UNIVERSIDAD LITERARIA DE OVIEDO.

DISCURSO

LEIDO EN LA SOLEMNE APERTURA

DEL

CURSO ACADÉMICO DE 1900 Á 1901

POR EL DOCTOR

D. JOSÉ MUR Y AINSA

CATEDRÁTICO NUMERARIO

DE

GEOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.

OVIEDO

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE ADOLFO BRID

Canónigа, 18.—Teléfono, 111.

1900

Ilmo. Sr.:

Señores:

Los muertos rigen y gobiernan á los vivos.

AUGUSTO COMTE.

De poco servirían estas rígidas y severas solemnidades académicas, sinó cumplieran el fin de honrar la memoria de aquellos hombres ilustres que dieron su vida por la ciencia, y murieron ignorados del vulgo, cuyos aplausos no turban jamás el majestuoso silencio que reina en el gabinete del sabio: verdad que poco importa esa indiferencia, pues la satisfacción del deber cumplido y los tranquilos placeres del estudio, valen mucho más que las coronas depositadas por las muchedumbres sobre las tumbas de sus explotadores, y las estatuas elevadas por los hombres para perpetuar el recuerdo de los que se enriquecieron á su costa.

Llevado de estas ideas no dudé mucho en la elección de asunto: sólo la historia y la filosofía podían ofrecerme temas adecuados á mi propósito, porque la índole de las ciencias matemáticas no permite cosechar sin esfuerzo frutos que puedan presentarse en una linda canastilla, á la cual deben de parecerse estos discursos inaugurales, dentro de cuyos límites no cabe la rama más pequeña del frondoso árbol de la ciencia.

Echando una rápida ojeada sobre las múltiples teorías que han ejercitado el ingenio de los más ilustres matemáticos contemporáneos, me detuve al punto en la intrincada discusión sostenida durante este siglo por filósofos y geómetras sobre los *Principios fundamentales de la Geometría.* Ningún asunto más á propósito para fijar la atención de esa juventud estudiosa que siempre acude á estos actos, sobre una pléyade de sabios cuyos nombres llenan por completo nuestra época; ninguna materia más adecuada para obligar á la reflexión á esas inteligencias nacientes que dan sus primeros pasos en el camino de la ciencia: la sucinta exposición que voy á hacer, les probará cómo las cuestiones más sencillas presentan dificultades tan grandes cual las que salen al paso del investigador en las más elevadas teorías; y es que si éstas miran á la altura aquéllas sondean la profundidad, y una y otra son igualmente oscuras; es que en unas la mirada se extiende hacia el zenit y en otras hacia el nadir de la esfera celeste, y en uno y otro caso se encuentra con la infinitud del Universo y la insuficiencia de los medios de observación.

A vosotros pues, alumnos de esta Escuela, que en día no lejano estareis encargados de difundir desde sus áulas la instrucción, si os dedicais á los estudios especulativos, ó de explotar sus veneros de riqueza, si os encaminais á las aplicaciones, van dirigidas estas pobres lucubraciones mías. Meditadlas, y si su lectura os sirve para venerar los nombres y comprendrer las obras—no exentas de errores—de Gauss, Riemann, Lobatchewski, Bolyai y Beltrami; de Cayley, Klein, Pasch, Helmoltz, Lie, Tilly, Duhamel, Cassani, Frischauf, Grassmann y tantos otros, se verán colmados los deseos de quien solo aspira á vuestro perfeccionamiento. Seguid mi consejo: romped los viejos moldes que habrán servido hasta hoy para conformar vuestra inteligencia; abandonad la rutina; acostumbraos á pensar; dedicaos al estudio de las Ciencias de la naturaleza; lo menos que podeis hacer los que habeis nacido en esta tierra de bendición, donde el Cielo derramó á manos llenas sus dones, prodigándoos los productos del mar y los de la tierra, y las inconmensurables riquezas del subsuelo; las bellezas de la Naturaleza y del Arte, la salud del cuerpo, la tranquilidad del alma y la bondad del clima; es aplicar al conocimiento de tantas maravillas todos vuestros talentos y energías. Hacedlo así, ya que no por atender mi ruego, por no desoír la voz de un ilustre muerto, el insigne Jovellanos, el primero de los españoles de su tiempo y el más honrado de los hombres, que no solo aquí, en este suelo que le vió nacer, sinó en aquellos paises de Levante, donde la envidia, la iniquidad y la injusticia, le tuvieron por largo tiempo desterrado, dedicó todos sus desvelos á cambiar el rumbo de los estudios en nuestra patria: en aquel castillo de Bellver y en sus largas noches de insomnio, éste fué siempre su pensamiento fijo.

A vosotros, mis queridos y respetables compañeros, sólo me cabe pediros mil perdones por no haber acertado á escribir sinó cosas que teneis olvidadas de puro sabidas, ó que nada os interesan. En cambio os prometo que, aún cuando haya dejado correr la pluma á medida del deseo, para que pueda leerme quien tenga tiempo y paciencia, no he de molestar por largo rato vuestra ilustrada atención.

I.

El espacio no es ni un objeto físico de sensación, ni una forma innata del espíritu, sinó un concepto.

STALLO.

La contemplación del mundo exterior por medio de los sentidos, dá lugar á que se formen en nuestra inteligencia representaciones mentales de los objetos externos, y á que surjan también otras ideas que no tienen realidad objetiva, aún cuando hayan sido provocadas por imágenes sensibles. Aquellas representaciones mentales y estas ideas constituyen dos categorías de cosas pensadas esencialmente distintas: ejemplo de las primeras es el punto, elemento fundamental de la Geometría, y de las segundas el número, colección de unidades cada una de las cuales designa un acto de aprehensión.

Las cosas de esta segunda categoría se llaman *formas*, y las ciencias que de ellas se ocupan *ciencias formales:* tales son la lógica y el análisis matemático. En ellas la verdad resulta de la harmonía entre los diferentes actos del pensamiento.

Las ciencias de los objetos que existen fuera de nosotros se llaman *ciencias experimentales*. En ellas la verdad resulta de la conformidad del pensamiento con la cosa pensada, y debemos considerar como falso todo aquello que contradice á las leyes de la inteligencia y á las de la realidad objetiva.

Las ciencias formales se fundan en principios evidentes y en operaciones mentales, definiciones é hipótesis de carácter abstracto y racional. La demostración en ellas es una serie de actos del pensamiento relacionados entre sí, que no traspasan los límites del campo de la razón humana. Las ciencias experimentales se basan en las verdades intuitivas, independientes unas de otras, que revela en nosotros la percepción del mundo físico. En la ciencia geométrica, existen principios fundamentales, axiomáticos, del orden intelectual más puro; y otras verdades intuitivas, menos evidentes, llamadas postulados, que aún cuando proceden de la observación externa, extendemos más allá del campo de la misma.

Las ciencias formales son para nosotros completamente exactas: las experimentales lo son tanto más cuanto más intuitivos son los principios en que se fundan, y más fácil es sustituír los objetos de que ellas se ocupan, por formas abstractas á las cuales se puede aplicar un procedimiento rigorosamente deductivo. Por esta razón la Geometría, cuyo origen empírico están conformes en reconocer todos los geómetras, se incluye entre la matemática pura; porque si bien los objetos que determinan sus postulados, existen fuera de nosotros, vienen inmediatamente sustituídos en nuestro pensamiento por entidades abstractas, de cuya combinación resultan las verdades científicas, sin que en los razonamientos sea preciso tener en cuenta la realidad objetiva.

El carácter hipotético, al parecer, de algunos principios fundamentales de las ciencias matemáticas, nos lleva á tratar de la posibilidad de las hipótesis.

Una hipótesis matématica es posible, cuando es independiente de los principios anteriormente admitidos ó demostrados, y sus términos, definiendo sin ambigüedad la nueva forma ó propiedad establecida, no envuelven contradicción alguna. Sólo puede considerarse como absurda, cuando se demuestre que contradice á las verdades precedentes ó á las consecuencias de ellas. Se puede decir, que establecidos los caracteres de las formas matemáticas, la posibilidad depende del principio de contradicción. A las entidades posibles determinadas, aplica la inteligencia el procedimiento discursivo, constituyendo las llamadas por antonomasia ciencias exactas, cuyos objetos, aunque abstractos é hipotéticos, son para nosotros tan reales como las formas de la sensibilidad, ya que nadie puede dudar de la existencia de la razón y sus funciones lógicas sin sumirse en un mar de confusiones.

Como toda hipótesis independiente es posible, probar lo uno será el mejor camino para llegar á la demostración de lo otro: por ésto para justificar un principio hipotético por procedimientos lógicos, no hay más medio que deducir de él consecuencias y ver si son contradictorias, pues si bien es cierto que de lo falso puede á veces deducirse lo verdadero por una afortunada compesación de errores ó por otras causas, siempre que esto sucede es fácil descubrir la equivocación.

Además de la posibilidad de una hipótesis, precisa tener en cuenta su fecundidad, que da la medida de su valor: una verdad hipotética, puede ser muy poco productiva, y aún limitar y restringir el campo de la investigación; por eso las condiciones que introduzca, no deben poner barreras injustificadas al espíritu humano, siempre ansioso de descubrir nuevas verdades ó de relacionar las ya descubiertas.

Esta doctrina prueba que no pueda admitirse el infinito matemático, por ser un término contradictorio, fin de una cosa que no tiene fin, relación entre dos cantidades una de las cuales no existe.

La hipótesis geométrica, además de cumplir con las condiciones anteriores, ha de estar en harmonía con la intuición espacial. No puede suponerse que el círculo es una línea abierta y tiene asíntotas reales, porque la observacion externa nos dice todo lo contrario.

En los umbrales de la ciencia matemática es preciso discutir, á la luz de los principios de una sana filosofía, la posibilidad de las definiciones, hipótesis y postulados, si no se quiere caer en un esteril convencionalismo. Bastará á veces una simple discusión lógico-matemática; será posible otras justificar un principio hipotético por medio de ejemplos; pero la inducción no es suficiente en las ciencias exactas, y los procedimientos lógicos no bastan en la generalidad de los casos.

El sistema filosófico que ha estado más en boga entre los naturalistas y matemáticos europeos durante muchos años, ha sido el de Stuart Mill, el expositor más hábil de las doctrinas sensualistas acerca de las propiedades del espacio y de las verdades fundamentales de la geometría. Sus ideas dieron sin duda origen á los errores del trascendentalismo geométrico.

El filósofo inglés, después de afirmar que en la naturaleza no hay puntos sin extensión, líneas sin anchura, ángulos perfectamente rectos, círculos de radios iguales, ni, en general, ninguno de esos objetos imaginarios que define y pretende estudiar la Geometría; y de negar, sin entretenerse á demostrarlo, que tales concepciones existan *á priori* en la inteligencia humana, concluye que las entidades estudiadas en la ciencia de Euclides, son simples copias de la realidad y no tienen la perfección que se les atribuye. La Geometría es para él una ciencia aproximada, y la inducción el único procedimiento demostrativo.

A estas conclusiones contesta discretamente Cayley, que si no tuviéramos la idea de la línea recta, no podría Mill negar la existencia de ella en la realidad.

Lo que hay de cierto en las doctrinas de los sensualistas, es que nosotros no tenemos ningún conocimiento experimental de los elementos geométricos: conocemos varillos é hilos que llamamos rectos, cuerpos esféricos ó cúbicos; pero á los puntos, líneas y superficies de la Geometría, solo llegamos por medio de la abstracción, facultad con la cual el espíritu puede atender á una de las cualidades de un objeto prescindiendo de las demás.

Que la inducción sea el procedimiento demostrativo en matemáticas, no lo hubiera afirmado el pensador inglés, que recibió como una herencia de su padre, doctrinas elaboradas cuando la filosofía no había llegado aún á gran altura, si hubiese estudiado la Geometría sin figuras de Staudt, libro cuyas demostraciones pueden seguirse sin el auxilio de la imaginación, incapaz de darnos las leyes generales de la figura, propia tan sólo para mostrarnos una disposición particular y concreta de los elementos. Ni una demostración matemática es una acumulación de ejemplos, ni los principios fundamentales de la Geometría son hipotéticos, sinó conceptuales.

Definir la superficie como límite que separa un cuerpo del resto del espacio, y admitir que tiene un cierto espesor, envuelve también evidente contradicción, porque en tal caso será cuerpo, y existirá algo que lo separe del objeto limitado; pero á este segundo límite habrá de aplicarse el mismo razonamiento, que se repetirá así indefinidamente.

Otro error del sensualismo, no menos fundamental que éste, consiste en considerar el espacio como un objeto de sensación directa. Si toda percepción de los sentidos lo es de una diferencia fenomenal, mal pueden éstos darnos la sensación del espacio homogéneo y continuo. Nosotros percibimos las cualidades físicas distintas y accidentales de los objetos; no lo que es permanente, sustancial é invariable. *Tener siempre una cierta sensación y no tener ninguna*, como dice Hobbes, *es absolutamente lo mismo.* Para que exista la percepción se requiere por lo menos la presencia de dos objetos, pues el espíritu no advierte lo que una cosa es más que por contraste con lo que ella no es.

Las cosas no están en el espacio como un líquido dentro del recipiente que lo contiene. Al afirmar en el lenguaje usual que nada existe fuera del espacio, pretendemos tan sólo enunciar la propiedad común á todos los objetos físicos de tener una cierta extensión. Esta circunstancia dió lugar á que Descartes considerase que el hecho de ser extensa era lo único esencial á la realidad objetiva; pero el espacio ocupado por un cuerpo no aparece nunca al disociar las sensaciones que revelan las propiedades del mundo material. Ni se comprende qué diferencia pudiera existir entre el espacio y la materia, desde el momento en que para considerar aquél como un objeto de sensación, fuera preciso prescindir de su homogeneidad.

Los adversarios del empirismo, los idealistas Kantianos, sostienen que la idea de espacio existe en el espíritu independientemente de toda sensación. Sentir, se dice, es atribuír una impresión subjetiva á una causa objetiva, necesariamente extensa: por esto la idea de extensión debe de existir *á priori* en la inteligencia humana. Tanto como el empirismo á la razón, se opone el idealismo á la realidad. Si las propiedades de un objeto no son más que las relaciones derivadasde la naturaleza del objeto, su extensión no puede existir con carácter absoluto, ni en el espíritu, ni fuera de él. En todo acto de conocimiento, el fenómeno objetivo y su representación mental están simultáneamente presentes á la inteligencia: la realidad del uno depende de la del otro.

No es cierto tampoco que nosotros podamos vaciar el espacio y formarnos de él una imagen en la inteligencia: No la forma de intuición, sinó el concepto, es lo que podemos tener por medio de la abstracción.

Ocurre también que al negar la objetividad del espacio, se niega la de todo cuanto existe; pues una concepción *á priori* de nuestra inteligencia, no puede ser el puente por donde el espíritu pase de las perfectas formas ideales á los toscos é impuros objetos de la realidad. Esta reflexión es sin duda la base del idealismo post-kantiano de Fichte y Schopenhauer.

Si los anteriores razonamientos son válidos, parece indudable que al prescindir en los objetos exteriores de los caracteres físicos, se llega á la idea de una *forma de la extensión;* y suprimiendo todavía los límites que distinguen las formas espaciales, se obtiene el concepto de espacio, último término de la abstracción.

El objeto de la Geometría es el estudio de las diferentes determinaciones ó delimitaciones del espacio, de las relaciones entre las figuras. Se ha dicho que estudia las propiedades del espacio; pero esto no es cierto: el dato primario de la sensación es la extensión limitada, no el espacio indefinido, porque el espíritu sólo considera objetos particulares.

II.

La definición y las propiedades de la recta, así como de las paralelas, son, por decirlo así, el escándalo de los elementos de Geometría.

D' ALEMBERT.

HASTA fines del siglo XVIII, nadie había puesto en duda los postulados Euclideos, bien que las múltiples tentativas hechas para demostrarlos por Gemino, Proclo, Tolomeo, el árabe Nassaradin y Clavio, hubiesen resultado completamente infructuosas. La necesidad de reformar los principios fundamentales de la Geometría, se había dejado sentir mucho antes, y ya Arquímides propuso como postulado de la recta, su propiedad de ser la línea más corta entre dos puntos. Esta proposición la escogió Legendre para definirla, y ha sido justamente rechazada, porque el concepto de longitud no es una idea simple.

Uno de los matemáticos que con más cariño estudiaron esta cuestión de los principios fundamentales de la Geometría, fué el insigne Leibnizt. Definió el plano—después de haber estudiado la esfera—como lugar de los puntos equidistantes de dos, y la recta como sistema de los que equidistan de tres, si bien la consideró también como línea cuyos pun tos no se mueven cuando se fija dos de ellos: pero más frecuente es en él caracterizar estos dos conceptos primarios de nuestra inteligencia, imposibles de definir con todo rigor' como superficie y línea que dividen al espacio y al plano en dos partes congruentes.

Esta propiedad no es exclusiva de la recta. Leibnizt llama figuras congruentes á las que son iguales y semejantes, á las idénticas, á las superponibles, á las que se pueden sustituír bajo todos conceptos; iguales son para él las equivalentes, las de igual longitud, área ó volumen, las de la misma magnitud intensiva; semejantes las de idéntica forma: de ahí la posibilidad de concebir líneas curvas que determinen en el plano dos regiones congruentes.

También se propuso el ilustre matemático y filósofo demostrar el postulado de las paralelas; pero sólo hizo repetir algunas demostraciones de Proclo, nada convincentes.

Por la misma época en que se divulgaron los escritos de Leibnizt sobre esta materia, escribió Staudt su Geometría de posición. Ningún libro más conciso, ni más rigoroso en la exposición de los principios.

Definida la recta como línea determinada por dos de sus puntos; estudiada la radiación de rayos y medios rayos, y las superficies cónicas simple y completa; y establecidos los caracteres diferenciales entre las de órdenes par é impar; define el plano como superficie cónica de este último orden, cuyo centro está en uno cualquiera de sus puntos.

Los postulados del plano resultan así corolarios de sus análogos en la superficie cónica. De que un rayo de una radiación que tiene un punto sobre la falda de un espacio angular, se halle por completo en dicha falda, resulta que una recta determidada por dos puntos de un plano está por entero situado en él: y como dos superficies cónicas, de orden impar y del mismo vértice, se cortan en un número impar de generatrices, dos planos tendrán común una sola recta, por lo cual se llamarán superficies de primer orden.

El rigor en la exposición de los principios, permite á Staud abordar con facilidad cuestiones antes reservadas al análisis infinitesimal. Bastará citar como ejemplo el estudio que hace de los elementos singulares en las curvas planas y alabeadas.

Aunque las tentativas para demostrar el postulado de Euclides siguieron hasta la época de Gauss, ya el italiano Sacheri en 1733 pretendió exponer la Geometría, prescindiendo no solo del postulado de las paralelas sinó también de los de la recta. Fué así un verdadero precursor de Lobatchewski, Bolyai y Riemann; pero no influído todavía por las tendencias filosóficas de la escuela sensualista, se empeñó en destruír con sus propias manos la obra que había levantado.

Comenzaba por suponer en el plano un cuadrilátero ABCD con dos ángulos rectos en A y B y otros dos C y D iguales entre sí, respecto de los cuales hacía las hipótesis de que fuesen rectos, agudos ú obtusos, equivalentes á la Euclidea, á la del geómetra ruso y á la Rimanniana; pues lo mismo que éstas llevan á las conclusiones de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual, menor ó mayor que dos rectos: pero fundándose en proposiciones que suponen la infinitud de la recta, destruía la hipótesis del ángulo obtuso, é incurriendo en otras contradicciones probaba la falsedad de la del ángulo agudo.

Los inútiles esfuerzos de Legendre para demostrar el postulado de las paralelas, convencieron á Gauss de la imposibilidad de demostrarlo: así lo expresa en sus cartas á Bessel, Bolyai y Schumaquer; pero la prioridad en la idea de una geometría sin el postulado, corresponde al ruso Lobatchewski.

Suponed en un plano una recta y un ángulo recto que gira alrededor de su vértice: cuando uno de los lados del ángulo haya venido á ser perpendicular á la recta, el otro no podrá encontrar á ésta, porque á ello se opone el teorema en virtud del cual no es posible trazar á una recta más que una sola perpendicular por un punto. Es para unos intuitivo, que todos los rayos de haz del cual forma parte el ángulo dado, menos aquel á que acabo de referirme, encuentran á la recta propuesta; mientras que siendo para otros una ilusión de los sentidos semejante propiedad hipotética é indemostrable, afirman la posibilidad intelectual de suponer la existencia de una infinidad de rayos que, además del referido, no encuentran á dicha recta, todos los cuales se hallan comprendidos en un ángulo plano completo, adyacente de aquel que contiene las rectas secantes. Los lados comunes de ambos ángulos, límites que separan los rayos que cortan de aquéllos que no cortan á la recta base, se dicen paralelos á ésta; y el ángulo que forman con la perpendicular trazada por el centro del haz, á dicha base, ángulo de paralelismo. Estas consideraciones son las que sirven de base al sistema de Lobatchewski, más general en el orden de las ideas que el de Euclides, al cual viene á reducirse, si se supone el ángulo de paralelismo igual á 90°.

Buscando la interpretación de esta Geometría no Euclídea, escribió Beltrami una hermosa Memoria, ya agotada, que dedicó al estudio de una superficie llamada pseudoesférica, cuyas propiedades en el espacio Euclídeo', son idénticas á las del plano de Lobatchewski: la conservación del carácter de paralelismo para un punto cualquiera de una línea geodésica, y la reciprocidad del mismo para dos rectas cualesquiera, se verifican en una y otra superficie; la suma de los ángulos de un triángulo no puede exceder á dos rectos ni en uno ni en otro caso, y si en una sola figura alcanzara este valor, lo propio sucedería para todas las demás.

Bolyai en 1832, sin conocer las especulaciones de Lobatchewski, y exponiendo sin duda puntos de vista de su padre, que vivió en íntima relación con Gauss, comenzó, como Leibnizt, el estudio de la Geometría por la esfera y el círculo. Sus puntos de vista coinciden con los del geómetra ruso en cuanto que ninguno de los dos parte del concepto de distancia.

Se puede ir todavía más allá en la discusión de los principios fundamentales de la Geometría: se puede dudar de los postulados de la recta; afirmar que ni la infinitud de la misma, ni su propiedad de estar determinada por dos puntos tienen para nuestro espíritu carácter de necesidad, que si este último postulado se verifica dentro del campo de nuestra observación podría no cumplirse fuera de él; que la recta sin perder su carácter de tal podría cerrarse como se cierra la trayectoria aparentemente rectílinea seguida por uno de esos viajeros que dan la vuelta á nuestro planeta; que la distancia entre dos puntos no puede crecer indefinidamente, que tiene un límite máximo más allá del cual no puede pasar; que dos segmentos rectilíneos pueden en ciertas condiciones comprender una porción de plano; que dos rectas se encuentran en dos puntos llamados opuestos por donde pasan infinidad de ellas perpendiculares todas á una misma.

Los que siguiendo á Riemann fundan la Geometría en estas hipótesis, tan opuestas á cuanto la intuición nos dice; demuestran que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser inferior á dos ángulos rectos: la trigonometría plana es idéntica á la esférica; las rectas, líneas geodésicas que miden la mínima distancia entre dos puntos; los planos, superficies de área mínima entre todas las que tienen un mismo contorno, y de curvatura constante, puesto que una figura cualquiera puede moverse en ellos sin deformación.

Llevados del entusiasmo los partidarios de estos nuevos artículos de fe geométrica, sostienen que nuestro espacio podría ser esférico, homaloidad ó plano, ó pseudo-esférico, y tener propiedades variables en sus diferentes puntos y los distintos momentos. Tan convencidos están de que el espacio es un objeto de sensación directa, visible y palpable, que le atribuyen una curvatura, como á las superficies, la cual, aunque constante en la región explorada por nosotros, como lo demuestra la movilidad de los sistemas invariables y la posibilidad de superponer dos figuras congruentes, podría variar con el tiempo en un mismo lugar y tener valores, desiguales en un instante cualquiera y en diferentes lugares, ni más ni menos que una hoja de papel puede quebrarse, retorcerse y afectar formas muy distintas en cada uno de sus puntos.

Los más sensatos de los pangeómetras se limitan á afirmar que la curvatura del espacio—aunque constante—puede ser positiva como en el plano de Riemann, negativa como en el de Lobatchewski ó nula como el de Euclides: solo la Astronomía, según ellos, puede decidir cuál de las tres hipótesis es la verdadera; pues la Geometría diferencial es la misma para los tres sistemas, y las demás ciencias experimentales operan en un campo muy limitado frente á la immensidad del espacio.

La causa de esta dificultad se halla en no haber visto que todo procedimiento deductivo supone una referencia, en último término, á ciertas constantes primarias dadas por el espíritu y no por la experiencia: una de estas constantes es en Geometría la línea recta ó simple dirección.

Todo postulado geométrico contiene un elemento intuitivo y una determinación intelectual. La propiedad fundamental de la recta supone la definición de ésta, bien difícil de dar por cierto: el postulado de las paralelas exige la del paralelismo que envuelve el concepto de lo infinito, sumamente embarazoso en los principios. Este elemento ideal, cuyo carácter necesario no quieren reconocer los pangeómetras, impide suponer la recta cerrada y el espacio finito é ilimitado, porque ni esa línea geodésica de Riemann es la recta que todos concebimos, aún antes de estudiar Geometría, ni esa superficie de curvatura constante es el plano cuya noción está en todas las inteligencias. La recta Rimanniana será en realidad una línea curva imposible de conbir; pues ni tendrá tangentes ni normales, que son líneas rectas en el verdadero sentido de la palabra y no pueden trazarse en nuestro espacio, como no se puede trazar en una superficie curva líneas de cualquier grado de curvatura. Quizá se conteste, aceptando la realidad objetiva de la cuarta dimensión, que aquellas tangentes y normales están fuera de nuestro espacio; pero el espacio múltiplemente extenso del insigne discípulo de Gauss es del todo inaceptable, como os probaré más adelante.

Todavía es más difícil de imaginar el espacio pseudoesférico de Beltrami. Aún admitiendo con Helmholtz, que imagen de un objeto es la representación completa é integral de todas las impresiones sensibles que la cosa imaginada produciría en nosotros, considerada bajo todos sus aspectos y según las leyes de los órganos de nuestros sentidos, no se comprende qué consecuencias puedan sacarse de la proyección sobre una esfera, cuya superficie corresponda á los puntos infinitamente lejanos del espacio de curvatura negativa, tan ingeniosamente estudiado por el sutil geómetra italiano. Si el arte consigue por medio de una proyección, hecha con arreglo á los principios de la perspectiva, evocar el recuerdo de las bellezas naturales y levantar como á la voz de misterioso conjuro los personajes de la historia, es porque á la vista de un cuadro asociamos las impresiones visuales con las sensaciones tactiles que forman en nosotros la idea de la tercera dimensión; pero el método de las proyecciones no puede servir para trazar en el espacio general formas de la extensión, que no son dados á conocer por los sentidos.

III.

En el espacio de n *dimensiones, el lugar de cada punto puede ser determinado por la medida de* n *magnitudes.*

HELMOLTZ.

SE dice que un grupo de objetos, á los cuales se llama elementos del mismo, es respecto de éstos de una sola dimensión, cuando cada objeto solo tiene uno que le precede y otro que le sigue. El grupo puede ser indefinido en un sentido ó en dos; carecer de primero y de último elemento, ó de ambos; puede ser continuo ó discontinuo. Las series rectilíneas, los haces de rectas y los haces de planos son sistemas unidimensionales: las séries, grupos abiertos, cuyo elemento fundamental es el punto; los haces grupos cerrados, cuyo objeto tipo es el plano ó la recta.

Una totalidad de objetos constituído con grupos de una sola dimensión, como éstos han sido formados con el objeto tipo, es lo que se llama un sistema de dos dimensiones. Son formas de esta clase: el plano de puntos, engendrado por la rotación de una serie rectilínea alrededor de uno de sus elementos, y el plano de rectas, formado por un haz cuyo vértice resbala á lo largo de un rayo; la radiación de rectas, engendrada por un haz cuyo plano gira alrededor de un rayo, y la radiación de planos formada por un haz cuya arista gira en un plano alrededor de un punto.

Llamo plano de puntos al sistema de todos los puntos de una forma plana, y plano de rectas al conjunto de todas las rectas de la misma; radiación de rayos al sistema de todas las rectas de una forma radiada, y radiación de planos al conjunto de todos los planos de ella.

Al considerar en el plano el punto como elemento fundamental, la recta viene á ser forma derivada, base de una serie rectilínea; mas si se mira la recta como elemento tipo, es el punto forma secundaria, vértice de un haz de rayos. Otro tanto puede decirse de las rectas y planos de una radiación.

Una forma lineal ó de una sola dimensión respecto de otra de dos dimensiones, es un sistema de tres dimensiones. El espacio puntual, originado por un plano de puntos que gira alrededor de una de sus rectas, y el conjunto de todos los planos imaginables engendrado por una radiación de planos cuyo vértice resbala sobre un rayo, son formas tridimensionales.

En general, una forma de una dimensión respecto de otra de $n-1$ dimensiones, es un sistema enedimensional. Las rectas del espacio forman un grupo de cuatro dimensiones: para engendrarlo, es preciso que el vértice una radiación de rectas, resbale sobre un rayo, y el sistema de tres dimensiones, así formado, gire alrededor del centro de la forma radiada primitiva, en un plano de la misma: así resultan construídas todas las rectas que cortan á un plano dado, todas las posibles.

Este sistema tetradimensional contiene otros de tres dimensiones, constituídos por todas las rectas que cortan á una línea cualquiera plana ó alabeada, y diferenciados entre sí por el grado de la ecuación que liga las coordenadas de cada una de sus rectas: estas coordenadas son las constantes que determinan las dos ecuaciones de una recta en el sistema cartesiano. Entre tales sistemas merecen especial mención los formados por rectas que cortan á una fija: su orden es el segundo. Ellos dan un sistema bidimensional cuyos elementos son las rectas que cortan á dos de posición invariable: las ecuaciones de las variedades tridimensionales cuyas directrices son las dos rectas dadas, determinan analíticamente el sistema. De igual modo se llega á un grupo unidimensional dado por rectas qué cortan á tres fijas, y que, como se sabe, forman un hiperboloide. Cuando dos de estas rectas están en un plano, el hiperboloide se reduce á un haz: si lo están las tres, á una forma plana.

Si á las tres ecuaciones que relacionan las coordenadas de un elemento de una variedad lineal en un espacio de cuatro dimensiones, se añade una relación más entre las coordenadas, y otra magnitud nueva que vendrá así á ser función de ellas, se podrá expresar cada una de éstas por medio de la variable introducida. Esto es lo que caracteriza un grupo unidimensional.

Como en el espacio de puntos una superficie cerrada es un lugar geométrico que limita un cuerpo, puede también aquí considerarse el sistema tridimensional cerrado, como límite que separa todas las rectas imaginables en dos porciones distintas. Estas son para una variedad formada por todas las rectas que cortan á una curva plana algébrica: el grupo de las que atraviesan el plano en el interior de la curva, y el de las que lo cortan en el exterior.

El estudio de los diferentes sistemas de rectas, de tres dimensiones, que pueden imaginarse en el espacio, no es propio de este lugar. Lo dicho basta para que veais cómo pueden interpretarse geométricamente los espacios analíticos é ideales de cuatro dimensiones.

No presenta mayor dificultad la interpretación de sistemas más complicados. Si la elección de la recta para elemento tipo nos ha permitido hacer intuitiva la cuarta dimensión, curvas de un orden más elevado, servirán para formar sistemas con mayor número de dimensiones.

Es sabido que la ecuación de una cónica contiene cinco constantes arbitrarias, necesarias y suficientes todas ellas para determinar la curva. Así, el conjunto de todas las curvas de segundo orden imaginables en un plano, forma un sistema de cinco dimensiones. Entre ellas, las que tienen cuatro puntos comunes, reales ó imaginarios, forman un grupo lineal, que nuestro maestro, el sabio catedrático de Geometría descriptiva de la Universidad Central, Sr. Torroja, llama un haz de cónicas: la ecuación de éste contiene un parámetro arbitrario, del cual son funciones las coordenadas de una curva cualquiera del mismo.

Las cónicas imaginables en todos los planos posibles serán la representación geométrica de un espacio de nueve dimensiones: otras tantas cantidades necesita cada una de ellas para su completa determinación: tres que fijan el plano en el espacio y seis que determinan la curva en su plano.

Otro sistema de nueve dimensiones, distinto del anterior puede imaginarse, constituído por todas las cuádricas posibles, cuya ecuación general contiene nueve constantes arbitrarias. El grupo lineal lo forman aquí todas las cuádricas que pasen por la misma cónica real ó imaginaria, y forman un haz de superficies de segundo orden.

El estudio de las relaciones métricos en estos sistemas, lo realiza Riemann de una manera abstracta y un tanto oscura. Principia por suponer que la longitud de una línea ó sistema unidimensional es independiente de la posición, lo cual es afirmar la posibilidad de superponer dos grupos idénticos y determinarlos numéricamente. Así en la totalidad de rectas que hemos considerado, un ángulo plano ó una superficie cónica, se miden por medio de otro ángulo. Demuestra después que la fórmula según la cual el elemento diferencial de longitud es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferenciales de las coordenadas, es la más sencilla de cuantas responden á las condiciones del problema, y lo admite para definir la extensión de una línea en un espacio cualquiera.

Desde luego puede decirse de este método seguido por Riemann para establecer los fundamentos de la Geometría, que es vago é indirecto: seguro que de no haber conocido el teorema de Pitágoras, por cuyo medio se expresa en el espacio ordinario la longitud del elemento lineal, no se hubiera ocurrido al ilustre discípulo de Gauss la hipótesis que sirve de fundamento á su estudio de las relaciones métricas.

Las demás afirmaciones de su Memoria son oscuras y difíciles de interpretar: que la naturaleza del espacio debe de ser deducida de su concepto; que la formación de éste supone la subordinación á otro más elevado: es tal concepto, el de una cantidad múltiplemente extensa, lo llamado por mi sistema de *n* dimensiones que, según él, comprende al de espacio, como la especie al género; determinado el número de estos sistemas toca á la experiencia decidir cuál de ellos está representado por el espacio que revela en nosotros el mundo conocido.

Riemann no dice lo que son los conceptos, ni cómo se forman y entran en la inteligencia. Afirma, es cierto, que los de cantidad solo son posibles cuando existe un concepto general que admite diferentes especializaciones; pero no indica cuál es la naturaleza ni el origen de éste.

La oscuridad de esta doctrina depende de que intenta deducir las dimensiones del espacio de las leyes del pensamiento, problema que, como observa Grasmann, no tiene solución. Que las funciones de una y dos variables independientes tengan una interpretación geométrica en coordenadas puntuales, no prueba que puedan tenerla las de mayor uúmero de variables.

IV.

Si se agregara al espacio una cuarta dimensión, podría invertirse una superficie cerrada sin romperla ni estirarla.

SIMÓN NEWCOMB.

DESPUÉS de haber establecido en el orden abstracto la posibilidad intelectual de un espacio con más de tres dimensiones, se ha pretendido demostrar, por medio de la experiencia, la realidad objetiva de una cuarta dimensión.

Él mundo en que vivimos—se dice—pudiera muy bien pertenecer á un espacio de cuatro dimensiones que lo rodeara por todas partes, como un plano pertenece á nuestro espacio tridimensional en cuyo seno está sumergido. Admitid esto, y suponed que existieran seres de dos dimensiones, cuya morada fuese una superficie; que las vírgenes de Murillo y los guerreros y borrachos de Velázquez tuvieran vida, sensibilidad é inteligencia; que sin abandonar los planos de sus cuadros se agitaran y adquiriesen por medio de los sentidos la intuición del Universo plano en que moran, y con el auxilio de su razón los conocimientos todos de nuestra Geometría plana; que abstrayéndose, y aún cuando no pudieran imaginar la tercera dimensión, crearan nuestra Geometría del espacio, admitiendo en ella cuantas proposiciones no se opusieran á los principios de la lógica, y comprendieran, como caso particular, las que para ellos tenían carácter intuitivo. Estableced la analogía entre estos seres hipotéticos—cuyo mundo representan los mapas geográficos—y nosotros, y tendreis la base en que se apoyan cuantos pretenden constituír elementalmente la Geometría del hiper-espacio, y explicar los fenómenos de las ciencias físicas por medio de la cuarta dimensión.

Así como en un plano existe, sobre una recta y por un punto, una sola perpendicular á ella, y en el espacio intuitivo, no hay tampoco más que una perpendicular á un plano, la cual contenga un punto dado; en el espacio de cuatro dimensiones, que contiene dentro de sí infinitos universos de tres, como cada uno de estos contiene infinitos planos, se admite, generalizando, que un punto determina una perpendicular y solo una, á un sistema tridimensional: y asi como la perpendicular á un plano lo es á todas las que pasan por su pie ó punto de encuentro con dicha superficie y están situadas en ella, así la recta que encuentra ortagonalmente al Universo habitado por nosotros, forma también ángulo recto con todos los rayos de la radiación cuyo vértice es el único punto visible de la línea ideal. Esta es además perpendicular á todos los planos imaginables en la radiación considerada.

Aplicada la generalización en esta forma, se admite la existencia de universos paralelos al nuestro, constituídos por puntos equidistantes del mundo que habitamos; se afirma que dos espacios tridimensionales tienen una superficie común, la cual será plana cuando los espacios sean homaloidales, como dos superficies se cortan según una línea, recta cuando las superficies son planos; se mide el ángulo de dos universos por el de las perpendiculares trazadas al plano común en uno cualquiera de su puntos.

Los procedimientos ordinarios de la Geometría descriptiva, se extienden también al espacio de cuatro dimensiones. Tiene esta ciencia por objeto principal obtener, sobre una hoja de papel, la proyección de un cuerpo, y producir en nosotros, por medio del dibujo obtenido, la impresión del objeto representado.

Si nos fijamos en que el dibujo no tiene más que dos dimensiones, comprenderemos cómo un ser plano puede ejecutarlo, sin salirse de su morada, y con los medios de que dispone. Podría, por ejemplo, hacer la perspectiva de un cubo con sólo trazar dos cuadrados, y unir sus vértices, uno á uno, por medio de rectas.

De igual modo, para tener en nuestro espacio la proyección de un cubo tetradimensional, deberemos cojer dos exaedros ordinarios y unir sus vértices. El cuerpo construído será la representación buscada, que si bien no podrá darnos la intuición del objeto, porque para ello deberíamos mirar la perspectiva desde un punto del espacio tetradimensional, contemplando así no sólo la superficie sinó también el espesor, nos enseñará algunas de sus propiedades: sabremos que tiene diez y seis vértices, treinta y dos lados y ocho caras, compuestas cada una de un cubo.

No sólo el cubo, sinó todos los poliedros regulares posibles en el espacio de cuatro dimensiones, han sido calculados, y construídas sus proyecciones. Para ello nosotros necesitamos tallar los cuerpos que las representan en piedra ó madera, ó moldearlos en yeso, ó determinar sus vértices y aristas por medio de hilos de seda y alambres; pero un ser de cuatro dimensiones obtendría el mismo resultado con un simple dibujo, como nosotros llevamos á cabo con el pincel, la regla y el compás, lo que un ser plano no podría formar sin el auxilio de todos los medios necesarios para construír un edificio. Podríamos decir que nuestros pintores son escultores de dos dimensiones, y nuestros escultores pintores tetradimensionales.

Siguiendo á los pangeómetras en sus ensueños, sería posible estudiar la perspectiva tetradimensional y enunciar las leyes de ella, en los mismos términos que usaría un profesor de cuatro dimensiones.

Hé aquí cómo se expresaría este ser ideal é inconcebible:

«La Geometría descriptiva se propone la representación de los objetos, por medio de sus proyecciones sobre dos espacios tridimensionales ó universos, perpendiculares entre sí. Se obtienen estas proyecciones, bajando perpendiculares desde los puntos del objeto que se trata de representar á cada uno de los universos de proyección, llamados *horizontal* y *vertical*.

La intersección de estos dos universos es un plano llamado *plano de tierra*. A fin de poder representar las dos proyecciones sobre nuestro papel, el cual no tiene más que tres dimensiones, se supone el universo vertical rebatido alrededor del plano de tierra sobre el universo horizontal.

Sea P el plano de tierra: cada punto A tendrá dos proyecciones a y a', situadas sobre una misma perpendicular al plano de tierra: a es la proyección horizontal, a' la proyección vertical del punto A.»

Así se podría continuar la exposición de la Geometría descriptiva, y entretenerse en hallar la intersección y las sombras geométricas, de los cuerpos de cuatro dimensiones.

No solo el sistema ideado por Monge, sinó también el de la perspectiva lineal ó proyección cónica, el más científico de los sistemas de representación, puede generalizarse.

Para tener la perspectiva de un objeto, desde un centro dado sobre la cuarta dimensión, se une éste, donde se supone situado el ojo del observador, con los diferentes puntos del cuerpo representado, y la radiación de segunda especie determinada se corta por el Universo que habitamos, sobre el cual podremos construír la perspectiva deseada. Este será el *cuadro*: perpendicular á él se supone al *geometral*, en el que están situados los objetos: la intersección de ambos, uno vertical y otro horizontal, para los seres de cuatro dimensiones, es el *plano de tierra*. El pie de la perpendicular bajada sobre el *cuadro*, desde el punto de vista, es el *punto principal*, que podremos construír materialmente. Un espacio de tres dimensiones, trazado por el ojo del observador, paralelamente al *geometral*, determinará en el *cuadro* el *plano de horizonte* paralelo al de tierra y que contiene el punto principal.

La preparación del cuadro no presentará dificultad. Bastará cojer un cubo, vaciarlo, trazar en él dos planos horizontales que representen al plano de tierra y al de horizonte, y fijar sobre este último el punto principal; como basta para hacer un dibujo ordinario, tomar un cuadrado de papel, trazar en él dos rectas paralelas que representen la línea de tierra y la de horizonte, y marcar en ésta la preyección del punto de vista.

Dispuesto el cuadro, la perspectiva se construye por los procedimientos ordinarios, teniendo en cuenta las reglas siguientes:

1.ª *La perspectiva de una recta es otra recta*, intersección del plano determinado por la primera y el ojo del observador, con el cuadro.

2.ª *La perspectiva de un plano es otro plano*, determinado por la radiación que proyecta el primero desde el punto de vista, la cual llena por completo un espacio de tres dimensiones, al ser cortada por el universo del cuadro.

3.ª *La perspectiva de rectas paralelas se compone de rec-*

tas concurrentes en un punto llamado de fuga. Estas son las intersecciones del cuadro con planos proyectantes de las primeras, los cuales se cortan todos según una misma recta que pasa por el centro de proyección.

4.ª *La perspectiva de planos paralelos se compone de planos que pasan todos por una misma recta, llamada de fuga.* Estas son las intersecciones del cuadro con los universos proyectantes de los primeros, los cuales tienen común un mismo plano que contiene el punto de vista.

La resolución gráfica de un problema mecánico se hace, en el dibujo, aplicando los principios de la Geometría descriptiva, y determinando la posición de los cuerpos, por medio de un sistema de tres ejes, que si bien son rectangulares en el espacio, forman diferentes ángulos en el papel. El mismo procedimiento puede adoptarse para la resolución de problemas de estática, dinámica y cinemática, con cuerpos de cuatro dimensiones; pues si bien no podemos imaginar cuatro rectas que pasen por un punto y sean perpendiculares dos á dos, es posible referir el movimiento de un objeto, en proyección sobre el Universo, á tres ejes que, sin formar ángulos rectos, sean las aristas de un cubo tetradimensional proyectado.

Los procedimientos ordinarios sobre la composición de fuerzas serán en un todo aplicables; y la cinemática dará resultados sorprentes, haciendo ver la libertad y amplitud de los movimientos en un espacio con más dimensiones que el nuestro. Si el número de éstas es cero, el sistema considerado es un punto, y ningún movimiento es posible: si el espacio es de una sola dimensión, y rectilíneo ó de primer orden, no tendrán los objetos más movimiento que el de traslación á lo largo de la recta que los contiene, el resbalamiento únicamente será realizable, la rodadura no existirá en un mundo tal: si el sistema en estudio es de dos dimensiones, y además plano ó de curvatura constante, el trasporte de las figuras se hará sin deformación; una circunferencia podrá ser trasladada de un lugar á otro, ó bien rodar sin resbalamiento sobre otra línea; pero dos de sus puntos bastarán para determinar su posición en un instante cualquiera, porque fijada la recta que ellos determinan, no será posible imprimir á la circunferencia un movimiento de rotación sin sacarla de su plano. Si el cuerpo es de los que existen en nuestro mundo, la traslación, la rodadura, la rotación alrededor de un eje y los movimientos epicicloidales son posibles, determinándose la posición de un cuerpo por la de tres puntos: mas en el espacio de cuatro dimensiones, un cuerpo puede girar en torno de una recta, realizando un movimiento de rotación, que sería comparable al de una esfera, cuyo centro tan sólo estuviera fijo: los carruajes tetradimensionales tendrán, pues, ruedas que se moverán de esta manera concebible, aunque no realizable, para nosotros; serán, sin duda alguna, más seguros que los nuestros; no obstante la mayor libertad de sus movimientos.

Esta mecánica original permite componer fuerzas que actúen según la cuarta dimensión, sirve para interpretar los fenómenos físicos y químicos, y permite exponer una nueva concepción mecánica del calor, que lleva á considerarle como causa de la luz, de la electricidad y de la combinación química.

Tan solo á título de curiosidad voy á presentaros tan extraña teoría; pues por más que Veronesse afirme la conveniencia de estudiar elementalmente, y de un modo intuitivo y práctico, la Geometría del hiper-espacio, creo que, únicamente con el método analítico y mediante las representaciones geométricas que brindan los sistemas de curvas y superficies, pueden comprenderse y aceptarse sin repugnancia por filósofos y matemáticos, tan abstrusas teorías.

Se principia por atribuír los diferentes estados de los cuerpos á fuerzas extrañas á nosotros, que se ejercen sobre el medio en que vivimos. Si una gota de agua, se dice, cayera sobre un plano perfectamente horizontal, y bajo la acción de la gravedad se extendiera en todos sentidos, ejerciendo presión sobre una línea cerrada que le impidiera dilatarse; y si un ser de dos dimensiones observara estos efectos, colocado de pie en la circunferencia de un círculo que le atrajera hacia su centro, atribuiría al líquido las propiedades de un gas, porque le vería comportarse como tal; mas si el recipiente, del cual se ha vertido la gota de agua, fuese atravesado de arriba á abajo por el espacio plano del observador citado, el cual al levantar los ojos contemplaría sobre su cabeza el líquido adaptándose al vaso, tomando su forma y presentando una superficie perfectamente horizontal y plana, el cuerpo ya no parecería gaseoso en este mundo hipotético, de realización imposible.

La ley de supuesta analogía entre los seres de dos y tres dimensiones nos lleva á enunciar la siguiente proposición:

Un mismo cuerpo será líquido ó gaseoso, según que sobre él se ejerza una fuerza perpendicular á nuestro espacio ó paralela al mismo.

El calor se supone que es también una presión del espacio tetradimensional, ejercida sobre el Universo. Esta hipótesis explica el fenómeno del enfriamiento de los cuerpos sumergidos en un medio á temperatura inferior. Acudiendo á la imagen del plano, y representando por una recta perpendicular á él la intensidad de la presión-calor, soportada por una molécula de un objeto, la presión total que obra sobre el mismo vendría representada por el volumen de un cilindro recto, cuya base fuese el cuerpo bidimensional considerado y la altura el valor constante de la presión molecular. La fuerza íntegra tenderá á ensanchar el cilindro, y como el volumen ha de permanecer constante, puesto que mide una cantidad de energía y ésta no se pierde, será preciso que la altura disminuya hasta hacerse igual á la del medio ambiente.

Admitido como fuerza tetradimensional el calor, y habiendo desprendimiento ó absorción de él en toda combinación química, se impone la explicación de ésta.

Suponed una multitud de moléculas planas de azufre y hierro: interpuestas las unas entre las otras, nada más fácil que separarlas por procedimientos mecánicos ó físicos, propios de un mundo bidimensional; pero colocad las primeras encima de las segundas, en el sentido de la tercera dimensión, y habreis formado un cuerpo, el sulfuro ferroso, distinto de los componentes simples empleados, imposible de destruír para un ser de dos dimensiones, por procedimientos de carácter intuitivo.

En el primer caso, azufre y hierro estaban nada más que mezclados: en el segundo, fueron combinados por la presión calor. Mientras ésta no hace más que comprimir la materia, se limita á producir un aumento de temperatura; pero en cuanto la presión es suficiente á vencer la resistencia del medio, y trasportar fuera de su plano algunas moléculas ó unidades materiales, para superponerlas á las otras, se establece un nuevo estado de equilibrio, y la combinación tiene lugar, con un desprendimiento de luz que es de fácil explicación.

Recordad cómo dejando caer una piedra en la superficie del agua, se produce en torno del punto tocado una depresión, un vacío circular, que se va ensanchando, seguido de una condensación, cuando las moléculas, primeramente separadas por el choque, vuelven á juntarse al desaparecer la causa que las separó; recordad cómo esta dilatación y condensación sucesivas se propagan en la tranquila superficie de un lago, rizándola de un modo caprichoso y formando una serie de ondas que van á chocar contra la orilla; observad que al verificarse la combinación de dos cuerpos en un plano, la materia deberá vibrar de esta manera, y con tanta más rapidez cuanto mayor sea la energía de la acción química; admitid que en un espacio plano la luz sea un movimiento vibratorio como en el Universo; y tendreis explicada la producción del fenómeno luminoso por medio de la presión-calor.

Esta misma fuerza es la causa del movimiento eléctrico. Como la luz es un movimiento oscilatorio, de vaivén, que se trasmite de unas moléculas á otras, sin que haya traslación de materia; la electricidad, en el espacio de dos dimensiones, es una rotación de los átomos, alrededor de un eje situado en su plano, la cual no puede ser imaginada por un ser bidimensional, porque exige el concepto de la tercera dimensión.

Tal hipótesis explica la descomposición de los cuerpos por la corriente eléctrica. Tomemos como ejemplo el agua: una fila de moléculas, que va del eléctrodo positivo al negativo, en un voltámetro, es una serie de columnitas, perpendiculares al plano del ser imaginario, formadas, cada una, por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Una acción del espacio tridimensional, hace girar todos estos sistemas moleculares, y coloca sus ejes en un mismo plano: la combinación se ha convertido en mezcla, y la fuerza centrífuga de la rotación lanza los elementos componentes á los polos del analizador.

Llevados del entusiasmo y la fe los sectarios de la nueva Iglesia metageométrica, no dudan en afirmar que las investigaciones de Lobatchewski, señalan una nueva era en la historia de la Geometría, y que cuando este período histórico alcance su edad de oro, la ciencia geométrica habrá alcanzado su mayor simplicidad, como la Astronomía llegó á su máximo grado de perfección con el descubrimiento de Copérnico. Lo que Copérnico fué á Ptolomeo, exclama Clifford, Lobatchewski lo fué á Euclides.

Animados por estas ideas han pretendido explicar los misterios del espiritismo, y considerar como fenómenos naturales, hechos hasta hoy comprendidos en la esfera de lo sobrenatural.

Después de Crookes, el insigne descubridor de la mateteria radiante, y por indicación suya, Zöllner, profesor que fué de Física astral en la Universidad de Leipzig, estudió las manifestaciones de la fuerza psíquica con el *medium* Slade; y refiere que vió por dos veces deshacerse los nudos de una cuerda, estando selladas sus extremidades, hecho que había predicho y demostrado matemáticamente Félix Klein, para un espacio tetradimensional.

Suponed una cuerda en un plano, sujeta por una de sus extremidades, haced que la extremidad libre gire 360°, y habreis formado un lazo de dos dimensiones, representación ó dibujo de un nudo ordinario, que un ser bidimensional solo podrá deshacer efectuando en sentido inverso el mismo giro que sirvió para formarle; pero que uno de nosotros desatará fácilmente, levantando una porción de la cuerda por encima de su plano y volviéndola á colocar en éste mediante una ligera torsión: las mismas operaciones practicadas, invirtiendo el orden, servirán para formar el nudo [1].

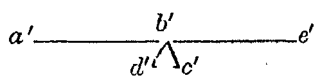
Estas mismas ideas dan cuenta de la desaparición de los nudos en nuestro espacio, mediante una fuerza ejercida según la cuarta dimensión. En comprobación de que el fenómeno debe de verificarse análogamente á como acabo de explicar, Zöllner cita las torceduras aparecidas en dos co-

---

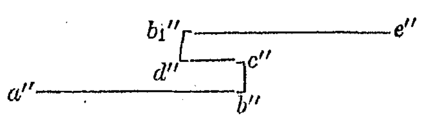
(1) Sea ab la cuerda;

a ———————————— b

$a'b'c'd'b'e'$ será su disposición después de formado el lazo,



y $a''b''c''d''b_1''e''$ la forma que adoptará cuando un ser tridimensional haya levantado la parte superior.



rreas sin fin, anudadas en su presencia, por este procedimiento misterioso. Las correas no hubieran aparecido retorcidas, dice el profesor alemán, si los nudos se hubieran formado por separación de la materia ó contradiciendo la ley de la impenetrabilidad.

Por convincente que parezca esta prueba de la existencia del espacio tetradimensional, sólo puede aceptarse como válida admitiendo dos postulados: la realidad de los fenómenos espiritistas, que se producen de un modo demasiado misterioso, para que puedan ser estudiados y reproducidos en su laboratorio por el hombre de ciencia; y la imposibilidad de explicar dichos fenómenos por medio de otra hipótesis más objetiva, y harmónica con las enseñanzas de la diaria observación.

A todas estas propiedades, hay que añadir la inversión posible de una superficie, analíticamente demostrada por Simón Newcomb, en el primer artículo del primer número del *American Journal of Mathematies;* y la posibilidad de sacar un cuerpo, fuera de un recinto cerrado, sin atravesar la superficie, como se puede llevar un punto del interior al exterior de un círculo, sin tocar la circunferencia. Cuanto á grandes rasgos acabo de referir, se afirma que no contradice á los principios de la lógica, y que es tan legítima, como las leyes del movimiento de un cuerpo, cuya marcha á través del espacio se debiera á la acción de fuerzas variables con la distancia del móvil ó centros de posición fija. Lo mismo que los movimientos planetarios, debidos á fuerzas que varían según la ley de Newton, en razón directa de las masas é inversa del cuadrado de las distancias, son casos particulares de estos, las leyes del espacio tridimensional están comprendidas en otras más generales que rigen el hiperespacio.

Es evidente se añade, que cuando se razona sobre un conjunto de cosas, y el grupo formado por ellas no contiene todas las posibles, se puede considerar estas en sus relaciones con aquellas: por esto, admitido que los puntos de nuestro espacio no son los únicos intelectualmente posibles, es legítima la Geometría tetradimensional y todas sus consecuencias; pero tal hipótesis repugna tanto á la intuición, que pudiera dudarse si el concepto de espacio, es para nuestra razón tan necesario como los principios axiomáticos más fundamentales.

Si este procedimiento inductivo, para establecer los principios filosóficos sobre que descansa la Pangeometría, es discutible y contradictorio, lo propio ocurre con el método rigorosamente deductivo seguido por Riemann.

Los conceptos se forman en la inteligencia, clasificando los objetos del conocimiento en atención al número de sus propiedades. Se dividen primero en grupos, cada uno de los cuales comprende aquellos objetos que tienen el mayor número de caracteres comunes, compatible con la diferenciación de las cosas clasificadas; y estos grupos se reunen y distribuyen en otros más elevados, cuyos elementos constitutivos tienen mayores diferencias. A medida que ascendemos en la escala de la clasificación el número de objetos comprendidos en las clases sucesivas aumenta, mientras que el de propiedades comunes á ellas disminuye: el conjunto de estas se llama *concepto*, que ni tiene realidad objetiva independiente, ni se forma por un proceso deductivo.

Así se llega al único concepto posible de espacio, y se comprende la imposibilidad de admitir el llamado espacio tetradimensional, ó sistema de cuatro dimensiones cuyo elemento fundamental es el punto.

VI.

No entre aquí nadie que no sea geómetra.

PLATON.

Se cuenta que el ilustre filósofo griego hizo esculpir estas palabras en su Academia; y aunque sea dudosa la autenticidad de la inscripción, no citada por los escritores antiguos, importa poner aquí esta sentencia, atribuida por Miguel Psellus al ilustre sabio de la Grecia, en carta dirigida á uno de los emperadores que llevó el nombre de Andrónico. Mi objeto es recordaros que, en la patria de Euclides, era la Geometría preparación indispensable para el estudio de las demás ciencias, y se había dado, con esto, un gran paso en favor de la unidad científica.

Apesar de los desvaríos, que á grandes rasgos acabo de referir, de algunos ilustres matemáticos contemporáneos, fuerza es reconocer que, entre dos espíritus dotados de iguales aptitudes, aquel que conoce las matemáticas, posée una mayor penetración, y profundiza más en la resolución de todos los problemas. En esta misma casa estudió, con notable aprovechamiento, el antiguo bachillerato en ciencias, uno de los más ilustres profesores del Doctorado de Derecho en la Universidad Central: por largo tiempo estuvo dedicado á la enseñanza de las verdades matemáticas, allá en su juventud, el más razonador y á la vez el menos práctico de nuestros políticos. Los ejemplos de esta clase, en la edad antigua y en la moderna, podrían multiplicarse indefinidamente.

Las matemáticas son la gimnasia más útil del espíritu, obligan á concretar el pensamiento, y enseñan al hombre que la palabra no le ha sido dada para hacer con ella juegos de artificio, sinó para exponer concisamente las reflexiones que le sugiere la contemplación de las verdades de los órdenes moral y físico, regidos ambos por las mismas leyes eternas é inmutables. Agradables é interesantes las ciencias exactas, cuando se aplican á la resolución de los problemas de la vida práctica, y se limitan al papel de auxiliares, son sublimes y admirables, si se ciernen sobre esas alturas, desde las cuales se llega á mirar con desprecio las explicaciones del presente, pensando en el inmenso campo inexplorado, abierto á los descubrimientos del porvenir.

De las ilusiones del trascendentalismo actual, quizá surja mañana una nueva y fecunda realidad: más por si así no fuera, bueno será alegar en defensa de la pangeometría, que la misma hipóstasis ú objetivación de los conceptos, á la cual se deben sus errores, ha dado lugar, en las ciencias físicas, á nociones, tan contradictorias como la del espacio tetradimensional, si bien por efecto de la necesidad, ó del hábito, las aceptamos como buenas.

que ilumina mi alma, con la permanencia de la pobre lámpara del Santuario perdido en lo más abrupto de la montaña, y la intensidad del potente faro que guía al triste náufrago en noche imponente y tempestuosa.

HE DICHO.