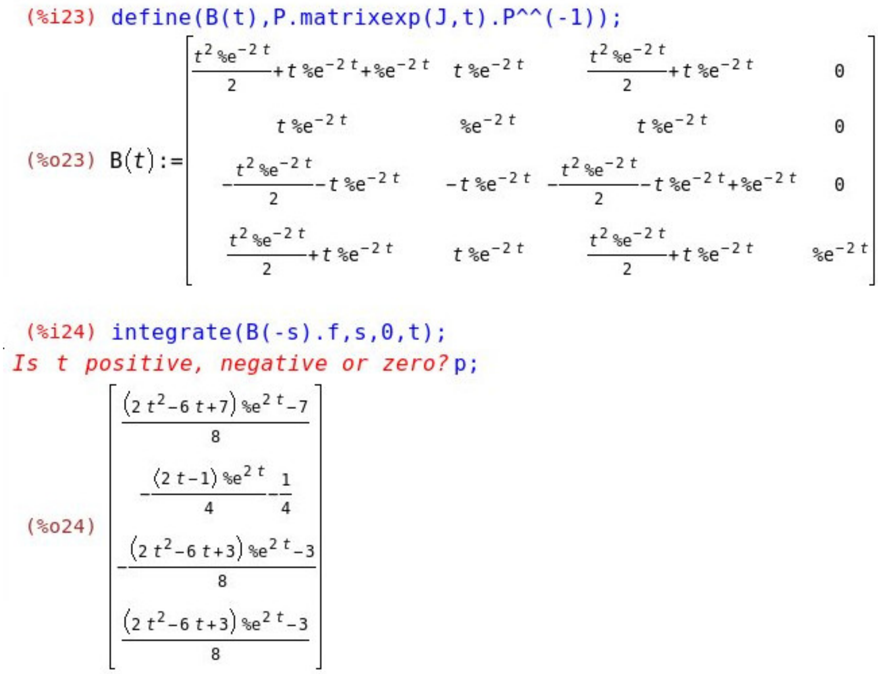
```
(%i23) define(B(t),P.matrixexp(J,t).P^^(-1));
(%o23) B(t):= matrix(
 [t^2 %e^(-2 t)/2 + t %e^(-2 t) + %e^(-2 t), t %e^(-2 t), t^2 %e^(-2 t)/2 + t %e^(-2 t), 0],
 [t %e^(-2 t), %e^(-2 t), t %e^(-2 t), 0],
 [-t^2 %e^(-2 t)/2 - t %e^(-2 t), -t %e^(-2 t), -t^2 %e^(-2 t)/2 - t %e^(-2 t) + %e^(-2 t), 0],
 [t^2 %e^(-2 t)/2 + t %e^(-2 t), t %e^(-2 t), t^2 %e^(-2 t)/2 + t %e^(-2 t), %e^(-2 t)])
(%i24) integrate(B(-s).f,s,0,t);
Is t positive, negative or zero?p;
(%o24) matrix(
 [((2 t^2-6 t+7) %e^(2 t)-7)/8],
 [-((2 t-1) %e^(2 t))/4 - 1/4],
 [-((2 t^2-6 t+3) %e^(2 t)-3)/8],
 [((2 t^2-6 t+3) %e^(2 t)-3)/8])
```

Figura (2): *Obteniendo la integral definida con Maxima*

$$\int_0^t \phi(-s)\vec{f}(s)ds = \begin{pmatrix} \frac{(2t^2-6t+7)e^{2t}-7}{8} \\ -\frac{(2t-1)e^{2t}+1}{4} \\ -\frac{(2t^2-6t+3)e^{2t}+3}{8} \\ \frac{(2t^2-6t+3)e^{2t}-3}{8} \end{pmatrix}$$

Por último multiplicamos por la matriz fundamental y sumamos el resultado con el vector que ya teníamos calculado antes:

$$\phi(t)\int_0^t \phi(-s)\vec{f}(s)ds = \begin{pmatrix} \frac{(7e^{2t}-2t^2-6t-7)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(e^{2t}-2t-1)e^{-2t}}{4} \\ -\frac{(3e^{2t}-2t^2-6t-3)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(3e^{2t}-2t^2-6t-3)e^{-2t}}{8} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{x}_0 + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds = \begin{pmatrix} -te^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ te^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(7e^{2t}-2t^2-6t-7)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(e^{2t}-2t-1)e^{-2t}}{4} \\ -\frac{(3e^{2t}-2t^2-6t-3)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(3e^{2t}-2t^2-6t-3)e^{-2t}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(7e^{2t}-2t^2-14t-7)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(e^{2t}-2t-5)e^{-2t}}{4} \\ -\frac{(3e^{2t}-2t^2-14t-3)e^{-2t}}{8} \\ \frac{(3e^{2t}-2t^2-14t-3)e^{-2t}}{8} \end{pmatrix}$$

Para terminar el ejercicio, comprobamos el resultado con Maxima pero sin hacer todos estos pasos, simplemente escribiendo el sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales:

```
(%i19) atvalue(x(t),t=0,0)$
       atvalue(y(t),t=0,-1)$
       atvalue(z(t),t=0,0)$
       atvalue(v(t),t=0,0)$

(%i23) ec1b:'diff(x(t),t)=-x(t)+y(t)+z(t)+1$
       ec2b:'diff(y(t),t)=x(t)-2*y(t)+z(t)$
       ec3b:'diff(z(t),t)=-x(t)-y(t)-3*z(t)$
       ec4b:'diff(v(t),t)=x(t)+y(t)+z(t)-2*v(t)$

(%i27) soluc2:desolve([ec1b, ec2b, ec3b, ec4b],[x(t), y(t)
       , z(t),v(t)]),ratsimp$

(%i28) soluc2[1];
       soluc2[2];
       soluc2[3];
       soluc2[4];
```

(%o28) $x(t)=\frac{\%e^{-2\,t}\left(7\,\%e^{2\,t}-2\,t^2-14\,t-7\right)}{8}$

(%o29) $y(t)=\frac{\%e^{-2\,t}\left(\%e^{2\,t}-2\,t-5\right)}{4}$

(%o30) $z(t)=-\frac{\%e^{-2\,t}\left(3\,\%e^{2\,t}-2\,t^2-14\,t-3\right)}{8}$

(%o31) $v(t)=\frac{\%e^{-2\,t}\left(3\,\%e^{2\,t}-2\,t^2-14\,t-3\right)}{8}$

Figura (3): *Resolviendo el problema de Cauchy directamente en Maxima*

2.- La ecuación de Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

con $\mu > 0$, modela ciertos circuitos eléctricos que contienen tubos de vacío. Hallar sus puntos críticos y estudiar su estabilidad en función del parámetro μ.

Obténgase su diagrama de fases utilizando Maxima (dar un valor a μ) y coméntese.

El oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico, un sistema físico cuyo estado evoluciona con el tiempo, consistente en un circuito eléctrico no lineal utilizado a principios del siglo pasado.

La ecuación de Van der Pool describe el comportamiento de estos circuitos electrónicos no lineales como los que fueron usados en los primeros aparatos de radio. Este tipo de circuito se usaba en su día con tubos de vacío. Los tubos actúan como una resistencia eléctrica normal (los tubos de vacío se oponen al paso de la corriente), de acuerdo a la ley de Ohm al aumentar el voltaje la intensidad de corriente aumenta, sin embargo se comportan como una resistencia «negativa»[1] cuando la corriente es baja. Por tanto un circuito de este tipo favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las grandes oscilaciones. Este tipo de comportamiento se conoce como oscilaciones de relajación. La ecuación que describe este sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Donde μ es una constante que mide la no linealidad del sistema, es decir, μ es el denominado coeficiente de amortiguamiento. Para distintos valores de μ obtendremos diferentes amortiguaciones. Para $\mu = 0$, el sistema es un oscilador lineal armónico (péndulo simple). A medida que μ crece, el sistema se hace más no lineal. Las oscilaciones del sistema tienen un periodo del orden de 2μ (esto puede verse en las prácticas realizadas en el laboratorio).

Una manera alternativa de representar la dinámica del sistema es mediante el concepto de *espacio de fases*. El espacio de fases es el espacio bidimensional formado por la variable x y su derivada temporal. Podemos representar el estado del sistema en cada instante como un punto en el espacio de fases. A medida que el sistema evoluciona en el tiempo, el sistema describe una *órbita* en dicho espacio. Si el comportamiento del sistema tiende a un valor estacionario fijo, la trayectoria en el espacio de fases acaba en un punto. Si el sistema tiende a un estado periódico, la trayectoria acaba siendo una órbita cerrada. El sistema es periódico y la órbita recibe el nombre de ciclo límite estable.

Las oscilaciones del sistema son muy estables para valores grandes de μ. La órbita tiende rápidamente al ciclo límite desde las condiciones iniciales $x = 1$ y $dx/dt = 0$. A medida que disminuye, la estabilidad del sistema disminuye también. Cuando se hace negativa, el ciclo límite se vuelve inestable. Esta última parte no la veremos.

En primer lugar transformamos la ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0 \Rightarrow x'' = \mu(1-x^2)x' - x$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \equiv f_1(x_1,x_2) \\ x_2' = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 = -x_1 + \mu x_2 \underbrace{-\mu x_2 x_1^2}_{\text{no lineal}} \equiv f_2(x_1,x_2) \end{array}\right.$$

Los puntos críticos son aquellos $\vec{x} = \vec{a} \in \mathbb{R}^N \ / \ \vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$, es decir, aquellos puntos cuya primera derivada se anula. Si imponemos esta condición a cada una de las componentes de nuestro sistema obtenemos que este sistema lineal tiene un único punto crítico en el $(0,0)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \Longrightarrow P_c(0,0)$$

Vamos a hacer un estudio cualitativo en un entorno del punto crítico. Para ello vamos a linealizar el sistema,

[1] No es que existan las resistencias negativas, es la manera de llamar a una resistencia que a ciertas tensiones hace que la corriente disminuya no cumpliendo la ley de Ohm. Son los llamados materiales no Óhmicos

es decir, hacer un desarrollo en serie de Taylor en un entorno del $(0,0)$ quedándonos solo con los términos lineales.

$$f_1(x_1,x_2) = f_1(0,0) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} x_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} x_2 + \ldots = x_2 + \ldots$$

$$f_2(x_1,x_2) = f_2(0,0) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} x_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} x_2 + \ldots = \Big[1 - 2\mu x_1 x_2\Big]_{(0,0)} x_1 + \Big[\mu - \mu x_1^2\Big]_{(0,0)} x_2 = -x_1 + \mu x_2 + \ldots$$

Ahora tenemos un sistema lineal $\vec{x}' = A\vec{x}$ que podemos expresar de forma matricial y que vamos a estudiar a continuación:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar vamos a calcular los autovalores de esta matriz. En función del parámetro μ tendremos unos autovalores u otros y por tanto un diagrama de fase distinto.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\mu - \lambda) + 1 = -\mu\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mu\lambda + 1$$

Los autovalores son las raíces del polinomio característico:

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Los autovalores dependen de μ y como $\mu > 0$ tendremos tres situaciones distintas en función del valor que tome. En la siguiente tabla se resumen estos casos:

$\mu > 0$	λ	Sistema lineal	Sistema no lineal
$\mu \in (0,2)$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\lambda = a \pm ib$	$a > 0$ siempre $\Rightarrow$ Foco repulsivo	Foco repulsivo
$\mu = 2$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$	Nodo propio o impropio repulsivo	Nodo propio, impropio o foco repulsivo
$\mu \in (2,\infty)$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo impropio repulsivo	Nodo impropio repulsivo

Ya para acabar vamos a obtener un diagrama de fase usando Maxima para cada uno de estos tres casos: cuando $\mu = 1$, $\mu = 2$ y $\mu = 3$.

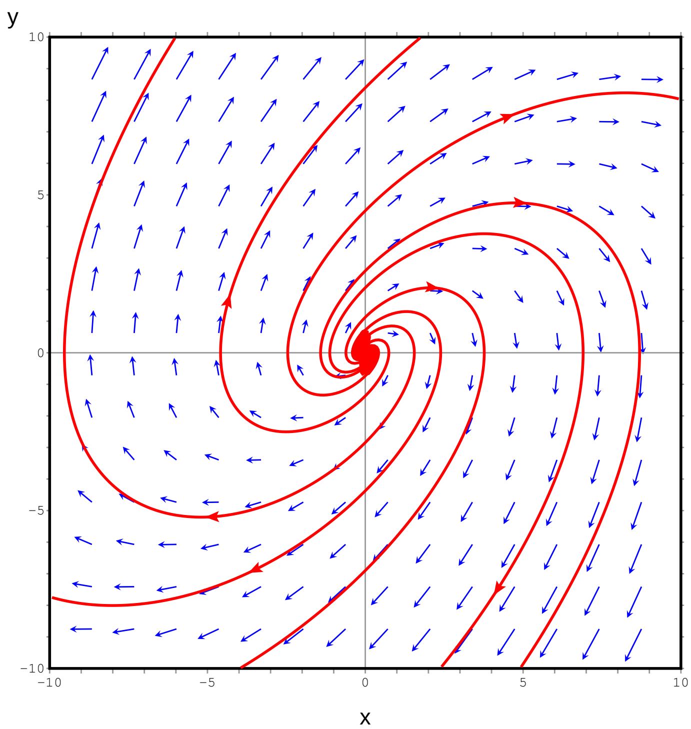

Figura (4): *Diagrama de fase para* $\mu = 1$

Podemos ver a simple vista que se trata de un **foco repulsivo**. Esto se debe a que los autovalores de la matriz del sistema $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es un autovalor complejo con parte real positiva y su conjuado, $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

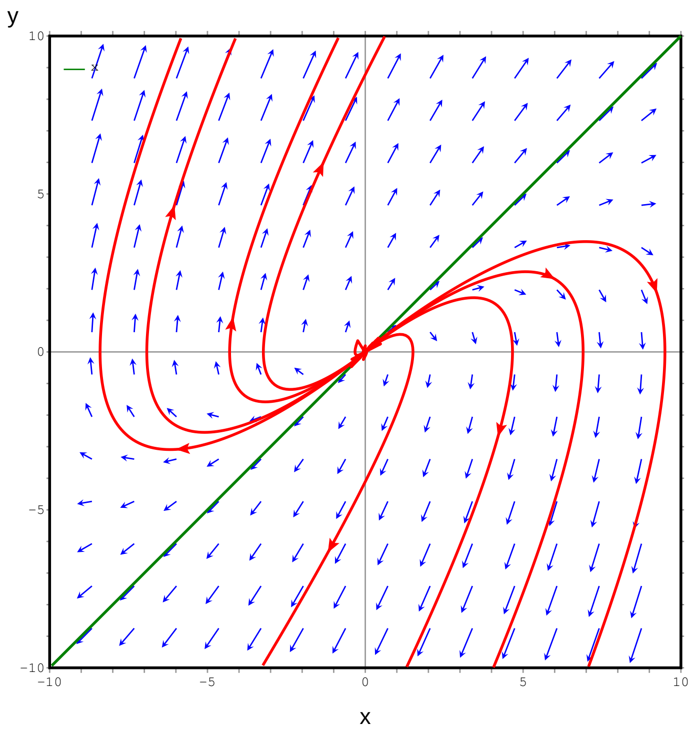

Figura (5): *Diagrama de fase para* $\mu = 2$

Cuando $\mu = 2$ observamos que se trata de un **nodo impropio repulsivo**. Esto es debido a que tenemos un autovalor real positivo, $\lambda = 1$, de multiplicidad 2 y un único autovector, $\ker(A - I) = \langle (1,1) \rangle$

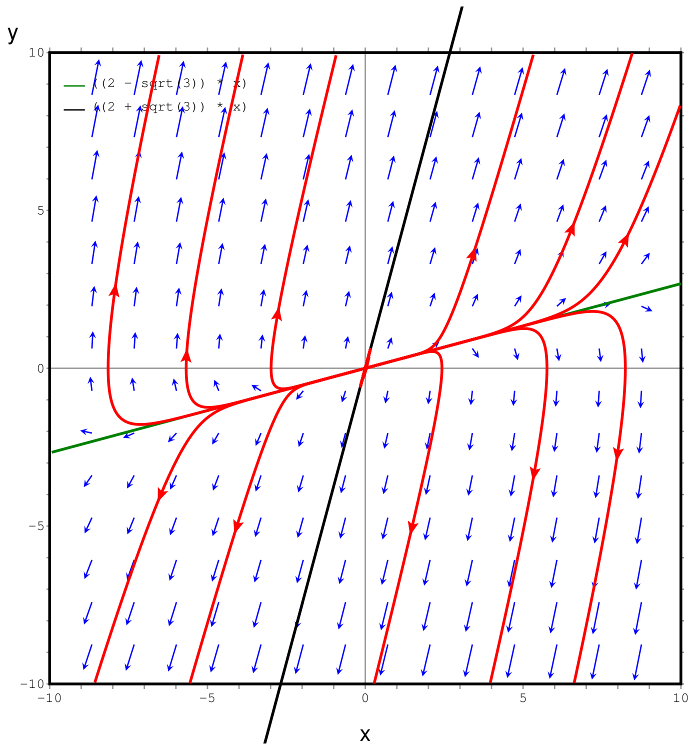

Figura (6): *Diagrama de fase para* $\mu = 3$

En el último caso también estamos ante un **nodo impropio repulsivo** pero ahora estamos en el caso de tener dos autovalores distintos positivos, $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$ y $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$. También tenemos dos autovectores así que como se ve en la imagen, las trayectorias salen tangencialmente a la recta con la dirección del autovector asociado al autovalor más pequeño y tienen a ir paralelamente a la recta con la dirección del autovector asociado al autovalor mayor.

Por último, hicimos en Maxima utilizando «plotdf» un diagrama de fases que nos permite escoger el valor de μ entre 0 y 4. Podemos observar todos los comportamientos aquí descritos incluido el caso límite cuando $\mu = 0$ que se corresponde a un centro.

```
(%i1) plotdf([y,-x+mu*y],
             [parameters,"mu=0"],
             [sliders,"mu=0:4"]);
```