

Música, danza y matemáticas, naturalmente

VICENTE LIERN CARRIÓN

BLANCA PÉREZ GLADISH

VIVIAN PÉREZ LEÓN

El tango niega las matemáticas porque uno más uno no son dos sino uno, que es la pareja o son tres, él, ella y un tercer volumen.

Uno o tres, pero nunca dos¹

(*Los Dinzel*, pareja artística de bailarines e investigadores del tango)

Un relevo en la dirección de *Suma* es un buen momento para la reflexión. La sección de «Musymáticas» surgió como una iniciativa de dos buenos amigos nuestros, Tomás y Onofre, que se atrevieron a reservar un espacio de la revista para hablar de la relación de la música y las matemáticas. Está claro que no podíamos ignorar el trabajo de muchos compañeros cuyas aportaciones pueden consultarse en internet o en publicaciones periódicas. Pero, por otro lado, estaba la voluntad de invitar a otros colegas, que quizás ni se lo habían planteado, a que experimentasen en las aulas con esta relación histórica.

Todo empezó discretamente pero, disculpad por la inmodestia, hemos conseguido que algunos compañeros se pongan en contacto con nosotros para realizar experiencias concretas, se nos ha citado en algunos trabajos de investigación o incluso algunos profesionales de la música han solicitado trabajos de *Musymáticas*. Y como la capacidad y el entusiasmo de Iolanda y de Miquel también los conocemos muchos de nosotros, nos hemos atrevido a dar un paso más e incorporar el baile a esta pareja estable que ya era la música y la matemática.

Como en toda la revista, esperamos que esta sección os anime a participar y contribuya a que,

Musymáticas

tanto profesores como alumnos, veamos más aspectos de la cotidianidad de las matemáticas.

La culpa fue del tango

En marzo del año pasado, un grupo de profesores de varias universidades españolas quisimos organizar un curso de verano en la Universidad de Oviedo dedicado a las matemáticas y el arte, especialmente la danza, la música y también la literatura. Se ofertaría a los alumnos de la universidad y a cualquier interesado, independientemente de su formación. Sería el escenario perfecto para transmitir la creatividad de la ciencia..., pero el curso no se celebró: no tuvo suficiente demanda.

Está claro que a los que somos capaces de lanzar este tipo de propuestas que, por ser políticamente correctos, calificaremos de arriesgadas no nos iba a desmoralizar este fracaso. Así que, en principio, nos conformaríamos con una conferencia en *La Laboral* de Gijón unos días antes de celebrarse allí mismo las XV JAEM. Esta actividad, a la que llamamos «Las matemáticas al son de la música», se centró en el tango y consistió en una charla acompañada de baile en directo. Para esto contamos con la ayuda del coreógrafo y bailarín Ricardo Pantiga y de Leticia Secall, bailarina y maestra de primaria.

Esta vez la iniciativa tuvo buena repercusión, tanto en los medios de comunicación como en las personas que asistieron. Uno de los artículos publicados en el periódico *La Nueva España*, recoge así el espíritu del acto:

Un bailarín y una bailarina ejecutan un tango apasionado. Giran, cruzan sus piernas y se desplazan sobre el escenario. Y sin darse cuenta, están haciendo matemática. (Luján Palacios, *La Nueva España*, día 23 junio de 2011)

Justo después de la actividad, cuando intercambiábamos nuestras impresiones y el baile del tango *Los vino* permanecía en nuestras cabezas, surgió la idea: no sabíamos cuándo, pero debíamos crear

una plataforma que agrupase a los interesados en estas disciplinas.

Antes de ver la evolución de la idea de una plataforma, necesitamos hacer alguna reflexión acerca de si hablar de las matemáticas del baile resulta excesivamente forzado; y el análisis lo haremos teniendo en cuenta algunos juegos.



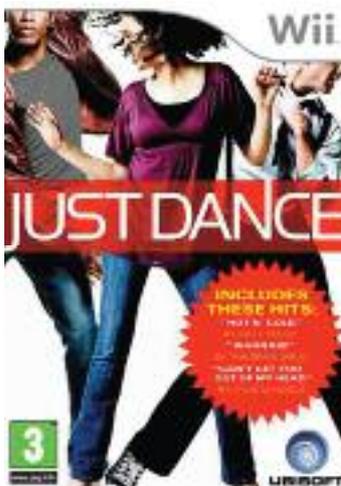
Algunos recortes de prensa con actividades de danza, música y matemáticas

Si las videoconsolas pueden hacerlo ... hay matemáticas

Cuando alguien ajeno al mundo de las matemáticas pregunta acerca de la relación de éstas con el baile, una respuesta bastante habitual es que se trata de una ejecución estética de figuras geométricas, de trayectorias, etc. Esta contestación no siempre deja satisfecho al interlocutor, sobre todo si parte de la creencia (mucho más extendida de lo que nos gustaría) de que las matemáticas y la estética o la diversión no se llevan demasiado bien. Sin embargo, los videojuegos nos proporcionan argumentos mucho más convincentes para justifi-

car la relación. Sabemos que hay juegos en los que para ganar hay que cantar o bailar lo más parecido posible a un patrón. Aunque son muchos los modelos y las marcas en el mercado, aquí presentamos, a modo de ejemplo, dos juegos muy conocidos: *SingStar*[®] y *Just Dance*[®].

Con el nombre de *SingStar*[®] se comercializa una saga de juegos de karaoke en la que los jugadores cantan para ganar puntos. Los participantes interactúan con la consola cantando a través de unos micrófonos USB o inalámbricos, mientras en la pantalla se muestra el vídeo de la canción con la música y la letra. El objetivo es que la interpretación sea lo más parecida posible a la original, en cuanto a ritmo y melodía, para ganar más puntos que el resto de jugadores.



Carátulas de los videojuegos Singstar[®] y Just Dance[®]

Respecto al baile, *Just Dance*[®] es un grupo de videojuegos desarrollado para diferentes videoconsolas. Los jugadores deben seguir unos patrones de baile, que cambian con la música, y a través de un sensor, que suele ser el propio mando del juego, se mide el parecido entre el baile correcto y el que efectúa el participante.

En ambos casos, la manera de determinar la puntuación de cada jugador es medir la distancia entre la ejecución hecha por éste y el modelo que proporciona el propio juego. Dicho así, la necesidad de las matemáticas es incuestionable.

Para medir el parecido entre la nota del jugador (con una frecuencia de f_1 Hz) y la del patrón musical del juego (con frecuencia de f_2 Hz), en trabajos anteriores de esta Sección (Liern, 2009) ya habíamos propuesto una distancia que, por supuesto, coincide con la de los afinadores usados por los músicos:

$$d(f_1, f_2) = 1200 \cdot \left| \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right| \text{ cents}$$

Para medir el parecido entre los ritmos, la cuestión ya no es tan sencilla (Liern, 2009). Existen varias formas de medir distancias (Díaz Báñez *et al.*, 2005), de las cuales, a modo de ejemplo, presentamos una que se puede aplicar a los casos más simples.

Supongamos que los vectores $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ contienen, cada uno, p unos que marcan el acento rítmico (por ejemplo una palma acentuada en el flamenco), y el resto son ceros (las palmas no acentuadas del flamenco). Una manera de calcular la distancia entre X e Y es calcular el mínimo número de permutaciones con las que se llega de X a Y , o al revés. Para esto construimos los vectores u, v que contienen las posiciones de los unos de X y de Y , respectivamente. Por ejemplo, si el primer uno de X está en la posición 2, la primera componente de u será un 2, y así sucesivamente. En este caso, la distancia se calcula según la expresión

$$d_r(X, Y) = \sum_{j=1}^p |u_j - v_j|$$

Comprobemos cómo funciona el método cuando los vectores X , Y , u y v son los siguientes:

$$X = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \Rightarrow u = (2, 6, 9, 10, 12)$$

$$Y = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \Rightarrow v = (1, 4, 7, 9, 11)$$

Entonces, la distancia entre X e Y es:

$$d_p(X, Y) = |2-1| + |6-4| + |9-7| + \\ + |10-9| + |12-11| = 7$$

Evidentemente, ni todos los ritmos pueden expresarse con vectores tan sencillos, ni en toda la música que escuchamos hay un único patrón rítmico. Pensemos por ejemplo en la polirritmia de la música cubana de procedencia africana. En este caso, «el ritmo» de la música es una función que depende de varios ritmos y la manera de obtener uno global no tiene por qué ser unívoca. Ni siquiera aceptando como *ritmo agregado* o resultante el ritmo que se baila podemos admitir que haya una única forma de seguir el ritmo en el baile. En este sentido hay experiencias muy interesantes de danza contemporánea en las que los bailarines siguen ritmos de diferentes instrumentos que se están ejecutando simultáneamente.

Si medir distancias rítmicas puede resultar un tema complejo, aplicarlas a la ejecución de un baile aún lo es más. De hecho, como veremos en el apartado siguiente, requiere de formalizaciones y esquemas específicos sobre los que se sigue trabajando todavía. Pero volviendo a las videoconsolas, no olvidemos que su objetivo no es conseguir una medición precisa de las distancias, sino determinar quién es el ganador. Y esto, aún haciéndose de forma aproximada y para unas pocas músicas preestablecidas, está claro que usa matemáticas.

La plataforma ConCIENCIA Musical

Los primeros días de noviembre del año pasado se celebró un seminario en Madrid, titulado *Música, Matemáticas y Danza*, organizado por las universidades de Valencia, Oviedo y San Pablo CEU, siendo esta última la universidad de acogida. Estas jornadas, a las que acudieron científicos y artistas de numerosos puntos de la geografía española, y el profesor Pablo Amster, músico y matemático, de la Universidad de Buenos Aires, constituyeron una oportunidad idónea para crear formalmente la plataforma ConCIENCIA Musical. Una plataforma que surgía con la voluntad de aunar ideas y experiencias de la música, la danza, las matemáticas y cualquier disciplina que aportase algo a un lugar común entre la ciencia y el arte.

Fueron doce² las personas que se encargaron de realizar las comunicaciones y las mesas redondas del seminario, pero en realidad se consiguió que el público, en el que también había alumnos, participase de forma activa en todas las iniciativas.

Los temas que sirvieron para debatir y reflexionar fueron muchos: la relación entre matemáticas, teatro y danza; la relación entre el Swing, el Lindy Hop y las matemáticas; la utilidad de proyectos como DivulgaMAT; las matemáticas como una de las bellas artes; la actuali-



Imágenes del seminario *Música, matemáticas y danza*

dad musical cubana; el espacio común entre ingeniería, matemáticas y flamenco; la formación científica de los músicos; la música como elemento innovador de la docencia y la cultura, etc. Parecen temas muy diversos, pero todos tenían un en común dos ideas básicas: la relación ciencia-arte y no alejarse del público en general sin renunciar al rigor.

Como no creemos que éste sea un espacio adecuado para resumir los contenidos del seminario, presentaremos sólo dos ideas que sirven para analizar la utilidad de las matemáticas en la danza y viceversa.

Christine von Renesse, matemática y amante de la salsa cubana, plantea la siguiente pregunta (von Renesse y Ecke, 2011):

¿Tiene una persona con formación matemática mayor facilidad para aprender pasos de baile con cierta dificultad?

La propia Christine, descubre en una de sus clases que tiene mayor facilidad que sus compañeros para reproducir movimientos complejos y se plantea junto a su compañero Volker Ecke, matemático y bailarín, si se trata de una habilidad derivada de su dominio de las matemáticas. Para investigar las posiciones y los movimientos de la *salsa* desde un punto de vista matemático, era necesario definir el *espacio de los movimientos de la salsa*. Una vez construido este espacio el bailarín dispone de

mayor variedad para elegir. En palabras de los autores, se trata de describir «cómo un matemático se enfrenta al desafío de crear un modelo matemático basado en un amplio y aparentemente caótico conjunto de movimientos» (von Renesse y Ecke, 2011).

Pero el camino también puede recorrerse en el sentido inverso: del baile a las matemáticas. Por ejemplo, el profesor de matemáticas Karl Schaffer y el coreógrafo Robert Stern, llevan a cabo el proyecto *Math Dance* en el que usan la danza como instrumento útil para transmitir conocimientos matemáticos³.

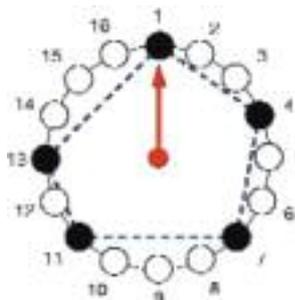
Creemos interesante comentar que el proyecto CONCIENCIA Musical ha comenzado, según palabras de sus integrantes, «con mucha más ilusión que medios», creando el blog que esperan transformar en un sitio web más completo:

<<http://concienciamusical-plataforma.blogspot.com/>>

Mientras tanto, si queréis enviar algún correo para participar en las próximas reuniones, hacer sugerencias, colaborar, etc., además del propio blog, podéis enviar vuestras ideas a la dirección:

<plataformaconcienciamusical@gmail.com>

No nos gustaría acabar este trabajo sin confesar que, en nuestra opinión, gran parte del éxito de los que nos dedicamos a la docencia de las matemáticas está en la forma de comunicarnos con nuestro entorno cotidiano, porque en general, como dice Ian Stewart, «necesitan que se les diga, en su propio idioma y en el contexto de sus propios intereses, qué es lo que podemos ofrecerles». Esperamos que iniciativas como la que hemos presentado puedan contribuir tanto a la docencia como a la imprescindible buena comunicación con la sociedad.



Formación de la rueda cubana. Godfried Toussaint: *Geometry and Rhythm*



Imágenes de Schaffer y Stern, creadores del proyecto *Math Dance*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias bibliográficas

DÍAZ BÁÑEZ, J. M., G. FARIGU, F. GÓMEZ, D. RAPPAPORT y G. T. TOUSSANT (2005): «Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión en la matemática computacional», *La Gaceta de la RSME*, n.º 8, 490-509.

FLERON, J., P. HOTCHKISS, V. ECKE, y C. VON RENESSE, (2011): *Discovering the Art of Mathematics: Music and Dance*, documento de trabajo disponible en <www.artofmathematics.wsc.ma.edu>

LIERN, V. (2009): «Las matemáticas y la música popular», *Suma*, n.º 62, 113-118.

MACHO STADLER, M. (2003): «Ejemplos de paradojas», *SIGMA*, n.º 22, 127-138.

PALACIOS, L. (2011): «Matemáticas a ritmo de tango», *La Nueva España* (día 23 de junio de 2011).

SCHAFFER, K. (2009): «Dance and Mathematics: A survey», *Preliminary Report*, AMS/MAA Joint Meetings, Washington DC.

VON RENESSE, C., y V. ECKE, (2010): «Mathematics and Salsa Dancing», *Journal of Mathematics and the Arts*, n.º 5(1), pp. 17-28.

Internet

http://es.wikipedia.org/wiki/Just_Dance_3

[http://es.wikipedia.org/wiki/SingStar_\(serie\)](http://es.wikipedia.org/wiki/SingStar_(serie))

<http://matematicaeducativa.com/foro/viewtopic.php?f=16&t=37>

<http://concienciamusical-plataforma.blogspot.com/>

Tango *El algebrista*

Algebrista te volviste
refinado hasta la esencia,
oligarca de la ciencia
matemático bacán.
Hoy mirás a los que sudan
en las otras disciplinas
como dama a pobres minas
que laburan por el pan.

¿Te acordás que en otros tiempos
sin mayores pretensiones
mendigabas soluciones
a una mísera ecuación?
Hoy la vas de riguroso,
revisás los postulados
y junás por todos lados
la más vil definición.

Pero no engrupí a nadie
y es inútil que te embales
con anillos, con ideales
y con Álgebras de Boole.
Todos saben que hace poco
resolviste hasta matrices
y rastreabas las raíces
con el método de Sturm.

Pero puede que algún día,
con las vueltas de la vida,
tanta cáscara aburrida
te llegue a cansar al fin.
Y añores tal vez el día
que sin álgebras abstractas
y con dos cifras exactas
te sentías tan feliz...

*Letra de Enzo R. Gentile (1928-1991), matemático argentino
Música del tango Mano a mano de Carlos Gardel y José Razzano*

VICENTE LIERN CARRIÓN

Universitat de València. Estudi General
<musymaticas@revistasuma.es>

BLANCA PÉREZ GLADISH

Universidad de Oviedo

VIVIAN PÉREZ LEÓN

Instituto Superior de Arte (La Habana, Cuba)
Universidad Politécnica de Valencia

1 La cita está directamente relacionada con la paradoja del condenado. Marta Macho Stadler (Macho, 2003) explica esta relación con una frase similar del filósofo chino Hui Tzu: «Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca».

2 Las comunicaciones y mesas redondas las llevaron a cabo las personas siguientes: Diana Álvarez (Instituto Cervantes, Berlín), Pablo Amster (U. de Buenos Aires), Alfonso del Corral (Taller de Música Jove, Valencia), José Miguel Díaz (U. de Sevilla), Francisco Gómez (U. Politécnica de Madrid), Vicente Liern (U. de Valencia), Marta Macho (U. del País Vasco), Ricardo Pantiga (coreógrafo y profesor de baile, Gijón), Blanca Pérez (U. de Oviedo), Vivian Pérez (ISA, Cuba y U. Politécnica de Valencia), Judith Rivas (U. del País Vasco) y Leticia Secall (C. P. Manuel Álvarez Iglesias, Salinas-Asturias).

3 Podéis conseguir más información en <http://www.mathdance.org>.