

Universidad de Oviedo

Facultad de Formación del Profesorado y Educación

Máster en Formación del Profesorado de
Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y
Formación Profesional

Trabajo Fin de Máster

Título: Programación didáctica de matemáticas para 3º de ESO y una investigación sobre errores en relación con el concepto de vector

Autor: Nuria García Álvarez

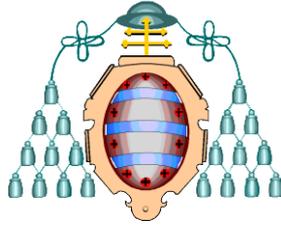
Director: Luis José Rodríguez Muñiz

Fecha: junio de 2013

Nº de Tribunal

43

Autorización del directora/a. Firma



Universidad de Oviedo

Facultad de Formación del Profesorado y Educación

Máster en Formación del Profesorado de
Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y
Formación Profesional

Trabajo Fin de Máster

Título: Programación didáctica de matemáticas para 3º de ESO y una investigación sobre errores en relación con el concepto de vector

Autor: Nuria García Álvarez

Director: Luis José Rodríguez Muñiz

Fecha: junio de 2013

Nº de Tribunal

43

ÍNDICE

Introducción.....	1
Primera parte: reflexión sobre las prácticas profesionales	2
1. Análisis y reflexión sobre la práctica.....	3
2. Análisis y valoración del currículum oficial.....	7
3. Propuesta de iniciación a la investigación educativa.....	11
Segunda parte: programación didáctica para tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y proyecto de iniciación a la investigación educativa	12
Programación didáctica para tercer curso de ESO	13
1. Condiciones iniciales: contexto del centro y del grupo	14
2. Competencias básicas y contribución de la materia a la adquisición de las mismas	15
3. Objetivos de aprendizaje	19
4. Criterios de selección, determinación y secuenciación de contenidos: estructuración de bloques temáticos y unidades didácticas	21
4.1. Objetivos de aprendizaje para cada unidad didáctica	29
5. Secuenciación temporal.....	36
6. Metodología.....	37
6.1. Desarrollo del esquema metodológico	37
6.2. Estrategias del profesor, actividades y técnicas de trabajo en el aula	37
7. Recursos, medios y materiales didácticos	39
8. Criterios y procedimientos de evaluación y calificación.....	40
8.1. Criterios de evaluación	40
8.2. Procedimientos e instrumentos de evaluación y criterios de calificación	44
8.3. Competencias básicas de la materia.....	45
9. Actividades de recuperación.....	47
10. Medidas de atención a la diversidad.....	48
Proyecto de iniciación a la investigación educativa.....	49
1. Introducción.....	50
2. Enmarque teórico y justificación de la investigación	51
2.1. Objetivo general y objetivos específicos.....	51
2.2. Marco teórico	51
3. Metodología de investigación y planificación.....	54
3.1. Modalidad de investigación.....	54
3.2. Población objeto de estudio.....	54
3.3. Variables de estudio	54
3.4. Instrumentos y técnicas de recogida de información	54

3.5. Planificación.....	54
4. Resultados y conclusiones	56
4.1. Resultados obtenidos	56
4.2. Conclusiones.....	60
4.3. Aportaciones e implicaciones de futuro	62
5. Anexos	63
Referencias.....	69

INTRODUCCIÓN:

El presente trabajo fin de máster está fundamentado en las prácticas realizadas en el IES Alfonso II de Oviedo entre los meses de enero y abril de 2013. La primera parte consiste en una reflexión sobre las mismas en que se explica cómo han contribuido las asignaturas cursadas en el máster a su realización, se hace un comentario del currículum oficial de la ESO para la asignatura de matemáticas con especial atención al tercer curso y una pequeña introducción del proyecto de iniciación a la investigación educativa llevado a cabo durante las prácticas.

La segunda parte está formada por una programación didáctica para el tercer curso de ESO y una propuesta de introducción a la investigación educativa integrada en una de las unidades didácticas de la misma. La programación se ha redactado pensando en el grupo concreto (grupo B) de 3º de ESO en que se impartió una unidad didáctica completa durante el prácticum y se ha particularizado lo establecido en las leyes que regulan el currículum para las necesidades y características de dicho grupo. Se ha realizado una secuenciación de los contenidos que atiende al orden en que deben ser impartidos y una selección de los mismos que tiene en cuenta la capacidad del grupo-clase concreto.

El proyecto de iniciación a la investigación se desarrolló en el tiempo con que se contó durante las prácticas y tomando como muestra a ese grupo de 3º de ESO. La idea de realizarlo surgió de la observación en el aula en las primeras semanas de prácticas. La propuesta se centra en el análisis de los errores y dificultades con que se encuentra el alumnado en relación con el concepto de vector.

**PRIMERA PARTE:
REFLEXIÓN SOBRE LAS PRÁCTICAS
PROFESIONALES**

1. ANÁLISIS Y REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA

A continuación se hace un repaso de los conocimientos adquiridos en las distintas asignaturas cursadas en el máster y su aportación para la realización de las prácticas.

La asignatura de Aprendizaje y desarrollo de la personalidad proporciona, especialmente a los estudiantes que no tenemos conocimientos previos de Psicología de la Educación y el Desarrollo, información que resulta muy útil para la inmersión en el sistema educativo. Más allá de hacer un repaso de las distintas teorías en este campo, la ejemplificación dada de los distintos fenómenos que aparecen en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite entenderlo mejor. Resulta especialmente útil conocer las fases en que se desarrolla la capacidad de aprendizaje, especialmente en una materia como las matemáticas en que la capacidad de abstracción (que pasa por distintas etapas) es fundamental. También es interesante aprender de la naturaleza de la motivación, la autopercepción y la autoestima del alumnado, aspectos a los que a menudo no se les presta demasiada atención.

Por otra parte, la asignatura me ha ayudado a comprender mejor y, en algunos casos, saber de la existencia de trastornos relativamente frecuentes y que influyen en el aprendizaje (TDAH, TGD, Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas o de la Lectura y la Escritura). De esta manera se complementa lo aprendido en el bloque de Atención a la diversidad de la asignatura de Procesos y Contextos Educativos y se comprende mejor la función del profesorado de Pedagogía Terapéutica y del Departamento de Orientación de los centros de prácticas. Y por último, las técnicas que surgen de las diferentes teorías (cognitivismo, constructivismo, etc.) se tienen presentes a la hora de impartir clases.

Procesos y contextos educativos me ha aportado los conocimientos sobre el sistema educativo necesarios para comprender todos los aspectos que abarca la labor de un docente. Desde las etapas de la Educación Secundaria y la Formación Profesional, pasando por la estructura organizativa de los centros y la documentación de los mismos, hasta la labor tutorial. A la hora de asistir a las distintas reuniones (preevaluaciones, evaluaciones, reuniones de departamento, Claustro, Comisión de Coordinación Pedagógica, reuniones de tutores, etc.) lo aprendido en la asignatura me ha permitido entender mejor su desarrollo y propósitos. Además, he podido orientarme a la hora de buscar información útil sobre el centro, saber en qué documentos buscar y a quién acudir.

En cuanto a la labor de los docentes como tutores de grupo, quizá no sea tan amplia en la realidad (por lo menos en algunos casos) como debería ser en teoría según lo explicado en el bloque correspondiente de la asignatura. Sí es importante la parte de relación con las familias, y así lo he podido apreciar en varias reuniones con padres a las que he asistido. La parte relativa a observación en el aula me parece en la práctica complicada, aunque sí puede ser útil para hacer un seguimiento del alumnado (especialmente el que tiene dificultades), pero es complicado que un tutor pueda poner en práctica esos recursos. La Atención a la diversidad, complementada como decía arriba con lo aprendido en Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, tiene en mi

opinión cada vez más relevancia, no sólo porque cada vez se conocen más las diversas dificultades con que se pueden encontrar los estudiantes, sino también porque su diversidad va en aumento. En el centro en que realicé las prácticas esta diversidad está especialmente presente.

Para terminar, recibir nociones sobre Interacción, comunicación y convivencia en el aula me parece muy importante, pero se puede decir que lo relativo a la comunicación se solapa con lo aprendido en Diseño y desarrollo del currículum. Además, la observación de la propia forma de comunicarse como docente puede ser muy interesante pero la encuentro complicada, especialmente ser consciente de aspectos como la forma de moverse, de hablar, postura corporal, etc., por los que se preguntaba en el cuaderno de prácticas. Conocer los distintos climas que puede haber en clase, los roles del alumnado y los del profesorado (en cuanto a la forma que tienen de interactuar) permite analizar mejor el comportamiento de los distintos grupos.

De la asignatura de Sociedad, familia y educación me resultó más interesante la parte relacionada con las desigualdades sociales, tanto las de género como las de clase y etnia, especialmente marcadas en el centro de prácticas, y que es necesario saber gestionar como docente. La escuela pública debería ser igualadora, paliar las desigualdades de todo tipo presentes en el alumnado que llega al aula, y el profesorado es el agente fundamental en esta labor, para la que debe estar preparado. La parte de relación con las familias también me resultó útil, pero especialmente la que se refiere a los estilos parentales y para el trato con ellas dentro de la labor del tutor o tutora. Más allá de esa labor tutorial no he observado que los docentes tengan demasiado trato con las familias, especialmente en secundaria.

Las nuevas tecnologías se van incorporando a la educación y conocerlas es imprescindible para estar al día como docente. En la asignatura de Tecnologías de la información y comunicación hemos conocido distintos recursos que pueden ser de utilidad a un profesor o profesora, así como distintos intentos de incorporación de las TIC al sistema educativo. La realización de un blog, experiencia que se llevó a cabo durante las clases, es una de ellas, junto con otras como las plataformas tipo Moodle que pueden resultar muy interesantes para compartir materiales con los estudiantes. Por otra parte, las prácticas me han hecho ser consciente de que otras herramientas no son tan sencillas de introducir como recurso metodológico. Algo tan simple aparentemente como organizar una sesión en el aula de ordenadores se vuelve más complejo cuando no hay suficientes dispositivos para un centro con un gran número de estudiantes o la conexión a internet no es buena. Además, debido a las circunstancias actuales, no es tan infrecuente encontrarse con hogares que no disponen tampoco de estos recursos. En cualquier caso, este tipo de formación en nuevas tecnologías (y la formación permanente del profesorado) me parece muy necesaria al observar el escaso aprovechamiento de medios con los que el centro de prácticas sí cuenta como son varias pizarras digitales.

La asignatura de Diseño y desarrollo del currículum me parece fundamental en el aprendizaje de un futuro docente y en este sentido creo que sería interesante que contara

con más horas de clase para poder profundizar más en la materia vista. Creo que los contenidos relativos a comunicación en el aula y a organización del sistema educativo se solapan con los vistos en Procesos y contextos educativos y que se debería hacer más hincapié en los que tienen que ver con programación. Las primeras nociones sobre realización de unidades didácticas, muy aprovechadas durante las prácticas, se reciben en esta asignatura. Considero que se les debería dedicar más tiempo, para después ser completadas en las asignaturas propias de cada especialidad. El diseño de elementos curriculares me parece una de las tareas más complicadas para el alumnado del máster y las nociones básicas deben quedar bien claras, teniendo en cuenta que es una de las tareas principales en la labor del profesorado.

La observación de los aspectos mejorables en la forma de impartir docencia (tanto propia como ajena) durante las prácticas se puede basar y se ve fomentada por lo aprendido en Innovación docente e iniciación a la investigación. La postura adoptada durante las sesiones de clase, tanto las impartidas por uno mismo como las impartidas por el tutor o tutora u otros docentes, es más crítica y se hace inevitable pensar en mejoras o plantearse preguntas en las que sería interesante ahondar. Por otra parte, la asignatura es imprescindible para la realización del presente trabajo. La formación en recursos para la innovación y la investigación (observación, diseño de actividades, cuestionarios, etc.) ha sido amplia a pesar del poco tiempo disponible para recibir clases teóricas de la asignatura.

La asignatura optativa Lengua inglesa para el aula bilingüe, puede ser muy adecuada para quien se plantee dar clases en uno de los programas bilingües con los que ya cuentan la mayor parte de los centros de secundaria. Sin embargo, ni el número de sesiones de clase ni la forma de impartirlas me permitieron extraer muchos conocimientos útiles. Prácticamente todo el trabajo consistió en preparar dos exposiciones, una individual y otra grupal, con vocabulario en inglés propio de cada especialidad cuya pronunciación fue corregida por la profesora. Considero que este tipo de ejercicios pueden resultar útiles, pero que no debería limitarse la asignatura a la corrección de la pronunciación de los y las estudiantes. Sí me ha parecido conveniente el repaso de expresiones utilizadas frecuentemente en el aula al que se dedicó una de las sesiones de clase.

La materia Complementos de formación disciplinar proporciona conocimientos sobre el currículum oficial de la especialidad y recursos para completarlos. Además, obliga al estudiante del máster a ponerse por primera vez en la tesitura de impartir una sesión de clase de la asignatura correspondiente preparando los contenidos (ajustados a lo establecido por la ley y al propio criterio), ajustándose al tiempo disponible, escogiendo la metodología y recursos empleados y buscando estrategias motivadoras. Estas mismas tareas deben llevarse a cabo cuando en el centro de prácticas llega la hora de dar clase, y las críticas y sugerencias recibidas en las sesiones del máster permiten entonces cometer menos errores. Además, aporta conocimientos sobre investigación en didáctica de la especialidad correspondiente y herramientas para seguir formándose al respecto.

Por su parte, la asignatura de Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas da las pautas fundamentales para elaborar una unidad didáctica o una programación de la materia, complementando lo visto en Diseño y desarrollo del currículum y Complementos de formación disciplinar. En ella se explican procedimientos tan importantes como la redacción de objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación y la selección de contenidos. Por otro lado, se aprenden cuestiones relativas a la metodología y evaluación propias de la materia que incluso sería conveniente recibir antes de la realización de las prácticas para poder sacarles todo el partido.

2. ANÁLISIS Y VALORACIÓN DEL CURRÍCULUM OFICIAL

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria, divide los contenidos de la asignatura de matemáticas para esta etapa en seis bloques: contenidos comunes, números, álgebra, geometría, funciones y gráficas, y estadística y probabilidad.

El primero de ellos recoge los contenidos relativos al tipo de estrategias de resolución de problemas y actitudes que deberán ir consolidando los estudiantes a lo largo de esta etapa: utilización del lenguaje matemático propio de cada nivel, empleo de técnicas para la resolución de problemas, uso de herramientas tecnológicas y perseverancia y confianza en la propia capacidad. En esencia, son los mismos para los cuatro cursos de la etapa, incluyendo las dos opciones de las matemáticas del cuarto.

El segundo bloque se refiere a la aritmética, los tipos de números y operaciones entre ellos que el alumnado deberá ir incorporando progresivamente a sus conocimientos matemáticos. En el primer curso se introducen los números negativos y se completan los conocimientos acerca de operaciones con fracciones y números decimales, además de tocar los conceptos de razón y proporción. En el segundo aparecen las potencias de base entera y exponente natural y la notación científica, y se trabajan las raíces. También se amplía lo ya conocido acerca de números fraccionarios, decimales, porcentajes y proporciones. En el tercer curso se continúan trabajando decimales y fracciones, y la equivalencia entre ellos, y se introducen las potencias de exponente entero. En el cuarto curso, existen dos opciones para la asignatura, la A y la B. Acerca de ellas, el texto establece que:

Las dos opciones remarcan contenidos parcialmente diferenciados según pongan más o menos énfasis en el carácter terminal o propedéutico, en el mayor o menor uso del simbolismo abstracto, en la mayor o menor exigencia de precisión o rigor matemático, etc.

Como contenidos del bloque de números se introducen en la opción A los porcentajes aplicados a la economía y el uso de la hoja de cálculo, y se repasan los intervalos y la proporcionalidad, tanto directa como inversa. Para la opción B se introducen los números irracionales y los reales, la utilización de intervalos, la expresión de raíces como potencias y las operaciones con radicales.

El tercer bloque está dedicado al uso del lenguaje algebraico para la expresión de distintas situaciones. Así, el primer curso introduce por primera vez el uso del lenguaje algebraico para traducir situaciones sencillas en que existe alguna incógnita. En el segundo aparece el concepto de ecuación y su uso en la resolución de problemas, y en el tercero las sucesiones numéricas, las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En el cuarto curso se afianzan y amplían los contenidos de tercero y, en el caso de la opción B, se incluye la resolución de inecuaciones.

En el cuarto bloque se recogen los contenidos relativos a estructuras geométricas. En el primer curso se incluyen muchos contenidos con los que el alumnado ya está

familiarizado desde la etapa de Educación Primaria: elementos de las figuras geométricas, construcciones geométricas simples, clasificación de los triángulos y cuadriláteros, polígonos regulares, medida de ángulos, cálculo y estimación de perímetros y áreas de figuras planas, y simetría de las mismas. En el segundo aparecen la semejanza, la proporcionalidad geométrica, los teoremas de Tales y Pitágoras, y los poliedros. Estos últimos deben ser clasificados según varios criterios y se establece el estudio de sus volúmenes. En el tercer curso se ampliarán los conocimientos geométricos introduciendo el concepto de lugar geométrico (del cual ya se conocían ejemplos), los movimientos en el plano, las coordenadas geográficas y los husos horarios. Además, se seguirá trabajando con poliedros y con los teoremas de Tales y Pitágoras. La diferencia fundamental entre las opciones A y B para el cuarto curso es la aparición de la trigonometría en la segunda. El resto de contenidos, relacionados con la aplicación de los conocimientos de geometría a la resolución de problemas del mundo físico son similares.

El quinto bloque es el dedicado a funciones y gráficas. Para el primer curso se marcan como contenidos la utilización de tablas de valores para organizar datos y de coordenadas cartesianas para la representación de puntos, y se pone énfasis en la traducción de las relaciones de dependencia halladas en situaciones cotidianas a tablas y gráficos, y viceversa. En el segundo, el alumnado debería empezar a interpretar las características locales y globales de gráficas sencillas, continuándose este estudio en el tercer curso, donde se dará especial relevancia a los modelos lineales. En el cuarto curso, tanto para la opción A como para la B, se indica el estudio de funciones más complejas (cuadráticas y exponenciales para las dos y también logarítmicas en la opción B) y se incluye el concepto de tasa de variación media. En la opción B también se introducen las funciones definidas a trozos.

En el sexto bloque se recogen los contenidos de estadística y probabilidad que se estudiarán en la etapa. Para el primer curso se fija el estudio de fenómenos aleatorios sencillos a través de tablas para la recogida de información, diferentes tipos de gráficos y el cálculo de frecuencias absolutas y relativas. En el segundo curso, además de ahondar en lo anterior, se aprenderá a calcular y utilizar las medidas de centralización (media, mediana y moda). En el tercero se da un salto significativo, incluyéndose los conceptos de muestra y técnicas de selección de las mismas, variable aleatoria discreta y continua, experiencia aleatoria, suceso y espacio muestral. Por otro lado, se establece el estudio de las medidas de dispersión y su uso conjunto con las de centralización vistas el curso anterior. Otro elemento importante que aparece por primera vez en el currículum es la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades. En el cuarto curso se introducen el estudio de las fases y tareas de un estudio estadístico, algunos tipos más complejos de gráficas estadísticas y el uso de las medidas de centralización y dispersión vistas para hacer valoraciones. Además, en la opción B se incluye el uso de estas últimas para analizar la representatividad de una distribución y la probabilidad condicionada.

Por último, como orientación metodológica, el documento afirma que:

En todos los casos, las matemáticas han de ser presentadas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cercanos a su experiencia, que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, continuarán haciéndolo en el futuro.

Si nos centramos en el tercer curso de ESO, el texto establece para él unos determinados contenidos agrupados en los seis bloques correspondientes y unos criterios de evaluación. El Decreto 74/2007, de 14 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias no introduce ningún cambio, excepto en la redacción, en las enseñanzas mínimas fijadas por el Real Decreto. Dado que estos contenidos son los mínimos, deben ser completados al realizar una programación didáctica teniendo en cuenta los conocimientos previos y capacidad del grupo.

El primer bloque, de contenidos comunes, fija las mismas actitudes y técnicas para la resolución de problemas que para el resto de cursos, como indicaba antes. En cuanto al segundo, es bastante completo, pero con un grupo con buena base sería interesante empezar a trabajar con raíces (que sin duda necesitarán manejar en la resolución de problemas de otros bloques a lo largo del curso) y hablar de los números irracionales y de los reales, dado que ya se han definido los racionales.

También el bloque de álgebra es bastante completo, especialmente en lo relativo a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Se podría profundizar en el estudio de las sucesiones (crecimiento, decrecimiento, acotación, etc.) como paso previo al estudio de las progresiones aritméticas y geométricas.

Respecto al bloque de geometría, y aunque ya se ha trabajado en cursos anteriores, siempre resulta práctico planificar alguna unidad didáctica dedicada al repaso de las figuras planas y los cuerpos geométricos (y el estudio de sus áreas y volúmenes), que se utilizan también en temas de otros bloques. También es conveniente, en el momento de tratar los movimientos en el plano, introducir el concepto de vector. Además de posibilitar que el alumnado se vaya familiarizando con él para cursos posteriores, permite definir rigurosamente las traslaciones.

En el bloque de funciones y gráficas se puede introducir al alumnado en el estudio de algunas características de las funciones que no aparecen en el currículo oficial: recorrido, simetrías y periodicidad. Su análisis en casos simples facilitará el trabajo en los cursos siguientes. En cuanto a las funciones lineales, el texto es bastante escueto, por lo que se puede profundizar en su estudio tanto como las características de las y los estudiantes lo permitan.

Puede que el bloque para el que el currículo oficial es más preciso sea el de estadística y probabilidad. Poco se puede añadir a los conceptos y procedimientos establecidos, salvo quizá el estudio de medidas de posición como cuartiles y percentiles y una mayor rigurosidad en el uso de la terminología relativa a la probabilidad. En algunos puntos, como el estudio de métodos de selección aleatoria, puede que el texto sea incluso demasiado ambicioso.

El otro punto fundamental que establecen ambos textos (Real Decreto y Decreto) es el de los criterios de evaluación. En él sí existen diferencias significativas entre ambos, siendo el segundo más concreto.

Se puede decir que cada uno de los ocho criterios que enumeran tanto el Decreto como el Real Decreto se corresponde con un bloque o parte de un bloque de contenidos. El primer criterio hace referencia a la utilización de los números racionales y sus propiedades y al empleo de la aproximación y la estimación de errores. El segundo y el tercero están relacionados con el bloque de álgebra, centrándose el primero de ellos en el estudio de sucesiones y progresiones y el segundo en la resolución y utilización de ecuaciones y sistemas. El cuarto se corresponde con el bloque de geometría, concentrándose en la comprensión y el manejo de movimientos en el plano. El quinto se refiere al uso de los distintos modos de expresar funciones y, en concreto, al empleo de funciones lineales. El sexto y el séptimo guardan relación con las áreas de estadística y probabilidad, respectivamente, y el octavo, con la resolución de problemas, de modo que se puede decir que se corresponde con el bloque de contenidos comunes.

Como decía, el Decreto 74/2007 desgrana y detalla lo establecido por el Real Decreto, concretando varios criterios para cada uno de los ocho. De la misma manera, al redactar unos contenidos y objetivos para el curso en la realización de una programación didáctica, estos criterios deben ser particularizados y extendidos.

3. PROPUESTA DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

El proyecto de investigación, integrado en la programación didáctica y enmarcado en la modalidad de introducción a la investigación educativa, consiste en un análisis de los errores y dificultades encontrados en el aprendizaje del concepto de vector por parte del alumnado del grupo B de 3º de ESO del IES Alfonso II de Oviedo.

Consultando bibliografía al respecto he encontrado que, si bien las clasificaciones de errores en matemáticas son frecuentes, lo son más en el campo del álgebra y de la aritmética que en el de la geometría. En concreto, respecto del concepto de vector, fundamental en las matemáticas de los cursos siguientes, existen pocas investigaciones.

La observación del trabajo en varias unidades didácticas anteriores a la que introduce este contenido, “Vectores, movimientos en el plano y semejanzas” (impartida por la profesora en prácticas), me permitió apreciar que los estudiantes cometen un gran número de errores por el mal afianzamiento de conceptos y procedimientos previos. Por ello, me pareció interesante escoger un contenido concreto de la unidad didáctica que iba a impartir y analizar las dificultades con que se irían topando los y las estudiantes del grupo. Por la trascendencia en cursos posteriores de que hablaba antes y lo novedoso para el alumnado del concepto escogí el de vector, junto con los procedimientos que lleva asociados (representación en el plano, cálculo de coordenadas y módulo, suma analítica y gráfica y aplicación a la definición de traslaciones).

Utilizando varios instrumentos para la recogida de información, se han tratado de ordenar los procedimientos relacionados con vectores en función del número de errores cometidos por el alumnado en su aprendizaje. También se los ha relacionado con las causas que podrían explicarlos (desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios, aplicación de estrategias o asociaciones irrelevantes, problemas con la representación gráfica, dificultades con el lenguaje u otros) y se han comparado las conclusiones con la percepción del profesorado del Departamento de Matemáticas del centro que tiene una amplísima experiencia docente.

Por último, se han propuesto varias pautas a la hora de desarrollar en clase estos conceptos y procedimientos que podrían contribuir a la disminución del número de errores cometidos por los y las estudiantes.

SEGUNDA PARTE:

**PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA PARA TERCER
CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA
Y PROYECTO DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN
EDUCATIVA**

**PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA PARA
TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
OBLIGATORIA**

1. CONDICIONES INICIALES: CONTEXTO DEL CENTRO Y DEL GRUPO

El centro para el que se propone esta programación es el IES Alfonso II de Oviedo, con una larga historia y de gran tradición en la ciudad. En el presente curso el número de alumnos matriculados es de 1057 y el personal docente de en torno a 100 personas, de las cuales 11 son profesorado interino. Las características del alumnado han cambiado mucho en los últimos años, obligando al instituto a adaptarse a las múltiples necesidades que surgen. Las instalaciones son antiguas y requieren reparaciones y adaptaciones constantes. Además la metodología empleada es generalmente la de la clase expositiva o lección magistral, debido quizá a la larga tradición del centro mencionada arriba.

Cabe destacar que el IES Alfonso II es, junto con el IES Pando, uno de los dos únicos centros en Oviedo que disponen de Aula de Inmersión Lingüística. Estas dos aulas en el municipio están a disposición del alumnado del resto de centros públicos, pero acudir a un aula en otro centro obliga a los estudiantes a desplazarse de uno a otro en horario lectivo, con los correspondientes inconvenientes. Este hecho influye en las características del alumnado, de modo que el centro cuenta con un porcentaje de aproximadamente el 10% de estudiantes inmigrantes, llegando a ser de entre el 50 y el 60% en algunos grupos de la ESO. Otro programa ofrecido por el centro que puede resultar interesante citar es el Programa Bilingüe para ESO en lengua inglesa, por las consecuencias que tiene sobre las formas de agrupar al alumnado: no se crean grupos mixtos, con estudiantes que han optado por el programa y otros que no, sino que hay dos grupos bilingües y dos que no lo son por curso. Dado que el alumnado inmigrante no suele elegir el programa bilingüe, acaban formándose dos grupos con estudiantes de origen español en su mayoría y otros dos con estudiantes de origen extranjero, y no se favorece la integración entre ellos que sería deseable.

El grupo B de 3º de ESO está formado por 20 alumnos y todos ellos cursan el Programa Bilingüe de inglés. Ninguno ha repetido ni repite curso, pero sí hay algunos estudiantes que no han superado las matemáticas de segundo curso de ESO. En este grupo-clase no hay desdobles en matemáticas, todos cursan la asignatura con la misma docente. Salvo algunas excepciones, los resultados académicos del grupo son buenos por el momento y su actitud en clase también es buena en el sentido de que hacen las tareas encomendadas y participan durante las clases, aunque tienden a hablar demasiado entre ellos. El clima de aula es bueno, los estudiantes forman un grupo muy cohesionado y no suele existir ningún tipo de conflicto entre ellos. En cuanto a las características del aula en que se imparte clase al grupo, está ubicada en el Pabellón Nuevo del centro. Es bastante pequeña y los alumnos disponen de poco espacio, lo cual es un problema cuando se desea cambiar la disposición de la clase. Cuenta con un proyector, una pantalla y un ordenador.

2. COMPETENCIAS BÁSICAS Y CONTRIBUCIÓN DE LA MATERIA A LA ADQUISICIÓN DE DICHAS COMPETENCIAS

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, establece que “las enseñanzas mínimas que establece este real decreto contribuyen a garantizar el desarrollo de las competencias básicas” y que las concreciones de los currículos realizadas por los centros “se orientarán, asimismo, a facilitar la adquisición de dichas competencias”. De ellas dice que “son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida”. Así, se enumeran en el marco de lo propuesto por la Unión Europea las ocho competencias básicas:

1. Competencia en comunicación lingüística
2. Competencia matemática
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
4. Tratamiento de la información y competencia digital
5. Competencia social y ciudadana
6. Competencia cultural y artística
7. Competencia para aprender a aprender
8. Autonomía e iniciativa personal

El Decreto 74/2007, de 14 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, establece acerca de la contribución de las matemáticas al desarrollo de la competencia matemática que:

No todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.

En cuanto a su contribución a la adquisición de la competencia en conocimiento e interacción con el mundo físico, establece que:

Elaborar modelos exige identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo.

Y en cuanto a la adquisición de la competencia en tratamiento de la información y competencia digital, que:

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas contribuye a mejorar la competencia en

tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación.

Sobre la aportación de las matemáticas al desarrollo de la competencia en comunicación lingüística se puede destacar que establece lo siguiente:

El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

Respecto de la competencia en expresión cultural y artística el texto citado afirma que la geometría es:

(...) parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.

Y en lo referente a la autonomía e iniciativa personal y la competencia de aprender a aprender que:

Los propios procesos de resolución de problemas (...) se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones. También, las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolidan la adquisición de destrezas (...) tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

Por último, en cuanto a la competencia social y ciudadana, establece que:

Las matemáticas, fundamentalmente a través del análisis funcional y de la estadística, aportan criterios científicos para predecir y tomar decisiones. También se contribuye a esta competencia enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, lo que permite de paso valorar los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios (...).

En particular, el tercer curso de ESO debería contribuir al desarrollo de las competencias anteriores de la siguiente manera:

Los contenidos trabajados en la asignatura en este curso contribuyen a la adquisición de la competencia en comunicación lingüística de forma decisiva, puesto que la precisión y la claridad son imposiciones en el lenguaje matemático utilizado al trabajar con elementos tales como conjuntos de números (rationales, irracionales y reales), sucesiones, movimientos en el plano, funciones y su estudio o conceptos básicos de estadística y probabilidad (población, muestra, experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, etc.). Así, a través de la expresión de conceptos y razonamientos lógicos se están reforzando la coherencia y la soltura también en otras formas de expresión, tanto orales como escritas. Además, en la ley vigente se incluyen también como rasgos de esta competencia las capacidades para representar mentalmente, interpretar y comprender la realidad, habilidades que requiere la resolución de los problemas matemáticos que se trabajarán a lo largo del curso. En estos procesos de resolución de problemas, la traducción del lenguaje cotidiano al matemático es un paso

ineludible (expresar un enunciado en forma de ecuación o sistema, de función, o en términos probabilísticos) y, por tanto, resolver problemas matemáticos implica trabajar con el lenguaje en todos los sentidos.

La asignatura de matemáticas bien orientada debería tener como objetivo fundamental el desarrollo de la competencia matemática, si bien a menudo se cae en una enseñanza de tipo memorístico que no es la ideal para este fin. En este curso se plantearán siempre que sea posible problemas con aplicaciones en la vida real tanto en el campo del álgebra (progresiones, ecuaciones y sistemas), como en el de las funciones (funciones presentes en contextos reales) y en el de la estadística (ejemplos de la economía, la demografía o la publicidad). Además se fomentará el razonamiento lógico en la resolución de dichos problemas, relacionando los datos con la teoría conocida y valorando el significado y coherencia de las soluciones obtenidas.

En cuanto a la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, se puede considerar que la asignatura contribuye a su consecución enseñando a plantear modelos que expliquen determinadas situaciones y la materia enseñada en este curso aporta elementos imprescindibles para tal modelización. Entre ellos podemos citar los polinomios y ecuaciones de primer y segundo grado, las formas geométricas (y en particular las coordenadas geográficas y husos horarios), los vectores, las funciones lineales y no lineales o la probabilidad, tan utilizados en distintos campos de la ciencia.

Para el fomento del tratamiento de la información y la competencia digital, las matemáticas intervienen de dos maneras: enseñando a seleccionar e interpretar la información recibida y a utilizar la tecnología como herramienta de aprendizaje. Por una parte, los retos planteados por la asignatura exigen escoger cierta información, desechar otra y traducirla de forma que puede ser manejada. Además, en este curso las matemáticas proporcionarán herramientas indispensables para la interpretación de los datos recibidos del entorno como las distintas formas de expresar cantidades (aproximación, errores y notación científica), las funciones (dominio y recorrido, continuidad, monotonía, etc.) o la estadística básica (concepto de muestra, métodos de selección de las mismas, tipos de variables y medidas de centralización y dispersión). Por otro lado, en este curso se trabajará el uso de herramientas tecnológicas siempre que ayuden a comprender e interactuar con la materia, ampliar la información conocida o simplificar los cálculos.

Quizá la competencia que parecería encontrarse más alejada de la asignatura de matemáticas es la social y ciudadana, pero puede decirse que las matemáticas, en su intento de interpretar la realidad tratan también de comprender nuestra historia, como uno de los factores decisivos en la configuración de esa realidad. En concreto, en este curso, el alumnado adquirirá por primera vez conocimientos más rigurosos en el ámbito de las funciones, en el de la estadística y el de la probabilidad, y se le orientará a utilizarlos para reflexionar de forma crítica, comprender las características sociales e históricas del mundo en que vivimos y tomar decisiones para ejercer la ciudadanía de forma adecuada.

La relación de las matemáticas con la música, las artes plásticas o la arquitectura es tan estrecha que no pueden entenderse las unas sin la otra. No sólo se utilizan los conocimientos matemáticos para elaborar las construcciones culturales citadas, sino que a menudo el estudio de las matemáticas surge del intento de comprender la belleza presente en la naturaleza, belleza que el alumnado debería aprender a apreciar a través del desarrollo de la competencia cultural y artística. Para ello aprenderán a lo largo del curso a identificar figuras planas y cuerpos geométricos, planos de simetría, transformaciones geométricas (traslaciones, giros, simetrías y homotecias), frisos y mosaicos en el arte, la arquitectura o la propia naturaleza. Además, el objetivo último será que los utilicen en el desarrollo de su propia creatividad.

En matemáticas cada nuevo problema supone ser consciente de lo que se sabe y de lo que se necesita aprender, buscar la ayuda necesaria y encontrar la motivación para superar este desafío. Resolverlos no siempre resulta fácil para los estudiantes, pero cuando se consigue la propia percepción mejora considerablemente. En este sentido, uno de los fines últimos de las matemáticas debería ser la obtención de la competencia para aprender a aprender. Y por último, resolver problemas también supone perseverar y afrontar dificultades, tomar la iniciativa y aplicar estrategias, objetivos fundamentales para el desarrollo de la autonomía y la iniciativa personal. Al impartir la materia de los diferentes bloques del curso, la resolución de problemas será un objetivo transversal, que permitirá adquirir estas últimas competencias.

3. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

El Decreto 74/2007 fija como objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la ESO los siguientes:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Los objetivos para el presente curso, teniendo en cuenta estos objetivos generales, se concretan en los siguientes:

1. Reconocer nuevas clases de números dentro del conjunto de los reales y manejarlos con soltura a través de la aplicación de sus propiedades.
2. Utilizar adecuadamente expresiones algebraicas y polinomios.
3. Expresar y resolver distintos tipos de problemas empleando ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
4. Identificar regularidades en conjuntos de números y aplicar las propiedades de los distintos tipos de sucesiones a la resolución de problemas.
5. Reconocer diferentes figuras planas y cuerpos geométricos y utilizar el cálculo de sus áreas y volúmenes en la resolución de problemas de la vida cotidiana.
6. Comprender la relación entre los elementos de la esfera terrestre, las coordenadas geográficas y los husos horarios.
7. Manejar diferentes transformaciones geométricas aplicando para ello la teoría relativa a vectores, ángulos y proporciones.
8. Comprender la relación entre las homotecias, la semejanza y las escalas.
9. Identificar distintos tipos de funciones, analizar sus características locales y globales y emplearlas en la resolución de problemas.
10. Aplicar distintas formas de clasificar y analizar conjuntos de datos tales como tablas, gráficos y medidas de centralización, posición y dispersión.
11. Comprender los conceptos de suceso y probabilidad y utilizar las propiedades de los mismos para resolver problemas simples.

Una vez distribuida la materia en unidades didácticas se concretarán los objetivos de aprendizaje para cada una de ellas.

4. CRITERIOS DE SELECCIÓN, DETERMINACIÓN Y SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS: ESTRUCTURACIÓN DE BLOQUES TEMÁTICOS Y UNIDADES DIDÁCTICAS

Los contenidos se han estructurado en cinco bloques que conforman las áreas principales de las matemáticas que abarca el currículum: aritmética o números, álgebra, geometría, funciones y estadística y probabilidad.

Estos cinco bloques los componen trece unidades didácticas. En cada unidad didáctica se incluyen contenidos que guardan una estrecha relación entre sí y que dependen unos de otros. El número de objetivos propuestos para cada una varía, como se podrá ver a continuación, y por ello no todas tendrán la misma duración. Al realizar la secuenciación de las mismas se ha tratado de que el orden en que se impartirán sea lógico, es decir, que el alumnado disponga en el momento de impartirlas de los conocimientos necesarios.

Algunos de los bloques podrían intercambiarse entre sí, atendiendo al criterio del orden lógico de los contenidos, ya que son esencialmente autocontenidos (aunque no se pretende crear compartimentos estancos sino destacar la interrelación de todos los contenidos). Sin embargo, por el momento del curso en que cada bloque va a ser impartido, se ha preferido seguir esta estructura.

Para la selección de los contenidos se han tenido en cuenta los establecidos por el Decreto 74/2007. Estos han sido completados atendiendo a las características y nivel del grupo concreto y se ha tratado de no repetir en exceso los contenidos de cursos anteriores (aunque sea necesario recordar algunos) para evitar la pérdida de interés del alumnado. Además se ha intentado, en la medida de lo posible, tener en cuenta los contenidos programados para el curso en el resto de materias y los establecidos en los currículos de los cursos siguientes (especialmente 4º ESO opciones A y B) para garantizar que el alumnado disponga en el futuro de los conocimientos necesarios.

En el Decreto 74/2007 se agrupan los contenidos en seis bloques: contenidos comunes, números, álgebra, geometría, funciones y gráficas, y estadística y probabilidad. Teniendo en cuenta lo establecido por este texto para cada uno de los bloques, la secuenciación de los contenidos programados para el curso será la siguiente (los contenidos mínimos son los marcados en negrita):

Bloque 1: Aritmética

1. Fracciones y números racionales. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none">• Los números fraccionarios y los números decimales.• Los números racionales.• Equivalencia de fracciones.• Fracción irreducible.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none">• Paso de números fraccionarios a decimales y

	<p>viceversa.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Simplificación de fracciones hasta que sean irreducibles. • Comparación y representación de números fraccionarios. • Manejo de los números racionales.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad de abstracción para comprender la equivalencia entre fracciones y decimales. • Rigurosidad en el uso del lenguaje matemático a la hora, por ejemplo, de definir los números racionales.

2. Números reales. Aproximación y notación científica. (3 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Los números irracionales. • Raíces. • Propiedades de las operaciones con raíces. • Los números reales. • Intervalos como subconjuntos de los números reales. • Error absoluto y relativo.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de las propiedades de las potencias de base fraccionaria y exponente entero. • Utilización de las propiedades de las operaciones con raíces. • Representación de distintos tipos de números en la recta real. • Aproximación de cantidades al orden más adecuado. • Cálculo de errores absolutos y relativos. • Utilización de cantidades muy grandes y muy pequeñas mediante la notación científica.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Madurez para valorar cuando es necesario utilizar la calculadora o cuando es conveniente utilizar aproximaciones y de qué orden.

Bloque 2: Álgebra

3. Expresiones algebraicas y polinomios. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Expresión algebraica. • Monomio. • Polinomio. • Elementos de un polinomio. • Regla de Ruffini. • Identidades notables.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de operaciones entre monomios y polinomios. • Empleo de las propiedades de las operaciones entre monomios y entre polinomios. • Utilización de la regla de Ruffini para la división y factorización de polinomios.

	<ul style="list-style-type: none"> • Empleo de las identidades notables en la resolución de operaciones entre polinomios y simplificación de los mismos.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Cuidado y orden en la expresión de los procesos utilizados.

4. Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Identidad. • Ecuación. • Elementos de una ecuación. • Criterios de equivalencia entre ecuaciones. • Forma general y coeficientes de una ecuación de segundo grado con una incógnita. • Fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado completa.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Traducción de distintos tipos de problemas al lenguaje de las ecuaciones de primer y segundo grado. • Resolución de ecuaciones de primer grado. • Aplicación de los criterios de equivalencia de ecuaciones. • Resolución de ecuaciones de segundo grado empleando el método más adecuado según su forma.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Predisposición para la resolución de problemas con un grado de complejidad superior al de cursos anteriores.

5. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Forma general de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un sistema de dos ecuaciones. • Tipos de sistemas en función del número de soluciones. • Equivalencia entre sistemas de ecuaciones. • Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Representación y resolución de problemas por medio de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. • Selección y aplicación del método de resolución más adecuado para cada sistema. • Aplicación de los criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad de adaptación a cada tipo de problema y de selección del método de resolución más adecuado. • Orden y rigurosidad en el lenguaje al plantear sistemas de ecuaciones para expresar un problema concreto.

6. Sucesiones y progresiones. (3 semanas)

Contenidos

Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Sucesión, términos y término general. • Sucesión creciente, decreciente, constante y oscilante. • Sucesión acotada superior e inferiormente y cota superior e inferior. • Progresión aritmética y diferencia. • Progresión geométrica y razón. • Término general de una progresión aritmética o geométrica. • Fórmulas para el término general de una P.A. o una P.G. • Fórmulas para la suma de los n primeros términos de una P.A o una P.G. • Demostraciones de las fórmulas para la suma de los n primeros términos. • Suma de los n primeros términos de una P.A. o una P.G.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de términos concretos de una sucesión a partir del término general de la misma. • Utilización de una determinada regla para la construcción de sucesiones. • Identificación de sucesiones crecientes, decrecientes, constantes y oscilantes. • Búsqueda de la cota superior o inferior de una sucesión. • Búsqueda de la diferencia de una P.A. o de la razón de una P.G. • Utilización para hallar distintos datos de las fórmulas para el término general de una P.A. o de una P.G. • Cálculo de la suma de los n primeros términos de una P.A. o de una P.G. a través de las fórmulas correspondientes. • Empleo de los modelos anteriores en la resolución de problemas.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. • Cuidado en la adaptación de los modelos a los problemas concretos.

Bloque 3: Geometría

7. Figuras planas. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Lugar geométrico. • Rectas y puntos notables de un triángulo. • Teorema de Pitágoras. • Fórmulas para el cálculo de las áreas de distintos tipos de figuras planas.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación del concepto de lugar geométrico a la

	<p>descripción de distintos tipos de elementos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Utilización del teorema de Pitágoras para la resolución de distintos tipos de problemas. • Cálculo de áreas a partir de las fórmulas conocidas. • Descomposición de polígonos en otros cuyas áreas se conocen.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Valoración de la geometría plana por su presencia en el entorno y su utilidad práctica. • Afición por la búsqueda de patrones geométricos en el entorno físico.

8. Cuerpos geométricos. La esfera terrestre. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Poliedro y sus elementos. • Poliedros regulares. • Tipos de cuerpos geométricos: prismas, pirámides, cuerpos de revolución y sus respectivos elementos. • Fórmulas para el cálculo de las áreas de los cuerpos anteriores. • Fórmulas para el cálculo de los volúmenes de los cuerpos anteriores. • Elementos de la esfera terrestre: meridianos, paralelos y hemisferios. • Coordenadas geográficas. • Husos horarios.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación de los planos de simetría en poliedros. • Utilización del cálculo de las áreas y volúmenes de cuerpos geométricos en la resolución de problemas. • Resolución de problemas relativos a coordenadas geográficas. • Resolución de problemas relativos a husos horarios.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Afición por la búsqueda de cuerpos geométricos en el entorno físico. • Perseverancia en la resolución de problemas que impliquen el uso de las propiedades de los cuerpos geométricos.

9. Vectores, movimientos en el plano y semejanzas. (3 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Vector, dirección, sentido y módulo. • Coordenadas de un vector. • Fórmula para el cálculo del módulo de un vector. • Suma de dos vectores. • Transformación geométrica. • Movimiento y clases de movimientos: traslación, giro, simetría axial y central. • Mosaico. • Homotecia.

	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Tales. • Figuras semejantes. • Escala.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Representación de un vector en el plano. • Cálculo de las coordenadas de un vector. • Cálculo del módulo de un vector. • Suma gráfica y analítica de vectores. • Aplicación de traslaciones, giros, simetrías y homotecias a figuras. • Identificación de centros y ejes de simetría. • Utilización del teorema de Tales para el cálculo de longitudes desconocidas. • Identificación de los movimientos que dan lugar a mosaicos. • Utilización de escalas para el paso de longitudes reales a sus representaciones y viceversa.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Curiosidad por descubrir las figuras y movimientos empleados en la elaboración de mosaicos presentes en pintura y arquitectura. • Precisión en la identificación de movimientos y los elementos que los definen: vectores, centros, ángulos, ejes, etc.

Bloque 4: Funciones

10. Funciones. (3 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Función. • Variable dependiente e independiente. • Dominio de una función. • Recorrido. • Continuidad. • Puntos de discontinuidad. • Función creciente, decreciente y constante en un intervalo. • Máximo y mínimo absoluto y relativo. • Simetría respecto del eje de ordenadas y respecto del origen.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Manejo de distintas formas de expresión de funciones (expresión algebraica, tabla de valores y gráfica). • Análisis de las características de una función dada a partir de su gráfica: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y absolutos, simetría. • Análisis del dominio, puntos de corte con los ejes y simetría de funciones sencillas a partir de su expresión

	<p>algebraica.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Empleo de las funciones como modelo para la resolución de distintos problemas.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexión sobre las funciones como modo de expresar relaciones presentes en la vida diaria. • Flexibilidad en el paso de unos modos de representar funciones a otros.

11. Funciones lineales. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Función lineal. • Pendiente y ordenada en el origen de una función lineal. • Ecuación de la recta. • Posiciones relativas de dos rectas en el plano: secantes, paralelas y coincidentes.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de la pendiente y la ordenada en el origen como modo de analizar directamente una función lineal a partir de su expresión algebraica. • Obtención de la expresión de una función lineal a partir de dos puntos por los que pasa. • Identificación de las posiciones relativas de dos rectas en el plano. • Cálculo gráfico y analítico del punto de corte de dos rectas secantes. • Modelización de situaciones mediante funciones lineales. • Estudio de sus propiedades mediante ecuaciones lineales.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Curiosidad por utilizar las relaciones de tipo funcional como modo de entender realidades de tipo social, económico o científico.

Bloque 5: Estadística y probabilidad

12. Estadística. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Población. • Muestra. • Métodos de selección aleatoria. • Variable aleatoria. • Variable cualitativa y cuantitativa. Variables cuantitativas discretas y continuas. • Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencia acumulada. • Medidas de centralización y posición (media, moda, mediana y cuartiles). • Medidas de dispersión (rango, varianza y desviación

	típica).
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de la representatividad de una muestra en casos sencillos. • Clasificación de variables cuantitativas y cualitativas. • Utilización de tablas para registrar datos estadísticos. • Cálculo de las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de un conjunto de datos. • Selección y construcción del tipo de gráfico más adecuado para cada problema. • Cálculo de las medidas de centralización, posición y dispersión requeridas en distintos tipos de problemas. • Utilización conjunta de medidas de centralización y dispersión en el análisis de los datos de un problema.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Interés por el análisis crítico de la información estadística recibida a través de los medios de comunicación.

13. Probabilidad. (2 semanas)

Contenidos	
Conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Experimento aleatorio y experimento determinista. • Suceso. • Espacio muestral. • Suceso seguro y suceso imposible. • Sucesos compatibles e incompatibles. • Operaciones entre sucesos (unión, intersección y complementario). • Probabilidad de un suceso. Relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad a medida que aumenta el número de repeticiones del experimento aleatorio correspondiente. • Regla de Laplace. • Fórmulas para la probabilidad de la unión de sucesos compatibles e incompatibles y del contrario de un suceso dado.
Procedimentales	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación de poblaciones y muestras. • Identificación de sucesos seguros e imposibles. • Identificación de sucesos compatibles e incompatibles. • Utilización de diagramas de árbol. • Realización de operaciones elementales entre sucesos. • Cálculo de probabilidades en casos sencillos mediante la regla de Laplace. • Cálculo de la probabilidad de uniones de sucesos y complementarios mediante las fórmulas correspondientes.
Actitudinales	<ul style="list-style-type: none"> • Curiosidad por la experimentación en casos sencillos. • Valoración de la probabilidad como instrumento para la toma de decisiones razonadas.

4.1. Objetivos de aprendizaje por unidades didácticas

Los objetivos establecidos para todo el curso en el apartado anterior se concretarán para cada una de las unidades didácticas de la siguiente manera:

1.- Fracciones y números racionales.

1. Comprender el concepto de número fraccionario como cociente de dos números enteros.
2. Definir y comprender el conjunto de los números racionales.
3. Representar números decimales como fraccionarios y viceversa.
4. Determinar si dos fracciones son equivalentes.
5. Simplificar fracciones hasta convertirlas en irreducibles.
6. Ordenar y representar números fraccionarios.
7. Operar con números racionales (suma, resta, multiplicación y cociente).

2.- Números reales. Aproximación y notación científica.

1. Elevar números fraccionarios a exponentes enteros.
2. Utilizar correctamente las propiedades de las potencias de números fraccionarios.
3. Operar con raíces aplicando las propiedades de las mismas.
4. Definir y comprender el concepto de número irracional.
5. Definir y comprender el conjunto de los números reales.
6. Representar distintos tipos de números en la recta real.
7. Expresar mediante intervalos conjuntos de números reales.
8. Utilizar adecuadamente el redondeo o el truncamiento al orden exigido en cada situación.
9. Obtener el error absoluto y el error relativo de una determinada aproximación.
10. Expresar cantidades muy grandes y muy pequeñas utilizando la notación científica.
11. Operar con números expresados en notación científica.

3.- Expresiones algebraicas y polinomios.

1. Reconocer el concepto de expresión algebraica como combinación de variables y números relacionados entre sí mediante sumas, restas, productos, cocientes y potencias.
2. Definir y comprender el concepto de monomio como expresión algebraica de la forma ax^n , donde a es un número cualquiera y n un número natural.
3. Reconocer los elementos que forman un monomio (coeficiente, variable y grado).
4. Resolver adecuadamente operaciones entre monomios (suma, producto por un número, producto y cociente) aplicando las propiedades de las mismas.
5. Comprender el concepto de polinomio en relación con el de monomio.

6. Reconocer los elementos de un polinomio (coeficientes, variable, grado y término independiente).
7. Resolver adecuadamente las operaciones entre polinomios (suma, producto por un número, producto y cociente) aplicando las propiedades de las mismas.
8. Utilizar la regla de Ruffini para dividir un polinomio entre otro de la forma $x-a$, siendo a un número entero.
9. Aplicar la regla de Ruffini a la factorización de polinomios.
10. Enunciar las identidades notables (cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y suma por diferencia).
11. Aplicar las identidades notables a la resolución de operaciones entre polinomios.
12. Simplificar expresiones mediante las identidades notables.

4.- Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.

1. Comprender el concepto de identidad como igualdad que se cumple para cualquier valor de la variable o variables.
2. Comprender el concepto de ecuación (y de soluciones o raíces de una ecuación) en contraposición al de identidad.
3. Reconocer los elementos de una ecuación (miembros, términos y términos independientes).
4. Reconocer la forma general de una ecuación de primer grado con una incógnita.
5. Enunciar los criterios de equivalencia entre ecuaciones.
6. Utilizar dichos criterios para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
7. Expresar y resolver distintos tipos de problemas mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita.
8. Reconocer la forma general de una ecuación de segundo grado con una incógnita.
9. Identificar los coeficientes a , b y c en una ecuación de segundo grado.
10. Aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado completas a la resolución de las mismas.
11. Obtener la solución de ecuaciones de segundo grado incompletas según sean del tipo ax^2 , ax^2+bx o ax^2+c .
12. Expresar y resolver distintos tipos de problemas mediante ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

5.- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Reconocer la forma general de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un sistema de dos ecuaciones de dicho tipo.
2. Definir los diferentes tipos de sistemas en función de su número de soluciones (compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles).

3. Definir sistemas de ecuaciones equivalentes.
4. Comprender los criterios de equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales.
5. Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas dado aplicando el método de sustitución, el de igualación o el de reducción.
6. Resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
7. Expresar problemas reales mediante sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
8. Seleccionar el método de resolución más adecuado para un sistema determinado y verificar que la solución obtenida es coherente con los datos del problema.

6.- Sucesiones y progresiones.

1. Definir el concepto de sucesión y de término de la misma.
2. Comprender el concepto de término general de una sucesión.
3. Obtener un término concreto de una sucesión a partir del término general.
4. Utilizar una determinada regla de formación para construir una sucesión.
5. Reconocer sucesiones crecientes, decrecientes, constantes y oscilantes.
6. Comprender los conceptos de sucesión acotada superior e inferiormente.
7. Hallar la cota superior o inferior de una sucesión, en caso de que existan.
8. Comprender los conceptos de progresión aritmética y de diferencia de la misma.
9. Reconocer una progresión aritmética (P.A.) a partir de sus primeros términos.
10. Obtener la diferencia de una P.A. a partir de dos términos consecutivos.
11. Reconocer y utilizar la fórmula que describe el término general de una P.A. en función del primer término de la misma y la diferencia para calcular un término concreto o bien el lugar que ocupa en la P.A.
12. Comprender qué representa la suma de los n primeros términos de una P.A.
13. Comprender la deducción de la fórmula para el cálculo de dicha suma.
14. Obtener la suma de los n primeros términos de una P.A. a partir de la fórmula anterior.
15. Comprender los conceptos de progresión geométrica (P.G.) y de razón de la misma.
16. Reconocer una P.G. a partir de sus primeros términos.
17. Obtener la razón de una P.G. a partir de dos términos consecutivos.
18. Reconocer y utilizar la fórmula que describe el término general de una P.G. en función del primer término y la razón para calcular un término concreto de la misma o el lugar que ocupa en la P.G.
19. Comprender qué representa la suma de los n primeros términos de una P.G.
20. Comprender la deducción de la fórmula para el cálculo de dicha suma en función del primer término y la razón.

21. Obtener la suma de los n primeros términos de una P.G. aplicando dicha fórmula.

7.- Figuras planas.

1. Comprender el concepto de lugar geométrico.
2. Reconocer ejemplos de lugares geométricos (mediatriz, bisectriz, circunferencia, etc.).
3. Definir las rectas y puntos notables de un triángulo: mediatrices y circuncentro, bisectrices e incentro, medianas y baricentro, alturas y ortocentro.
4. Enunciar el teorema de Pitágoras.
5. Aplicar el teorema de Pitágoras a la resolución de distintos tipos de problemas.
6. Enunciar las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos, rectángulos, rombos, romboides, trapecios y polígonos regulares.
7. Enunciar las fórmulas para el cálculo de las áreas de figuras circulares (círculo, sector circular y corona circular).
8. Calcular el área de cualquier polígono, descomponiéndolo en figuras con áreas de fórmulas conocidas.

8.- Cuerpos geométricos. La esfera terrestre.

1. Definir el concepto de poliedro.
2. Definir e identificar los elementos de un poliedro (caras, aristas, vértices y diagonales).
3. Definir e identificar los planos de simetría de un poliedro.
4. Describir los cinco poliedros regulares.
5. Definir prisma e identificar sus elementos principales (bases, caras laterales y alturas).
6. Definir pirámide e identificar sus elementos principales.
7. Definir cuerpo de revolución e identificar los distintos tipos existentes.
8. Enunciar las fórmulas para el cálculo del área de un prisma, una pirámide, un cilindro, un cono y una esfera.
9. Enunciar las fórmulas para el cálculo del volumen de los cuerpos geométricos anteriores.
10. Aplicar el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos a la resolución de problemas.
11. Reconocer en la esfera terrestre meridianos, paralelos, ecuador, meridiano cero y hemisferios.
12. Definir las coordenadas geográficas (latitud y longitud).
13. Definir huso horario.
14. Resolver problemas en que intervengan coordenadas geográficas y husos horarios.

9.- Vectores, movimientos en el plano y semejanzas.

1. Definir el concepto de vector y sus elementos.
2. Reconocer los elementos que definen un vector determinado (dirección, sentido y módulo).
3. Representar un vector en el plano.
4. Obtener las coordenadas de un vector a partir de su origen y su extremo.
5. Calcular el módulo de un vector a partir de sus coordenadas.
6. Sumar dos vectores analítica y gráficamente.
7. Definir y comprender el concepto de transformación geométrica y de transformado de un punto.
8. Definir y comprender el concepto de movimiento como transformación que conserva ángulos y distancias.
9. Definir y comprender los conceptos de traslación de vector v , giro de centro O y ángulo α , simetría central y simetría axial.
10. Diferenciar los giros positivos de los negativos.
11. Hallar el centro o el eje de una simetría dada.
12. Aplicar una traslación, un giro o una simetría central o axial a un punto del plano o, por extensión, a una figura.
13. Definir y comprender el concepto de homotecia de centro O y razón k como transformación que conserva ángulos y proporciones, pero no distancias.
14. Definir y comprender los conceptos de polígonos semejantes y de razón de semejanza.
15. Aplicar una homotecia a una figura dada.
16. Aplicar el Teorema de Tales al cálculo de longitudes desconocidas o a la división de un segmento en partes iguales.
17. Reconocer los frisos y mosaicos presentes en ámbitos tales como el arte y la arquitectura y relacionarlos con los movimientos de figuras en el plano.
18. Definir y comprender el concepto de escala como razón de semejanza entre una figura y su representación.
19. Aplicar la definición de escala al paso de longitudes reales a sus representaciones y viceversa.

10.- Funciones.

1. Definir y comprender el concepto de función.
2. Identificar las variables dependiente e independiente de una función dada.

3. Comprender la equivalencia entre una función expresada como expresión algebraica, como tabla de valores y como gráfica.
4. Definir y comprender los conceptos de dominio y recorrido de una función.
5. Hallar el dominio y el recorrido de una función dada y expresarlo en términos de subconjunto de números reales.
6. Hallar los puntos de corte de una función con los ejes.
7. Comprender el concepto de continuidad de una función y determinar la existencia o no de la misma a partir de su gráfica.
8. Hallar los puntos de discontinuidad de una función.
9. Definir y comprender los conceptos de función creciente, decreciente y constante en un intervalo.
10. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir de su gráfica.
11. Definir y comprender los conceptos de máximo y mínimo relativos y absolutos de una función.
12. Determinar los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función a partir de su gráfica.
13. Definir y comprender los conceptos de simetría respecto del eje de ordenadas y respecto del origen de una función.
14. Hallar las posibles simetrías de una función a partir de su expresión algebraica o de su gráfica.

11.- Funciones lineales.

1. Definir y comprender el concepto de función lineal.
2. Identificar los elementos que intervienen en la expresión general de una ecuación lineal (pendiente y ordenada en el origen).
3. Utilizar los elementos anteriores para determinar las características de una función determinada (corte con el eje de ordenadas y monotonía).
4. Hallar la expresión algebraica de una función lineal (ecuación de la recta) dados dos puntos por los que pasa la recta que representa.
5. Definir las diferentes posiciones relativas que pueden tomar dos rectas en el plano (secantes, paralelas o coincidentes).
6. Obtener analítica y gráficamente el punto de corte de dos rectas secantes.
7. Utilizar las propiedades de las funciones lineales en la resolución de problemas.

12.- Estadística.

1. Definir y comprender los conceptos de población y muestra.
2. Valorar la conveniencia de una muestra en casos sencillos.
3. Describir métodos de selección aleatoria.
4. Definir el concepto de variable aleatoria.
5. Diferenciar y reconocer ejemplos de variables cualitativas y cuantitativas.
6. Comprender los conceptos de variable cuantitativa discreta y continua.

7. Utilizar tablas para registrar datos estadísticos.
8. Definir y comprender los conceptos de frecuencia absoluta y relativa y de frecuencia acumulada de un conjunto de datos.
9. Calcular las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de un determinado conjunto de datos.
10. Seleccionar y construir el tipo de gráfico más adecuado para un determinado problema.
11. Hallar la media, la moda y la mediana de un conjunto de datos.
12. Calcular los cuartiles de un conjunto de datos.
13. Hallar el rango, la varianza y la desviación típica de un conjunto de datos.
14. Utilizar las medidas de centralización, posición y dispersión para interpretar los datos de partida.

13.- Probabilidad.

1. Reconocer experimentos aleatorios y deterministas.
2. Definir y comprender los conceptos de suceso y espacio muestral.
3. Reconocer el suceso seguro y el suceso imposible de un determinado experimento aleatorio.
4. Comprender los conceptos de sucesos compatibles e incompatibles.
5. Emplear diagramas de árbol para representar sucesos asociados a un experimento aleatorio dado.
6. Realizar operaciones elementales entre sucesos concretos (unión, intersección y complementario).
7. Comprender el concepto de probabilidad de un suceso y relacionarlo con los tipos de sucesos conocidos.
8. Comprender la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad a medida que aumenta el número de repeticiones del experimento aleatorio correspondiente.
9. Aplicar la regla de Laplace al cálculo de la probabilidad de sucesos dados.
10. Emplear las fórmulas para el cálculo de la probabilidad de la unión de sucesos y del complementario de un suceso en la resolución de problemas.

5. SECUENCIACIÓN TEMPORAL

Suponiendo al curso una duración de 30 semanas lectivas, se prevé para cada una de las unidades didácticas aproximadamente el tiempo siguiente:

U.D.	Tiempo en semanas	Evaluación
1.-Fracciones y números racionales	2	primera (11 semanas)
2.-Números reales. Aproximación y notación científica	3	
3.-Expresiones algebraicas y polinomios	2	
4.-Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita	2	
5.-Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	2	
6.-Sucesiones y progresiones	3	segunda (10 semanas)
7.-Figuras planas	2	
8.-Cuerpos geométricos. La esfera terrestre.	2	
9.-Vectores, movimientos en el plano y semejanzas	3	
10.-Funciones	3	tercera (9 semanas)
11.-Funciones lineales	2	
12.-Estadística	2	
13.-Probabilidad	2	
TOTAL	30 semanas	

6. METODOLOGÍA

6.1. Desarrollo del esquema metodológico

Durante las sesiones de clase el esquema habitual a seguir será de tipo expositivo, es decir, se desarrollará en los siguientes pasos:

- Presentación de los nuevos conceptos o procedimientos, siempre que sea posible, a través de una situación que justifique la necesidad de su estudio. Esto debería facilitar la comprensión, el recuerdo y la motivación del alumnado.
- Conexión con conceptos o procedimientos ya conocidos y necesarios para el desarrollo de los nuevos. Repaso de los mismos.
- Exposición de los nuevos contenidos: definiciones, resultados o algoritmos.
- Ejemplos: casos particulares de los conceptos explicados o ejercicios de aplicación de los procedimientos.

Cuando sea posible y adecuado para las características de los contenidos explicados (sobre todo los que tienen un carácter más experimental) se tratará de cambiar el esquema por uno que haga el recorrido inverso: formalizar el concepto o procedimiento a partir de un caso particular. Con esto se pretende favorecer el aprendizaje por descubrimiento, guiando al alumnado a través de preguntas hacia el modelo general que explique o resuelva un problema concreto.

Durante las sesiones de clase impartidas se ha observado en el grupo concreto (3º B ESO) una gran curiosidad y ganas de conocer las causas últimas del estudio de los contenidos del currículum. Aunque no siempre es sencillo a estos niveles explicar “para qué sirve” lo que se está explicando, y dado que el grupo tiene un buen nivel en general, se intentarán dar siempre ejemplos de aplicaciones reales (en ciencia, tecnología, arte, economía, etc.).

6.2. Estrategias del profesor, actividades y técnicas de trabajo en el aula

El tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria puede considerarse como un curso de transición. Transición del primer ciclo de la etapa, en que el alumnado ha visto por primera vez contenidos relativos al álgebra, el cálculo y la estadística que requieren un nivel de muy superior a los de la etapa de Primaria, al último curso de la etapa. Así, por una parte los estudiantes deberán utilizar todas las capacidades adquiridas en los cursos anteriores (planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado, al menos, utilización de funciones a nivel básico, etc.), familiarizándose con sus propiedades, reforzándolos y ampliándolos. Y por otro lado, deberán adquirir sobre los anteriores los conocimientos nuevos que irán en unos casos encaminados a completar su formación matemática junto con los que verán en las matemáticas de 4º de ESO y en otros a establecer una sólida base para sus estudios futuros (Bachillerato, Formación Profesional y estudios universitarios). Para evaluar el nivel general del grupo-clase se

realizará al empezar el curso una prueba inicial en que se requieran algunos conocimientos de cursos anteriores necesarios para aprender los del presente. Los resultados se tomarán como referencia para incidir en lo que no esté claro y tener un punto de partida, si bien hay que tener en cuenta que tras varios meses de vacaciones el resultado de estas pruebas suele reflejar una situación peor de lo que es en realidad.

Este es también un curso en que el alumnado suele empezar a tomar decisiones: cursar matemáticas opción A o B en el curso siguiente, optar por hacer Bachillerato o Formación Profesional, Bachillerato de Humanidades o Ciencias, etc. La percepción de la utilidad de las matemáticas y su capacidad para estudiarlas que adquieran en este curso es fundamental para esa toma de decisiones.

Por todo ello, y en relación con el esquema metodológico descrito en el apartado anterior (6.1), lo ideal sería seguir en el curso programado los siguientes principios:

1. Basar cada nuevo contenido en lo ya sabido. Asentar y recordar los conocimientos anteriores. Destacar la coherencia del contenido, las conexiones entre diferentes conceptos y procedimientos.
2. Destacar las aplicaciones prácticas de los contenidos. Plantear problemas de la vida real, retos y cuestiones de inicio motivantes. Utilizar problemas de tipo lógico y aparentemente no tan conectados con los contenidos explicados para motivar al alumnado con especial facilidad para alcanzar los objetivos.
3. Utilizar recursos informáticos siempre que esto favorezca la comprensión, visualización e interacción con la materia enseñada o facilite cálculos muy tediosos (por ejemplo: programas sencillos para la representación de gráficas de funciones, GeoGebra en geometría y hojas de cálculo en estadística).
4. Cuando sea posible, partir de un problema concreto para luego generalizar.
5. Prestar especial atención al uso riguroso del lenguaje matemático (al nivel del alumnado) que será beneficioso para la mejora de la expresión y la comprensión en todas las materias.
6. Fomentar en todo momento la participación del alumnado, ya que por su edad necesitan un seguimiento constante de su evolución. Crear un clima de aula en que preguntar dudas tenga siempre consecuencias positivas. Favorecer la realización de ejercicios en la pizarra por parte del alumnado, para mejorar su confianza en sí mismos y su capacidad para hablar en público exponiendo su propio trabajo, argumentos y posiciones.

7. RECURSOS, MEDIOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

Los materiales de que deberá disponer el alumnado serán los siguientes:

- Libro de texto: editorial Santillana, proyecto “Los Caminos del Saber”, dirigido por Enrique Juan Redal y Domingo Sánchez Figueroa.
- Cuaderno de trabajo cuadriculado
- Lápiz, goma, bolígrafo, papel milimetrado, regla, escuadra, cartabón, transportador de ángulos, compás, calculadora (se procurará que no se abuse de la misma).

Los materiales que aportará el centro para el desarrollo de la labor del docente serán:

- Encerado, tizas e instrumentos de dibujo.
- Proyector, pantalla y ordenador en el aula.
- Salas de informática con al menos diez ordenadores para los estudiantes, conexión a internet y programas básicos (procesador de texto, hoja de cálculo, etc.).
- Fotocopias con contenidos teóricos adicionales que puedan ser de interés y actividades planteadas a los alumnos.

Además de lo anterior pueden ser de utilidad en actividades puntuales:

- Libros divulgativos disponibles en la biblioteca del centro.
- Vídeos.
- Cuerpos geométricos de madera.
- Juegos tipo tangram, figuras de cartulina, etc.
- Recortes de prensa para analizar la información de tipo matemático que contienen.

- Páginas web:

<http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>

<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/>

8. CRITERIOS Y PROCEDIMIENTOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN

8.1. Criterios de evaluación

El Decreto 74/2007 establece los siguientes criterios de evaluación para el tercer curso de ESO:

1. Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.

(...) comprobar que el alumnado es capaz de identificar y emplear los números racionales y sus operaciones en la resolución de problemas cotidianos, sabe utilizar la notación científica en dicha resolución y valorara tanto el resultado obtenido como el error cometido (...).
2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos (...).
3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (...).
4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza (...).
5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.

Se trata de observar la capacidad de comprender y expresar situaciones cotidianas, del mundo físico o de las ciencias sociales, por medio de gráficas y tablas (...).
6. Elaborar e interpretar informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas y analizar si los parámetros son más o menos significativos.

El estudio de determinados aspectos de una población en ámbitos tan diversos como el entorno social, natural, el consumo y otros, se puede realizar mediante técnicas elementales de estadística, con ayuda, siempre que sea posible, de sistemas tecnológicos (...).
7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos (...).
8. Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello (...).

Estos criterios pueden concretarse para cada una de las unidades didácticas, en correspondencia con los objetivos establecidos para cada una, de la siguiente manera:

1.- Fracciones y números racionales.

1. Utilizar indistintamente números fraccionarios y decimales comprendiendo la equivalencia entre ellos.
2. Aplicar la equivalencia entre fracciones y simplificarlas cuando sea necesario.
3. Emplear números racionales realizando operaciones con ellos para la resolución de problemas de la vida real.
4. Comparar y representar números racionales en la recta real.

2.- Números reales. Aproximación y notación científica.

1. Calcular potencias de base racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.
2. Operar con raíces aplicando sus propiedades.
3. Utilizar distintos tipos de números reales, representarlos en la recta real y expresar subconjuntos de los mismos mediante intervalos.
4. Emplear el redondeo o el truncamiento al orden más adecuado en cada momento y estimar el error absoluto y relativo cometido.
5. Manejar la notación científica para resolver problemas con datos reales.

3.- Expresiones algebraicas y polinomios.

1. Emplear monomios y polinomios reconociendo sus elementos y aplicando las propiedades de las operaciones entre ellos.
2. Utilizar la regla de Ruffini para la división y factorización de polinomios.
3. Aplicar las identidades notables para operar con polinomios y simplificar expresiones.

4.- Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.

1. Reconocer ecuaciones de primer y segundo grado, sus elementos y observar las equivalencias que puedan existir.
2. Resolver ecuaciones de primer y segundo grado (completas e incompletas).
3. Expresar y resolver problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.

5.- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Identificar los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales en función del número de soluciones.
2. Reconocer sistemas de ecuaciones equivalentes.
3. Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas empleando el método más adecuado según la forma del sistema particular.
4. Expresar problemas de la vida real mediante sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos comprobando que la solución es coherente con el problema.

6.- Sucesiones y progresiones.

1. Utilizar una determinada regla de formación para construir una sucesión o hallarla en casos sencillos.
2. Identificar sucesiones crecientes, decrecientes, constantes y oscilantes y las cotas superiores e inferiores de una sucesión en caso de que existan.
3. Reconocer progresiones aritméticas y geométricas y hallar sus diferencias o razones a partir de varios términos consecutivos.
4. Utilizar las fórmulas para el cálculo del término general y de la suma de los n primeros términos de progresiones aritméticas o geométricas en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

7.- Figuras planas.

1. Identificar lugares geométricos a partir de sus propiedades.
2. Reconocer los puntos y rectas notables de los triángulos.
3. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos.
4. Utilizar el cálculo de áreas de distintas figuras planas para la resolución de problemas de la vida real.

8.- Cuerpos geométricos. La esfera terrestre.

1. Identificar los elementos de un poliedro y sus planos de simetría.
2. Reconocer distintos tipos de cuerpos geométricos y emplear el cálculo de sus áreas y volúmenes en la resolución de problemas reales.
3. Reconocer en la esfera terrestre meridianos y paralelos y manejar con soltura las coordenadas geográficas.
4. Resolver problemas que impliquen la utilización de coordenadas geográficas y husos horarios.

9.- Vectores, movimientos en el plano y semejanzas.

1. Identificar y representar vectores en el plano y sus elementos.
2. Calcular las coordenadas y el módulo de un vector y sumar vectores gráfica y analíticamente.
3. Reconocer diferentes transformaciones geométricas y los elementos que las definen (vectores, centros, ejes, ángulos y proporciones) en contextos matemáticos, artísticos, naturales, etc.
4. Aplicar distintas transformaciones geométricas a figuras del plano.
5. Utilizar el teorema de Tales y manejar escalas para la resolución de problemas cotidianos.

10.- Funciones.

1. Expresar situaciones reales (cotidianas o científicas) a través de funciones.
2. Utilizar indistintamente las distintas formas de expresar una función (expresión algebraica, tabla de valores y gráfica).
3. Estudiar las características de una función (dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad, monotonía, extremos absolutos y relativos y simetrías) a partir de la expresión más adecuada en cada caso.
4. Utilizar el estudio de funciones para obtener información sobre las situaciones que representan.

11.- Funciones lineales.

1. Identificar y analizar funciones lineales a partir de su expresión general.
2. Hallar la ecuación de una recta a partir de dos puntos de la función lineal correspondiente.
3. Describir las posiciones relativas de dos rectas y hallar sus puntos de corte en caso de que existan.
4. Utilizar funciones lineales para expresar situaciones cotidianas.

12.- Estadística.

1. Identificar poblaciones y valorar la representatividad de muestras de las mismas.
2. Reconocer variables estadísticas cualitativas y cuantitativas y, entre estas últimas, discretas y continuas.
3. Calcular frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
4. Utilizar el tipo de gráfico más adecuado para organizar la información en un problema concreto.

5. Calcular las medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto de datos y utilizar los más adecuados para analizar el objeto de estudio y extraer conclusiones.

13.- Probabilidad.

1. Reconocer en experimentos aleatorios el espacio muestral, los sucesos elementales, el suceso seguro y el imposible.
2. Distinguir sucesos compatibles e incompatibles entre sí.
3. Realizar operaciones elementales entre sucesos (unión, intersección y complementario).
4. Calcular la probabilidad de distintos sucesos a través de la regla de Laplace o por otros métodos.
5. Resolver problemas y tomar decisiones en contextos cotidianos a partir de las probabilidades calculadas.

8.2.Procedimientos e instrumentos de evaluación y criterios de calificación

Para evaluar a cada estudiante se distribuirá el temario en subconjuntos de unidades didácticas (normalmente, de una o dos unidades cada uno) según la coherencia e interdependencia de los contenidos de las mismas. Para cada uno de estos grupos de unidades didácticas se adjudicará al alumnado una calificación sobre 10 basada en la evaluación de los siguientes instrumentos:

- examen escrito de respuesta abierta en que se evalúe el dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales a través de la consecución de los objetivos de cada unidad. Puede haber unidades en que resulte útil introducir alguna cuestión con formato de prueba objetiva (verdadero o falso, múltiples respuestas, etc.).

- trabajos grupales o individuales en que los estudiantes deban recabar información sobre un determinado tema o buscar respuestas a preguntas planteadas en relación a la materia. Se fomentará el trabajo grupal siempre que sea posible, de forma que el alumnado se vea obligado a relacionarse con el resto de compañeros, repartir responsabilidades, tomar decisiones conjuntas

- relaciones de ejercicios que cada alumno o alumna deberá resolver individualmente y entregar en un plazo de tiempo.

- observaciones sobre el comportamiento del alumnado durante las sesiones de casa, su actitud hacia la asignatura y compromiso con la misma, su trabajo en casa, su esfuerzo y evolución respecto del punto de partida.

Se le dará al examen de cada unidad o grupo de unidades didácticas un peso del 80% de la nota para dicha materia. El 20% restante se completará con las calificaciones de ejercicios entregados, trabajos o actividades individuales y grupales (en función de la

unidad didáctica) y la calificación extraída de la observación del comportamiento, trabajo diario y participación en clase de cada alumno o alumna. Para la nota de cada evaluación, se calculará la media de las calificaciones (al menos dos) de los grupos de unidades correspondientes, redondeada y entera.

8.3. Competencias básicas de la materia

Como mínimos exigibles o competencias básicas de la materia para el curso se han seleccionado los siguientes:

- Convertir números fraccionarios en decimales y viceversa.
- Realizar sumas, restas, multiplicaciones y cocientes de números racionales.
- Operar con potencias de base racional y exponente entero y con raíces.
- Utilizar el redondeo y el truncamiento al orden requerido en cada caso y estimar el error cometido.
- Emplear la notación científica.
- Resolver operaciones con polinomios.
- Aplicar las identidades notables en las operaciones entre polinomios y en la simplificación de expresiones.
- Expresar distintas situaciones a través de ecuaciones de primer y segundo grado.
- Dar respuesta a problemas que impliquen la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Traducir el enunciado de un problema a lenguaje algebraico mediante un sistema de ecuaciones lineales.
- Elegir y aplicar el método de resolución más adecuado para cada sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Utilizar el término general de una sucesión para construirla o hallarlo en casos sencillos a partir de varios términos.
- Reconocer progresiones aritméticas y geométricas.
- Utilizar el término general y la suma de los n primeros términos de progresiones aritméticas y geométricas en la resolución de problemas.
- Comprender el concepto de lugar geométrico.
- Utilizar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.
- Calcular las áreas de distintas figuras planas y utilizarlas en la resolución de problemas.
- Utilizar las áreas y volúmenes de distintos cuerpos geométricos en la resolución de problemas.
- Comprender y manejar las coordenadas geográficas y husos horarios.
- Identificar los elementos de un vector y representar vectores dados en el plano.
- Aplicar distintas transformaciones geométricas a figuras en el plano.

- Aplicar el teorema de Tales y las escalas como ejemplo de semejanza al cálculo de longitudes desconocidas.
- Comprender el concepto de función y reconocerlas en sus distintas formas.
- Estudiar las características fundamentales de las funciones y utilizarlas para interpretar la relación que representan.
- Reconocer funciones lineales e interpretar el significado de sus parámetros.
- Expresar funciones lineales a través de la ecuación de la recta correspondiente.
- Comprender los conceptos estadísticos básicos (población, muestra, variable aleatoria, tipos de variables aleatorias) y reconocerlos en situaciones concretas.
- Calcular las frecuencias relativas, absolutas y acumuladas y las principales medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto de datos y utilizar los más adecuados para extraer información.
- Conocer y comprender los conceptos de suceso y espacio muestral e identificarlos en casos concretos.
- Utilizar la regla de Laplace y las operaciones entre sucesos para el cálculo de probabilidades.
- Emplear la información obtenida a partir del cálculo de probabilidades en la toma de decisiones.

9. ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN

Para la recuperación de cada uno de los bloques de unidades didácticas evaluadas se realizarán exámenes de recuperación y se plantearán actividades o trabajos complementarios en relación con la materia correspondiente. Estos serán similares a los encargados la primera vez que se evaluó de dicha materia pero tendrán siempre carácter individual.

Todo alumno o alumna deberá aprobar las tres evaluaciones en la convocatoria ordinaria o en las recuperaciones correspondientes para aprobar la asignatura en junio. Los y las estudiantes con una o varias evaluaciones suspensas deberán realizar una prueba en septiembre en que deberán superar los objetivos mínimos del curso.

Al alumnado con las matemáticas de 2º de ESO o de 1º y 2º de ESO suspensas, se le hará un seguimiento a lo largo del curso, planteando en cada evaluación tantos exámenes y actividades (trabajos o ejercicios de carácter individual que deberán ser entregados) de recuperación como se considere necesario. Se determinará a partir de esos instrumentos una calificación para cada evaluación, y para organizarlos y ponerlos en práctica se dispondrá de una hora semanal. Si algún alumno o alumna no recupera alguna de las evaluaciones por este sistema, deberá realizar una prueba extraordinaria en septiembre en que se evaluarán los objetivos mínimos del curso correspondiente. También se tendrá en cuenta la evolución en la asignatura de 3º.

10. MEDIDAS DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Aunque ningún alumno ni alumna del grupo B está en el grupo flexible correspondiente de matemáticas, sí hay alumnos que presentan dificultades en la asignatura. Por ello, un recurso útil es la realización de un diario de clase en que se incluyan observaciones realizadas durante las sesiones con el alumnado, el comportamiento, participación y motivación observado en cada uno de ellos y sus notas en la realización de las distintas tareas.

También se fomentará la realización de actividades en pequeños grupos, de manera que estudiantes con distintas capacidades y gustos deban trabajar juntos a modo de “tutoría entre iguales”. Así, cada uno de los alumnos orientará al resto del grupo en las partes para las que tenga más facilidad o más recursos.

Se elaborarán materiales de repaso de contenidos teóricos y prácticos de cursos o unidades anteriores necesarios para el aprendizaje de los nuevos.

Se plantearán actividades que conecten la materia con la realidad y que se alejen de los “típicos problemas de matemáticas” para aquellos estudiantes que tengan una menor motivación hacia ellas. Se destacará la relación de las matemáticas con otros campos y se buscarán aplicaciones de las mismas adaptadas al nivel de los contenidos impartidos. Se reforzarán las buenas conductas y los pequeños logros (se planteará la consecución de los mismos de forma progresiva, en pequeñas fases) para mejorar la autopercepción y autoestima del alumnado.

No debemos olvidar al alumnado con altas capacidades. Aunque en este grupo en particular no hay ningún estudiante diagnosticado como tal, pero sí varios que muestran un interés especial por la materia y superan las evaluaciones sin dificultad. Para ellos sería especialmente apropiado el programar como actividad extraescolar la asistencia a olimpiadas matemáticas u otras actividades del estilo. Se podrían organizar clases de resolución de problemas para la preparación de las mismas como actividad extraescolar (fuera del horario lectivo). Por supuesto, la participación en este tipo de iniciativas no se debe reservar exclusivamente a los estudiantes con altas capacidades, es beneficiosa para cualquier alumno o alumna. La organización de actividades extraescolares y complementarias en general en que se muestren las conexiones de las matemáticas con otras ciencias, arte, arquitectura, etc. (visitas a museos, exposiciones, charlas...) podría resultar de mucha utilidad para todo el grupo.

Por último, y tanto para el alumnado con facilidad para las matemáticas como para el que tienen dificultades podría ser interesante planificar sesiones de clase en que se resuelvan problemas o retos de tipo lógico, que no requieran apenas de conocimientos matemáticos para ser resueltos.

**PROYECTO DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN
EDUCATIVA:
ERRORES Y DIFICULTADES EN RELACIÓN CON EL
CONCEPTO DE VECTOR**

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la didáctica de la matemática son frecuentes los análisis de errores, siendo muy habituales en aritmética o álgebra (por ejemplo: Socas, 2007; Ruano y otros, 2003; Rico y Castro, 1994; Engler y otros, 2004). La geometría no ha sido objeto de este tipo de estudio en tantas ocasiones y es difícil encontrar bibliografía relacionada con un concepto fundamental en el aprendizaje de la geometría analítica como son los vectores (Miró, 2000; Bohórquez y otros, 2009; Ramírez y otros, 2009). Por ello, en el contexto del desarrollo de una unidad didáctica en que se introduce el concepto por primera vez, “Vectores, movimientos en el plano y semejanzas” en 3º de ESO, surge la posibilidad de hacer un estudio de las dificultades de aprendizaje que presenta el alumnado y los errores que cometen más habitualmente. Este estudio se plantea dentro de la modalidad de introducción a la investigación educativa prevista para los Trabajos fin de máster.

La unidad didáctica referida contiene la definición de vector en relación con los elementos que la definen (origen y extremo, dirección, módulo y sentido). Como objetivos de aprendizaje de tipo procedimental incluye su representación gráfica en el plano, el cálculo de las coordenadas y módulo de los mismos, su suma analítica y gráfica y su aplicación para el desarrollo de otros conceptos como el de traslación.

Los vectores son un concepto completamente nuevo, al que los y las estudiantes se acercan por primera vez y de cuyo significado no tienen ninguna noción previa. Por otro lado, los vectores conforman la base de los contenidos de geometría analítica que se desarrollarán en cursos posteriores y que tan importantes son, en el Bachillerato y en las enseñanzas superiores.

2. ENMARQUE TEÓRICO Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Se plantea la siguiente cuestión: ¿cuáles son los errores y dificultades que aparecen más habitualmente en el primer contacto de los alumnos y alumnas con el concepto de vector?

2.1. Objetivo general y objetivos específicos

Se pretende registrar y clasificar los errores y dificultades de aprendizaje del alumnado de 3º de ESO en relación con los contenidos relativos a vectores en el plano. Esto se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los errores que el profesorado con experiencia en la materia identifica como más habituales en relación con las causas de los mismos.
- Relacionar los errores encontrados con las deficiencias en objetivos de aprendizaje que el alumnado debería haber adquirido previamente.
- Proponer cambios que introduzcan mejoras en este sentido.

2.2. Marco teórico

Existen una gran cantidad de investigaciones sobre errores en matemáticas como herramienta para la enseñanza de las mismas, ya desde principios del siglo XX y especialmente a partir de la década de los 60 (Radatz, 1980; Brousseau y otros, 1986). En España el asunto ha sido analizado con profundidad por Rico en solitario (1995, 1997) y en colaboración con otros autores (Rico y Castro, 1994; Kilpatric y otros, 1998). Frecuentemente se utiliza como referente la clasificación de los errores matemáticos de Radatz (1979):

1. Errores debidos a dificultades del lenguaje: hace referencia a los problemas que surgen en la “traducción” del lenguaje matemático al que los alumnos usan habitualmente y viceversa.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: a menudo las representaciones mentales que nos hacemos de los objetos y situaciones matemáticas inducen a error.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: en esta categoría se incluye el desconocimiento de todo tipo de conceptos y procedimientos que impidan la resolución correcta de un problema matemático (símbolos, hechos básicos, algoritmos, etc.).
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento: aquellos que se deben a la incapacidad para adaptar la experiencia previa en la resolución de tareas matemáticas a nuevas situaciones en las que las condiciones no son las mismas. Esta categoría se divide a su vez en otras cinco: errores por perseveración, de asociación, de interferencia, de asimilación y de transferencia negativa a partir de tareas previas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: se hace una analogía errónea, de manera que se aplican reglas o estrategias parecidas en contenidos diferentes.

Según Rico (1995), la mayor parte de los especialistas establecen unas mismas características de los errores cometidos por el alumnado: surgen de manera espontánea y sorprenden al profesorado; suelen ser muy persistentes porque su corrección “puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos”; los errores sistemáticos son mucho más frecuentes que los cometidos por azar y, evidentemente, destapan mejor los procesos mentales que subyacen a la resolución de un determinado problema; por último, los errores no son percibidos en el momento por el sujeto, que no cuestiona los conceptos o procedimientos empleados.

Mencionaremos también otros tres estudios relevantes en relación con este trabajo. En Abrate y otros (2006) se realiza un amplísimo análisis de los errores y dificultades en matemáticas como base para una mejor articulación entre las enseñanzas medias y las universitarias en Argentina. En él, encuadran los errores en siete categorías que no estaban establecidas de antemano, sino que surgieron tanto de las fuentes consultadas como de las propias respuestas de los alumnos a la evaluación propuesta: errores debidos al lenguaje matemático, a dificultades para obtener información espacial, a inferencias o asociaciones incorrectas, a la recuperación de un esquema previo, a cálculos incorrectos o accidentales, a deficiencias en la construcción de conocimientos previos y errores debidos a la ausencia de conocimientos previos. A la hora de analizar los errores recopilados en la llamada “Evaluación de Conocimientos Previos”, administrada a los alumnos del Curso de Ingreso a la Universidad, se trató de describir los más habituales y determinar las posibles causas. En cuanto a los contenidos incluidos en la evaluación, la mayor parte de los apartados de los ocho ejercicios se referían a procedimientos algebraicos y sólo hubo cuatro (todos ellos para el Ciclo Básico Unificado) relativos a la geometría, en concreto a figuras planas y sus áreas.

Del Puerto y otros (2004), por su parte, sostienen que:

la implementación de cuestionarios para detección de errores, y la posterior clasificación de los mismos con base en alguna de las categorizaciones vigentes, es una metodología que permite obtener una “radiografía” del estado de conocimiento de los alumnos y constituye una valiosa ayuda a la hora de reorganizar la práctica pedagógica.

En su estudio se recogen los errores cometidos por alumnos que están finalizando enseñanzas medias o comenzando enseñanzas universitarias en problemas que comprenden contenidos de álgebra y teoría básica de funciones.

Entre los estudios relativos a geometría en Franchi y Hernández (2004) se utiliza la observación participante para hacer un compendio de los errores cometidos a lo largo de dos semestres por alumnos de Geometría de la Universidad de Zulia. Posteriormente se clasificaron dichos errores atendiendo a las categorizaciones de Brousseau y Balacheff (1997), Socas (1997), Movshovitz y otros (1987), Radatz (1979) y Astolfi (1999). Se cuantificó el número de errores de los tipos propuestos por cada uno de los autores, así como los errores que no era posible encuadrar en ninguno de los tipos.

Cabe citar, por último a otros dos autores cuyos trabajos podemos relacionar con los errores debidos a dificultades con en el lenguaje. Godino (en solitario, 2002, y con otros autores, 2010) y Batanero (2005) traducen los procesos llevados a cabo por lo alumnos en función del significado de los elementos matemáticos que intervienen, analizando las diferencias entre el institucional (significado que la institución de enseñanza pretende transmitir) y el personal (el que le dan los estudiantes).

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y PLANIFICACIÓN

3.1. Modalidad de investigación

Se realizó un análisis de los errores cometidos en el aprendizaje de los conceptos de magnitud vectorial y vector y los procedimientos de representación gráfica de los mismos, cálculo de sus coordenadas y módulo, suma analítica y gráfica y aplicación a la construcción de traslaciones. El estudio es descriptivo, puesto que trata de identificar los conceptos y procedimientos a los que se asocia un mayor número de errores y determinar las causas de los mismos.

3.2. Población objeto de estudio

Estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria que se enfrentan por primera vez a los contenidos mencionados (esta primera toma de contacto se realiza habitualmente en el tercer curso de ESO) y profesorado con experiencia en estos niveles.

Se ha realizado un estudio sobre 20 alumnos y alumnas que conformaban el grupo de trabajo asignado a la profesora en prácticas. Para el sondeo previo se encuestó a los 7 profesores del Departamento de Matemáticas del centro correspondiente.

3.3. Variables de estudio

Errores cometidos y conceptos y procedimientos que plantean dificultades así como la frecuencia con que aparecen.

3.4. Instrumentos y técnicas de recogida de información

Para el registro y análisis de las variables anteriores se utilizaron los siguientes instrumentos:

- Cuestionario distribuido entre los profesores en el cual debían aportar su percepción sobre los errores cometidos en este campo. En él se recogieron los conceptos y procedimientos que los alumnos tienen que manejar en este curso y una clasificación de las causas de los posibles errores basada en la de Radatz (1979), pero particularizada para los conceptos y procedimientos descritos (Anexo 1).
- Registro para la observación participante estructurada, elaborado teniendo en cuenta los resultados observados en el cuestionario anterior (Anexo 2).
- Problemas del examen final con varios ítems de respuesta abierta, relacionados con los tipos de errores observados y esperados (Anexo 3).
- Ejercicio realizado por los alumnos en una sesión de clase a través del cual se pretendía evaluar la comprensión del concepto de vector en relación con la utilización de magnitudes vectoriales en otras áreas diferentes de la de matemáticas (Anexo 4).

3.5. Planificación

La investigación se llevó a cabo a lo largo de dos semanas en que se impartió clase a un grupo de tercer curso de ESO del IES Alfonso II de Oviedo. El grupo está

formado por 20 alumnas y alumnos, de 14 y 15 años, que participan en el Programa Bilingüe del centro. El grupo tiene un comportamiento medio bueno, en opinión del profesorado, aunque la asignatura de matemáticas acumula los mayores números de suspensos en las dos evaluaciones previas.

Debido a la limitación del tiempo disponible se planificaron y llevaron a cabo las siguientes fases:

- Semana previa al comienzo de la unidad didáctica: realización del cuestionario sobre errores frecuentes y sus causas al profesorado que forma el Departamento de Matemáticas. A partir de los resultados obtenidos en los cuestionarios se trató de orientar la observación posterior.

Así, se hizo una reclasificación de las posibles causas de error en cada procedimiento, reagrupando dos categorías de Radatz (“errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento” y “errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes”) en una sola categoría denominada “aplicación de estrategias irrelevantes o asociaciones incorrectas”. Además, se concretaron las “dificultades para obtener información espacial” como “problemas con la representación de puntos en los ejes cartesianos” y se incluyó la “falta de comprensión lectora” en la categoría de “dificultades con el lenguaje” de Radatz. Por último, las causas que en el cuestionario de los profesores se referían a problemas al operar con enteros, potencias, etc. se recondujeron a la de “desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios”, puesto que esta se considera la causa última de esos errores.

- Durante el desarrollo de la unidad: observación estructurada (mediante el guion incluido en el Anexo 2) de los errores cometidos por los alumnos y alumnas en el transcurso de las sesiones de clase. Ejercicio para valorar la comprensión del concepto de vector a través de su relación con la física.

Con dicho ejercicio se pretendía completar la observación de los errores y dificultades, incluyendo entre las mismas la incapacidad de identificar la utilidad de los vectores y relacionarlos con otras áreas distintas de las matemáticas. Durante la sesión de clase en que se presentó el concepto de vector se hizo hincapié en la necesidad de caracterizar algunas magnitudes no solamente a través de un número sino también de una dirección y sentido.

En el guion de la observación se registraron todas las dificultades y errores en que incurrieron los y las estudiantes en sus salidas a la pizarra, en los ejercicios encargados como tarea para casa y en las dudas que fueron planteando.

- Tras las 8 sesiones en que se impartió la unidad: inclusión en el examen final de dos problemas de respuesta abierta con varios ítems enfocados al cálculo de coordenadas, origen y módulos, representación de vectores, suma analítica y gráfica de los mismos, y aplicación a la construcción de traslaciones.

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1. Resultados obtenidos

Resultados del cuestionario realizado a los profesores:

Siete profesores y profesoras de los ocho que componen el Departamento de Matemáticas del centro (uno de ellos llevaba muchos años impartiendo clase exclusivamente en Bachillerato), con una experiencia de entre 29 y 43 años como docentes, respondieron al cuestionario. Se les pedía que calificaran por una parte la frecuencia con que se cometen errores asociados a determinados conceptos y procedimientos y por otra las causas de la aparición de dichos errores, asignando a cada uno una frecuencia de una escala con 4 grados.

Si se le da a cada respuesta “nunca” una puntuación de 0, a cada “casi nunca” 1, a “a veces” 2 y a “con frecuencia” 3, se puede hacer una media aritmética de las respuestas de los 7 profesores encuestados. Así, se obtiene para los ítems de la primera tanda:

	Conceptos y procedimientos	Puntuación
7	Aplicación a la construcción de traslaciones	2,57
6	Suma gráfica de vectores	2,43
1	Concepto de vector (identificación errónea del sentido o la dirección, confusión entre los mismos, etc.)	2,14
2	Representación de vectores en el plano	1,86
3	Cálculo de las coordenadas a partir del origen y el extremo	1,86
4	Cálculo del módulo a partir de las coordenadas	1,71
5	Suma analítica de vectores	1,57

Y para los de la segunda:

	Causas de los errores	Puntuación
1	Problemas al operar con números enteros o racionales (por ejemplo, aplicar la regla de los signos a una suma de números negativos)	2,43
2	Problemas con las propiedades de las raíces (por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a la raíz de una suma, $\sqrt{4+9} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$)	2,43

6	Desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios (por ejemplo, desconocer la fórmula correcta para el cálculo del módulo de un vector)	2,14
4	Dificultades en la comprensión del lenguaje utilizado (manejo deficiente del lenguaje relativo a vectores)	2
5	Falta de comprensión lectora (interpretar incorrectamente el enunciado de un problema, no dedicar el tiempo necesario a leerlo, etc.)	2
3	Problemas con la representación de puntos en los ejes cartesianos	1,57

Se observa que las respuestas de los docentes fueron más homogéneas y que tendieron a otorgar mayores frecuencias cuando se les preguntó por las causas concretas de los errores que por los conceptos y procedimientos a los que van asociados.

Parece confirmarse con las respuestas dadas por los profesores la idea previa de que los alumnos no tienen soltura en las operaciones con números enteros y racionales ni han asimilado correctamente las propiedades de los radicales. El desconocimiento de los conceptos y procedimientos necesarios, la comprensión lectora y del lenguaje propio de los vectores obtienen puntuaciones relativamente altas y, al contrario de lo que podría esperarse, la representación de puntos en los ejes cartesianos no parece plantear muchas dificultades.

Por otra parte, el manejo y representación de vectores en los ejes sí sería causa de problemas cuando se trata de aplicarlos a la construcción de aplicaciones y de sumarlos gráficamente. La comprensión del concepto de vector, quizá en correspondencia con la comprensión lectora, las dificultades con el lenguaje y la falta de conocimientos necesarios, es la siguiente tras la suma gráfica de vectores. El cálculo de módulos y la suma analítica de vectores obtienen las puntuaciones más bajas, a pesar de requerir el cálculo de raíces cuadradas y las operaciones con enteros y en ocasiones con racionales.

Resultados de la observación realizada durante las clases:

En relación con el concepto de vector, los estudiantes mostraron:

- dificultades a la hora de identificar la dirección de los mismos (como recta que pasa por el origen y el extremo), hecho que se puede achacar al desconocimiento de los conceptos necesarios (poca soltura con los elementos geométricos básicos).
- tendencia a intercambiar origen y extremo, adjudicando al vector el sentido opuesto.

- dudas respecto del significado de las coordenadas de un vector, que representan dichas coordenadas, quizá por la dificultad para asociarlas con las unidades en la dirección del eje de abscisas y el de ordenadas.

En cuanto a la representación de los vectores aparecieron:

- dificultades para representar puntos con alguna de sus coordenadas negativa, cambiando la misma por su opuesta.

- uso de letras minúsculas para nombrar puntos y mayúsculas para rectas, es decir, notación matemática poco afianzada (lo que se puede encuadrar en los problemas con el lenguaje).

En relación al cálculo de las coordenadas de un vector:

- dificultades al operar con enteros, con mucha frecuencia: aplicando la regla de los signos a una suma de enteros (por ejemplo, “ $-1-1=2$ ”), omitiendo signos al pasar de la fórmula general a una caso particular ($5-1$ en lugar de $5-(-1)$) o cambiando de signo uno de los sumandos (“ $-4-1=-3$ ”). Estos errores se deben al desconocimiento de los conceptos y procedimientos básicos necesarios. En el caso de la regla de los signos aplicada a una suma o diferencia, podría asociarse también con una asociación incorrecta.

- errores al aplicar la fórmula para el cálculo de las coordenadas, aplicando otras incorrectas como (b_2-a_2, b_1-a_1) cuando las coordenadas de los puntos son (a_1, a_2) y (b_1, b_2) . Este tipo de errores no parecían deberse a tanto al desconocimiento de la fórmula como a las dificultades para identificar las coordenadas con la notación que se utiliza para ellas, es decir, pueden considerarse como causa las dificultades con el lenguaje.

Con el cálculo del módulo de vectores se observaron:

- errores por mala asimilación del cálculo de las coordenadas, por no respetar la prioridad de operaciones (“ $-1^2=1$ ”) y por el uso de fórmulas incorrectas (como $(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ o $\sqrt{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)}$). Todos ellos pueden asociarse al desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios. La aplicación de la regla de los signos, como antes, también puede clasificarse como asociación incorrecta y las confusiones con la prioridad de las operaciones, como dificultad con el lenguaje, ya que los alumnos no suelen distinguir $(-a)^2$ de $-a^2$.

- a la hora de explicar la fórmula para el cálculo del módulo, confusión al pensar que se deben aplicar igualdades notables para desarrollar la expresión $(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$. Se ha achacado esta confusión a la aplicación de estrategias irrelevantes o asociaciones incorrectas, pero también puede asociarse con las dificultades con el lenguaje, puesto que no se identifican (a_1, a_2) y (b_1, b_2) como las coordenadas del origen y el extremo sino como incógnitas o variables.

En cuanto a la suma gráfica de vectores, los alumnos manifestaron una gran confusión desde que se comenzó a explicar, puesto que no entendían el propósito de la misma. Además, se observaron:

- colocación incorrecta de los vectores para sumarlos, situando el origen del segundo en el mismo punto que el del primero, en lugar de en su extremo. Este error puede deberse al desconocimiento del procedimiento adecuado.

Ni la suma analítica de vectores ni la aplicación a la construcción de traslaciones plantearon demasiadas dificultades a los alumnos durante las clases. El segundo procedimiento ya había sido explicado en otras asignaturas.

Resultados del ejercicio sobre comprensión del concepto de vector:

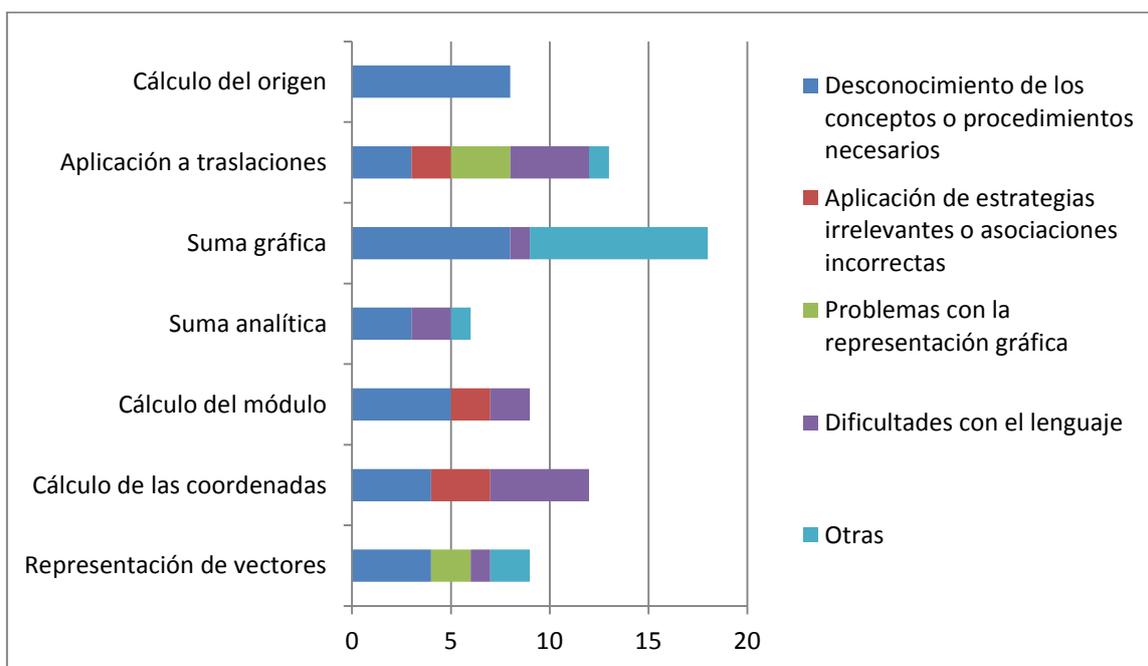
Se pidió a los 17 alumnos y alumnas presentes en clase en la sesión correspondiente que leyesen las dos situaciones que se planteaban y trataran de responder a las preguntas teniendo en cuenta lo explicado en las sesiones anteriores (sin concretar con qué contenidos estaba relacionado el ejercicio). No se requirió que escribiesen su nombre en la hoja entregada y se dejó claro que el ejercicio no iba a ser calificado, pero se pidió al alumnado que se esforzara por contestar.

Pregunta	Respuestas	Nº de alumnos
¿Qué tipo de magnitudes son (las fuerzas)?	Magnitudes vectoriales o vectores	16
	No hay respuesta	1
¿Es suficiente su valor numérico para describirlas?	No	14
	Sí	3
¿Qué más se necesita saber? (en caso de haber contestado “no” a la pregunta anterior)	Sentido y dirección	4
	Módulo, dirección y sentido	4
	“Dirección y longitud”, “su equivalencia”, “otros datos” o nada	6
Intenta representar las fuerzas	Representan los vectores correctamente	4
	Representan correctamente el peso pero no las fuerzas eléctricas (una sola flecha de doble sentido o dos flechas mal colocadas)	3
	Representan correctamente las fuerzas eléctricas pero no el peso (añaden otros vectores además del peso, con sentido opuesto o dirección perpendicular)	7
	Dibuja dos vectores que apuntan del paracaidista hacia el suelo y otros dos de sentido opuesto. También coloca entre las fuerzas cuatro vectores, dos en cada sentido	1
	Dibuja dos vectores que apuntan del paracaidista hacia el suelo y dos de sentido opuesto. No representa las fuerzas eléctricas	1
	No representa las fuerzas	1

Resultados de los ejercicios incluidos en el examen final:

Como se puede observar en el Anexo 3, los ejercicios del examen estaban formados por varios apartados en que se debía: calcular las coordenadas y el módulo de un vector a partir de las coordenadas de su origen y su extremo; calcular las coordenadas del origen a partir del extremo y las coordenadas del vector y, a continuación, el módulo del vector; representar los dos vectores fijos en unos ejes cartesianos incluidos en la prueba; hallar la suma gráfica de los dos vectores (se había enseñado al alumnado a hacerlo tomándolos como vectores libres, aunque fuesen fijos) y hallar la suma analítica de los dos vectores. Además había otro ejercicio en que un apartado consistía en aplicar la traslación dada a una figura y explicar que los vértices de la figura trasladada se podían conocer de antemano sumando las coordenadas del vector a las de cada vértice de la figura original.

En el siguiente gráfico se representa el número de errores en cada procedimiento desglosándolos según las causas encontradas:



4.2. Conclusiones

La mayor parte de los errores cometidos por el alumnado en los ejercicios de examen se deben al desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios para poder resolverlos, pero no tanto a los enseñados en la presente unidad didáctica como a los que ya se habían explicado a lo largo del curso o en cursos anteriores. Así, es muy frecuente encontrar errores al sumar y restar números enteros y al resolver ecuaciones de primer grado. Esto último queda patente en el apartado en que los alumnos debían hallar el origen del vector a partir de su extremo y sus coordenadas, puesto que muchos de ellos (6 de 20) no son capaces de despejar correctamente las incógnitas de las

ecuaciones $5-c_1=2$ y $1-c_2=0$. Los errores debidos a asociaciones incorrectas se producen también en muchos casos a la hora de operar con enteros.

En cuanto a las dificultades con el lenguaje, en general, y no sólo con la materia relativa a vectores, se observan en los alumnos dificultades para entender la notación matemática cuando se utilizan “letras” para representar determinados datos de forma genérica. Es decir, el lenguaje matemático, incluso el que ya deberán conocer, resulta muchas veces “indescifrable” para los estudiantes.

Salvo en casos concretos, los problemas con la representación de puntos en el plano parecen haberse resuelto antes del examen. No se puede decir lo mismo de la suma gráfica de vectores, que es el procedimiento en el que aparecen más dificultades. El alumnado no ha acabado de asimilar el concepto, ya que muchos de ellos (9 de los 20) ni siquiera intentaron hallarla. Además, quienes intentan hacerlo siguen manifestando los problemas que tenían durante las sesiones de clase, no comprenden que la suma de dos vectores debe dar como resultado otro vector (se limitan a colocar los vectores para sumarlos sin unir origen de uno y extremo de otro, u obtienen el segmento pero no señalan su sentido, con lo que no resulta un vector).

Por otra parte, en cuanto a los errores anticipados por los profesores en el cuestionario inicial, la coincidencia con los resultados del examen es bastante alta, como puede apreciarse en la siguiente tabla:

Procedimientos en que se cometen errores (ordenados de más a menos errores cometidos)	
Según el profesorado	Según los resultados del examen
Aplicación a las traslaciones	Suma gráfica
Suma gráfica	Aplicación a las traslaciones
Concepto de vector	Cálculo de las coordenadas
Representación en el plano	Representación en el plano
Cálculo de las coordenadas	Cálculo del módulo
Cálculo del módulo	Cálculo del origen
Suma analítica	Suma analítica

Por tanto, las apreciaciones de los docentes en base a su experiencia resultaron muy acertadas, es decir, que la docencia permite ir conociendo los procedimientos en los que los alumnos encuentran más dificultades y las causas de los mismos. Esto parece contradecirse, hasta cierto punto, con la característica de los errores descrita por Rico (1995) de que “sorprenden” al profesor. Sin embargo las demás parecen constatarse: no suelen producirse por azar sino que son sistemáticos, son persistentes y son difíciles de

corregir ya que requieren una reorganización profunda de los conocimientos del alumno o alumna.

4.3. Aportaciones e implicaciones de futuro

En cuanto a las mejoras educativas que sería conveniente introducir a tenor de los resultados del estudio, se propone:

- 1) realizar un diagnóstico inicial para evaluar la soltura del alumnado en las operaciones con enteros negativos y resolución de ecuaciones de primer grado (especialmente si contienen paréntesis, denominadores, etc.)
- 2) dedicar una sesión de clase al repaso de dichos procedimientos a partir del nivel observado
- 3) incidir en el manejo de procedimientos básicos como el cambio de signo de un término al pasar de un miembro al otro de la ecuación, con el fin de que el alumnado los pueda aplicar de manera autónoma y sin errores
- 4) propiciar la resolución lógica de los problemas prácticos que vayan surgiendo, fomentando el razonamiento autónomo por parte del estudiante, por ejemplo “ $(-1)^2$ no puede ser igual a -1 , dado que -1^2 es igual a -1 ”
- 5) insistir en la relación entre todas las áreas de la matemáticas y tratar de romper la compartimentación a que se las suele someter en los currículos de secundaria
- 6) presentar los vectores en relación con las magnitudes físicas presentes en la vida diaria que necesitan de algo más que un valor numérico para ser expresadas
- 7) incidir en la importancia del lenguaje y la finalidad de la notación matemática: ¿para que escribir “módulo del vector” cuando disponemos de la notación $||$?
- 8) insistir en la necesidad de que los procedimientos empleados tengan un resultado coherente con el problema del que se parte: “si sumamos dos vectores, debemos obtener otro vector”, “el orden en que sumemos dos vectores no debe alterar el resultado”
- 9) inculcar a los alumnos y alumnas el repaso de las soluciones obtenidas a fin de comprobar dicha coherencia

Por último, hay que señalar que las conclusiones extraídas están limitadas en cuanto a su alcance por el pequeño tamaño de la muestra. Sin embargo sus resultados respaldan las hipótesis previamente formuladas. Creo que sería interesante repetir el estudio con otros grupos-clase y en otros centros educativos para afianzar más los resultados o poder detectar otro tipo de errores adicionales.

5. ANEXOS

ANEXO 1: CUESTIONARIO REALIZADO A LOS PROFESORES

Mediante el presente cuestionario se pretende sondear a profesores de Matemáticas con amplia experiencia docente sobre los **errores y dificultades más habituales** en el primer contacto del alumnado con los **contenidos relativos a vectores** (que normalmente se produce en **3º de ESO**).

Años de experiencia como profesor/a de matemáticas:.....

Por favor, marque con una X la casilla correspondiente.

Los alumnos cometen errores y tienen dificultades en relación con los siguientes conceptos y procedimientos	Nunca	Casi nunca	A veces	Con frecuencia
1. Concepto de vector (identificación errónea del sentido o la dirección, confusión entre los mismos, etc.)				
2. Representación de vectores en el plano				
3. Cálculo de las coordenadas a partir del origen y el extremo				
4. Cálculo del módulo a partir de las coordenadas				
5. Suma analítica de vectores				
6. Suma gráfica de vectores				
7. Aplicación a la construcción de traslaciones				
8. Otros:				

Los errores cometidos se deben a	Nunca	Casi nunca	A veces	Con frecuencia
1. Problemas al operar con números enteros o racionales (por ejemplo, aplicar la regla de los signos a una suma de números negativos)				
2. Problemas con las propiedades de las raíces (por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a la raíz de una suma, $\sqrt{4+9} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$)				
3. Problemas con la representación de puntos en los ejes cartesianos				

4. Dificultades en la comprensión del lenguaje utilizado (manejo deficiente del lenguaje relativo a vectores)				
5. Falta de comprensión lectora (interpretar incorrectamente el enunciado de un problema, no dedicar el tiempo necesario para leerlo, etc.)				
6. Desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios (por ejemplo, desconocer la fórmula correcta para el cálculo del módulo de un vector)				
7. Otros:				

Muchas gracias por su colaboración.

ANEXO 2: REGISTRO DE LOS ERRORES OBSERVADOS Y SUS CAUSAS

	Error o dificultad observado		Causa del error	Frecuencia	Observaciones
1	Concepto de vector (identificación errónea del sentido o la dirección, confusión entre los mismos, etc.)	1	Desconocimiento de los conceptos o procedimientos necesarios		
		2	Problemas con la representación de puntos en los ejes cartesianos		
		3	Dificultades en la comprensión del lenguaje utilizado		
		4	Otras:		
2	Representación de vectores en el plano	1	Desconocimiento		
		2	Representación de puntos		
		3	Lenguaje		
		4	Otras:		
3	Cálculo de las coordenadas a partir del origen y el extremo	1	Desconocimiento		
		2	Estrategias incorrectas		
		3	Lenguaje		
		4	Otras:		
4	Cálculo del módulo a partir de las coordenadas	1	Desconocimiento		
		2	Estrategias incorrectas		
		3	Lenguaje		
		4	Otras:		
5	Suma analítica de	1	Desconocimiento		

	vectores	2	Estrategias incorrectas		
		3	Lenguaje		
		4	Otras:		
6	Suma gráfica de vectores	1	Desconocimiento		
		2	Representación de puntos		
		3	Lenguaje		
		4	Otras:		
7	Aplicación a la construcción de traslaciones	1	Desconocimiento		
		2	Estrategias incorrectas		
		3	Representación de puntos		
		4	Lenguaje		
		5	Otras:		
8	Otros:	1	Desconocimiento		
		2	Estrategias incorrectas		
		3	Representación de puntos		
		4	Lenguaje		
		5	Otras:		

ANEXO 3: PROBLEMAS DEL EXAMEN CON VARIOS ÍTEMS DE RESPUESTA ABIERTA

1.
 - a) Sea \vec{AB} el vector con origen $A(-1,3)$ y extremo $B(-2,-3)$. Calcula sus coordenadas y su módulo.
 - b) Sea el vector $\vec{CD}=(2,0)$ con extremo en $D(5,1)$. Calcula su origen (coordenadas del punto C) y su módulo.
 - c) Representa en los ejes cartesianos que aparecen abajo ambos vectores y halla su suma gráficamente.
 - d) Calcula analíticamente la suma de \vec{AB} y \vec{CD} (tratándolos como vectores libres).

2.
 - b) Representa en los ejes cartesianos que aparecen debajo el cuadrilátero de vértices $A(-2,-1)$, $B(-1,-2)$, $C(-2,-3)$ y $D(-4,-3)$ y aplícale la traslación de vector $\vec{v}=(5,1)$. ¿Puedes saber cuáles van a ser las coordenadas de los vértices de la figura obtenida antes de aplicar la traslación?, ¿cómo?

ANEXO 4: EJERCICIO PARA COMPROBAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VECTOR EN RELACIÓN CON SUS APLICACIONES

Lee atentamente las siguientes situaciones:

- Imagina que te tiras en paracaídas. En esa situación caes porque la Tierra te atrae con una fuerza llamada peso. Si suponemos que tu masa es de 55 kg, tu peso es $\mathbf{p} = 55 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = \mathbf{539 \text{ N}}$, ya que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad ($\text{N} \equiv \text{newtons}$).
- Dos cargas eléctricas puntuales, una de +1C y otra de -2C ($\text{C} \equiv \text{culombios}$), que están a 5 m de distancia, se atraen una a la otra. Según la ley de Coulomb, la fuerza con que cada una atrae a la otra es $\mathbf{F} = 7,2 \times 10^8 \text{ N}$.

Las fuerzas de las situaciones a) y b) son magnitudes pero, ¿qué tipo de magnitudes? ¿Es suficiente su valor numérico para describirlas? ¿Qué más se necesita saber? ¿Puedes representar las fuerzas en los dibujos que aparecen a continuación?

Pista: si las cargas eléctricas fuesen del mismo signo se repelerían en lugar de atraerse, aunque con la misma fuerza. ¿Cuál es entonces la diferencia?

a)



b)



REFERENCIAS

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*, Universidad Nacional de Villa María, 2006 (Proyecto *La articulación entre la Escuela Media y la Universidad: un camino posible para construir la "inclusión" de los estudiantes y mejorar las prácticas educativas*).

Astolfi, J. P. (1999). *El error un medio para enseñar*. España. DIADA Editora SL. 1ra Edición.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, noviembre, 003(8), 247-263.

Bohórquez, H. J., Boscán, L. F., Hernández, A. I., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Educere*, 13(045).

Brousseau, G., Davis, R. B. & Werner, T. (1986). Observing students at work. In *Perspectives on mathematics education* (pp. 205-241). Springer Netherlands.

Brousseau, G. & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathematiques 1970 to 1990*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Decreto74/2007, de 14 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 7.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisas*.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. A model for the study of mathematics teaching and learning processes. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Franchi, L. y Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la Geometría Plana. *Educere, investigación arbitrada, año 8, 24*, enero-febrero-marzo, 2004.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y la comprensión matemática. *XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matematica. Castel San Pietro Terme (Bologna)*.

Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá: una empresa docente.

Miró, G. G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 18(1), 35-54.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3-14.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 9, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Ramírez, G., Chavarría, J., Barahona, C. y Mora, M. (2009). *Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso*. Descargado el 20 de mayo de 2013, de <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice-Horsori.

Rico, L., y Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Descargado el 21 de mayo de 2013, de <http://funes.uniandes.edu.co/518/>

Ruano, R. M., Socas M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 311-322). Granada: Universidad de Granada.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.