

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Departamento de Matemáticas

Diseño, análisis y aplicación de las Curvas
de Tiempos Medios en problemas de
tomografía sísmica en transmisión

TESIS DOCTORAL

Autor:

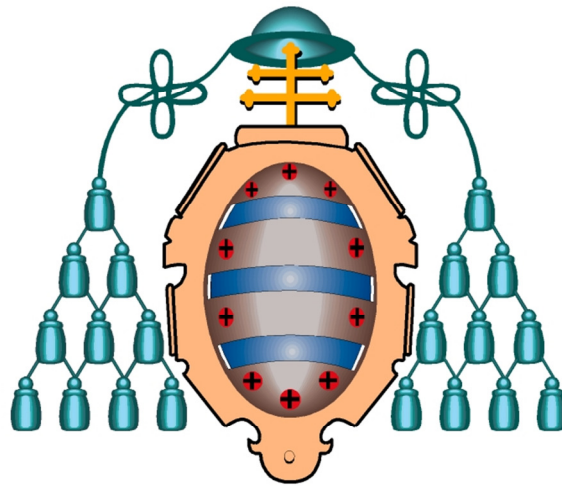
Luis Mariano Pedruelo
González

Director:

Juan Luis Fernández
Martínez

Programa de Doctorado de Matemáticas

Deposito legal
ISBN:



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Programa de Doctorado de Matemáticas

DISEÑO, ANÁLISIS Y APLICACIÓN DE LAS CURVAS DE TIEMPOS MEDIOS EN PROBLEMAS DE TOMOGRAFÍA SÍSMICA EN TRANSMISIÓN

Memoria presentada por Luis Mariano Pedruelo González para optar al título de Doctor,
elaborada a partir del trabajo realizado bajo la dirección del Dr. Juan Luis Fernández
Martínez, en el Departamento de Matemáticas.

Programa de Doctorado de la Universidad de Oviedo, bienio 1993-1995.

Índice

Índice de figuras	XI
Presentación	XV
Agradecimientos	XXI
Objetivos y Síntesis de la Tesis	XXIII
Resumen	XXVII
Abstract	XXIX

Capítulo 1

TOMOGRAFÍA: INTRODUCCIÓN, ANTECEDENTES Y APLICACIONES INDUSTRIALES.

1.1 Tomografía y transformadas integrales	
1.1.1 La tomografía sísmica y sus variantes.....	2
1.1.2 Problemas inversos y Ecuaciones Integrales.....	6
1.1.3 Transformadas Integrales.....	10
1.1.4 El problema inverso de Radon.....	11
1.2 Un pariente próximo: la tomografía de rayos X.....	15

Capítulo 2

PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS EN MEDIOS GEOLÓGICOS.

2.1 Propagación de ondas en medios acústicos	
2.1.1 La ecuación de ondas en medios homogéneos: Las ondas planas.....	20
2.1.2 Caso de medios zonalmente homogéneos.....	23
2.1.3 Caso de términos fuentes puntuales: Ondas esféricas y divergencia geométrica.....	24
2.1.4 Caso de medios geológicos.....	24
2.2 La aproximación de tipo rayo y la ecuación Eikonal.....	25
2.3 La ecuación de trayectorias de rayo (Ray Equation).....	27
2.4 Algoritmos de trazado de rayos.....	29
2.5 Propagación de ondas en medios elásticos.....	31
2.6 Propagación de ondas en medios transversalmente anisótropos.....	36

2.7 La Ley de Snell. Generalización a medios acústicos con anisotropía de tipo elíptico.....	44
2.7.1 Generalización a medios zonalmente homogéneos con anisotropía elíptica.....	46
2.7.2 Medios con un modelo de velocidades mixto.....	54

Capítulo 3

PROBLEMAS INVERSOS LINEALES Y TÉCNICAS DE MÍNIMOS CUADRADOS

3.1 Problemas inversos. Definiciones.....	60
3.2 Resolución generalizada de sistemas lineales mediante técnicas de mínimos cuadrados	
3.2.1 La resolución del sistema lineal.....	64
3.2.2 Los cuatro subespacios fundamentales de un operador lineal.....	69
3.2.3 La pseudoinversa y la descomposición en valores singulares.....	71
3.2.4 Factorización QR.....	75
3.2.5 Mínimos cuadrados y proyecciones.....	76
3.2.6 Tipología de sistemas lineales.....	80
3.2.7 Acción de la pseudoinversa según la tipología de $Ax = b$	85
3.2.8 Falta de estabilidad: Resolución de problemas mal condicionados.....	90
3.2.9 Proyección sobre los cuatro subespacios.....	93
3.2.10 Matrices de Resolución.....	93
3.2.11 Mínimos cuadrados sopesados o ponderados.....	96
3.3 Algoritmos de Reconstrucción Algebraica:	
3.3.1 Algoritmo de media ponderada (Simple Backprojection).....	108
3.3.2 ART (Algebraic Reconstruction Technique).....	110
3.3.2 SIRT	112
3.4 Incertidumbre de los problemas lineales y técnicas de regularización.....	113

Capítulo 4

PROBLEMAS INVERSOS NO LINEALES Y EL PROBLEMA SÍSMICO-TOMOGRÁFICO EN TRANSMISIÓN

4.1 Problemas inversos no lineales discretos $F(s) = t$. Regiones de equivalencia e Incertidumbre.....	118
4.1.1 Regiones de Equivalencia.....	119
4.1.2 Regularización y Análisis de Incertidumbre.....	123
4.2 El Problema sísmico-tomográfico.....	126

4.2.1 El Problema sísmico-tomográfico inverso continuo.....	128
4.2.2 Discretización del Problema sísmico-tomográfico inverso no lineal.....	131
4.2.3 Linealización del Problema sísmico-tomográfico inverso discreto.....	131
4.3 Resolución del Problema sísmico-tomográfico inverso discreto..	
4.3.1 Resolución del Problema sísmico-tomográfico inverso lineal mediante técnicas lineales (Tomografía Lineal).....	136
4.3.2 Resolución del Problema sísmico-tomográfico inverso no lineal mediante técnicas de optimización no lineal.....	137
4.3.3 Resolución iterativa del problema sísmico-tomográfico inverso linealizado	140

Capítulo 5

ARTÍCULOS

Artículo 1:

Mean travelttime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. Mathematical Geology, v. 38-3, p. 343-374.

143

Artículo 2:

MTCLAB: a MATLAB®-based program for travelttime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. Computer and Geosciences (34-3): 213-225. doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008.

185

Artículo 3:

Anisotropic Mean travelttime curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. Mathematical Geosciences, Vol. 41, Number 2, pp 163-192, doi: 10.1007/s11004-008-9202-4.

207

Artículo 4:

Robust Mean Travelttime Curves in 2D Transmisión Tomographic Surveys. Mathematical Geosciences, Vol. 42, Number 4, pp 377-400, doi: 10.1007/s11004-010-9272-y.

245

Artículo 5:

AMTCLAB: a MATLAB[®]-based program for traveltime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media Computer and Geosciences, Vol. 35, Issue 10, October 2009, pp 2057-2064, doi:10.1016 / j.cageo.2008.11.013.

277

Capítulo 6

APLICACIÓN AL CONJUNTO DE DATOS GRIMSEL

6.1 Caso de estudio: aplicación al conjunto de datos Grimsel.....	293
6.1.1 Modelización tomográfica.....	296
6.1.2 Modelización mediante un trazador basado en la ley de Snell en medios anisótropos.....	301
6.2 Las curvas de tiempos medios y el Análisis de Incertidumbre.....	303

CONCLUSIONES

305

BIBLIOGRAFÍA

309

ANEXOS

A.1 Programación de trazadores.....	321
A.2 Programa MTCLAB.....	327
A.3 Programa AMTCLAB.....	355
A.4 Programas de trazado de rayos.....	377
A.5 Publicación FastTIMES.....	411
A.6 XII Congreso Internacional de Energía y recursos Minerales.....	423
A.7 Congreso EEGS Anual Meeting 2009 TEXAS.....	437

Índice de figuras

- 1.1.1 Problema del obstáculo y zonas de sombra.
- 1.1.2 Sondeos paralelos de un dispositivo de transmisión.
- 1.1.3 Dispositivo de reflexión.
- 1.1.4 Geófono.
- 1.1.5 Los VSP consisten en generar una señal en la superficie del suelo y detectar las llegadas sísmicas en puntos de diferentes profundidades donde están situados geófonos.
- 1.1.6 La transformada de Radon se obtiene integrando una función de (x,y) a lo largo de líneas rectas parametrizadas en función de la distancia perpendicular u y el ángulo θ .
- 1.1.7 Geometría de un haz de rayos paralelos [González R. C., 2008].
- 1.1.8 Ilustración del teorema de Fourier. La transformada de Fourier en 1-D de una proyección es una rebanada de la transformada de Fourier en 2-D de la región de la cual se obtuvo la proyección. Se observa la correspondencia del ángulo θ [González R. C., 2008].
- 1.2.1 Desde un emisor de rayos X se lanza un rayo, a través de un medio, hacia un receptor donde la intensidad (energía) del rayo es medida.
- 2.1.1 Propagación de una onda plana en dirección paralela al vector número de onda \mathbf{k} en un plano con ángulo de incidencia Φ medido respecto la línea vertical.
- 2.1.2 Propagación de una onda plana en dirección paralela al vector número de onda \mathbf{k} en un plano con ángulo de incidencia Φ medido respecto la línea vertical. La velocidad de propagación es $c = \frac{\lambda}{T}$.
- 2.4.1 Esquema de un elemento de la malla utilizado en el método de Vidale. [Figura adaptada de Berryman,1991].
- 2.5.1 Representación de las componentes de un tensor.
- 2.5.2 Ondas elásticas en un medio uniforme. Las ondas P (primarias) son ondas longitudinales comprimiendo y dilatado en la dirección de la propagación. Las

ondas S (secundarias) son ondas en las cuales el desplazamiento es transversal a la dirección de propagación.

- 2.5.3 Onda Love.
- 2.5.4 Onda Rayleigh.
- 2.6.1 Definición de ángulo de frente de onda θ y ángulo del rayo ϕ [Thomsen, 1986].
- 2.6.2 Velocidades de onda en diferentes medios y con diferentes ángulos de incidencia.
- 2.6.3 Frente de onda de un medio con anisotropía elíptica de parámetros $\delta = \xi = 0.20$ [Figura adaptada de Thomsen, 1986].
- 2.6.4 Frente de onda de un medio con anisotropía elíptica de parámetros $\delta = -0.20$ y $\xi = 0.20$ [Figura adaptada de Thomsen, 1986].
- 2.7.1 Ley de Snell. Consecuencia del principio de Fermat.
- 2.7.2 Ley de Snell. Estacionariedad de los caminos de Fermat [Figura adaptada de Berryman, 1991].
- 2.7.3 Medio que presenta una anisotropía elíptica zonal.
- 2.7.4 Variables implicadas en un caso de anisotropía elíptica.
- 2.7.5 Relación entre los ángulos implicados en un caso de refracción entre dos medios que presentan anisotropía elíptica.
- 2.7.6 Resultado de la simulación numérica par dos medios con parámetros de anisotropía elíptica.
- 2.7.7 Variables implicadas en un caso mixto de velocidades isótropa y anisótropa.
- 3.2.1 Ejemplo sintético de tomografía sísmica.
- 3.2.2 Efecto de la matriz A sobre los cuatro subespacios fundamentales asociados a A .
- 3.2.3 Interpretación geométrica de la solución de norma mínima.
- 3.2.4 Actuación de la matriz A .
- 3.2.5 Actuación de la matriz $A^\dagger A$.

- 3.2.6 Actuación de la matriz A^\dagger .
- 3.2.7 Actuación de la matriz AA^\dagger .
- 3.3.1 El algoritmo ART como un método de proyección, (Rosenfeld et el, 1982).
- 3.4.1 Región lineal de equivalencia. Los vectores v_1 y v_2 representan los vectores propios de la matriz $M^T M$, con respectivos valores propios λ_1 y λ_2 .
- 3.4.2 Efecto de la regularización en la región lineal de equivalencia.
- 3.4.3 Relación entre el modelo de referencia, la solución proporcionada por la pseudoinversa y la solución de mínimos cuadrados regularizados.
- 4.1.1 Regiones de equivalencia.
- 4.1.2 Una cuasi-solución es un modelo $s^c \in C$ tal que $\mathbf{F}(s^c)$ está cercano a los datos $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$. La aplicación del operador de regularización a un tiempo observado $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$ produce una estabilización del modelo pasando de s_1^{obs} a s^c , más cercano a la solución verdadera s^v si los datos observados $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$ están cercanos a los datos reales \mathbf{t}^v .
- 4.2.1 Esquema representativo de un experimento tomográfico entre dos sondeos de un macizo rocoso.
- 4.2.2 Posibilidades en el planteamiento y resolución del problema sísmico-tomográfico inverso continuo.
- 4.2.3 Modelos de inicio.
- 4.2.4 Modelo homogéneo con anisotropía de tipo elíptico.
- 4.3.1 Algoritmo de resolución del problema inverso utilizando creeping.
- 4.3.2 Algoritmo de resolución del problema inverso utilizando jumping.
- 6.1.1 Dispositivo de adquisición de Grimsel, campo 1.
- 6.1.2 Mapas de tiempos observados para los tres tiros en un plano fuentes-receptor. Las celdas en color negro indican la ausencia de datos observados (tiempos de viaje) entre las parejas emisor i y receptor j involucradas y representadas en dicha matriz.
- 6.1.3 Matriz M , para una malla de 10x20 celdas.

- 6.1.4 (a) Curva de valores singulares de la matriz M .
(b) Variación de la energía de la matriz M en función del número de valores singulares que se considere en su reconstrucción.
- 6.1.5 Modelo de lentitudes obtenido mediante la utilización de pseudoinversa de Moore-Penrose.
- 6.1.6 Modelo de lentitudes obtenido mediante el algoritmo de mínimos cuadrados lineales con restricciones.
- 6.1.7 Tiempos predichos mediante un modelo macroscópico anisótropo elíptico con los siguientes parámetros: V_{\max} (km/s) = 5.3, $\lambda = 0.97$ y $\alpha = 65^\circ$. Modelo de lentitudes obtenido mediante el algoritmo de mínimos cuadrados lineales con restricciones.

Presentación de la tesis

El “Reglamento del tercer ciclo de estudios universitarios, la obtención y expedición del título de doctor y otros cursos de postgrado”; aprobado por la Junta de Gobierno de la Universidad de Oviedo, en la sesión celebrada el día 15 de Febrero de 2000, establece en sus Principios generales que los estudios universitarios de Tercer Ciclo, tienen entre sus finalidades ***“La formación, preferentemente de carácter interdisciplinar, orientada a la aplicación profesional de los correspondientes saberes.”***

De igual forma establece como requisito para la obtención del Título de Doctor por la Universidad de Oviedo el *“presentar, defender y aprobar una Tesis Doctoral, consistente en un trabajo original de investigación, elaborado por el candidato en cualquier disciplina”*.

El trabajo que se presenta, es con la intención de encontrarse bajo el amparo de estos Principios Generales, pues es claramente original, interdisciplinar y con una evidente vocación de aplicación profesional e industrial.

La disposición transitoria primera del Real Decreto 99/2011, establece que a partir del 11 de febrero del 2012, el nuevo “Reglamento de los Estudios de Doctorado”, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad de Oviedo, en la sesión celebrada el día 21 de Julio de 2011, en su *“régimen relativo a tribunal, defensa y evaluación de la tesis doctoral”* será aplicado a aquellos doctorandos que a la entrada en vigor de este Reglamento hayan inscrito su proyecto de tesis en la Universidad de Oviedo de acuerdo con regulaciones anteriores.

Teniendo presente todo lo anteriormente expuesto, se presenta esta Tesis Doctoral, como compendio de publicaciones originales, cumpliendo los requisitos que establecen para nuestro caso concreto el anterior y el nuevo reglamento en todos los apartados que le afectan. No obstante, además, se ha procurado cumplir el resto de condiciones adicionales que fija el nuevo reglamento en todos sus apartados.

Este último Reglamento establece que la memoria de Tesis presentada como compendio de publicaciones habrán de incluir al menos una introducción en la que se justifique la unidad temática de la Tesis y la bibliografía de apoyo, los objetivos de la misma, la copia completa de las publicaciones, la discusión de resultados y las conclusiones.

La presente Tesis Doctoral se estructura, por lo tanto, de la siguiente forma, una parte inicial donde se presenta y se expone la temática que abordan los artículos que la componen, incluye un resumen de la misma además de la justificación y los objetivos perseguidos, continúa con unos capítulos explicativos donde partiendo del trabajo de investigación nos adentramos en la Tomografía Sísmica; se estudia la propagación de las ondas en medios geológicos (ecuación de ondas, aproximación de tipo rayo, ecuación Eikonal, ecuación de trayectorias) generalizando la ley de Snell a medios acústicos con anisotropía de tipo elíptico; se estudian los problemas inversos lineales, los problemas inversos no lineales y los Algoritmos Numéricos utilizados en tomografía sísmica; se analiza el problema sísmico-tomográfico en transmisión y su incertidumbre, concluyendo con un capítulo de aplicación y discusión de la metodología desarrollada al conjunto de datos Grimsel tal como induce el eje de investigación que se desarrolla a través de los cinco artículos. Los cinco artículos originales publicados constituyen el núcleo de este trabajo. Cada uno de ellos va precedido de su correspondiente resumen donde se exponen los objetivos, el diseño, la discusión de resultados y las conclusiones. La parte final recoge las conclusiones generales, las futuras líneas de investigación y la bibliografía utilizada. Por último un apéndice de anexos incorpora los programas fuente del software desarrollado a lo largo de este trabajo.

Los artículos que se presentan son la producción científica de una línea de investigación iniciada en el periodo correspondiente del Programa de Doctorado de Matemáticas con el trabajo de investigación “Métodos Numéricos para la Resolución del Problema Tomográfico Discreto en Transmisión. Aplicación al diseño de filtros de datos observados” y que centrada en la estructuración y planteamiento matemático del problema tomográfico, proponen un método original para analizar e identificar las posibles causas de error en los datos tomográficos de tiempos de viaje antes del proceso de inversión, todo ello mediante el diseño de nuevos algoritmos que localizan y filtran los datos observados que son erróneos e incorporan los modelos de velocidades a priori extraídas del análisis mediante las curvas de tiempos medios, lo que permite estabilizar la inversión.

Artículos en revistas indexadas en el JCR

Fernández Martínez J. L, Fernández Alvarez J.P, Pedruelo González L.M. (2006.)
Mean travelttime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. Mathematical Geology, v. 38-3, p. 343-374.

Fernández Martínez J. L, Fernández Alvarez J.P, Pedruelo González L.M. (2008).
MTCLAB: a MATLAB®-based program for travelttime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. Computer and Geosciences (34-3): 213-225. doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008.

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M. (2009).
Anisotropic Mean travelttime curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. Mathematical Geosciences, Vol. 41, Number 2, pp 163-192, doi: 10.1007/s11004-008-9202-4.

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M. y Rector J. (2010).
Robust Mean Travelttime Curves in 2D Transmisión Tomographic Surveys. Mathematical Geosciences, Vol. 42, Number 4, pp 377-400, doi: 10.1007/s11004-010-9272-y.

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M, García Gonzalo E. (2009).
AMTCLAB: a MATLAB®-based program for travelttime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media Computer and Geosciences, Vol. 35, Issue 10, October 2009, pp 2057-2064, doi:10.1016/j.cageo.2008.11.013.

Los artículos anteriores han sido publicados con posterioridad al inicio de los estudios de doctorado. Las revistas Mathematical Geosciences y Computers and Geosciences están indexadas en bases de datos internacionales de reconocido prestigio y en el Science Citación Index. La revista Mathematical Geology cambió de nombre en el año 2008 pasándose a denominar Mathematical Geosciences.

El factor de impacto de la publicación Mathematical Geosciences es

<u>Año</u>	<u>Impact Factor</u>
2009	0.848
2010	1.511
Actualmente.....	1.354

El factor de impacto de la publicación Computers and Geosciences es

<u>Año</u>	<u>Impact Factor</u>
2008	1.188
2009	1.142
2010	1.416
Actualmente.....	1.429

Otras publicaciones relacionadas de forma directa con el eje principal de esta tesis

- 1.- Fernández Martínez J. L, Menéndez Pérez C.O, Pedruelo González L.M, Fernández Álvarez J.P, Cienfuegos Suárez P.
Geostatistical analysis of inverse problem variables. Application to seismic tomography.
Mathematical Geology, Vol. 35-8, pp. 953-969.
- 2.- J. L. Fernández Martínez, C. Omar Menéndez Pérez, L.M. Pedruelo González
Una metodología original para resolver problemas de tomografía en transmisión.
Boletín Geológico Minero. Edición internacional. Vol. 114-1, pp. 17-40. Número especial dedicado a la memoria de D. Ramón Querol. 2003.
- 3.- Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M. Rector J.
Mean Traveltime Curves: A Simple Tool for Traveltime Analysis, Velocity Tuning, and Anomaly Detection in 2D Transmission Tomographic Surveys
FASTTIMES. Success with Geophysics: Tomographic Detection of Heterogeneities.
Vol. 13-8, pp. 43-51. 2008.

Presentaciones en Congresos Internacionales

Como Anexo se incluyen algunos resultados parciales que abordan diferentes aplicaciones de este trabajo y esta metodología, y que han sido presentados en congresos en su mayoría internacionales y de reconocido prestigio en temas de inversión geofísica:

- 1.- J.L. Fernández Martínez, L.M. Pedruelo y P. Cienfuegos
Aplicación de técnicas tomográficas al estudio de macizos rocosos.
V Congreso de Matemática Aplicada y XV CEDYA. VIGO, 1997. Servicio de publicaciones de la Universidad de Vigo.
- 2.- J.L. Fernández Martínez y L.M. Pedruelo
A method of unravelling errors in data for the transmission tomographic inverse problem.
Congreso: International Association of Mathematical Geology (IAMG-98), ISCHIA (ITALIA). Publicación: IAMG'98, vol. 2, pp. 839-844, ISBN: 88-900308-0-1.
- 3.- J.L. Fernández Martínez y L.M. Pedruelo
A new method of inferring a priori information for the transmission tomographic inverse problem.
Congreso: International Association of Mathematical Geology (IAMG-98), ISCHIA (ITALIA). Publicación: IAMG'98, vol. 2, pp. 833-838 ISBN: 88-900308-0-1
- 4.- J.L. Fernández Martínez , B.C. Dyer, L.M. Pedruelo
Application of tomography to gold exploration
Congreso: Exploration and mining in NW Spain. OVIEDO, 1998.

Publicación: Exploration and mining in NW Spain, pp. 125-129, ISBN:84-600-9483-9.

- 5.- *Fernández Martínez J. L, Fernández Álvarez J.P, Pedruelo González L.M.
Inferring Anisotropy Parameters through mean travelttime curve analysis in 2D transmission tomography experiments.
Congreso: International Association of mathematical Geology (IAMG-06).
Quantitative Geology from Multiple Sources. LIEJA, 2006.*
- 6.- *Fernández Martínez J.L, Fernández Álvarez J.P., Pedruelo González L.M., Eriksen A.
Las curvas de tiempo medio, un método sencillo para resolver problemas de inspección no destructiva. Aplicaciones geotécnicas.
Congreso: XII Congreso Internacional de Energía y Recursos Minerales. OVIEDO, 2007*
- 7.- *Fernández-Martínez J.L., Pedruelo González L.M., James W. Rector.
Robust mean travelttime curves: a powerful tool for analysis in 2D transmission tomographic surveys
Congreso: AGU (American Geophysical Union) FALL MEETING 2008. SAN FRANCISCO, 2008.
Publicación: Eos. Trans. AGU, 89(53), Fall.Meet. Suppl., Abstract NS13A-1081.*
- 8.- *Juan Luis Fernández-Martínez, Luis M. Pedruelo González, James W. Rector, Maria-Daphne Mangriotis, Jacques DeParis.
Application of the Mean travelttime curves to VSP and GPR data
Congreso: 2009 EEGS Annual Meeting. TEXAS, 2009
Publicación: 2009 EEGS Expanded Abstracts.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de Tesis el Dr. Juan Luis Fernández Martínez y al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo el que hayan hecho posible la realización de esta Tesis Doctoral. Quiero extender mi agradecimiento al catedrático Dr. Santos González Jiménez por su acción tutorial durante los estudios cursados de Tercer Ciclo.

Es preciso agradecer a los profesores Dr. José Paulino Fernández Álvarez, Dra Esperanza García Gonzalo, Dr. James W. Rector y Dr. Juan Luis Fernández Martínez el haber participado en la publicación de los artículos que incluye esta Tesis y el haber autorizado su utilización en ella.

Estaré siempre agradecido y en deuda con el profesor Dr. Juan Luis Fernández Martínez por su guía, su apoyo y su ánimo. Cuando se emplean las palabras justas no es preciso decir más, él es mi profesor y mi amigo.

Quiero agradecer a mi esposa Maria de los Ángeles, a mis hijos Luis y Ana y a mis padres y hermanos su incondicional apoyo y fe en mí.

Luis Mariano Pedruelo González

Objetivos y Síntesis de la Tesis

Justificación y Motivación

Con la intención de cubrir el notable vacío que hay en la Tomografía Sísmica, entre los materiales de consulta y los problemas reales a resolver, creemos adecuado proponer, con un estilo y objetivo didáctico, una metodología y a la vez una herramienta, que mejore las técnicas de resolución del problema inverso, siendo el ámbito matemático un espacio adecuado para realizar esta labor. Investigar dónde está el origen de las inestabilidades observadas y del problema de la no unicidad de la solución. Elaborar métodos que nos guíen sobre las posibles familias de soluciones y acoten el rango de soluciones admisibles. Trabajar en una metodología que permita, con rigor, incorporar informaciones complementarias a las propias medidas del dispositivo de adquisición de datos utilizado.

Objetivos

Los métodos sísmico-tomográficos forman parte de la categoría matemática de problemas inversos. Estos métodos proporcionan soluciones que muestran una gran dependencia de los datos observados. Esta propiedad es de gran interés cuando se dispone de datos de campo fiables, ya que permiten inferir las propiedades de los medios geológicos objeto de estudio, que es el principal objetivo de estas técnicas. Por otra parte en el caso de datos con ruido esta sensibilidad es un inconveniente pues puede conducir a soluciones espurias, dado que los errores se transmiten a los parámetros del modelo a través del algoritmo de inversión. Esta circunstancia adquiere aún más importancia si se tiene en cuenta que los problemas inversos están mal planteados en el sentido de Hadamard, es decir, bien no admiten solución, bien existen infinitas soluciones, o bien adolecen de estabilidad, es decir, pequeñas perturbaciones en los datos originan drásticas modificaciones en los parámetros del modelo; por lo que los algoritmos deben ser guiados y estabilizados con información a priori y técnicas de regularización. Además los algoritmos de inversión utilizados para resolver este tipo de problemas son una generalización de las técnicas de mínimos cuadrados para sistemas rectangulares deficientes en rango, que son muy sensibles a la presencia de datos anómalos, por lo que es evidente que el éxito de la modelización depende en gran parte de la metodología empleada en el algoritmo de inversión. En definitiva se trata de analizar la incertidumbre asociada al problema sísmico-tomográfico en transmisión e intentar con metodologías de fácil aplicación, acotar dicha incertidumbre antes del proceso de inversión. Como ha sido destacado, la incertidumbre en el problema inverso

en tomografía proviene del ruido en los datos (trazas sísmicas), de la cobertura parcial del dominio objeto de estudio, así como de las hipótesis y aproximaciones numéricas adoptadas en el modelo matemático (caso por ejemplo de la hipótesis de isotropía en un macizo anisótropo). En esta tesis nos centramos en la primera y tercera causas, dado que la segunda viene fijada por el dispositivo de adquisición de los datos observados. Normalmente en dicho tipo de problemas la adquisición de las trazas sísmicas se realiza entre sondeos, por lo cual existen direcciones que están mal muestreadas lo cual genera ambigüedad (no unicidad) en la resolución del problema inverso.

A partir de un análisis de las bases matemáticas que rigen dicho tipo de técnicas, y desarrollado a lo largo de las publicaciones cuyo compendio constituyen esta Tesis, se propone una nueva metodología: las curvas de tiempo medio (CTM).

Los **objetivos** generales marcados han sido básicamente:

1. Hacer una revisión bibliográfica completa sobre el tema, dado que cuando se inició dicha línea de investigación se carecía de experiencia en el campo de los problemas inversos y más particularmente en el problema citado.
2. Realizar una estructuración y planteamiento matemático del problema sísmico-tomográfico.
3. Analizar la calidad de los datos antes del proceso de inversión. Este análisis está basado en el ajuste de las curvas de tiempos medios en el caso de medios zonalmente homogéneos con anisotropía acústica de tipo elíptico. El estudio de la anisotropía de los medios geológicos es un tema de candente actualidad. Las fuentes principales de anisotropía son las finas estratificaciones del medio, la red de fracturas, el contenido en fluidos y la presencia de materia orgánica, etc.
4. Analizar los diferentes algoritmos existentes para la resolución del problema sísmico-tomográfico discreto en transmisión y diseñar nuevos algoritmos que, basados en el análisis CTM incorporen los modelos de velocidades a priori que se extraen del análisis mediante las curvas de tiempos medios.
5. Programar, utilizando MATLAB[®] como plataforma de construcción, diferentes rutinas que aborden los objetivos anteriores e ilustren y representen el problema. Se hará una breve utilización de los métodos globales de optimización, para ver como solucionan el problema de convergencia a óptimos locales.
6. Analizar la incertidumbre asociada al problema sísmico-tomográfico en transmisión.

Síntesis de la Tesis

La metodología que se propone consiste en realizar el análisis, antes comentado, mediante unos modelos matemáticos sencillos cuyo núcleo son las Curvas de Tiempos Medios (CTM), que incluyen tanto los descriptores clásicos (media y desviación típica) como las medidas estadísticas robustas (mediana, percentiles, rango intercuartílico y desviación media absoluta). Se hallan las CTM empíricas, obtenidas a partir de los datos reales y de la geometría de adquisición y las CTM teóricas. Estas curvas teóricas, admiten una expresión analítica para medios zonalmente isótropos y elípticamente anisótropos, explorados bien con una geometría de adquisición rectangular o irregular.

La originalidad del método propuesto radica en establecer la coherencia relativa entre diferentes agrupamientos, ofreciendo un análisis de la variabilidad espacial de los datos observados (tiempos de viaje de las primeras llegadas asociadas a las ondas P) que permite el diseño de filtros y la interpretación geológica del medio.

Los descriptores como la desviación típica, son más sensibles a la presencia de errores y/o anomalías geológicas y son utilizados para detectar y analizar la influencia de éstas antes de la inversión. Las curvas robustas al ser más resistentes a la presencia de errores en los datos son preferibles a la hora de deducir los modelos iniciales de la velocidad, que serán tenidos en cuenta en la resolución del problema sísmico-tomográfico inverso.

Este método de trabajo se ha expresado en forma de códigos, MTCLAB y AMTCLAB, programas basados en MATLAB[®] que analizan la distribución de los tiempos de viaje utilizando la metodología de las CTM. El objeto es contribuir con su desarrollo al uso de dicha metodología en casos prácticos. Asimismo se ha desarrollado un algoritmo de trazado de rayos que utiliza la Ley de Snell, habiendo sido ésta generalizada al caso de medios con anisotropía elíptica, lo que también constituye una aportación original de esta tesis.

El análisis de sensibilidad a errores de datos y a las diferentes heterogeneidades geológicas es realizado mediante casos sintéticos, generando las CTM con la información proporcionada por un algoritmo de resolución del problema directo. El análisis de sensibilidad ilustra como diferenciar, de forma numérica, el efecto de los errores en los datos de las anisotropías elípticas y hasta qué niveles de ruido este discernimiento es posible.

Se comprueba como la anisotropía del medio geológico y la irregularidad de la geometría de adquisición afectan a la forma de dichas curvas. También se ilustra la propiedad de los descriptores robustos para encontrar soluciones discontinuas de

soporte compacto “blocky models” generalmente debidas a fallas y/o intrusiones. Las CTM robustas, en concreto las correspondientes a medias, medianas y cuartiles, son los descriptores más robustos para identificar parámetros anisótropos.

En el caso de medios débilmente anisótropos el problema de identificación de parámetros, está mal planteado. La velocidad máxima es el parámetro que mejor se identifica y la dirección de anisotropía es el más delicado de identificar, pues para medios con una débil anisotropía existen soluciones equivalentes en un amplio rango de direcciones. Puesto que los errores en los datos provocan ratios de anisotropía anómalos y direcciones de anisotropía incorrectas, un adecuado proceso de filtrado de datos evitará que confundamos estos errores con la existencia de una anisotropía, que a la postre resulte ser falsa.

Podemos resumir que las CTM permiten, con la ayuda del software MTCLAB y AMTCLAB, analizar de qué manera los diferentes tipos de errores (gaussianos, no gaussianos, desplazamiento de las ubicaciones de fuentes y receptores, tanto global como localmente) y heterogeneidades (fallas e intrusiones geológicas), afectan a las curvas de tiempos medios, entendiendo las causas de variabilidad de los datos y proporcionando diferentes modelos (tanto isótropos como elípticamente anisótropos) y rango de velocidades que pueden ser usados como información a priori en el problema inverso en términos de regularización.

La metodología de las curvas de tiempos medios ha sido aplicada al conjunto de datos GRIMSEL (Nagra, Suiza) para la caracterización tomográfica del macizo FEBEX, que en 1997 fue elegido por ENRESA (Empresa Nacional de Residuos S.A.) como uno de los futuros cementerios nucleares españoles. Cabe reseñar por tanto que la presente tesis aborda la resolución de un caso real de gran importancia socio-económica. Este conjunto de datos ya había sido estudiado anteriormente por Gelbke, Miranda, y Sattel, (1989). Los resultados obtenidos permiten confirmar sus conclusiones, detectando, además, la presencia de errores no Gaussianos en dicho conjunto y aportando nuevas indicios sobre la calidad de los datos así como de la estructura de dicho macizo granítico. La coherencia con los resultados anteriores se manifiesta para todas las curvas y todos los agrupamientos indicándonos un medio débilmente anisótropo, con un ratio de anisotropía entre 0.95 y 0.97, una dirección de anisotropía 40° E - 73° N y una velocidad máxima entre 5.26 y 5.37 km/s.

Las curvas de tiempos medios son fácilmente generalizables al caso 3D, estando en preparación un artículo que trata este caso.

Resumen

Los problemas inversos están mal planteados. Este es el caso del problema inverso sísmico-tomográfico en transmisión, que además es no lineal debido a la dependencia de las trayectorias de las primeras llegadas (que son desconocidas) con respecto al campo de lentitudes del macizo geológico objeto de estudio.

En esta tesis doctoral se analiza en detalle los problemas inversos y directo sísmico-tomográfico, su planteamiento y los algoritmos utilizados en su resolución. Además se desarrolla la metodología denominada Curvas de Tiempos Medios, que puede considerarse como un método preinversión de tomografía lineal que permite analizar la calidad de los datos, diferenciar diferentes tipos de errores en los datos, de las heterogeneidades del medio geológico, e inferir modelos de velocidad a priori (zonalmente isótropos o anisótropos elípticos) que permiten regularizar el problema tomográfico inverso.

Esta metodología se aplica al conjunto de datos FEBEX (Nagra, Suiza) consistentes en la caracterización geológica de dicho cementerio nuclear europeo.

Abstract

Inverse problems are ill-posed. The seismic transmission tomographic inverse problem is just a particular case. Also this inverse problem is nonlinear due to the dependency of the wave trajectories with the slowness model.

In this PhD thesis both, the forward and inverse tomographic problems are analysed in detail: their mathematical and physical background and the algorithms needed to achieve a satisfactory solution. We also present the mean traveltimes curves that can be understood as a preinversion linear tomographic method that allows to analyze the data quality and to differentiate errors in data from geological heterogeneities. MTC analysis also provides prior velocity models (zonally isotropic or elliptical anisotropic) that can be used to regularize the seismic tomographic inverse problem.

This methodology is applied to the FEBEX data set to characterize geologically this European nuclear waste disposal.

**Capítulo 1: TOMOGRAFÍA: INTRODUCCIÓN,
ANTECEDENTES Y APLICACIONES
INDUSTRIALES.**

En este capítulo se expone una breve introducción de las técnicas de tomografía en el ámbito geofísico, se analizan los problemas inversos continuos y su relación con las ecuaciones integrales de Fredholm de 1ª especie, se comenta la relación existente entre la tomografía y las transformadas integrales, y finalmente se presenta el problema inverso de Radon y la tomografía de rayos X que son parientes próximos de las técnicas sísmico-tomográficas.

1.1 Tomografía y transformadas integrales

1.1.1 La Tomografía sísmica y sus variantes

La palabra tomografía proviene del griego tomé que significa sección o rebanada. Este término ha llegado a tener un uso reservado a técnicas de reconocimiento no destructivas que reconstruyen el valor de un determinado parámetro en un dominio Ω a partir de las integrales de línea del mismo, que en dicho ámbito se denominan proyecciones y están medidas desde la frontera del dominio $\partial\Omega$. Dicho problema ya interesó a los filósofos y matemáticos griegos desde el punto de vista geométrico (figura 1.1.1).

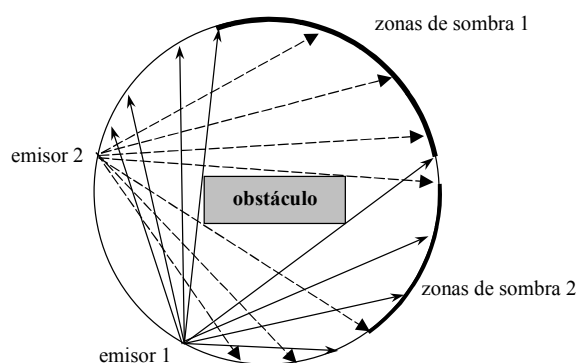


Figura 1.1.1: Problema del obstáculo y zonas de sombra

Las técnicas tomográficas han sido usadas con gran éxito en ingeniería biomédica, obteniendo su máximo desarrollo con la tomografía axial computerizada (exploración TAC), la tomografía de emisión de positrones (análisis “PET”) o la resonancia magnética nuclear (NMR). La primera de dichas técnicas supuso que en 1972 Hounsfield recibiese el premio Nobel. Hounsfield comparte el premio con Allan Cormack, que descubrió independientemente algunos de los algoritmos de reconstrucción algebraica utilizados en su resolución numérica. Además éste último demuestra que es posible computar imágenes de secciones de alta calidad a pesar de que los datos no satisfagan estrictamente los modelos teóricos bajo los cuales los algoritmos

de reconstrucción son eficientes. En un principio se utilizaron las técnicas de reconstrucción algebraica (ART y SIRT), así como los algoritmos de media ponderada (SBP) desarrollados por Ramachandran y Lakshminarayanan (1971) y más tarde popularizados por Shepp y Logan (1974). El éxito de las técnicas tomográficas en el cuerpo humano se debe a su homogeneidad, al estar compuesto aproximadamente en un 80 % por agua.

En otros ámbitos de estudio han sido numerosos los parámetros físicos (tales como la atenuación de las ondas P o de la radiación electromagnética) que han sido procesados usando técnicas tomográficas. Una de las aplicaciones más comunes de este método ha sido la obtención del campo de velocidades de las ondas P a través de un medio geológico a partir de los tiempos de viaje de dichas ondas entre diferentes parejas de emisión-recepción. Sin embargo, la tomografía sísmica ha tenido un lento desarrollo debido a los problemas de adquisición de datos, y a la mayor complejidad teórica de los algoritmos, dada las heterogeneidades y anisotropías del medio geológico.

Los métodos tomográficos aplicados a las ciencias de la tierra se clasifican principalmente en dos categorías: tomografía en transmisión y tomografía de reflexión. Mientras que los primeros han sido ampliamente utilizados en exploración minera, caracterización geotécnica de macizos rocosos e ingeniería civil (La Porte (1973), Ivansson (1985), McCann (1975)), los segundos lo han sido principalmente en el ámbito petrolero (Kennett (1983), Spencer (1982), Waters (1978)). La tomografía en transmisión suele realizarse entre sondeos paralelos que atraviesan el macizo geológico objeto de estudio (figura 1.1.2).

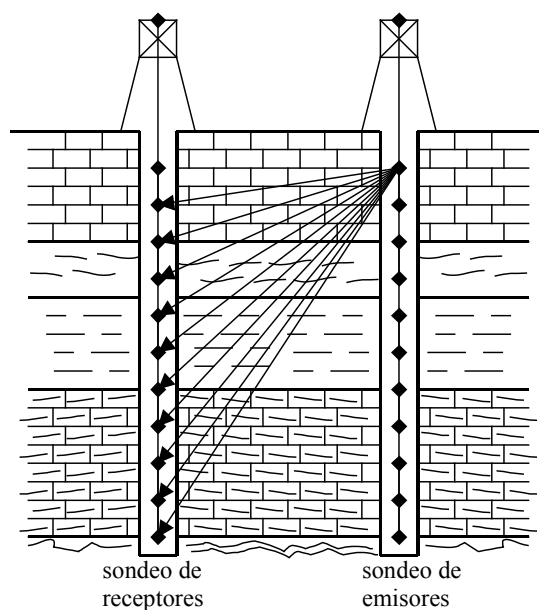


Figura 1.1.2: Sondeos paralelos de un dispositivo de transmisión

En el caso de la tomografía de reflexión (figura 1.1.3) los emisores o fuentes sísmicas y los receptores o geófonos (figura 1.1.4), se sitúan en la superficie terrestre.

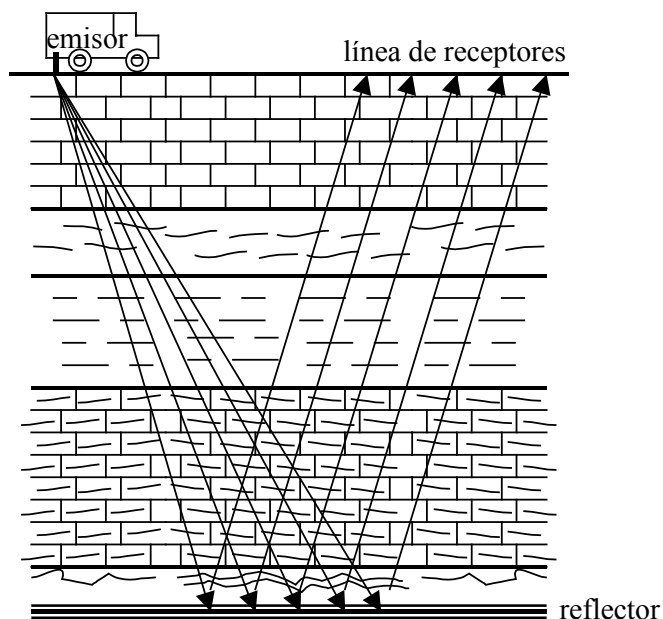


Figura 1.1.3: Dispositivo de reflexión



Figura 1.1.4: Geófono,

Una técnica híbrida es la que sitúa las fuentes en la superficie del terreno y los receptores se sitúan en un sondeo. Esta técnica se conoce como VSP (Vertical Seismic Profile) que significa Perfil Sísmico Vertical. En este caso la posición de los horizontes sísmicos es desconocida, como en el caso de la tomografía en reflexión, sin embargo se considera la onda reflejada en lugar de la refractada. (figura 1.1.5). Se provoca una perturbación que se propaga por el subsuelo mediante ondas que dan lugar a los fenómenos de reflexión. Las ondas reflejadas sobre los estratos geológicos remontan hacia la superficie y son detectadas y analizadas sus características. Este es el principio de la sísmica reflexión (observemos que las ondas transmitidas pueden propagarse horizontalmente una cierta distancia y remontar a continuación hacia la superficie, en este caso estaríamos hablando de sísmica de refracción). Los elementos geológicos descubiertos en sísmica de reflexión son los estratos de separación de medios con impedancia acústica diferente (La impedancia acústica es por definición el producto de la densidad por la velocidad de propagación de la onda sísmica). La profundidad de penetración de la sísmica de reflexión puede ser de una decena de kilómetros y su poder de resolución muy superior al de otros métodos geofísicos, sin embargo su coste también es muy superior. Los primeros estudios sísmicos se remontan a la I guerra mundial (1914-1918), donde el análisis de las sacudidas creadas por el retroceso de los cañones permitía a algunos artilleros imaginativos, localizar la posición de las piezas de artillería enemigas. La sísmica de reflexión es en la actualidad el método esencial en la

explotación petrolífera, siendo notable su papel en oceanografía e ingeniería civil. En hidrología y minería, sin embargo, se utilizan métodos eléctricos y magnéticos que son más baratos.

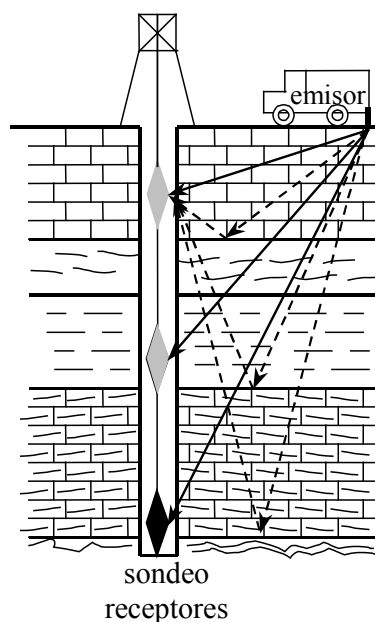


Figura 1.1.5: Los VSP consisten en generar una señal en la superficie del suelo y detectar las llegadas sísmicas en puntos de diferentes profundidades donde están situados los geófonos [M. Lavergne, 1986].

La principal diferencia entre los métodos de reflexión y transmisión radica en el hecho de que en la tomografía de reflexión las posiciones de los reflectores son una incógnita adicional del problema y se necesitan algoritmos adicionales de migración (ver por ejemplo Lavergne, 1986) para situar los reflectores en profundidad. Esto también ocurre con la técnica VSP.

Los métodos tomográficos a su vez se clasifican en acústicos y elásticos. En el primer caso se modelizan los tiempos de viaje de las primeras llegadas (ondas P). En el caso de la tomografía elástica (full wave inversion) se intenta modelizar el contenido íntegro de todas las trazas sísmicas y por lo tanto debe resolverse la ecuación de ondas en medios elásticos. La tesis que aquí se presenta se refiere al problema de tomografía acústica en transmisión que suele considerarse como un paso previo a la resolución del problema de tomografía elástica. No obstante, como ha sido mencionado anteriormente, los métodos de tomografía acústica poseen una gran aplicación en diferentes ámbitos de las ciencias de la tierra, sin necesidad de resolver el problema tomográfico elástico. Obviamente, la elección de uno u otro problema depende del objetivo que se persiga. En cualquier caso el problema de tomografía elástico necesita unos recursos computacionales superiores. En el capítulo 2 se analizan las bases físicas de la propagación de ondas acústicas y elásticas en medios geológicos.

1.1.2 Problemas inversos y Ecuaciones Integrales

El ejemplo clásico de problema inverso mal planteado lo constituyen las ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie. Una ecuación integral de Fredholm de primera especie es una relación funcional del tipo

$$\int_a^b K(x,s)m(x)dx = g(s), \quad s \in [c,d], \quad (1.1)$$

donde $K(x,s)$ se denomina núcleo integral de la ecuación y es una función de cuadrado integrable en $[a,b] \times [c,d]$ es decir;

$$\|K\|_2^2 = \int_a^b \int_c^d K^2(x,s) dx ds < +\infty, \quad (1.2)$$

$m(x)$ se denomina modelo o función incógnita y es la función que deseamos determinar y $g(s)$ se denomina función dato y está relacionada con la función incógnita $m(x)$ a partir del núcleo integral $K(x,s)$ mediante el proceso de integración (1.1).

El problema directo consiste en el cálculo de la función dato conocidos el núcleo integral y la función incógnita.

En el problema inverso se pretende hallar la función $m(x)$ que ha generado la función dato $g(s)$, supuesto conocido el núcleo integral $K(x,s)$. Esto se conoce como el problema inverso continuo.

El problema anterior es lineal en $m(x)$ dado que se verifica el principio de superposición, es decir,

$$\int_a^b K(x,s) \left(\sum_{h=1}^p \alpha_h m_h(x) \right) dx = \sum_{h=1}^p \alpha_h \int_a^b K(x,s) m_h(x) dx = \sum_{h=1}^p \alpha_h g_h(s). \quad (1.3)$$

Un caso especialmente importante es aquel en que la función dato se conoce en un conjunto discreto de puntos de muestreo s_i , es decir,

$$\int_a^b K(x,s_i)m(x)dx = g(s_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

También se conocen los valores del kernel $K(x, s_i) = K_i(x)$ en los diferentes puntos de muestreo. Este último problema se denomina problema lineal inverso continuo con datos discretos.

Cabe reseñar que la función dato $g(s)$ poseerá una suavidad mayor que la función incógnita, dado que el proceso de integración actúa como un algoritmo de suavizado, amortiguando las componentes de alta frecuencia de $m(x)$. Por ello resulta lógico preguntarse si las componentes de alta frecuencia de la función incógnita $m(x)$ podrán ser recuperadas a partir de la función dato $g(s)$. La respuesta es negativa. Por otra parte es de esperar que el problema inverso amplifique las componentes de alta frecuencia que aún están presentes en la función dato $g(s)$. Este segundo fenómeno es el origen de las inestabilidades en el problema inverso continuo. Para explicarlo procederemos de la siguiente manera:

Si $K(x, s) \in L^2_{[a,b] \times [c,d]}$, entonces admite la siguiente descomposición en valores singulares

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i v_i(x) u_i(s), \quad (1.5)$$

conocida como descomposición espectral de la función $K(x, s)$. A las funciones $v_i(x)$ y $u_i(s)$, se las denomina funciones singulares de $K(x, s)$ y verifican las condiciones de ortogonalidad

$$(v_i, v_j) = (u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (1.6)$$

con respecto al producto escalar euclídeo habitual. A los valores μ_i se les denomina valores singulares o espectro de $K(x, s)$ y son números reales no negativos,

$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p \geq \dots \geq 0$. Los valores singulares satisfacen la relación $\|K\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2$,

con lo cual los núcleos $K(x, s)$ de cuadrado integrable verifican que sus valores singulares decaen más rápido que $\frac{1}{\sqrt{j}}$ siendo j el índice del valor singular.

Al igual que en el caso discreto (descomposición en valores singulares de una matriz), el cálculo de la tripleta (μ_i, v_i, u_i) implica la resolución de dos problemas de valores propios:

1.- $\{\mu_i^2, u_i(s)\}$ son los valores y funciones propias del kernel simétrico

$$\int_a^b K(s,t)K(x,t)dt$$

2.- $\{\mu_i^2, v_i(x)\}$ son los valores y funciones propias del kernel simétrico

$$\int_a^b K(t,s)K(t,x)dt$$

Se verifican las siguientes relaciones

$$\int_a^b K(x,s)v_j(x)dx = \mu_j u_j(s), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.7)$$

$$\int_c^d K(x,s)u_j(s)ds = \mu_j v_j(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.8)$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x,s)v_j(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k(x)u_k(s) \right) v_j(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(s) \left(\int_a^b v_k(x)v_j(x)dx \right) = \\ &= \mu_i u_i(s) \delta_{ij} = \mu_j u_j(s). \end{aligned}$$

La demostración del segundo apartado es similar.

Se verifica por lo tanto

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^b K(x,s)m(x)dx = \int_a^b K(x,s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k v_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \left(\int_a^b K(x,s)v_k(x)dx \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k m_k u_k(s). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \langle g(s), u_j(s) \rangle &= \int_c^d g(s)u_j(s)ds = \int_c^d \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k m_k u_k(s) \right) u_j(s)ds = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k m_k \left(\int_c^d u_k(s)u_j(s)ds \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k m_k \delta_{kj} = u_j m_j. \end{aligned}$$

con lo cual $m_j = \frac{\langle g(s), u_j(s) \rangle}{\mu_j}$, es decir, $m(x)$ puede expresarse en la base de las

funciones propias $v_j(x)$ de la siguiente forma

$$m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle g(s), u_j(s) \rangle}{\mu_j} v_j(x). \quad (1.9)$$

Por lo tanto si se produce una variación $\delta g(s)$ en la medida, ésta origina una perturbación $\delta m(x)$ en la función incógnita dada por

$$\delta m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle \delta g(s), u_j(s) \rangle}{\mu_j} v_j(x), \quad (1.10)$$

es decir, las componentes de $\langle \delta g(s), u_j(s) \rangle$ asociadas a los valores singulares μ_j más pequeños, se amplifican notablemente generando soluciones espúreas.

La condición

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\langle g(s), u_j(s) \rangle}{\mu_j} \right)^2 < +\infty, \quad (1.11)$$

se conoce como condición de Picard y es la restricción que debe cumplir la función dato $g(s)$ para que exista una función modelo $m(x)$ (de cuadrado integrable) que verifique la ecuación integral. La condición de Picard requiere que $\langle g(s), u_j(s) \rangle$ decaiga más rápido que $\frac{\mu_j}{\sqrt{j}}$. Se puede demostrar (Hansen, 1998) que si se verifica la condición de

Picard, entonces $g(s) \in \text{Im}(K)$, con lo que la ecuación integral es compatible y por lo tanto se puede encontrar el modelo $m(x)$ que verifica la ecuación (1.1).

Finalmente comentar que la resolución numérica de las ecuaciones de Fredholm de primera especie mediante métodos de discretización por proyección, es decir buscar

$$m(x) \in \langle \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x), \quad (1.12)$$

conduce a sistemas lineales del tipo

$$G \cdot \mathbf{a} = \mathbf{g}, \quad (1.13)$$

donde $G \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $G(i, j) = \int_a^b K(x, s_i) \varphi_j(x) dx$ y $g_i = g(s_i)$ $i = 1, \dots, m$.

1.1.3 Transformadas Integrales

La tomografía posee una estrecha relación con las transformadas integrales. Estas transformadas tienen su origen en el siglo XIX con los trabajos de Joseph Fourier y Oliver Heaviside. Durante el siglo XX estos métodos adquieren un uso más extendido.

Por transformada integral nos referimos a relaciones de la forma:

$$F(s) = \int_{D_t} f(t)K(s,t)dt .$$

Se dice que la nueva función $F(s)$ es la transformada de $f(t)$, y $K(s,t)$ es el núcleo (kernel) de la transformación.

Un problema básico en el uso de las transformadas integrales es determinar la función $f(t)$ a partir de su transformada $F(s)$. Esto es posible dado que las transformadas integrales poseen la correspondiente fórmula de inversión:

$$f(t) = \int_{D_s} H(s,t)F(s)ds$$

donde $H(s,t)$ es el núcleo de la transformada inversa y D_s su dominio. La relación anterior se denomina la transformada inversa de $F(s)$. Normalmente los dominios D_t y D_s son $(-\infty, +\infty)$.

Un caso concreto es la *transformada de Fourier* para una función de dos variables, $f(t,z)$. Se define como:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,z) e^{-i2\pi(ut+ vz)} dt dz . \quad (1.14)$$

Dicha transformada posee transformada inversa dada por:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv . \quad (1.15)$$

Las variables x,y son denominadas variables espaciales, mientras que u,v son variables de frecuencia.

Las transformadas integrales han sido aplicadas en el procesado y filtrado de datos geofísicos para su modelización. Por ejemplo, en sismica de reflexión el subsuelo se modeliza como un sistema lineal invariante en el tiempo y el problema de la deconvolución consiste en determinar la respuesta impulsional del mismo, $G(t)$, a

partir de diferentes pares de señales de entrada (ondículas $i(t)$ emitidas desde diferentes fuentes) y salida (trazas sísmicas $o(t)$ registradas en diferentes geófonos):

$$o(t) = (i * G)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\tau)G(t-\tau)d\tau.$$

1.1.4 El problema inverso de Radon

Desde el punto de vista matemático, el primer problema tomográfico fue abordado por el matemático vienés Johann Radon en 1917, que demostró que si se obtenía una serie completa de proyecciones de un parámetro, entonces éste podía ser reconstruido sin ambigüedad. El método es comúnmente conocido como la transformada de Radon. De forma breve exponemos las herramientas matemáticas necesarias para obtener las proyecciones y los algoritmos de reconstrucción (empleados en tomografía computerizada CT, single photon emisión tomography SPECT, positrón emisión tomography PET, magnetic resonance imaging MRI y algunas modalidades de imagen por ultrasonidos).

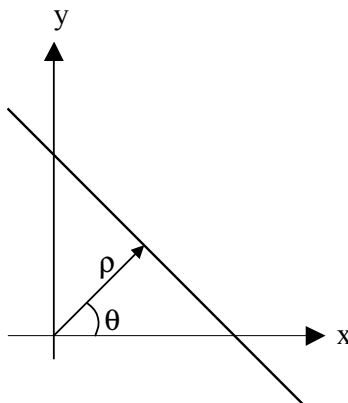


Figura 1.1.6: La transformada de Radon se obtiene integrando una función de (x,y) a lo largo de líneas rectas parametrizadas en función de la distancia perpendicular ρ y el ángulo θ .

La transformada de Radon de una función $m(x,y)$ se define como:

$$t(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho) dx dy, \quad (1.16)$$

donde $\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)$ es la distribución de Dirac a lo largo de la trayectoria rectilínea de ecuación $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$, (Figura 1.1.6).

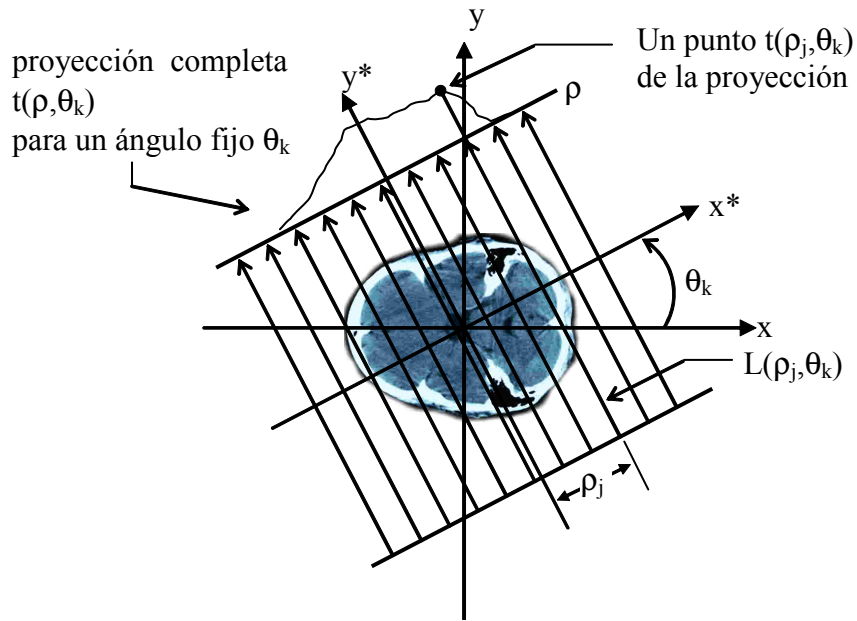


Figura 1.1.7: Geometría de un haz de rayos paralelos. Se denomina $t(\rho_j, \theta_k)$ al tiempo de viaje a lo largo de un rayo recto descrito como $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$. [figura adaptada de González R. C., 2008].

El problema inverso de Radon consiste en la determinación del modelo $m(x, y)$ a partir de sus proyecciones $t(\rho, \theta)$ para diferentes valores de los parámetros ρ y θ . Cuando la transformada de Radon, $t(\rho, \theta)$, se representa como una imagen en el espacio (ρ, θ) , se denomina *sinograma* y contiene toda la información necesaria para reconstruir $m(x, y)$.

El procedimiento es el siguiente: Fijado un ángulo θ_k , se obtiene las medidas $t(\rho_j, \theta_k)$ para un haz de rayos rectilíneos. El valor $t(\rho_j, \theta_k)$ corresponde a la proyección de ángulo θ_k a lo largo de la línea $L(\rho_j, \theta_k)$. Este valor es un punto de la proyección completa $t(\rho, \theta_k)$ (ver figura 1.1.7), denominando a la proyección completa

$$m_{\theta_k}(x, y) = t(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k). \quad (1.17)$$

Variando el ángulo θ_k se cambia la dirección del haz y por lo tanto la proyección, siendo la expresión para el proceso completo

$$m(x, y) = \int_0^\pi m_{\theta}(x, y) d\theta. \quad (1.18)$$

Sin embargo, la utilización directa de esta expresión para determinar el modelo $m(x, y)$ produce un efecto de borrosidad en el modelo buscado, por lo que será preciso reformular el proceso de inversión (González y Woods, 2008).

Teorema de proyección de Fourier

La transformada de Radon está relacionada con la transformada de Fourier en 2-D del modelo $m(x, y)$. Considerando la transformada de Fourier en 1-D de una proyección $t(\rho, \theta)$ con respecto a ρ :

$$G(w, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\rho, \theta) e^{-i2\pi w\rho} d\rho, \quad (1.19)$$

se tiene que sustituyendo en la ecuación (1.19), $t(\rho, \theta)$ por su expresión en (1.16):

$$\begin{aligned} G(w, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - \rho) e^{-i2\pi w\rho} dx dy d\rho = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - \rho) e^{-i2\pi w\rho} d\rho \right] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) e^{-i2\pi w(x \cos\theta + y \sin\theta)} dx dy. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Denominando $u = w \cos\theta$ y $v = w \sin\theta$, la ecuación (1.20) se convierte en

$$G(w, \theta) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \right]_{u=\cos\theta; v=\sin\theta}, \quad (1.21)$$

que es la transformada de Fourier en 2-D de $m(x, y)$ evaluada en los valores de u y v , es decir:

$$G(w, \theta) = \left[F(u, v) \right]_{u=\cos\theta; v=\sin\theta} = F(w \cdot \cos\theta, w \cdot \sin\theta). \quad (1.22)$$

La relación (1.22) se conoce como el teorema de proyección de Fourier y establece que la transformada de Fourier 1-D de una proyección es una rebanada de la transformada de Fourier 2-D del modelo $m(x, y)$ que generó dicha proyección (figura 1.1.8). En esta relación se fundamentan los métodos de reconstrucción y permiten obtener $m(x, y)$ utilizando la transformada inversa de Fourier de $F(u, v)$.

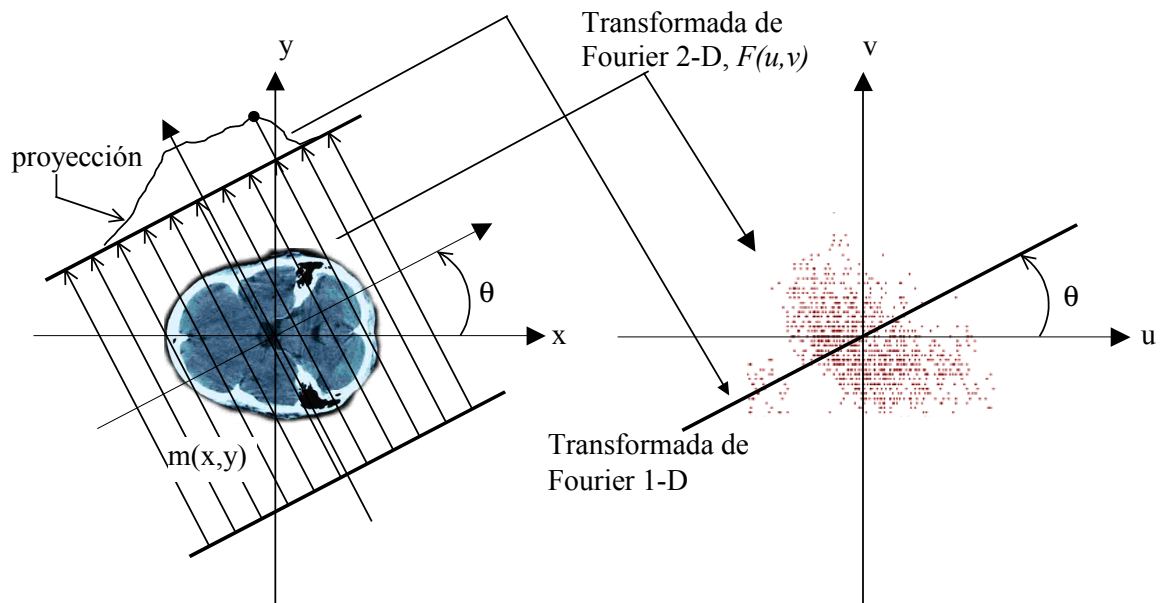


Figura 1.1.8: Ilustración del teorema de Fourier. La transformada de Fourier en 1-D de una proyección es una rebanada de la transformada de Fourier en 2-D del modelo $m(x,y)$ del cual se obtuvo la proyección. Se observa la correspondencia del ángulo θ [figura adaptada de González R. C., 2008].

Este proceso es computacionalmente costoso, lo que hace necesario la utilización de otras estrategias de inversión (González y Woods, 2008).

1.2 Un pariente próximo: la tomografía de rayos X

El problema tomográfico de rayos X es el principio de funcionamiento de las técnicas médicas TAC (Tomografía axial computerizada ò Scanner). El objetivo que se persigue es medir la absorción de los rayos X en un dominio bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en cuya frontera $\delta\Omega$, se encuentran situados m emisores (transmisores) T_i y m receptores R_i . En concreto se mide la pérdida de la intensidad de los rayos X que atraviesan el dominio, se supone que, compuesto por un material absorbente de rayos X. Llamamos $c(x,y)$ al coeficiente de absorción en el punto del dominio (x,y) ; se asume que $c(x,y)$ es no negativo en todo el dominio.

La figura 1.2.1 muestra la geometría de un único rayo X cuya absorción será medida.

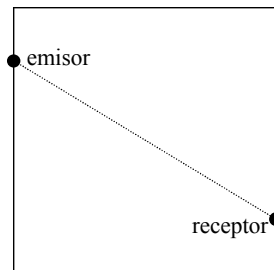


Figura 1.2.1: Desde un emisor de rayos X se lanza un rayo, a través de un medio, hacia un receptor donde la intensidad (energía) del rayo es medida.

En estos problemas inversos el modelo que se reconstruye es el coeficiente de absorción $c(x,y)$ de los rayos X, que dependen del tipo de tejido atravesado. La ley de comportamiento del problema directo es la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dI}{ds} = -c(x,y)I, \quad (1.23)$$

que indica que la intensidad I de un rayo X disminuye con la distancia s recorrida por el mismo entre una pareja de emisión-recepción. Dicha atenuación depende del coeficiente de absorción local del tejido $c(x,y)$ como indica la ecuación (1.23).

Conocida la intensidad inicial del rayo i en el emisor, I_0 y la intensidad en el receptor I_i , la ley de absorción viene dada por

$$I_i = I_0 \cdot e^{-\int_{\Gamma_i} c(x,y) d\Gamma_i}, \quad i=1, \dots, m. \quad (1.24)$$

En el vacío se verifica $c(x, y) = 0$.

El problema directo consiste en calcular I_i dadas las localizaciones de emisores y receptores, la función $c(x, y)$ que define los coeficientes de absorción de todos los puntos del dominio Ω y el camino Γ_i que recorre el rayo i . Es posible linealizar el problema planteado en la ecuación (1.24) utilizando la reparametrización logarítmica en la relación (1.24), con lo cual se tiene que los logaritmos de las intensidades observadas son lineales con respecto al coeficiente de atenuación $c(x, y)$

$$\ln \frac{I_i}{I_0} = - \oint_{\Gamma_i} c(x, y) d\Gamma_i = - \int_{x_0}^{x_i} c(x, y_i(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy_i(x)}{dx} \right)^2} dx, \quad (1.25)$$

donde $y = y_i(x)$ es una parametrización, según x , de la trayectoria del rayo i .

Por otro lado, si el medio fuese completamente homogéneo, tendríamos rayos rectos y un coeficiente de absorción $c(x, y)$ igual en todos los puntos (x, y) del dominio Ω . En el caso del cuerpo humano que está constituido mayoritariamente por agua, el medio no es homogéneo, aunque si es muy cercano a la homogeneidad al menos localmente, por ello los rayos no serán perfectamente rectos. Si no se realizase la aproximación, mediante rayos rectos, existiría una dependencia entre la trayectoria de los rayos y los coeficientes asociados, con lo cual el problema tomográfico de rayos X sería no lineal. Consideraciones análogas serán realizadas en el capítulo 4 que trata del análisis del problema sísmico tomográfico en transmisión. Por esta razón el problema TAC puede considerarse como un pariente próximo de la tomografía sísmica acústica en transmisión. La ecuación (1.25) rige el problema tomográfico continuo de rayos X.

Para calcular $c(x, y)$ es necesario hacer una discretización del cuerpo radiado objeto del problema. Habitualmente se adopta una discretización en un conjunto de n celdas en las cuales se pueda asumir la hipótesis de homogeneidad de los parámetros del modelo $c(x, y)$. El proceso de discretización equivale a expresar los coeficientes de absorción en la forma

$$c(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k(x, y), \quad (1.26)$$

donde

$$\Psi_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \text{ celda } k, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \text{ celda } k. \end{cases} \quad (1.27)$$

Cabe reseñar que se podrían utilizar otras funciones de base $\psi_k(x, y)$. Teniendo en cuenta esta discretización se llega a

$$\ln \frac{I_i}{I_0} = - \int_{x_0}^{x_f} \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy_i(x)}{dx} \right)^2} dx = - \sum_{k=1}^n c_k l_{ik} \delta_{ik}, \quad (1.28)$$

donde l_{ik} es la longitud del rayo i en la celda k y δ_{ik} es la delta de Kronecker que indica si el rayo i atraviesa dicha celda o no. Se llega así al sistema lineal

$$\sum_{k=1}^n c_k l_{ik} \delta_{ik} = - \ln \frac{I_i}{I_0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.29)$$

que rige el problema inverso discreto relativo a la tomografía axial computerizada.

Por lo tanto al linealizar y discretizar, se puede plantear el problema como

$$\ln \frac{I_i}{I_0} = - \oint_{\Gamma_i} c(x, y) d\Gamma_i = - \sum_{k=1}^n c_k l_{ik} \delta_{ik}. \quad (1.30)$$

Más adelante se describirá con más detalle la linealización y discretización de este tipo de problemas.

Capítulo 2: PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS EN MEDIOS GEOLÓGICOS

En este capítulo se presenta la propagación de ondas en medios geológicos, acústicos (sólo efectos compresivos) y elásticos (teniendo en cuenta posibles efectos de cizalla). En el caso de medios acústicos se deduce la ecuación Eikonal y la ecuación de trayectorias, que rigen la aproximación de altas frecuencia de la ecuación de ondas. Asimismo se presenta una generalización de la ley de Snell para medios con anisotropía elíptica. Dichas leyes rigen la resolución del problema directo en tomografía en transmisión. La tomografía en medios elásticos constituye una línea de investigación futura de esta tesis.

2.1 Propagación de ondas en medios acústicos

2.1.1 La ecuación de ondas en medios homogéneos: Las ondas planas

Se asume un fluido compresible, no viscoso, sin resistencia a la cizalla y en equilibrio. Al no haber resistencia a la cizalla, las deformaciones locales sólo causan cambios en el volumen del fluido.

Deduciremos la ecuación de ondas en un medio no homogéneo para posteriormente ver el caso particular en un medio homogéneo. Denominando $P(\mathbf{x}, t)$ al cambio de presión en el punto \mathbf{x} y en el tiempo t se verifican las siguientes relaciones:

1. *Ley de Hooke*

$$P(\mathbf{x}, t) = -k_b \nabla \cdot \mathbf{u} + s(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

donde \mathbf{u} es el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio, k_b es el coeficiente de compresibilidad y $s(\mathbf{x}, t)$ es el término fuente, independiente de \mathbf{u} .

2. *Ley de Newton*

$$\nabla P(\mathbf{x}, t) = -\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

donde $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad y $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t)$ indica la aceleración de cada partícula.

Relacionando ambas ecuaciones se tiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{1}{k_b(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{k_b(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 s(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

con lo cual si asumimos gradientes de densidades despreciables se llega a

$$\Delta P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = F(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

donde

$$c(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{k_b(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}}, \quad (2.5)$$

es la velocidad de las ondas compresivas (ondas P). En el caso de medios homogéneos k_b y ρ no dependen de la posición \mathbf{x} , con lo cual c es constante.

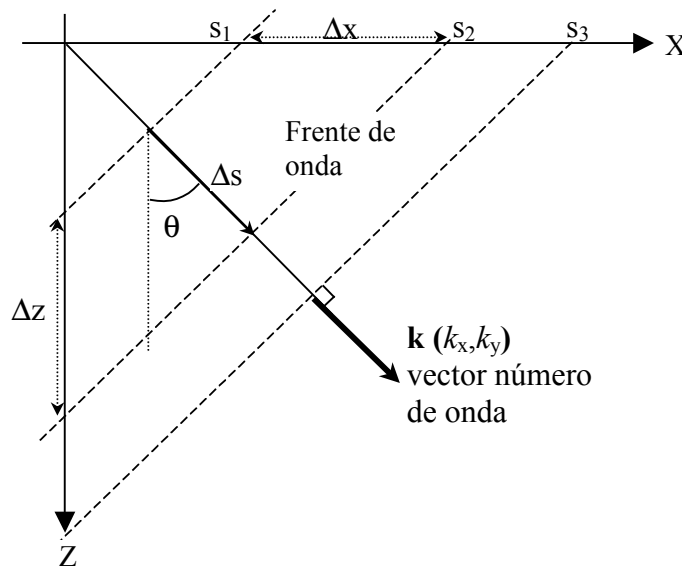


Figura 2.1.1: Propagación de una onda plana en dirección paralela al vector número de onda \mathbf{k} en un plano con ángulo de incidencia θ medido respecto la línea vertical.

La solución de D'Alembert de la ecuación de ondas homogénea, (en ausencia de fuentes), en 2D

$$\Delta P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

es

$$P(\mathbf{x}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$, $\mathbf{x} = (x, z)$ y se verifica

$$\|\mathbf{k}\|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (2.8)$$

La solución (2.7) define las ondas planas dado que los frentes de onda es el conjunto de puntos

$$\mathbf{x} : \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt = cte, \quad (2.9)$$

que son planos cuyo vector asociado es el vector \mathbf{k} de número de onda (figura 2.1.1). La relación (2.8) se denomina *ecuación de dispersión*, y relaciona la variación temporal y espacial (w y \mathbf{k}), e indica que el frente de onda avanza una longitud de onda λ en un periodo T , dado que si $\|\mathbf{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $w = \frac{2\pi}{T}$ y teniendo en cuenta que la velocidad de propagación es $c = \frac{w}{\|\mathbf{k}\|}$, entonces se tiene $c = \frac{\lambda}{T}$. Además la velocidad de propagación también se puede definir en función de las propiedades del medio k_b y ρ , como se ha visto anteriormente, $c = \sqrt{\frac{k_b}{\rho}}$. La figura 2.1.2 ilustra los conceptos comentados.

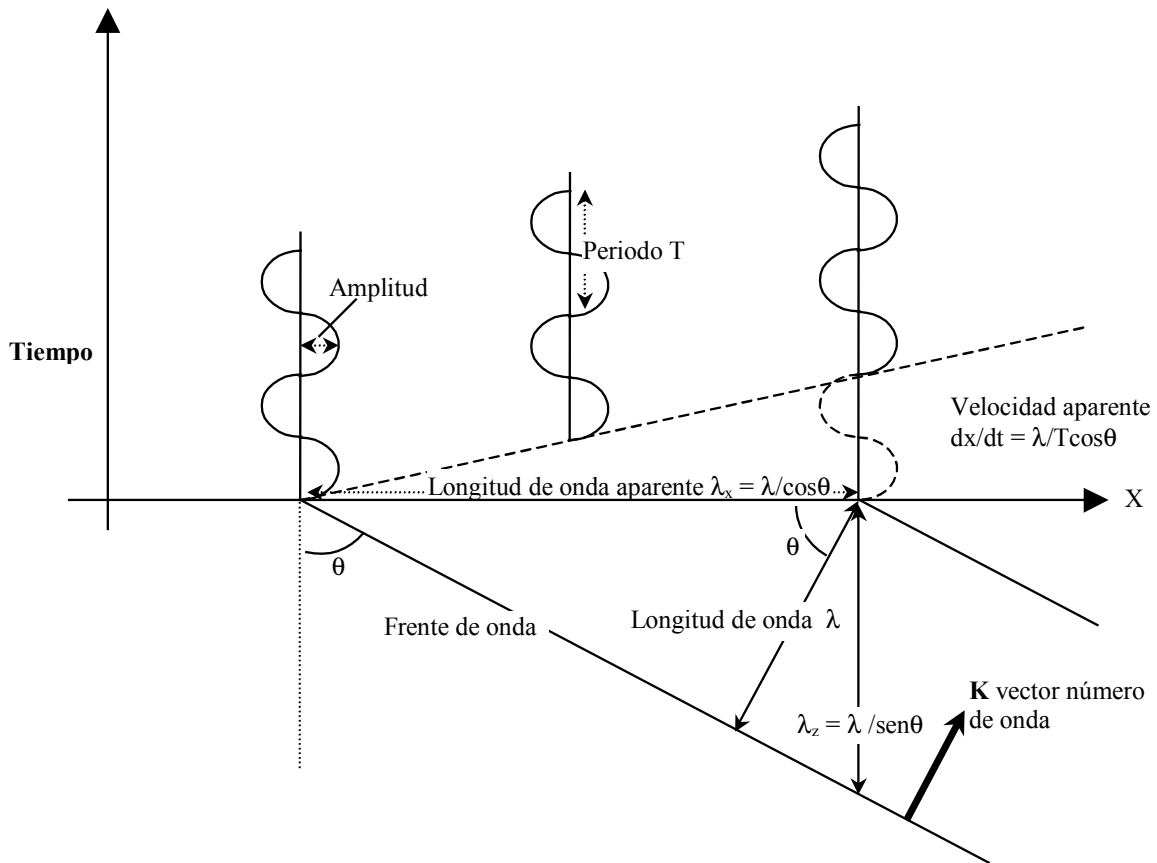


Figura 2.1.2: Propagación de una onda plana en dirección paralela al vector número de onda \mathbf{k} en un plano con ángulo de incidencia θ medido respecto la línea vertical. La velocidad de propagación es

$$c = \frac{\lambda}{T}.$$

2.1.2 Caso de medios zonalmente homogéneos

En el caso de una situación compuesta por una frontera que separa dos medios con propiedades respectivas ρ_1, c_1 y ρ_2, c_2 , se impone la continuidad de la solución $P(\mathbf{x}, t)$ en la frontera de separación, relacionándose los coeficientes de transmisión T y de reflexión R en dicha frontera. En el caso de incidencia normal (perpendicular a la frontera) se llega a las relaciones:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \\ T &= \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En las relaciones anteriores aparecen los productos $\rho_i c_i$ que se denominan impedancias acústicas y son una medida de la rigidez del medio, dado que si la impedancia acústica disminuye las velocidades de propagación aumentan. En el caso de incidencia oblicua con un ángulo θ , un análisis similar proporciona el coeficiente de reflexión (Schuster, 2007; Aki y Richards, 1980):

$$R = \frac{\cos \theta_2 \rho_1 c_1 - \cos \theta_1 \rho_2 c_2}{\cos \theta_2 \rho_1 c_1 + \cos \theta_1 \rho_2 c_2}. \quad (2.11)$$

La igualdad de los números de onda horizontales

$$k_{x1} = \frac{w}{c_1} \text{sen} \theta_1, \quad k_{x2} = \frac{w}{c_2} \text{sen} \theta_2, \quad (2.12)$$

nos conducen a la ley de Snell

$$\frac{\text{sen} \theta_1}{c_1} = \frac{\text{sen} \theta_2}{c_2}, \quad (2.13)$$

que indica que las velocidades aparentes horizontales $v_{x1} = \frac{w}{k_{x1}}$, $v_{x2} = \frac{w}{k_{x2}}$ de las ondas incidente y transmitida son iguales, es decir, la ley de Snell es la condición de continuidad en la frontera de separación de ambos medios de la velocidad horizontal aparente de las ondas. Idéntico análisis se puede realizar para el coeficiente de transmisión.

2.1.3 Caso de términos fuentes puntuales: Ondas esféricas y divergencia geométrica

En el caso de un medio homogéneo con término fuente puntual localizada en el punto \mathbf{x}' y actuando en el instante t' , la ecuación de ondas es:

$$\Delta P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (2.14)$$

La solución de dicho problema es (Aki y Richards, 1980):

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{i(k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| - \omega(t-t'))}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}. \quad (2.15)$$

Esta solución aunque recuerda al caso de las ondas planas, es muy diferente dado que aparece el término $\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}$ que motiva que los frentes de ondas en este caso sean esferas de radio $r = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|$. Este radio se incrementa con el tiempo a la velocidad $c = \frac{\omega}{k}$. El término $\frac{1}{r}$ se denomina divergencia geométrica e indica que la energía de la onda por unidad de superficie del frente de ondas decrece según r^2 . Se puede demostrar que la amplitud de la onda es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de energía, con lo cual la amplitud de onda decrece según la proporción $\frac{1}{r}$. Este comportamiento es típico de las ondas compresivas en tres dimensiones (body waves). Esta circunstancia nos da una idea de la dificultad que entraña la búsqueda de hidrocarburos con yacimientos localizados a una profundidad elevada (3-4 Km) o bien el estudio geofísico de la corteza terrestre.

2.1.4 Caso de medios geológicos

En el caso de la propagación de ondas en medios geológicos, parte de la energía de la onda se transforma deformando la roca. Por ello se suele introducir un factor extra de atenuación, Q , que tiene en cuenta dicha disipación. La solución se escribe en este caso:

$$P(\mathbf{x}, t) = -\frac{e^{i(k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| - \omega(t-t'))} e^{-\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|/2cQ}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}. \quad (2.16)$$

Un valor estándar del factor de atenuación suele ser de 5 a 100 en rocas sedimentarias y superior a 200 en rocas compactas.

2.2 La aproximación de tipo rayo y la ecuación Eikonal

Se ha visto que en el caso de las ondas planas, los frentes de ondas son planos cuyo vector asociado es el vector de onda, mientras que en el caso de las ondas esféricas los frentes de ondas son esferas. En ambos casos se puede definir los *rayos sísmicos* como las líneas cuyos vectores directores son perpendiculares en cada punto al frente de ondas. Obviamente se trata de una abstracción geométrica de la propagación del frente de ondas.

Para la modelización de medios no homogéneos (y en particular los medios denominados débilmente heterogéneos) se considera la ecuación de ondas (válida en un dominio sin términos fuentes)

$$\Delta P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.17)$$

en la cual la velocidad de propagación $c(\mathbf{x})$ no es constante sino que depende de la posición \mathbf{x} . De modo intuitivo se puede identificar a los medios débilmente heterogéneos como aquellos en los cuales dicha variación es lenta y gradual. En este caso la solución de la ecuación de ondas puede aproximarse mediante la función

$$P(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega(\tau(\mathbf{x}) - t)}, \quad (2.18)$$

donde $A(\mathbf{x})$ es la amplitud de la onda, función que tiene en cuenta todos los efectos de atenuación comentados, mientras que la función $\tau(\mathbf{x})$ (denominada función Eikonal) tiene en cuenta las distorsiones del frente de ondas. Dicha función indica el tiempo necesario para que la onda se propague desde la fuente hasta el punto \mathbf{x} . En este caso los frentes de ondas son las isolíneas de la función $t = \tau(\mathbf{x})$ y por lo tanto los rayos (sísmicos) de ondas tendrán la dirección de $\nabla \tau(\mathbf{x})$. Se puede demostrar que dicha solución es válida para modelos de velocidades cuya longitud de onda más corta sea al menos 3 veces superior a la longitud de onda del frente de ondas (Bleistein, 1984). Dicho con otras palabras, *la aproximación de tipo rayo es una aproximación de altas*

frecuencias de la ecuación de ondas que suele ser válida en la mayoría de medios geológicos con variaciones graduales de velocidad.

Insertando la solución (2.18) en la ecuación (2.17) se llega a

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, \tau)}{\partial t^2} = -w^2 A(\mathbf{x}) e^{iw(\tau(\mathbf{x})-t)}, \quad (2.19)$$

$$\Delta P(\mathbf{x}, \tau) = \left[\Delta A(\mathbf{x}) - w^2 A(\mathbf{x}) \|\nabla \tau(\mathbf{x})\|^2 + iw(2\nabla A(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot \Delta \tau(\mathbf{x})) \right] e^{iw(\tau(\mathbf{x})-t)}, \quad (2.20)$$

con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \Delta A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) w^2 \left[\frac{1}{c^2} - \|\nabla \tau(\mathbf{x})\|^2 \right] &= 0, \\ 2\nabla A(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot \Delta \tau(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Considerando la parte real de la ecuación anterior se verifica

$$\|\nabla \tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{\Delta A(\mathbf{x})}{w^2 A(\mathbf{x})} + \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}. \quad (2.22)$$

Para el caso de medios débilmente heterogéneos (longitudes de ondas infinitesimales y por lo tanto frecuencias elevadas) es posible adoptar una aproximación de altas frecuencias ($w \rightarrow \infty$), con lo cual se obtiene la expresión

$$\|\nabla \tau(\mathbf{x})\| = \frac{1}{c(\mathbf{x})}, \quad (2.23)$$

que se conoce como *Ecuación Eikonal*, e indica que el gradiente del tiempo de viaje en el punto \mathbf{x} , coincide con la lentitud, $\frac{1}{c(\mathbf{x})}$, del medio en ese punto.

La ecuación referente a la parte imaginaria de la solución (2.21) es una ecuación de transporte dado que (conocida la función Eikonal) describe como varía la amplitud a lo largo del frente de ondas.

Aunque la ecuación Eikonal ha sido presentada en el caso de la propagación de ondas en medios acústicos, también es válida en el caso de propagación de ondas en medios elásticos como se verá en la sección 2.5. Por lo tanto la ecuación Eikonal es

válida para la modelización de las ondas P y de las ondas S, con sólo expresar la lentitud como función de los parámetros elásticos en cada medio.

2.3 La ecuación de trayectorias de rayo (Ray equation)

La ecuación de trayectorias del rayo se deduce de la siguiente manera. Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ la parametrización natural de un rayo. Se tiene

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\nabla \tau(\mathbf{x})}{\|\nabla \tau(\mathbf{x})\|} = \frac{\nabla \tau(\mathbf{x})}{\frac{l}{c(\mathbf{x})}} = c(\mathbf{x}) \nabla \tau(\mathbf{x}), \quad (2.24)$$

es decir

$$\frac{l}{c(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla \tau(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Si se deseara eliminar $\nabla \tau(\mathbf{x})$ de esta ecuación basta derivar con respecto al arco s pues

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{l}{c(\mathbf{x})} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\|\nabla \tau(\mathbf{x})\| \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (A(\mathbf{x})), \quad (2.26)$$

donde

$$\frac{d}{ds} (A(\mathbf{x})) = \left(\frac{dA_x(\mathbf{x})}{ds}, \frac{dA_y(\mathbf{x})}{ds}, \frac{dA_z(\mathbf{x})}{ds} \right) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) A(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{c(\mathbf{x})} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} (\nabla \tau(\mathbf{x})) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) (\nabla \tau(\mathbf{x})) = \\ &= (c(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x}) \cdot \nabla) (\nabla \tau(\mathbf{x})) = \\ &= c(\mathbf{x}) (\nabla \tau(\mathbf{x}) \cdot \nabla) (\nabla \tau(\mathbf{x})) = \\ &= \frac{l}{2} c(\mathbf{x}) \nabla (\|\tau(\mathbf{x})\|^2) = \frac{l}{2} c(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{l}{c^2(\mathbf{x})} \right) = \\ &= \nabla \left(\frac{l}{c(\mathbf{x})} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduciendo el campo de lentitudes $s(\mathbf{x}) = \frac{l}{c(\mathbf{x})}$, se obtiene

$$\frac{d}{ds} \left(s(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla s(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

que se denomina la *Ecuación de Trayectorias*¹.

A partir de la ecuación (2.29) se puede deducir que mientras se permanece en un medio homogéneo de velocidad constante los rayos son rectos y no cambian de dirección, puesto que $\nabla s(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En el momento que se llega a la frontera que separa dos medios homogéneos de diferente lentitud se verifica la ley de Snell.

En 2-D la ecuación de trayectorias puede escribirse en términos del ángulo θ que forma el rayo con la dirección del eje X (Berryman, 1994). Si se escribe $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos \theta, \sin \theta)$, se

llega a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{s(x,y)} \left(\frac{\partial s(x,y)}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial s(x,y)}{\partial x} \sin \theta \right). \quad (2.30)$$

Esta expresión proporciona una ecuación diferencial para el ángulo θ del rayo en función del modelo de lentitudes. Esta ecuación es la base de los algoritmos de trazado de rayos que utilizan métodos de disparo.

¹ En el caso de las ondas electromagnéticas la ecuación de trayectorias se escribe

$$\frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{x}),$$

donde $n(\mathbf{x})$ es el índice de refracción.

2.4 Algoritmos de trazado de rayos

El paso más costoso en los algoritmos sísmicos-tomográficos es el trazado de rayos. Los métodos de trazado de rayos se agrupan en tres categorías:

- Métodos de Disparo (Shooting). Se fundamentan en la ecuación Eikonal o en la Ley de Snell.
- Métodos de Curvado (Bending). Se fundamentan en el principio de Fermat.
- Métodos de resolución de la Ecuación de Ondas.

Métodos de Disparo

Los métodos de disparo aunque son bastante precisos, son computacionalmente caros al necesitar de muchos tiros para determinar la trayectoria del rayo que ajusta el tiempo de viaje observado con la tolerancia deseada. Además cuando el modelo de lentitudes del medio geológico contiene regiones con altos contrastes, suelen aparecer zonas de sombras detrás de regiones lentas y puede resultar difícil o imposible trazar un rayo desde la fuente hasta el receptor. Por lo tanto los métodos de disparo se suelen utilizar cuando los modelos de lentitudes son suaves, y están basados en interpolación bilineales o en aproximaciones con funciones spline del modelo de lentitudes. Estos métodos no son recomendables para el caso de discretizaciones de tipo Lagrange P_0 del modelo de lentitudes (Berryman, 1991).

Uno de los métodos de disparo más utilizado es el método de Vidale (1988), que consiste en una aproximación en diferencias finitas de la ecuación Eikonal. En el método de Vidale las lentitudes del medio se aproximan en los nodos de una malla rectangular utilizando una interpolación bilineal (para medios en 2-D) entre los nodos. Este método utiliza una aproximación mediante ondas planas.

En la figura 2.4.1 se representa una celda de la malla de discretización utilizada. Se supone conocido el tiempo de viaje en el nodo t_0 . Los tiempos de viaje en el resto de nodos t_1 , t_2 y t_3 se obtienen utilizando un desarrollo de Taylor de primer orden para la función $t(x, y)$. Denominando \bar{s} a la lentitud media calculada en dichos nodos y utilizando la ecuación Eikonal, se llega a la fórmula de Vidale

$$t_3 = t_0 + \sqrt{2\bar{s}^2 h^2 - (t_1 - t_2)^2} . \quad (2.31)$$

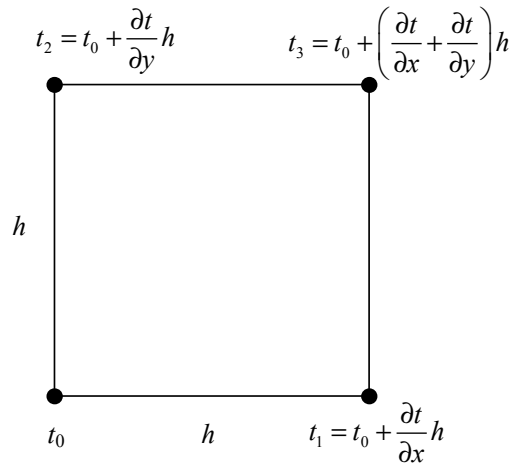


Figura 2.4.1: Esquema de un elemento de la malla utilizado en el método de Vidale.
[Figura adaptada de Berryman, 1991].

Métodos de Curvado

Los métodos de curvado son métodos que permiten un ajuste de los datos menos preciso, por norma general, que los métodos de disparo pero a cambio son menos propensos a fallos de convergencia cuando los modelos presentan contrastes altos.

Estos métodos de curvado comienzan con un camino que conecta la fuente y el receptor (normalmente una línea recta de sondeo a sondeo tomográfico) y utilizando diversos recursos computacionales curvan este camino con el objetivo de reducir el tiempo de viaje del rayo. Como se ha comentado se basan en el principio de Fermat de tiempo mínimo. Normalmente la minimización del tiempo de viaje en función de la trayectoria se lleva a cabo mediante algoritmos de optimización.

Uno de los métodos más utilizado es el método de Prothero, Taylor y Eickemeyer que se comenta brevemente para un modelo en 2-D. Se denota por (x_s, y_s) y (x_r, y_r) a los extremos del rayo. Buscamos el camino de tiempo mínimo entre los dos puntos, el cual puede ser descrito con la función de una variable $y(x)$. Tomaremos $x_s = 0$ y $x_r = L$. Se comienza con un rayo inicial $y_0(x)$ y con el objetivo de curvar el rayo buscamos una perturbación $\delta y_0(x)$, tal que el tiempo de viaje a lo largo del rayo perturbado se reduzca. Tradicionalmente se toma como rayo inicial la línea recta

$$y_0(x) = y_s \left(1 - \frac{x}{L}\right) + y_r \frac{x}{L}. \quad (2.32)$$

El rayo perturbado se modeliza mediante el polinomio trigonométrico de orden G

$$\delta y(x) = \sum_{k=1}^G a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}. \quad (2.33)$$

Normalmente se suele adoptar $G = 2$. Sólo se usan senos para evitar las perturbaciones en los puntos finales del rayo. Los tiempos de viaje vienen dados por

$$t(y(x)) = \int_0^L s(x, y(x)) \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx. \quad (2.34)$$

Prothero, Taylor y Eickemeyer (1988) utilizan el procedimiento de búsqueda de Nelder-Mead (Nelder and Mead, 1965) para encontrar los coeficientes a_k que minimizan el tiempo de viaje.

En general los métodos de curvado son más precisos en mallas groseras, además de tener un menor coste computacional. El método de Vidale no es tan preciso como el método de curvado para regiones lentas. Sin embargo el método de Vidale es más preciso que los métodos de curvado en regiones de altas velocidades, por lo cual suelen utilizarse métodos híbridos. También existen métodos de disparo para medios homogéneos por celdas basados en la ley de Snell, como se ve en la sección 2.7.

2.5 Propagación de ondas en medios elásticos

Aunque este tema no es objeto de la tesis doctoral, se realiza una breve presentación con el objetivo de diferenciar de forma clara el enfoque acústico del enfoque elástico de los medios geológicos. La principal diferencia radica en que la aproximación acústica del problema de propagación de ondas de un medio geológico supone que los efectos de cizalla son despreciables y sólo un efecto compresivo de cambio de volumen (ondas P) es posible. Aunque este modelo es ampliamente utilizado en la exploración geofísica y exploración de hidrocarburos, también se han desarrollado modelos matemáticos más completos que incluyen los efectos de cizalla. Este desarrollo se basa en la teoría de propagación de ondas en medios elásticos. En este caso como solución de la ecuación de ondas, además de las ondas P, aparecen las ondas S o de cizalla y las ondas de superficie.

Experimentalmente se demuestra que la relación entre las fuerzas de cizalla (o de corte) y los desplazamientos que provocan siguen la ley de Hooke (en el caso de elasticidad lineal). La introducción de los tensores de tensiones y desplazamientos junto

a la generalización de la ley de Hooke y la ley de Newton da lugar a la ecuación de ondas en medios elásticos homogéneos e isotrópos. La figura 2.5.1 ilustra el concepto de tensor.

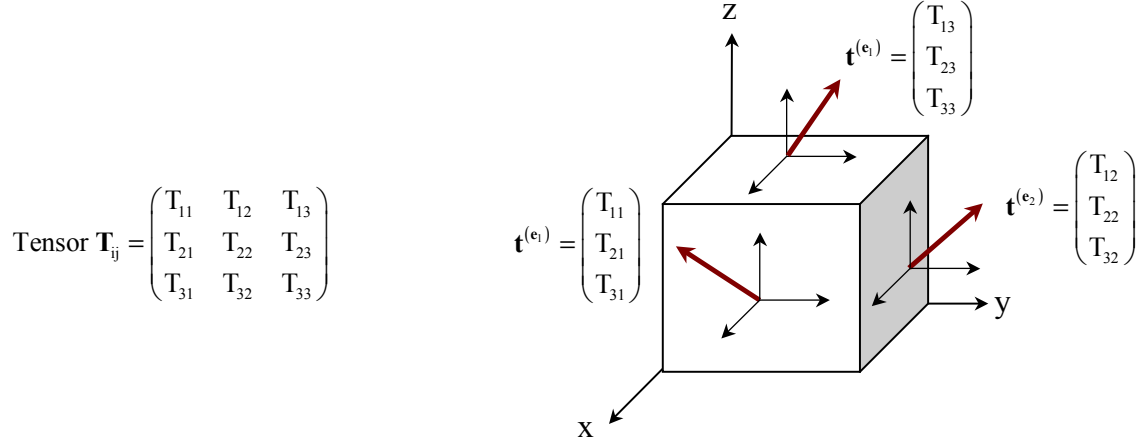


Figura 2.5.1: Representación de las componentes de un tensor.

Para obtener la ecuación de ondas en un medio homogéneo e isotrópico, se parte de la relación entre tensión y desplazamiento:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.35)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, y λ y μ son las constantes de Lamé, que caracterizan en este caso el medio elástico. Teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Cauchy) en ausencia de fuerzas volumétricas:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.36)$$

y sustituyendo la expresión (2.35) en las ecuaciones (2.36) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Teniendo en cuenta que las relaciones entre el tensor infinitesimal de deformación (tensor de Green-Cauchy) y el vector \mathbf{u} de desplazamientos

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.38)$$

se llega a

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \left[\lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.39)$$

con lo cual aplicando la definición de la delta de Kronecker, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.40)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \lambda \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \\ &= (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 u_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dicha relación en notación matricial se escribe:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

y expresada de forma abreviada

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.43)$$

El parámetro de Lamé, μ , es una medida de la rigidez del medio dado que relaciona la tensión con el cambio de forma que experimenta un elemento diferencial de volumen

debido a la acción de las fuerzas de cizalla, por ello también se lo conoce como módulo de cizalla. El parámetro de Lamé, λ , está relacionado con el módulo de compresibilidad k_b , a través de la relación

$$\lambda = \frac{1}{k_b} - \frac{2}{3}\mu, \quad (2.44)$$

es decir, λ está relacionada con efectos de rigidez y efectos de compresibilidad. Teniendo en cuenta la igualdad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.45)$$

podemos expresar la ecuación (2.43) como

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.46)$$

que describe la propagación de las deformaciones en términos de $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{u}$ y de $\Psi = \nabla \times \mathbf{u}$.

Como soluciones de la ecuación anterior aparecen (Slawinski, 2003):

1.- Las ondas P cuya velocidad es $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$.

2.- Las ondas S cuya velocidad es $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

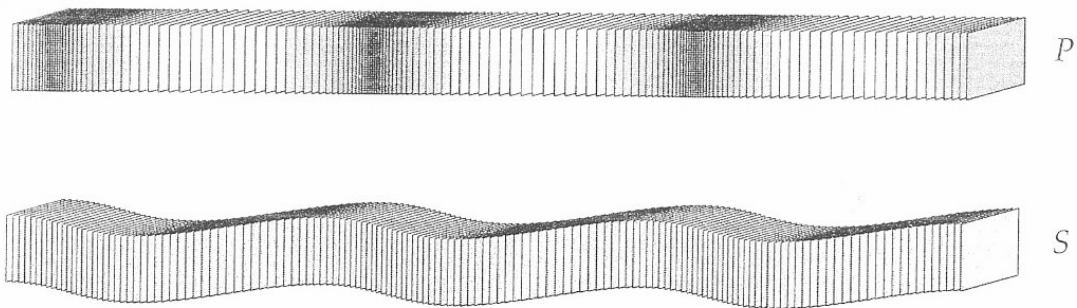


Figura 2.5.2: Ondas elásticas en un medio uniforme. Las ondas P (primarias) son ondas longitudinales comprimiendo y dilatando en la dirección de la propagación. Las ondas S (secundarias) son ondas en las cuales el desplazamiento es transversal a la dirección de propagación.

La velocidad de las ondas P implica a ambos parámetros de Lamé mientras que la velocidad de las ondas S, solo implica al módulo de cizalla. Esto indica intuitivamente que mientras que las ondas P inducen cambios compresivos (volumen) y efectos de cizalla (forma), las ondas S solamente inducen cambios de forma (figura 2.5.2). Además la velocidad de las ondas P es mayor que las ondas S (aproximadamente el doble o incluso superior). Mientras que las ondas P se propagan en la dirección de vibración, las ondas S se propagan perpendicularmente a la velocidad de vibración. En el caso de un medio geológico estratificado existen además dos tipos de ondas S: SH y SV. Las ondas SV vibran paralelamente al plano vertical mientras que las ondas SH vibran paralelamente al plano horizontal o de estratificación y por lo tanto quedan confinadas en el estrato en el que se desplazan.

Las ondas P y las ondas S se denominan ondas de volumen (Body Waves), dado que se propagan en el subsuelo. En el caso de medios geológicos también aparecen las ondas de superficie tales como las ondas Love (figura 2.5.2) que producen un movimiento horizontal de cizalla en superficie, y la ondas Rayleigh (también denominadas ground roll, figura 2.5.3) que se caracterizan por un movimiento elíptico retrogrado. Ambas son más lentas que las ondas S (aproximadamente un 90 % y 70 % respectivamente) (Schuster, 2007).

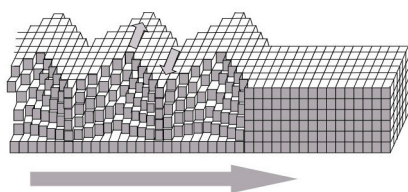


Figura 2.5.3: Onda LOVE.

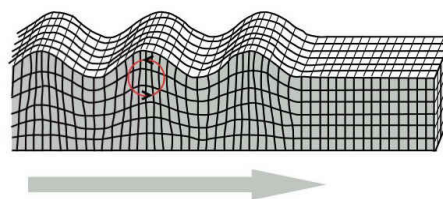


Figura 2.5.4: Onda Rayleigh.

Las ondas de superficie poseen una atenuación por divergencia geométrica mucho menor que las ondas de volumen por lo que sus amplitudes son mucho mayores. Los terremotos generan gran cantidad de ondas de superficie con un enorme poder destructivo. No obstante la amplitud de las ondas Rayleigh decae exponencialmente con la profundidad, atenuándose más rápidamente las que poseen mayor frecuencia. Por esta razón las ondas de superficie en prospección geofísica no suelen ser consideradas dada su reducida capacidad de penetración. Su interés se limita a problemas someros de ingeniería civil.

2.6 Propagación de ondas en medios transversalmente isótropos

La ecuación de ondas vista en la sección anterior se refiere a medios homogéneos, en los cuales las propiedades elásticas no dependen del espacio, e isótropos, es decir, las propiedades no dependen de la dirección. Sin embargo la realidad muestra que los medios geológicos son heterogéneos, por ejemplo un medio estratificado. Una de las formas más comunes de heterogeneidad es la anisotropía. En tomografía sísmica hay que diferenciar entre el concepto de anisotropía acústica, que implica una dependencia angular de la velocidad de propagación de las ondas P y que comúnmente se aproxima mediante los rayos sísmicos, de la anisotropía elástica que se refiere a la dependencia direccional de las propiedades elásticas del medio, y por lo tanto de las velocidades de propagación del medio. Esta tesis doctoral se ha centrado en la primera forma de anisotropía (acústica), al abordar un problema de tomografía acústica en transmisión, y en particular se ha utilizado la anisotropía de tipo elíptico que es la más común. En el apartado 2.7 se presenta, como contribución original de esta tesis doctoral, la generalización de la ley de Snell al caso de medios acústicos con anisotropía de tipo elíptico.

Las causas principales de la anisotropía sísmica en rocas sedimentarias se debe a la presencia de arcillas y a la estructura de finas capas (Wang, 2002). La anisotropía en las arcillas está principalmente influenciada por el contenido de materia orgánica y la interacción de las ondas con los fluidos residentes en los poros (Vernik y Liu, 1997). Desde un punto de vista macroscópico, la anisotropía se produce como resultado de las fracturas (Schoenberg y Sayers, 1995).

En un material elástico cada componente del tensor de tensiones σ_{ij} es linealmente dependiente de las componentes del tensor de desplazamientos ϵ_{kl}

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \text{con } i,j = 1,2,3, \quad (2.47)$$

donde los 81 componentes del tensor de elasticidad C_{ijkl} caracterizan completamente la elasticidad del medio. Debido a las simetrías de los tensores de tensiones ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) y desplazamientos ($\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$), el tensor de elasticidad C_{ijkl} puede ser representado mediante una matriz $C_{\alpha\beta}$ de dimensión 6×6 . La tipología de la matriz $C_{\alpha\beta}$ depende del tipo de simetría que se haya considerado para el medio en cuestión. Por ejemplo en el

caso de un medio isótropo la matriz $C_{\alpha\beta}$ posee sólo dos componentes independientes que están relacionadas con las constantes de Lamé:

$$\begin{aligned}
 C_{33} &= \lambda + 2\mu, \\
 C_{44} &= \mu, \\
 C_{\alpha\beta}^i &= \begin{pmatrix} C_{33} & (C_{33} - 2C_{44}) & (C_{33} - 2C_{44}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{33} & (C_{33} - 2C_{44}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

donde los índices α y β siguen la notación de Voigt para los tensores de tensiones y desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma} &= (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6), \\
 \tilde{\varepsilon} &= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6), \\
 \tilde{\sigma} &= C_{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}.
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

En el caso de medios geológicos, uno de los modelos más empleados es el transversalmente isótropo, es decir aquel en que las propiedades elásticas del medio posee una simetría con respecto a un eje que es perpendicular al plano de isotropía. En el caso de los medios geofísicos dicha dirección coincide con la dirección vertical mientras que los planos de isotropía serían horizontales (obviamente esto suele depender de la dirección de los planos de estratificación). En este tipo de simetría llamada hexagonal o anisotropía de tipo polar, la matriz $C_{\alpha\beta}^{ti}$ tiene la forma:

$$C_{\alpha\beta}^{ti} = \begin{pmatrix} C_{11} & (C_{11} - 2C_{66}) & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde aparecen 5 componentes independientes.

La matriz $C_{\alpha\beta}^i$ es un caso particular de la matriz $C_{\alpha\beta}^{ti}$ si se tienen en cuenta las siguientes correspondencias

$$\begin{aligned}
 C_{11} &\rightarrow C_{33}, \\
 C_{66} &\rightarrow C_{44}, \\
 C_{13} &\rightarrow C_{33} - 2C_{44}.
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

Para este tipo de medios Daley y Hron (1977) expresaron la dependencia direccional de la velocidad de las ondas P, las ondas SH y las ondas SV con respecto al ángulo θ que forman la normal al frente de ondas con el eje vertical y en función de las 5 componentes de la matriz $C_{\alpha\beta}^{ti}$,

$$\begin{aligned}
 \rho v_P^2(\theta) &= \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \text{sen}^2\theta + D(\theta)], \\
 \rho v_{SV}^2(\theta) &= \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \text{sen}^2\theta - D(\theta)], \\
 \rho v_{SH}^2(\theta) &= C_{66} \text{sen}^2\theta + C_{44} \cos^2\theta,
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

donde ρ es la densidad y

$$D(\theta) \equiv \left[\begin{aligned} &(C_{33} - C_{44})^2 + 2 [2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})] \text{sen}^2\theta + \\ &+ [(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2] \text{sen}^4\theta \end{aligned} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.53}$$

Thomsen (1986) introduce 5 nuevos parámetros, con el objetivo de simplificar las fórmulas propuestas por Daley y Horn (2.52):

- 1.- Dos parámetros relacionados con las velocidades acústicas verticales de las ondas P y S respectivamente

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \\
 \beta_0 &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}},
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

- 2.- Tres parámetros de anisotropía

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \\
 \gamma &= \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}, \\
 \delta^* &= \frac{1}{2C_{33}^2} [2(C_{33} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})],
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

cuyos valores son nulos en el caso de un medio isótropo. ξ describe la diferencia entre el coeficiente de elasticidad en la dirección normal al plano Y-Z (C_{11}) y el coeficiente de elasticidad en la dirección normal al plano X-Y (C_{33}), que en el caso de una anisotropía vertical coincidiría con el plano transversal de isotropía. Idénticas consideraciones pueden ser realizadas en caso de γ teniendo en cuenta los coeficientes elásticos entre las tensiones de cizalla σ_{xy} , σ_{yz} y sus desplazamientos respectivos. El parámetro δ^* posee una interpretación más compleja. Utilizando estos parámetros las expresiones (2.52) se reformulan de forma más sencilla

$$\begin{aligned} v_p^2(\theta) &= \alpha_0^2 (1 + \xi \sin^2 \theta + D^*(\theta)), \\ v_{sv}^2(\theta) &= \beta_0^2 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} \xi \sin^2 \theta - \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} D^*(\theta) \right), \\ v_{sh}^2(\theta) &= \beta_0^2 (1 + 2\gamma \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.56)$$

y

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} \right) M(\theta), \quad (2.57)$$

con

$$M(\theta) = \left[1 + \frac{4\delta^*}{\left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} \right)^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{4 \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} + \xi \right) \xi}{\left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} \right)^2} \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.58)$$

Es importante reseñar que en el caso de anisotropía el frente de ondas se deforma y no es esférico, por lo que el ángulo θ difiere del ángulo que forma la línea que une el frente de ondas con el foco emisor (Berryman 1979) (figura 2.6.1).

Thomsen también remarca que en la mayoría de los casos los medios geológicos presentan una anisotropía que denomina de tipo débil dado que el valor de los 3 parámetros de anisotropía es próximo a cero y en general menor que 0.2. Esta hipótesis permite simplificar aún más las expresiones (2.56), linealizando las relaciones que incluyen a los parámetros de anisotropía y llegando a la ecuaciones

$$\begin{aligned}
 v_p(\theta) &= \alpha_0 (1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \xi \sin^4 \theta), \\
 v_{sv}(\theta) &= \beta_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} (\xi - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right), \\
 v_{sh}(\theta) &= \beta_0 (1 + \gamma \sin^2 \theta),
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

y a la simplificación del parámetro δ^* por el parámetro δ .

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \tag{2.60}$$

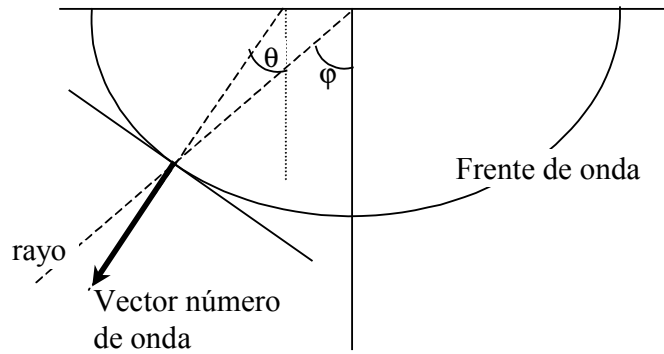


Figura 2.6.1: Definición de ángulo de frente de onda θ y ángulo del rayo φ [Thomsen, 1986].

La figura 2.6.2 muestra las velocidades de las ondas P y S en diferentes medios y con diferentes ángulos de incidencia. Los valores de los parámetros de anisotropía han sido tomados de las tablas que aparecen en el artículo de Thomsen, para diferentes tipos de rocas.

En el caso de una incidencia horizontal $\theta \rightarrow \pi/2$ se verifica

$$v_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \alpha_0 (1 + \xi), \tag{2.61}$$

y dado que α_0 es la velocidad vertical de las ondas P, se tiene que

$$\xi = \frac{v_p\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha_0}{\alpha_0} = \frac{v_p\left(\frac{\pi}{2}\right) - v_p(0)}{v_p(0)}. \tag{2.62}$$

*5H

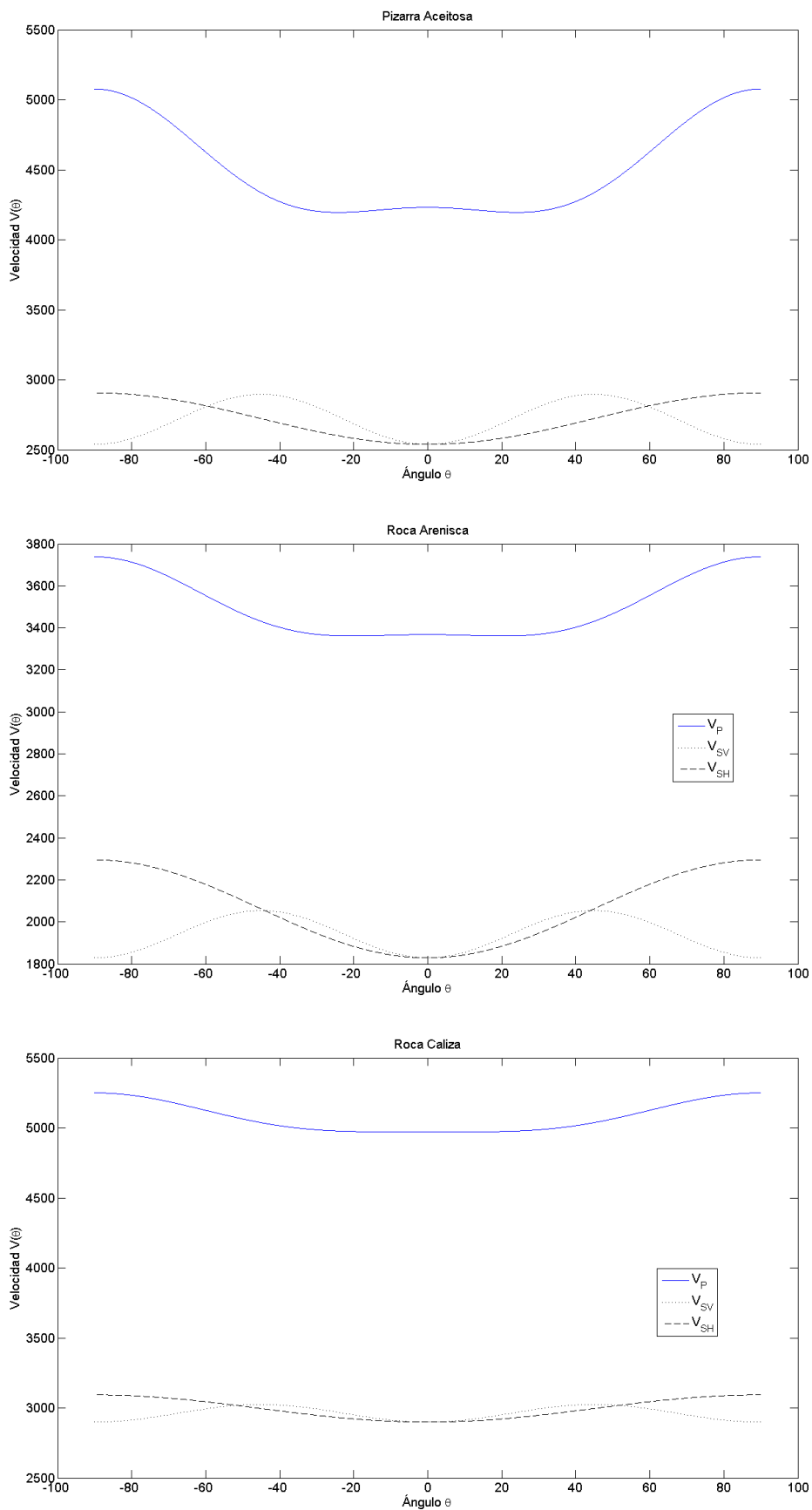


Figura 2.6.2: Velocidades de onda en diferentes medios y con diferentes ángulos de incidencia.

Análogamente se verifica

$$\begin{aligned} v_{SH}\left(\frac{\pi}{2}\right) &\approx \beta_0(1 + \gamma), \\ v_{SV}\left(\frac{\pi}{2}\right) &\approx \beta_0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

con lo cual

$$\gamma = \frac{v_{SH}\left(\frac{\pi}{2}\right) - v_{SV}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{v_{SV}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad (2.64)$$

y

$$4 \frac{v_{SV}\left(\frac{\pi}{4}\right) - v_{SV}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{v_P^2(0)} \cdot v_{SV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \xi - \delta, \quad (2.65)$$

o bien

$$\delta = 4 \left[\frac{v_P\left(\frac{\pi}{4}\right)}{v_P(0)} - 1 \right] - \left[\frac{v_P\left(\frac{\pi}{2}\right)}{v_P(0)} - 1 \right]. \quad (2.66)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las relaciones anteriores, se puede afirmar que el parámetro δ controla la anisotropía de las ondas P con respecto a la dirección vertical, mientras que ξ lo hace con respecto a la horizontal.

En el caso de un medio con anisotropía de tipo elíptico se verifica que $\delta = \xi$. En este caso los frentes de las ondas SV son esféricos. La anisotropía de tipo elíptico es un caso particular de los medios débil y transversalmente isótropos. No obstante Berryman (1979) demuestra que si la anisotropía es causada por finas capas sedimentarias de materiales isótropos, entonces

$$\delta < \xi. \quad (2.67)$$

Finalmente en muchos casos se tiene que el parámetro δ es negativo con lo cual no puede ser igual a ξ que es positivo en la mayoría de los casos.

Por último las figuras 2.6.3 y 2.6.4 muestran la geometría de un frente de ondas para el caso de un medio isótropo, un medio con anisotropía elíptica de parámetros

$\xi = 0.20$ y $\delta = 0.20$ y un medio transversalmente isótropo con parámetros $\varepsilon = 0.20$ y $\delta = -0.20$. Cabe observar que aunque en este último caso el frente de ondas se deforma localmente, el frente de ondas en el caso anisótropo elíptico aproxima mejor el caso transversalmente isótropo que el frente de ondas obtenido en el caso isótropo. Esta es la razón por la que los parámetros de anisotropía que se obtienen a partir de las curvas de los tiempos medios podrán considerarse como una aproximación inicial de la anisotropía de medios elásticos transversalmente isótropos, caso que posee gran interés en exploración de hidrocarburos.

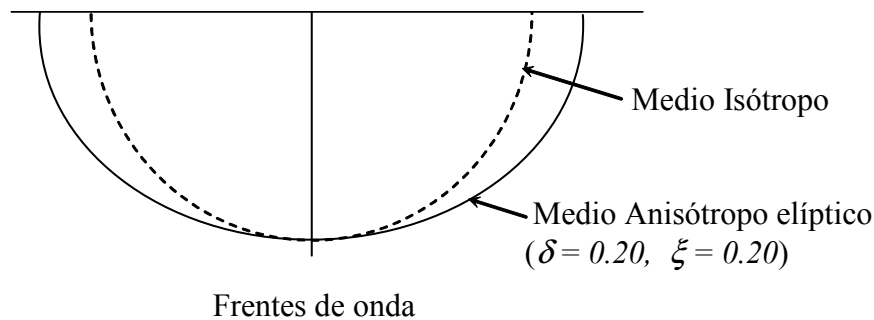


Figura 2.6.3: Frente de onda de un medio con anisotropía elíptica y parámetros $\delta = \xi = 0.20$
[Figura adaptada de Thomsen, 1986].

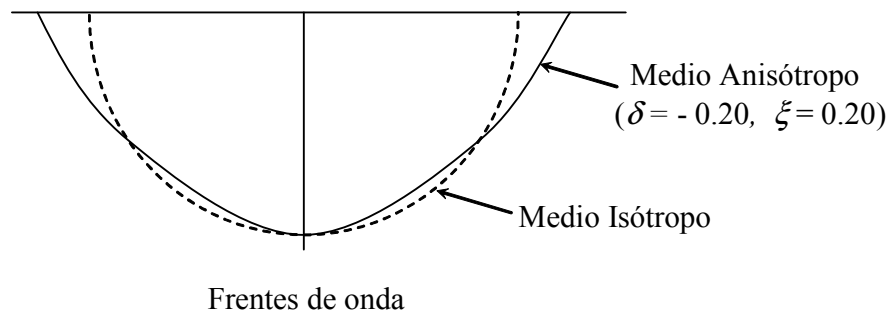


Figura 2.6.4: Frente de onda de un medio transversalmente isótropo con parámetros $\delta = -0.20$ y $\xi = 0.20$ [Figura adaptada de Thomsen, 1986].

2.7 La Ley de Snell. Generalización a medios acústicos con anisotropía de tipo elíptico

Una de las leyes más utilizada en la propagación de ondas en medios acústicos es la ley de Snell cuya demostración se puede hacer de diferentes maneras. En la sección 2.1.2 donde se trató sobre la propagación en medios zonalmente homogéneos se dedujo la ley de Snell como una consecuencia de la continuidad de las velocidades aparentes horizontales en la frontera de separación de dos medios con diferentes impedancias acústicas. En la sección 2.2 referente al estudio de la ecuación Eikonal y la ecuación de trayectorias la ley de Snell se dedujo como un caso particular de dichas ecuaciones.

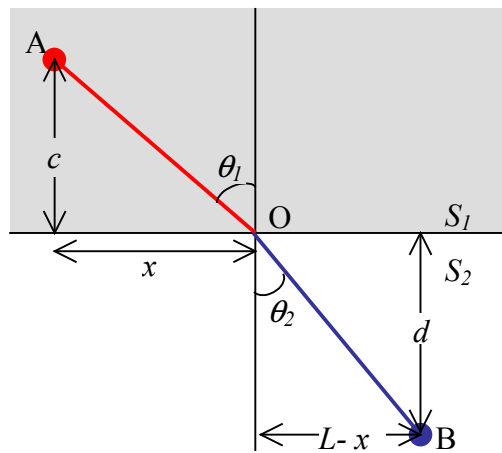


Figura 2.7.1: Ley de Snell. Consecuencia del principio de Fermat.

La manera más sencilla de deducción de la ley de Snell es como consecuencia del principio variacional de Fermat que implica que los rayos sísmicos siguen una trayectoria de tiempo mínimo. Se trata de un problema simple de cálculo diferencial, que ilustramos dado que se utiliza con posterioridad una estrategia similar en la deducción y generalización de la ley de Snell para medios zonalmente homogéneos con anisotropía elíptica. Consideremos un medio constituido por dos regiones de lentitudes constantes s_1, s_2 , separadas por una frontera plana y un rayo conectando dos puntos A y B, situados a cada lado de la frontera (figura 2.7.1). El tiempo que tarda un rayo en ir de la fuente A hasta el receptor B es

$$t(x) = \overline{AO} \cdot s_1 + \overline{OB} \cdot s_2 = \left(\sqrt{c^2 + x^2} \right) \cdot s_1 + \left(\sqrt{d^2 + (L-x)^2} \right) \cdot s_2. \quad (2.68)$$

Como se ha comentado, el camino de Fermat minimiza el tiempo de viaje, con lo cual debe verificarse:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x \cdot s_1}{\left(\sqrt{c^2 + x^2}\right)} + \frac{-(L-x) \cdot s_2}{\left(\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right)} = 0, \quad (2.69)$$

y por lo tanto

$$s_1 \cdot \text{sen} \theta_1 = s_2 \cdot \text{sen} \theta_2. \quad (2.70)$$

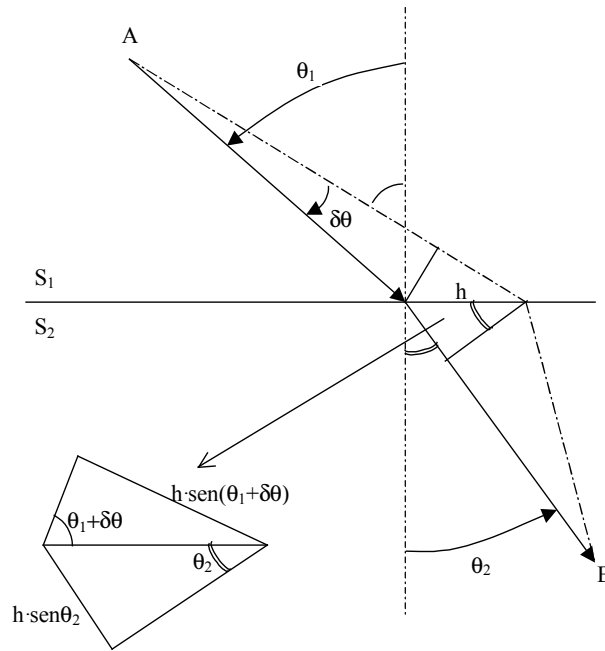


Figura 2.7.2: Ley de Snell. Estacionariedad de los caminos de Fermat
[Figura adaptada de Berryman, 1991].

Un aspecto quizás menos conocido de la ley de Snell es que garantiza la estacionariedad de los caminos de Fermat, es decir, “pequeñas” perturbaciones en el modelo de lentitudes originan una pequeña perturbación en el camino de Fermat P^* y por lo tanto en el tiempo de viaje asociado, dicho de otro modo, el funcional de tiempos de viaje $\tau(s)$ es estable. La demostración empleando simples argumentos geométricos es la siguiente (figura 2.7.2): la línea continua denota el camino de Fermat, mientras que la línea discontinua el rayo perturbado. Sean θ_1 y θ_2 los ángulos que forma el camino estacionario con respecto a la normal a la frontera de separación de ambos medios en el punto de incidencia. Denominando h a la distancia entre los dos puntos de intersección con la frontera del rayo original y del rayo perturbado, se observa que en la región 1 el segmento perturbado es $h \cdot \text{sen}(\theta_1 + \delta\theta)$ más largo que el camino estacionario, mientras que en la región 2 el segmento perturbado es $h \cdot \text{sen} \theta_2$ más corto que éste, por lo que la diferencia de tiempos a lo largo de uno u otro camino viene dada por

$$\Delta t = (s_1 \text{sen} \theta_1 - s_2 \text{sen} \theta_2) h, \quad (2.71)$$

donde se han despreciado infinitésimos de orden superior a $\delta\theta$. Imponiendo que $\Delta t = 0$ se llega a la Ley de Snell, para un medio zonalmente homogéneo e isotrópico.

2.7.1 Generalización a medios zonalmente homogéneos con anisotropía elíptica

Podemos plantearnos como se podría generalizar la ley de Snell al caso de medios elípticamente anisótropos, y cual sería, si existe, su expresión analítica. El objetivo es la generalización de un algoritmo de trazado de rayos basado en la ley de Snell a medios con anisotropía elíptica (figura 2.7.3). Además cabe reseñar que los parámetros de la anisotropía pueden ser inicialmente inferidos a partir de las curvas de tiempos medios desarrolladas en los artículos que componen el núcleo de esta tesis doctoral.

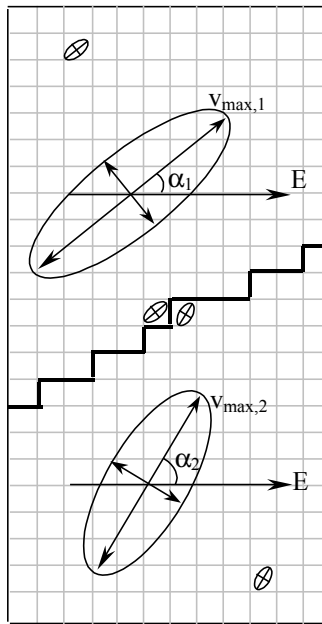


Figura 2.7.3: Medio que presenta una anisotropía elíptica zonal.

En este caso consideramos, igualmente, un medio con dos regiones separadas por una frontera plana y un rayo conectando dos puntos A y B, situados a cada lado de la frontera (figura 2.7.1). Se considera cada uno de los medios homogéneo y elípticamente anisótropo caracterizado por una terna de parámetros $(V_{\max_i}, \alpha_i, \lambda_i)_{i=1,2}$. En cada uno de los medios V_{\max_i} es la velocidad máxima de propagación, α_i es la dirección de

anisotropía y $\lambda_1 = \frac{V_{\min_i}}{V_{\max_i}}$ el ratio de anisotropía. Bajo esta definición el caso isótropo se corresponde con $\lambda = 1$. Además la mayoría de los casos de interés geofísico presentan una anisotropía débil con un ratio de anisotropía en el intervalo (0.9, 1).

En cada uno de los medios, denotando como $v_\beta = (v_{\beta x}, v_{\beta y})$, a la velocidad de propagación en la dirección que forma un ángulo β con respecto a la dirección de velocidad máxima (α) se la puede expresar como (figura 2.7.4)

$$\frac{v_{\beta x}^2}{V_{\max}^2} + \frac{v_{\beta y}^2}{V_{\min}^2} = 1, \quad (2.72)$$

y puesto que

$$\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}, \quad (2.73)$$

podemos expresar v_β en términos de los parámetros de anisotropía

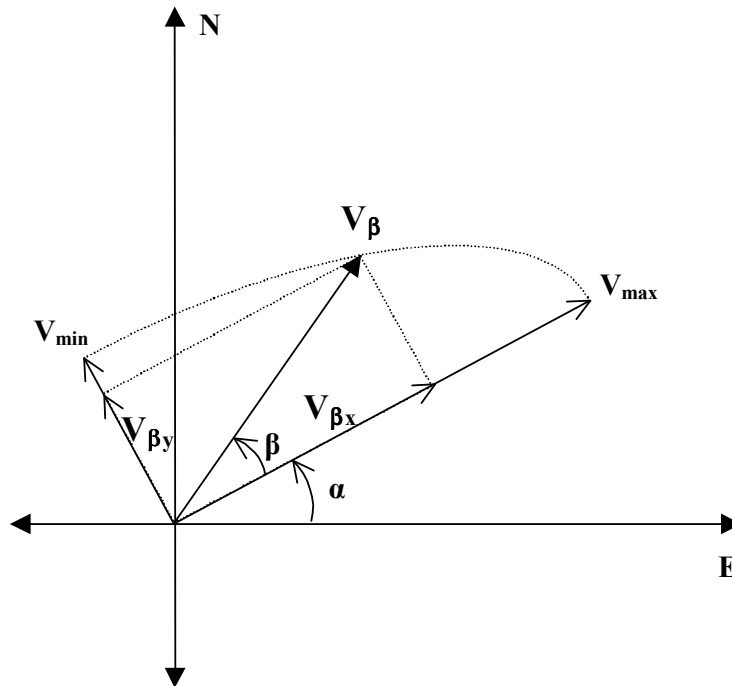


Figura 2.7.4: Variables implicadas en un caso de anisotropía elíptica.

$$v_\beta = a_{\lambda\beta} V_{\max} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \frac{\tan^2 \beta}{\lambda^2}}} V_{\max}. \quad (2.74)$$

El tiempo que tarda un rayo en ir de la fuente A hasta el receptor B es

$$t(x) = \overline{AO} \cdot s_1 + \overline{OB} \cdot s_2 = \frac{\left(\sqrt{c^2 + x^2}\right)}{V_{\theta_1}} + \frac{\left(\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right)}{V_{\theta_2}}. \quad (2.75)$$

Como se ha comentado, el camino de Fermat minimiza el tiempo de viaje, con lo cual debe verificarse

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0, \quad (2.76)$$

condición que en medios isótropos nos conduce a la conocida ley de Snell (2.70). Veamos a que nos conduce esta condición aplicada a la ecuación (2.75).

Si denominamos

$$t_1(x) = \frac{\sqrt{c^2 + x^2}}{V_{\theta_1}}, \quad (2.77)$$

$$t_2(x) = \frac{\left(\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right)}{V_{\theta_2}}, \quad (2.78)$$

entonces

$$t(x) = t_1(x) + t_2(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx}(x) = \frac{dt_1}{dx}(x) + \frac{dt_2}{dx}(x). \quad (2.79)$$

Comenzamos hallando la derivada de la expresión (2.77)

$$\frac{dt_1}{dx}(x) = \frac{V_{\theta_1} \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} - \sqrt{c^2 + x^2} \frac{dV_{\theta_1}}{dx}}{V_{\theta_1}^2} = \frac{V_{\theta_1} \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \frac{dV_{\theta_1}}{dx}}{V_{\theta_1}^2}, \quad (2.80)$$

y puesto que

$$V_{\theta_1} = a_1 V_{1\max}, \quad (2.81)$$

donde

$$a_1 = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1}}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1}{\lambda_1^2}}}, \quad (2.82)$$

tendremos que

$$\frac{dV_{\theta_1}}{dx} = V_{1\max} \frac{da_1}{dx}. \quad (2.83)$$

Resulta por lo tanto necesario hallar

$$\frac{da_1}{dx} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1}{\lambda_1^2}}}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \beta_1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1}{\lambda_1^2}\right) - (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\lambda_1^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1}{\lambda_1^2}\right)^2} \cdot \frac{d\beta_1}{dx}, \quad (2.84)$$

que también podemos expresar como

$$\frac{da_1}{dx} = \left(\operatorname{tg} \beta_1 \cdot a_1 - a_1^3 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\lambda_1^2} \right) \cdot \frac{d\beta_1}{dx} = \left(\operatorname{tg} \beta_1 \cdot a_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right) \right) \cdot \frac{d\beta_1}{dx}. \quad (2.85)$$

Además puesto que (figura 2.7.5)

$$\beta_1 = \theta_1 + 90^\circ - \alpha_1, \quad (2.86)$$

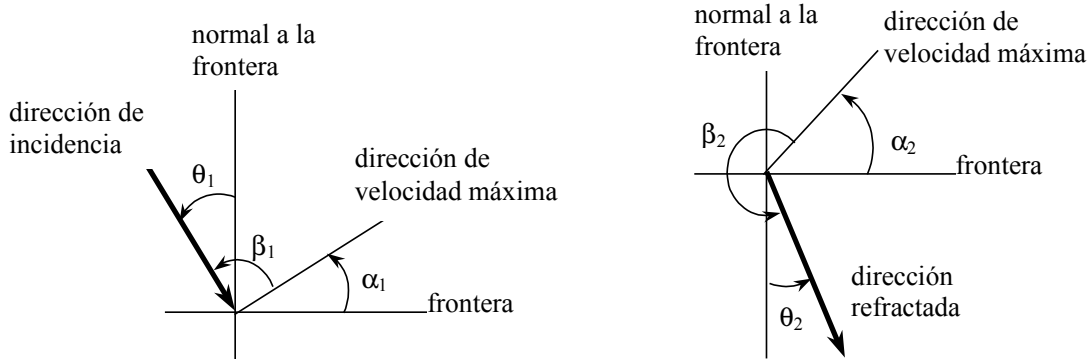


Figura 2.7.5: Relación entre los ángulos implicados en un caso de refracción entre dos medios que presentan anisotropía elíptica.

se tiene

$$\frac{d\beta_1}{dx} = \frac{d\theta_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + c^2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + c^2}}}{x^2 + c^2}, \quad (2.87)$$

que se puede simplificar

$$\frac{d\beta_1}{dx} = \frac{d\theta_1}{dx} = \frac{c}{x^2 + c^2}. \quad (2.88)$$

Por lo tanto uniendo lo anteriormente expuesto podemos retomar la expresión (2.81)

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{V_{\theta_1} \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \frac{dV_{\theta_1}}{dx}}{V_{\theta_1}^2} = \frac{V_{\theta_1} \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \cdot \frac{da_1}{dx} \cdot V_{1\max}}{V_{\theta_1}^2}, \quad (2.89)$$

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{V_{\theta_1} \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \cdot \left(\operatorname{tg}\beta_1 \cdot a_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right) \right) \cdot \frac{d\beta_1}{dx} \cdot V_{1\max}}{V_{\theta_1}^2}, \quad (2.90)$$

concluyendo esta primera parte en

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_{\theta_1}} - \frac{\operatorname{cos}\theta_1}{V_{\theta_1}} \operatorname{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right). \quad (2.91)$$

Hallemos ahora la derivada de la expresión (2.78)

$$\frac{dt_2}{dx} = \frac{V_{\theta_2} \frac{-2(L-x)}{2\sqrt{(L-x)^2 + d^2}} - \sqrt{(L-x)^2 + d^2} \frac{dV_{\theta_2}}{dx}}{V_{\theta_2}^2}, \quad (2.92)$$

siendo ahora de forma similar a (2.81)

$$V_{\theta_2} = a_2 V_{2\max}, \quad (2.93)$$

donde

$$a_2 = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_2}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2}{\lambda_2^2}}}. \quad (2.94)$$

Tendremos que

$$\frac{dV_{\theta_2}}{dx} = V_{2\max} \frac{da_2}{dx}, \quad (2.95)$$

resultando necesario hallar $\frac{da_2}{dx}$, que también podemos expresar como

$$\frac{da_2}{dx} = \left(\operatorname{tg} \beta_2 \cdot a_2 - a_2^3 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\lambda_2^2} \right) \cdot \frac{d\beta_2}{dx} = \left(\operatorname{tg} \beta_2 \cdot a_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right) \cdot \frac{d\beta_2}{dx}. \quad (2.96)$$

Por lo tanto

$$\frac{dV_{\theta_2}}{dx} = \frac{da_2}{dx} V_{2\max} = \left(\operatorname{tg} \beta_2 \cdot a_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right) \cdot \frac{d\beta_2}{dx} \cdot V_{2\max}. \quad (2.97)$$

Además puesto que (figura 2.7.5)

$$\beta_2 = (\theta_2 + 270^\circ - \alpha_2), \quad (2.98)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_2}{dx} &= \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arcsen} \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(L-x)^2}{(L-x)^2 + d^2}}} \cdot \frac{-\sqrt{(L-x)^2 + d^2} - (L-x) \cdot \frac{-2(L-x)}{2\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}}{(L-x)^2 + d^2}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

que se puede simplificar

$$\frac{d\beta_2}{dx} = \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{-d}{(L-x)^2 + d^2}. \quad (2.100)$$

Por lo que la expresión (2.92) se puede escribir ahora

$$\begin{aligned} \frac{dt_2}{dx} &= \frac{V_{\theta_2} \cdot (-\operatorname{sen} \theta_2) - \sqrt{(L-x)^2 + d^2} \cdot \frac{dV_{\theta_2}}{dx}}{V_{\theta_2}^2} = \\ &= \frac{-V_{\theta_2} \operatorname{sen} \theta_1 - \sqrt{(L-x)^2 + d^2} \cdot \frac{da_2}{dx} \cdot V_{2\max}}{V_{\theta_2}^2}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\frac{dt_2}{dx} = \frac{-V_{\theta_2} \operatorname{sen} \theta_2 + \sqrt{(L-x)^2 + d^2} \cdot \left(\operatorname{tg} \beta_2 \cdot a_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right) \cdot \frac{d\beta_2}{dx} \cdot V_{2\max}}{V_{\theta_2}^2}, \quad (2.102)$$

concluyendo esta segunda parte con

$$\frac{dt_2}{dx}(x) = \frac{-\operatorname{sen} \theta_2}{V_{\theta_2}} + \frac{\operatorname{cos} \theta_2}{V_{\theta_2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right). \quad (2.103)$$

Teniendo en cuenta (2.79), (2.91) y (2.103), se tiene

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{V_{\theta_1}} - \frac{\operatorname{cos} \theta_1}{V_{\theta_1}} \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right) \right) + \left(\frac{-\operatorname{sen} \theta_2}{V_{\theta_2}} + \frac{\operatorname{cos} \theta_2}{V_{\theta_2}} \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right), \quad (2.104)$$

y como

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{V_{\theta_1}} - \frac{\operatorname{cos} \theta_1}{V_{\theta_1}} \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right) \right) &= \left(\frac{\operatorname{sen} \theta_2}{V_{\theta_2}} - \frac{\operatorname{cos} \theta_2}{V_{\theta_2}} \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.105)$$

que es equivalente a

$$\frac{V_{\theta_1}}{V_{\theta_2}} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1 - \operatorname{cos} \theta_1 \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right)}{\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{cos} \theta_2 \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right)}. \quad (2.106)$$

A la expresión (2.106) la denominaremos **LEY DE SNELL GENERALIZADA** en un medio con anisotropía acústica de tipo elíptico. Es inmediato comprobar que si el medio es isótropo entonces $a_1 = a_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y por lo tanto la expresión anterior se reduce a la ley de Snell en medios isótropos.

Cuando se utiliza esta generalización en los programas de trazado de rayos, el cálculo de θ_2 , se realiza numéricamente. Se verifica

$$V_{\theta_2} = \frac{V_{\theta_1} \cdot \left(\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right)}{\text{sen}\theta_1 - \text{cos}\theta_1 \text{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right)}. \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta que K es una constante

$$K = \frac{V_{\theta_1}}{\text{sen}\theta_1 - \text{cos}\theta_1 \text{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2} \right)}, \quad (2.108)$$

se puede expresar lo anterior como

$$a_2 V_{2\text{max}} = K \cdot \left(\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right). \quad (2.109)$$

En dicha ecuación $V_{2\text{max}}$, λ_2 , α_2 y K son conocidos, y se trata de hallar θ_2 tal que

$$f(\theta_2) = a_2 V_{2\text{max}} - K \cdot \left(\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right) = 0,$$

sabiendo que (figura 2.7.5)

$$\beta_2 = (\theta_2 + 270^\circ - \alpha_2), \quad (2.110)$$

y que a_2 depende de β_2 según la formula ya indicada en (2.94).

La estimación del ángulo θ_2 se realiza sin excesiva dificultad mediante un sencillo algoritmo de bisección que admite una única solución para la onda transmitida, es decir, $\theta_2 \in (-90^\circ, 90^\circ)$. La figura 2.7.6 muestra el caso de dos medios donde los parámetros utilizados han sido

$$\alpha_1 = 60^\circ, \lambda_1 = 0.90, V_{\text{max}_1} = 5.2, \text{ y } \alpha_2 = 40^\circ, \lambda_2 = 0.95, V_{\text{max}_2} = 5.5.$$

En este caso el rayo incidente forma un ángulo de $\beta_1 = 15^\circ$ con respecto al eje de máxima velocidad en el medio 1, es decir un ángulo de $\theta_1 = -15^\circ$, con respecto a la

normal a la frontera de separación de ambos medios. El camino de Fermat corresponde a un ángulo de aproximadamente $\theta_2 \simeq -15.07^\circ$ con respecto a dicha normal.

2.7.2 Medios con un modelo de velocidades mixto

Cabe incluso plantearse si se podría generalizar la ley de Snell al caso de medios con un modelo de velocidades compuesto de una componente isótropa y otra elípticamente anisótropa y cual sería, si existiera, la relación entre sus parámetros (figura 2.7.7). Esta situación modelaría medios donde la velocidad isótropa correspondería a una velocidad media de la matriz rocosa y la componente anisótropa a modificaciones del modelo de velocidades debido a microfallas, intrusiones, laminaciones, etc. De forma similar al caso anteriormente desarrollado, se considera un medio con dos regiones separadas por una frontera plana y un rayo conectando dos puntos A y B, situados a cada lado de la frontera (figura 2.7.1). Cada uno de los medios, en esta ocasión está caracterizado por una cuaterna de parámetros $(v_i, V_{\max_i}, \alpha_i, \lambda_i)_{i=1,2}$, donde respectivamente v_i es la velocidad isótropa, V_{\max_i} es la velocidad máxima de propagación de la componente anisótropa, α_i es la dirección de anisotropía y $\lambda_i = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$ el ratio de anisotropía, en cada uno de los medios. Este planteamiento engloba el caso isótropo ($\lambda = 1$) y el caso puramente anisótropo ($v = 0$).

El tiempo empleado por un rayo en ir desde el emisor A hasta el receptor B será

$$t(x) = \overline{AO} \cdot s_1 + \overline{OB} \cdot s_2 = \frac{(\sqrt{c^2 + x^2})}{v_1 + V_{\theta_1}} + \frac{(\sqrt{d^2 + (L-x)^2})}{v_2 + V_{\theta_2}}. \quad (2.111)$$

Puesto que el camino de Fermat minimiza el tiempo de viaje, se verifica

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0, \quad (2.112)$$

Si denominamos

$$t_1(x) = \frac{\sqrt{c^2 + x^2}}{v_1 + V_{\theta_1}}, \quad (2.113)$$

$$t_2(x) = \frac{\left(\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right)}{v_2 + V_{\theta_2}}, \quad (2.114)$$

y como

$$\frac{dt_1}{dx}(x) = \frac{\left(v_1 + V_{\theta_1}\right) \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \frac{dV_{\theta_1}}{dx}}{\left(v_1 + V_{\theta_1}\right)^2}, \quad (2.115)$$

que de forma similar a lo expuesto en la sección anterior se puede expresar como

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{\left(v_1 + V_{\theta_1}\right) \operatorname{sen}\theta_1 - \sqrt{c^2 + x^2} \cdot \left(\operatorname{tg}\beta_1 \cdot a_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right)\right) \cdot \frac{d\beta_1}{dx} \cdot V_{1\max}}{\left(v_1 + V_{\theta_1}\right)^2}, \quad (2.116)$$

es decir

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1 + V_{\theta_1}} - \frac{\operatorname{cos}\theta_1}{v_1 + V_{\theta_1}} \operatorname{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right). \quad (2.117)$$

De manera similar se obtiene que la derivada de la expresión (2.114) es

$$\frac{dt_2}{dx}(x) = \frac{-\operatorname{sen}\theta_2}{v_2 + V_{\theta_2}} + \frac{\operatorname{cos}\theta_2}{v_2 + V_{\theta_2}} \operatorname{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right). \quad (2.118)$$

Por lo tanto teniendo en cuenta (2.117), (2.118) y como

$$\begin{aligned} & \frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1 + V_{\theta_1}} - \frac{\operatorname{cos}\theta_1}{v_1 + V_{\theta_1}} \operatorname{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right) \right) = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2 + V_{\theta_2}} - \frac{\operatorname{cos}\theta_2}{v_2 + V_{\theta_2}} \operatorname{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right) \right), \end{aligned} \quad (2.119)$$

se concluye que

$$\frac{v_1 + V_{\theta_1}}{v_2 + V_{\theta_2}} = \frac{\text{sen}\theta_1 - \text{cos}\theta_1 \text{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right)}{\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right)}, \quad (2.120)$$

Si el medio es isótropo entonces $a_1 = a_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y por lo tanto la expresión anterior se reduce a la ley de Snell para dos medios con velocidades respectivas $v_1 + V_1$ y $v_2 + V_2$. En el caso en que $v_1 = v_2 = 0$ se obtiene la ley de Snell para medios anisótropos vista en el apartado anterior.

Como ya se ha comentado anteriormente, en los programas de trazado de rayos, el cálculo de θ_2 , se hace numéricamente. Puesto que

$$v_2 + V_{\theta_2} = \frac{\left(v_1 + V_{\theta_1}\right) \cdot \left(\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right)\right)}{\text{sen}\theta_1 - \text{cos}\theta_1 \text{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right)}, \quad (2.121)$$

y denominando K a la constante

$$K = \frac{v_1 + V_{\theta_1}}{\text{sen}\theta_1 - \text{cos}\theta_1 \text{tg}\beta_1 \cdot \left(1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}\right)}, \quad (2.122)$$

se trata de hallar θ_2 tal que

$$f(\theta_2) = v_2 + a_2 V_{2\text{max}} - K \cdot \left(\text{sen}\theta_2 - \text{cos}\theta_2 \text{tg}\beta_2 \cdot \left(1 - \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right)\right) = 0,$$

donde v_2 , $V_{2\text{max}}$, λ_2 , α_2 y K son conocidos, $\beta_2 = (\theta_2 + 270^\circ - \alpha_2)$ y $a_2(\beta_2)$.

También se incluye en la figura 2.7.6 el resultado de la simulación realizada para la estimación del ángulo θ_2 del rayo refractado, con respecto a la normal de la frontera, entre dos medios mixtos con parámetros:

$$\alpha_1 = 60^\circ, \lambda_1 = 0.90, V_{\text{max}_1} = 5.2, v_1 = 1.5 \text{ y } \alpha_2 = 40^\circ, \lambda_2 = 0.95, V_{\text{max}_2} = 5.5, v_2 = 2.$$

En este caso el rayo incidente forma un ángulo de $\beta_1 = 15^\circ$ con respecto al eje de máxima velocidad en el medio 1, es decir un ángulo de $\theta_1 = -15^\circ$, con respecto a la normal a la frontera de separación de ambos medios. El camino de Fermat corresponde a un ángulo de aproximadamente $\theta_2 \simeq -15.82^\circ$ con respecto a dicha normal.

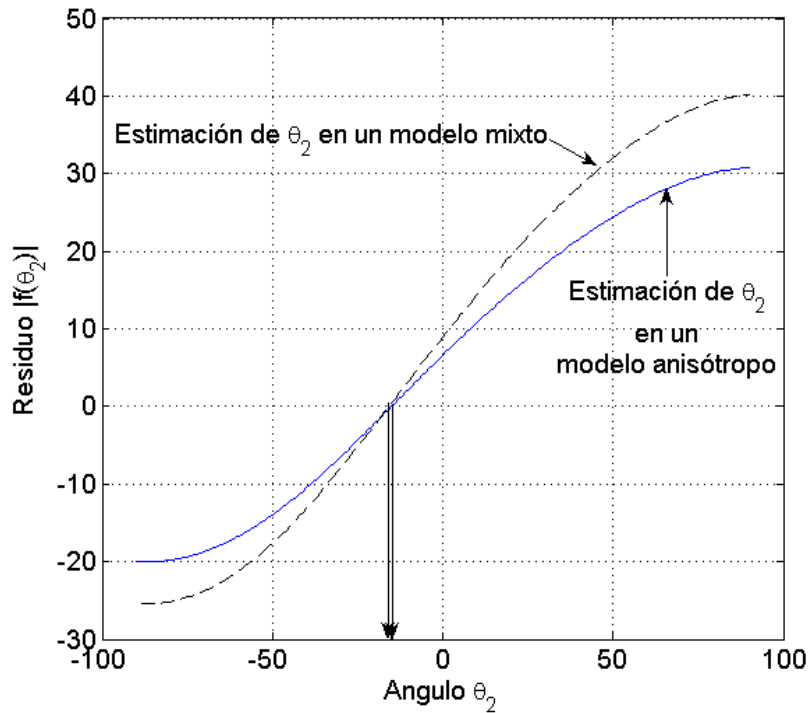


Figura 2.7.6: Simulación numérica para la estimación del ángulo refractado, θ_2 en la frontera de dos medios: La grafica en línea continua corresponde a medios con anisotropía elíptica $\alpha_1 = 60^\circ$, $\lambda_1 = 0.90$, $V_{\max_1} = 5.2$ y $\alpha_2 = 40^\circ$, $\lambda_2 = 0.95$, $V_{\max_2} = 5.5$. La línea discontinua corresponde a dos medios mixtos con parámetros: $\alpha_1 = 60^\circ$, $\lambda_1 = 0.90$, $V_{\max_1} = 5.2$, $v_1 = 1.5$ y $\alpha_2 = 40^\circ$, $\lambda_2 = 0.95$, $V_{\max_2} = 5.5$, $v_2 = 2$.

La generalización de la ley de Snell a medios con una componente isótropa y otra anisótropa permite realizar la inversión tomográfica con un modelo anisótropo inicial deducido mediante las curvas de tiempos medios e incorporar una componente isótropa discreta por celdas con el objetivo de mejorar el ajuste de los tiempos observados, (figura 2.7.7), siempre y cuando la introducción de dicho modelo se justifique geológicamente.

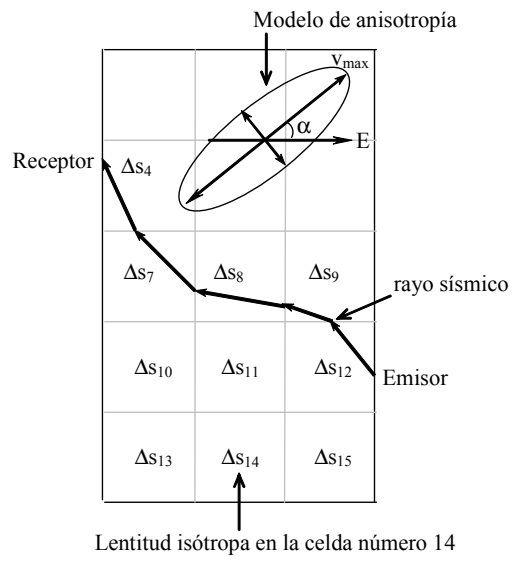


Figura 2.7.7: Variables implicadas en un caso mixto de velocidades isotrópica y anisótropa.

Capítulo 3: PROBLEMAS INVERSOS LINEALES Y TÉCNICAS DE MÍNIMOS CUADRADOS

“Tan útil, fundamental y aplicable como el cálculo. Su sencillez es demasiado valiosa como para ser sacrificada. Muchos luchan con la abstracción y nunca ven la aplicación.”

Gilbert Strang.

En este capítulo se presentan los problemas inversos lineales y su resolución mediante técnicas de mínimos cuadrados y algoritmos de reconstrucción algebraica que provienen de la ingeniería biomédica, mediante conceptos del álgebra lineal. Se presta una atención especial a los mínimos cuadrados sopesados (redefinición del producto escalar) y con regularización. Finalmente se presenta el análisis de incertidumbre de la solución de los problemas inversos lineales.

3.1 Problemas inversos. Definiciones

Se define como problema inverso (Mosegaard y Tarantola, 1995) la teoría matemática que describe cómo puede derivarse información sobre un sistema físico S a partir de:

- Un conjunto de datos observables \mathbf{d} (u observados),
- Un conjunto de relaciones teóricas F (modelos físico-matemáticos) entre los parámetros del sistema que se desean inferir (parámetros del modelo, \mathbf{m}) y los datos observables $\mathbf{d} = F(\mathbf{m})$,
- Información a priori sobre los parámetros del modelo, \mathbf{m}_{ref} ,

definición genérica que ampara la posibilidad de utilizar diversos procedimientos para abordar dicho tipo de problemas, y que por lo tanto conducirán a obtener diferentes tipos de soluciones. Por lo tanto, para plantear un problema inverso hay que establecer básicamente los siguientes elementos:

Un conjunto de modelos S

Formado por los elementos matemáticos -conjunto de funciones, de vectores, etc... que, en teoría, describen el sistema físico objeto de estudio. En el caso del problema sísmico-tomográfico en transmisión se utilizan los modelos de lentitudes $s(\mathbf{x})$ del medio geológico.

Un conjunto de datos D

Formado por las medidas realizadas \mathbf{d} , así como por las predicciones \mathbf{d}^* obtenidas al resolver el problema directo a partir del modelo matemático F (problema de predicción): $\mathbf{d}^* = F(\mathbf{m}_{\text{est}})$. En el problema sísmico-tomográfico en transmisión \mathbf{d} será un conjunto de tiempos de viaje entre m parejas de emisores y receptores situados en la frontera del dominio objeto de estudio.

Una estructura para los conjuntos de modelos S y de datos D

La construcción de normas, distancias, y productos escalares, convierte a S y D en espacios normados, lo que permite medir la distancia entre elementos de dichos

conjuntos y determinar el tamaño (norma) de dichos elementos. Como además, en general será necesario realizar proyecciones (ortogonales), es habitual conferir a S y D de una estructura de espacio euclídeo.

La ley de comportamiento del problema

Se concreta en una expresión teórica o modelo matemático F que permita calcular las predicciones de datos observables asociados a cada uno de los modelos presentes en el conjunto S elegido. El proceso de cálculo de dichas predicciones, para cada modelo, utilizando esta expresión teórica se denomina resolver el problema directo. Por lo tanto, existe un funcional

$$F : S \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

que aplica el conjunto S de los modelos sobre el conjunto de datos observados D .

El problema inverso y la información a priori

El problema inverso se plantea de forma sencilla como:

$$F(\mathbf{m}) = \mathbf{d} \quad (3.2)$$

es decir, obtenido $\mathbf{d} \in D$ mediante medidas de campo y “conocido” F , determinar el modelo \mathbf{m} que satisface la ecuación (3.2).

Las dificultades que presenta el anterior planteamiento del problema inverso son que generalmente F es una formulación simplificada y teórica de un proceso físico (y, por lo tanto, no ajustado completamente a la realidad) y además es inevitable que los datos observados estén afectados por ruidos de medida, por todo ello se ha de entender el planteamiento (3.2) de la forma

$$F(\mathbf{m}) \cong \mathbf{d} \quad (3.3)$$

es decir, se trata de calcular los $\mathbf{m} \in S$ tal que las predicciones $F(\mathbf{m})$ estén “próximas” a \mathbf{d} .

En el problema sísmico-tomográfico en concreto y en general en la mayoría de los problemas inversos en geofísica, ocurre que modelos \mathbf{m} muy diferentes, satisfacen la ecuación (3.3) de manera muy razonable, ya que ajustan los datos medidos con un grado de tolerancia muy similar. Por lo cual se puede identificar la solución del problema inverso como los modelos \mathbf{m}_{sol} que minimizan $E(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d} - F(\mathbf{m})\|_{N_D}$, (donde N_D es cualquier tipo de norma definida sobre el conjunto de datos)

$$\mathbf{m}_{sol} = \min_{\mathbf{m} \in S} \|\mathbf{d} - F(\mathbf{m})\|_{N_D}, \quad (3.4)$$

o bien, elegir aquellos modelos \mathbf{m} , para los que $E(\mathbf{m})$ sea menor que cierta tolerancia, pudiéndose encontrar diferentes modelos \mathbf{m}_{sol} .

En el ámbito de la resolución de problemas inversos es frecuente utilizar el concepto de información a priori. Se considerará a priori toda información que, introducida en el proceso de resolución de un problema, influya en su solución final y aporte información adicional. Normalmente se refiere a información sobre la que se admite “cierto grado de certeza”, por ejemplo, el admitir que las lentitudes del terreno puedan variar en un rango de determinada amplitud. Otra información a priori consiste en otorgar diferentes pesos a los datos observados, por ejemplo a partir de un análisis de la distribución estadística de los mismos, como en caso de las curvas de tiempos medios. Incluso cuando se opta por una u otra formulación matemática y numérica del problema inverso, o por ejemplo la elección del conjunto S donde se busca la solución, constituyen en sí mismas informaciones “a priori” con cierta relevancia en la solución final.

En este tipo de problemas, los errores en las observaciones de partida se propagan a los modelos calculados, por lo que una parte importante de la inestabilidad de la solución es consecuencia de estos errores y podría eliminarse incorporando información a priori, es decir, complementaria a la contenida en los datos observados. El proceso de estabilización de las soluciones mediante el uso de información a priori se denomina regularización. La elección de “informaciones a priori” adecuadas no es una cuestión baladí y puede ser relacionada con un enfoque probabilista de los problemas inversos (Scales y Tenorio, 2001).

El problema inverso lineal y el problema inverso no lineal

Se denomina problema inverso lineal aquel que está asociado a un problema directo lineal (Parker, 1994). Esta definición incluye el caso en que el problema directo lineal se obtiene por linealización de un problema directo en origen no lineal. Análogamente se denomina problema inverso no lineal a aquel que está asociado a un problema directo no lineal, es decir, el funcional F , ver expresión (3.1), es no lineal (F depende de $\mathbf{m} \in S$).

El problema lineal se estudia puesto que una de las estrategias para resolver el problema inverso no lineal (3.2), consiste en sustituir este problema por una secuencia iterativa de problemas lineales cuyas soluciones, se espera, converjan a la solución del problema original. Si en el paso k -ésimo de dicha secuencia se ha llegado a un modelo \mathbf{m}_k , a partir del mismo se tratará de determinar cuál es el modelo siguiente \mathbf{m}_{k+1} , el cual, en teoría, está más “cercano” a la solución \mathbf{m}_{sol} . La información a priori podría

introducirse de forma adecuada al resolver cada uno de dichos pasos de manera que, propagándose a través de las sucesivas iteraciones, se consiga que esté presente y afecte a la solución final.

Como ya se ha comentado, es característico en este tipo de problemas, que cuando exista solución, ésta no sea única, es decir, suele haber otros modelos equivalentes al hallado, en el sentido de que ajustan los datos “igual de bien”. Es lógico pensar que, al menos algunas de estas soluciones equivalentes, estén en el entorno de la solución hallada. Como se tratará con más detalle en el capítulo 4, un desarrollo lineal de $F(\mathbf{m})$, esta vez en el entorno de la solución \mathbf{m}_{sol} , nos permite considerar que:

$$\|\mathbf{d} - F(\mathbf{m})\|_{N_D} \cong \|F(\mathbf{m}_{sol}) - \mathbf{d} + J_F(\mathbf{m}_{sol})(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{sol})\|_{N_D} \quad (3.5)$$

expresión que podemos utilizar para analizar los modelos equivalentes al obtenido. Obviamente este análisis posee una validez local, en el entorno de \mathbf{m}_{sol} .

El análisis de las técnicas de resolución de los problemas inversos discretos lineales y no lineales se presenta en los capítulos 3 y 4, comparando sus respectivas zonas de equivalencia y remarcando su importancia en el caso del problema sísmico-tomográfico en transmisión.

3.2 Resolución generalizada de sistemas lineales mediante técnicas de mínimos cuadrados

3.2.1 La resolución del sistema Lineal $M \cdot s = t$,

Al igual que ocurre con la Tomografía Axial Computerizada, la resolución del problema inverso sísmico tomográfico discreto, conduce como veremos en el capítulo 4, a la resolución de una secuencia de problemas lineales del tipo

$$Ms = t, \quad (3.6)$$

donde $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$, $s \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times 1}$, $t \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times 1}$, y por lo tanto adquieren especial importancia las técnicas de mínimos cuadrados.

Como introducción exponemos un ejemplo (Richardson y Zandt, 2003) de un problema sencillo de Tomografía con 4 parámetros (las lentitudes correspondientes a un dispositivo con cuatro celdas) donde se han registrado cuatro tiempos (t_1, t_2, t_3, t_4) entre un conjunto de emisores S y de receptores R (figura 3.1.1):

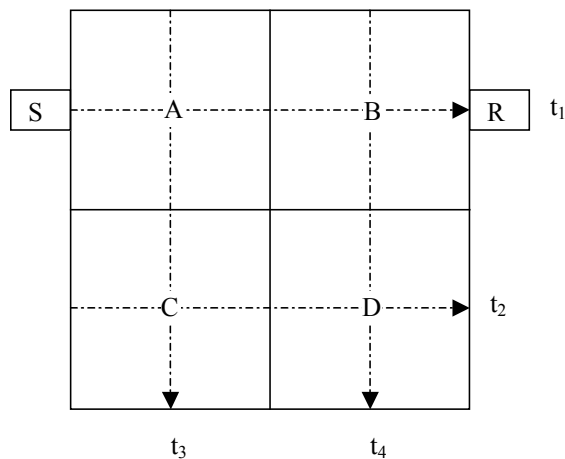


Figura 3.2.1. Ejemplo sintético de tomografía sísmica

Teniendo en cuenta la figura anterior, el problema de tomografía consiste en resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= h\left(\frac{1}{v_1}\right) + h\left(\frac{1}{v_2}\right) = h(s_1 + s_2), \\
 t_2 &= h\left(\frac{1}{v_3}\right) + h\left(\frac{1}{v_4}\right) = h(s_3 + s_4), \\
 t_3 &= h\left(\frac{1}{v_1}\right) + h\left(\frac{1}{v_3}\right) = h(s_1 + s_3), \\
 t_4 &= h\left(\frac{1}{v_2}\right) + h\left(\frac{1}{v_4}\right) = h(s_2 + s_4),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

o bien

$$\mathbf{t} = M\mathbf{s}. \tag{3.9}$$

Como ya se comentará más adelante, la solución de Mínimos Cuadrados de $\mathbf{t} = M\mathbf{s}$ vienen dada por

$$\mathbf{x}_{\text{MC}} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{s}, \tag{3.10}$$

donde

$$M^T M = h^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

y

$$M^T \mathbf{s} = h \begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ t_1 + t_4 \\ t_2 + t_3 \\ t_2 + t_4 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Las ecuaciones normales

$$M^T M \mathbf{s} = M^T \mathbf{t}, \tag{3.13}$$

son en este caso

$$h \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ t_1 + t_4 \\ t_2 + t_3 \\ t_2 + t_4 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$h \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s_4 \right) = \begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ t_1 + t_4 \\ t_2 + t_3 \\ t_2 + t_4 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Este sistema admite infinitas soluciones, por ejemplo, si $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ y $h = 1$; entonces $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 2$. Otras soluciones son por ejemplo $s_1 = s_4 = 2$, $s_2 = s_3 = 0$, ó $s_1 = s_4 = 0$, $s_2 = s_3 = 2$. Si nos fijamos en la matriz M , observamos que sus columnas o filas no son independientes, por lo que $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^T M) < 4$ lo que implica que no existe $(M^T M)^{-1}$ y la solución \mathbf{x}_{MC} de mínimos cuadrados no es única.

La resolución del sistema (3.6), $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$, posee como dificultades adicionales que M es a menudo de rango deficiente y mal condicionada. Las soluciones a dichos problemas provienen tanto del Algebra Lineal (descomposición en valores singulares y pseudoinversa de Moore-Penrose) como de la teoría de optimización (regularización de Tikhonov). Parece adecuado, antes de seguir adelante, dedicar al menos una sección, para realizar un recordatorio de los conceptos antes mencionados y proporcionar una explicación de la resolución generalizada de sistemas lineales mediante técnicas de mínimos cuadrados.

En este capítulo se utilizará la notación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para referirnos a los sistemas lineales en general, en vez de utilizar la notación $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$, que reservaremos a nuestro problema concreto de sismica-tomográfica. Sea pues, un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En todos los casos, el número de parámetros del modelo es n y el número de observaciones es m . La resolución de dicho sistema es equivalente a determinar $\mathbf{x} = F^{-1}(\mathbf{b})$, es decir, la solución (si existe) es la imagen recíproca F^{-1} del vector \mathbf{b} ,

donde F es la aplicación lineal que tiene asociada la matriz A en unas determinadas bases de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. El teorema de Rouché-Fröbenius indica que el sistema lineal posee al menos una solución si y solo si se verifica

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (3.17)$$

es decir $\mathbf{b} \in \text{Im}(F)$.

En el caso en el que la aplicación sea sobreyectiva, el sistema lineal admite solución para todo \mathbf{b} . La solución es única si y solo si el operador F es inyectivo, es decir, si $\text{Ker}(F) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Una clasificación inicial de los sistemas de ecuaciones según sus dimensiones y el rango de la matriz A es:

1. Problemas dimensionados ($m = n$)

Al ser en este caso $m = n$, los espacios de modelos y de datos “coinciden”. Si además F es biyectiva, entonces existe una única solución siendo además la matriz A del sistema cuadrada e invertible, constituyendo sus vectores columnas $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ una base del espacio \mathbb{R}^n . En este caso dicho problema se denomina compatible determinado y la solución del sistema (3.17) es un simple cambio de base, dado que $\mathbf{b} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}}$. Asimismo inyectividad, suprayectividad y biyectividad son en este caso, conceptos equivalentes pues:

$$\dim \text{Ker}(F) + \text{rg}(F) = n. \quad (3.18)$$

El error de predicción $[\mathbf{b}^{\text{obs}} - \mathbf{b}^{\text{pre}}]$ es cero.

2. Problemas Subdimensionados ($m < n$)

En estos sistemas hay más incógnitas que ecuaciones ($m < n$). Es preciso, distinguir dos casos:

- *Sistemas Puramente Subdimensionados* ($\text{rg}(F) = r = \min(m, n) = m$).

Puesto que el $\text{rg}(F) = m$, la aplicación es suprayectiva y por lo tanto dicho tipo de sistemas son siempre compatibles, pero no es inyectiva, con lo cual, el

sistema admite una infinidad de soluciones que pertenecen a una variedad lineal cuyo subespacio director coincide con el $Ker(F)$, que posee dimensión $n-m$. Este tipo de sistemas se denominan compatibles indeterminados. Como veremos para los sistemas puramente subdimensionados se busca la solución de norma mínima, que es única. Los datos se pueden ajustar exactamente y por lo tanto, el error de predicción es cero.

- *Sistemas subdimensionados deficientes en rango* ($rg(F) = r < \min(m, n) = m$), también denominado caso mixto, (Menke, 1989). Pueden ser incompatibles o compatibles indeterminados. Si son incompatibles la solución de norma mínima no existe, por lo que se buscan las soluciones de norma mínima del sistema de mínimos cuadrados asociado, que es compatible e indeterminado. En el caso en que sean compatibles indeterminados, la solución de norma mínima no es única dado que la matriz A es deficiente en rango. Como se verá, este último caso se trata mediante la matriz pseudoinversa.

3. Problemas Sobredimensionados o Sobredeterminados ($m > n$)

En estos sistemas hay más ecuaciones que incógnitas ($m > n$). Dicho tipo de sistemas suelen ser incompatibles dado que $\mathbf{b} \notin \text{Im}(F)$. Cabe entonces buscar el elemento $\mathbf{p} \in \text{Im}(F)$ que diste menos de \mathbf{b} , cuando en \mathbb{R}^m se adopta como producto escalar, el producto escalar Euclídeo, planteando entonces el problema como:

PMC) Hallar $\mathbf{p} = A\mathbf{x}_{MC}$ tal que $\|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|_2 = (\mathbf{b} - \mathbf{p})^T (\mathbf{b} - \mathbf{p})$ sea mínima,

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{MC}\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2. \quad (3.19)$$

Igualmente hay que distinguir dos casos:

- *Sistemas Puramente Sobredimensionados* ($rg(F) = r = \min(m, n) = n$).
Como se verá dicho problema admite una única solución.
- *Sistemas sobredimensionados deficientes en rango* ($rg(F) = r < \min(m, n) = n$)
Igualmente denominado caso mixto (Menke 1989), se resuelve del mismo modo que en el caso subdimensionado. La solución de mínimos cuadrados no es única, perteneciendo a una variedad lineal cuyo subespacio director es $Ker(F^T F) \equiv Ker(F)$.

Parece interesante insertar un sencillo ejemplo para ilustrar el caso mixto. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

En este problema, la variable x_1 está sobredeterminada, mientras que las variables x_2 y x_3 están indeterminadas. De esta forma, en un problema nos encontramos con sobredeterminación e indeterminación al mismo tiempo.

3.2.2 Los cuatro subespacios fundamentales de un operador lineal

Continuando con el problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cabe considerar cuatro subespacios asociados a A (o equivalentemente al operador lineal F , del cual A es su matriz representante en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m):

1.- Espacio columna de A ó $\text{Im}(A)$

Está formado por el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de las columnas de A , es decir

$$\text{Im}(A) = \langle \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n \rangle \subset \mathbb{R}^m.$$

Su dimensión coincide con el rango de A , llamamos $r = \text{rg}(A)$.

2.- Espacio fila de A ó $\text{Im}(A^T)$

Es el espacio columna de A^T , es decir,

$$\text{Im}(A^T) = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \rangle \subset \mathbb{R}^n.$$

Su dimensión coincide con el rango de A .

3.- Espacio nulo de A ó $\text{Ker}(A)$

Es el espacio formado por los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que no poseen efecto en las predicciones, es decir:

$$\text{Ker}(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Su dimensión es $n - r$.

4.- Espacio nulo de A^T o $\text{Ker}(A^T)$

Es el espacio formado por los vectores $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$\text{Ker}(A^T) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m / A^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \}.$$

Su dimensión es $m - r$.

Además se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \text{Im}(A^T) \oplus \text{Ker}(A), \\ \mathbb{R}^m &= \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A^T),\end{aligned}$$

que indican que los cuatro espacios fundamentales asociados a A son suplementarios con respecto al producto escalar Euclídeo definido en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m . Teniendo en cuenta las anteriores propiedades podemos resumir lo anteriormente dicho en la figura 3.2.2.

Cabe observar que la transformación entre los vectores del espacio fila $\text{Im}(A^T)$ y los vectores del espacio columna $\text{Im}(A)$ es no singular o invertible, dado que a cada vector \mathbf{b} del espacio columna le corresponde uno y sólo un vector \mathbf{x}_r en el espacio fila. La demostración es la siguiente:

Si denotamos

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n, \text{ donde } \mathbf{x}_n \in \text{Ker}(A) \text{ y } \mathbf{x}_r \in \text{Im}(A^T).$$

$$\text{Si } \mathbf{b} \in \text{Im}(A) \Rightarrow \mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_r + A\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_r.$$

Si existiese otro vector $\mathbf{x}'_r \in \text{Im}(A^T) / A\mathbf{x}'_r = \mathbf{b}$, entonces:

$$A\mathbf{x}_r - A\mathbf{x}'_r = \mathbf{0} \Rightarrow A(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in \text{Ker}(A).$$

Si se tiene además en cuenta que

$$\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in \text{Im}(A^T),$$

y la ortogonalidad entre los espacios $\text{Im}(A)$ y $\text{Ker}(A^T)$, se concluye que:

$$\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in \mathbf{0},$$

es decir,

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}'_r.$$

Esto significa que a partir de un vector $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, se puede encontrar la componente \mathbf{x}_r de la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mientras que la componente \mathbf{x}_n es incierta.

Si $\mathbf{b} \notin \text{Im}(A)$ cabría realizar el mismo razonamiento a partir de la componente de \mathbf{b} $\mathbf{b}_r \in \text{Im}(A)$. Como se verá ambas acciones serán realizadas simultáneamente mediante la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose.

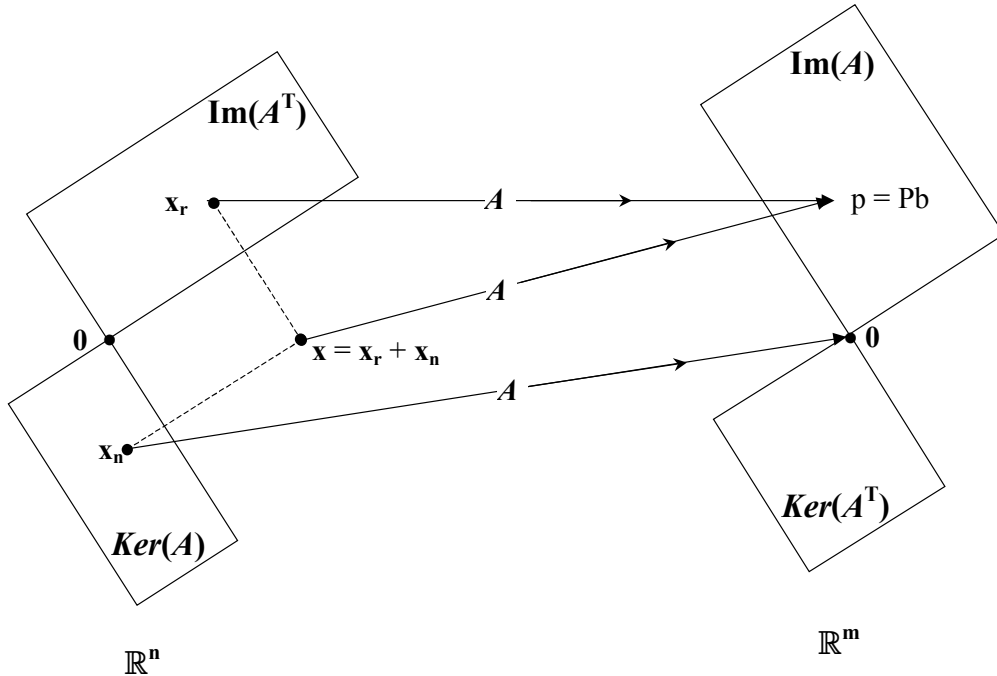


Figura 3.2.2: Efecto de la matriz A sobre los cuatro subespacios fundamentales asociados a A .

3.2.3 La pseudoinversa y la descomposición en valores singulares

Siguiendo con el objetivo de comprender y resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en el sentido de los mínimos cuadrados, es importante el uso de la matriz pseudoinversa o inversa de Moore-Penrose de la matriz A , la cual se denota como A^\dagger . Este concepto es una extensión al caso de matrices rectangulares del concepto de matriz inversa de una matriz cuadrada regular.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$, veremos dos resultados importantes:

- a) A puede factorizarse de la forma (Factorización de Schur)

$$A = U\Sigma V^T$$

donde U es una matriz ortogonal de dimensión m , V es una matriz ortogonal de dimensión n , y Σ es una matriz diagonal por bloques, que se denomina descomposición en valores singulares de la matriz A :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

donde $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(\Sigma)$.

b) La matriz pseudoinversa de Moore-Penrose asociada a la matriz A es

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T,$$

donde

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

1.-La descomposición en valores singulares

Dada la matriz A , puesto que $A^T A$ es simétrica, admite diagonalización ortogonal, es decir, existe un conjunto ortonormal de vectores propios $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ tales que

$$A^T A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \quad (3.23)$$

Además se verifica que $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ dado que

$$\|A \mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T A^T A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \lambda_i. \quad (3.24)$$

El número de valores propios λ_i no nulos coincide con el rango de la matriz $A^T A$ que a su vez, coincide con el rango de la matriz A al que venimos denominando r . Tomando como $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ a los valores propios positivos, se define:

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_i = \frac{A \mathbf{v}_i}{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3.25)$$

siendo los vectores \mathbf{u}_i ortonormados ya que:

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_j^T A^T A \mathbf{v}_i}{\mu_j \mu_i} = \frac{\lambda_i \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i}{\mu_j \mu_i} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad \text{teniendo en cuenta} \quad (3.23)$$

$$\|\mathbf{u}_i\|^2 = \frac{\|A \mathbf{v}_i\|^2}{\mu_i^2} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1, \quad \text{teniendo en cuenta} \quad (3.25).$$

El sistema de vectores ortonormales $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ se puede extender a una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_m\}$ (formarán las columnas de U) mediante el proceso de Gram-Schmidt, con lo cual los elementos de la matriz $U^T A V$ verifican:

$$\mathbf{u}_j^T A \mathbf{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > r, \\ \mu_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i = 0 & \text{si } i \leq r \text{ con } j \neq i, \\ \mu_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i = \mu_i & \text{si } i \leq r \text{ con } j = i. \end{cases}$$

Denominando

$$U^T A V = \Sigma, \quad (3.27)$$

se obtiene la matriz descrita por la fórmula (3.21), y por lo tanto

$$A = U \Sigma V^T, \quad (3.28)$$

con lo cual quedaría demostrado el primer apartado.

La relación (3.28) también se puede expresar como

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T = \sum_{k=1}^r \mu_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, \quad (3.29)$$

donde U_r y V_r , son las matrices que contienen los r primeros vectores columna de U y V respectivamente. La expresión (3.29) se denomina descomposición espectral de la matriz A e indica que $A = (\mu_1, \dots, \mu_r)_{\{\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\}}$.

La descomposición en valores singulares es una relación de semejanza ortogonal entre las matrices Σ y A del mismo operador lineal F :

$$\begin{array}{ccc} M_{B_C} & \xrightarrow{A} & D_{B_C} \\ V \uparrow & & \uparrow U \\ M_{B_V} & \xrightarrow{\Sigma} & D_{B_U} \end{array} \Rightarrow A = U\Sigma V^T, \quad (3.30)$$

es decir, adoptando las bases ortonormadas B_V y B_U en los espacios lineales S (espacio de modelos) y D (espacio de datos), la matriz que representa al operador lineal F que posee como matriz asociada A en las bases canónicas de ambos espacios, se convierte en la matriz diagonal por bloques Σ .

2.- La matriz Pseudoinversa de Moore-Penrose

La descomposición en valores singulares de la matriz A , permite escribir el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en la forma

$$\Sigma \mathbf{x}_V = \mathbf{b}_U, \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{x}_V = V^T \mathbf{x}$, y $\mathbf{b}_U = U^T \mathbf{b}$, es decir,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \mathbf{x}_V = \mathbf{b}_U. \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta (3.32), el sistema original es incompatible a menos que $\mathbf{b}_{u_j} = 0, \forall j = r+1, \dots, m$, pues:

$$\begin{cases} \mu_i \mathbf{x}_{v_i} = \mathbf{b}_{u_i} & i = 1, \dots, r, \\ \sum_{k=1}^n 0 \mathbf{x}_{v_k} = \mathbf{b}_{u_j} & j = r+1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.33)$$

Una posible pseudosolución que denominaremos \mathbf{x}_V^\dagger consiste en:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{v_i}^\dagger = \frac{1}{\mu_i} \mathbf{b}_{u_i} & i = 1, \dots, r, \\ \mathbf{x}_{v_j}^\dagger = 0 & j = r+1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.34)$$

dado que las variables \mathbf{x}_{v_j} con $j = r+1, \dots, n$, no están determinadas por los datos.

Matricialmente (3.34) se expresa como

$$\mathbf{x}_v^\dagger = \Sigma^\dagger \mathbf{b}_U \Rightarrow V^T \mathbf{x}^\dagger = \Sigma^\dagger U^T \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b}. \quad (3.35)$$

La expresión anterior proporciona la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz A

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T. \quad (3.36)$$

Además, dado que

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T, \quad (3.37)$$

también se puede definir la pseudoinversa o inversa generalizada como

$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T. \quad (3.38)$$

3.2.4 Factorización QR

Sean $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ el conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^m , que forman las columnas de una matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$. Si llamamos $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ a la base ortonormal que se obtiene del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a la base $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ de $\text{Im}(A)$, entonces la matriz A se puede factorizar como el producto de una matriz $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$ y una matriz triangular superior invertible $R \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$. Es decir,

$$A = QR, \quad (3.39)$$

donde la matriz Q tiene como columnas los vectores \mathbf{w}_i y la matriz R es:

$$R = (\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_i \rangle) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{c}_3, \mathbf{w}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{c}_3, \mathbf{w}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{c}_3, \mathbf{w}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

La demostración es que si $\mathbf{c} \in \text{Im}(A)$, existen constantes a_i tales que

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i, \quad (3.41)$$

entonces para cada $k = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{w}_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k \rangle = a_k \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle = a_k \|\mathbf{w}_k\|^2 = a_k, \quad (3.42)$$

por lo que se puede expresar

$$\mathbf{c} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{c}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k, \quad (3.43)$$

en particular

$$\mathbf{c}_j = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.44)$$

y entonces

$$\mathbf{c}_j = Q \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

por lo tanto

$$A = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) = \left(Q \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix} \dots Q \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix} \right) = QR, \quad (3.46)$$

puesto que $\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{w}_i \rangle = 0$ para todo $i > j$ por la génesis de la base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$.

Es inmediato comprobar que si la matriz A es cuadrada también lo son sus factores Q y R , siendo en este caso Q una matriz ortogonal. Como se verá el método QR tiene especial interés en el caso del sistema de ecuaciones normales de mínimos cuadrados.

3.2.5 Mínimos Cuadrados y Proyecciones

Sea el problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde el vector \mathbf{b} representa los datos, dados por una serie de experimentos u observaciones que pueden contener errores de medida que impiden que pueda encontrarse en el subespacio columna de A . El sistema de ecuaciones encontradas será probablemente inconsistente y no tendrá solución. A pesar de su insolubilidad, estos sistemas incompatibles surgen en los problemas prácticos y

hay que dar alguna respuesta o “pseudosolución”. Una posibilidad para determinar \mathbf{x} , es quedarnos con algunas ecuaciones del sistema e ignorar el resto, pero esto es difícil de justificar si las m ecuaciones poseen un origen común. En lugar de suponer que no hay ningún error en algunas ecuaciones y grandes errores en otras, es más razonable escoger una “pseudosolución” \mathbf{x} , que minimice el error de predicción, E , de las m ecuaciones y que se define como

$$E^2(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2. \quad (3.47)$$

Si existiera una solución exacta del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces el error mínimo será $E = 0$.

1.- Solución de Mínimos Cuadrados

El método de los mínimos cuadrados será el apropiado para tratar los sistemas puramente sobredeterminados. Buscar la solución \mathbf{x}_{MC} en mínimos cuadrados, que minimice el error E , es lo mismo que encontrar el vector del espacio $\text{Im}(A)$, $\mathbf{p} = A\mathbf{x}_{MC}$ que esté más cerca de \mathbf{b} que cualquier otro vector perteneciente al espacio $\text{Im}(A)$, es decir \mathbf{p} debe ser la proyección de \mathbf{b} sobre el espacio columna de A y el vector $A\mathbf{x}_{MC} - \mathbf{b}$ debe ser ortogonal a este espacio, por lo cual

$$(A\mathbf{y})^T (A\mathbf{x}_{MC} - \mathbf{b}) = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{y}^T (A^T A\mathbf{x}_{MC} - A^T \mathbf{b}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.48)$$

luego

$$A^T A\mathbf{x}_{MC} - A^T \mathbf{b} = 0, \quad (3.49)$$

por lo que la solución de mínimos cuadrados para un sistema inconsistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con m ecuaciones y n incógnitas satisface

$$A^T A\mathbf{x}_{MC} = A^T \mathbf{b}, \quad \text{Ecuaciones Normales.} \quad (3.50)$$

Si $\text{rango}(A) = n$, entonces $\text{rango}(A^T A) = n$ y por lo tanto existe $(A^T A)^{-1}$, y existe una solución única de mínimos cuadrados:

$$\mathbf{x}_{MC} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}. \quad (3.51)$$

La proyección de \mathbf{b} sobre el espacio columna de A es

$$\mathbf{p} = A\mathbf{x}_{\text{MC}} = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}, \quad (3.52)$$

donde $(A^T A)^{-1} A^T$ se denomina matriz inversa izquierda de A .

Si $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, entonces $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con lo que

$$\mathbf{p} = A(A^T A)^{-1} A^T A\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (3.53)$$

Si \mathbf{b} es ortogonal a todas las columnas de A , entonces $A^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$, y por tanto

$$\mathbf{x}_{\text{MC}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.54)$$

y

$$\mathbf{p} = A\mathbf{x}_{\text{MC}} = \mathbf{0}. \quad (3.55)$$

La matriz $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, es una matriz de proyección, y proyecta cualquier vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sobre el espacio columna de A .

Aunque el vector proyectado \mathbf{p} está determinado de manera única, como el más cercano a \mathbf{b} , dicho vector \mathbf{p} se puede expresar como diferentes combinaciones lineales de los vectores que forman el sistema de generadores que se adopte en el espacio columna de A , cuando este sistema de generadores es linealmente dependiente; es decir, el problema de mínimos cuadrados posee infinitas soluciones. Para poder seleccionar una de las soluciones deberemos hacer uso de la matriz pseudoinversa.

Si tenemos en cuenta la factorización $A = QR$ vista anteriormente (3.39) la solución de mínimos cuadrados se puede expresar como:

$$\mathbf{x}_{\text{MC}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T \mathbf{b}, \quad (3.56)$$

y como $Q^T Q = I_n$, ya que las columnas de Q son ortonormales

$$\mathbf{x}_{\text{MC}} = (R^T R)^{-1} R^T Q^T \mathbf{b} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}, \quad (3.57)$$

con lo cual,

$$R\mathbf{x}_{\text{MC}} = Q^T \mathbf{b}, \quad (3.58)$$

por lo que el cálculo de \mathbf{x}_{MC} sólo requiere la multiplicación $Q^T \mathbf{b}$ seguida de una sustitución regresiva en el sistema triangular (3.58). Es decir, el trabajo de ortogonalización previo nos ahorra el cálculo de $(A^T A)^{-1}$, ahorro que no reside en el número de operaciones, que en realidad es mayor, sino en la estabilidad numérica del algoritmo (Strang, 1980).

2.-Solución de Norma Mínima

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo es encontrar la solución óptima \mathbf{x}_s para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$ y vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, pero, ¿qué ocurre si el sistema es puramente subdeterminado, o bien si siendo deficiente en rango, se dan las condiciones, para obtener una solución por mínimos cuadrados que no será única? La respuesta es que como los sistemas involucrados ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$) poseerán infinitas soluciones, tendremos que escoger una de ellas. La regla más usual de elección, es escoger de entre todas las soluciones, aquella de norma mínima (figura 3.2.3).

Comenzando por el primer caso, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dado que la solución que buscamos $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n = \text{Im}(A^T) \oplus \text{Ker}(A)$, entonces

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_r^s + \mathbf{x}_n^s, \quad \text{con } \mathbf{x}_r^s \in \text{Im}(A^T) \text{ y } \mathbf{x}_n^s \in \text{Ker}(A), \quad (3.59)$$

por lo que se verifica $\|\mathbf{x}_s\|_2^2 = \|\mathbf{x}_r^s\|_2^2 + \|\mathbf{x}_n^s\|_2^2$, con lo cual la solución de norma mínima será aquella que no posea componentes según $\text{Ker}(A)$. Por lo tanto

$$\mathbf{x}_{NM} \in (\text{Ker}(A))^\perp = \text{Im}(A^T), \quad (3.60)$$

entonces

$$\exists \mathbf{z} / \mathbf{x}_{NM} = A^T \mathbf{z}, \quad (3.61)$$

que unido a que

$$A\mathbf{x}_{NM} = \mathbf{b}, \quad (3.62)$$

nos lleva a

$$A(A^T \mathbf{z}) = \mathbf{b}, \quad (3.63)$$

y como $AA^T \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times m}$, tiene

$$\text{rango}(AA^T) = \text{rango}(A) = m,$$

entonces, existe $(AA^T)^{-1}$, y podemos hallar

$$\mathbf{z} = (AA^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.64)$$

con lo cual

$$\mathbf{x}_{\text{NM}} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.65)$$

es la solución de norma mínima del problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en el caso donde éste es puramente subdimensionado.

De forma análoga a (3.65) se calcula la solución de norma mínima en el otro caso comentado (deficiente en rango), donde ahora el sistema es $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (problema de mínimos cuadrados asociado).

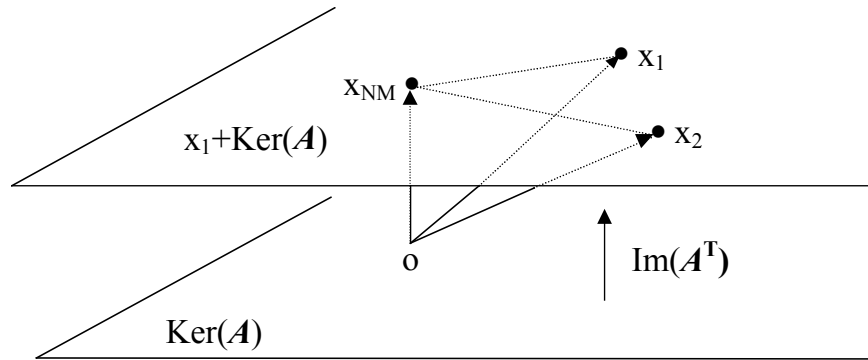


Figura 3.2.3: Interpretación geométrica de la solución de norma mínima. \mathbf{x}_{NM} no posee componentes según $\text{Ker}(A)$

3.2.6 Tipología de sistemas lineales

Continuando con lo comentado en la sección anterior, 3.2.1, clasificaremos los sistemas lineales en función de las dimensiones m y n de A y de su rango $r = \text{rango}(A)$. En la próxima sección veremos como la matriz que nos permite “resolver” $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en cada uno de los casos, es la pseudoinversa A^\dagger , proporcionando la solución definida por $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b}$.

Recordamos que nos estamos refiriendo a r , como

$$r = \text{rango}(A) = \text{rango}(AA^T) = \text{rango}(A^T A).$$

Si tenemos en cuenta la descomposición de la matriz A en valores singulares vista en el apartado 3.2.3 y si tomamos la partición de las matrices, según el número de valores singulares no nulos r , podemos considerar las siguientes matrices y los subespacios que generan sus vectores columnas.

Σ , es la matriz que ha sido descrita en (3.21), con los valores singulares no nulos $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ a lo largo de la diagonal de Σ_r .

V es la matriz de dimensión $n \times n$, donde la i -ésima columna es dada por el i -ésimo vector propio, \mathbf{v}_i , de $A^T A$. Es una matriz ortogonal. Los vectores columna de V son de dimensión n , y están asociados con el espacio de modelos.

$$V = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (3.66)$$

V_r es la submatriz de V , de dimensión $n \times r$ que contiene a las r primeras columnas de V , estando asociadas a los valores propios no nulos de la matriz $A^T A$. Si tenemos en cuenta la descomposición $A = U \Sigma V^T$ vista anteriormente (3.28), entonces $A^T = V \Sigma U^T$, lo que nos permite expresar:

$$A^T \mathbf{y} = V \Sigma U^T \mathbf{y} = V \Sigma \mathbf{y}_U = \sum_{k=1}^r \mu_k y_{Uk} \mathbf{v}_k, \quad (3.67)$$

donde y_{Uk} es la coordenada k -ésima del vector \mathbf{y} en la base formada por los vectores columna de la matriz U . La expresión anterior nos muestra como los vectores columnas de la matriz V_r generan el espacio $\text{Im}(A^T)$, es decir, $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = \text{Im}(A^T)$, y por lo tanto se suele denominar $V_r = \text{Im}(A^T)$.

V_0 es la submatriz de dimensión $n \times (n-r)$ que contiene las últimas $n-r$ columnas de V , asociadas a los valores propios nulos de la matriz $A^T A$. Puesto que la matriz V es una matriz ortogonal, entonces el subespacio que genera $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es ortogonal al subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ y de dimensión $(n-r)$, es decir, $\langle \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \text{Ker}(A)$, y por lo tanto se suele denominar $V_0 = \text{Ker}(A)$.

U es la matriz de dimensión $m \times m$, donde la i -ésima columna es dada por el i -ésimo vector propio, \mathbf{u}_i , de AA^T . Es una matriz ortogonal. Los vectores columna de U son de dimensión m , y están asociados con el espacio de datos.

$$U = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}_{m \times m} . \quad (3.68)$$

U_r es la submatriz de U , de dimensión $m \times r$ que contiene a las r primeras columnas de U , estando asociadas a los valores propios no nulos de la matriz AA^T . Si tenemos en cuenta la descomposición $A = U\Sigma V^T$ vista anteriormente (3.28),

$$A\mathbf{x} = U\Sigma V^T \mathbf{x} = U\Sigma \mathbf{x}_V = \sum_{k=1}^r \mu_k x_{V_k} \mathbf{u}_k , \quad (3.69)$$

donde x_{V_k} es la coordenada k -ésima del vector \mathbf{x} en la base formada por los vectores columna de la matriz V . La expresión anterior nos muestra como los vectores columna de la matriz U_r generan el espacio $\text{Im}(A)$, es decir, $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle = \text{Im}(A)$, y por lo tanto se suele denominar $U_r = \text{Im}(A)$.

U_0 es la submatriz de dimensión $m \times (m-r)$ que contiene las últimas $m-r$ columnas de U , asociadas a los valores propios nulos de la matriz AA^T . Puesto que la matriz U es una matriz ortogonal, entonces el subespacio que genera $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es ortogonal al subespacio $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ y de dimensión $(m-r)$, es decir, $\langle \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m \rangle = \text{Ker}(A^T)$, y por lo tanto se suele denominar $U_0 = \text{Ker}(A^T)$.

Dado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y basándonos en las relaciones entre r , m y n se establece que hay cuatro problemas clásicos.

CLASE I : SISTEMA LINEAL CUADRADO COMPATIBLE Y DETERMINADO $r = m = n$

Las matrices U_0 y V_0 no existen (están vacías), es decir,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T) = \mathbf{0} .$$

A tiene una única matriz inversa A^{-1} .

Hay una única solución para \mathbf{x} .

Los datos pueden ser ajustados exactamente, si bien el sistema puede estar mal condicionado.

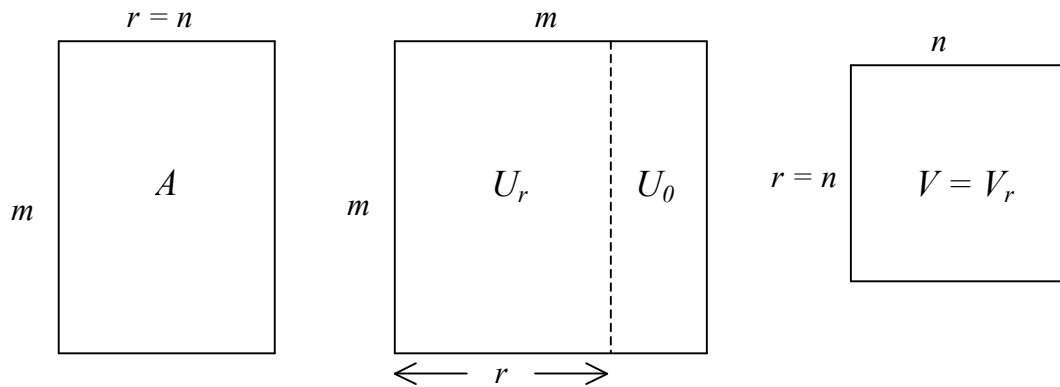
$$r = m = n \quad \begin{array}{l} A \\ U = U_r \\ V = V_r \end{array}$$

CLASE II : CASO PURAMENTE SOBREDETERMINADO $r = n < m$

V_0 no existe (está vacía) pues $r = n$, es decir, $Ker(A) = \mathbf{0}$.

U_0 no está vacía pues $r < m$, luego $Ker(A^T)$ no se reduce al vector nulo.

Hay una única solución de mínimos cuadrados. Los datos no pueden ser ajustados exactamente, a menos que exista compatibilidad en las ecuaciones, lo cual implicaría que $U_0^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$,



es decir, la proyección de \mathbf{b} sobre $Ker(A^T)$ es nula, pues si la tuviera, no sería posible encontrar una solución \mathbf{x} que pueda ajustarlos exactamente. Todas las estimaciones \mathbf{x} nos conducen a datos predichos $A\mathbf{x}$ en el espacio U_r . Este es el típico problema de Mínimos Cuadrados cuya solución es $\mathbf{x}_{MC} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$.

CLASE III : CASO PURAMENTE SUBDETERMINADO $r = m < n$

U_0 está vacía pues $r = m$, es decir $Ker(A^T) = \mathbf{0}$.

V_0 no está vacía pues $r < n$, luego $Ker(A)$ no se reduce al vector nulo.

Existen infinitas soluciones que ajustan los datos perfectamente. Si llamamos \mathbf{x}^{est} a una solución que ajusta los datos exactamente

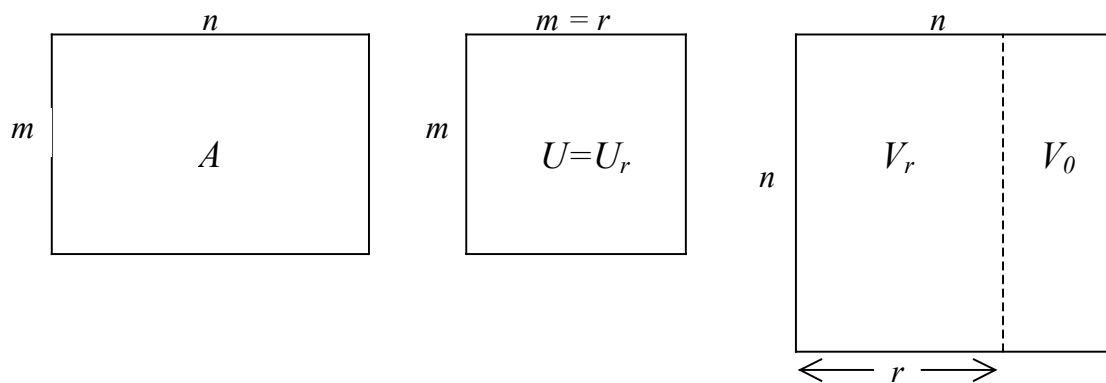
$$A\mathbf{x}^{est} = \mathbf{b}^{pre} = \mathbf{b},$$

entonces

$$\mathbf{x}^{est} + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \tag{3.70}$$

también es una solución donde α_i es una constante arbitraria.

Además el ajuste de los datos es perfecto, ya que $\text{Ker}(A^T) = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$.



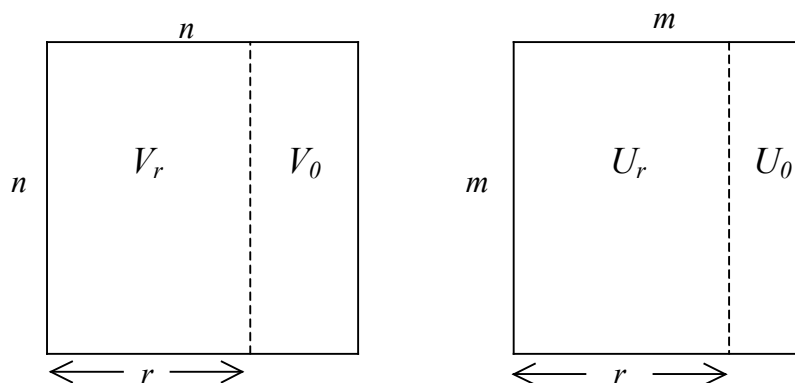
Este es el típico problema de Norma Mínima cuya solución es:

$$\mathbf{x}_{\text{NM}} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.71)$$

CLASE IV : $r < \min(m, n)$

Ni U_0 , ni V_0 son vacías, pues $r < \min(m, n)$.

A no tiene matriz inversa. No se pueden encontrar soluciones que ajusten los datos exactamente, a no ser que exista una completa compatibilidad entre las ecuaciones $U_0^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$, en cuyo caso la solución no sería única.



La mayoría de los problemas reales se encuentran en este caso $r < \min(m, n)$.

3.2.7 Acción de la pseudoinversa según la tipología de $Ax = b$

Unas ilustraciones de los cuatro espacios fundamentales nos permite entender el concepto de pseudoinversa y su aplicación (figuras 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7).

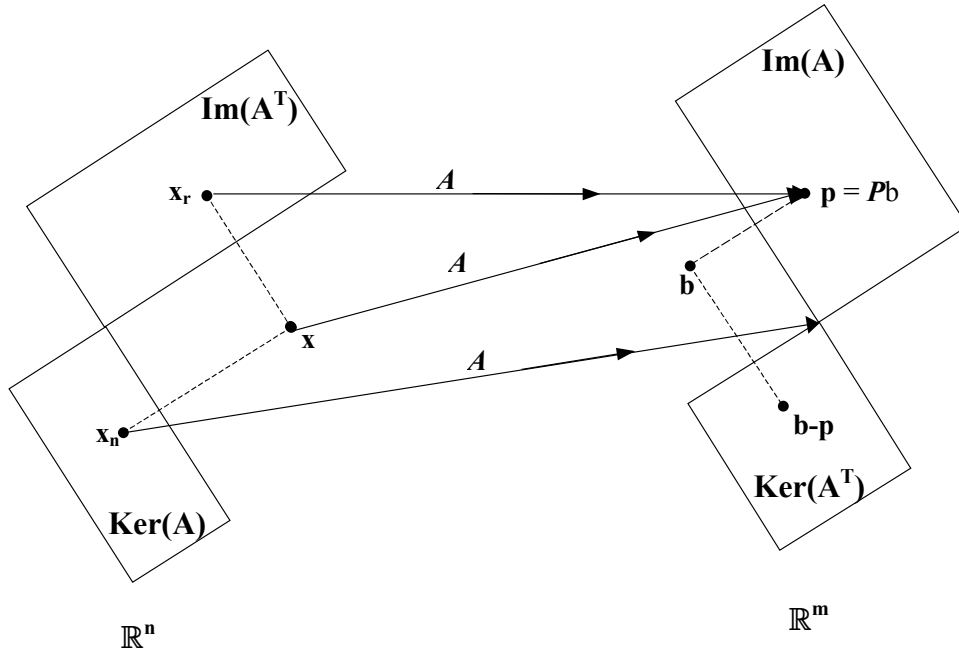


Figura 3.2.4: Actuación de la matriz A .

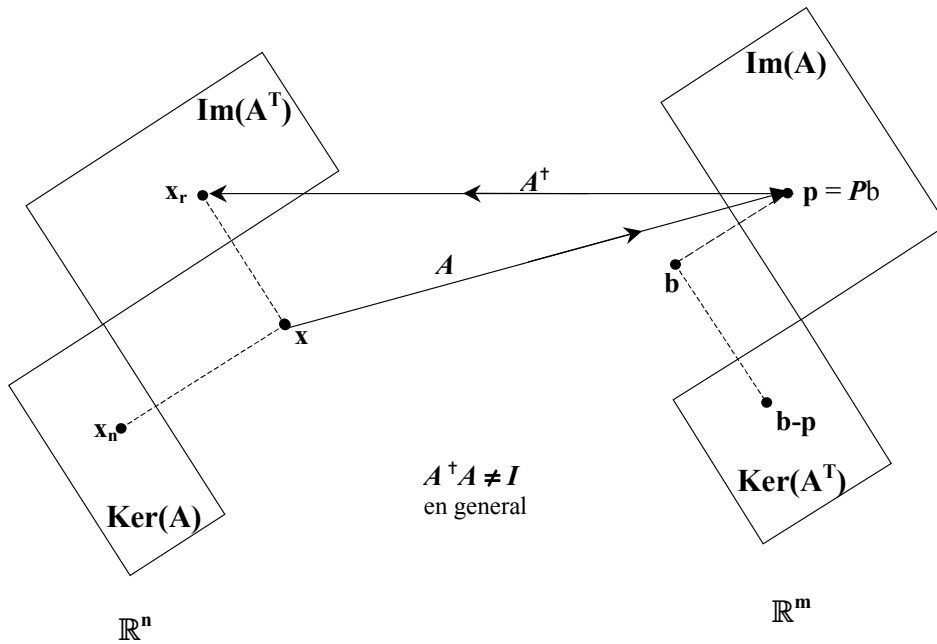


Figura 3.2.5: Actuación de la matriz A^+A .

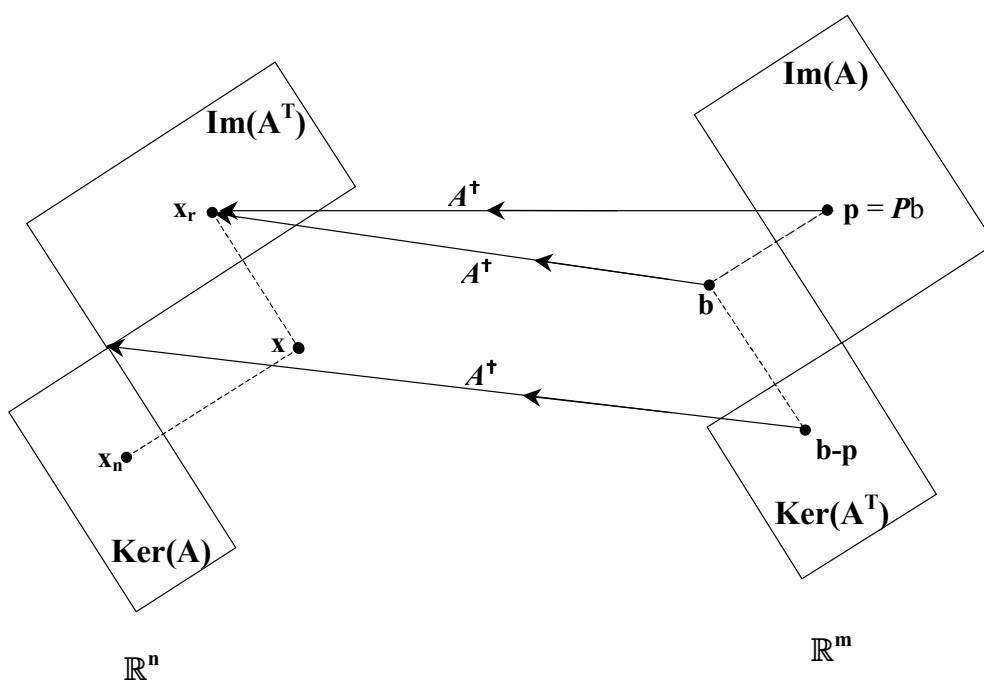


Figura 3.2.6: Actuación de la matriz A^\dagger .

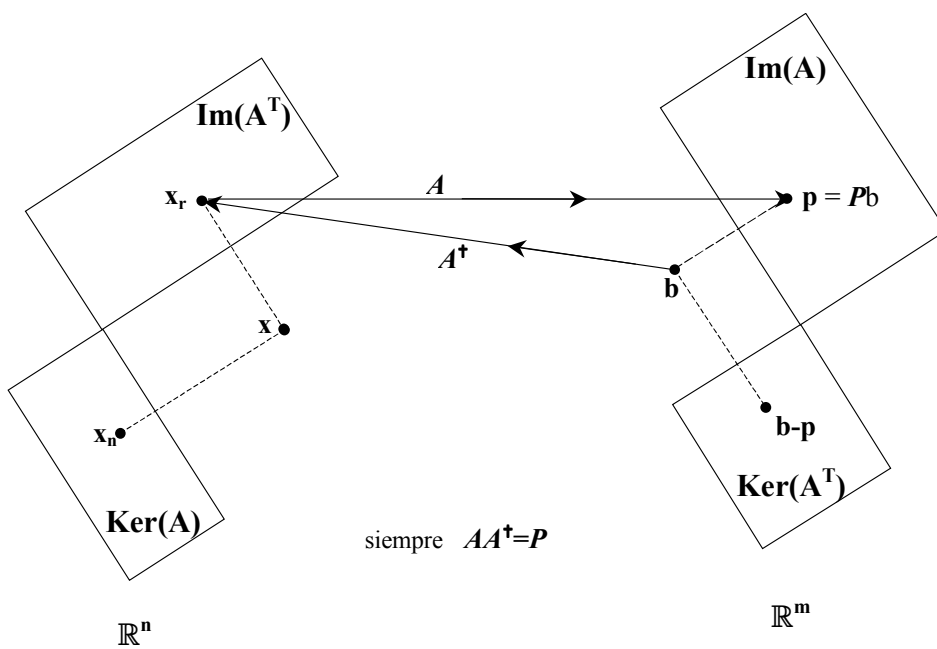


Figura 3.2.7: Actuación de la matriz AA^\dagger .

A continuación vemos como actúa la pseudoinversa o inversa generalizada en cada una de las tipologías del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vistas anteriormente.

Clase I : $r = m = n$

En este caso tenemos $V_r = V$, $U_r = U$, V_0 y U_0 son vacías, con lo cual como $r = n$,

$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = V \Sigma^{-1} U^T = A^{-1}. \quad (3.72)$$

Clase II : $r = n < m$

Se posee más observaciones que incógnitas. En este caso tenemos que $V_r = V$, V_0 es vacía, pero U_0 existe.

Si recordamos, la solución de mínimos cuadrados, viene dada por

$$\mathbf{x}_{MC} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}. \quad (3.73)$$

Por lo que podemos llamar operador de mínimos cuadrados a

$$A_{MC}^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (3.74)$$

Si tenemos en cuenta que

$$A^T A = (U_r \Sigma_r V_r^T)^T (U_r \Sigma_r V_r^T), \quad (3.75)$$

y llamando a

$$\Sigma_r \Sigma_r = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r^2 \end{pmatrix} = \Sigma_r^2, \quad (3.76)$$

entonces

$$A^T A = V_r \Sigma_r^2 V_r^T, \quad (3.77)$$

con lo cual

$$(A^T A)^{-1} = (V_r^T)^{-1} (\Sigma_r^2)^{-1} (V_r)^{-1} = V_r \Sigma_r^{-2} V_r^T, \quad (3.78)$$

con

$$\Sigma_r^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_r^2} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

por lo que resumiendo

$$A_{MC}^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T = V_r \Sigma_r^{-2} V_r^T (U_r \Sigma_r V_r^T)^T = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = A^\dagger. \quad (3.80)$$

En la clase II, como se ha comprobado, el operador inverso de mínimos cuadrados coincide con la pseudoinversa.

Clase III : $r = m < n$

Se posee más parámetros del modelo que observaciones. En estos problemas hay un número infinito de posibles soluciones, todas ellas ajustan perfectamente los datos. A la solución que tenga la norma más pequeña, se la llama la Solución de Norma Mínima. En este caso tenemos que $U_r = U$, U_0 es vacía, pero V_0 existe. Si recordamos, la solución de Norma Mínima, viene dada por

$$\mathbf{x}_{NM} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.81)$$

por lo que podemos llamar operador inverso de norma mínima a

$$A_{NM}^{-1} = A^T (AA^T)^{-1}. \quad (3.82)$$

Si tenemos en cuenta que

$$AA^T = (U_r \Sigma_r V_r^T)(U_r \Sigma_r V_r^T)^T = U_r \Sigma_r^2 U_r^T, \quad (3.83)$$

entonces, puesto que AA^T es cuadrada de orden m y además su rango es m , admite inversa, por lo cual

$$(AA^T)^{-1} = (U_r^T)^{-1} (\Sigma_r^2)^{-1} (U_r)^{-1} = U_r \Sigma_r^{-2} U_r^T, \quad (3.84)$$

por lo que podemos concluir que

$$A_{\text{NM}}^{-1} = A^T (AA^T)^{-1} = (U_r \Sigma_r V_r^T)^T U_r \Sigma_r^{-2} U_r^T = V_r \Sigma_r U_r^T U_r \Sigma_r^{-2} U_r^T = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = A^\dagger. \quad (3.85)$$

En la clase III, como se ha comprobado, el operador inverso de norma mínima, A_{NM}^{-1} , igualmente, coincide con la pseudoinversa.

Clase IV : $r < \min(m, n)$

En este tipo de problemas no existe el operador de mínimos cuadrados ni el operador de Norma Mínima, puesto que las matrices $A^T A$ y AA^T no admiten inversa al ser r menor que m y n . Además V_0 y U_0 no son vacías, lo que implica que además de no haber una única solución, estas no ajustan los datos exactamente, al menos que éstos no tengan proyección sobre U_0 . En esta situación la inversa generalizada

$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T, \quad (3.86)$$

como operador, minimiza el vector error de desajuste entre los datos observados y los datos calculados (tal como lo hace el operador de mínimos cuadrados en su caso) a la vez que proporciona el modelo solución de norma L_2 mínima (tal como lo hace el operador de norma mínima en su caso).

Resumiendo, la solución de un sistema de ecuaciones vendrá dada:

Si el sistema es compatible y determinado..... $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b} = A^{-1} \mathbf{b}$.

Si el sistema es puramente sobredeterminado..... $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \mathbf{x}_{\text{MC}}$.

Si el sistema es puramente indeterminado..... $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{x}_{\text{NM}}$.

Si el sistema es deficiente en rango..... $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b}$.

En el último caso, si $r < \min(m, n)$, nos proporcionará la solución de Norma Mínima del sistema de Mínimos Cuadrados asociado, que en este caso es un sistema compatible indeterminado.

3.2.8 Falta de estabilidad: resolución de problemas mal condicionados

Es necesario señalar que la aproximación por mínimos cuadrados no es numéricamente estable cuando el subespacio sobre el que proyectamos está generado por un conjunto de vectores que estén muy cerca de ser linealmente dependientes, siendo la dimensión de éste muy inestable (difícil de establecer numéricamente) y provocando entonces que la pseudoinversa y el vector proyectado \mathbf{p} , sean asimismo inestables. Tras repasar el concepto de problema mal condicionados se expone una forma de solventar esta dificultad y así poder aprovechar el planteamiento mediante ecuaciones normales y la utilización de la pseudoinversa.

Norma y número de condición de una matriz

Dado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es importante preguntarse: ¿qué cambio produce en la solución \mathbf{x} un pequeño cambio en el vector de datos \mathbf{b} o en la matriz del sistema A ? El número de condición de una matriz mide la sensibilidad o vulnerabilidad de una solución \mathbf{x} ante ligeros cambios en \mathbf{b} o en A , proporcionándonos una idea del comportamiento del sistema frente a estas perturbaciones. Antes habrá que observar que para medir los cambios en vectores se utiliza el concepto de norma de un vector y para medir los cambios en una matriz será necesario recordar que entendemos como norma de una matriz.

Es posible definir normas de matrices directamente, exigiendo las condiciones:

1. $\|A\| \geq 0$, y $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in R \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, para cualquier escalar α ,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Sin embargo las normas matriciales más utilizadas son las inducidas por una norma vectorial (norma natural). En este caso, la norma matricial se define a partir de una norma vectorial,

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.87)$$

o bien,

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\|, \quad \text{con } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.88)$$

El máximo se alcanza porque el conjunto de vectores \mathbf{u} es cerrado y acotado.

La idea que subyace al concepto de norma de una matriz A es medir la cantidad máxima por la que se amplifica cualquier vector que es multiplicado por la matriz.

Por ejemplo, la norma matricial inducida por la norma vectorial euclídea $\|\cdot\|_2$, es

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \max \left(\frac{\|A\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \right) = \max_{\|\mathbf{u}\|_2=1} (\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{u}) \stackrel{A=U\Sigma V^T}{=} \\ &= \max_{\|\mathbf{u}_V\|_2=1} (\mathbf{u}_V^T \Sigma^T \Sigma \mathbf{u}_V) = \mu_{\max}^2(A). \end{aligned} \quad (3.89)$$

con lo que la norma L_2 de la matriz A es la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz $A^T A$:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \mu_{\max}(A). \quad (3.90)$$

La relación (3.90) es consistente ya que la matriz $A^T A$ es simétrica y semidefinida positiva, con lo cual admite diagonalización ortogonal y sus valores propios son números reales positivos o nulos.

Retomando el asunto que nos ocupa, un pequeño cambio en el vector \mathbf{b} , que se convierte en $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ (puede ser debido a errores en los datos experimentales o de redondeo), va a provocar un cambio en la solución correspondiente que pasa de \mathbf{x} a $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. Para evitar el inconveniente que supondría tener en algunos casos un cambio de escala, lo que se hace es normalizar y comparar el cambio relativo de $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ con el error

relativo $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

En el caso de una matriz regular A su **número de condición** se define como el escalar positivo:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (3.91)$$

demostrándose que :

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (3.92)$$

Si la perturbación se produce en la matriz A , entonces se verifica la relación:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \quad (3.93)$$

en la que aparece de nuevo el número de condición de la matriz A , por lo que en general se puede afirmar que el número de condición controla la transmisión de errores en los sistemas de ecuaciones.

Antes hemos comentado como se halla la norma inducida por la norma vectorial euclídea (3.90), el número de condición, para esta norma, de una matriz A regular con valores propios $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ es:

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = \frac{\mu_{\max}(A)}{\mu_{\min}(A)}, \quad (3.94)$$

donde $\mu_{\max}(A)$ y $\mu_{\min}(A)$ son los valores singulares máximo y mínimo de la matriz A . La relación (3.91) es generalizable al caso de matrices rectangulares definiendo:

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^\dagger\|_2 = \frac{\mu_{\max}(A)}{\mu_{\min}(A)}. \quad (3.95)$$

Si $\kappa(A)$ es “grande”, el sistema está mal condicionado, y un pequeño cambio en el segundo miembro \mathbf{b} , se traduce en un gran cambio en la solución \mathbf{x} , de modo que los métodos de resolución pueden proporcionar soluciones totalmente dispares. Por el contrario, si $\kappa(A)$ es “pequeño”, el sistema está bien condicionado y la solución tanto del sistema original como del sistema perturbado, son muy parecidas.

Como veremos en la sección 3.4 dedicada al análisis de la incertidumbre de la solución de los problemas inversos lineales, el número de condición está relacionado con la excentricidad ε de la sección elíptica de la hipercuádrica lineal de equivalencia, que posee unos semiejes cuyo tamaño son $\mu_{\min}^{-1}(A)$ y $\mu_{\max}^{-1}(A)$ dado que

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\kappa(A)}\right)^2}. \quad (3.96)$$

Los problemas mal condicionados son aquellos en los que $\varepsilon \rightarrow 1$. Esto ocurre cuando se busca determinar la solución de mínimos cuadrados o de norma mínima de problemas asociados a sistemas lineales mal condicionados, puesto que

$$\kappa(A^T A) = \kappa(AA^T) = (\kappa(A))^2, \quad (3.97)$$

con lo cual si el sistema inicial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ estuviera mal condicionado, el sistema de mínimos cuadrados o de norma mínima asociado lo estaría aún peor.

En la práctica el mal condicionamiento de los sistemas lineales se aborda numéricamente mediante técnicas de regularización por amortiguamiento (se tratará con

más detalle en la sección 3.2.9 donde por ejemplo se comentara como el método de Levenberg–Marquardt estabiliza la inversión añadiendo ruido blanco a la matriz del sistema), o por truncamiento (utilización por ejemplo de la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose).

3.2.9 Proyección sobre los cuatro subespacios

Siguiendo con el problema inverso lineal discreto $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y antes de introducir las matrices de resolución, parece interesante hacer una consideración.

Si denotamos $\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b}$, a la solución obtenida mediante la pseudoinversa de Moore-Penrose y vemos cuál es su imagen mediante el operador A (figura 3.2.7):

$$\mathbf{b}^\dagger = A\mathbf{x}^\dagger = AA^\dagger \mathbf{b} = P_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{b}^\dagger \perp \text{Ker}(A^T), \quad (3.98)$$

es inmediato comprobar que \mathbf{b}^\dagger no posee componentes en el subespacio $\text{Ker}(A^T)$.

Dicho de otro modo, el error de predicción $\mathbf{b} - \mathbf{b}^\dagger$ no posee componentes en $\text{Im}(A)$.

Además el vector solución \mathbf{x}^\dagger no posee componentes en el subespacio V_0 ya que

$$\mathbf{x}^\dagger = A^\dagger \mathbf{b} = A^\dagger A\mathbf{x} = P_{\text{Im}(A^T)}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x}^\dagger \perp V_0 \equiv \text{Ker}(A). \quad (3.99)$$

Observando las figuras 3.2.4 a 3.2.7 resulta fácil darse cuenta que la pseudoinversa proporciona las fórmulas para realizar la proyección ortogonal sobre los cuatro subespacios de \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} P_{\text{Im}(A)} &= AA^\dagger, & P_{\text{Ker}(A^T)} &= I - AA^\dagger, \\ P_{\text{Im}(A^T)} &= A^\dagger A, & P_{\text{Ker}(A)} &= I - A^\dagger A, \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde $\text{Im}(A) = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ y $\text{Im}(A^T) = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

3.2.10 Matrices de resolución

Matriz de resolución de datos

Supongamos que hemos encontrado la matriz A^\dagger , inversa generalizada de la matriz A . Dicha matriz proporciona una “solución” aproximada (pseudosolución) del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x}^{\text{est}} = A^\dagger \mathbf{b}. \quad (3.101)$$

En este caso se puede estudiar como \mathbf{x}^{est} predice (o ajusta) los datos observados \mathbf{b} . Para ello denominaremos

$$\mathbf{b}^{\text{est}} = A\mathbf{x}^{\text{est}} = A(A^\dagger \mathbf{b}) = AA^\dagger \mathbf{b}. \quad (3.102)$$

La matriz AA^\dagger se denomina matriz de resolución de los datos y se denota por

$$R_m = AA^\dagger = (U_r \Sigma_r V_r^T)(V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T) = U_r U_r^T. \quad (3.103)$$

Cabe observar que la matriz R_m coincide con $P_{\text{Im}(A)} = AA^\dagger$.

Las siguientes observaciones son pertinentes:

- Si $R_m \equiv I_m$ entonces $\mathbf{b}^{\text{est}} = \mathbf{b}$ y el error de predicción es nulo, es decir, el ajuste de los datos es perfecto.
- Si $R_m \neq I_m$ entonces la fila i -ésima de la matriz R_m indica los pesos (y por lo tanto los datos) que influyen en la predicción del dato i -ésimo b_i , es decir, el dato b_i no se puede predecir individualmente, pero si mediante la combinación lineal $\sum_{k=1}^m R_m(i, k) b_k$. Como conclusión, los términos de la diagonal de R_m indican la importancia que posee un dato en su propia predicción. Dicha matriz $D_m = \text{diag}(R_m)$ se denomina por lo tanto "matriz de importancia de los datos" (Menke, 1989).
- Puesto que R_m es la matriz de proyección ortogonal sobre $\text{Im}(A)$, es decir, paralelamente a $\text{Ker}(A^T)$, se tiene que $R_m \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{b}_0 \in \text{Ker}(A^T)$.

Matriz de resolución de los parámetros del modelo

Idéntico análisis puede llevarse a cabo con los parámetros del modelo. Para ello suponemos que existe un conjunto desconocido \mathbf{x} de parámetros del modelo que resuelve perfectamente los datos¹, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sea A^\dagger la matriz inversa generalizada que proporciona la estimación

$$\mathbf{x}^{\text{est}} = A^\dagger \mathbf{b}, \quad (3.104)$$

entonces se verifica

$$\mathbf{x}^{\text{est}} = A^\dagger (A\mathbf{x}) = A^\dagger A\mathbf{x}. \quad (3.105)$$

¹ La definición de la matriz de resolución de los parámetros del modelo suele inducir a error, en el caso de problemas puramente sobredeterminados, pues al ser el sistema incompatible, entonces $A\mathbf{x} \neq \mathbf{b}$.

La matriz

$$R_n = A^\dagger A = (V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T) (U_r \Sigma_r V_r^T) = V_r V_r^T, \quad (3.106)$$

se denomina matriz de resolución de los parámetros del modelo y las consideraciones son análogas al caso anterior.

Como ejemplo veamos las matrices de resolución de los casos anteriormente analizados:

- Sistemas compatibles determinados $R_m = R_n = I_m = I_n$.
- Sistemas puramente sobredeterminados donde la pseudoinversa nos proporciona la solución de mínimos cuadrados

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T, \quad (3.107)$$

$$R_m = AA^\dagger = A(A^T A)^{-1} A^T, \quad (3.108)$$

$$R_n = A^\dagger A = (A^T A)^{-1} A^T A \equiv I_n, \quad (3.109)$$

es decir, se ajustan perfectamente los parámetros del modelo (problema sobredeterminado), pero no los datos ($E \neq 0$).

- Sistemas puramente indeterminados donde la pseudoinversa nos proporciona la solución de norma mínima

$$A^\dagger = A^T (A^T A)^{-1}, \quad (3.110)$$

$$R_m = AA^\dagger = AA^T (A^T A)^{-1} \equiv I_m, \quad (3.111)$$

$$R_n = A^\dagger A = A^T (AA^T)^{-1} A, \quad (3.112)$$

es decir, la solución de norma mínima ajusta perfectamente los datos (problema indeterminado) pero no los parámetros del modelo.

- Sistemas mixtos (deficientes en rango) $R_m \neq I_m$ y $R_n \neq I_n$.

3.2.11 Mínimos Cuadrados Sopesados o Ponderados

Como ya se ha comentado, al comienzo de la sección 3.2.5, se puede suponer que en el sistema de ecuaciones, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, no todas las observaciones son fiables en el mismo grado, pudiendo ser algunas más precisas que otras. Aunque en principio resulte razonable buscar una solución que minimice el error promedio de las m ecuaciones, tampoco sería correcto asignar a todas el mismo grado de certeza y más, si cabe, si se dispone de información a priori al respecto. Los mínimos cuadrados ponderados nos permiten incorporar estas informaciones a nuestra estimación.

Existen dos enfoques para plantear los mínimos cuadrados ponderados. El primero es asociar distintos pesos w_1, \dots, w_m a las m ecuaciones en función de su fiabilidad, sin embargo, es posible que las diferentes observaciones, aparte de no ser igualmente fidedignas, tampoco sean independientes, con lo cual será conveniente añadir también un coeficiente w_{ij} que mida la relación entre la observación i y la observación j . Entonces

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{se convierte en} \quad W_m A\mathbf{x} = W_m \mathbf{b},$$

siendo W_m una matriz de pesos cuadrada de dimensión m , en cuya diagonal principal están los escalares w_1, \dots, w_m ocupando las respectivas posiciones w_{11}, \dots, w_{mm} y fuera de la diagonal los diferentes coeficientes de relación w_{ij} , antes mencionados.

El nuevo problema $W_m A\mathbf{x} = W_m \mathbf{b}$ se resuelve utilizando las ecuaciones normales ya conocidas, que ahora se denominan ecuaciones normales ponderadas

$$A^T W_m^T W_m A \mathbf{x}_{MCW} = A^T W_m^T W_m \mathbf{b}. \quad (3.113)$$

El segundo enfoque, es definir una nueva norma asociada a un nuevo producto escalar, en el espacio de datos, de la siguiente forma: si W_m es una matriz regular se define la nueva norma

$$\|\mathbf{b}\|_{W_d} = \|W_m \mathbf{b}\|_2, \quad (3.114)$$

que corresponde al producto escalar W_d

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{W_d} = (W_m \mathbf{u})^T (W_m \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T W_m^T W_m \mathbf{v}. \quad (3.115)$$

Por lo tanto $W_d = W_m^T W_m$ es la matriz de Gram del producto escalar inducida a partir de la matriz de pesos W_m .

Los dos planteamientos anteriores, a la postre resultan equivalentes dado que ambos enfoques conducen a la misma solución. La prueba es que puesto que la solución de mínimos cuadrados \mathbf{x}_{MC} minimiza la norma euclídea del error o desajuste entre los datos observados y los datos predichos, es decir minimiza $E_2 = \|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}$, si consideramos un nuevo producto escalar, ahora la norma del error de predicción será,

$$E_d = \sqrt{\mathbf{e}^T W_d \mathbf{e}} = \|W_m \mathbf{e}\|_2, \quad (3.116)$$

conduciéndonos a la solución de mínimos cuadrados sopesados de la ecuación (3.113)

$$\mathbf{x}_{MCW} = (A^T W_d A)^{-1} A^T W_d \mathbf{b}, \quad (3.117)$$

siempre y cuando la matriz $(A^T W_d A)^{-1}$ exista.

Las siguientes observaciones resultan pertinentes

- La matriz W_d debe ser simétrica y definida positiva. Además dicha matriz debe ser regular con lo cual $\ker(W_d) \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Si no fuese así podría existir algún vector $\mathbf{e}_0 \in \ker(W_d) \neq \mathbf{0}$ y con norma nula. Ambas condiciones se verifican si W_m es regular.
- Ahora la condición de ortogonalidad implica que el vector error de predicción $\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{MCW}$ es ortogonal al subespacio $\text{Im}(A)$ según el producto escalar que posee como matriz de Gram W_d .
- La matriz de pesos W_d puede elegirse de muchas maneras, pero una elección muy habitual es

$$W_d = (\text{cov } \mathbf{b})^{-1}, \quad (3.118)$$

donde $(\text{cov } \mathbf{b})^{-1}$ es la inversa de la matriz de covarianza de los datos observados, considerados como un vector aleatorio. Si los datos están incorrelados, entonces la matriz $(\text{cov } \mathbf{b})$ es diagonal. Además cada elemento

de su diagonal coincide con la varianza σ_i^2 de la componente correspondiente b_i del vector aleatorio \mathbf{b} , es decir:

$$E_d = \sqrt{\mathbf{e}^T (\text{cov } \mathbf{b})^{-1} \mathbf{e}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} e_i^2}. \quad (3.119)$$

Si la varianza del dato i -ésimo, σ_i^2 , es grande, la componente e_i del error de predicción \mathbf{e} , tiene poca influencia en la norma E_d del error de predicción. Esto no ocurre en los problemas de mínimos cuadrados no sopesados, donde cada componente del vector error contribuye con el mismo peso al desajuste total, es decir la matriz de pesos W_m y la matriz del producto escalar W_d son la identidad.

Solución de Norma Mínima Sopesada

La solución de norma mínima del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es entre todas las soluciones aquella que minimiza la norma euclídea $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ en el espacio de modelos. La solución de Norma Mínima Sopesada consiste en definir una nueva norma $\|\mathbf{x}\|_{W_x}$ a partir del producto escalar que posee como matriz de Gram W_x :

$$\|\mathbf{x}\|_{W_x} = \sqrt{\mathbf{x}^T W_x \mathbf{x}}. \quad (3.120)$$

Dado que la matriz W_x es simétrica y definida positiva se puede escribir:

$$W_x = W_n^T W_n, \quad (3.121)$$

donde W_n es la factorización Cholesky de W_x y recibe el nombre de matriz de pesos de los parámetros del modelo dado que $\|\mathbf{x}\|_{W_x} = \|W_n \mathbf{x}\|_2$.

La solución de norma mínima sopesada se escribe

$$\mathbf{x}_{\text{NMW}} = W_x^{-1} A^T (A W_x^{-1} A^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.122)$$

siempre que $(A W_x^{-1} A^T)^{-1}$ exista (más adelante, en el apartado de Matrices de Pesos, retomaremos brevemente este tema).

En ocasiones se posee un modelo de referencia \mathbf{x}_{ref} , y se busca la solución que minimiza la distancia al modelo de referencia según la norma definida en (3.120)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}\|_{W_x}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}})^T W_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}). \quad (3.123)$$

La solución sopesada de norma mínima es aquella que minimiza $\|\Delta\mathbf{x}\|_{W_x}$, donde

$$A \cdot \Delta\mathbf{x} = b - A\mathbf{x}_{\text{ref}}. \quad (3.124)$$

En este caso la solución se escribe:

$$\mathbf{x}_{\text{NMWr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + W_x^{-1} A^T (A W_x^{-1} A^T)^{-1} [\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{\text{ref}}], \quad (3.125)$$

que conduce a la solución (3.122) si $\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$.

Mínimos Cuadrados Sopesados y Amortiguados

Los problemas de mínimos cuadrados como los problemas de norma mínima; tanto los no sopesados como los sopesados, pueden ser inestables si las matrices que deben ser invertidas son muy próximas a ser singulares. En las versiones sopesadas estas matrices son, como acabamos de ver,

$$A^T W_d A, \quad (3.126)$$

y

$$A W_x^{-1} A^T. \quad (3.127)$$

Para evitar esto se puede introducir un término de regularización, $\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}\|_{W_x}^2$, de modo que el funcional de mínimos cuadrados o función de coste sea:

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{W_d}^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}\|_{W_x}^2, \quad (3.128)$$

donde ε^2 es el parámetro de regularización que determina la importancia relativa entre el error de predicción y la distancia de la solución al modelo de referencia. Minimizando la expresión (3.128) con respecto al modelo de parámetros \mathbf{x} , se obtiene la solución mínimos cuadrados sopesados y regularizados (amortiguados) con modelo de referencia, $\mathbf{x}_{\text{MCWRr}}$:

$$\mathbf{x}_{\text{MCWRr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + \left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)^{-1} A^T W_d (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}), \quad (3.129)$$

o bien

$$\mathbf{x}_{\text{MCWRr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + W_x^{-1} A^T \left(A W_x^{-1} A^T + \varepsilon^2 W_d^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}). \quad (3.130)$$

Esta solución es una combinación ponderada de la solución de mínimos cuadrados ponderados y de la solución de norma mínima ponderada.

- Si $\varepsilon^2 \gg$ se prima la minimización de la parte indeterminada de la solución (norma mínima).
- Si $\varepsilon^2 \ll$ se prima la minimización de la parte sobredeterminada de la solución (mínimos cuadrados).

El término ε^2 además, tiene el efecto de amortiguar la inestabilidad y minimizar los efectos de los valores singulares pequeños de las matrices $A^T W_d A$ y $A W_x^{-1} A^T$. Normalmente se elige un valor $\varepsilon \rightarrow 0$ mediante la técnica de la curva L (Hansen, 1998).

Berryman (1991) demuestra que al menos que la solución de referencia \mathbf{x}_{ref} , ya sea solución del problema inverso, la solución de mínimos cuadrados nunca resuelve el problema inverso para ningún ε^2 , W_d o W_x , de ahí la importancia de disponer de una buena información a priori sobre los parámetros del modelo.

Posteriormente, en el capítulo 4, se comentará cuál es el efecto que se persigue con la regularización en el caso de los problemas inversos lineales y no lineales.

Funcionales y soluciones de mínimos cuadrados

Llegados a este punto parece adecuado hacer una breve recapitulación de los funcionales de mínimos cuadrados y las correspondientes soluciones que nos proporcionan. Se presenta el resumen en forma de tabla, posteriormente se comentan algunos de los casos más significativos.

	Sin término de referencia ($\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$)
$W_d \neq I_m, W_x \neq I_n$ y $\varepsilon \neq 0$	$\Psi_{\text{MCWR}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{x}^T W_x \mathbf{x},$ $\mathbf{x}_{\text{MCWR}} = (A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x)^{-1} A^T W_d \mathbf{b}.$
$W_d \equiv I_m, W_x \equiv I_n$ y $\varepsilon \neq 0$	$\Psi_{\text{MCR}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x},$ $\mathbf{x}_{\text{MCR}} = (A^T A + \varepsilon^2 I_n)^{-1} A^T \mathbf{b}.$
$W_d \neq I_m, W_x \neq I_n$ y $\varepsilon = 0$	$\Psi_{\text{MCW}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}),$ $\mathbf{x}_{\text{MCW}} = (A^T W_d A)^{-1} A^T W_d \mathbf{b}.$
$W_d \equiv I_m, W_x \equiv I_n$ y $\varepsilon = 0$	$\Psi_{\text{MC}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}),$ $\mathbf{x}_{\text{MC}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$
	Con término de referencia ($\mathbf{x}_{\text{ref}} \neq \mathbf{0}$)
$W_d \neq I_m, W_x \neq I_n$ y $\varepsilon \neq 0$	$\Psi_{\text{MCWRr}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}})^T W_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}),$ $\mathbf{x}_{\text{MCWRr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + (A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x)^{-1} A^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{\text{ref}}). \quad (*)$
$W_d \equiv I_m, W_x \equiv I_n$ y $\varepsilon \neq 0$	$\Psi_{\text{MCRr}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}),$ $\mathbf{x}_{\text{MCRr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + (A^T A + \varepsilon^2 I_n)^{-1} A^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{\text{ref}}).$
$W_d \neq I_m, W_x \neq I_n$ y $\varepsilon = 0$	$\Psi_{\text{MCWr}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}),$ $\mathbf{x}_{\text{MCWr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + (A^T W_d A)^{-1} A^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{\text{ref}}).$
$W_d \equiv I_m, W_x \equiv I_n$ y $\varepsilon = 0$	$\Psi_{\text{MCr}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}),$ $\mathbf{x}_{\text{MCr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + (A^T A)^{-1} A^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{\text{ref}}).$

El funcional más general de mínimos cuadrados (*) se escribe:

$$\Psi_{\text{MCWRr}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T W_d (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}})^T W_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}), \quad (3.131)$$

siendo W_d , W_x dos matrices de pesos definidas positivas. Como se ha comentado se trata de hallar $\mathbf{x} \in S$ tal que $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{W_d}^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}\|_{W_x}^2$ sea mínimo, donde $\|\cdot\|_{W_d}$ denota la norma asociada al producto escalar cuya matriz de Gram es W_d en el espacio lineal D , y $\|\cdot\|_{W_x}$ denota la norma asociada al producto escalar cuya matriz de Gram es W_x en el espacio lineal S ; \mathbf{x}_{ref} es un modelo conocido a priori y ε^2 es el parámetro de regularización. Estamos en el caso de mínimos cuadrados ponderados ($W_d \neq I_m$ y $W_x \neq I_n$), regularizados ($\varepsilon \neq 0$) y con término de referencia ($\mathbf{x}_{\text{ref}} \neq \mathbf{0}$).

A veces interesa, conocido a priori un modelo inicial \mathbf{x}_{ref} , hallar $\hat{\mathbf{x}} = \gamma \mathbf{x}_{\text{ref}}$ (siendo $\gamma > 0$ un parámetro real) tal que

$$\Psi_{\text{MCH}}(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}})^T W_d (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.132)$$

demostrándose (Berryman, 1991) que éste se alcanza para el valor:

$$\gamma = \frac{\mathbf{x}_{\text{ref}}^T A^T W_d \mathbf{b}}{\mathbf{x}_{\text{ref}}^T A^T W_d A \mathbf{x}_{\text{ref}}}. \quad (3.133)$$

Este caso se conoce como mínimos cuadrados homotéticos o escalados.

Como último caso a comentar, recordemos que si $W_d \equiv W_x \equiv I$ y $\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$, el funcional queda como

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (3.134)$$

cuyas ecuaciones normales son

$$(A^T A + \varepsilon^2 I_n) \mathbf{x}_{\text{LM}} = A^T \mathbf{b}, \quad (3.135)$$

y que se conoce como el método de Levenberg-Marquardt. El término $\varepsilon^2 I_n$ puede interpretarse como un ruido blanco de varianza ε^2 que sirve para garantizar que la matriz $A^T A$ sea invertible si $\text{rango}(A) = r$, dado que si $A = U \Sigma V^T$, entonces

$$(A^T A + \varepsilon^2 I_n)^{-1} = V (\Sigma^T \Sigma + \varepsilon^2 I_n)^{-1} V^T = V \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{\mu_1^2 + \varepsilon^2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\mu_r^2 + \varepsilon^2} & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^2} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{array} \right) V^T. \quad (3.136)$$

Esta solución es de norma mínima para $\varepsilon \rightarrow 0$, pues \mathbf{x}_{LM} no posee componentes según $\text{Ker}(A)$.

Matrices de Pesos en el problema inverso tomográfico

Anteriormente se ha visto la conveniencia en algunos problemas de asociar distintos pesos w_{ij} a las diferentes observaciones y/o a los parámetros del modelo. Pero, ¿son arbitrarias estas constantes? Y en el caso de no serlo ¿qué características del problema inverso determinan y de qué manera estos pesos?

Berryman (1991), en el ámbito del problema sísmico-tomográfico en transmisión, establece como hipótesis de trabajo que la mayor fuente de error en la inversión no lineal se debe al algoritmo de trazado de rayos (elecciones erróneas que los algoritmos hacen de los caminos que siguen los rayos), más que a errores en los datos observados (tiempos de viaje). Por ello propone abordar el problema en dos fases:

Primera fase: Encontrar mediante un algoritmo de inversión iterativo, un conjunto aceptable de trayectorias de rayos, utilizando en esta fase y para el caso de un medio homogéneo las matrices de pesos $W_d = L^{-1}$ y $W_x = C$: Estas matrices se

definen de la siguiente manera: si $M = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix}$ es la matriz de trayectorias,

siendo l_{ij} la longitud que el rayo i cuando atraviesa la celda j (suponiendo que se

ha mallado el dominio objeto de estudio), entonces $L = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_{mm} \end{pmatrix}$, es una

matriz diagonal siendo sus elementos la suma de las filas de M , es decir,

$L_{ii} = \sum_{j=1}^n l_{ij}$. Dicha matriz se denomina matriz de longitudes de rayos.

$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal donde los elementos de su diagonal

son la suma de las columnas de M , es decir $C_{jj} = \sum_{i=1}^m l_{ij}$, y se denomina matriz de

cobertura de rayos.

Segunda fase: Encontrado dicho conjunto de trayectorias rayos, se pueden utilizar otras matrices de pesos que estén relacionadas con la matriz de covarianza de los datos observados (tiempos de viaje) y de los parámetros del modelo (lenticidades).

La matriz de pesos L^{-1} además de ser una de las elecciones de matrices de pesos más simple, tiene un significado físico, pues si los rayos son cortos es más fácil separar la señal del ruido que en los rayos largos, dado que en los primeros la absorción y/o atenuación geométrica es menor en general, con lo que la probabilidad de cometer un error en la adquisición de tiempos disminuye. Asimismo la elección de la matriz C , como matriz de pesos de los parámetros del modelo tiene como significación física el que las celdas con peor cobertura poseen una mayor incertidumbre en cuanto al valor de la lentitud encontrada. De esta manera los tiempos asociados con los rayos más largos y celdas menos cubiertas, contribuirán con pesos más pequeños al funcional de mínimos cuadrados regularizados.

Los argumentos matemáticos también avalan dicha elección de matrices de pesos. La estabilidad del método numérico es una de las razones matemáticas de la regularización. Dada la solución general

$$\mathbf{x}_{\text{MCWRr}} = \mathbf{x}_{\text{ref}} + \left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)^{-1} A^T W_d (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}), \quad (3.137)$$

si no hay una elección adecuada de las matrices de pesos, puede resultar difícil o imposible hallar la inversa de la matriz $\left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)$, (dado que puede estar muy

mal condicionada o incluso no ser invertible). Para poder realizar la elección de las matrices de pesos Berryman (1991) utiliza el algoritmo de Richardson² o de iteración simple que le permite aproximar la solución de mínimos cuadrados regularizados (3.137) demostrando que si los valores singulares de la matriz $W_d^{1/2} A W_x^{-1/2}$ están en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ el algoritmo de Richardson converge a dicha solución, con lo cual un posible criterio de elección es escoger matrices de pesos que garanticen este rango. La elección de $W_d = L^{-1}$ y $W_x = C$, sin ser única, es sencilla y garantiza que $-1 \leq \mu_i \leq 1$ (Berryman, 1991) y por lo tanto la convergencia del método iterativo.

² El Método de Richardson o iteración simple para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$, consiste en generar la sucesión:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (I_n - A)\mathbf{x}^k + \mathbf{b}.$$

Este método converge, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}$, si el radio espectral de la matriz de iteración cumple $\rho(I_n - A) < 1$.

Puesto que el método aplicado a las ecuaciones normales genera los términos:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (I_n - A^T A)\mathbf{x}^k + A^T \mathbf{b} = \mathbf{x}^k + A^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k),$$

y teniendo en cuenta la descomposición en valores singulares de la matriz $A = U\Sigma V^T$, se llega a:

$$V^T \mathbf{x}^{k+1} = V^T \mathbf{x}^k + \Sigma^T (U^T \mathbf{b} - \Sigma V^T \mathbf{x}^k),$$

es decir, $\mathbf{x}_v^{k+1} = \mathbf{x}_v^k + \Sigma^T (\mathbf{b}_u - \Sigma \mathbf{x}_v^k)$, lo que implica $x_{v_i}^{k+1} = (1 - \mu_i^2) x_{v_i}^k + \mu_i \mathbf{b}_{u_i}$, con lo cual dicho método converge si $-\sqrt{2} < \mu_i < \sqrt{2}$.

Matrices de Resolución Efectivas

Como se ha comentado, la solución de mínimos cuadrados sopesados y amortiguados con modelo de referencia nulo, $\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$, viene dada por

$$\mathbf{x}_{\text{MCWR}} = \left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)^{-1} A^T W_d \mathbf{b}. \quad (3.138)$$

Si existe un modelo de referencia la solución se escribe

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}} &= \left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)^{-1} A^T W_d (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}) = Q (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}) = \\ &= Q \mathbf{b} - Q A \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{x}_{\text{MCWRr}} - Q A \mathbf{x}_{\text{ref}}, \end{aligned} \quad (3.139)$$

donde

$$Q = \left(A^T W_d A + \varepsilon^2 W_x \right)^{-1} A^T W_d. \quad (3.140)$$

Si $QA = I_n$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{MCWRr}}$, y por tanto la resolución en los parámetros del modelo sería perfecta. Sin embargo para todo $\varepsilon^2 > 0$ tenemos que

$$QA = I_n + \frac{1}{\varepsilon^2} W_x^{-1} A^T W_d A \neq I_n, \quad (3.141)$$

luego el producto QA es análogo a la matriz de resolución $R_n = A^\dagger A$ y se denomina *Matriz de resolución efectiva del modelo* y se denota

$$E_n = QA = I_n + \frac{1}{\varepsilon^2} W_x^{-1} A^T W_d A \neq I_n. \quad (3.142)$$

De forma análoga se tiene

$$A \mathbf{x} = A (\mathbf{x}_{\text{ref}} + \Delta \mathbf{x}) = A \mathbf{x}_{\text{ref}} + A Q (\mathbf{b} - A \mathbf{x}_{\text{ref}}), \quad (3.143)$$

con lo cual si $AQ = I_m$, la resolución de los datos es perfecta. No obstante

$$AQ = I_m + \frac{1}{\varepsilon^2} A W_x^{-1} A^T W_d \neq I_m, \quad (3.144)$$

y a la matriz

$$E_m = AQ = I_m + \frac{1}{\varepsilon^2} AW_x^{-1} A^T W_d \neq I_m, \quad (3.145)$$

se la denomina *Matriz de resolución efectiva de los datos*.

En el caso $W_e = W_x = I$, si se comparan las matrices E_n y E_m con las matrices de resolución R_n y R_m del problema sin regularizar, se tiene que, utilizando la descomposición en valores singulares de la matriz A

$$E_n = (A^T A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^T A = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 + \varepsilon^2} \right) \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T. \quad (3.146)$$

Por lo tanto es fácil demostrar que E_n está relacionada con R_n del siguiente modo

$$E_n = R_n - \sum_{j=1}^r \left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_j^2 + \varepsilon^2} \right) \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T, \quad (3.147)$$

y si el parámetro de regularización $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $E_n \rightarrow R_n$.

Igualmente se tiene que

$$E_m = A (A^T A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^T = R_m - \sum_{i=1}^r \left(\frac{\varepsilon^2}{\mu_i^2 + \varepsilon^2} \right) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, \quad (3.148)$$

y también si el parámetro de regularización $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $E_m \rightarrow R_m$.

3.3 Algoritmos de Reconstrucción Algebraica

Estos algoritmos nacieron y son utilizados en el ámbito de la ingeniería biomédica.

A partir de esta sección y puesto que nos vamos centrando en el problema tomográfico, y más en concreto en el problema sísmico-tomográfico en transmisión, adoptaremos ya la notación específica. Nos referimos con M a la matriz del operador entre el espacio de modelos y el espacio de datos. Los modelos son lentitudes que denotamos con \mathbf{s} y los datos, tiempos de las primeras llegadas que denotamos con \mathbf{t} .

3.3.1 Algoritmo de media ponderada (Simple Backprojection)

Es una primera aproximación en la resolución del problema inverso lineal $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$, dado que proporciona como resultado campos de soluciones muy suaves. Se trata de calcular $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ que verifique la ecuación anterior. La idea es la siguiente: sea t_i el dato observado de índice i $\left(t_i = \sum_{j=1}^n s_j l_{ij} \right)$. Sea $L_i = \sum_{j=1}^n l_{ij}$ la longitud total del rayo i , siendo

$l_{ij} > 0$ si la proyección correspondiente al dato i ilumina la celda j , y $l_{ij} = 0$ en caso contrario.

Denominaremos lentitud media asociada al rayo i :

$$\bar{s}_i = \frac{\oint_{P_i^*} s dl^{P_i^*}}{\oint_{P_i^*} dl^{P_i^*}} = \frac{t_i}{L_i}, \quad (3.149)$$

es decir, al cociente entre el tiempo observado correspondiente al rayo i y la longitud total de la trayectoria estimada de dicho rayo.

Se llama Backprojection al método que estima la lentitud en la celda j , s_j , como la media de todas las lentitudes medias asociadas a los rayos que atraviesan dicha celda j -ésima. Matemáticamente: sea

$$\text{sgn}(l_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } l_{ij} > 0, \\ 0 & \text{si } l_{ij} = 0, \end{cases}$$

entonces $N_j = \sum_{i=1}^m \text{sgn}(l_{ij})$ es el número de rayos que atraviesan la celda j , con lo cual

$$s_j^* = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{L_i} \operatorname{sgn}(l_{ij})}{N_j} = N_j^{-1} \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(l_{ij}) \frac{t_i}{L_i}, \quad \text{con } j = 1, \dots, n. \quad (3.150)$$

Denominándose a s_j^* Media Ponderada Elemental. En este algoritmo los rayos en la primera iteración son rectos, dado que se parte de un modelo de lentitudes homogéneo e isótropo (Berryman, 1990).

Berryman, (1991) también introduce otras variantes de este método. Una de ellas consiste en calcular la lentitud en la celda j mediante una media ponderada de los productos $l_{ij}t_i$:

$$s_j \approx \sum_{k=1}^m w_k l_{kj} t_k, \quad (3.151)$$

donde w_k es un conjunto de pesos adecuados. Para determinar los pesos se impone

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} s_j = t_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, m, \quad (3.152)$$

con lo cual, se tiene

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} \left(\sum_{k=1}^m w_k l_{kj} t_k \right) \approx t_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, m, \quad (3.153)$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^m w_k \left(\sum_{j=1}^n l_{ij} l_{kj} \right) t_k \approx t_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, m. \quad (3.154)$$

Una solución se obtiene escogiendo como pesos:

$$w_i = \left(\sum_{j=1}^n l_{ij}^2 \right)^{-1}, \quad \text{con } i = 1, \dots, m, \quad (3.155)$$

con lo cual si llamamos D a la matriz diagonal cuyos elementos son:

$$D_{ii} = (MM^T)_{ii} = \sum_{j=1}^n l_{ij}^2, \quad (3.156)$$

Entonces el método SBP sopesado se escribe:

$$\mathbf{s}^* = M^T D^{-1} \mathbf{t}. \quad (3.157)$$

Las fórmulas de backprojection suelen utilizarse en las primeras iteraciones de la resolución del problema inverso tomográfico no lineal.

3.3.2 ART (Algebraic Reconstruction Technique)

El método ART está basado en el método iterativo de resolución de sistemas lineales denominado Método de Proyecciones propuesto por Kaczmarz (1937) y popularizado entre otros por Tanabe (1971) para la resolución de sistemas lineales singulares.

Sea $M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{m}_m^T \end{pmatrix}$, donde \mathbf{m}_i^T es el vector asociado a la i -ésima ecuación del sistema

$M\mathbf{s} = \mathbf{t}$, es decir

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{s} = t_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.158)$$

El algoritmo ART mejora la relación existente entre el vector de modelos \mathbf{s} y el vector de datos \mathbf{t} , añadiendo la corrección óptima en la dirección \mathbf{m}_i , es decir,

$$\mathbf{m}_i^T (\mathbf{s} + \alpha_i \mathbf{m}_i) = t_i, \quad (3.159)$$

entonces

$$\alpha_i = \frac{t_i - \mathbf{m}_i^T \mathbf{s}}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i}. \quad (3.160)$$

De esta forma se define una secuencia iterativa, comenzando por un modelo $\mathbf{s}^{(0)}$ y utilizando una fila de la matriz M en cada iteración

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(k+1)} &= \mathbf{s}^{(k)} + \frac{t_i - \mathbf{m}_i^T \mathbf{s}^{(k)}}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i} \mathbf{m}_i = \\ &= \left(I_n - \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i} \right) \mathbf{s}^{(k)} + \frac{t_i}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i} \mathbf{m}_i = \\ &= P_{\langle \mathbf{m}_i \rangle}^\perp (\mathbf{s}^{(k)}) + \frac{t_i}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i} \mathbf{m}_i = \\ &= Q_i \mathbf{s}^{(k)} + \frac{t_i}{\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i} \mathbf{m}_i. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Por lo tanto el algoritmo ART proyecta $\mathbf{s}^{(k)}$ en dirección ortogonal a \mathbf{m}_i (es decir sustrae la componente en la dirección \mathbf{m}_i mediante el operador Q_i) y añade la componente óptima en dicha dirección. Se completa una única iteración de ART cuando hemos recorrido todos los vectores columna \mathbf{m}_i , es decir se ha proyectado sobre todas las ecuaciones del sistema. El modelo obtenido será el punto de partida de la siguiente iteración.

El algoritmo ART también se puede aplicar a la solución del problema tomográfico linealizado discreto en el sentido de los mínimos cuadrados, es decir, en vez de resolver $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$ se resuelve $M^T M\mathbf{s} = M^T \mathbf{t}$. En este caso los vectores \mathbf{m}_i son las filas de la matriz $M^T M$ y el vector \mathbf{t} se reemplaza por el vector $M^T \mathbf{t}$.

La figura 3.3.1 muestra la interpretación geométrica del método ART en el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

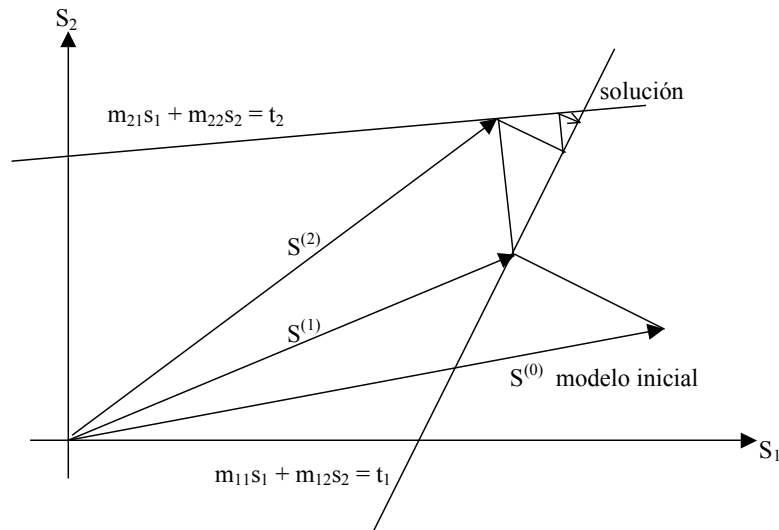


Figura 3.3.1: El algoritmo ART como un método de proyección, (Rosenfeld et al, 1982)

Tanabe (1971) demostró que si existe una única solución del sistema lineal, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s} . \quad (3.162)$$

Además si los hiperplanos del sistema lineal $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$ son perpendiculares se llega a la solución en dos pasos. Cabe plantear teóricamente la ortogonalización del sistema de vectores $\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_n^T$. Ramakrishnan (1979) sugiere un método de ortogonalización por pares que incrementa la velocidad de convergencia del método. Asimismo, Herman (1978) introdujo un parámetro de relajación $0 < \omega < 2$ para mejorar la estabilidad del método.

En el caso en que los datos observados estén afectados de ruido, o M sea deficiente en rango, el método ART no converge a un único punto y oscila en la intersección de varios hiperplanos (Dines y Lytle, 1979) si el problema es sobredeterminado ($m > n$). En el caso indeterminado ($m < n$), Tanabe (1971) probó que el algoritmo converge a la solución \mathbf{s} cuya distancia al modelo inicial es mínima, de ahí la importancia del modelo inicial.

Los problemas de convergencia del algoritmo ART motivaron la introducción del algoritmo SIRT.

3.3.3 SIRT

Es una modificación del algoritmo ART. En el algoritmo ART el modelo de lentitudes se modifica en cada iteración. En el algoritmo SIRT, primero se proyecta sobre todos los hiperplanos del sistema lineal y la corrección que se aplica a cada celda es una media de las correcciones ART calculadas para los rayos que atraviesan dicha celda (de una manera análoga al algoritmo SBP). Entonces:

$$\mathbf{s}_j^{(k+1)} = \mathbf{s}_j^{(k)} + \frac{1}{N_{jj}} \frac{\sum_{i=1}^m (t_i - \mathbf{m}_i \mathbf{s}^{(k)})}{\sum_{k=1}^n m_{ik}^2} \mathbf{m}_i, \quad (3.163)$$

donde N_{jj} es el número de rayos que atraviesan la celda j . Este proceso de media aumenta la estabilidad del método, pero suele ralentizar su convergencia.

El algoritmo SIRT se escribe en notación vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} + N^{-1} M^T D^{-1} (t - M \mathbf{s}^{(k)}), \quad (3.164)$$

donde N es la matriz diagonal con componentes N_{jj} y D es la matriz diagonal de componentes $D_{ii} = (MM^T)_{ii} = \sum_{j=1}^n l_{ij}^2$.

La convergencia de este método fue probada originariamente por Ivansson (1983). Asimismo Berryman, (1991) analiza la convergencia del método SIRT, considerándolo como un caso particular del algoritmo de Richardson ya mencionado en la sección 3.2.11.

3.4 Incertidumbre de los problemas lineales y técnicas de regularización

En los casos de problemas inversos lineales del tipo $M\mathbf{s} = \mathbf{t}$, la región lineal de equivalencia V_{tol} se define como el conjunto de modelos cuyo error de predicción de los datos observados es menor que tol :

$$V_{tol} = \left\{ \mathbf{s} : \|M\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2 \leq tol \right\}, \quad (3.165)$$

y corresponde a la hipercuádrlica (Fernández Martínez et al, 2012)

$$\mathbf{s}^T M^T M \mathbf{s} - 2\mathbf{s}^T M^T \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{t} \leq tol^2, \quad (3.166)$$

cuyos ejes principales son las direcciones correspondientes a los vectores propios de $M^T M$. En el caso de los problemas puramente sobredeterminados, la hipercuádrlica es un hiperelipsoide centrado en la solución de mínimos cuadrados del sistema,

$$\mathbf{s}_{MC} = M^\dagger \mathbf{t} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{t}, \quad (3.167)$$

y las direcciones en el espacio de modelos en las que la incertidumbre es máxima corresponden a los valores singulares más pequeños de M (figura 3.4.1).

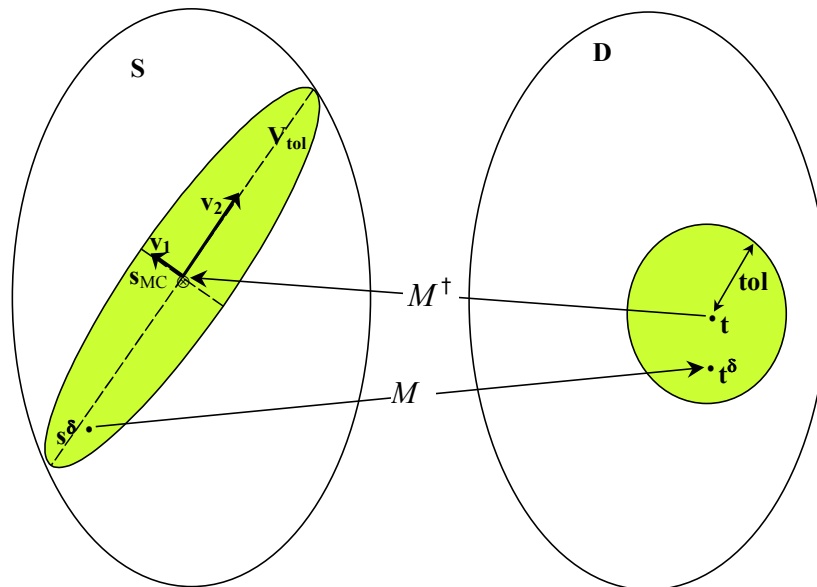


Figura 3.4.1: Región lineal de equivalencia. Los vectores v_1 y v_2 representan los vectores propios de la matriz $M^T M$, con respectivos valores propios λ_1 y λ_2 , ($\lambda_1 > \lambda_2$).

Si el problema es puramente subdeterminado, la hipercuádrlica, es un cilindro elíptico³ cuyos ejes (valles) tienen las direcciones de los vectores generadores de $Ker(M)$, y la solución de norma mínima es el modelo de dicha línea de valle que está más próximo al origen. Por último, las soluciones de los problemas inversos lineales deficientes en rango, se encuentran en hipercilindros donde el número de direcciones de máxima variabilidad coincide con la dimensión de $Ker(M)$.

En el caso de los problemas deficientes en rango, el efecto que produce la regularización es el de transformar la región de equivalencia, que pasa de ser un hipercilindro a ser un hiperelipsoide de ecuación

$$\mathbf{s}^T (M^T M + \varepsilon^2 I) \mathbf{s} - 2\mathbf{s}^T M^T \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{t} \leq tol^2, \quad (3.168)$$

cuyo centro se localiza en

$$\mathbf{s}_{MCR} = (M^T M + \varepsilon^2 I)^{-1} M^T \mathbf{t}, \quad (3.169)$$

que coincide con la solución de mínimos cuadrados regularizada. Asimismo se produce una ligera rotación de los ejes de la hipercuádrlica (figura 3.4.2).

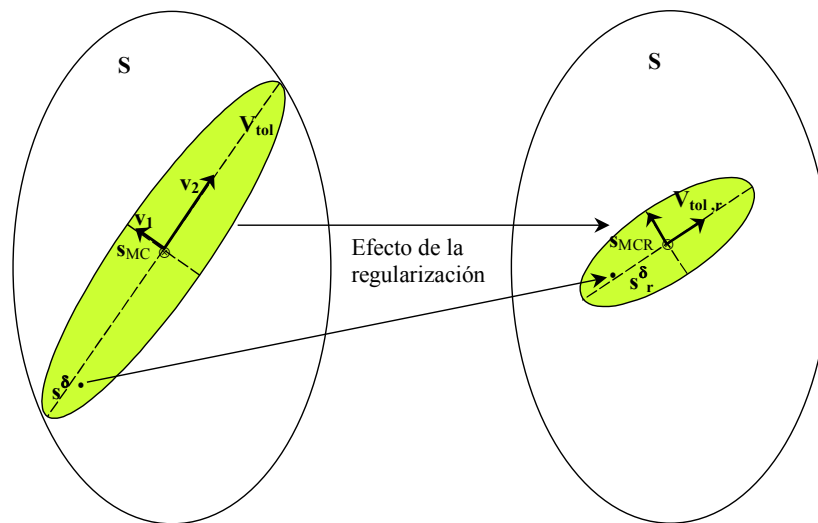


Figura 3.4.2: Efecto de la regularización en la región lineal de equivalencia.

Si se dispone de un modelo de referencia \mathbf{s}_{ref} , la región lineal de equivalencia antes descrita con (3.165), en este caso es:

³ En el caso de un espacio de modelos tridimensional, la hipercuádrlica corresponde a un cilindro elíptico si el rango de M es 2, y a un cilindro parabólico si el rango es 1. En el caso n -dimensional nos referimos de forma genérica a un cilindro elíptico.

$$\|M\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_{\text{ref}}\|_2^2 \leq \text{tol}^2, \quad (3.170)$$

y corresponde a la hipercuádrica

$$\mathbf{s}^T M^T M \mathbf{s} - 2\mathbf{s}^T M^T \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{t} + \varepsilon^2 \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \varepsilon^2 \mathbf{s}_{\text{ref}}^T \mathbf{s}_{\text{ref}} - 2\varepsilon^2 \mathbf{s}^T \mathbf{s}_{\text{ref}} \leq \text{tol}^2, \quad (3.171)$$

cuyo centro coincide con la solución regularizada de mínimos cuadrados (ver sección 3.1.9):

$$\mathbf{s}_{\text{MCRr}} = \mathbf{s}_{\text{ref}} + (M^T M + \varepsilon^2 I_n)^{-1} M^T (\mathbf{t} - M\mathbf{s}_{\text{ref}}). \quad (3.172)$$

Teniendo en cuenta la descomposición en valores singulares de la matriz $M = U\Sigma V^T$, se tiene:

$$\mathbf{s}_{\text{MCRr}} = \mathbf{s}_{\text{ref}} + V (\Sigma^T \Sigma + \varepsilon^2 I_n)^{-1} \Sigma^T U^T (\mathbf{t} - M\mathbf{s}_{\text{ref}}), \quad (3.173)$$

con lo cual

$$V^T \mathbf{s}_{\text{MCRr}} = V^T \mathbf{s}_{\text{ref}} + (\Sigma^T \Sigma + \varepsilon^2 I_n)^{-1} \Sigma^T U^T (\mathbf{t} - M\mathbf{s}_{\text{ref}}), \quad (3.174)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\text{MCRr}}^V &= \mathbf{s}_{\text{ref}}^V + (\Sigma^T \Sigma + \varepsilon^2 I_n)^{-1} \Sigma^T (\mathbf{t} - M\mathbf{s}_{\text{ref}})^U = \\ &= \mathbf{s}_{\text{ref}}^V + (\Sigma^T \Sigma + \varepsilon^2 I_n)^{-1} \Sigma^T \Delta \mathbf{t}_{\text{ref}}^U, \end{aligned} \quad (3.175)$$

donde denominamos $\Delta \mathbf{t}_{\text{ref}}^U$ al vector $(\mathbf{t} - M\mathbf{s}_{\text{ref}})$ referido a la base ortonormada formada por los vectores columna de la matriz U y $\mathbf{s}_{\text{MCRr}}^V$, $\mathbf{s}_{\text{ref}}^V$ a la solución y al modelo de referencia referidos a la base V . La expresión anterior (3.175) mostrará cómo influye el hecho de disponer de un modelo de referencia en la solución de mínimos cuadrados, dado que en este caso la solución posee las siguientes coordenadas en la base V :

$$\left(\frac{\varepsilon^2 s_{\text{ref},k}^V + \mu_k t_k^U}{\mu_k^2 + \varepsilon^2}, s_{\text{ref},j}^V \right)_{\substack{k=1,\dots,r \\ j=r+1,\dots,n}}. \quad (3.176)$$

Por lo tanto la solución regularizada de mínimos cuadrados se escribe:

$$\mathbf{s}_{\text{MCRr}} = \sum_{k=1}^{r=\text{rango}(M)} \frac{\varepsilon^2 s_{\text{ref},k}^V + \mu_k t_k^U}{\mu_k^2 + \varepsilon^2} \mathbf{v}_k + \sum_{j=r+1}^n s_{\text{ref},j}^V \mathbf{v}_j. \quad (3.177)$$

Las coordenadas de \mathbf{s}_{MCRr} ahora se encuentran informadas por las coordenadas del modelo de referencia, de forma que aquellas coordenadas que originalmente residían en el núcleo del operador M son sustituidas por las respectivas coordenadas del modelo de referencia respecto de la base V , y el resto de coordenadas son sustituidas por unas coordenadas que resultan de un cálculo ponderado de las coordenadas del modelo de referencia, los valores ε , μ_k correspondientes y los datos t_k^U . La figura 3.4.3 ilustra este proceso en un problema bidimensional.

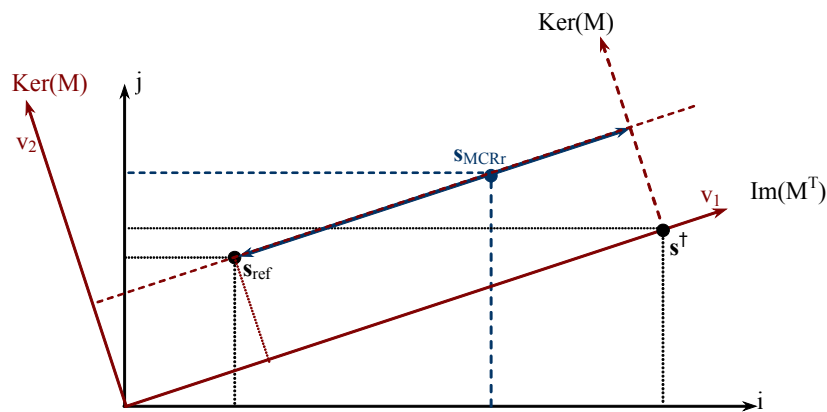


Figura 3.4.3: Relación entre el modelo de referencia, la solución proporcionada por la pseudoinversa y la solución de mínimos cuadrados regularizados.

De esta manera se logra evitar la presencia de inestabilidades, pero se genera el problema de determinar el valor adecuado del parámetro de regularización ε^2 que fija la importancia relativa entre el error de predicción y la distancia al modelo de referencia. Esto explica la importancia de la información a priori en el proceso de inversión.

**Capítulo 4: PROBLEMAS INVERSOS NO
LINEALES Y EL PROBLEMA SÍSMICO-
TOMOGRÁFICO EN TRANSMISIÓN**

En este capítulo se analizan los métodos de resolución de los problemas no lineales discretos y se explican las diferencias principales con los problemas lineales, comparando las zonas de equivalencia de ambos problemas y su relación con el análisis de incertidumbre de la solución. Se explica como los métodos de regularización de Tikhonov y Arsenin no evitan que la incertidumbre de los problemas inversos continúe existiendo. Finalmente se plantea el problema sísmico-tomográfico continuo, que es un problema no lineal debido a la dependencia de los caminos de Fermat con respecto al modelo de lentitudes y se presentan las distintas maneras de abordar el problema mediante discretización y linealización mostrando el efecto de dichas técnicas en el análisis de incertidumbre de los problemas discretos que son los que en la práctica se abordan.

4.1 Problemas inversos no lineales discretos $F(s) = t$. Regiones de equivalencia e Incertidumbre

Los problemas inversos suelen estar mal planteados¹, lo que implica que, incluso en presencia de información a priori (regularización), existe una o varias familias de modelos, que predicen (ajustan) los datos con la misma tolerancia de error (exactitud). A dichos modelos se les denomina modelos equivalentes. El estudio de estas familias de modelos se denomina análisis de incertidumbre de la solución del problema inverso, y es un campo de investigación importante dado que permite la toma de decisiones y el análisis epistemológico de riesgos.

La incertidumbre en la solución se debe entre otras causas a:

1. El ruido en los datos observados que deforma no linealmente la topografía de la función objetivo.
2. La cobertura angular incompleta del dominio objeto de estudio debido a restricciones de tipo técnico.
3. Las hipótesis realizadas en el problema directo (por ejemplo isotropía del campo de lentitudes), y a las aproximaciones numéricas (por ejemplo la discretización, la linealización, los algoritmos de trazado de rayos utilizados, etc..) realizadas en la resolución de los problemas directos e inversos.

¹ Un problema está bien planteado si

- 1.- Existe solución
- 2.- Es única

3.- La solución depende de forma continua de los datos (el operador F^{-1} es continuo).

Un problema está mal planteado si falla alguna de las tres condiciones anteriores, lo más frecuente es que el operador F^{-1} no sea continuo, en este caso se dice que el problema es inestable o está mal condicionado.

4.1.1 Regiones de Equivalencia

Analizaremos la región de equivalencia de los problemas inversos no lineales discretos, dado que como se verá el problema sísmico-tomográfico discreto pertenece a esta categoría. En este caso el problema se puede plantear de forma genérica como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}, \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)_{\{\Phi_j(\mathbf{x})\}} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{s} &\longrightarrow (F_1(\mathbf{s}), \dots, F_m(\mathbf{s})) \end{aligned}$$

y donde $F_i(\mathbf{s}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones componente de \mathbf{F} .

La función

$$C(\mathbf{s}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}\|_2^2 = \sum_{k=1}^m (F_k(\mathbf{s}) - t_k)^2, \quad (4.2)$$

se denomina función objetivo o función de coste y es una función no lineal de \mathbf{s} . Se define la región de equivalencia como la formada por aquellos modelos que cumplen la condición

$$C(\mathbf{s}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}\|_2^2 < tol^2,$$

donde tol es una constante prefijada. Se ha demostrado (Fernández Martínez et al, 2012) la relación entre la no linealidad del problema inverso y la topografía de la función objetivo, explicándose como según la aproximación local del campo \mathbf{F} que se adopte (de primer o segundo orden), varía la región de equivalencia.

El desarrollo de Taylor de orden 2 de las funciones $F_i(\mathbf{s}) \forall i = 1, \dots, m$, calculado en un entorno $\delta(\mathbf{s}_0)$ del modelo \mathbf{s}_0 es:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{s}) = & F_i(\mathbf{s}_0) + \nabla F_i(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_{F_i}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \\ & + o_i(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$\nabla F_i(\mathbf{s}_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial s_1}(\mathbf{s}_0), \dots, \frac{\partial F_i}{\partial s_n}(\mathbf{s}_0) \right), \quad (4.4)$$

$$H_{F_i}(\mathbf{s}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_i}{\partial s_1^2}(\mathbf{s}_0) & \dots & \frac{\partial^2 F_i}{\partial s_1 \partial s_n}(\mathbf{s}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial s_1 \partial s_n}(\mathbf{s}_0) & \dots & \frac{\partial^2 F_i}{\partial s_n^2}(\mathbf{s}_0) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

y \mathcal{o}_i son infinitésimos de orden superior a $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2$.

Por lo tanto el desarrollo de Taylor de orden 2 del funcional $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, se escribe:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{s}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{s}_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla F_1(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{I}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_{F_1}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_{F_m}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2), \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{s}) &= \mathbf{F}(\mathbf{s}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \\ &+ \mathbf{T}_S(\mathbf{s}_0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\mathbf{s}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_1}(\mathbf{s}_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial s_n}(\mathbf{s}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial s_1}(\mathbf{s}_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial s_n}(\mathbf{s}_0) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

recibe el nombre de matriz Jacobiana de \mathbf{F} en \mathbf{s}_0 ,

$$\mathbf{T}_S(\mathbf{s}_0) = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_{F_1}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_{F_m}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

es el vector que contiene los términos de segundo orden de las funciones componentes, y $\mathbf{o}(\|\mathbf{s}-\mathbf{s}_0\|_2^2)$ es el vector de componentes $o_i(\|\mathbf{s}-\mathbf{s}_0\|_2^2)$, $i = 1, \dots, m$.

Si se considera una aproximación de primer orden, tendremos

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t} \simeq (\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \quad (4.9)$$

y por lo tanto la región de los modelos equivalentes, $\|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}\|_2^2 \leq tol^2$, viene identificada mediante la hipercuádrica de ecuación

$$\begin{aligned} & (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T (J_{\mathbf{F}}^T J_{\mathbf{F}})_{(\mathbf{s}_0(\mathbf{x}))} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \\ & + 2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T J_{\mathbf{F}}^T(\mathbf{s}_0)(\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t}) + \|(\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t})\|_2^2 \leq tol^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

lo que indica que, cuando se adopta una aproximación de primer orden, la región linealizada de equivalencia posee formas de valles alargados, en las direcciones de $Ker(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0))$. Y por lo tanto, los ejes principales de la región definida por la hipercuádrica (4.10) en el espacio \mathbb{R}^n son los vectores de la base \mathbf{V} correspondiente a la descomposición en valores singulares de la matriz $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)$. Los semiejes de dicha hipercuádrica son inversamente proporcionales a los valores singulares de la matriz $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)$, con lo cual los valores singulares más pequeños, asociados al mal condicionamiento de $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)$, dan lugar a los semiejes mayores según las direcciones principales \mathbf{V} . En estas direcciones la incertidumbre del problema inverso linealizado es mayor, es decir, los modelos que se encuentran en estas zonas aunque muy dispares, ajustan igual de bien los datos. Además, dado que el jacobiano $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)$ depende del modelo \mathbf{s}_0 , la región no lineal de equivalencia cambia de dirección dependiendo del modelo \mathbf{s}_0 que se adopte en la región linealizada de equivalencia, con lo cual la región no lineal de equivalencia se curva y solo coincide localmente con la región lineal de equivalencia cuyos valles son rectilíneos (figura 4.1.1).

En el caso de los problemas no lineales sobredeterminados, los valles suelen ocupar una región acotada, mientras que en el caso de problemas subdeterminados es posible la existencia de regiones de equivalencia tubulares de talla infinita, en el espacio de modelos. Asimismo si el operador \mathbf{F} no es inyectivo, pueden existir diferentes regiones de equivalencia no conexas, algo que no ocurre en los problemas lineales donde la región de equivalencia es conexa (Fernández Martínez et al, 2012).

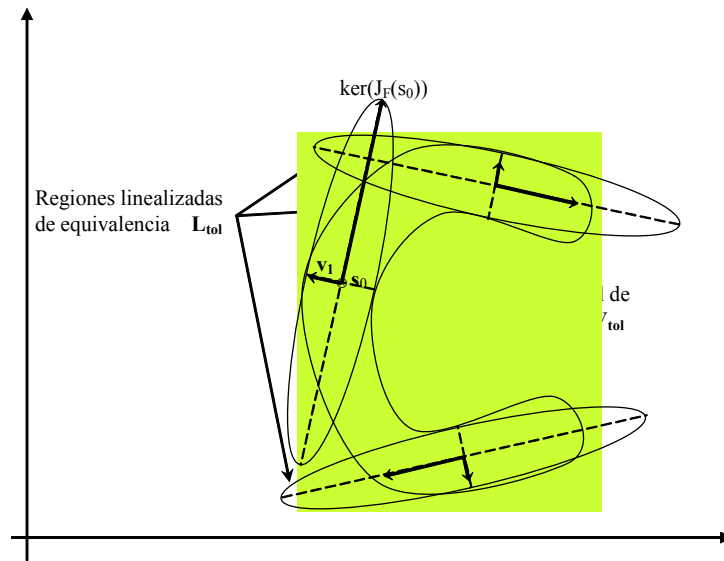


Figura 4.1.1: Regiones de equivalencia.

Al análisis anterior, que sólo tiene en cuenta la dependencia de la matriz Jacobiana respecto al modelo de lentitudes, es preciso añadir que si se toma una aproximación de segundo orden de la función objetivo, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t} = & (\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \\ & + \mathbf{T}_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}_0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

lo que explica las diferencias entre la hipercuadrada linealizada (4.10) y la hipersuperficie cuártica, que se obtiene al considerar también las matrices Hessianas de las funciones componentes del funcional del problema directo

$$\begin{aligned} C(\mathbf{s}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}\|_2^2 \simeq \\ \simeq \|\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t} + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \mathbf{T}_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}_0)\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

ya que el desarrollo de la expresión anterior posee términos de segundo, tercer y cuarto orden. El análisis de la incertidumbre de un problema inverso no lineal a partir de la hipercuadrada linealizada (que tiene como matriz la Hessiana linealizada $(J_{\mathbf{F}}^T J_{\mathbf{F}})_{(\mathbf{s}_0)}$) sólo captura una parte muy local de la incertidumbre total del problema inverso. Considerando el desarrollo de Taylor de orden 2 del funcional $C(\mathbf{s})$ en el entorno $\delta(\mathbf{s}_0)$, se tiene:

$$C(\mathbf{s}) = C(\mathbf{s}_0) + \nabla C(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T H_C(\mathbf{s}_0)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + o_C(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|_2^2), \quad (4.13)$$

donde además se verifica

$$\nabla C(\mathbf{s}_0) = 2J_F^T(\mathbf{s}_0)(\mathbf{F}(\mathbf{s}_0) - \mathbf{t}), \quad (4.14)$$

y

$$H_C(\mathbf{s}_0) = 2(J_F^T J_F)_{(\mathbf{s}_0)} + 2 \sum_{k=1}^m (F_k(\mathbf{s}_0) - t_k)^2 H_{F_k}(\mathbf{s}_0). \quad (4.15)$$

Se concluye que la aproximación de segundo orden de la región no lineal de equivalencia

$$C(\mathbf{s}) \leq tol^2, \quad (4.16)$$

es una hipercuádrlica que tiene por matriz $\frac{1}{2}H_C(\mathbf{s}_0)$, que difiere de la Hessiana

linealizada $(J_F^T J_F)_{(\mathbf{s}_0)}$ en el término $\sum_{k=1}^m (F_k(\mathbf{s}_0) - t_k)^2 H_{F_k}(\mathbf{s}_0)$, lo que puede provocar

que la matriz $H_C(\mathbf{s}_0)$ no sea semidefinida positiva a diferencia de la Hessiana linealizada. Esto implica que la matriz de la hipercuádrlica puede tener valores propios negativos y por lo tanto puede tratarse (imaginándola en dimensión 3) de un paraboloide hiperbólico, por lo que la región de equivalencia no se limitaría a un único valle, y podría estar compuesta por diferentes valles comunicados por colladas (puntos silla). Esto nos da una idea de la complejidad de la zona y cómo podemos pasar de un modelo a otro equivalente e igual de preciso, siguiendo direcciones que contienen modelos equivalentes pero con peor ajuste.

4.1.2 Regularización y Análisis de Incertidumbre

Tikhonov y Arsenin (1977) establecieron los fundamentos de la teoría de regularización con el objetivo de evitar soluciones inestables y espúreas de los problemas inversos mal condicionados.

Dado el problema

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}, \text{ con } \mathbf{s} \in S, \mathbf{t} \in D, \quad (4.17)$$

donde \mathbf{F} es el operador que actúa entre los espacios métricos S y D . Se define un problema condicionalmente bien condicionado como aquel donde

- 1.- Se conoce “a priori” que la solución existe y está contenida en un determinado subconjunto $C \subset S$, llamado conjunto correcto (“Correctness Set”)
- 2.- El operador \mathbf{F} es biyectivo entre C y el conjunto imagen de C mediante \mathbf{F} , $\mathbf{F}(C)$.
- 3.- El operador \mathbf{F}^{-1} es continuo en $\mathbf{F}(C)$.

Tikhonov y Arsenin (1977) demuestran que C puede ser cualquier subconjunto compacto de S , ya que si el operador \mathbf{F} es continuo entre C y $\mathbf{F}(C)$, entonces el operador \mathbf{F}^{-1} es continuo en $\mathbf{F}(C)$.

Asumiendo que el problema (4.17) es condicionalmente bien condicionado, se denomina cuasi-solución a un modelo $\mathbf{s}^C \in C$ tal que

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{s}^C) - \mathbf{t}^{\text{obs}}\|_{\mathbf{D}} = \inf_{\mathbf{s} \in C} \|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}^{\text{obs}}\|_{\mathbf{D}}, \quad (4.18)$$

donde \mathbf{t}^{obs} son los datos observados, que han sido medidos con un error que denominaremos $\delta\mathbf{t}$, es decir $\mathbf{t}^{\text{obs}} = \mathbf{t}^{\text{v}} + \delta\mathbf{t}$, siendo \mathbf{t}^{v} los datos exentos de ruido, que obviamente son desconocidos. La estrategia anterior pretende que si el conjunto C es elegido correctamente (es decir contiene la solución verdadera \mathbf{s}^{v} correspondiente a los datos \mathbf{t}^{v}) entonces la cuasi-solución \mathbf{s}^C estará próxima a \mathbf{s}^{v} . Obviamente esto dependerá de \mathbf{F} , de C y del nivel de ruido de los datos $\delta\mathbf{t}$ (figura 4.1.2).

Aunque el problema (4.18) se puede resolver mediante métodos estándar de minimización, es necesario conocer “a priori” el conjunto correcto C . Puesto que cualquier bola en un espacio métrico es un conjunto compacto, si se conoce un modelo de referencia \mathbf{s}_{ref} entonces será compacto y se puede tomar como conjunto correcto.

$$C = \{\mathbf{s} \in S : \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_{\text{ref}}\|_S \leq \delta\}. \quad (4.19)$$

Se introducen los métodos de regularización de Tikhonov para aproximar el problema inverso inicialmente mal condicionado mediante una familia de problemas regularizados bien condicionados

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{s}) = \mathbf{t}, \quad \text{siendo } \varepsilon > 0 \text{ el parámetro de regularización,} \quad (4.20)$$

que proporcionen soluciones $\mathbf{s}_\varepsilon = F_\varepsilon^{-1}(\mathbf{t})$ tales que $\mathbf{s}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{s}^v$. Es decir, el operador no continuo F^{-1} se aproxima mediante una familia de operadores continuos F_ε^{-1} que dependen del parámetro ε .

Tikhonov y Arsenin (1977) muestran como una manera de estabilizar la inversión es introduciendo una función de desajuste con un término que tenga en cuenta la distancia con respecto a un modelo de referencia

$$\inf_{\mathbf{s} \in C} \left(\|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}^{\text{obs}}\|_D + \varepsilon^2 \|\mathbf{s} - \mathbf{s}^{\text{ref}}\|_S \right). \quad (4.21)$$

El principal objetivo de la regularización es estabilizar la búsqueda de la solución seleccionando, entre el conjunto de soluciones posibles, aquellas que dependan de forma continua de los datos y que además posean la propiedad específica de la regularización escogida.

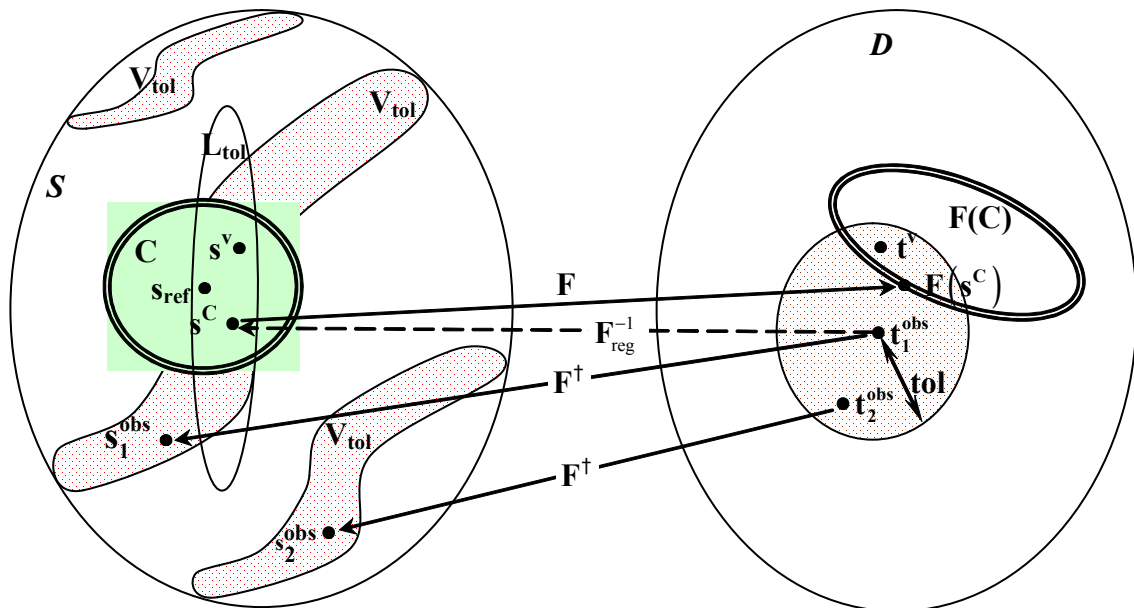


Figura 4.1.2: Una cuasi-solución es un modelo $\mathbf{s}^C \in C$ tal que $F(\mathbf{s}^C)$ está cercano a los datos $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$. La aplicación del operador de regularización a un tiempo observado $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$ produce una estabilización del modelo pasando de $\mathbf{s}_1^{\text{obs}}$ a \mathbf{s}^C , más cercano a la solución verdadera \mathbf{s}^v si los datos observados $\mathbf{t}_1^{\text{obs}}$ están cercanos a los datos reales \mathbf{t}^v .

Es preciso observar que este proceso de regularización no elimina la incertidumbre del problema, puesto que en el caso de los problemas inversos no lineales la región de equivalencia no tiene por qué ser conexa pudiendo existir modelos equivalentes, compatibles con la información a priori, que predicen los datos observados con la

misma cota de error y que se encuentran en “valles” distintos. Por lo cual la solución regularizada obtenida puede que haya sido buscada y encontrada en un valle donde no esté el verdadero modelo que ha generado los datos observados.

En la sección 6.2 se explicará como la incertidumbre del problema sísmico-tomográfico puede ser analizada mediante el algoritmo Geometric Sampling (Fernández Martínez et al, 2012).

4.2 El Problema sísmico-tomográfico

El problema tomográfico en sismica de transmisión consiste en inferir la distribución de velocidades de las ondas P en un macizo rocoso o en un medio geológico a partir de los tiempos de viaje de dichas ondas P, entre un conjunto de parejas de emisor-recepción situadas en la frontera del dominio objeto de estudio (figura 4.2.1).

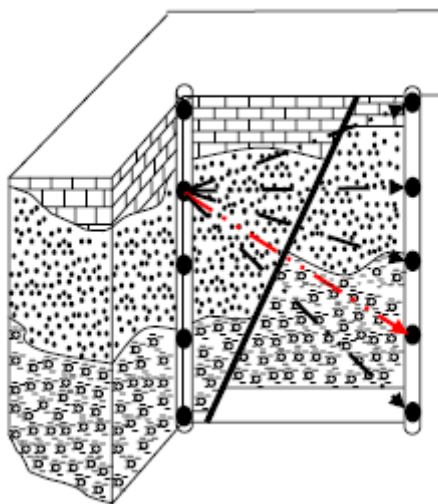


Figura 4.2.1: Esquema representativo de un experimento tomográfico entre dos sondeos en un macizo rocoso.

Denotemos mediante $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el dominio geológico objeto de estudio y por $\partial\Omega$ su frontera. Supongamos que desde la frontera $\partial\Omega$ se realiza un experimento sísmico-tomográfico, es decir, es posible obtener un conjunto de datos observados de tiempos de viaje t_1, t_2, \dots, t_m entre m parejas de emisores y receptores situados en $\partial\Omega$.

El tiempo de viaje de una onda sísmica es la integral de la lentitud a lo largo del camino que sigue el rayo entre el emisor y el receptor. Para ello se define el siguiente funcional:

$$\tau^P(s) = \int_P s(\mathbf{x}) dl^P, \quad (4.22)$$

donde P es un camino arbitrario que une el emisor con el receptor, siendo $s(\mathbf{x})$ el modelo de lentitudes del medio. Las ondas siguen el principio variacional de Fermat que establece que el camino correcto entre emisor y receptor es el que hace mínimo el tiempo de viaje, es decir, el camino P^* que minimiza el funcional $\tau^P(s)$ con respecto a P siendo $s(\mathbf{x})$ un modelo de lentitudes del medio. Al camino correcto P^* se le denomina trayecto de Fermat, siendo τ^* su tiempo de viaje asociado, es decir,

$$\tau^*(s) = \min_{P \in \mathcal{P}} \tau^P(s), \quad (4.23)$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de todas las trayectorias posibles entre el emisor y el receptor.

Se puede concluir diciendo que el principio de Fermat establece que:

$$\tau^*(s) = \int_{P^*} s(\mathbf{x}) dl^{P^*} = \min_{P \in \mathcal{P}} \int_P s(\mathbf{x}) dl^P. \quad (4.24)$$

Además, como se ha visto en la sección 2.7, los caminos de Fermat poseen la propiedad de ser **estacionarios**, es decir, perturbaciones infinitesimales en el modelo de lentitudes originan a su vez una “pequeña” perturbación en el camino P^* haciendo que el tiempo de viaje asociado, sea estable, es decir, el funcional $\tau(s)$, es estable. Recordemos que en el capítulo 2 se ha comentado como la Ley de Snell, que rige el problema directo sísmico-tomográfico (trazado de rayos) en medios localmente homogéneos, es una consecuencia del Principio de Fermat y de la estacionariedad del funcional de tiempos de viaje. Igualmente se ha visto que la aproximación de tipo rayo es una aproximación de altas frecuencias de la ecuación de ondas en medios acústicos, y la posibilidad de utilizar la ecuación Eikonal para la resolución del problema directo, puesto que es más general al ser válida para discretizaciones de tipo P_1 o P_2 del modelo de lentitudes.

4.2.1 El problema sísmico-tomográfico inverso continuo

El problema sísmico-tomográfico en transmisión (*PCT*) es un problema continuo y se escribe de la siguiente forma:

(*PCT*) Dado un dominio geológico $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y un conjunto de datos observados de tiempos de viaje t_1, t_2, \dots, t_m entre m parejas de emisores y receptores situados en $\Gamma \equiv \partial\Omega$, determinar el modelo de lentitudes $s(\mathbf{x})$ del medio geológico de manera que se verifiquen las m ecuaciones integrales

$$\int_{P_i^*} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} = t_i \quad i = 1 \dots m, \quad (4.25)$$

donde $P_i^*(s)$ son los caminos de Fermat correspondientes al rayo i para el modelo de lentitudes $s(\mathbf{x})$. Dicho problema corresponde a una ecuación integral de Fredholm de primera especie no lineal con núcleo singular $K(\gamma, \mathbf{x})$.

$$\int_{\Omega} K(\gamma, \mathbf{x}) s(\mathbf{x}) dx = t \quad \text{con} \quad K(\gamma, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \gamma \equiv P_i^* \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \gamma \end{cases}. \quad (4.26)$$

Ivansson (1986, 1987) demostró resultados de unicidad de solución en el caso de tomografía de rayos X (rayos rectos) con cobertura angular completa del dominio Ω . Para ello supone que el conjunto \tilde{P} , de rayos es del tipo Strichartz, es decir, se verifican las siguientes condiciones:

1. Para todo rayo $P \in \tilde{P}$ existe un cono cuya generatriz es el propio rayo, de manera que todos los rayos del cono pertenecen a \tilde{P} .
2. Todo rayo perteneciente al conjunto puede ser trasladado a una región donde $s(\mathbf{x}) = 0$ de manera que todos los rayos trasladados paralelamente al anterior pertenecen a \tilde{P} .
3. Cada punto del exterior de Ω está atravesado al menos por un rayo de dicho conjunto.

Bajo estas hipótesis se tiene:

$$(a) \quad \int_P \delta s(\mathbf{x}) dl^P = 0 \quad \forall P \in \tilde{P} \quad \Leftrightarrow \quad \delta s(\mathbf{x}) = 0(\mathbf{x}). \quad (4.27)$$

(b) $s(\mathbf{x})$ queda determinada, de manera única si se conocen las integrales:

$$\int_P s(\mathbf{x}) dl^P \quad \forall P \in \tilde{P}. \quad (4.28)$$

Ivansson además demuestra un resultado de no unicidad en el caso de medios homogéneos que presentan una anisotropía de tipo elíptico, es decir, el campo escalar de lentitudes, posee dos direcciones principales y la lentitud depende del azimut del rayo sísmico. Estos resultados, aunque teóricos, son prueba de una de las principales complejidades del problema tomográfico en transmisión: la falta de unicidad en la solución. La manera de abordar dicho problema es mediante técnicas de regularización y/o de análisis de incertidumbre de la solución.

Dicho problema sísmico-tomográfico continuo se puede plantear introduciendo el campo vectorial

$$\mathbf{F}(s(\mathbf{x})) = (F_1(s(\mathbf{x})), F_2(s(\mathbf{x})), \dots, F_m(s(\mathbf{x}))), \quad (4.29)$$

donde

$$F_i(s(\mathbf{x})) = \int_{P_i^*} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*}, \quad (4.30)$$

y P_i^* denota el camino de Fermat relativo a la i -ésima pareja de emisión-recepción situada en la frontera $\partial\Omega$, entonces el problema tomográfico inverso continuo se escribe mediante la ecuación funcional:

$$\mathbf{F}(s(\mathbf{x})) = \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m, \quad (4.31)$$

donde \mathbf{F} es un operador entre un espacio de funciones y el conjunto de datos \mathbb{R}^m .

Si se conociesen las trayectorias de Fermat $\{P_i^*\}_{i=1,\dots,m}$ se trataría de un operador lineal pues:

$$\mathbf{F}(\alpha s_1(\mathbf{x}) + \beta s_2(\mathbf{x})) = \alpha \mathbf{F}(s_1(\mathbf{x})) + \beta \mathbf{F}(s_2(\mathbf{x})). \quad (4.32)$$

La falta de unicidad en este caso estaría ocasionada por el conjunto de modelos

$$\delta s(\mathbf{x}) \in \text{Ker}(\mathbf{F}), \quad (4.33)$$

Puesto que $\mathbf{F}(s(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(s(\mathbf{x}) + \delta s(\mathbf{x})) = \mathbf{t}$. No obstante el problema tomográfico continuo es no lineal, lo cual tiene repercusiones en su forma de resolución y en el análisis de incertidumbre visto en el capítulo 4.1.

El problema sísmico-tomográfico inverso continuo es además, por génesis, indeterminado dada la dimensión del espacio de modelos y que se posee un conjunto discreto de tiempos de viaje. La solución consistirá en buscar $s(\mathbf{x})$ en un subespacio de dimensión finita del espacio de modelos, lo que se conoce como el problema sísmico-tomográfico inverso discreto. La figura 4.2.2 ilustra los posibles caminos a seguir, que se comentarán a continuación.

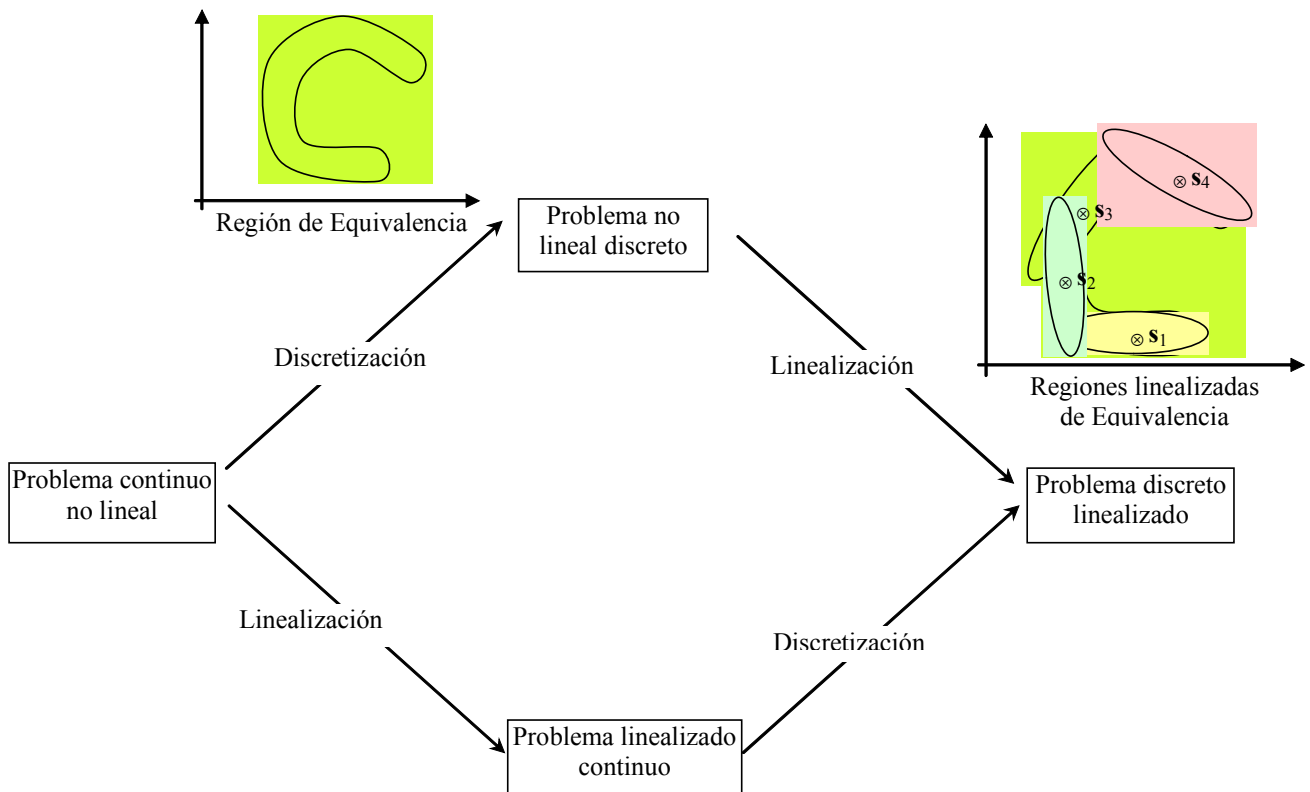


Figura 4.2.2: Posibilidades en el planteamiento y resolución del problema sísmico-tomográfico inverso continuo. Regiones de equivalencia del problema no lineal discreto y del problema discreto linealizado.

4.2.2 Discretización del Problema sísmico-tomográfico inverso no lineal

Se discretiza buscando la solución del problema inverso continuo en un subespacio de funciones de dimensión finita S_n del espacio de modelos admisibles:

$$s(\mathbf{x}) \in S_n = \langle \Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.34)$$

es decir,

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n s_j \Phi_j(\mathbf{x}) = (s_1, \dots, s_n)_{\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}} = \mathbf{s}, \quad (4.35)$$

donde $\{\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})\}$ constituye el conjunto de funciones de base del conjunto S_n . Los coeficientes s_j son las coordenadas de la función o en este caso campo escalar, $s(\mathbf{x})$, en la base $\{\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})\}$ y el vector $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ representa las coordenadas de $s(\mathbf{x})$ en la base ya mencionada.

El planteamiento anterior permite afirmar que el espacio lineal de funciones S_n es isomorfo a \mathbb{R}^n .

Una vez realizada la discretización se plantea el problema anterior como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: S_n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ s(\mathbf{x}) &\longrightarrow (F_1(s(\mathbf{x})), F_2(s(\mathbf{x})), \dots, F_m(s(\mathbf{x}))) \end{aligned}$$

4.2.3 Linealización del Problema sísmico-tomográfico inverso discreto

Nuestro problema presenta aún otra dificultad en su abordaje pues la dependencia de los caminos de Fermat, P_i^* , con respecto al modelo discreto de lentitudes \mathbf{s} , provoca que el problema sísmico-tomográfico inverso sea en realidad no lineal. Para solventar esta dificultad es necesario proceder a su linealización.

Dado que los funcionales F_i del campo vectorial \mathbf{F}

$$F_i(\mathbf{s}) = \int_{P_i^*(s(\mathbf{x}))} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*}, \quad (4.36)$$

son diferenciables (\mathbf{s} es el modelo de lentitudes definido en (4.35)), se tiene

$$F_i(\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) = \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}) + \delta s(\mathbf{x}))} (s_0(\mathbf{x}) + \delta s(\mathbf{x})) dl^{P_i^*}, \quad (4.37)$$

y dada la estacionariedad de los rayos de Fermat :

$$F_i(\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) = \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} s_0(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} + \Delta t (\|\delta s(\mathbf{x})\|_2), \quad (4.38)$$

donde $\lim_{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta t (\|\delta s(\mathbf{x})\|_2)}{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2} = 0$, con lo cual la derivada de F_i en \mathbf{s}_0 es

$$\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{s}_0) = \lim_{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2 \rightarrow 0} \frac{F_i(\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) - F_i(\mathbf{s}_0)}{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2} = \lim_{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2 \rightarrow 0} \frac{\int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} \delta s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*}}{\|\delta s(\mathbf{x})\|_2} \quad (4.39)$$

donde $\int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} \delta s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*}$ es la perturbación en tiempos originada por la variación $\delta\mathbf{s}$ del modelo de lentitudes \mathbf{s}_0 .

Por lo tanto, conocido “a priori” un modelo \mathbf{s}_0 suficientemente próximo en cierto sentido a la solución del problema inverso \mathbf{s}

$$\|s(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x})\|_2 = \|\delta s_0(\mathbf{x})\|_2 \rightarrow 0, \quad (4.40)$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma Euclídea en el espacio de funciones S_n ; entonces

$$t_i = F_i(\mathbf{s}) = \int_{P_i^*(s(\mathbf{x}))} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} \approx \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*}. \quad (4.41)$$

La propiedad anterior permite desacoplar la resolución del problema inverso de la resolución del problema de trazado de rayos (problema directo).

Es importante tener en cuenta que el modelo \mathbf{s} es desconocido, luego es imposible medir la distancia (4.40). En la práctica el modelo inicial $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^n$ adoptado (puede ser un modelo inicial homogéneo e isótropo) se obtiene a partir de los tiempos de viaje de las primeras llegadas $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$. Se puede obtener un modelo homogéneo e isótropo, mediante el método de mínimos cuadrados

$$\mathbf{s}_0 = \text{Proy}_{\langle \mathbf{l} \rangle}^{\perp}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{l}}{\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}} = \frac{\sum_{k=1}^m t_k l_k}{\sum_{k=1}^m l_k^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.42)$$

donde $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_m)$ es el vector que contiene las longitudes de los rayos entre las diferentes parejas de emisión-recepción. También se puede obtener un modelo inicial mediante la aplicación de un algoritmo de reconstrucción de tipo SBP (Simple Back Projection o algoritmo de retroproyección), lo que proporciona un modelo inicial \mathbf{s}_0 suave.

Otros modelos de inicio que se pueden utilizar son:

1.- Modelo zonalmente homogéneo e isótropo, en el cual $\Omega = \bigcup_{k=1}^p \Omega_k$ y $\mathbf{s}_0|_{\Omega_k} = \mathbf{s}_{0k} \in \mathbb{R}^n$

(figura 4.2.3).

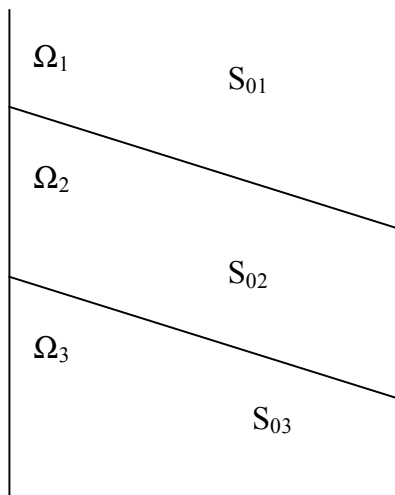


Figura 4.2.3: Modelos de inicio

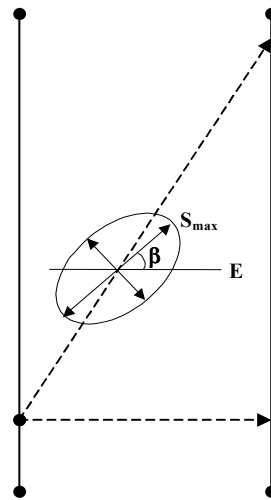


Figura 4.2.4: Modelo homogéneo con anisotropía de tipo elíptico

2.- Modelo homogéneo con anisotropía de tipo elíptico, (figura 4.2.4),

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{x}; s_{\max}; \lambda; \beta) = \varphi(s_{\max}; \lambda; \beta), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.43)$$

donde s_{\max} es la lentitud máxima y $\lambda = \frac{s_{\min}}{s_{\max}}$ es el ratio de anisotropía (si $\lambda = 1$, el modelo es isótropo). β es el ángulo que forma s_{\max} , con la dirección positiva del eje OX. En este caso la lentitud posee una dependencia azimutal de la dirección. Al igual que en el modelo anterior, este modelo se puede generalizar al caso de un medio

homogéneo zonalmente anisótropo. Ambos tipos de modelos pueden ser deducidos del análisis de las curvas de tiempos medios.

Por último, dado que $\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n s_j \Phi_j(\mathbf{x})$, se tiene

$$\begin{aligned} t_i = F_i(\mathbf{s}) &\approx \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} s(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} = \\ &= \sum_{j=1}^n s_j \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} \Phi_j(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} = \\ &= \sum_{j=1}^n s_j m_{ij} \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Los coeficientes m_{ij} vienen dados por las expresiones

$$m_{ij} = \int_{P_i^*(s_0(\mathbf{x}))} \Phi_j(\mathbf{x}) dl^{P_i^*} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.45)$$

Habitualmente el dominio Ω se discretiza en celdas rectangulares en las que el modelo de lentitudes se considera constante, con lo cual la elección más común de las funciones de base son aquellas que poseen valor unidad y soporte compacto en cada celda (base de pixels o funciones constantes a trozos), es decir,

$$\Phi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \text{celda } j, \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (4.46)$$

en cuyo caso

$$m_{ij} = l_{ij} = \int_{P_i^* \cap \text{celda } j} dl^{P_i^*}, \quad (4.47)$$

donde l_{ij} es el camino recorrido por el rayo i en la celda j , si dicho rayo la atraviesa.

La elección anterior de las funciones de base supone fijar una discretización del dominio del tipo Lagrange P_0 , aunque se pueden elegir otro tipo de interpoladores, por ejemplo elementos finitos de tipo Lagrange P_1 . Obviamente el tipo de base elegido condiciona la regularidad del modelo de lentitudes que se obtiene en el problema inverso y también el algoritmo de trazado de rayos utilizado en la resolución del problema directo.

El problema inverso linealizado discreto consiste en hallar $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} \cdot s_j = t_i \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.48)$$

Cabe observar que $l_{ij} = 0$ para la mayoría de las celdas j , y sólo $l_{ij} \neq 0$ en las celdas atravesadas por el rayo i , es decir el sistema (4.48) debería escribirse

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} \delta_{ij} s_j = t_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.49)$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el rayo } i \text{ atraviesa la celda } j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

En notación matricial, el sistema lineal anterior se escribe

$$M\mathbf{s} = \mathbf{t}, \quad (4.50)$$

con

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ y M es la denominación que adoptaremos en lo sucesivo para referirnos a la matriz del operador lineal \mathbf{F} que aplica el espacio S de parámetros del modelo en el espacio D de datos observados, en el problema tomográfico inverso discretizado y linealizado.

Como se ha reflejado en la figura 4.2.2 al problema linealizado discreto se puede llegar por dos caminos diferentes, según se realice primero la discretización o la linealización. No obstante la manera correcta es discretizar primero para obtener el problema no lineal discreto.

4.3 Resolución del problema sísmico-tomográfico inverso discreto

En la práctica se suele resolver el problema linealizado iterativamente como veremos en el apartado 4.3.3 dado que los métodos de resolución del problema no lineal, presentados en la sección 4.3.2 son computacionalmente costosos. Esto repercutirá en el análisis de incertidumbre, dado que ambos problemas poseen regiones de equivalencia diferentes.

4.3.1 Resolución del problema sísmico-tomográfico inverso lineal mediante técnicas lineales (Tomografía Lineal)

Este método fue anterior a la resolución del problema inverso linealizado discreto, y fue propuesto por Bois et al. (1972). La tomografía lineal ignora la dependencia entre los caminos de Fermat y el modelo de lentitudes, considerando rayos rectos. En este caso la matriz de rayos M no depende de las iteraciones y se calcula una sola vez teniendo en cuenta las coordenadas de las m parejas de emisión-recepción. Se trata de resolver el sistema lineal (4.50) mediante algoritmos de mínimos cuadrados. En este caso $\mathbf{s}^\dagger = M^\dagger \mathbf{t}$, donde M^\dagger es la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz de rayos M . Es una solución rápida y aproximada del problema original. La solución del problema inverso \mathbf{s}^\dagger posee como inconveniente el que incorpora los errores de la modelización en la fase de trazado de rayos (también se pueden utilizar otros métodos de resolución de dicho sistema, que limitan el rango de las soluciones obtenidas para así evitar soluciones espúreas).

En este caso el análisis de incertidumbre es el comentado en la sección 3.4, es decir, el conjunto de modelos equivalentes a \mathbf{s}^\dagger son aquellos que verifican $\|M\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2^2 \leq tol^2$ y pertenecen a la hipercuádrlica del espacio de modelos (Fernández Martínez et al, 2012)

$$\mathbf{s}^\dagger M^\top M \mathbf{s} - 2\mathbf{s}^\dagger M^\top \mathbf{t} + \mathbf{t}^\top \mathbf{t} \leq tol^2, \quad (4.51)$$

que como se ha explicado en la sección 4.1.1, no coincide con el conjunto de modelos equivalentes del problema inverso tomográfico (no lineal), (figura 4.1.1).

4.3.2 Resolución del problema sísmico-tomográfico inverso no lineal mediante técnicas de optimización no lineal

En el problema inverso no lineal se tiene en cuenta la dependencia existente entre los caminos de Fermat y el modelo de lentitudes. La teoría de optimización proporciona una pléyade de algoritmos para la resolución de sistemas no lineales del tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}. \quad (4.52)$$

donde el vector $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ representa las coordenadas del campo escalar $s(\mathbf{x})$ en la base $\{\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})\}$. Para ello se minimiza el error de predicción

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} C(\mathbf{s}), \quad (4.53)$$

donde $C(\mathbf{s}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t}\|_2^2$ es la función objetivo o función de coste.

Por ejemplo, el algoritmo de Gauss-Newton consiste en aproximar la función objetivo $C(\mathbf{s})$ mediante una superficie cuadrática en el modelo

$$\mathbf{s}^k = \sum_{j=1}^n s_j^k \Phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^k_{\{\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})\}}, \quad (4.54)$$

y hallar su mínimo según la condición

$$\begin{aligned} HC(\mathbf{s}^k) \cdot \Delta \mathbf{s}^k &= -\nabla^T C(\mathbf{s}^k), \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \Delta \mathbf{s}^k. \end{aligned} \quad (4.55)$$

No obstante dicho algoritmo es computacionalmente costoso al tener que calcular la matriz Hessiana $HC(\mathbf{s}^k)$, que involucra el cálculo de la matriz Jacobiana $J_F(\mathbf{s}^k)$, así como las matrices Hessianas de las funciones componentes $HF_i(\mathbf{s}^k)$ (Aster et al, 2005):

$$HC(\mathbf{s}^k) = 2J_F^T(\mathbf{s}^k) \cdot J_F(\mathbf{s}^k) + 2 \sum_{k=1}^m (F_k(\mathbf{s}^k) - t_k) HF_k(\mathbf{s}^k). \quad (4.56)$$

Otra forma de resolver el problema tomográfico inverso no lineal consiste en utilizar los algoritmos denominados de creeping y jumping (Parker, 94) linealizando el funcional $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ en el entorno del modelo \mathbf{s}^k :

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{s}^k) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k)(\mathbf{s} - \mathbf{s}^k) + \mathbf{o}(\|\mathbf{s} - \mathbf{s}^k\|), \quad (4.57)$$

donde $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k)$ denota la matriz Jacobiana del funcional \mathbf{F} en el modelo \mathbf{s}^k , lo cual implica la resolución de n problemas directos (trazado de rayos) diferentes para determinar las componentes $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s_j}(\mathbf{s}^k)$. Este cálculo es también computacionalmente muy costoso, sobre todo si se malla finamente el dominio geológico objeto de estudio. En el caso en que $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k)$ fuese calculable, surgen dos posibilidades:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k) \cdot (\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k) = \mathbf{t} - \mathbf{F}(\mathbf{s}^k) = \Delta \mathbf{t}^k \quad \text{Creeping}, \quad (4.58)$$

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k) \cdot \mathbf{s}^{k+1} = \Delta \mathbf{t}^k + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k) \cdot \mathbf{s}^k \quad \text{Jumping}. \quad (4.59)$$

Si se adopta la estrategia de creeping (formulación en incrementos), teniendo en cuenta la expresión (4.58), basta encontrar la perturbación del modelo de lentitudes $\Delta \mathbf{s}^k_{\{\phi_1, \dots, \phi_n\}} = \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k$ tal que

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k) \cdot \Delta \mathbf{s}^k &= \Delta \mathbf{t}^k, \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \Delta \mathbf{s}^k. \end{aligned} \quad (4.60)$$

La desventaja de la formulación en incrementos es que el problema (4.60) suele estar mal condicionado y no se suelen conocer restricciones para $\Delta \mathbf{s}^k$. Una opción suele ser utilizar el algoritmo de Levenberg-Marquardt que minimiza el siguiente funcional

$$\min_{\Delta \mathbf{s}^k} \left\| J_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}^k) \cdot \Delta \mathbf{s}^k - \Delta \mathbf{t}^k \right\|_2^2 + \varepsilon^2 \left\| \Delta \mathbf{s}^k \right\|_2^2, \quad (4.61)$$

para un valor $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ del parámetro de regularización. Este algoritmo tiende a proporcionar valores de la perturbación $\Delta \mathbf{s}^k$ de norma mínima y de ahí proviene el apelativo de creeping (reptador).

Si se utiliza el algoritmo de jumping (formulación en parámetros) se tiene la ventaja de poder acotar el valor de $s(\mathbf{x})$

$$\min_{\mathbf{s}^{k+1}} \left\| J_F(\mathbf{s}^k) \cdot \mathbf{s}^{k+1} - \Delta \mathbf{t}^0 - J_F(\mathbf{s}^k) \cdot \mathbf{s}^k \right\| \quad \text{con} \quad \mathbf{L} < \mathbf{s}^{k+1} < \mathbf{U}, \quad (4.62)$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{U} son dos vectores que proporcionan las cotas superiores e inferiores del modelo de lentitudes $s(\mathbf{x})$. Dichas cotas pueden ser deducidas zonalmente como veremos del análisis de las curvas de tiempos medios. Los diagramas de flujo de ambos algoritmos se muestran en las figuras 4.3.1 y 4.3.2.

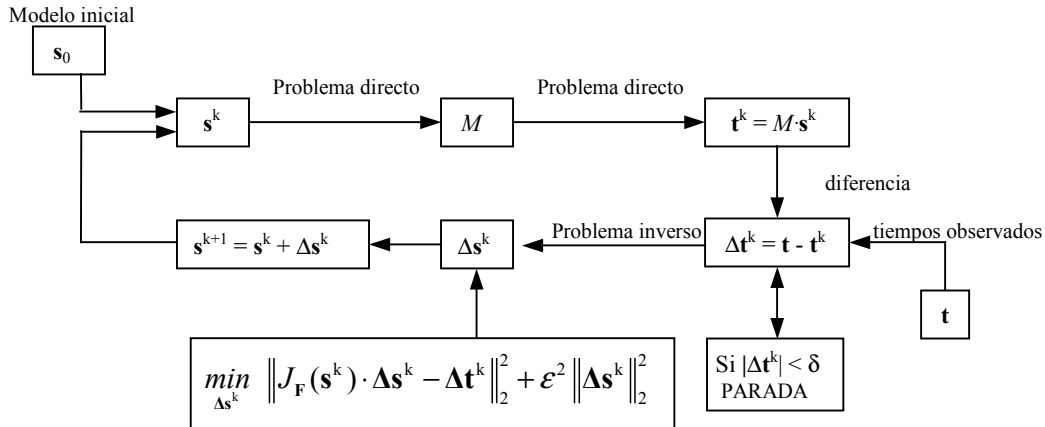


Figura 4.3.1: Algoritmo de resolución del problema inverso, utilizando el algoritmo de creeping.

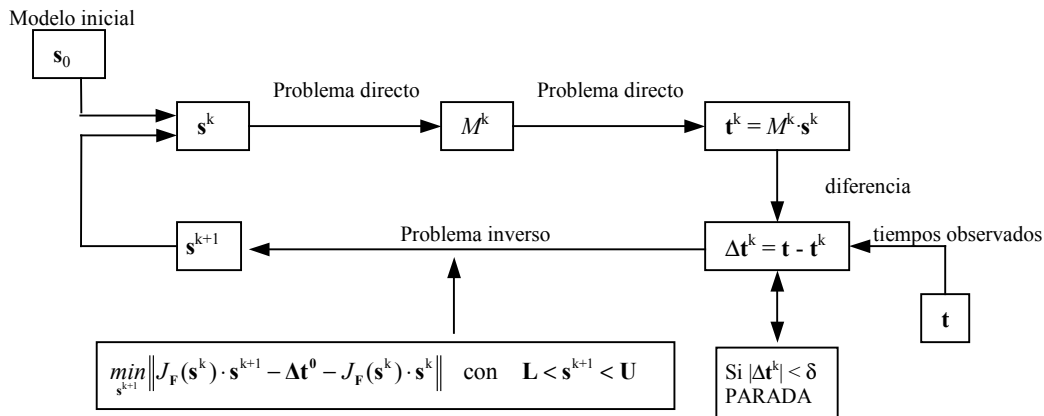


Figura 4.3.2: Algoritmo de resolución del problema inverso utilizando una estrategia de jumping.

4.3.3 Resolución iterativa del problema sísmico-tomográfico inverso linealizado

Dado que la resolución del problema inverso sísmico-tomográfico discreto mediante algoritmos de optimización no lineal (Gauss-Newton, creeping, jumping) es muy costosa computacionalmente, en la práctica se opta por la resolución iterativa del problema inverso linealizado discreto

$$\min_{\mathbf{s}^{k+1}} \|M^k \cdot \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{t}\| \quad \text{con} \quad \mathbf{L} < \mathbf{s}^{k+1} < \mathbf{U}, \quad (4.63)$$

donde partiendo de un modelo inicial \mathbf{s}^0 sencillo, como se vio en la sección 4.2, en la iteración $k+1$ del algoritmo se deberá actualizar la matriz M de rayos, M^k , como corresponde el modelo de lentitudes obtenido, en la iteración k , \mathbf{s}^k , utilizado la resolución del problema directo (trazado de rayos).

Capítulo 5: ARTÍCULOS

ARTÍCULO 1

Mean travelttime curves analysis: A method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage

Autores:

Juan Luis Fernández Martínez
José Paulino Fernández Alvarez
Luis Mariano Pedruelo González

MATHEMATICAL GEOLOGY
VOL. 38-3, PP 343-374
2006

Resumen Artículo 1

Fernández Martínez J. L., Fernández Alvarez J.P, Pedruelo González L.M. (2006.)
Mean travelttime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. Mathematical Geology, v. 38-3, p. 343-374.

Este es el primero de una serie de cinco artículos publicados, en los cuales se analiza la metodología de las curvas de tiempos medios en experimentos sísmicos-tomográficos en transmisión.

Para resolver casos reales de problemas inversos no lineales en ciencia e ingeniería se utilizan habitualmente métodos de optimización local dado que son los únicos que pueden abordar problemas inversos de muy alta dimensión (alto número de parámetros) y problemas directos computacionalmente costosos, ya que su velocidad de convergencia minimiza el número de evaluaciones necesarias del problema directo, al contrario de lo que ocurre con los algoritmos de optimización global, que son aplicables a problemas de bajo número de parámetros y problemas directos de rápida solución. Los métodos locales de optimización son muy sensibles a datos erróneos, debido al mal condicionamiento de los problemas lineales asociados: en ausencia de regularización el ruido en los datos se amplifica y perturba de forma muy significativa los parámetros del modelo, dando lugar a soluciones espurias que incluso pueden carecer de significado físico. Para evitar el mal condicionamiento se utilizan los métodos de regularización que precisan de informaciones a priori de buena calidad. Además, aunque el problema inverso se haya estabilizado siguen existiendo un conjunto de modelos equivalentes, es decir, que ajustan los datos con la misma tolerancia de error, y que se sitúan en valles curvilíneos y alargados con gradiente casi nulo en la topografía de la función objetivo (Fernández Martínez et al, 2012). Dadas estas circunstancias, obviamente se entiende que el resultado proporcionado por el algoritmo de optimización local dependerá en gran manera del modelo inicial de partida, así como de la información a priori proporcionada (modelo de referencia utilizado en el término de regularización). En términos de Tikhonov y Arsenin: la elección del modelo de referencia determina el conjunto de modelos correctos inducido por la regularización. El problema inverso en tomografía de transmisión no es una excepción (Berryman, 1991).

En este artículo se propone analizar la información observada de tiempos de viaje, antes de realizar la inversión, mediante las curvas de tiempos medios.

Los objetivos de este análisis serán:

1. Identificar modelos iniciales de velocidad así como sus límites de variación para guiar la inversión. De modo riguroso estos modelos podrían no ser considerados bajo la denominación de información a priori ya que han sido inferidos a partir

de los datos observados. Ahora bien, si entendemos como información a priori los conjuntos de informaciones que permiten estabilizar la inversión, dichos modelos formarían parte de dicha categoría.

2. Identificar los agrupamientos anómalos debidos a errores en los datos, clasificar dicho tipo de error, e intentar distinguir éstos de las variabilidades geológicas del medio. Dicho análisis debe permitir eventualmente filtrar los agrupamientos anómalos o asignarles de modo razonable un peso en el proceso de inversión. El concepto de ruido y su determinación en un problema inverso es un tema delicado. Por ejemplo si consideramos el problema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\text{obs}}$ y se determina como solución \mathbf{x}^\dagger , entonces la predicción de los datos observados es $\mathbf{b}^{\text{pre}} = A\mathbf{x}^\dagger$, con lo cual el desajuste verifica $\mathbf{b}^{\text{obs}} = \mathbf{b}^{\text{pre}} + \Delta\mathbf{b}$. El vector \mathbf{b}^{obs} se puede descomponer como $\mathbf{b}^{\text{obs}} = \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_n$, $\mathbf{b}_r \in \text{Im } A$, $\mathbf{b}_n \in \text{Ker}(A^T)$. Además $\mathbf{b}^{\text{obs}} = \mathbf{b}^v + \delta\mathbf{b}$, donde \mathbf{b}^v son los datos libres de ruido y $\delta\mathbf{b}$ es la realización del ruido de medida en los datos observados. Los métodos de mínimos cuadrados producen predicciones \mathbf{b}^{pre} en $\text{Im } A$, con lo cual se verifica que $\mathbf{b}^{\text{pre}} = \mathbf{b}_r$ y $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b}_n$. No obstante esto no implica que $\mathbf{b}_r = \mathbf{b}^v$ y $\delta\mathbf{b} = \Delta\mathbf{b}$. Cuando $\delta\mathbf{b} \neq \Delta\mathbf{b}$, parte de la señal (datos) se está considerando como ruido y viceversa. La predicción sería óptima si el error de predicción, que pertenece al $\text{Ker}(A^T)$, coincidiera con el ruido de medida $\delta\mathbf{b}$. Esto no suele ocurrir dado que el operador A es una idealización de la realidad, es decir, nuestro conocimiento de la misma es imperfecto. Por lo tanto es importante poseer métodos adicionales que ayuden a la detección de errores antes de la inversión.

Este análisis se realiza mediante unos modelos matemáticos sencillos que hemos denominado como curvas de tiempos medios (curvas de medias y desviaciones típicas). Se deducen las expresiones analíticas de las curvas de tiempo teóricas para medios homogéneos e isótropos para diferentes geometrías del dispositivo de emisión-recepción (figura 1).

Se demuestra que en el caso de dispositivos rectangulares (tiro entre dos sondeos paralelos) dichas curvas son simétricas y alcanzan el mínimo en el punto medio de la línea de emisores y/o receptores. En caso de dispositivos no rectangulares dichas curvas pierden su simetría (figura 2). Dichas curvas se pueden generalizar para el caso de medios zonalmente isótropos.

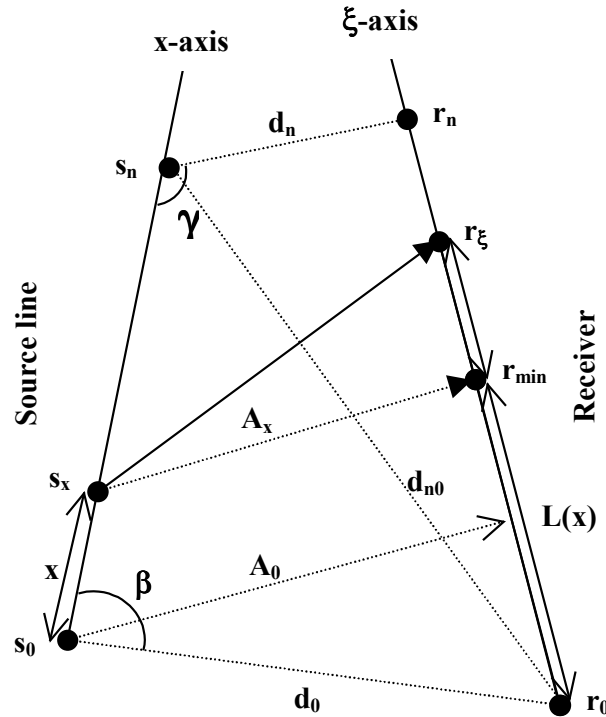


Figura 1: Dispositivo irregular. Variables involucradas en el análisis de las curvas de tiempos medios.

$$\frac{\bar{t}(x)}{t_0} = F_m(x) = \frac{A_x}{2L_r A_0} \left[\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{A_x}\right)^2} + A_x \operatorname{arcs} h \frac{\xi}{A_x} \right]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)},$$

$$\frac{\sigma(x)}{t_0} = F_\sigma(x) = \sqrt{\left(\frac{A_x}{A_0}\right)^2 - \left(\frac{\bar{t}_x}{t_0}\right)^2} + \frac{1}{3L_r A_0^2} \left[\xi^3 \right]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)},$$

$$L(x) = \frac{1}{2L_r} \left(L_r^2 + d_0^2 - d_n^2 + x^2 - (L_s - x)^2 + 2(L_s - x)d_n \cos \gamma - 2xd_0 \cos \beta \right)$$

Expresiones analíticas de las curvas de tiempos medios.

Se introducen las curvas de tiempos medios empíricas, obtenidas a partir de los datos reales considerando los diferentes agrupamientos de emisión-recepción. El ajuste de mínimos cuadrados de las curvas de tiempos medios empíricas mediante los modelos teóricos proporciona el medio zonalmente isótropo que mejor ajusta los tiempos observados. Para ello el dominio se divide en diferentes zonas consideradas homogéneas. Dichas zonas se deducen mediante el análisis de las curvas de tiempos medios empíricas calculadas en el dominio completo, dado que si existen transiciones geológicas, éstas se traducen en discontinuidades de las curvas empíricas. Obviamente

se necesita un número suficiente de agrupamientos en cada subdominio para que puedan ser inferidos los descriptores empíricos.

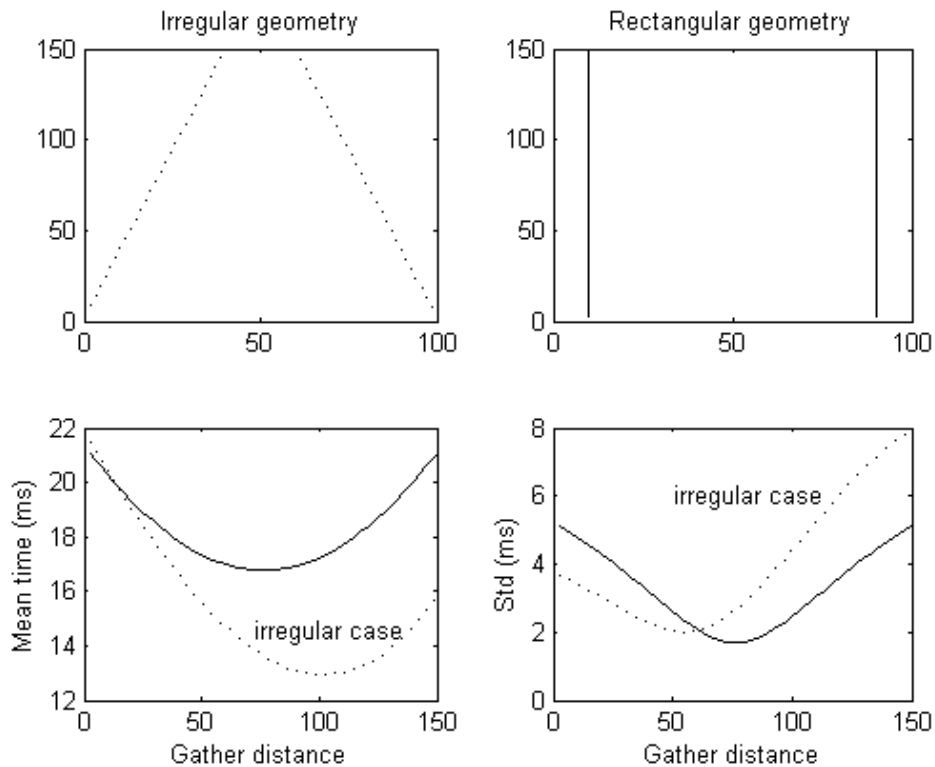


Figura 2: Curvas de tiempos medios para geometrías de adquisición rectangular e irregular. Debido a la irregularidad de la geometría de adquisición las curvas de tiempos medios pierden su simetría.

Se realiza un análisis de la influencia de diferentes tipos de errores y anomalías en las curvas de tiempos medios teóricas:

1. Los errores Gaussianos se detectan en la curva de desviaciones típicas provocando que la velocidad estimada a partir de la curva de tiempos medios sea superior a la velocidad estimada a partir de la curva de desviaciones típicas, siendo esta estimación indiferente si se realiza en fuente o receptor común (figura 3).
2. Los errores no Gaussianos producen el mismo efecto en la curva de desviaciones típicas, pero sin embargo la estimación de velocidades es distinta en fuente que en receptor común.
3. Los errores de posicionamiento son más fáciles de detectar en la curvas de medias que en la curvas de desviaciones típicas. Los errores de sincronización producen discontinuidades en la curva de medias y desajustes en la curva de desviaciones típicas.
4. Se analizaron los efectos de la anisotropía del medio geológico ya que en este trabajo aún no se habían desarrollado las curvas de tiempos medios para

el caso de medios geológicos con anisotropía elíptica. El efecto de la anisotropía se caracteriza por el hecho de proporcionar diferentes estimaciones de velocidades las curvas de tiempos medios y las curvas de desviaciones típicas. En este caso no hay incongruencias entre las estimaciones obtenidas con las curvas en fuente común o con las curvas en receptor común.

5. Se comprueba que las curvas de tiempos medios y el ratio de Berryman (Berryman, 1994) utilizado para determinar cuándo los métodos tomográficos lineales (rayos rectos) son aplicables, poseen el mismo rango de validez para diferentes niveles de ruido.
6. Finalmente se muestra el efecto que producen las fallas (zonas de baja velocidad) e intrusiones (zonas de alta velocidad) en la forma de dichas curvas, induciendo deformaciones, rupturas de pendiente y desplazamientos verticales.

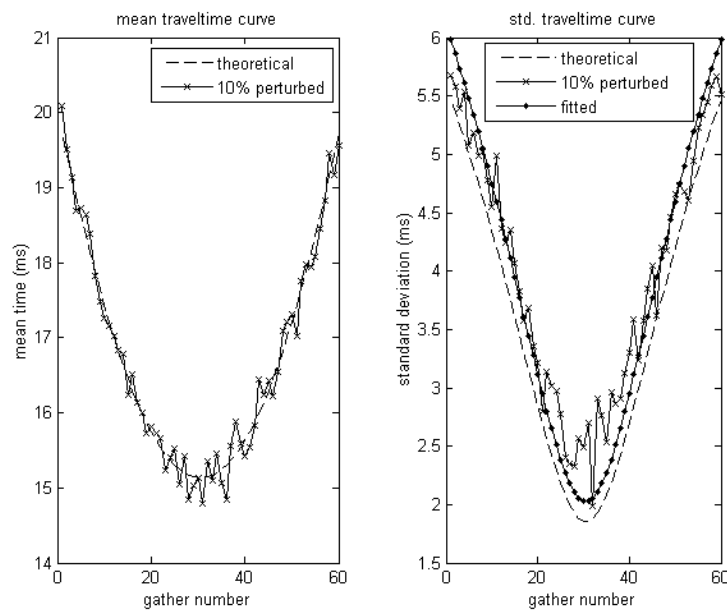


Figura 3: Curvas de tiempos medios perturbadas por ruido Gaussiano. La velocidad estimada se obtiene por medio de un ajuste de mínimos cuadrados.

Es preciso comentar en este resumen, que en la figura 5 y en la figura 6 del artículo, situadas, respectivamente, en las páginas 357 y 358 de la publicación, hay un error en sus leyendas de los ejes verticales:

Donde pone v_m debe poner v_t^ , y donde pone ratio $\frac{v_\sigma}{v_m}$ debe poner ratio $\frac{v_t^*}{v_\sigma}$,*

en consonancia con lo explicado en los textos correspondientes a cada una de las figuras.

Esta metodología se aplica al conjunto de datos Grimsel (Proyecto Febex, Nagra, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste, Suiza). La geometría del dispositivo de adquisición de datos es aproximadamente rectangular, limitada por dos sondeos (B1 y B2) y un túnel de acceso. Las dimensiones son aproximadamente $70 \times 150 \text{ m}^2$. Los datos fueron tomados en tres secuencias

Data set	Source	Receiver	Number of sources	Number of receivers
1	B1	B2	58	60
2	Tunnel	B2	28	60
3	Tunnel	B1	28	59

Como se ha descrito en la introducción de esta tesis, lo que origina el desarrollo de la metodología aquí presentada es precisamente la creación de un equipo de tecnólogos españoles que se especialicen en el estudio de macizos rocosos por medio de técnicas no destructivas (tomografía sísmica en transmisión) para evaluar la calidad de dichos macizos como cementerios de materiales nucleares. Este conjunto de datos ya fue estudiado anteriormente por Gelbke, Miranda, y Sattel, (1989), mostrando que el rango de velocidades se encontraba entre 4.7 a $5.6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, además el alto valor del ratio de anisotropía ($\lambda = 0.95-0.97$) nos permite el uso de aproximaciones tomográficas lineales y el uso de esta metodología, puesto que el comportamiento geofísico (tiempos de viaje observados) es cuantitativamente muy similar al caso isótropo, pudiendo además incorporar correcciones anisótropas.

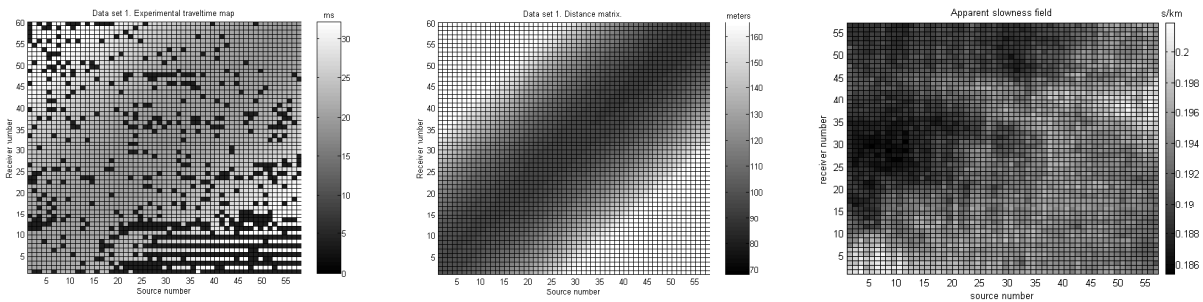


Figura 4: Mapas de los tiempos de viaje experimentales, de las distancias entre los diferentes emisores receptores y del aparente modelo de lentitudes.

Se muestran mapas de los tiempos de viaje experimentales, de las distancias entre los diferentes emisores y receptores, y del modelo de lentitudes aparente resultante de efectuar el cociente entre el tiempo asociado a la primera llegada correspondiente a una pareja de emisor-receptor y la distancia entre dichos puntos de emisión-recepción. Estos mapas aunque confirman que el comportamiento geofísico del dominio está cercano a un modelo isótropo, también localizan espacialmente la presencia de dos áreas de

diferentes velocidades (figura 4). La comparación de las curvas experimentales y teóricas (corrigiendo las ausencias de datos) de medias y desviaciones típicas, muestran el comportamiento anómalo de algunos agrupamientos de receptores. Estas anomalías son debidas a errores sistemáticos en las curvas experimentales, originados por la ausencias de datos. El modelo de velocidades que se estima con las curvas de medias es distinto al modelo estimado mediante las curvas de desviaciones típicas. Una explicación de esta diferencia es la existencia, en el medio, de una anisotropía débil de tipo elíptico, como indica la estructura diagonal del mapa de diferencias entre los datos de tiempos reales y los tiempos teóricos.

Trabajando con el análisis multizonal sugerido, se comprueba que mediante las curvas de medias tanto en fuente como en receptor común se estima la misma velocidad, sin embargo no ocurre lo mismo cuando se utilizan las dos curvas de desviaciones típicas. Se muestra como el diferente comportamiento de los agrupamientos en fuente y receptor común se puede deber a una influencia combinada entre una anisotropía débil y la presencia de ruido no Gaussiano en los datos, puesto que la única presencia de la anisotropía no justifica el comportamiento de las curvas en las zonas estudiadas. La degradación de los ratios de anisotropía en presencia de ruido en los datos ha sido también remarcado por Pratt y Chapman (1992).

Estimated velocity	Zone 1 (S: 1-20, R: 1-10)	Zone 2 (S: 45-58, R: 35-50)
Mean (source gather)	5.05 $km.s^{-1}$	5.07 $km.s^{-1}$
Std (source gather)	4.22 $km.s^{-1}$	4.84 $km.s^{-1}$
Mean (receiver gather)	5.04 $km.s^{-1}$	5.07 $km.s^{-1}$
Std (receiver gather)	5.52 $km.s^{-1}$	4.55 $km.s^{-1}$

Tabla 1. Resultados del análisis multizonal (zonas 1 y 2)

Se han realizado simulaciones tomando modelos anisótropos junto con ruido no Gaussiano en los correspondientes datos de tiempos, recogándose las mejores estimaciones en la tabla 1. Se observa como las estimaciones son buenas para niveles de ruido inferior al 6% y como hay zonas donde se estima mejor que en otras.

Llegamos a la conclusión de que el análisis mediante las curvas de tiempos medios es una técnica muy útil en la modelización de diferentes tipos de medios, tanto homogéneos como heterogéneos, resulta conveniente su aplicación en la fase previa a la inversión.

Mean Traveltime Curves Analysis: A Method to Improve Understanding of Data Behaviour in 2-D Transmission Tomography at the Pre-Inversion Stage¹

Juan L. Fernández Martínez,² José P. Fernández Alvarez,³
and Luis M. Pedruelo González²

Transmission tomography methods show a great sensibility to data variability, which eventually includes data errors, often present in field experiments. Local optimization methods, traditionally used to solve this inverse problem, are very sensitive to these difficulties, failing to converge properly in the presence of spurious data. Regularization methods partially cope with these weaknesses, damping the instabilities.

A complementary approach, adopted here, is to perform a structured analysis of data variability before the inversion, oriented to discriminate the contribution of errors from that of true geological heterogeneities. The key concept of mean traveltime curves (\bar{t} – curves and σ – curves) is introduced and described. Their analytical equations are deduced for isotropic homogeneous media and any recording geometry. Empirical mean traveltime curves can be inferred based solely on traveltime data, using the corresponding discrete estimators. The methodology proposed here proceeds through a user-defined subdivision of the domain of interest into isotropic homogeneous areas. Least squares velocity estimations and associated data misfits are used to scrutinize the behaviour of the implied source-receiver sets and of the ray-swept part of the geologic medium. Data are considered suspicious if zonal estimated velocities are non-consistent with a priori information. Also, independent fitting of both empirical curves helps to classify the genesis of the residuals: some situations are illustrated.

Finally, we show the application of this technique to a data set from the Grimsel test site in Switzerland. Using this methodology, we detect some anomalous gathers, which may be responsible for the large range of velocities found in the initial imaging with this data set. Also, we give some indications of the possible sources of these anomalies. This approach offers a quick data variability analysis in the pre-processing stage, which, even if no data editing algorithms are finally used, always improves the understanding of the data structure.

KEY WORDS: inverse problems, transmission tomography, mean traveltime curves, traveltime quality analysis.

¹Received 15 March 2004; accepted 7 October 2005; Published online: 27 May 2006.

²Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, C/ Calvo Sotelo, 33006 Oviedo, Spain; e-mail: jlfrm@orion.ciencias.uniovi.es

³Departamento de Prospección y Explotación de Minas, Universidad de Oviedo, C/ Independencia, 13. 33005 Oviedo, Spain

INTRODUCTION

Tomographic inversion techniques have been widely used in mineral exploration, geotechnical studies and civil engineering, hydrogeology, and petroleum exploration and production, among other application fields. Research has traditionally focussed on constructing efficient algorithms to solve the *non-linear* discrete inverse problem involved. A hypothetical *linear* formulation for this problem would read as,

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{t}, \quad (1)$$

where $\mathbf{M} \in M(m, n)$ is the raypath matrix, $\mathbf{s} \in M(n, 1)$ is the slowness vector, and $\mathbf{t} \in M(m, 1)$ is the observed traveltimes data vector, with \mathbf{M} *not depending* on \mathbf{s} . Nevertheless, in the *real non-linear* problem \mathbf{M} does depend on \mathbf{s} , since coefficients in \mathbf{M} gather information of the raypath lengths in each mesh cell, and these, in turn, depend on the (unknown) slowness distribution, \mathbf{s} . This difficulty forces the use of iterative methods to find \mathbf{M} and \mathbf{s} simultaneously, so as to fit traveltimes data, \mathbf{t} .

Numerical methods reported in the literature usually include, Algebraic Reconstruction Technique—ART (Gordon, 1974; Ivansson, 1986), Simultaneous Iterative Reconstruction Technique—SIRT (Dines and Lytle, 1979), conjugate gradient methods (Scales, 1987), and least squares algorithms (Jackson, 1972; Berryman, 1991; Pratt and Chapman, 1992).

The transmission tomography inverse problem is ill posed, meaning that errors in the data, \mathbf{t} , propagate backwards, amplifying their magnitude and contaminating model parameters, \mathbf{s} . In addition, reconstruction algorithms fail to converge in the presence of spurious data (Gordon, 1974; Dines and Lytle, 1979; Ivansson, 1985).

Experimental traveltimes errors occur frequently associated to two kinds of sources:

1. Picking errors due to discrete time sampling and erroneous picking of the first arrivals, especially in complex regions, where these are of low amplitude compared to later arrivals. While the former may be compensated by averaging over all view angles, the later introduce a systematic bias, shifting traveltimes to higher values and thus, velocities to lower values (Berryman, 1994). *These kinds of errors are dominant in tomographic experiments and follow non-Gaussian statistics* (Pratt and Chapman, 1992).
2. An inaccurate identification of source and/or receiver locations in space (Dyer and Worthington, 1988).

Different regularization approaches (Moore-Penrose pseudoinverse, damping, Tikhonov regularization) have been proposed to partially cope with the difficulties generated by the existence of the null space components of \mathbf{M} (non-uniqueness

of solution) and/or the numerical instabilities caused by its ill conditioning in the presence of noisy data (Hansen, 1998; Pratt and Chapman, 1992). These methods automatically filter part of the undesirable data influence (Jackson, 1972; Menke, 1989; Hansen, 1998). Nevertheless, in spite of the efforts done to objectively decide the extent of the regularization (Hansen, 1998), some degree of subjectivity is at the end unavoidable. In addition, regularization methods introduce bias in the solution, which is an increasing function of the regularization amount. The bigger the errors admitted as part of the data, the stronger the filtering has to be, producing unacceptable biased solutions. Pratt and Chapman (1992) described an example of this fact in the context of the tomographic anisotropic problem. As consequence, they proposed to avoid fitting errors, since they caused anomalous anisotropic ratios estimates and the degradation of the algorithm robustness.

On occasions, the regularization term takes the form of a discrete difference operator in order to penalize the roughness of the solution (Pratt and Chapman, 1992). In this case, sharp oscillations in the velocity model⁴ cannot be taken into account with this kind of algorithms, and, thus, have to be considered as modelling errors. Scales and Gersztenkorn (1988) proposed the use of the L_1 norm to solve the optimization problem in inverse theory. This norm is related to long-tail probability distribution for the misfit error, and thus, can anticipate outliers without drastically modifying its mean.

A different complementary approach developed here would be to perform a guided structured analysis of the data variability before the inversion, helping to discriminate the contribution of errors from that of geological heterogeneities. In this paper, this is achieved by means of the mean traveltime curves, which are used as screening tool to detect anomalies in tomography traveltime data. We also analyse how different kinds of traveltime errors affect the shape of these curves (sensitivity analysis). This approach offers a quick data variability analysis in the pre-processing stage, which, even if no data editing algorithms are finally used, always improves the understanding of the data structure. Also, the velocity information deduced from the mean traveltime curves analysis (best zonal isotropic velocity models and range of variation) can be used to solve non-uniqueness (Jackson, 1979) and stabilize the solution at the inversion stage (Hansen, 1998).

Finally, as study case we show the application of this technique to a data set from the Grimsel test site in Switzerland. Using this methodology, we identify the anomalous gathers that would be responsible for the generation of a large range of apparent P wave velocities found in the initial imaging with this data set.

⁴Sharp variations in velocity over small scale lengths.

THE MEAN TRAVELTIME CURVES ANALYSIS

It is worth explaining that along this paper two types of curves will be used: the theoretical and experimental mean traveltime curves. Let Ω be a domain to be studied by transmission tomography. Also, let us consider among all the sources and receivers present in a real recording geometry two subsets of *contiguous* sources $\{S_k\} = \{s_1^k, s_2^k, \dots, s_{ns}^k\}$ and receivers $\{R_i\} = \{r_1^k, r_2^k, \dots, r_{nr}^k\}$, arbitrarily chosen. Non-linear raypaths associated to the couple $\{S_k, R_k\}$ sweep a zone Ω_k of the domain. Let $\tau_k = \{t_{ij}\}_{i=1, \dots, ns}$ be the set of traveltimes for each pair

$$j = 1, \dots, nr$$

$\{s_i^k, r_j^k\}_{i=1, \dots, ns}$. Further subsets can be defined inside τ_k , grouping together

$$j = 1, \dots, nr$$

traveltimes arriving to each receiver (common receiver gathering), $\{\tau_{r_{g_i}}^k\}_{i=1, \dots, ns}$,

or/and those emitted from each source (common source gathering), $\{\tau_{s_{g_j}}^k\}_{j=1, \dots, nr}$.

Mean traveltime curves represent graphically the main statistical parameters (mean and standard deviation) of the later gathering subsets, as a function of the index of each gather. In the experimental mean traveltime curves, the elements of τ_k are the empirical traveltime data measured in the field, and both sources and receivers have discrete locations. On the other side, in theoretical mean traveltime curves, the elements in τ_k are predicted traveltimes assuming Ω_k is a homogeneous zone, Ω_k^l , swept by linear rays (Fig. 1). In addition, positions of sources and receivers vary continuously.

The Theoretical Mean Traveltime Curves

Case 1: Rectangular Recording Geometry

Let Ω be a *homogeneous isotropic* domain explored by means of a rectangular recording geometry (sources and receivers placed along two parallel boreholes) (Fig. 1). Seismic rays follow, then, straight lines.

We will make use of two different variables for assigning locations on the boreholes, x and ξ . Reasoning, for instance, on the source gather case (Fig. 1):

- coordinate x , locates the position along the corresponding borehole of the common point of any other source gathering. Its origin lies at the vertex of the source ray gathering *first considered*. Usually, it is convenient to choose the bottom of the borehole.
- coordinate ξ , describes positions of every receiver belonging to a particular source gathering, serving as an integration variable to compute the theoretical mean traveltime curves. Its origin corresponds to a hypothetical

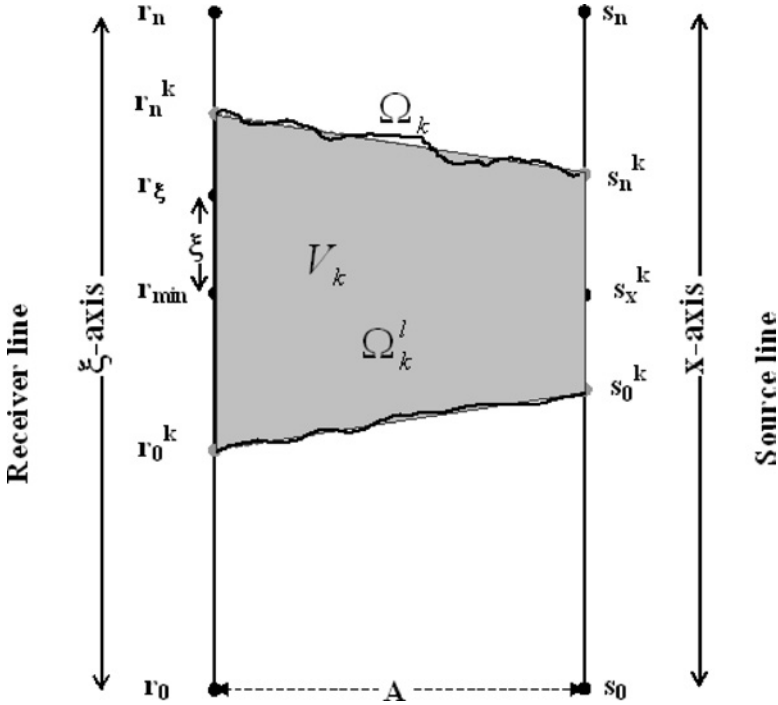


Figure 1. Frontal shot in a rectangular recording geometry. Variables involved in the multi-zone analysis. See also the (possibly different) contour of the homogeneous zone swept by linear rays in the theoretical mean traveltimes curves (grey line) and the empirical one (black).

receiver located at the perpendicular line to the considered vertex source (minimum traveltimes receiver). Thus, ξ is the distance, measured along the receiver borehole, between the minimum traveltimes receiver (r_{\min}) and any other arbitrary one.

Traveltimes variations in each source gather follow the hyperbolic law:

$$t^2(\xi) = t_0^2 + \frac{\xi^2}{V^2}, \tag{2}$$

where t_0 is the minimum traveltimes in the gathering and V the constant velocity of the medium. Due to the rectangular acquisition geometry and constant velocity assumed, t_0 remains the same for all gathers.

It is possible, in view of relation (2), to determine the theoretical mean time, $\bar{t}(x)$, and the variance function, $\sigma^2(x)$, for a source gather located at the distance

x from the source line origin (Fig. 1):

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} \sqrt{t_0^2 + \frac{\xi^2}{V^2}} d\xi,$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} \left(\sqrt{t_0^2 + \frac{\xi^2}{V^2}} - \bar{t} \right)^2 d\xi.$$

Being the primitive function,

$$\int \sqrt{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left(\xi \sqrt{\alpha^2 + \xi^2} + \alpha^2 \operatorname{args} h \frac{\xi}{\alpha} \right),$$

the above definite integrals turn to be

$$\frac{\bar{t}(x)}{t_0} = F_m^t(x) = \frac{1}{2L} \left[\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{A} \right)^2} + A \operatorname{args} h \frac{\xi}{A} \right]_{\xi=-x}^{\xi=L-x},$$

$$\frac{\sigma(x)}{t_0} = F_\sigma^t(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{t}(x)}{t_0} \right)^2} + \frac{1}{3LA^2} [\xi^3]_{\xi=-x}^{\xi=L-x},$$

where $A = t_0 V$ is the transverse dimension of the geological domain.

As can be seen from the results above, mean traveltime, $\bar{t}(x)$, and standard deviation, $\sigma(x)$, for a rectangular acquisition geometry, are smooth functions with a minimum at the middle point of the source borehole line and are symmetric with respect to the time axis passing through this point.

The smoothness property, being intrinsic to the theoretical model derived, allows considering discontinuities, appearing sometimes in their experimental counterparts, as an indicator of the possible existence of unhomogeneities in the geological domain, i.e., transition to a different velocity zone or layer (Fernández Martínez and Pedruelo González, 1998). Sharp localized oscillations between adjacent gathers can, nevertheless, only be caused by anomalous data, systematic lack of them (due to acquisition problems), topography variations in the recording geometry, or small scale-defined high velocity gradients.

In the theoretical mean traveltime curves the minimum traveltime, t_0 , appears as a scale factor, meaning that the quotients $\frac{\bar{t}(x)}{t_0}$ and $\frac{\sigma(x)}{t_0}$ only depend on the recording geometry. We can thus, perform a linear least squares fit of the empirical mean traveltime curves to determine t_0 and consequently the slowness of the

homogeneous medium. Upper and lower slowness bounds may also be calculated using the extreme upper and lower empirical mean traveltime curves values, providing a range of admissible medium slowness. This parameter estimation process is called in this paper *single-zone analysis*, as it considers the whole domain at once.

If, alternatively, a non-homogeneous geological model with zonal velocity heterogeneities is considered, discontinuities in the global theoretical mean traveltime curves would be observed. Their positions correlate significantly with the transition interfaces, helping to define the limits of the new zone⁵ when working with the empirical mean traveltime curves. Available geological a priori information could eventually be used for the same purpose. Single-zone analysis will then be carried out independently over each zone. Further observed discontinuities inside each region would lead, *parsimoniously*, to finer domain subdivisions or zones. Sequential zonation of the domain allows to model geologies with increasing heterogeneity degrees. In this paper, this hierarchical model construction is called *multi-zone analysis*. Though introduced as useful tool for real geological transitions, multi-zone analysis may be carried over whenever the traveltimes of any pair of source-receiver sets is studied, independent of possible consequences in terms of geological interpretation.

Case 2: Non-Rectangular Recording Geometry

Relationships previously described can be derived as a particular case of non-rectangular acquisition geometry (Fig. 2).

In this case, the following equations hold:

$$\begin{aligned}
 t_0(x) &= \frac{A_x}{A_0} t_0, \\
 t_0 &= \frac{A_0}{V}, \\
 s_x &= \frac{1}{2L_r} (L_r^2 + d_0^2 - d_n^2 + x^2 - (L_s - x)^2 + 2(L_s - x) d_n \cos \gamma \\
 &\quad - 2x d_0 \cos \beta), \\
 A_x &= \sqrt{x^2 + d_0^2 - s_x^2 - 2x d_0 \cos \beta},
 \end{aligned}$$

⁵The portion of the geological domain swept by the linear rays associated to an ensemble of sources and receivers of the real recording geometry.

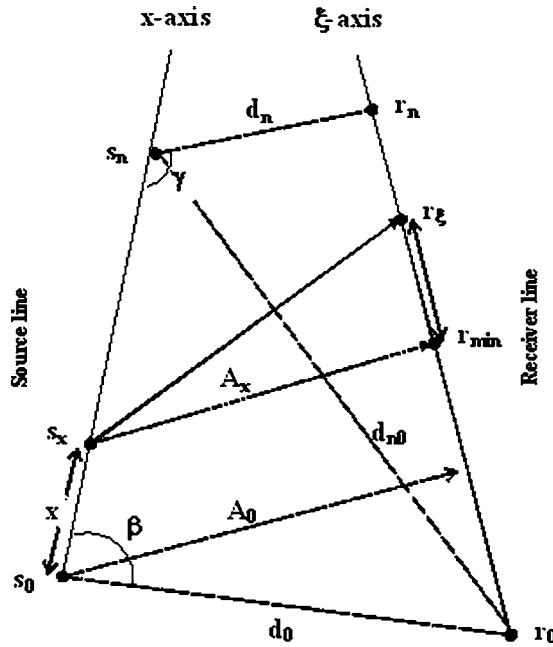


Figure 2. Non-rectangular recording geometry. Variables involved in the mean travelttime curves analysis.

where

- t_0 is the minimum transit time for the $x = 0$ gather, i.e., the time corresponding to the distance A_0 ,
- $t_0(x)$ is the minimum transit time for the x gather corresponding to the distance A_x ,
- d_0 is the distance between the source in $x = x_0$ and the receiver in $\xi = \xi_0$,
- d_n is the distance between the source in $x = x_n$ and the receiver in $\xi = \xi_n$,
- d_{n0} is the distance between the source in $x = x_n$ and the receiver in $\xi = \xi_0$,
- L_r is the receiver borehole length,
- L_s is the source borehole length,
- and the angles β and γ may be written as known functions of L_r , L_s , d_0 , d_n , and d_{n0} .

Arriving at

$$\frac{\bar{t}(x)}{t_0} = F_m(x) = \frac{A_x}{2L_r A_0} \left[\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{A_x}\right)^2} + A_x \operatorname{args} h \frac{\xi}{A_x} \right]_{\xi=-s_x}^{\xi=L_r-s_x}, \quad (3)$$

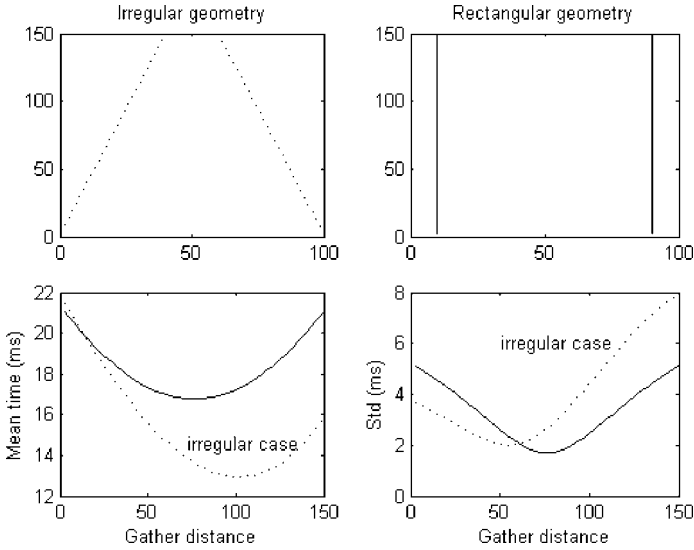


Figure 3. Mean traveltime curves for rectangular and irregular acquisition geometries. Due to the irregular acquisition geometry mean traveltime curves lose completely their symmetry and appear more as one-branch curves (in this case, the acquisition geometry is narrower for the first gathers and opens gradually as the gather number increases).

$$\frac{\sigma(x)}{t_0} = F_s(x) = \sqrt{\left(\frac{A_x}{A_0}\right)^2 - \left(\frac{\bar{t}_x}{t_0}\right)^2} + \frac{1}{3L_r A_0^2} [\xi^3]_{\xi=-s_x}^{\xi=L_r-s_x}. \tag{4}$$

Figure 3 shows the theoretical mean traveltime and the standard deviation curves for a homogeneous isotropic medium explored with rectangular (continuous line) and non-rectangular recording geometries (pointed line). These curves lose their symmetry, due to the irregularity of the recording geometry.

Case 3: The Elliptical Anisotropic Case

Although a complete theoretical analysis leading to mean traveltime anisotropic curves might be in order, only corrections to the isotropic case will be necessary to cope with the real study case at the end of this article.

The Experimental Mean Traveltime Curves

Empirical mean traveltime curves can be inferred from the observed data using their corresponding discrete estimators. For instance, considering a source

gather sg_i , the discrete mean time, $\bar{t}_{sg_i}^2$, and the variance, σ_{sg_i} , are calculated as follows:

$$\bar{t}_{sg_i} = \frac{1}{NR_i} \sum_{j=1}^{NR_i} t_{s_i r_j}, \quad (5)$$

$$\sigma_{sg_i}^2 = \frac{1}{NR_i - 1} \sum_{j=1}^{NR_i} (t_{s_i r_j} - \bar{t}_{s_i})^2 \quad (6)$$

where NR_i is the total number of receivers in this gather. Values provided by Equations (5)–(6) applied on the whole domain (single-zone analysis) or on the desired zones (multi-zone analysis), are the data to perform the least squares estimation of the slowness parameters.

Among the four mentioned reasons (anomalous data, systematic lack of them, topography variations in the measurement array or exiguous scale-defined high velocity gradients) causing rapid changes in mean traveltimes curves, further distinction can be made:

- a priori knowledge on data gaps can be employed to compute the theoretical curves in each gather considering only the pairs of sources and receivers where experimental data are available. This amounts to correct the theoretical mean and variances introducing non-smoothness (saw-teeth variations). The involved gathers need not be considered anomalous if the theoretical curve computed in this way matches the observed empirical oscillations. In this case, the portion of the empirical curves affected by the lack of data can be replaced using an interpolation algorithm on the existing data set without affecting the results of the analysis (e.g., see Fig. 14, left portions of four curves, specially in the receiver gather).
- Topography variations can be modelled using the real source and receivers available coordinates.

Isotropic Velocity Estimation

Let us reason for the mean time curve case. Given the data vector

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}(x_1) \\ \bar{t}(x_2) \\ \vdots \\ \bar{t}(x_q) \end{pmatrix}$$

(mean times for (source or receiver) gathers located at recording positions x_1, x_2, \dots, x_q) and the mean recording geometry function $F_m(x)$ (see relation 3), t_{0k} in zone

Ω_k^l is the solution of the following over-determined system:

$$\begin{pmatrix} F_m(x_1) \\ F_m(x_2) \\ \vdots \\ F_m(x_q) \end{pmatrix} (t_{0k}) = \begin{pmatrix} \bar{t}(x_1) \\ \bar{t}(x_2) \\ \vdots \\ \bar{t}(x_q) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_m \cdot t_{0k} = \bar{\mathbf{t}} \tag{7}$$

The least squares solution of (7) fulfills:

$$\mathbf{F}_m^T \mathbf{F}_m \cdot t_{0k} = \mathbf{F}_m^T \bar{\mathbf{t}}.$$

As $\mathbf{F}_m \in M(q, 1)$, the last equation may be written as

$$t_{0k} = \frac{\sum_{i=1}^q F_m(x_i) \bar{t}_s(x_i)}{\sum_{i=1}^q F_m^2(x_i)}.$$

Then, velocity in Ω_k^l is

$$V_k = \frac{A_{0k}}{t_{0k}}.$$

The same approach may be followed with the standard deviation curve for the source and receiver gathers, using the corresponding data vector,

$$\mathbf{sd} = \begin{pmatrix} \text{sd}(x_1) \\ \text{sd}(x_2) \\ \vdots \\ \text{sd}(x_q) \end{pmatrix},$$

and the standard deviation recording geometry function, $F_s(x)$ (see relation 4). This procedure provides four different estimations of velocity V_k in each zone of the geological domain. As we will show in future sections the degree of agreement between these velocities can be adopted as an indicator for assessing data quality.

The Anisotropic Corrections

Anisotropic corrections can be incorporated into the mean traveltime algorithm.

Let us consider an elliptical anisotropic velocity model characterized by the following parameters:

- maximum velocity, V_{\max}

- direction of the anisotropy α , which is the angle that maximum velocity takes with the east direction measured counter-clockwise,
- anisotropy ratio $\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$.

Velocity in the direction which takes an angle β with the direction of maximum velocity (α), can, then, be expressed as:

$$V_{\beta} = a_{\lambda\beta} V_{\max}, \quad a_{\lambda\beta} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \frac{\tan^2 \beta}{\lambda^2}}}.$$

Thus, introduction of the anisotropic velocity model induces a correction in the corresponding theoretical mean traveltimes predictions. The algorithm proceeds now in two steps:

1. Computation of the empirical mean traveltimes curves.
2. Identification of the anisotropic parameters, by solving the following optimisations problems in the source and gather domains:

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \left\| \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^* \right\|_2^2,$$

where $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}$ are the experimental mean traveltimes curves in the considered gather and $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^*$ the corresponding anisotropic mean traveltimes theoretical predictions.

As will be shown in the next section, anisotropic corrections may be needed when velocity estimated through mean and standard deviation curves are different, obtaining the same results in the shot and receiver domains.

Data Variability Discrimination

Adjustment of the empirical mean traveltimes curves, carried over *independently* on both mean and variance on each region, is an inverse problem whose results shed light over the causes of data variability. The *degree of agreement between the velocity estimated from the empirical mean curves and that obtained from the empirical standard deviation curves, for the shot and the receiver domains, provides, along with inspection of residuals, a criterion to help to analyse and classify the sources of data variations.*

Next we provide results illustrating the effect on estimated velocities of the following kinds of data variability sources:

- Gaussian and non-Gaussian random variations that might be interpreted as measurement noise or the effect on traveltimes of random slowness heterogeneities in the medium.
- Systematic errors due to misallocation of some sources and/or receivers coordinates and triggering errors.
- Modelling errors, for instance, due to anisotropic-type effects.

Having in mind the study case to be later considered, we investigate here the sensitivities of the estimated velocities through mean traveltimes curves analysis employing a synthetic model presenting the important features of the real survey:

- transverse dimension of the domain, $A = 70$ m,
- length of the source and receiver lines, $L = 140$ m,
- background homogeneous velocity model, $V = 5300$ m/s,
- total number of source and receivers, $NS = NR = 60$,
- distance between adjacent sources or receivers, $d = 2.5$ m.

Case 1: Gaussian Measurement Noise

Synthetic empirical traveltimes were generated by adding a Gaussian noise (zero mean and a 10% variation coefficient) to the synthetic traveltimes corresponding to the above homogeneous model. Figure 4 shows the mean traveltimes curves in this case.

The following conclusions are obtained:

- Perturbations appear in a characteristic saw-teeth style showing themselves clearly near the minimum of both curves.
- The estimated velocity obtained through least squares fitting of the perturbed *mean* curve, v_t^* , coincides approximately with the homogeneous velocity, V . Nevertheless, the velocity estimated *with the same procedure* from the *standard deviation* curve, v_σ^* , is observed to be always lower than the homogeneous one, V . This corresponds to a systematic time shift of the perturbed standard deviation curve to higher values than those of the homogeneous model curve. Thus, when a difference is observed between both velocity estimated values ($v_t^* > v_\sigma^*$) this might identify the existence of Gaussian measurement noise. This behaviour is identical in the source and receiver domains.
- The former analysis is possible due to the greater sensitivity to data noise of the σ -curve inverse estimation process than that of the \bar{t} -curve. Figure 5 shows the magnitude of v_t^* and of the quotient $\frac{v_t^*}{v_\sigma^*}$ versus noise level.

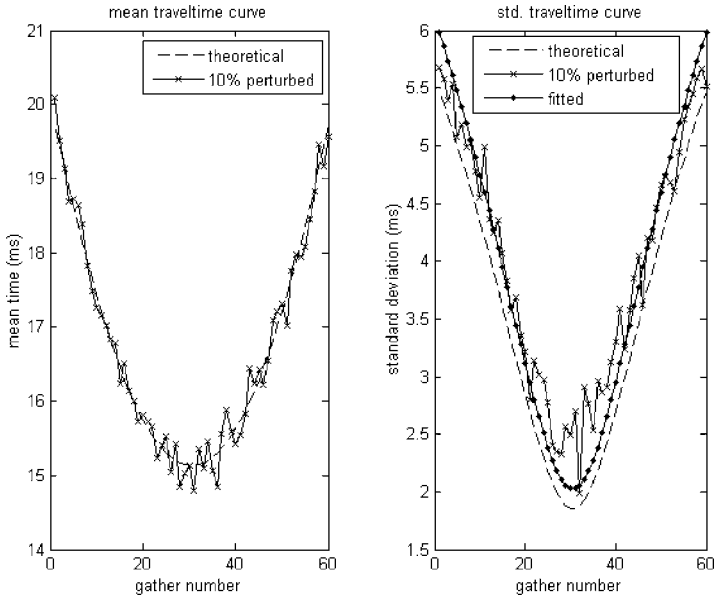


Figure 4. Mean traveltime curves perturbed by a Gaussian noise (zero mean and a 10% variation coefficient). The estimated velocity obtained through least squares fitting of the perturbed *mean* curve, v_t^* , coincides approximately with the homogeneous velocity, V . The noise induces a systematic time shift of the perturbed standard deviation curve to higher values than those of the homogeneous model curve. The velocity estimated from the *standard deviation* curve, v_σ^* , is, then, observed to be always lower than the homogeneous one, V .

Mean value of v_t^* stays approximately invariant until a level of noise (VC, variation coefficient) of 0.3, while $\frac{v_t^*}{v_\sigma^*}$ systematically decreases.

Case 2: Non-Gaussian Noise

A Gaussian noise has been added to the logarithms of the traveltimes. The empirical traveltime is therefore simulated as a log-normal random variable affected by multiplicative errors. This kind of noise has shown not to affect the velocity estimated through the mean time curve, which coincide with the isotropic velocity both in the source and receiver domains. The way this noise affects the velocity estimated through the standard deviation curve depends on the geometry of the area swept by the rays traced between the selected pair of source-receiver set:

- in the case this area has a parallelepiped shape (i.e. both gathers having equal length) the effects are similar than in the Gaussian case: v_σ^* velocities in the source and receiver gathers coincide and are lower than v_t^* .

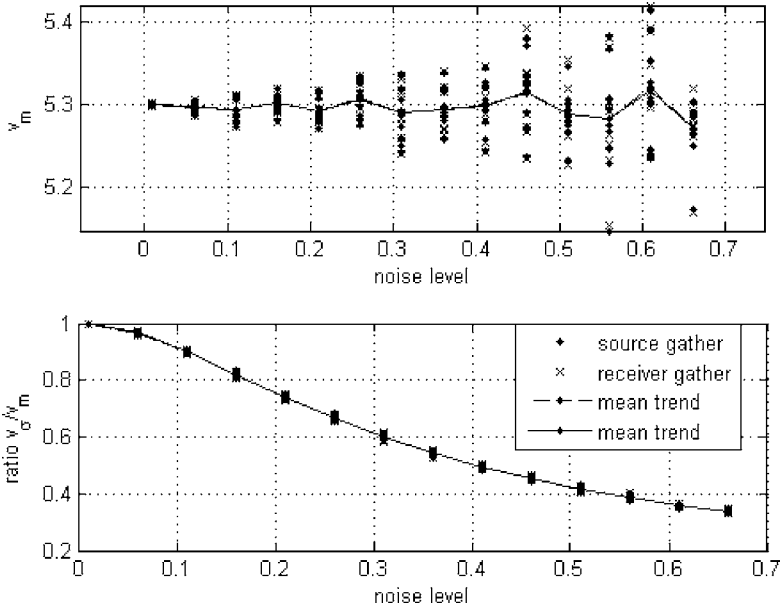


Figure 5. Velocity estimated v_t^* from the mean traveltime curve and ratio $\frac{v_t^*}{v_\sigma^*}$ obtained for different Gaussian noise levels. The mean trend coincides in the source and receiver gathers. Remark $\frac{v_t^*}{v_\sigma^*}$ always lower than 1.

- in case of an irregular (trapezoidal) shape both velocities differ, being greater the velocity corresponding to the shorter gather length (Fig. 6).

Case 3: Systematic Errors

For instance, misallocation of some of the source and/or receiver coordinates and triggering errors belong to the class of systematic errors.

In the case of misallocation, different effects on the mean traveltime curves are seen depending on the type and magnitude of the error. For instance, spurious horizontal displacement of the whole source borehole results in a velocity estimated value having a bias opposite in sign in both curves, more remarkable for the \bar{t} -curve than for the σ -curve (Fig. 7). Erroneous locations of a partial set of contiguous sources produces a local distortion observable in both receiver mean traveltime curves. The position of these humps correlates with erroneous coordinates. Also, at least for the assumed geometry, horizontal coordinates misallocation seems to have greater influence than vertical position errors.

Figure 8 shows the mean traveltime curves obtained introducing a triggering error of 1 ms in the first ten source gathers. The effect is better observed in the

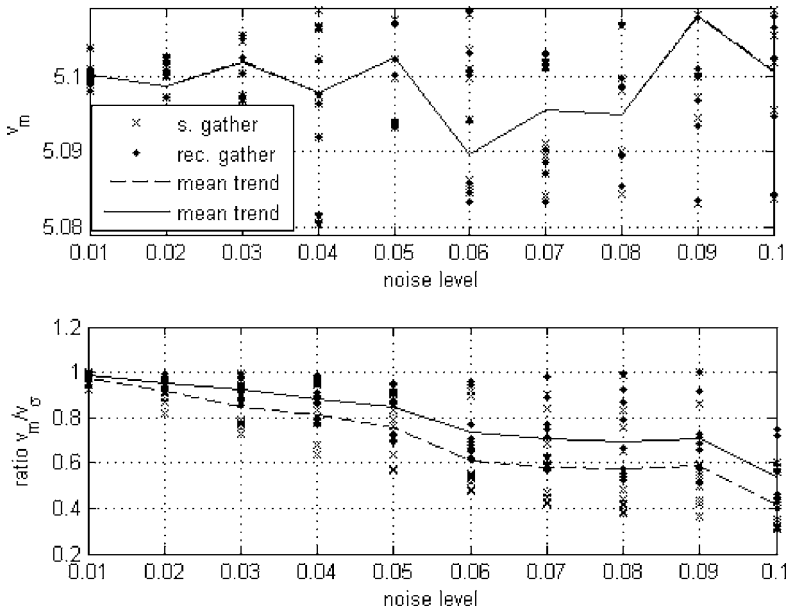


Figure 6. Non-Gaussian (lognormal) multiplicative noise in a trapezoidal ray-swept area (source gather length greater than the receiver gather length). Velocity estimated v_t^* from the mean traveltime curve and ratio $\frac{v_t^*}{v_\sigma^*}$ obtained for different non-Gaussian noise levels. The mean trend coincides in the source and receiver gathers for the mean curve. The velocity estimated through the standard deviation curve does not coincide in the source and receiver gathers. Both velocities are lower than the velocity estimated trough the mean curve.

source gather (slope break in mean time curve) and in the standard deviation curve in the receiver gather (experimental misfit). The standard deviation curve in the source gather is barely affected by this kind of error (for perturbations of this order), showing a good matching of the perturbed and empirical curves.

Case 4: Anisotropic Effects

Figure 9 shows the estimated velocities (in the source and gather domains) through an isotropic algorithm in the case of anisotropic media of maximum velocity 5.3 km s^{-1} , anisotropy ratio 0.95 and anisotropy angles ranging from -90° to 90° (or 0° to 180°). Velocities estimated through the mean and standard deviations curves are different ($v_t^* \neq v_\sigma^*$), providing the same results in source and receiver gathers. Also, velocities estimated through \bar{t} -curves are always lower than the maximum one. The magnitude of this disagreement depends on the anisotropy angle. On the other hand, velocities estimated through σ -curves are lower or higher than the maximum one depending on the anisotropy angle.

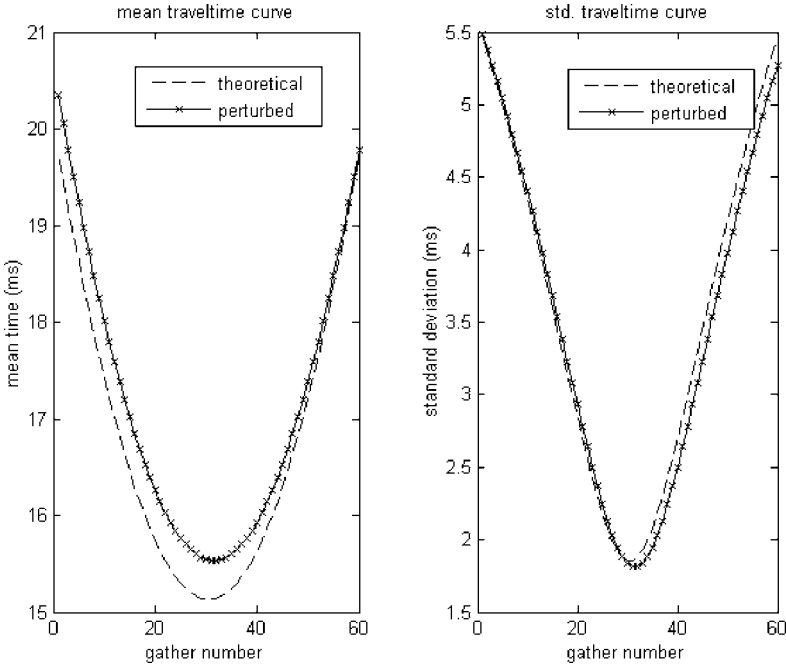


Figure 7. Mean traveltime curves perturbed by a systematic error of coordinates of one source and receiver position.

Application of the Mean Traveltime Curves Analysis to Heterogeneous Media

Theoretical mean traveltime curves admit straight approximation of the ray paths. Experimental mean traveltime curves, on the contrary, do not make use of this assumption, i.e., they can always be calculated based solely on traveltime empirical data and geometry. Observed differences from the homogeneous background, which are not anticipated by the theoretical model guides to assess the genesis of data variation.

Berryman (1994) determined rigorous constraints on the minimum and maximum wave speeds in the propagating medium, based only on the traveltime data and approximate knowledge of the source and receiver locations. He showed that bent rays do not play an important role, and thus, linear tomography methods provide enough good results, if the following ratio condition is fulfilled:

$$R = \frac{\max_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)} - \min_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)}}{\min_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)}} \leq 0.2. \tag{8}$$

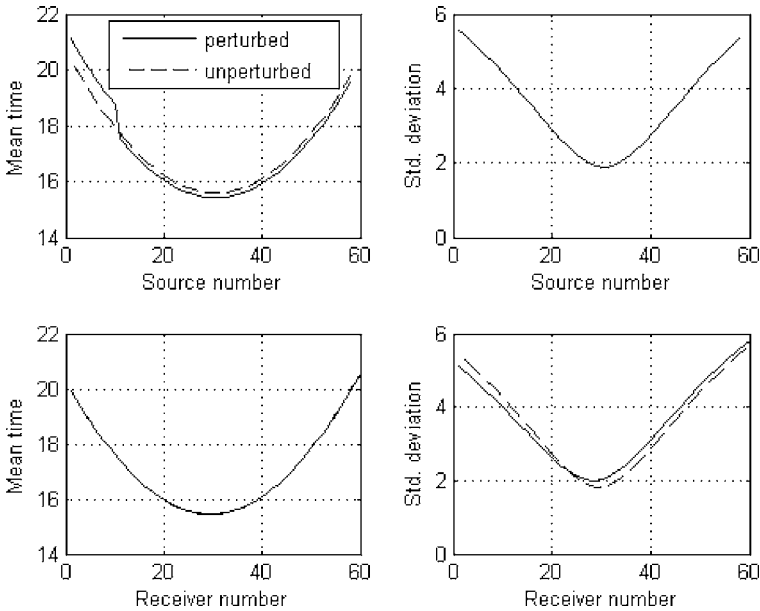


Figure 8. Mean traveltime curves perturbed by triggering error of 1 ms happened at the first ten sources gathers. The effect is observed in the source gathers (slope break in the mean time curve) and in the receiver gathers (lateral translation of the standard deviation curve). The standard deviation curve in the source gather and the mean curve in the receiver gather are not affected by this kind of error.

Berryman's ratio can be interpreted as the maximum percent variation of the apparent slowness $\frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)}$ on the whole studied domain. Abrupt changes on the apparent slowness map can be used to locate the zonal contacts in the same place, so much in the same way as empirical mean traveltime curves do. Also, one cannot forget, this ratio is also sensible to data errors.

In cases where Berryman's ratio is greater than 0.2 and this is due to zonal heterogeneities, there will also be discrepancy between the theoretical and empirical mean traveltime curves, this serving to locate the transition boundaries (Fernández Martínez and Pedruelo González, 1998). The multi-zone analysis can, then, help to maintain the above-mentioned ratio (8) under the desirable limits, allowing to model geologies with increasing heterogeneity degrees to justify the origin of these anomalies.

Random Heterogeneities

Different simulations have been carried over by means of a ray-tracing algorithm, over random media with increasing degree of heterogeneity. The velocity

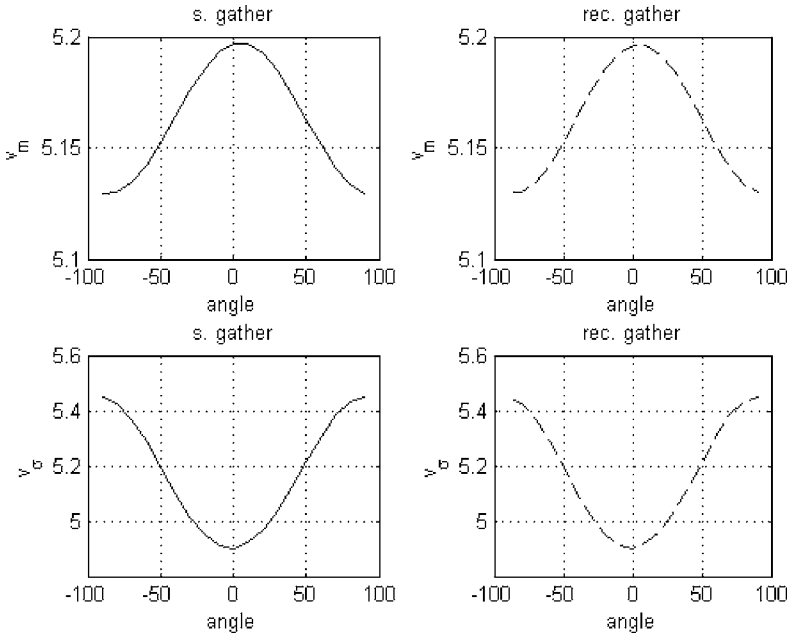


Figure 9. Estimated velocities through CTM analysis for an anisotropic medium of maximum velocity 5.3 km s^{-1} , anisotropy ratio 0.95 and different anisotropy angles ranging from -90° to 90° . Velocities estimated from the mean curve in the source and receiver gathers coincide and are lower than the maximum anisotropic velocity. Velocities estimated from the standard deviation curve in the source and receiver gathers also coincide and are lower or greater than the real maximum anisotropic velocity depending on the anisotropy angle.

fields correspond to uncorrelated Gaussian regionalized variables with mean 5.3 km s^{-1} and variation coefficient ranging from 0.05 to 0.7. Figure 10 shows the estimated velocity through mean traveltime curves analysis along with the evolution of Berryman’s ratio versus the variation coefficient. The following conclusions can be derived:

- both curves show the same behaviour, showing a slope break for a noise level of approximately 0.5. Berryman’s ratio remains lower than 0.2 (limit of validity for the linear approximation) for degrees of heterogeneity up to variation coefficient of 0.3–0.35.
- For higher values of the variation coefficient than 0.3, the estimated velocities through the mean traveltime curves analysis become physically meaningless, thus, mean traveltime curves behaviour and Berryman’s ratio limits are consistent.

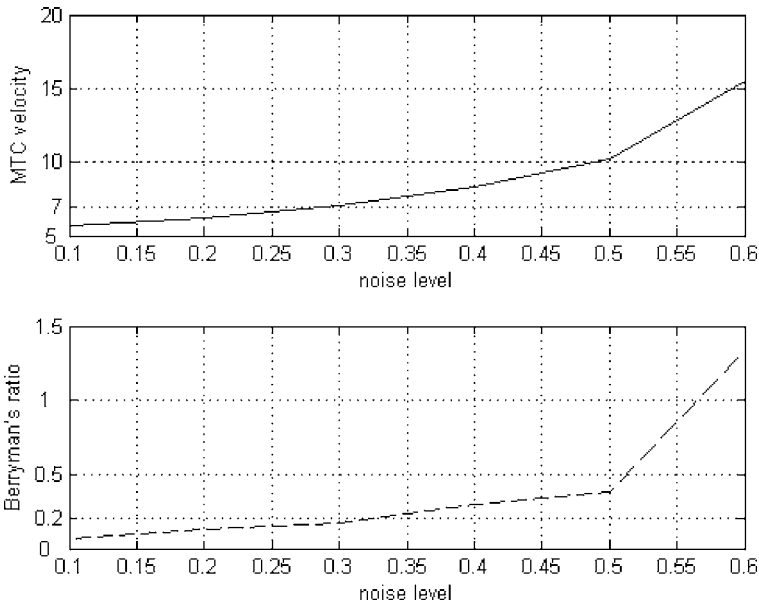


Figure 10. Random heterogeneous medium. Evolution of the estimated velocity through mean traveltimes curves and Berryman's ratio of heterogeneity versus different noise levels (variation coefficient). It can be observed that both curves have the same behaviour: Berryman's ratio stays under 0.2 for variation coefficients up to 0.35. Also estimated velocity is under 6.0 km s^{-1} for variation coefficients under 0.2, which sets a more restrictive upper bound to the degree of heterogeneity acceptable for the method.

Faults and Intrusions

Another feature, important, for instance, in tomography geotechnical studies is the presence of faults and/or intrusions. Figure 11 shows the effect produced on the mean traveltimes curves by the presence of three types of those features, depending of the angle with the acquisition geometry: horizontal, vertical and inclined. The following conclusions can be observed:

- Horizontal features produce humps in both curves, easily seen in the gathers located in the near of the geological break. The fault case generates estimated velocities below that of the homogeneous case (fault absent). On the other hand, horizontal intrusion overestimates velocity. The \bar{t} -curve is horizontally displaced while the σ -curve is vertically.
- Vertical faults do not change the curves shapes. The effect is a vertical translation, more pronouncedly remarked in the \bar{t} -curve than in the σ -curve.

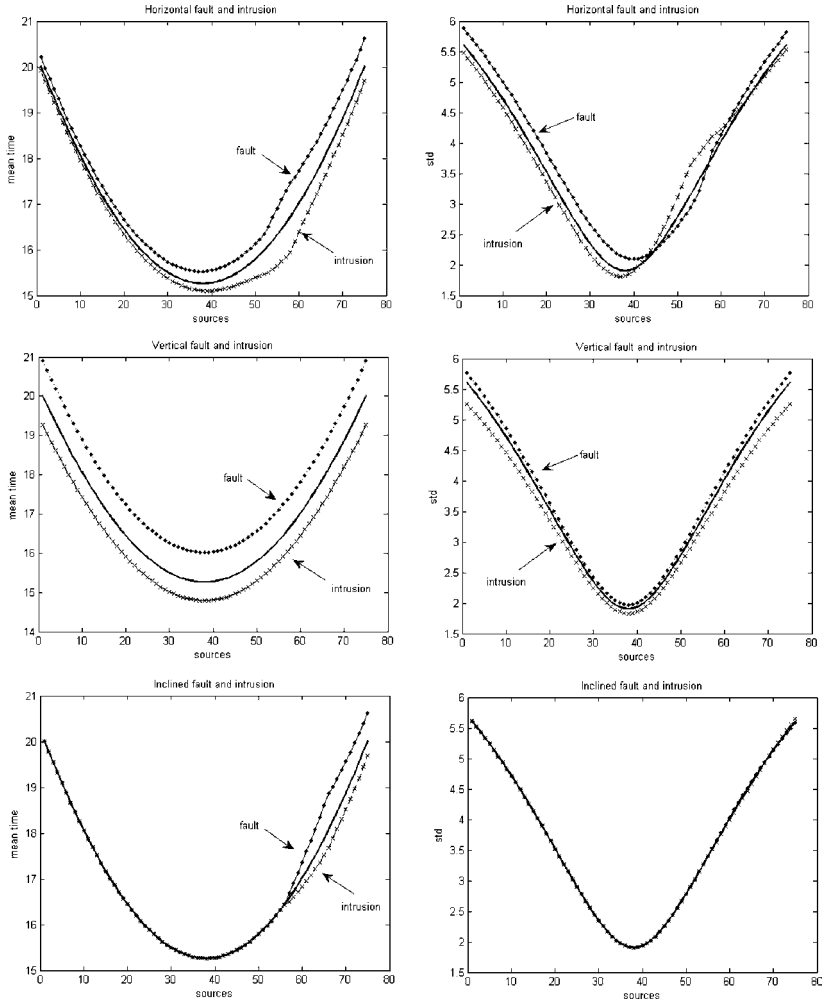


Figure 11. Different types of faults and intrusions: horizontal, vertical and zonal. Horizontal faults and intrusions provokes shift and hump deformation in the sources and receivers under the tectonic feature. Vertical faults or intrusions do not affect the shape of the MT curves, but induces a vertical shift. Zonal faulting or intrusion provokes slope break in the mean curves but does not affect the standard deviation curve. Location of the break corresponds with the spatial location of the fault or intrusion.

Traveltimes map keeps the homogeneous isotropic structure but with the times scaled.

- The inclined case produce slope breaks in the \bar{t} -curve, but not in the σ -curve.

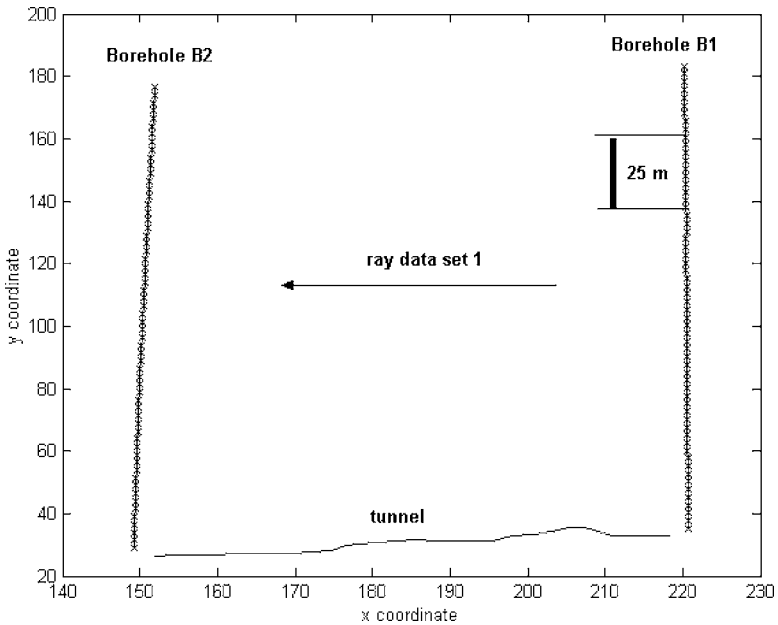


Figure 12. Grimsel test site-field 1: acquisition geometry for data set 1. The distance between adjacent sources and receivers is approximately 2.5 m.

STUDY CASE: APPLICATION TO THE GRIMSEL TEST SITE

In this section we show the application of the mean traveltimes curves analysis to a data set which comes from an area with granitic geology: the Grimsel test site-field 1 (NAGRA, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste). The geometry of the survey is approximately rectangular bounded by two boreholes: B1 and B2. The dimensions are approximately $70 \times 150 \text{ m}^2$, and the survey is composed of 58 sources and 60 receivers separated by a distance of 2.5 meters (Fig. 12).

The reasons to choose this study case are the following:

- The geological and geophysical studies undertaken in the granite (Gelbke, Miranda, and Sattel, 1989; Fernández Martínez and others, 2003) have shown that the normal range of variation for the velocities is $4.7\text{--}5.6 \text{ km s}^{-1}$. Considering this interval of a priori velocity variation, the expected highest ratio (8) for this medium would be 0.19, allowing the use of linear tomography approximations.
- The granite shows a weak elliptical anisotropy (Gelbke, Miranda, and Sattel, 1989) given by the parameters: $\beta = N30^\circ \text{ W}$, $\lambda = 0.95 - 0.97$,

where β is the angle that maximum velocity, V_{\max} , forms with the North, and $\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$, is the anisotropy ratio. The high value of λ allows us to use this methodology, since the geophysical behaviour (observed traveltimes) is not quantitatively very different with respect to the isotropic case. Nevertheless, anisotropic corrections can be incorporated into the mean traveltime methodology.

- Several problems were reported in this survey which boosted research work to identify possible sources of errors (Gelbke, Miranda, and Sattel, 1989; Maurer and Green, 1997).
- When inverting with an isotropic model, the presence of outliers resulted in some artefacts in the velocity field that are judged unreal. These anomalies were not drastically reduced by the anisotropic corrections incorporated into the numerical algorithm. Furthermore, when examining the different source and receiver gathers, all of them had at first glance the same appearance, preventing from performing any kind of data editing. The study of the data quality shown in this section, is aimed to explain the character of these velocity anomalies.

Figure 13 shows the experimental traveltime map (Fig. 13(A)), the acquisition distance map (Fig. 13(B)) and the apparent slowness map (Fig. 13(C)). The experimental traveltime map is homothetic to the distance map, confirming that the geophysical behaviour of the geological domain is close to the isotropy. Deviations from isotropy can be spatially located using the slowness apparent field. In particular, remark the presence of two low velocity areas.

Velocity constraints (Berryman, 1994) are deduced from the slowness apparent field and are the following for this data set:

$$\begin{aligned} \max_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)} &= 0.2034 \Rightarrow \text{Max}(v_{\min}) \simeq 4.91 \text{ km s}^{-1}, \\ \min_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)} &= 0.1853 \Rightarrow \text{Min}(v_{\max}) \simeq 5.40 \text{ km s}^{-1}, \\ R &= \frac{\text{Min}(v_{\max}) - \text{Max}(v_{\min})}{\text{Max}(v_{\min})} \simeq 0.098. \end{aligned}$$

The value of ratio R allows, then, the use of a linear ray-tracing model (Berryman, 1994).

Figure 14 shows the empirical and theoretical (corrected for lack of data) \bar{t} -curves and σ -curves. In the receiver domain, gathers 1 to 13 have a clear anomalous behaviour as shown by the sharp oscillations in both curves. These anomalies are due to a systematic bias of the experimental traveltime curves caused by traveltime gaps (e.g., insufficient data), as shown by the *corrected* theoretical mean traveltime curves. The affected portion of the curve can then be

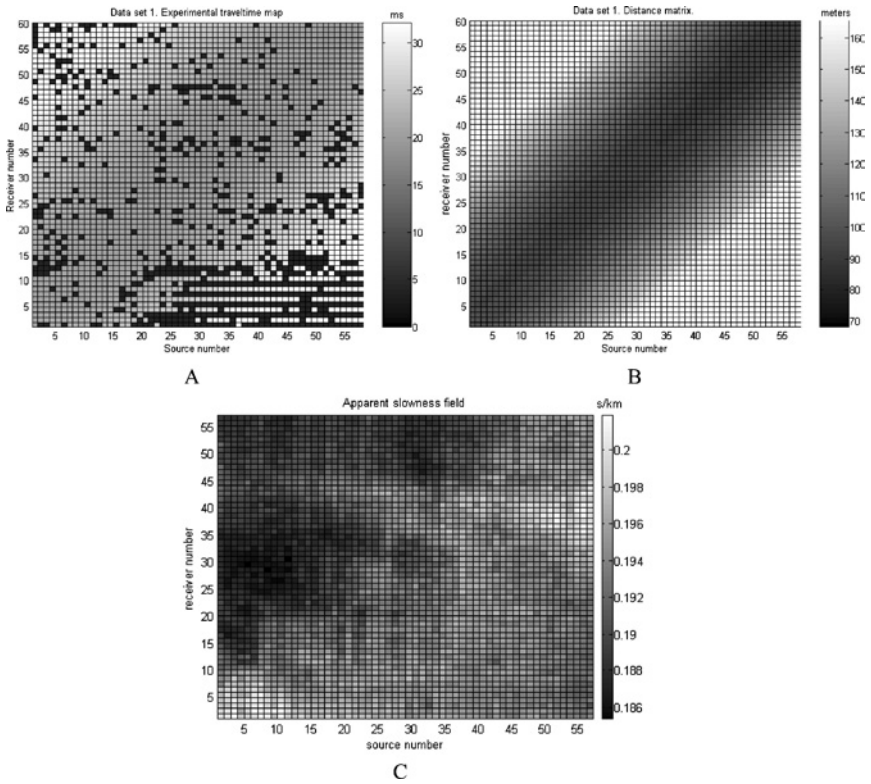


Figure 13. (A) Experimental traveltimes map. Zero values—in black—indicate the pairs of sources and receivers where no experimental traveltimes are available, mainly receivers gathers 1 to 13. (B) Distance map. (C) Apparent slowness field (the values where no time is available have been interpolated).

interpolated with the expected true average value. The granite is very homogeneous and isotropic, being 5.18 km s^{-1} the model velocity estimated from the \bar{t} -curves and $5.28\text{--}5.32 \text{ km s}^{-1}$ the velocity model deduced from the σ -curves. This difference in behaviour could be explained by means of a slight anisotropy effect. Also, the diagonal structure of the residual map (i.e. difference between real and modelled traveltimes), corresponding to an isotropic model with velocity 5.18 km s^{-1} (Fig. 15) strongly suggests presence of anisotropy.

Furthermore, two different areas in the south (sources: 1–20, receivers 1–10) and in the northeast of the residual map (sources: 35–60, receivers: 30–45) can be neatly observed, where times are underestimated, meaning a (conflicting) too low velocity. Also a zone in the north of the map (sources: 1–35, receivers: 25–60) exists where times are overestimated, the required velocity is, nevertheless, inside

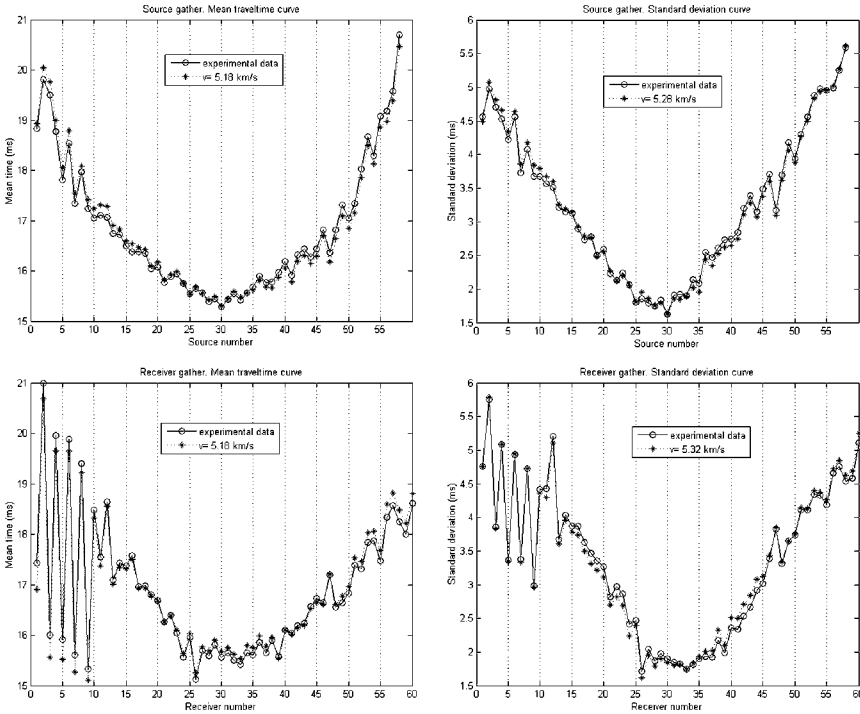


Figure 14. Single-zone analysis: source and receiver gather mean traveltime curves (experimental curves and theoretical models). Theoretical model corrected as to account for lack of data.

the usual range. This map shows similar information that the apparent slowness map (Fig. 13(C)). Both maps suggest a multi-zone analysis would be helpful in the two zones where the low velocity anomalies may be generated:

- Zone 1: Sources 1–20, Receivers 1–10.
- Zone 2: Sources 45–58, Receivers 35–50.

Table 1 summarizes the results of the mean traveltime curves analysis carried out independently on these zones. Mean time curves, both in receiver and in source gather, gives the same velocity estimate. Such an event does not occur for the velocities estimated from both σ -curves. *The observed difference in behaviour of the receiver gather and the source gather can be explained, as will be shown in the following, by means of the combined influence of a slight anisotropy and simultaneous non-Gaussian noise.*

Tables 2 and 3 summarize the results of the multi-zone analysis accounting for anisotropic corrections. It can be remarked that:

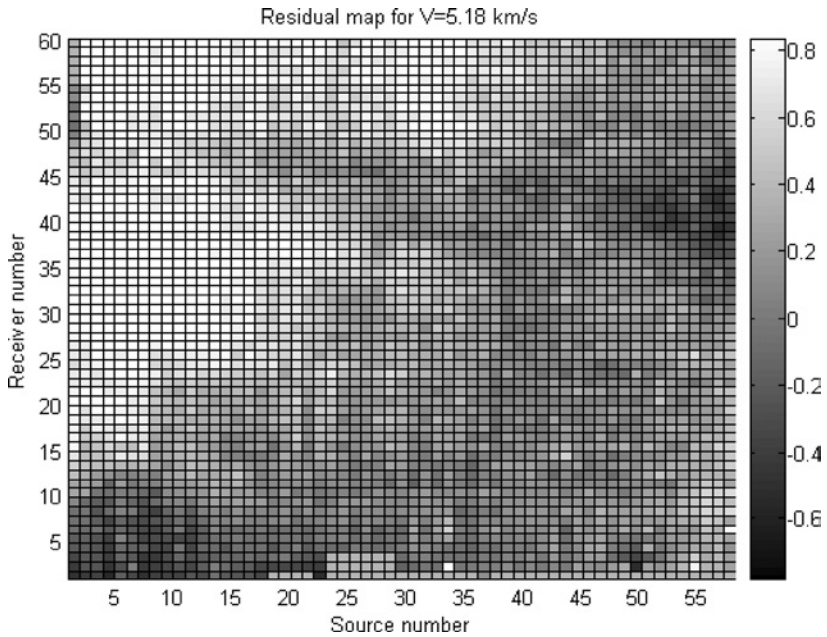


Figure 15. Traveltime differences (calculated-real) for an isotropic model of $v = 5.18 \text{ km s}^{-1}$. *Black colour* indicates the areas where the traveltimes have been underestimated.

- Models are almost isotropic or weakly anisotropic (ratios of 0.98 and 1.0);
- Certain anisotropic ratios (0.88 and 0.91), fall out of admitted realistic limits to achieve a better fit. Thus, one can conclude that anisotropy alone does not justify the mean traveltime curves behaviour in the studied zones. Degradation of anisotropic ratios in presence of data noise has been also remarked by Pratt and Chapman (1992).

Finally, anisotropic models along with non-Gaussian noise in the corresponding traveltimes, have been considered. Numerical runs have been performed for different noise levels (0.01–0.1, Gaussian additive associated perturbations for

Table 1. Results of the Multi-Zone Analysis (Zones 1 and 2)

	Zone 1 (S: 1-20, R: 1-10)	Zone 2 (S: 45-58, R: 35-50)
Estimated velocity	(km s^{-1})	(km s^{-1})
Mean (source gather)	5.05	5.07
Std (source gather)	4.22	4.84
Mean (receiver gather)	5.04	5.07
Std (receiver gather)	5.52	4.55

Table 2. Results of the Mean Traveltime Curves Analysis with Anisotropic Corrections in Zone 1

Estimated velocity (Zone 1)	V_{\max} (km s ⁻¹)	λ	α
Mean (source gather)	5.14	0.97	112.6
Std (source gather)	4.22	1.0	113.3
Mean (receiver gather)	5.39	0.91	136.1
Std (receiver gather)	5.52	1.0	118.0

log-traveltimes), and the following anisotropic velocity parameters: $V_{\max} = 5.15$ km s⁻¹, $\lambda = 0.95$, $\alpha = 120^\circ$.

Figures 16 and 17 show, for different numerical simulations, the estimated velocities by mean traveltime curves analysis in zones 1 and 2, both, in the source and receiver domains. The best results are summarized in Table 4 (to be compared to those obtained in Table 1).

It is worth pointing out that:

- The noise level for the best fit has been around 6% in both zones, which could be regarded as a consistency argument. The proposed noise level has been obtained with a good resolution (others noise levels deteriorate the fit).
- Velocity estimation (in the receiver gather) for zone 1 is worse than for zone 2. This effect can be taken into account introducing an extra-variability that lowers estimated velocities *only* in the receiver gather domain. Triggering and picking errors are consistent with this kind of effect.

CONCLUSIONS

In this work we have introduced the mean traveltime curves as new theoretical relationships which are valid in the case of multi-zone homogeneous media and for different configuration geometries currently found in borehole tomography. Based on these laws we provide to the geophysicist with an efficient tool to detect

Table 3. Results of the Mean Traveltime Curves Analysis with Anisotropic Corrections in Zone 2.

Estimated velocity (Zone 2)	V_{\max} (km s ⁻¹)	λ	α
Mean (source gather)	5.07	1.0	123.1
Std (source gather)	4.73	0.98	130.3
Mean (receiver gather)	5.68	0.88	117.2
Std (receiver gather)	4.64	0.98	120.3

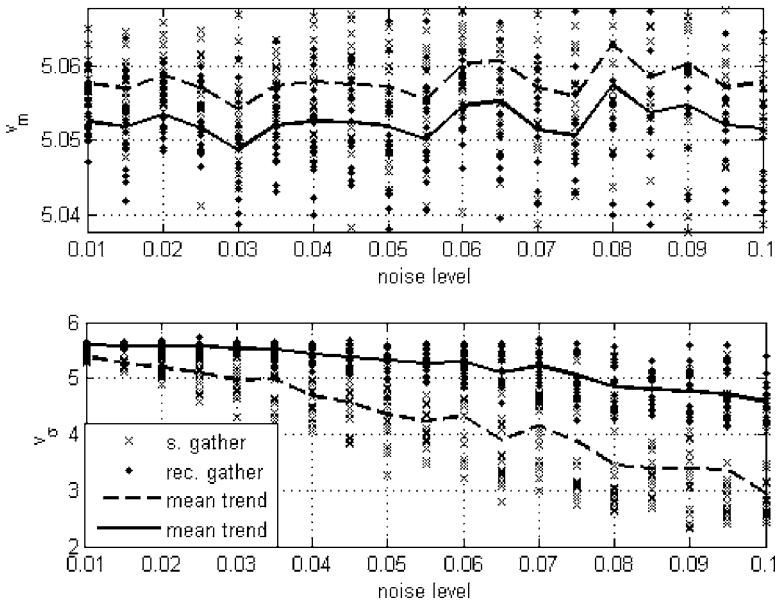


Figure 16. Estimated velocities from the mean and standard deviation curves from different simulations on zone 1 corresponding to different non-Gaussian noise levels, in presence of anisotropy ($V_{\max} = 5.15 \text{ km s}^{-1}$, $\lambda = 0.95$, $\alpha = 120^\circ$). The best velocity agreement with the isotropic fitting results for a noise level of 5.5% for which the estimated velocities for the std curve in the source and receiver gather are 4.26 and 5.30 km s^{-1} (instead of 4.22 and 5.52 km s^{-1}).

traveltime errors or anomalies and to analyse the accuracy of the first arrivals (mean traveltime curves analysis). This analysis has to be performed dividing the domain into fairly homogeneous zones, which can be deduced from some a priori geological information, or from the analysis of the mean traveltime curves themselves (single-zone analysis).

Experimental mean traveltime curves are very sensible to systematic lacks of data and to topography variations. We introduce simple solutions to deal with these undesirable effects in the mean traveltime curves analysis. Also, the effects on the experimental mean traveltime curves of different kind of Gaussian and non-Gaussian noise models, modelling errors as anisotropic-type effects, and geological heterogeneities are also analysed. As expected, the standard deviation curves are generally more sensible to the presence of noise (unless in the case of coordinates misallocations). Different behaviour of this curve on the source and receiver gather is typical of non-Gaussian noise, as we have shown in the study case. Finally, we show the validity of the mean traveltime curves analysis for different kind of heterogeneous media, thus, *mean traveltime curves analysis is a powerful*

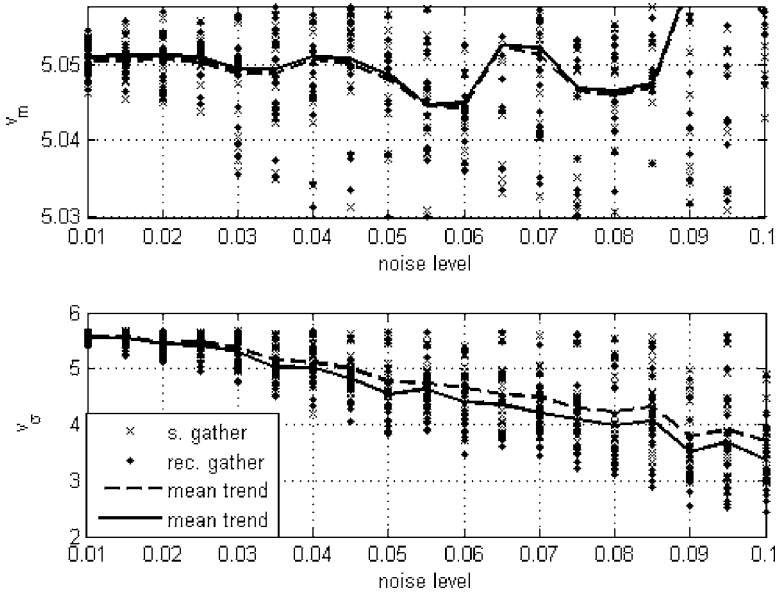


Figure 17. Estimated velocities from the mean and standard deviation curves from different simulations on zone 2 corresponding to different non-Gaussian noise levels, in presence of anisotropy. The best velocity agreement with the isotropic fitting results for a noise level of 6% for which the estimated velocities for the standard deviation curve in the source and receiver gather are 4.78 and 4.57 km s⁻¹ (instead of 4.84 and 4.55 km s⁻¹).

technique able to model different kinds of homogeneous and heterogeneous media explored with real recording geometries.

Performing mean traveltime curves analysis before inversion provides a quick data distribution analysis, which is an important knowledge in inverse problems (best multi-zone velocity model and a range of variation) and is always a useful procedure even if no data editing algorithms are used.

Table 4. Best Results of the Different Simulations with a Non-Gaussian Noise in Presence of Anisotropy ($V_{max} = 5.15 \text{ km s}^{-1}$, $\lambda = 0.95$, $\alpha = 120^\circ$).

	Zone 1 (noise level = 5.5%)	Zone 2 (noise level = 6.0%)
Estimated velocity	(km s ⁻¹)	(km s ⁻¹)
Mean (source gather)	5.05	5.06
Std (source gather)	4.26	4.78
Mean (receiver gather)	5.05	5.06
Std (receiver gather)	5.30	4.57

ACKNOWLEDGMENTS

This research was partly supported by the FICYT project No. 703211 in collaboration with ENRESA S.A. under the research program: "Petrophysical characterization of crystalline massifs by non-destructive techniques." We would like to thank NAGRA for the permission to use the Grimsel data set to illustrate this methodology. We would like to acknowledge the anonymous referees for their suggestions, of great help to us to improve the quality of this paper. Finally we would also like to thank Dr. J. Schuster (Utah University) for kindly lending us the MATLAB ray tracing code which facilitated the simulation of the behaviour of the mean traveltimes curves analysis in heterogeneous media.

REFERENCES

- Berryman, J. G., 1991, Lectures notes on non linear inversion and tomography: Borehole seismic tomography. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 164 p.
- Berryman, J. G., 1994, Constraints on minimum velocity variance for seismic traveltimes tomography: *Geophys. J. Int.*, v. 119, p. 689–692.
- Dines, K. A., and Lytle, R. J., 1979, Computerized geophysical tomography: *IEEE Proceedings*, v. 67, no. 7, p. 1065–1073.
- Fernández Martínez, J. L., and Pedruelo González, L. M., 1998, A new method of inferring a priori information for the transmission tomographic inverse problem: *in* Buccionti, A., Nardi, G., and Potenza, R., eds., *Proceedings of IAMG'98, Isola d' Ischia, Italy, Part 2*, p. 833–838.
- Fernández Martínez, J. L., Menéndez Pérez, C. O., Pedruelo González, L. M., Fernández Alvarez, J. P., and Cienfuegos Suárez, P., 2003, Geostatistical analysis of inverse problem variables: Application to seismic tomography: *Math. Geol.*, v. 35, no. 8, p. 935–969.
- Dyer, B. C., and Worthington, M. H., 1988, Some sources of distortion in tomographic velocity images: *Geophys. Prospect.*, v. 36, p. 209–222.
- Gelbke, C., Miranda, F., and Sattel, G., 1989, The results of a seismic transmission tomography survey at the Grimsel rock laboratory: *Log Anal.*, v. 30, no 4, p. 243–260.
- Gordon, R., 1974, A tutorial on ART: *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-21, p. 78–93.
- Hansen, P. C., 1998, Rank deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion: *SIAM*, Philadelphia, 243 p.
- Ivansson, S., 1985, A study of methods for tomographic velocity estimations in the presence of low-velocity zones: *Geophysics*, v. 50–56, p. 969–988.
- Ivansson, S., 1986, Seismic borehole tomography. Theory and computational methods: *IEEE Proceedings*, v. 74, no. 2, p. 328–338.
- Jackson, D. D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data: *Geophys. JR Astr. Soc.*, v. 28, p. 97–109.
- Jackson, D. D., 1979, The use of a priori data to resolve non uniqueness in linear inversion: *Geophys. JR Astr. Soc.*, v. 57, p. 137–157.
- Maurer, H., and Green, A. G., 1997, Potential coordinates mislocations in crosshole tomography: Results from the Grimsel test site, Switzerland: *Geophysics*, v. 62–66, p. 1696–1709.
- Menke, W., 1989, *Geophysical data analysis. Discrete inverse theory: International Geophysics Series*, Academic Press, v. 45, San Biogo 260 p.

- Pratt, R. G., and Chapman, C. H., 1992, Traveltime tomography in anisotropic media, application: *Geophys. J.*, v. 109, p. 20–37.
- Scales, J. A., 1987, Tomographic inversion via the conjugate gradient method: *Geophysics*, v. 52, p. 179–185.
- Scales, J. A., and Gersztenkorn, A., 1988, Robust methods in inverse theory: *Inverse probl.*, v. 4, p. 1071–1091.

ARTÍCULO 2

MTCLAB: a MATLAB[®]-based program for traveltime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography

Autores:

Juan Luis Fernández Martínez
José Paulino Fernández Alvarez
Luis Mariano Pedruelo González

COMPUTER AND GEOSCIENCES
VOL. 34-3, PP 213-225, doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008.
2008

Resumen Artículo 2

Fernández Martínez J. L, Fernández Alvarez J.P, Pedruelo González L.M. (2008). *MTCLAB: a MATLAB®-based program for traveltimes quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. Computer and Geosciences (34-3): 213-225. doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008.*

MTCLAB es un programa desarrollado en *MATLAB*® que analiza la distribución de los tiempos de viaje utilizando la metodología de las curvas de tiempos medios en macizos zonalmente isótropos. El objetivo de este código es facilitar con su desarrollo el uso de la metodología presentada en detalle en el artículo anterior.

Dado un macizo rocoso, objeto de estudio mediante tomografía sísmica en transmisión, el programa asume que se dispone de dos líneas (sondeos) de emisores y receptores. Además en la geometría de adquisición de datos se consideran las coordenadas reales de dichos emisores y receptores. El programa permite dividir el dominio y seleccionar zonas con el objetivo de refinar el análisis (análisis multizonal).

En la construcción de las curvas teóricas, es preciso destacar, que la posición de fuentes y receptores varían de forma continua y los rayos sísmicos siguen trayectorias rectilíneas. En las variaciones de tiempos de viaje se utiliza la ley hiperbólica

$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2}$. Las curvas de tiempos de viaje experimentales, se calculan a partir los

tiempos de viaje medidos en el dispositivo, donde los emisores y receptores tienen localizaciones discretas. Las expresiones de las curvas teóricas asumen una velocidad homogénea en cada zona. Esta velocidad, se obtiene mediante un ajuste por mínimos cuadrados a partir de las curvas empíricas calculadas en cada zona en las que se realiza el análisis. El análisis de los residuos obtenidos mediante la comparación entre las curvas teóricas y las experimentales sirve para detectar discontinuidades, oscilaciones bruscas o bien desajustes sistemáticos. Dichas singularidades están originadas bien por errores en los datos y/o por las heterogeneidades geológicas del macizo objeto de estudio. Si además, comparamos las velocidades estimadas en los agrupamientos en emisor y receptor común, será posible clasificar las causas a las que estas anomalías están asociadas (Fernández Martínez et al., 2006), es decir, bien diferentes tipos de errores, bien efectos de la anisotropía de los medios geológicos o bien diferentes tipos de heterogeneidades geológicas (fallas, intrusiones, etc).

El programa MTCLAB también determina una banda de velocidades (velocidad máxima y mínima) compatibles con los datos observados. Esto nos permitirá igualmente hacer un chequeo con la información a priori previa de tipo geológico y geofísico para juzgar la calidad de los datos antes de la inversión. Además esta información de velocidad deducida mediante el análisis multizonal de curvas de tiempos medios, podrá ser utilizada en el algoritmo de inversión para su estabilización, obteniendo soluciones geofísicamente plausibles:

$$\text{Hallar } \mathbf{s} : \min_{\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{R}^n} \|\mathbf{M}^k \mathbf{s} - \mathbf{t}\|, \text{ donde } S = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{L} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{U}\}.$$

Por último dicho programa permite la representación bidimensional del mapa de residuos de los tiempos de viaje teóricos y empíricos, utilizando como coordenadas las posiciones de emisión y recepción (figura1). Esta información será de gran utilidad en la elección de un determinado análisis multizonal.

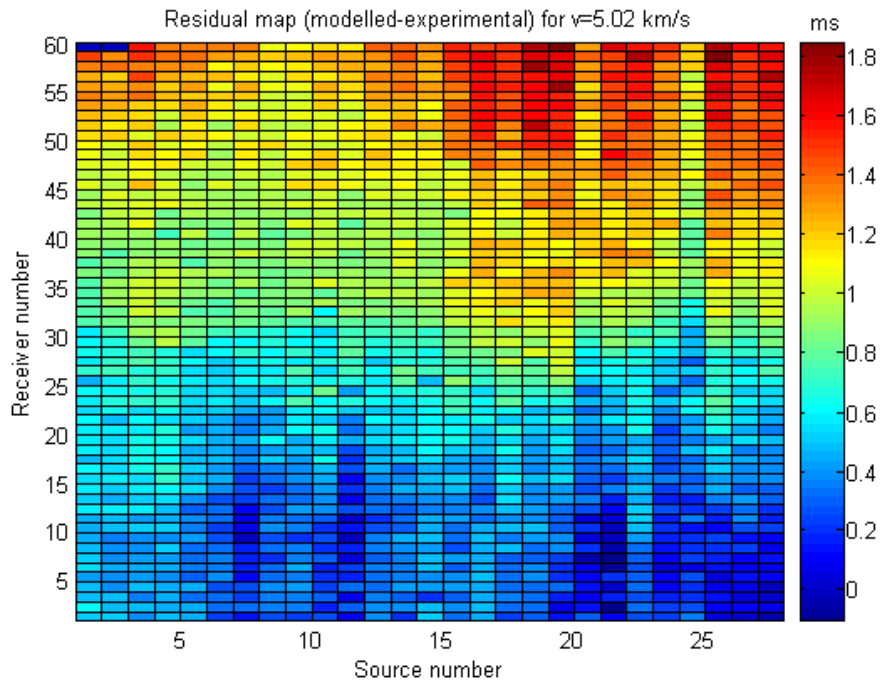


Figura 1: Conjunto de datos 3. Mapa de residuos (i.e. diferencia entre los tiempos teóricos y empíricos) para un modelo de velocidades isótropo de $5.02 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Se observa la existencia de dos zonas de diferente velocidad separadas por una línea horizontal entre los receptores 25 a 30.

El programa MTCLAB hace uso de técnicas de programación estructurada. La estructura del programa se divide básicamente en tres partes:

1. **Preprocesado:** donde se seleccionan y se leen los datos de tiempo de viaje y la estructura del dispositivo de adquisición (coordenadas de emisión-recepción). El usuario decide e introduce por pantalla la información necesaria para la realización de un análisis unizonal o multizonal. Toda la información se almacena en la estructura de datos denominada *recording_geometry*. Para evitar una estimación errónea de la velocidad homogénea zonal, en el caso de ausencias sistemáticas de datos, se propone al usuario dos posibilidades para la inferencia de las curvas de tiempos medios:

- a. Considerar únicamente los datos de los que se posee información;
 - b. Realizar una interpolación de datos ausentes utilizando los datos disponibles correspondientes a las posiciones de emisión-recepción más próximas según el mapa de residuos.
2. **Análisis de Velocidad:** añadir a lo antes comentado la posibilidad que el programa brinda al modelizador de poder eliminar agrupamientos considerados erróneos para que no sean tenidos en cuenta en la estimación de velocidades isotrópicas por medio del ajuste de mínimos cuadrados. Este ajuste podría ser sopesado utilizando la distancia entre las curvas teóricas y empíricas.
 3. **Salidas Gráficas,** se representan los mapas de tiempos observados, el mapa de distancias, el mapa de lentitudes (o velocidades) aparentes, las curvas de tiempos teóricas y empíricas del análisis multizonal en emisor y receptor común, las curvas envolventes de velocidad mínima y máxima, y finalmente el mapa de residuos entre los tiempos de viaje empíricos y teóricos, es decir, inferidos con las velocidades estimadas en las diferentes zonas.

En la parte final del artículo se muestra la aplicación del programa a los tres conjuntos de datos del macizo granítico Grimsel, mostrando su modelización unizonal y multizonal (figura 2 y figura 3). Comentar brevemente que los resultados confirman y reducen el rango de velocidades asignado al dominio en estudios anteriores. El uso de dicha metodología ha permitido, en nuestro caso, identificar en el dominio diferentes transiciones de velocidades (en los tiros 2 y 3).

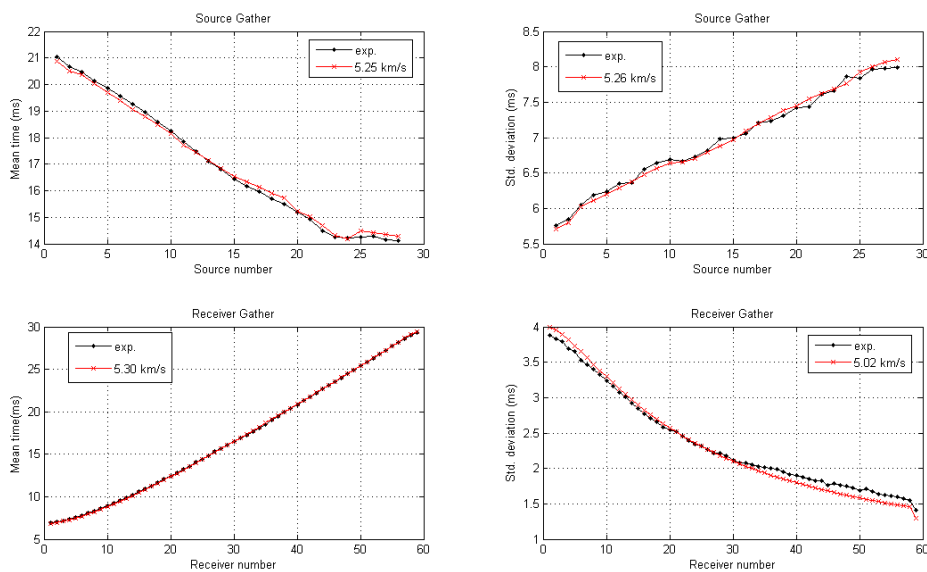


Figura 2: Conjunto de datos 3. Resultados del análisis MTC en una sola zona. Las líneas con puntos señalan los datos experimentales. Las líneas con cruces señalan las curvas teóricas obtenidas para un rango de velocidades que varía desde 5.02 hasta 5.30 km.s⁻¹.

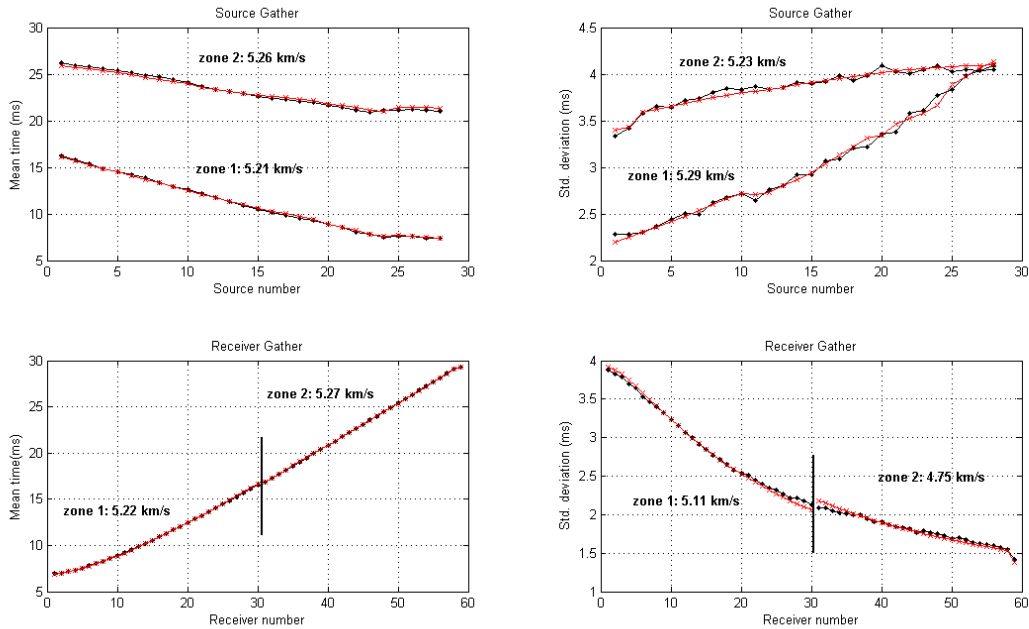


Figura 3: Conjunto de datos 3. Resultados del análisis MTC aplicado a un dominio dividido en dos zonas. El subconjunto de fuentes comprende todas las fuentes, mientras que hemos considerado dos subconjuntos diferentes de receptores, estando la frontera en el receptor número 30. Las líneas con puntos señalan los datos experimentales. Las líneas con cruces señalan las curvas teóricas.

El código está disponible en la dirección:

<http://www.iamg.org/index.php/publisher/articleview/frmArticleID/111/>

El objetivo de este artículo es describir dicha metodología y proporcionar a los futuros usuarios una guía para su utilización tal como tiene a bien establecer la revista Computer & Geosciences.

MTCLAB: A MATLAB[®]-based program for traveltimes quality analysis and pre-inversion velocity tuning in 2D transmission tomography[☆]

J.L. Fernández-Martínez^{a,*}, J.P. Fernández-Alvarez^b, L.M. Pedruelo-González^a

^a*Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, Spain*

^b*Departamento de Prospección y Explotación de Minas, Universidad de Oviedo, Spain*

Received 20 January 2006; received in revised form 27 February 2007; accepted 9 March 2007

Abstract

A MATLAB[®]-based computer code that analyses the traveltimes distribution and performs quality analysis at the pre-inversion stage for 2D transmission experiments is presented. The core tools of this approach are the so-called mean traveltimes curves. For any general recording geometry, the user may select any pair of subsets of contiguous sources and receivers. The portion of the domain swept by the implied rays defines a zone of analysis, and for each source (receiver) the outcoming (incoming) ray fan is named a source (receiver) gather. The empirical mean traveltimes curves are constructed, for each zone, by assigning the average and the standard deviation of the traveltimes in the gathers to the positions of the sources (receivers).

The theoretical expressions assume isotropic homogeneous velocity inside each zone. The empirical counterparts use the observed traveltimes and make no assumptions. Isotropic velocity in each zone is inferred by least-squares fitting of the empirical mean traveltimes curves. The user may refine the analysis considering different zones (multi-zone analysis). Initially the whole domain is modelled as a single zone. The procedure compares empirical versus theoretical curves. In addition, residuals can be plotted using source–receiver positions as plane coordinates. The results are used to unravel the possible presence of anomalous gathers, heterogeneities, anisotropies, etc. Depending on the kind of anomalies, velocity estimation and mean time residuals are different in the source and receiver gather curves.

This software helps to grasp a better understanding of the data variability before the inversion and provides to the geophysicist an approximate zonal isotropic model and a range of velocity variation that can be used in the inverse problem as a priori information (regularization term). Its use is described through tutorial examples. A guided user interface leads the user through the algorithm steps.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Inverse problems; Transmission tomography; Mean traveltimes curves; Traveltimes quality analysis; A priori information

[☆]Code available on server <http://www.iamg.org/CGEditor/index/htm>

*Corresponding author. Tel.: +34 985103199; fax: +34 985102886.

E-mail addresses: jlfm@uniovi.es, jlfm@orion.ciencias.uniovi.es (J.L. Fernández-Martínez).

1. Introduction

The tomographic inverse problem consists in iteratively finding $\mathbf{M} \in M(m, n)$ and $\mathbf{s} \in M(n, 1)$ to fit the traveltimes data, $\mathbf{t} \in M(m, 1)$ satisfying

approximately, at each step, the equation

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{t}, \tag{1}$$

where \mathbf{M} is the ray path matrix, \mathbf{s} is the slowness vector, and \mathbf{t} is the observed traveltimes data vector.

Numerical methods reported in the literature usually include reconstruction techniques, frequently used in biomedicine (Dines and Lytle, 1979; Gordon, 1974; Ivansson, 1986), and least-squares algorithms (Berryman, 1991; Jackson, 1972; Pratt and Chapman, 1992). The tomographic inverse problem is ill posed, i.e., the errors in the data are amplified and transmitted to model parameters (slowness). This undesirable feature highlights the importance of having available tools that allow the inversion process to gain stability (Hansen, 1998; Jackson, 1979).

This code contributes to this goal by analysing at the pre-inversion stage the sources of data variability, and being able to infer from data prior velocity information of great importance for the tomographic inversion. This software is an important tool for this new methodology to be employed in 2D transmission tomographic problems, as is developed in detail in Fernández Martínez et al. (2006).

2. A brief description of the mean traveltimes curve analysis

Let Ω be a domain to be studied by transmission tomography. Let us also assume that we have two lines (boreholes) of sources and receivers located on the boundary of Ω . Let us consider, among all the sources and receivers present in a real recording geometry, two subsets of contiguous sources and receivers $\{S_k, R_k\}$, arbitrarily chosen. The ray paths associated to the couple $\{S_k, R_k\}$ sweep a zone Ω_k of the domain (Fig. 1). The mean traveltimes curves are constructed by assigning the average and the standard deviation of the traveltimes in these gathers to the positions of the sources (receivers).

For the theoretical curve construction (in the source gather case for illustration purposes), the following facts are relevant:

- Ω_k is considered homogeneous and isotropic and called Ω_k^l (Fig. 1). The linear approximation assumed in the analysis determines Ω_k^l , not coincident with Ω_k , and thereby the approximate character of this methodology.
- Positions of sources and receivers vary continuously and seismic rays follow straight trajectories.

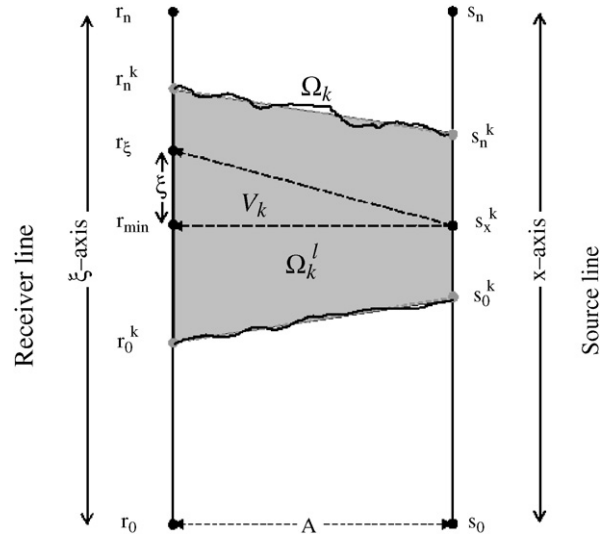


Fig. 1. Zone concept in mean traveltimes curve analysis. Study zone, Ω_k , is swept by rays from sources $s_0^k - s_n^k$ to receivers $r_0^k - r_n^k$. Selection of different subsets of sources and receivers delineates new zones of analysis.

- Traveltimes variations in a source (or receiver) gather follow a hyperbolic law, $t^2(x) = t_0^2 + x^2/V^2$, where t_0 is the minimum traveltimes between the source and the line of receivers, x is the distance between the receivers to the minimum time receiver, and V is the homogeneous velocity of the medium.
- Mean traveltimes, $\bar{i}(x)$, and standard deviation, $\sigma(x)$, for a specific gather at distance x from the gather origin ($x = 0$) have the following analytical expressions (Fernández Martínez et al., 2006):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{i}(x)}{t_0} &= F_m(x) \\ &= \frac{A_x}{2L_r A_0} \left[\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{A_x}\right)^2} + A_x \operatorname{argsh} \frac{\xi}{A_x} \right]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x)}{t_0} &= F_\sigma(x) \\ &= \sqrt{\left(\frac{A_x}{A_0}\right)^2 - \left(\frac{\bar{i}_{f_x}}{t_0}\right)^2 + \frac{1}{3L_r A_0^2} \left[\xi^3 \right]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)}}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{2L_r} (L_r^2 + d_0^2 - d_n^2 + x^2 - (L_s - x)^2 \\ &\quad + 2(L_s - x)d_n \cos \gamma - 2xd_0 \cos \beta), \end{aligned} \tag{4}$$

where t_0 is the minimum transit time for the gather origin, corresponding to the transverse distance A_0 ; A_x is the minimum distance between the source gather located at distance x from the source gather origin and the receiver line (receiver r_{\min}); $L(x)$ is the coordinate of receiver r_{\min} in the receiver line and depends on x and the recording geometry parameters—angles and distances—(see Eq. (4)); and finally L_r is the length of the line of receivers (L_s for the line of sources) (Fig. 2).

In the experimental mean traveltimes curves, the elements of each gather are the traveltimes data measured in the field, and both sources and receivers have discrete locations. The corresponding discrete estimators follow (we exemplify the source gather case):

$$\bar{t}(x_i) = \frac{1}{nr_i} \sum_{j=1}^{nr_i} t_{s_i r_j}, \quad (5)$$

$$\sigma(x_i) = \sqrt{\frac{1}{nr_i - 1} \sum_{j=1}^{nr_i} (t_{s_i r_j} - \bar{t}(x_i))^2}, \quad (6)$$

where $t_{s_i r_j}$ stands for the observed traveltimes between the source s_i and each of the nr_i receivers, r_j , associated with the source gather considered.

The mean traveltimes curve analysis proceeds through the following steps:

- Use of the empirical mean traveltimes curves to infer the best homogeneous velocity model (V_k) in each zone of analysis, Ω_k , of the medium. This amounts to solving the linear system (Fernández Martínez et al., 2006):

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} F_m(x_1) \\ F_m(x_2) \\ \vdots \\ F_m(x_q) \end{pmatrix} (t_{0k}) = \begin{pmatrix} \bar{t}_s(x_1) \\ \bar{t}_s(x_2) \\ \vdots \\ \bar{t}_s(x_q) \end{pmatrix} \Leftrightarrow t_{0k} = \frac{\sum_{i=1}^q F_m(x_i) \bar{t}_s(x_i)}{\sum_{i=1}^q F_m^2(x_i)}, \\ V_k = \frac{A_{0k}}{t_{0k}}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where q is the number of gathers in the zone Ω_k and $\bar{t}_s(x_i)$ is the mean traveltimes value observed for gather in x_i . The same can be done with the standard deviation empirical values.

- Compute the theoretical mean traveltimes curves, inserting the value of V_k in expressions (2) and (3), through the value t_{0k} .
- Inspect the traveltimes residuals between the theoretical and empirical curves checking for the existence of jumps, discontinuities, sharp oscillations, systematic bias or any other misfit pattern, which might be related to data errors and/or heterogeneities. In addition, comparison of estimated velocities in the source gather domain with those in the receiver gather helps classify the causes of traveltimes anomalies (Fernández Martínez et al., 2006).
- Calculate upper and lower velocity limits consistent with the observed data, which can be used to draw envelope mean traveltimes curves. These limits are also useful to check data compatibility with prior geological and geophysical velocity information.

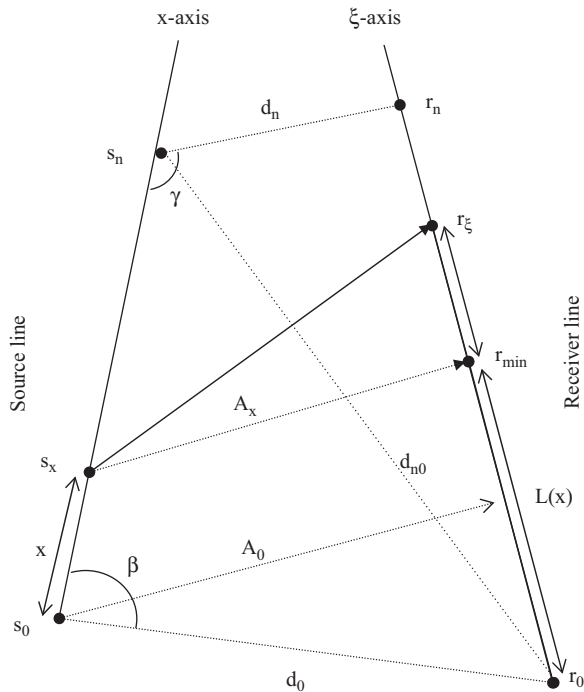


Fig. 2. Variables involved in an MTC analysis. General non-rectangular recording geometry case.

- Compute the residual maps. Taking source–receiver positions as plane coordinates, plot the difference between observed traveltimes and theoretical ones, using previously estimated velocities. The presence of high valued residual areas in the residual maps and irregularities in the empirical mean traveltime curves may suggest the use of multi-zone analysis.

This methodology has been tested for the case of zonal heterogeneous media and random heterogeneous velocity fields in Fernández Martínez et al. (2006).

3. The program structure

The program has been conceived to take advantage of the MATLAB[®] array computation capabilities and the use of structure-type objects to lighten the information flow through the program. For ease of use a simple GUI has been built, which leads the user through all the algorithm steps.

There are three major tasks in the MTCLAB workflow:

1. Pre-processing, including:

- Selection and reading of traveltime data and recording configurations (source and receiver coordinates). These data are stored in the *recording geometry* structure. Topography variations in the recording geometry are taken into account using the source and receivers coordinates.

The following matrices are especially important

- (a) *Mtime*: contains all the experimental traveltimes. Column number and file number indicate source and receiver positions, respectively.
- (b) *Mdist*: contains the distance between positions of each pair of sources and receivers.
- (c) The apparent slowness field, *Mslow*.

MATLAB[®] allows one to visualize matrices *Mtime* and *Mdist* and to easily calculate the apparent slowness field: $Mslow = Mtime./Mdist$. These maps serve to check the linear approximation (Berryman, 1994) and to analyse deviations of the observed data from homogeneity and isotropy: in case of small deviations from

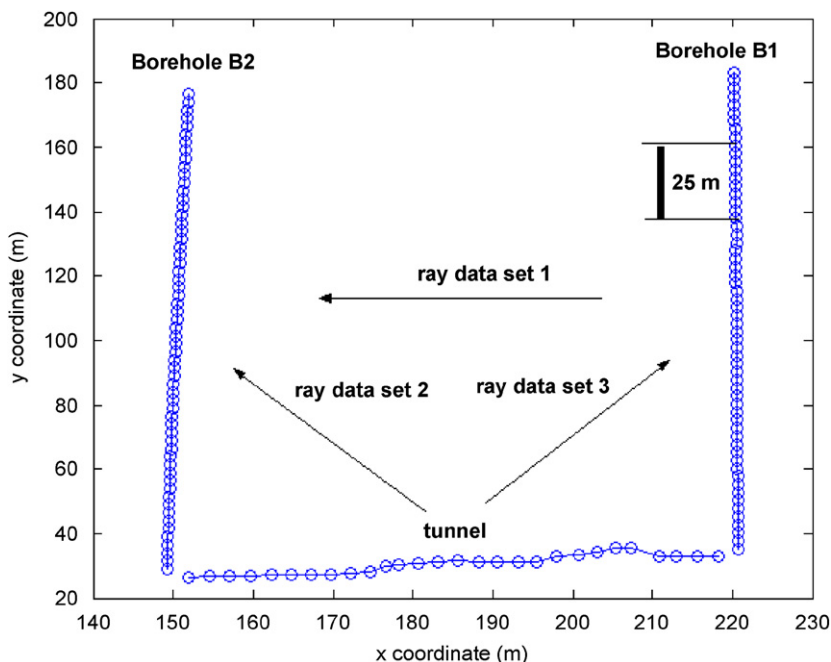


Fig. 3. Grimsel test site (field 1) acquisition geometry: the survey is composed of three different recording geometries, providing three traveltime sets. The Distance between adjacent sources and receivers is approximately 2.5 m in all the cases. Note also irregularities of tunnel topography.

homogeneity and isotropy, the maps M_{time} and M_{dist} are almost homothetic.

- The user is prompted to select the source and receiver subsets necessary to perform single-

zone or multi-zone analysis. These parameters are stored in the so-called *zones* structure.

- In case of systematic lack of data, the empirical mean traveltimes lead to wrong zonal

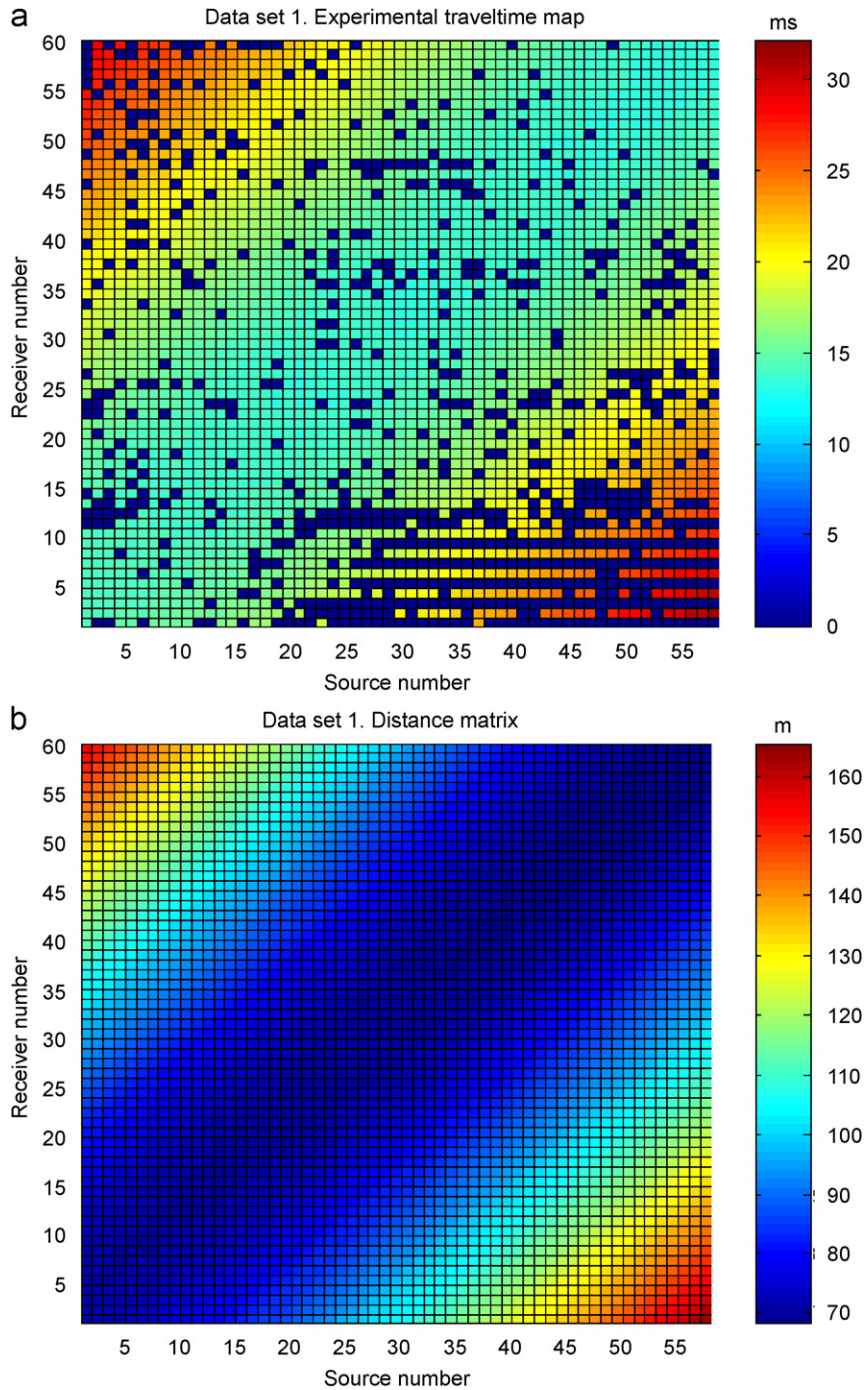


Fig. 4. Data set 1. Experimental traveltimes and distance map. Zero value cells (in black) in traveltimes map indicate pairs of sources and receivers with no available traveltimes measures, mainly receiver gathers 1–13. Note the similarity between both maps, indicating geophysical behaviour close to isotropy and homogeneity.

homogeneous velocity estimates (see Eq. (7)). Solutions to this fact imply computing the corrected version of the theoretical curves in each gather considering only available data, or interpolating the traveltimes gaps using nearest neighbours (Fernández Martínez et al., 2006). In the latter case, interpolated traveltimes are

then stored in matrix *Mtime* in the *recording geometry* structure.

2. *Velocity analysis*, including:

- Calculation of experimental traveltimes curves in common source and receiver gathers. Results are stored in structures *sgather* and *rgather*.

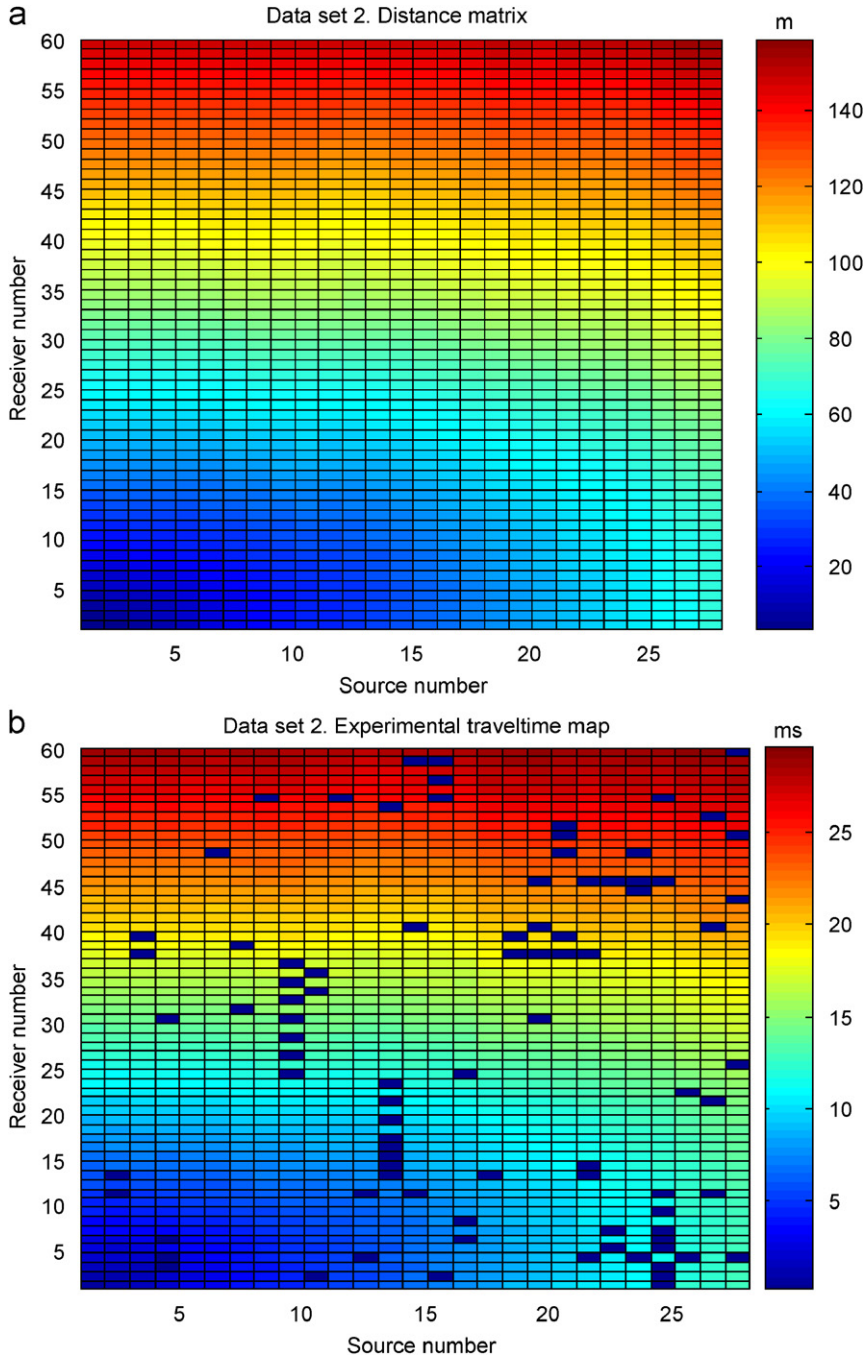


Fig. 5. Data set 2. Experimental traveltimes and distance map.

- Least-squares estimation of isotropic velocities and computation of theoretical mean traveltimes in source and receiver gathers, to be compared to the experimental counterparts. These curves are also stored in *sgather* and *rgather* structures. The program allows the possibility to remove groups of

gathers considered erroneous and not to be taken into account in the least-squares fit.

3. *Graphical outputs*, including:

- Plot of empirical and theoretical traveltimes in source and receiver gathers. Comparison of the experimental and theoretical curves can be used to identify possible

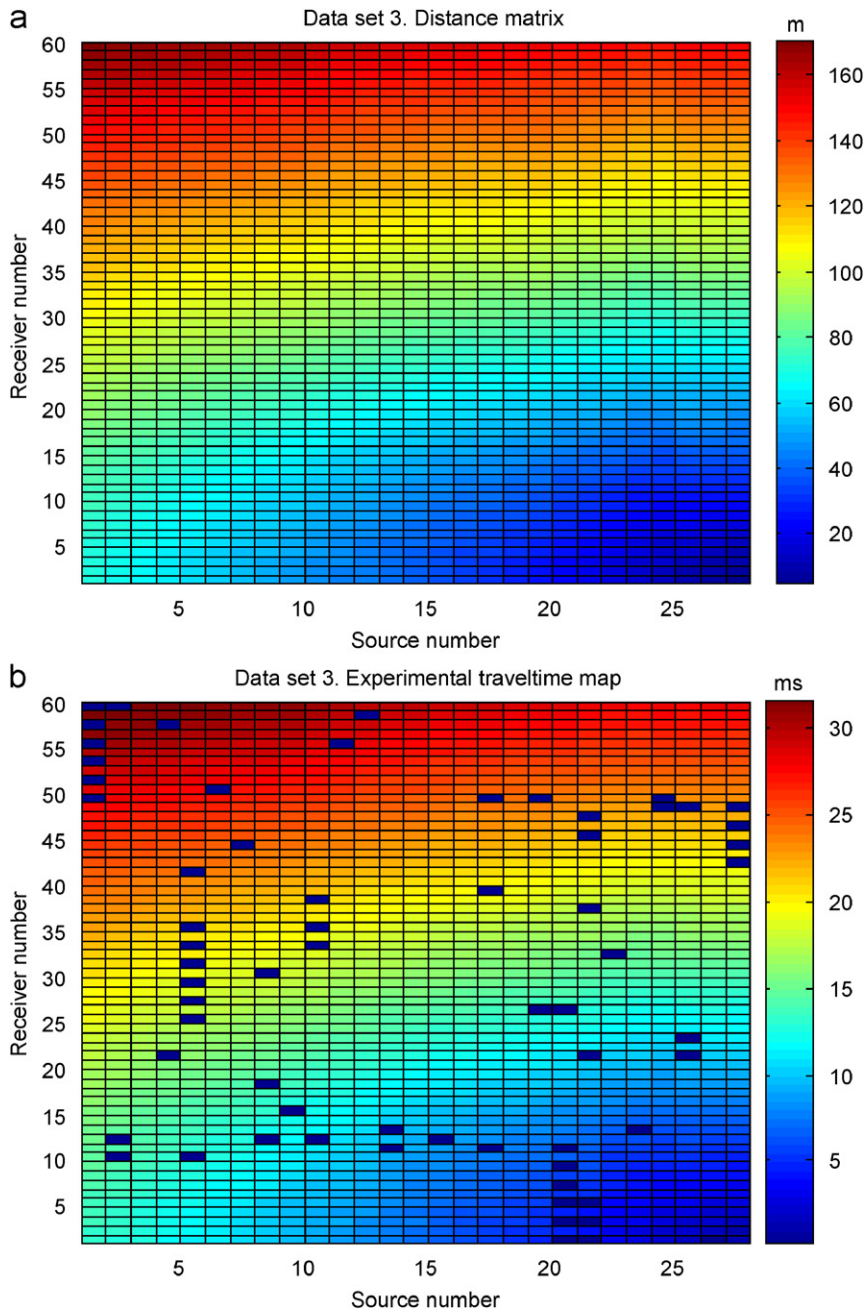


Fig. 6. Data set 3. Experimental traveltimes and distance map.

anomalous sources or receivers, indicated by the isolated gathers, which clearly deviate from the general trend (least-squares fit).

- Plot of upper and lower velocity envelope curves, to determine the feasible velocity bandwidth where all (or most of) the points of the experimental curves lie.
- Plot of the residual traveltimes maps.

The insights issued from this analysis are of great help in discriminating the presence of Gaussian and non-Gaussian random variations, systematic errors due to misallocation of some source and/or receiver coordinates, triggering errors, and the presence of velocity heterogeneities and anisotropic-type effects (Fernández Martínez et al., 2006) in the data set.

4. Tutorial examples

In this section we show some examples of the application of MTCLAB to a data set that comes from an area with granitic geology: the Grimsel test site-field 1 (a data set acquired and kindly put at

disposal by NAGRA, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste). We recall that the goal of this section is to provide the user with a quick visual understanding of the main steps and potentialities of the program, based on a real example. The reader interested in more details is referred to Fernández Martínez et al. (2006).

4.1. Brief data description

The geometry of the survey is approximately rectangular bounded by two boreholes: B1 and B2. The dimensions are approximately $70 \times 150 \text{ m}^2$.

The data were acquired in three sequences (Fig. 3).

Data set	Source	Receiver	Number of sources	Number of receivers
1	B1	B2	58	60
2	Tunnel	B2	28	60
3	Tunnel	B1	28	59

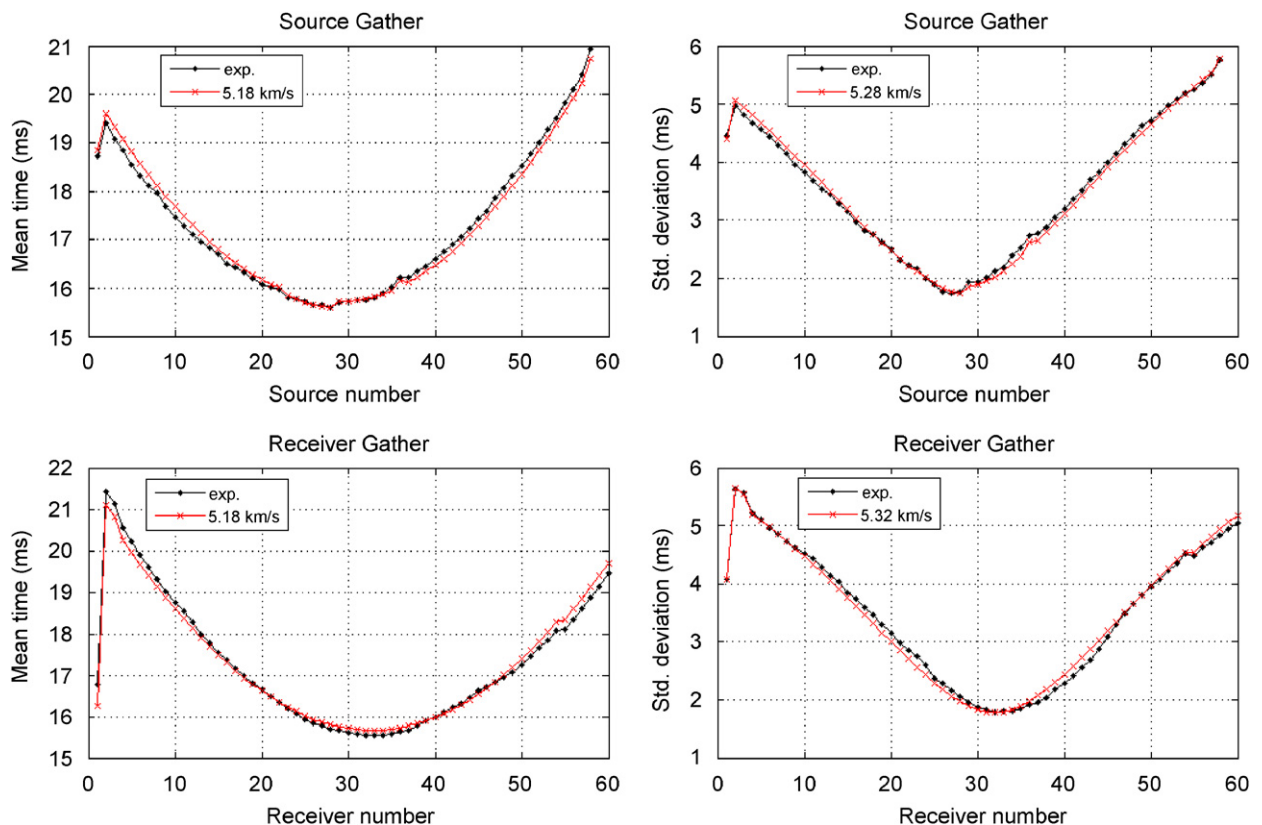


Fig. 7. Data set 1. Results of single-zone MTC analysis. Lines with point markers: experimental data. Lines with cross markers: theoretical curves obtained for velocities ranging from 5.18 to 5.32 km s^{-1} .

The distance between adjacent sources or receivers is approximately 2.5 m.

The tomography aimed at imaging the geological structure of the granitic body, specially the presence of faults and intrusions. The geophysical studies undertaken in this granite (Gelbke et al., 1989) have shown that the normal range of variation for the velocities is 4.7–5.6 km s⁻¹. This rock also shows weak elliptical anisotropy with a direction of maximum velocity N30°W and an anisotropic ratio of $\lambda = 0.95\text{--}0.97$. These results were also confirmed by geostatistical modelling of inverse problem variables (Fernández Martínez et al., 2003). Also, several problems were reported in this survey, which boosted research work to identify possible sources of errors (Gelbke et al., 1989; Maurer and Green, 1997).

The broad spectra of real recording configurations, the weak heterogeneous and anisotropic character of the rock, and the uncertainties in the knowledge of rock properties, notwithstanding the number of studies, motivate its election to illustrate the program performance.

4.2. Mean travelttime curve analysis

The results shown in this section come from application of the program to each of the three different data sets. Multi-zone analysis is briefly described at the end of the section for data set 3.

- Travelttime and distance maps

Fig. 4 shows experimental travelttime and acquisition distance maps for data set 1. Figs. 5 and 6 show the same information for data sets 2 and 3. These maps are constructed based on the matrices *Mtime* and *Mdist* using the *pcolor* command. In all the cases, experimental travelttime maps are homothetic to the corresponding distance maps, confirming that the geophysical behaviour of the geological domain is close to isotropy.

- Empirical and theoretical mean curves

Figs. 7–9 show the empirical and theoretical curves (corrected for lack of data) respectively for data sets 1, 2, and 3. Estimated velocities after analysis are in the range of 5.0–5.33 km s⁻¹.

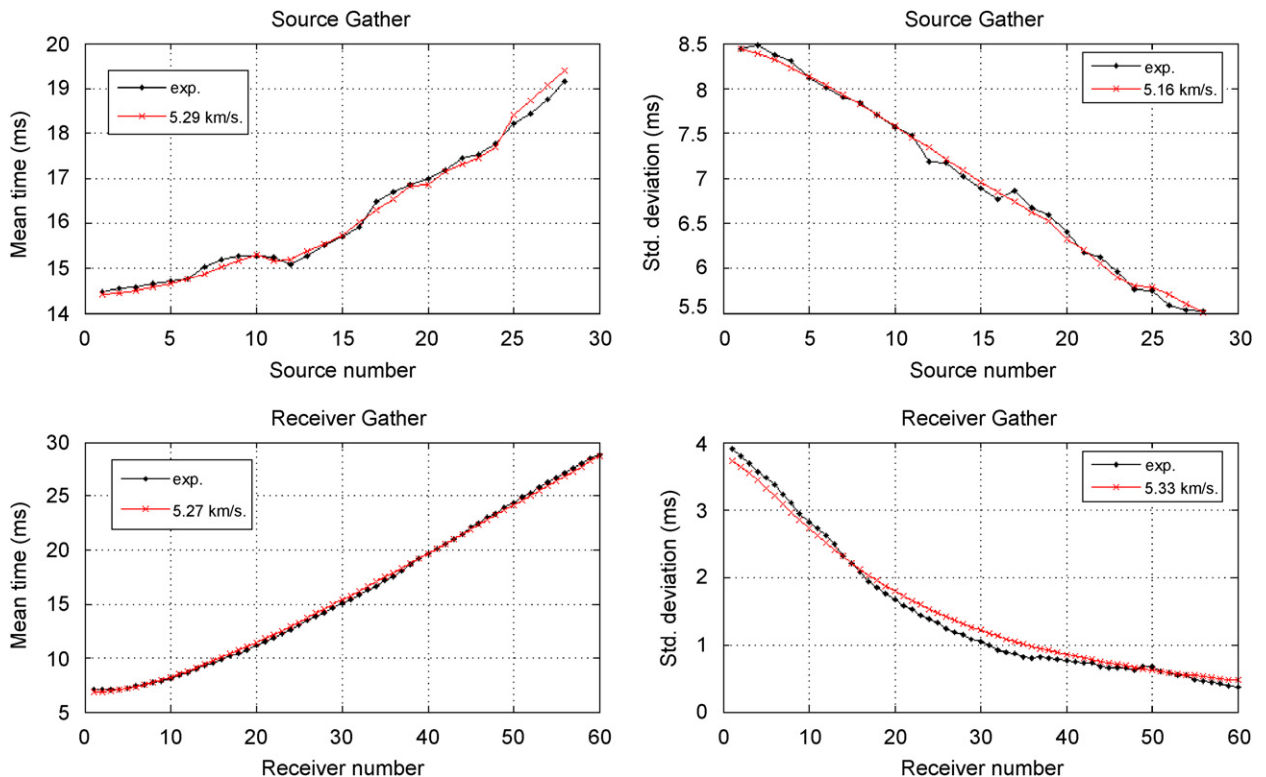


Fig. 8. Data set 2. Results of single-zone MTC analysis. Lines with point markers: experimental data. Lines with cross markers: theoretical curves obtained for velocities ranging from 5.16 to 5.33 km s⁻¹.

The following features can be observed in these curves:

- Traveltime anomalies in the receiver curves of data set 1 (Fig. 7) are caused by traveltime gaps, too broad to be meaningfully filled by the interpolation algorithm (see the abrupt changes in first receivers). Therefore, the low values of mean time and standard deviation in the first gathers are due to a systematic lack of traveltime data due to acquisition problems during the survey.
- The differences between the values of least-squares estimated velocities using the mean time curves (5.18 km s^{-1}) and those obtained with the standard deviation curves ($5.28\text{--}5.32 \text{ km s}^{-1}$) in the source and receiver domains are used in Fernández Martínez et al. (2006) as an indicator of the presence of measurement errors and/or anisotropy-type effects. Similar remarks also hold for Figs. 8 and 9 (data sets 2 and 3).
- Anomalies, for example humps or basins, can also be observed mainly in source gather curves

of data sets 2 and 3 (Figs. 8 and 9), whose trend closely follows topography variations along the source tunnel.

- The theoretical receiver gather standard deviation curve for data set 2 (Fig. 8) overfits clearly the empirical curve between receiver gathers 20–40. This suggests the existence of a transition zone, corresponding with an isotropic velocity greater than the general trend velocity (5.33 km s^{-1}). The opposite case can be seen in Fig. 9: for data set 3 the theoretical standard deviation curve underlies the empirical one (5.02 km s^{-1}), suggesting the existence of a different behaviour from receiver gather 30. Multi-zone analysis has revealed the existence of a zone with a velocity as low as 4.75 km s^{-1} , very much under the general trend (5.02 km s^{-1}). This zone can also be detected from the analysis of the corresponding traveltime residual map for this velocity as shown by the horizontal abrupt colour transition in Fig. 10. The source gather curves also show the effect of tunnel topography.

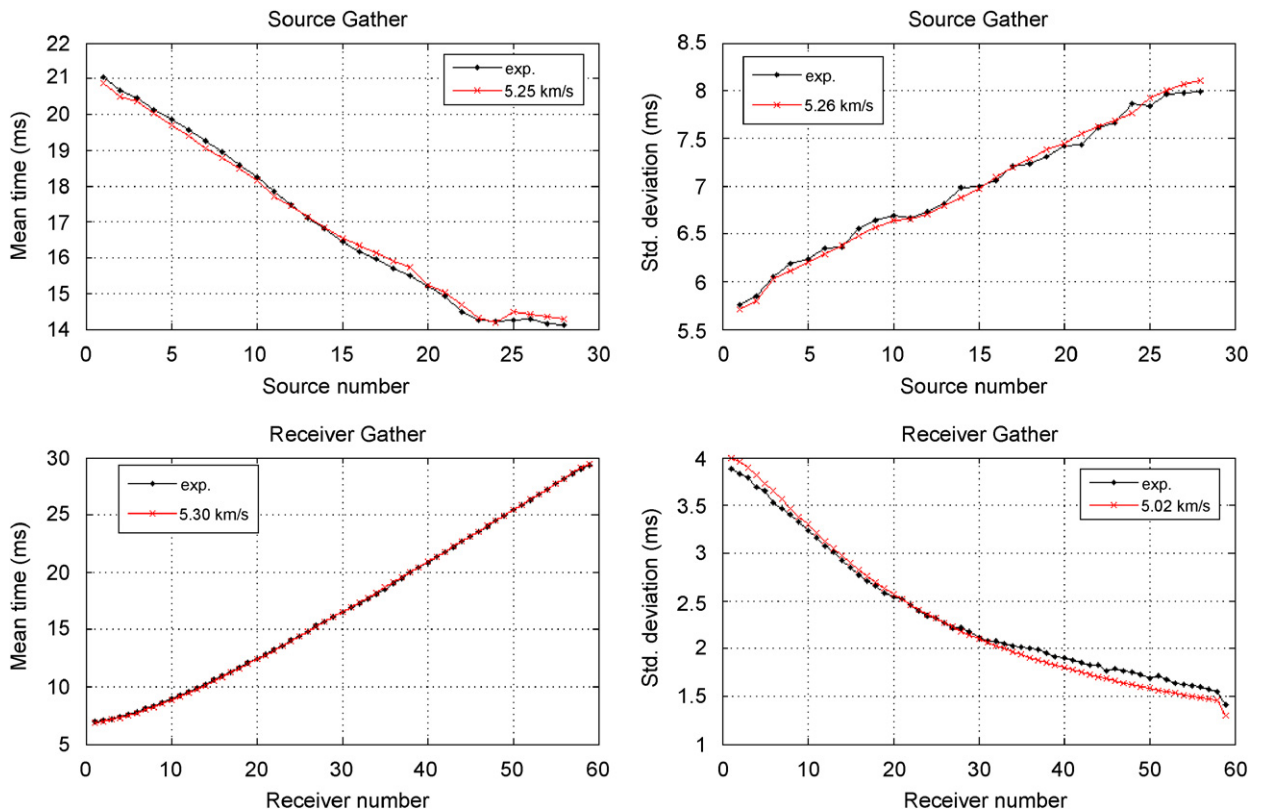


Fig. 9. Data set 3. Results of single-zone MTC analysis. Lines with point markers: experimental data. Lines with cross markers: theoretical curves obtained for velocities ranging from 5.02 to 5.30 km s^{-1} .

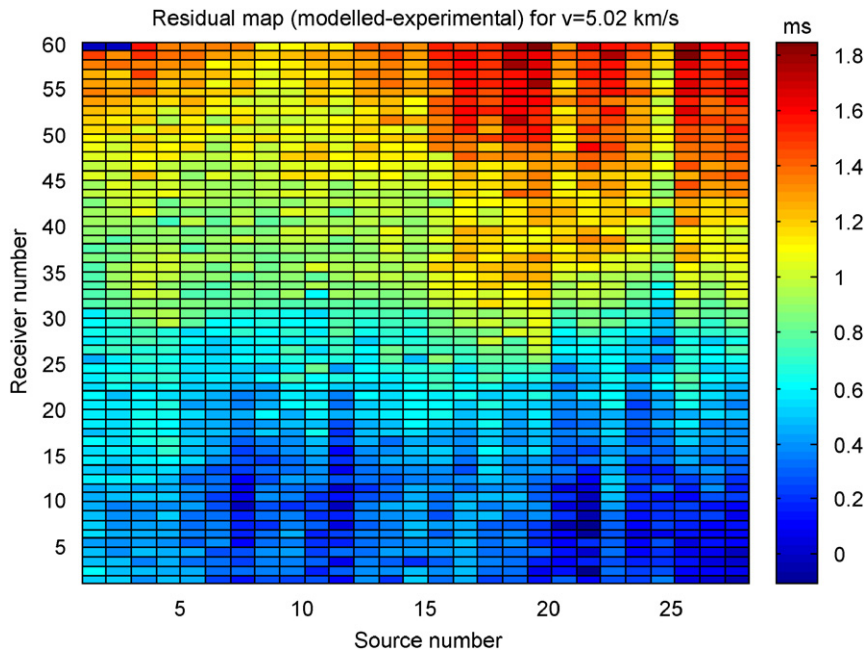


Fig. 10. Data set 3. Residual map (i.e. difference between modelled and experimental traveltimes) for an isotropic model velocity of 5.02 km s^{-1} . Observed existence of two different zones well separated by receiver 25–30 horizontal lines.

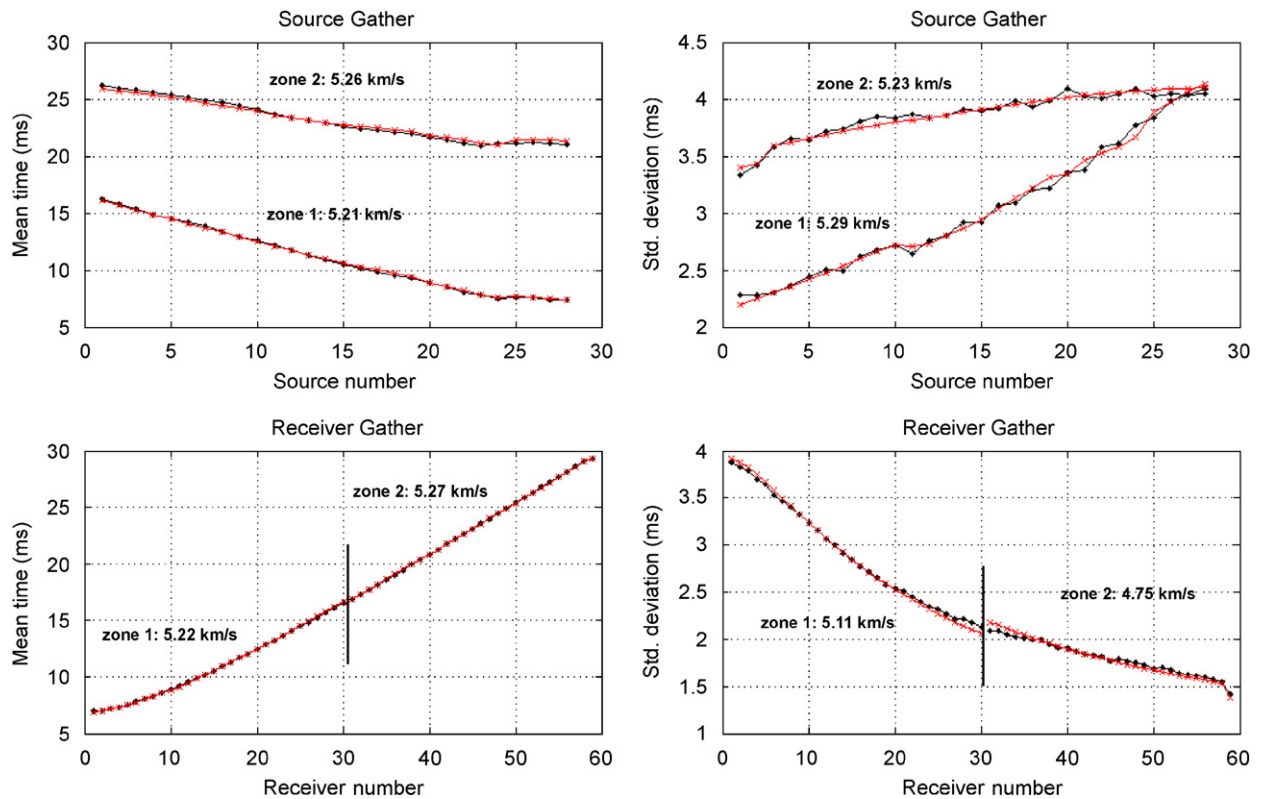


Fig. 11. Data set 3. Results of a multi-zone MTC analysis: sources subset comprises all sources, whereas we have considered two different receiver subsets separated by receiver 30. Lines with point markers: experimental data. Lines with cross markers: theoretical curves.

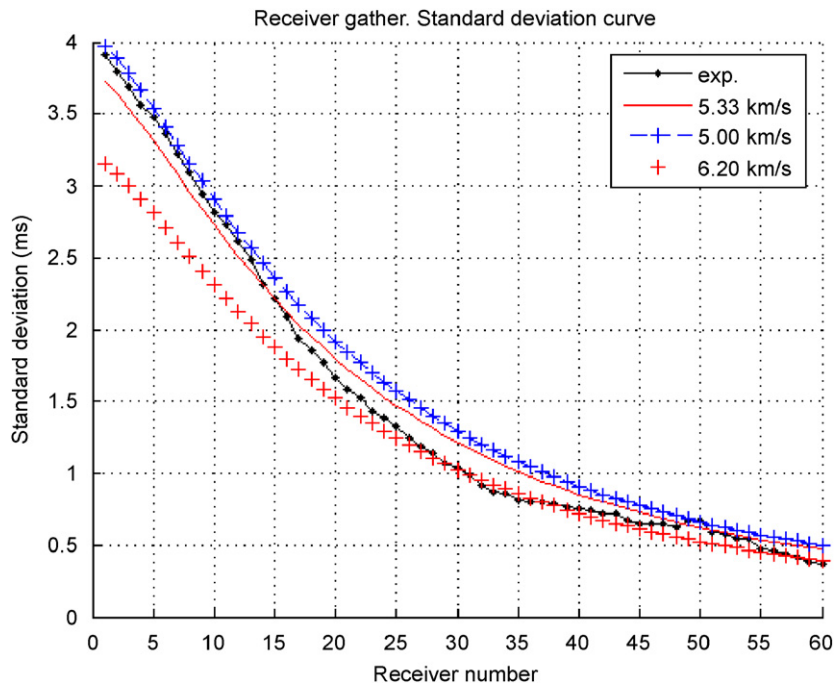


Fig. 12. Data set 2. Lower and upper velocity analysis of receiver gather standard deviation curve. Receiver gathers 5–15 are close to 5.0 km s^{-1} , while central gathers (20–45) are close to $6\text{--}6.20 \text{ km s}^{-1}$. This velocity transition may be partly due to an anisotropy-type effect.

Fig. 11 shows the analysis of data set 3 considering two different zones separated by receiver line 30. This explains the bi-valued nature of the source gather curves. The existence of a low-velocity zone is better delineated in the fitting of the receiver gather standard deviation curve (zone 2) where an abrupt transition from 5.11 km s^{-1} (zone 1) to the lower velocity 4.75 km s^{-1} (zone 2) can be seen.

Finally, lower and upper velocity analysis can be made. Fig. 12 shows the envelope curves of the receiver gather standard deviation curve for data set 2 (Fig. 8). The range of velocities is $5.0\text{--}6.2 \text{ km s}^{-1}$. The high value of the upper limit may be affected by data errors and/or anisotropy-type effects for the central gathers.

5. Conclusions

In this paper, we have presented a MATLAB[®]-based program to perform mean traveltime curves analysis for 2D transmission experiments at the pre-inversion stage. This is a simple and powerful methodology that provides a different understanding of the data variability, based on compressing the available information by means of the averaging process employed to construct the curves. The program is mainly a useful and structured proce-

dure to understand the causes of data variability with a low level of complexity. This software provides the geophysicist with an approximate zonal isotropic model and a range of velocity variation that can be used in the inverse problem as prior information (regularization term) in order to stabilize the inversion results. A guided user interface leads the user through the algorithm steps.

Appendix A. Supplementary materials

Supplementary data associated with this article can be found in the online version at [doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2007.03.008)

References

- Berryman, J.G., 1991. Lectures notes on non linear inversion and tomography. Borehole seismic tomography. Technical Report. Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 164pp.
- Berryman, J.G., 1994. Constraints on minimum velocity variance for seismic traveltime tomography. *Geophysical Journal International* 119, 689–692.
- Dines, K.A., Lytle, R.J., 1979. Computerized geophysical tomography. *IEEE Proceedings* 67 (7), 1065–1073.

- Fernández Martínez, J.L., Menéndez Pérez, C.O., Pedruelo González, L.M., Fernández Alvarez, J.P., Cienfuegos Suárez, P., 2003. Geostatistical analysis of inverse problem variables: application to seismic tomography. *Mathematical Geology* 8, 935–969.
- Fernández Martínez, J.L., Fernández Alvarez, J.P., Pedruelo González, L.M., 2006. Mean traveltimes curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. *Mathematical Geology* 38 (3), 343–374.
- Gelbke, C., Miranda, F., Sattel, G., 1989. The results of a seismic transmission tomography survey at the Grimsel rock laboratory. *The Log Analyst*, July–August, pp. 243–260.
- Gordon, R., 1974. A tutorial on ART. *IEEE Transactions on Nuclear Science* NS-21, 78–93.
- Hansen, C., 1998. Rank deficient and discrete Ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion. *Monographs of Mathematical Modelling and Computation*. Library of Congress, SIAM, Philadelphia, 243pp.
- Ivansson, S., 1986. Seismic borehole tomography. Theory and computational methods. *IEEE Proceedings* 74 (2), 328–338.
- Jackson, D.D., 1972. Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 28, 97–109.
- Jackson, D.D., 1979. The use of a priori data to resolve non uniqueness in linear inversion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 57, 137–157.
- Maurer, H., Green, A.G., 1997. Potential coordinates mislocations in crosshole tomography: results from the Grimsel test site, Switzerland. *Geophysics* 62 (6), 1696–1709.
- Pratt, R.G., Chapman, C.H., 1992. Traveltimes tomography in anisotropic media. Application. *Geophysical Journal* 109, 20–37.

ARTÍCULO 3

Anisotropic Mean travelttime curves: A method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data

Autores:

Juan Luis Fernández Martínez
Luis Mariano Pedruelo González

MATHEMATICAL GEOSCIENCES
VOL. 41, No. 2, PP 163-192, doi:10.1007/s.11004-008-9202-4.
2009

Resumen Artículo 3

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M. (2009).

Anisotropic Mean travelttime curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. Mathematical Geosciences, Vol. 41, Number 2, pp 163-192, doi: 10.1007/s11004-008-9202-4.

Resultados experimentales (por ejemplo en la exploración de hidrocarburos) muestran que la mayor parte de las rocas poseen anisotropía. También, la anisotropía con dependencia angular de velocidad es la forma más común de anisotropía que se puede encontrar en experimentos sísmicos (Upadhyay, 2004). Thomsen (1986) señaló que en la mayoría de los casos la anisotropía es débil, como se mostró en la sección 2.6. La anisotropía elíptica es un caso particular. Macroscópicamente, la anisotropía es una consecuencia de las fracturas naturales de rocas (Schoenberg and Sayers, 1995). La anisotropía sísmica ha sido tenida en cuenta en la inversión de tiempos de viaje sísmicos mediante diferentes algoritmos numéricos (Byun and Corrigan, 1990; Carrión et al., 1992; Pratt and Chapman, 1992; Williamson et al., 1993; Watanabe et al., 1996, etc.), y en la actualidad es un importante campo de investigación en la geología, sísmica, caracterización de reservorios, etc. La consideración de la anisotropía en las técnicas de inversión tomográfica implica la necesidad de estimar el modelo anisótropo de parámetros. En algunos casos, estos parámetros son las incógnitas del problema de inversión (Pratt y Chapman, 1992; Williamson et al., 1993, etc.). En otros casos, estos parámetros alimentan al problema inverso, siendo previamente estimados mediante diferentes técnicas geofísicas y numéricas (Van der Baan and Kendall, 2002; Elapavuluri, 2003; Xiao et al., 2004). En cualquier caso, es necesaria una adecuada elección inicial de modelos a la hora de construir el término de regularización.

Este artículo es un paso más en el camino iniciado en los artículos anteriores, avanzando en el análisis de la calidad de los datos y desarrollando unos modelos matemáticos teóricos que nos permitan acotar los diferentes modelos de parámetros de anisotropía. En esta publicación se presenta la deducción matemática y las propiedades de las curvas de tiempos medios para medios acústicos elípticamente anisótropos (siendo una generalización de las curvas de tiempos medios para medios isótropos).

Se supone que el campo de velocidades del medio geológico es descrito mediante un modelo compuesto de los siguientes parámetros (figura 1):

- Velocidad máxima (V_{max}).
- La dirección de anisotropía (α), que por definición, es el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas o dirección Este con la dirección de la velocidad máxima.
- El ratio de isotropía $\left(\lambda = \frac{V_{min}}{V_{max}} \right)$.

Con esta definición el caso isótropo se corresponde con $\lambda = 1$ y también que en la mayoría de los casos geofísicos interesantes la anisotropía elíptica es suave y por lo tanto el ratio de anisotropía pertenece al intervalo $[0.9, 1]$.

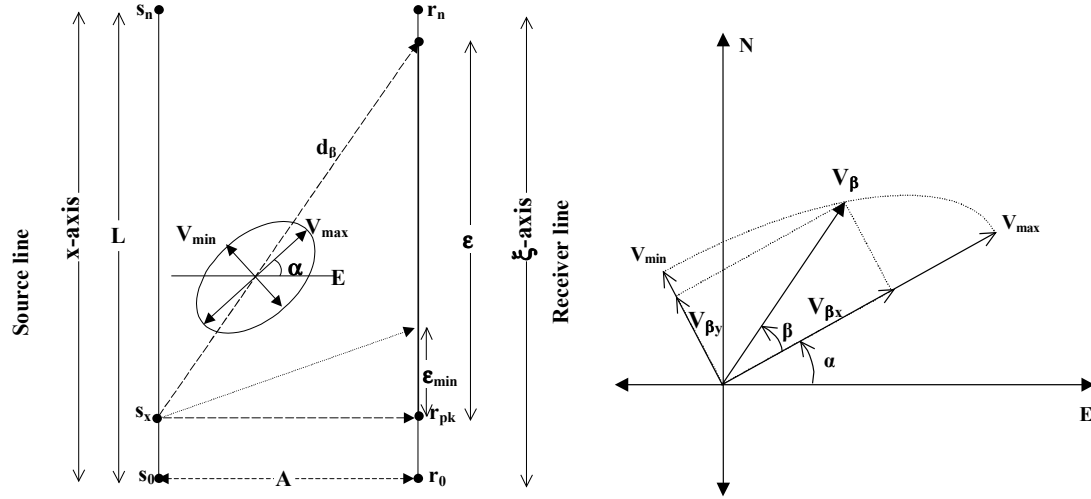


Figura 1: Dispositivo de fuente-emisor con geometría rectangular. Variables involucradas en el caso elíptico anisótropo.

Las curvas de tiempos medios anisótropas se deducen inicialmente para un dispositivo con geometría rectangular, generalizándose posteriormente para un dispositivo de geometría irregular. Debido a la homogeneidad del modelo de velocidades, los rayos sísmicos siguen trayectorias rectilíneas entre las fuentes y receptores. Mediante consideraciones geométricas, es posible deducir la expresión teórica del tiempo de viaje para cualquier par arbitrario de fuentes y receptores. El tiempo de viaje correspondiente a un rayo sísmico con una dirección de ángulo β (figura 1), medido en sentido contrario a las agujas del reloj con respecto a la dirección de V_{max} (dirección de ángulo α) puede ser escrita como

$$t_{\beta} = \frac{d_{\beta}}{v_{\beta}} = \frac{\sqrt{A^2 + \varepsilon^2}}{v_{\beta}}, \quad (1)$$

donde d_{β} es la distancia entre la fuente y el receptor (definiendo esta dirección), A es la distancia mínima entre la fuente y la línea de receptores, ε es la distancia entre el receptor hipotético localizado en la línea perpendicular a la fuente considerada y el receptor donde incide la onda P (rayo sísmico), y v_{β} es la velocidad en la dirección β .

La velocidad v_{β} puede ser expresada en función de los parámetros de anisotropía como sigue:

$$v_{\beta} = a_{\lambda\beta} V_{\max} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \frac{\tan^2 \beta}{\lambda^2}}} V_{\max} \quad (2)$$

El menor tiempo de llegada se localiza en el receptor situado a una distancia

$$\varepsilon_{\min} = \frac{A(1 - \lambda^2) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}, \quad (3)$$

respecto del receptor que se encuentra a menor distancia del emisor. Se demuestra que la curva de tiempos medios alcanza su mínimo a una distancia $x_{\min} = \frac{L}{2} - \varepsilon_{\min}$, medida desde la fuente inicial, y por lo tanto, el mínimo tiempo medio está relacionado con la posición donde el tiempo mínimo es localizado (ε_{\min}). Además, para una configuración de las fuentes a la izquierda, el mínimo estará localizado hacia la izquierda con respecto al punto medio de la línea de agrupamientos $\left(x_{\min} < \frac{L}{2}\right)$ si la dirección de anisotropía es nordeste. Si la dirección de anisotropía es noroeste el desplazamiento se localiza hacia la derecha $\left(x_{\min} > \frac{L}{2}\right)$. Este análisis simple proporciona un criterio visual para deducir la dirección de anisotropía en una geometría rectangular de las curvas de tiempos medios empíricas.

La variación de la velocidad máxima produce un desplazamiento vertical en las curvas de tiempos medios, mientras que el decrecimiento del ratio de anisotropía produce una pérdida de simetría y un aumento de valor de las curvas. Sin embargo todas estas características se atenúan cuando el ratio de anisotropía aumenta, por lo que en el caso de anisotropías débiles, inferir los parámetros de anisotropía, a partir de unos tiempos de viaje reales afectados por ruido resulta una tarea difícil, siendo el caso límite (isotropía) un problema mal condicionado.

Las curvas de tiempos medios anisótropas también han sido generalizadas al caso de dispositivos de adquisición de datos que presenten una geometría irregular y a medios en los que aparecen anisotropías elípticas zonales, tal como también se hizo con las respectivas curvas isotropas (Fernández Martínez et al., 2006). En el presente artículo se muestra la forma que poseen las curvas sintéticas, correspondientes a modelos isotropos y anisótropos en dispositivos de geometría irregular, observando que la irregularidad del propio dispositivo provoca una asimetría adicional en las curvas.

Los parámetros anisótropos $(V_{\max}, \alpha, \lambda)$, pueden ser deducidos de las curvas de tiempos medios experimentales. El método consiste en dividir el dominio en zonas razonablemente homogéneas (isótropas o anisótropas), reduciendo el desajuste entre las curvas experimentales y teóricas en cada agrupamiento, y resolviendo cuatro problemas de optimización del tipo (uno por cada curva de tiempo medio en fuente y receptor común)

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \left\| \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^* \right\|_p, \quad (4)$$

donde $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}$ son las curvas de tiempos medios experimentales en el agrupamiento

considerado y $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^*$ sus correspondientes curvas teóricas, predichas para un cierto modelo de parámetros. Dichos problemas de optimización se resuelven sujetos a las restricciones

$$\begin{aligned} 0.8 &\leq \lambda \leq 1; \\ -90 &\leq \alpha \leq 90; \\ V_L &\leq V_{\max} \leq V_U. \end{aligned}$$

La norma de optimización es p y se suele adoptar $p = 1$ ó $p = 2$. Los límites inferiores y superiores de V_{\max} y las zonas de análisis pueden ser deducidas de la información a priori o mediante el análisis realizado con las correspondientes curvas de tiempos medios isótropas, como hemos mostrado en Fernández a Martínez et al., (2006) para el caso isótropo. Cuando el medio geológico presenta varias zonas con distintas velocidades, las discontinuidades que aparecen en las curvas de tiempos medios o los cambios pronunciados de pendiente, indican la transición a una zona de diferente velocidad en el medio geológico. Ello nos conduciría a un análisis anisótropo multizonal.

Los problemas de optimización, antes mencionados, son no lineales debido a la dependencia de las curvas teóricas de tiempos medios con respecto a los parámetros de la anisotropía, y sobredeterminados, puesto que hay notablemente más datos observados que incógnitas (3 en cada zona de análisis). El algoritmo global utilizado para resolver el problema de optimización planteado fue Particle Swarm Optimization (PSO) ya que no sólo encuentra en cada caso el modelo de parámetros anisótropos que mejor ajusta la correspondiente curva de tiempos medios experimentales sino que también se muestrea

y explora la región de modelos equivalentes, buscando aquellos que ajusten las curvas experimentales con la misma tolerancia. En el apartado 4.1 del artículo se hace una breve descripción del algoritmo PSO (García Gonzalo, 2011).

Con el objetivo de analizar el efecto que los errores en los datos produce en el proceso de identificación, se generaron un conjunto de tiempos sintéticos anisótropos correspondientes a un medio teórico con los siguientes parámetros anisótropos ($V_{\max} = 5.4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha = 120^\circ$, $\lambda = 0.95$). Estos tiempos fueron perturbados por diferentes niveles de ruido, llegando a las siguientes conclusiones:

- La velocidad máxima es el parámetro que mejor se identifica, siendo bien identificado para niveles de ruido de hasta el 10 % en la curva de tiempos medios y del 7 % en la curva de desviaciones típicas. Sin embargo para niveles superiores aparecen artefactos de altas velocidades.
- El ruido provoca que la dirección de anisotropía se identifique de forma ambigua y sesgada hacia 0° para niveles de ruido superiores al 5 %.
- El ratio de anisotropía siempre es subestimado (altos niveles de anisotropía) y para niveles de ruido superiores al 10 % la degradación es clara.

Como en el caso isótropo las curvas de desviaciones típicas son más sensibles a la presencia de errores en los datos que las curvas de medias. Resultados similares se obtienen con presencia de ruido no Gaussiano. Esto constituye un resultado muy importante: el ruido en los datos podría ser interpretado, de forma equivocada, como una anisotropía geológica. De esta forma, en el análisis anisótropo, la curva de medias debería ser usada para inferir los parámetros de la anisotropía, mientras la curva de desviaciones típicas sería usada para analizar el efecto del error en los datos. Es importante observar que el problema de identificación de los parámetros de anisotropía mediante la curva de medias, gana en estabilidad, cuando la velocidad máxima está correctamente identificada, siendo buena la identificación para niveles de ruido inferiores al 15 %. Se representan las superficies de desajuste como una función de los parámetros anisótropos λ y α para un conjunto de datos sintéticos, mostrándose la diferencia entre la solución numérica y exacta cuando el nivel de ruido aumenta.

El objetivo final de este análisis es proveer a los algoritmos de inversión de los modelos anisótropos a priori requeridos para estabilizar la inversión, como se ha visto en los capítulos 3 y 4.

En el último apartado, como caso de estudio, se aplica la metodología de las curvas anisótropas al conjunto de datos Grimsel, ya descrito anteriormente. Los resultados de este análisis para el conjunto de datos 1 usando la norma Euclídea son coherentes con la curva de tiempos medios: ($V_{\max} = 5.26 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha = E30^\circ - N56^\circ$, $\lambda = 0.97$). La curva de desviaciones típicas muestra en fuente común una anomalía con altas velocidades y una

degradación del ratio de anisotropía. Además, la dirección de anisotropía no coincide con la dirección deducida a partir de las curvas de tiempos medios. Se muestran los resultados del análisis de las curvas de tiempos medios para medios isótropos y anisótropos. Aunque los resultados son muy similares, las curvas anisótropas ajustan mejor las curvas de tiempos medios experimentales que las isótropas. También se tratan los conjuntos de datos 2 y 3 del dispositivo de adquisición, concluyéndose que el modelo anisótropo proporciona un mejor ajuste de los datos observados. Finalmente aprovechando la naturaleza global del algoritmo PSO, se generan histogramas con los parámetros de anisotropía de aquellos modelos que mejor (para una tolerancia dada) ajustan las curvas de tiempos medios empíricas (modelos equivalentes).

Las principales conclusiones del análisis que se presenta en este artículo son las siguientes:

- Se muestra de forma numérica como el ruido en los datos puede ser confundido con artefactos de anisotropía, notándose considerablemente su efecto en el ratio de anisotropía.
- El análisis de sensibilidad ilustra como diferenciar el efecto de los errores en los datos de las anisotropías elípticas y hasta qué niveles de ruido este discernimiento es posible.
- La velocidad máxima es el parámetro que mejor se identifica y la dirección de anisotropía es el más delicado de identificar, pues para medios con una anisotropía débil existen soluciones equivalentes en un amplio rango de direcciones.

Anisotropic Mean Travelttime Curves: A Method to Estimate Anisotropic Parameters from 2D Transmission Tomographic Data

Juan L. Fernández Martínez ·
Luis M. Pedruelo González

Received: 16 January 2008 / Accepted: 21 October 2008 / Published online: 29 November 2008
© International Association for Mathematical Geosciences 2008

Abstract We present the mathematical deduction and properties of the mean travelttime curves for homogeneous elliptical anisotropic media. These curves generalize their isotropic counterparts which have been introduced in the past as a simple data quality analysis technique at the pre-inversion stage for 2D transmission experiments, allowing the inference of prior velocity models to gain stability at the tomographic inversion. Also, the anisotropy parameters (maximum velocity, anisotropic direction and ratio) are shown to affect the shape of these curves. The degree of asymmetry of the anisotropic mean travelttime curves (displacement of the mean time and standard deviation minima from the middle of the gathering line) is related to the direction of anisotropy which can then be visually estimated. Least squares' fitting of the anisotropic theoretical models to their experimental counterparts is an effective method to estimate at the pre-inversion stage a macroscopic elliptical anisotropic velocity model, valid at the scale of the experiment, and able to match the experimental mean travelttime distribution.

Sensitivity analysis has shown that the mean curve is less prone to errors than the standard deviation curve. Parameter identification from the standard deviation curve becomes unstable for noise levels higher than 5%; data errors produce smearing of the value of the estimated anisotropy ratio and wrong directions of anisotropy biased towards zero degrees. Also, identification from the mean travelttime curve becomes stable when the maximum velocity is well constrained. Finally, this methodology is illustrated with the application to the Grimsel data set. Performing MTC analysis is always recommended since it does not need high numerical requirements, and as shown in the sensibility analysis section, errors in data can be misinterpreted as geological anisotropies.

J.L. Fernández Martínez is a visiting professor at UC Berkeley, Department of Civil and Environmental Eng., CA 94720-1710.

J.L. Fernández Martínez (✉) · L.M. Pedruelo González
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, C/ Calvo Sotelo, 33006 Oviedo, Spain
e-mail: jlfm@uniovi.es

Keywords Inverse problems · Transmission tomography · Mean traveltimes curves · Weak elliptical anisotropy

1 Introduction

Traveltimes tomography methods are non destructive inspection techniques aimed at inferring the velocity distribution of a geological medium from the analysis of observed traveltimes data. Characteristic of these methods is the great sensibility of their solution to data errors, often present in transmission tomography experiments. Therefore, data quality analysis techniques are very important at the pre-inversion stage. Fernández Martínez et al. (2006, 2008) proposed the mean traveltimes curves (MTC) analysis as a new and simple method to understand data variability in transmission experiments, and to infer prior velocity models in order to gain stability at the inversion stage. Its originality is based on establishing the relative coherence between the different source and receiver gathers. Under the assumption of homogeneity and isotropy of the geological medium, these curves have a simple analytical expression for all kinds of recording geometries. In the case of rectangular acquisition geometry, these curves are symmetric with respect to the time axis and reach the minimum at the middle point of the gather line, losing their symmetry when the recording geometry becomes irregular. Mean traveltimes curves can be generalized to zonal homogeneous and isotropic media. In this case, the least-squares' fitting of the experimental mean traveltimes curves allow inferring, at the pre-inversion stage, the best "zonal" isotropic velocity model which fits the traveltimes data and a range of velocity variation. This methodology has given birth to MTCLAB, a MATLAB-based program to perform traveltimes quality analysis (Fernández Martínez et al. 2008).

Nevertheless, experimental results (for instance, in hydrocarbon exploration) show that most crustal rocks possess anisotropy. Also, anisotropy with angular dependence of velocity is the most common form of anisotropy found in seismic experiments (Upadhyay 2004). Thomsen (1986) also noted that in most cases the anisotropy is weak; he developed the theory of weak anisotropy, starting from the theory of transversely isotropic media. Elliptical anisotropy is then a particular case. Clays and fine layering have been mentioned as the main causes of seismic anisotropy in sedimentary rocks (Wang 2002). Studies in clays also have shown that velocity anisotropy is influenced by the content of organic matter and the interaction with pore fluids (Vernik and Liu 1997). Macroscopically, anisotropy occurs as a result of the natural fractures of rocks (Schoenberg and Sayers 1995).

Seismic anisotropy has been taken into account in seismic traveltimes inversion through different kind of numerical algorithms (Byun and Corrigan 1990; Carrion et al. 1992; Pratt and Chapman 1992; Williamson et al. 1993; Watanabe et al. 1996), and is even nowadays an important field of research in geology, seismic, reservoir characterization, etc. Considering anisotropy in tomographic inversion techniques introduces the need for estimating the anisotropic model parameters. In some cases, these parameters are taken as unknowns of the inversion problem (Pratt and Chapman 1992; Williamson et al. 1993). In other cases, these parameters are fed to the inverse problem, being previously estimated by different geophysical and numerical techniques (Van der Baan and Kendall 2002; Elapavuluri 2003;

Xiao et al. 2004). In any case, a good initial guess and reference models for constructing the regularization term are always needed.

In this paper, we present the mathematical deduction and analysis of mean traveltimes curves for homogeneous elliptical anisotropic media. These curves generalize the isotropic mean traveltimes curves, introduced by Fernández Martínez et al. (2006, 2008). Least squares' fitting of the anisotropic theoretical models to their experimental counterparts is an effective method to estimate at pre-inversion stage a macroscopic elliptical anisotropic velocity model, valid at the scale of the experiment, and able to match the mean traveltimes distribution. Sensitivity analysis to different kind of errors is also performed by means of synthetic cases. Maximum velocity is usually well constrained, whereas direction and ratio of anisotropy identification is unstable. Representation of the misfit surface as a function of the anisotropic parameters (λ , α) for a synthetic dataset shows the difference between the numerical and exact solution as the level of noise increases. One of the main conclusions is that the mean curve is less prone to errors than the standard deviation curve. Parameter identification from this last curve becomes unstable for noise levels higher than 5%; velocity artifacts appear, the direction identification becomes ambiguous and biased towards 0° , and spurious anisotropy ratios are estimated. Also, identification from the mean traveltimes curve becomes stable when the maximum velocity is well constrained. Thus, the mean traveltimes curve should be used to infer the anisotropic velocity parameters, whilst the standard deviation curve has to be used to analyze the effect of data errors. Both properties had already been remarked upon for the isotropic mean traveltimes curves analysis (Fernández Martínez et al. 2006, 2008).

Finally in a case study, we apply this methodology to the Grimsel data set, inferring the elliptical anisotropic parameters which model this well-known granite. This data case was also previously modeled using the isotropic mean traveltimes curves (Fernández Martínez et al. 2006, 2008). As a main conclusion, anisotropic MTC constitute a simple and quick approach to perform data variability analysis at the pre-inversion stage. This methodology generalizes the isotropic MTC analysis we have introduced in the past. MTC analysis always improves the understanding of the data structure, even if no data editing algorithms are finally used. Also, the velocity information deduced from the MTC analysis can be used to solve non-uniqueness and stabilize the solution at the inversion stage. This kind of analysis is always recommended since it does not have high numerical requirements and data errors can be misinterpreted as geological anisotropies, as shown in the upcoming sensibility analysis section.

2 A Brief Description of the Isotropic Mean Traveltimes Curve Analysis

In this section, we recall the main features of the mean traveltimes curves analysis for the simplest case: a homogeneous and isotropic medium. This methodology can be consulted in more detail in Fernández Martínez et al. (2006, 2008).

2.1 The Theoretical Models

Let Ω be a homogeneous and isotropic medium with constant velocity, V , to be studied by the transmission tomography. Let us also assume that we have two lines of

sources and receivers located on the boundary of Ω . Gathering subsets can be defined grouping together traveltimes arriving to each receiver (common receiver gathering) and those emitted from each source (common source gathering). Mean traveltime curves describe analytically the variation of the main statistical parameters (mean and standard deviation) of the different gathering subsets, as a function of the gather distance (Fernández Martínez et al. 2006). Due to the isotropy and homogeneity assumption, traveltime variations in each source gather, x_s , follow the hyperbolic law

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}},$$

where ξ describes the receiver position with respect to the gather origin, and t_0 is the minimum traveltime in the gathering, which remains the same for all gathers due to the rectangular acquisition geometry. The mean traveltime, $\bar{t}_{(x)}$, and the standard deviation, $\sigma_{(x)}$, for a specific gather at distance x from the gather origin ($x = 0$), have the following analytical expressions (Fernández Martínez et al. 2006, 2008)

$$\frac{\bar{t}_{(x)}}{t_0} = F_m(x) = \frac{A_x}{2L_r A_0} \left[\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{A_x}\right)^2} + A_x \operatorname{args} h \frac{\xi}{A_x} \right]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)},$$

$$\frac{\sigma_{(x)}}{t_0} = F_\sigma(x) = \sqrt{\left(\frac{A_x}{A_0}\right)^2 - \left(\frac{\bar{t}_{f_x}}{t_0}\right)^2 + \frac{1}{3L_r A_0^2} [\xi^3]_{\xi=-L(x)}^{\xi=L_r-L(x)}},$$

where

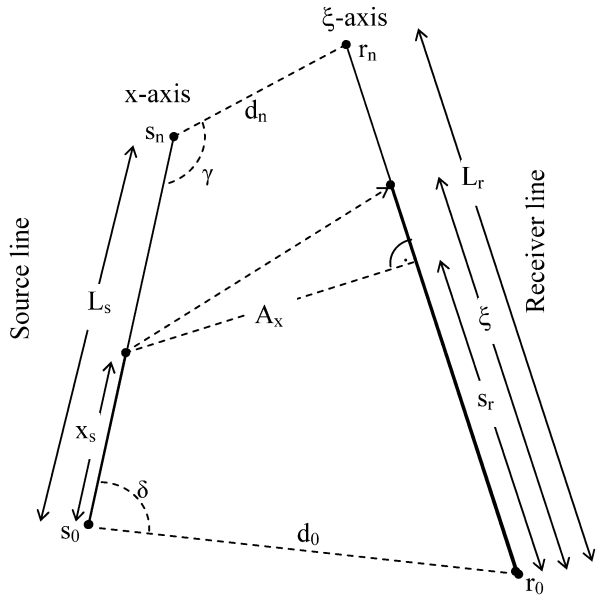
$$L_{(x)} = \frac{1}{2L_r} (L_r^2 + d_0^2 - d_n^2 + x^2 - (L_s - x)^2 + 2(L_s - x)d_n \cos \gamma - 2x d_0 \cos \delta),$$

and A_0 is the transverse distance corresponding to the source origin. A_x is the minimum distance between the source gather located at distance x from the source gather origin and the receiver line (receiver r_{\min}). $L_{(x)}$ is the coordinate of the receiver r_{\min} in the receiver line and depends on x and the recording geometry parameters—angles and distances. Finally, L_r is the length of the line of receivers (L_s for the line of sources) (Fig. 1).

2.2 The Experimental Fitting

In the experimental mean traveltime curves, the elements of each gather are the traveltime data measured in the field. Both sources and receivers have discrete locations and are inferred using the corresponding discrete estimators (mean and standard deviation). The isotropic mean traveltime curve analysis consists in the least-squares' fitting of the empirical mean traveltime curves through the corresponding theoretical mean traveltime descriptors in order to infer the best homogeneous velocity model (V_k) for each zone of analysis, Ω_k , of the geological medium. This amounts to solv-

Fig. 1 Variables involved in the MTC analysis for a general non-rectangular recording geometry case



ing the linear system (Fernández Martínez et al. 2006)

$$\left(\begin{matrix} F_m(x_1) \\ F_m(x_2) \\ \vdots \\ F_m(x_q) \end{matrix} \right) (t_{0k}) = \left(\begin{matrix} \bar{t}_s(x_1) \\ \bar{t}_s(x_2) \\ \vdots \\ \bar{t}_s(x_q) \end{matrix} \right) \iff \left. \begin{matrix} t_{0k} = \frac{\sum_{i=1}^q F_m(x_i) \bar{t}_s(x_i)}{\sum_{i=1}^q F_m^2(x_i)}, \\ V_k = \frac{A_{0k}}{t_{0k}}, \end{matrix} \right\}$$

where q is the number of gathers in the geophysical zone Ω_k , and $\bar{t}_s(x_i)$ is the mean traveltime value observed for gather in x_i . The same can be done with the standard deviation empirical values. This methodology helps to grasp a better understanding of the data variability before the inversion and provides to the geophysicist an approximate zonal isotropic model and a range of velocity variation that can be used in the inverse problem as a priori information (Fernández Martínez et al. 2008).

3 Mean Traveltime Curves in Elliptical Anisotropic Media

The aim of this section is to develop a more general mathematical model to be used in 2D transmission tomography in the case of elliptical anisotropic media. Suppose that the velocity field of the geological medium is described by an elliptical anisotropic model composed of the following parameters: the maximum velocity (V_{\max}), the direction of the anisotropy (α), and the ratio of anisotropy ($\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$). It is important to note that, defined in this way, the isotropic case corresponds to $\lambda = 1$. Also in most cases of interest to geophysicists, the elliptical anisotropy is weak and the ratio of anisotropy lies in the interval $[0.9, 1]$.

The idea which led us to this research was the following: Consider an elliptical anisotropic homogeneous medium, characterized by parameters $(V_{\max}, \alpha, \lambda)$, and explored by means of a rectangular recording geometry. It is possible to find an isotropic homogeneous medium sharing the same *mean* traveltime curve. For accomplishing this condition, the medium has to be explored with appropriate irregular acquisition geometry. This can be easily understood considering the following points:

1. An elliptical anisotropic velocity model can be transformed into an isotropic velocity model by the composition of two linear transformations:
 - A rotation by an angle α to the main axis of anisotropy. This transformation allows to express the velocity model $\mathbf{v}_\beta = (v_{\beta x}, v_{\beta y})$ for the direction that forms an angle β with the direction of maximum velocity, named α , as follows

$$\frac{v_{\beta x}^2}{V_{\max}^2} + \frac{v_{\beta y}^2}{V_{\min}^2} = 1.$$

- A stretching with the parameter $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} w_{\beta x} &= v_{\beta x}, \\ w_{\beta y} &= \frac{1}{\lambda} v_{\beta y}. \end{aligned}$$

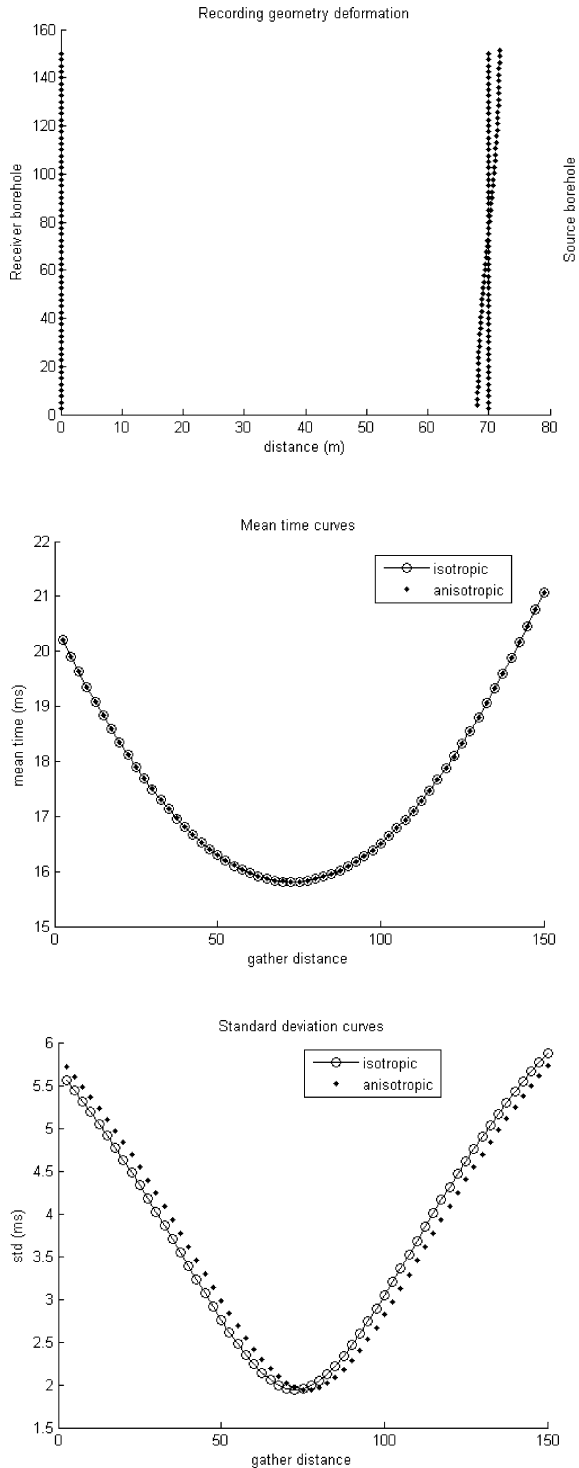
With this last transformation the new velocity model becomes isotropic

$$\mathbf{w}_\beta : \|\mathbf{w}_\beta\| = V_{\max}.$$

2. To maintain the mean curve invariable, both transformations have to be applied to the rectangular acquisition geometry. In the new coordinate system, the recording geometry becomes irregular, and thus it is possible to conclude that the mean traveltime curve in the case of an elliptical anisotropic homogeneous media is asymmetric (Fernández Martínez et al. 2006), and the point where the minimum is reached has to be related to the anisotropic parameters $(V_{\max}, \alpha, \lambda)$.

Figure 2 shows a synthetic example corresponding to an elliptical anisotropic medium with parameters: $V_{\max} = 5.3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha = E45^\circ N$, $\lambda = 0.95$ explored via a rectangular recording geometry. This recording configuration has to be conveniently deformed (Fig. 2(a)) for an isotropic medium with homogeneous velocity, V_{\max} , sharing the same mean traveltime curve (Fig. 2(b)). Standard deviation curves still show a trade-off (Fig. 2(c)) since the dispersions around the mean time in the isotropic and anisotropic cases have to be different. As a main conclusion, the mean traveltime curves characterized without ambiguity elliptical anisotropic media and had to be asymmetric. Their asymmetry depends on the anisotropic parameters. This fact can be taken into account to infer the model of anisotropy from the experimental data. These conclusions will be further developed in the next sections.

Fig. 2 Case of an elliptical anisotropic medium explored with a rectangular recording geometry. Deformation of the recording geometry needed to find the equivalent isotropic medium sharing the same mean traveltime curve. It can be observed that standard deviation curves in both cases differ, showing that dispersion around the central value has to be different. This fact accounts for the anisotropy



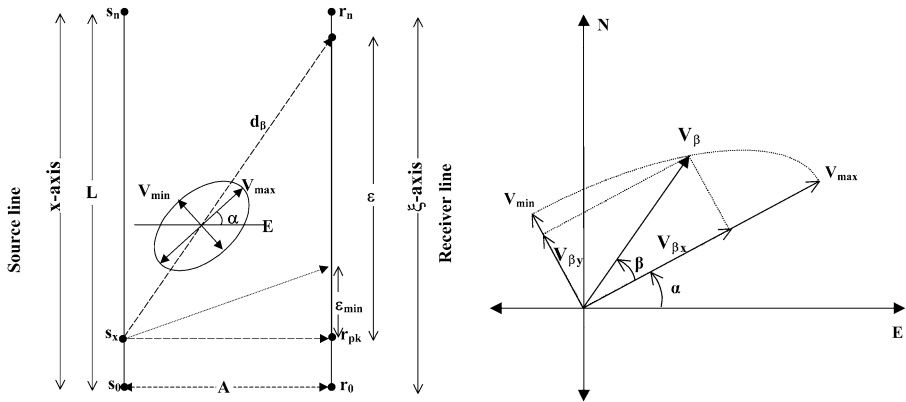


Fig. 3 Source-left rectangular recording geometry. Variables involved in the elliptical anisotropic case. ϵ_{\min} stands for the distance where minimum time ray arrives

3.1 The Case of a Rectangular Recording Geometry

In this case, due to the homogeneity in the velocity model, seismic rays follow straight lines between the sources and the receivers. By means of simple geometrical considerations, it is possible to deduce the theoretical traveltimes expression for any arbitrary pair of sources and receivers. The traveltimes corresponding to a seismic ray with a direction having an angle β (Fig. 3), measured counter-clockwise with respect to the V_{\max} direction (named α) can be written as

$$t_\beta = \frac{d_\beta}{v_\beta} = \frac{\sqrt{A^2 + \epsilon^2}}{v_\beta},$$

where d_β is the distance between the source and the receiver (defining this direction), A is the minimum distance between the source and the line of receivers, ϵ is the distance between the hypothetical receiver located at the perpendicular line to the considered source and the receiver where the seismic ray arrives (origin time receiver r_{pk}), and v_β is the velocity in the β direction.

Furthermore, taking into account the following relationships

$$v_\beta = \sqrt{v_{\beta x}^2 + v_{\beta y}^2}, \quad \frac{v_{\beta x}^2}{V_{\max}^2} + \frac{v_{\beta y}^2}{V_{\min}^2} = 1,$$

$$\tan \beta = \frac{v_{\beta y}}{v_{\beta x}}, \quad \lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}},$$

velocity (v_β) can be expressed in terms of the anisotropic parameters

$$v_\beta = a_{\lambda\beta} V_{\max} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \frac{\tan^2 \beta}{\lambda^2}}} V_{\max}.$$

Also in the rectangular case, the following relationship applies

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon - A \tan \alpha}{A + \varepsilon \tan \alpha}.$$

These relationships allow the velocity and the traveltime in the β direction to be expressed as a function of the elliptical anisotropy parameters ($V_{\max}, \alpha, \lambda$)

$$v_{\beta} = a_{\lambda\beta} V_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda^2(A^2 + \varepsilon^2)(1 + \tan^2 \alpha)}{2\varepsilon A \tan \alpha(\lambda^2 - 1) + (\lambda^2\varepsilon^2 + A^2) \tan^2 \alpha + (\lambda^2 A^2 + \varepsilon^2)}} V_{\max}, \tag{1}$$

$$t_{\beta}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha)\varepsilon^2 + 2A \tan \alpha(\lambda^2 - 1)\varepsilon + A^2(\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha) V_{\max}^2}}. \tag{2}$$

Given the parameters $A, \lambda, \alpha, V_{\max}$, traveltime t_{β} remains a function of ε (or β). Each seismic ray will have associated a different traveltime depending only on its direction. The minimum time ray is reached at a distance

$$\varepsilon_{\min} = \frac{A(1 - \lambda^2) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}, \tag{3}$$

which is measured from the receiver r_{pk} (“minimum distance” receiver). This distance depends only on parameters λ and α , independent of the gather index due to the homogeneity assumption. Furthermore, if the direction of anisotropy α is north-east, the minimum time is reached above the origin receiver, r_{pk} , for a source-left configuration¹ (Fig. 3). In contrast, if the direction α is northwest, the minimum time is reached below this receiver for the same kind of configuration (source-left).

Mean traveltime curves are obtained inserting the former expression (2) in the mean and standard deviation definitions. For instance, the mean time and the variance at a source gather located at a distance x from the initial source S_0 can be expressed as

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} \sqrt{\frac{A^2 + \xi^2}{a_{\lambda\beta}^2 \cdot V_{\max}^2}} d\xi \tag{4}$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} (t_{\beta}(\xi) - \bar{t})^2 d\xi \tag{5}$$

where $\bar{t}(x)$ and $\sigma^2(x)$ admit long and complicated analytical expressions. Using the fundamental theorem of calculus, it is straightforward to demonstrate that the mean traveltime curve reaches its minimum at a distance $x_{\min} = \frac{L}{2} - \varepsilon_{\min}$, measured from the initial source. Thus, the minimum mean traveltime is related to the position where the minimum time is reached (ε_{\min}). Also for a ‘source-left configuration’ (Fig. 1), the

¹In the case of a source-right configuration, minimum time will be reached below the origin receiver, r_{pk} , for a northeast anisotropy.

minimum will be located towards the left with respect to the middle of the gather line ($x_{\min} < \frac{L}{2}$) if the direction of anisotropy is northeast. If the direction of anisotropy is northwest, displacement will be towards the right of the middle of the gather line ($x_{\min} > \frac{L}{2}$). This same behavior can be proved for the standard deviation curve. In the case of a ‘source-right configuration’, the expected behavior will be the opposite. This simple analysis provides a visual criterion to infer the direction of anisotropy for rectangular geometries from the empirical MTC; one has to look at the shift of the minima with respect to the middle of the gather line and apply the above mentioned rules. In the case of isotropy and regular recording geometry, no shift is observed.

3.2 Influence of the Anisotropic Parameters on the Theoretical Mean Traveltime Curves

The maximum velocity shifts the mean traveltime curves vertically since mean traveltime is increased or reduced depending on the V_{\max} value. The influence of the ratio and direction of anisotropy on the mean traveltime curves is explained in this section via synthetic models. Let us consider an elliptical anisotropic medium with maximum velocity of 5.4 km/s, explored via a ‘source-left rectangular recording geometry’, composed of two parallel boreholes of length $L = 140$ meters and 70 meters apart (distance A).

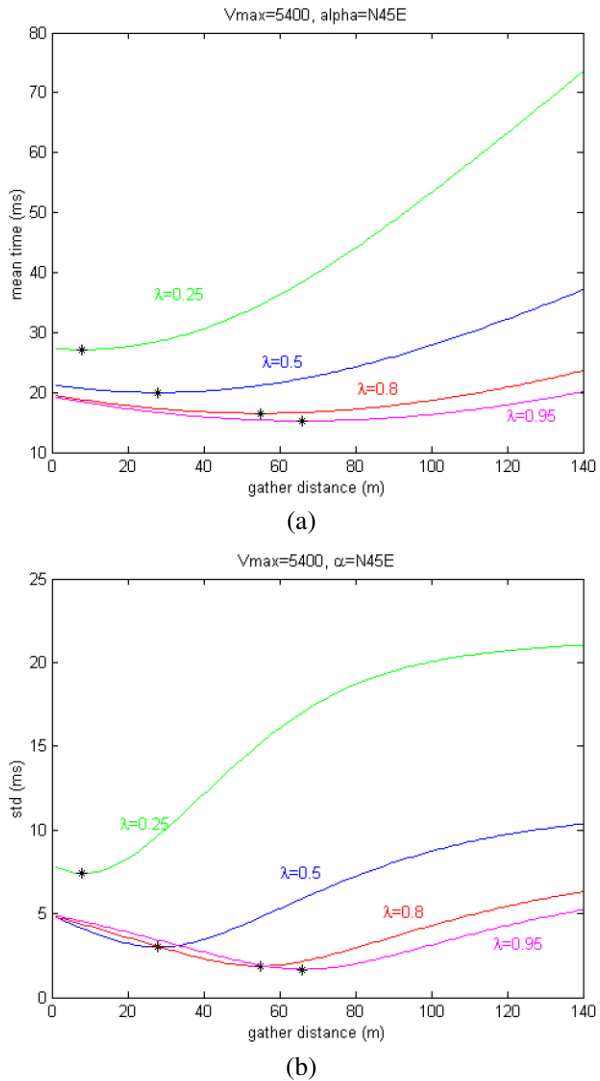
3.2.1 Influence of the Anisotropy Ratio

To study the influence of the anisotropy ratio, we have adopted a direction of anisotropy (parameter α) of $N45^\circ W$. Figures 4(a) and 4(b) show the mean traveltime curves (mean and standard deviation) obtained for different anisotropic ratios. It can be observed that, as the parameter λ decreases, the mean times increase in value and the curves increase their asymmetry. These curves become more symmetric as the parameter λ increases, tending to the isotropic case. Differences between these curves significantly decrease for weak anisotropic ratios (λ between 0.95 and 0.99) (Figs. 4(c), 4(d)). The shape of the MTC curves in the anisotropic case is similar to the mean traveltime curve obtained in the case of a homogeneous isotropic medium explored via an irregular recording geometry (Fernández Martínez et al. 2006).

3.2.2 Anisotropy Direction

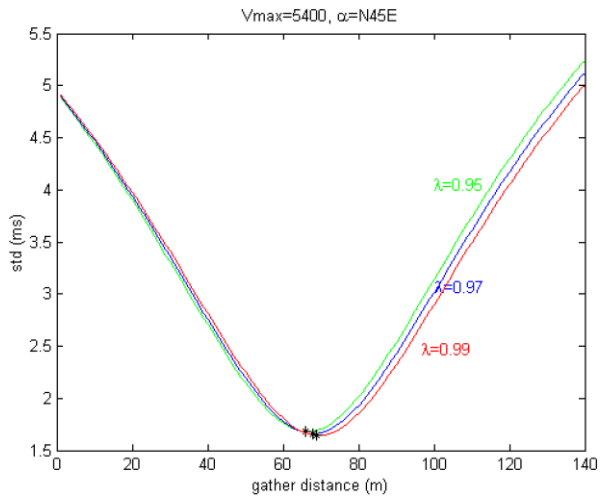
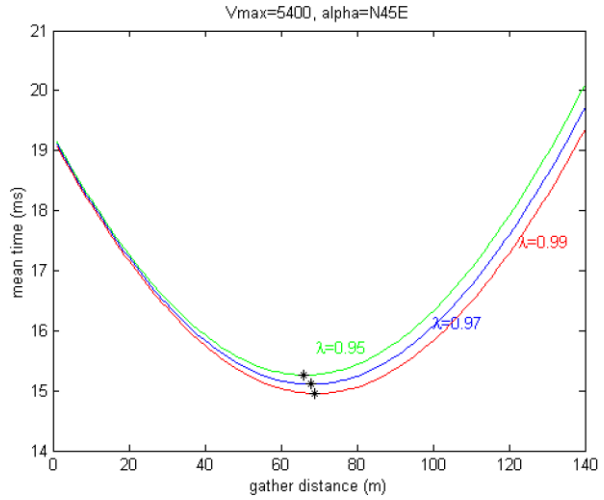
Let us now study the influence of the anisotropy direction, varying the anisotropy direction from northeast to northwest. In the first simulation, varying the anisotropy ratio is $\lambda = 0.8$ (Figs. 5(a), 5(b)). The anisotropy induces a shift of the mean traveltime curves minima towards the right of the middle point of the line source (70 meters in this case) if the anisotropy direction is northwest, and towards the left of this middle point, if the anisotropy direction is northeast. Figures 5(c) and 5(d) show the same curves for $\lambda = 0.95$. Also, as in Figs. 4(c) and 4(d), differences between these curves decrease as the anisotropic ratio increases. This feature implies that, in the range of weak anisotropy, inferring anisotropic parameters from real traveltime data affected by measurement noise will become a difficult task. In the limit case (isotropy), this identification problem is ill-posed.

Fig. 4 Influence of the anisotropic ratio on the mean traveltimes (mean and standard deviation) for a recording configuration having the source line placed left with respect to the receiver line as in Fig. 1. The direction of anisotropy is $N45^\circ E$ ($\alpha = 45^\circ$). As the parameter λ increases, the curve becomes more symmetric tending to the isotropic case ($\lambda = 1$). Also, as the parameter λ decreases, the mean times increase and both curves increase their convexity. For anisotropic ratios in the range of weak anisotropy (0.95–0.99) the mean time curves are very close to each other, causing the identification of anisotropic parameters to be difficult



3.3 The Case of an Irregular Recording Geometry

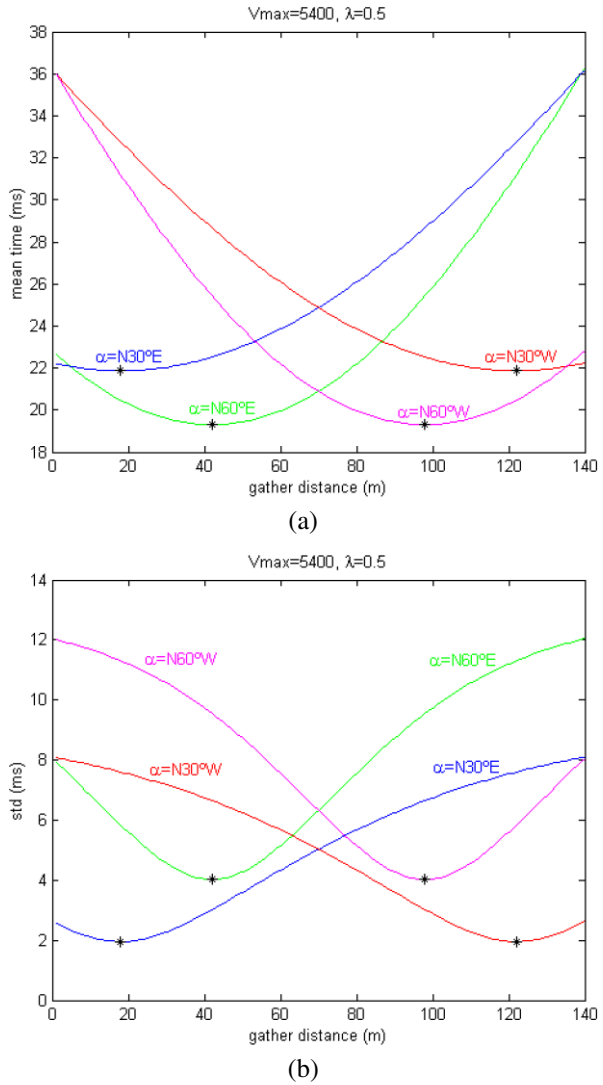
Anisotropic mean traveltimes curves can be also generalized to irregular recording geometries and zonal elliptical anisotropic media as their isotropic counterparts (Fernández Martínez et al. 2006). Figure 6 shows the comparison of the mean traveltimes curves for an isotropic medium of 5.4 km/s, explored via an irregular recording geometry (Fig. 6(a)), to those of anisotropic media with maximum velocity $V_{\max} = 5.4$ km/s, anisotropic ratio $\lambda = 0.85$, and directions of anisotropy $N45^\circ E$ and $N45^\circ W$ (Figs. 6(b), 6(c)). The irregular recording geometry induces asymmetry on the mean traveltimes curves, whereas anisotropy provokes an additional shift of the curves, in the same way as for the rectangular recording geometry case.

Fig. 4 (Continued)

4 Inference of the Anisotropic Velocity Parameters in the Presence of Data Noise

The anisotropic parameters (λ , α , V_{\max}) can be inferred from the experimental mean traveltimes counterparts. The method consists in dividing the domain into fairly homogeneous zones (isotropic or anisotropic), reducing the misfit between the experimental and the theoretical mean traveltimes curves in each gather, and solving four optimization problems of the kind (one for each mean time curve in the source and

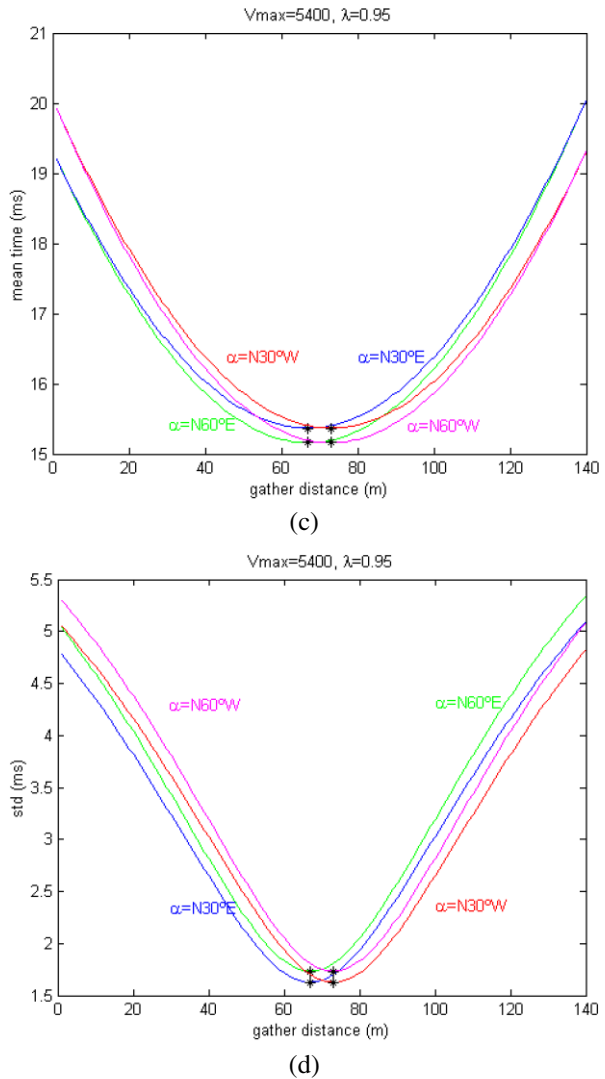
Fig. 5 Influence of the anisotropy direction for a source-left recording configuration. Notice how the displacement of the minimum depends on the direction of anisotropy. Curves corresponding to weak elliptical anisotropic media are also very close



receiver gathers)

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \left\| \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \bar{\sigma}_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \bar{\sigma}_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^* \right\|_p, \tag{6}$$

where $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \bar{\sigma}_g \end{pmatrix}$ are the experimental mean traveltime curves in the considered gather (source or receiver), and $\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \bar{\sigma}_g \end{pmatrix}_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^*$ are the corresponding anisotropic MTC theoretical predictions for a certain set of anisotropic parameters. M , is the \mathbb{R}^3 prismatic

Fig. 5 (Continued)

search space

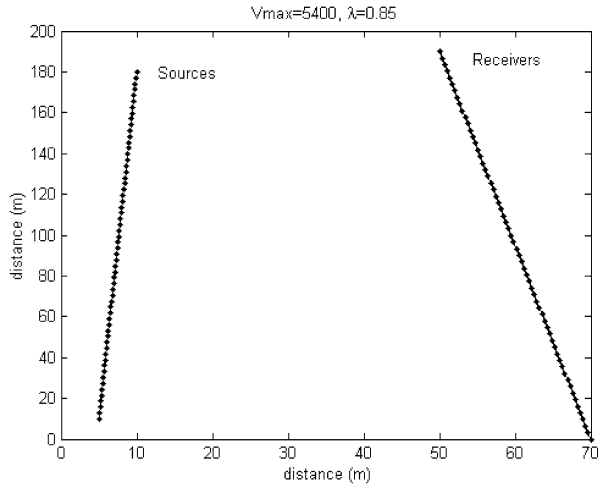
$$0.8 \leq \lambda \leq 1;$$

$$-90 \leq \alpha \leq 90;$$

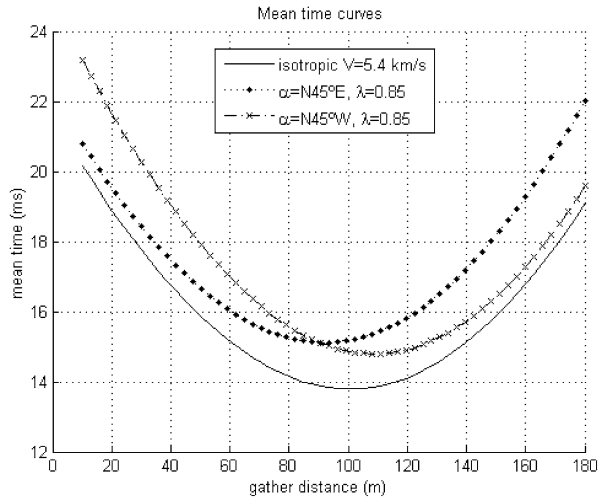
$$V_l \leq V_{\max} \leq V_u,$$

and p is the optimization norm. Low and upper bounds for V_{\max} and the zones of analysis can be deduced from prior information or from the analysis of the isotropic mean traveltimes themselves, as we have shown in Fernández Martínez et al. (2006) for the isotropic case. When the geological medium involves different geo-

Fig. 6 Case of an irregular recording geometry. **a** Mean traveltimes for an isotropic medium of 5.4 km/s, and two anisotropic media with maximum velocity $V_{\max} = 5.4$ km/s, anisotropic ratio $\lambda = 0.85$, and directions of anisotropy $N45^\circ E$ and $N45^\circ W$. **b** Standard deviation curves for the same cases



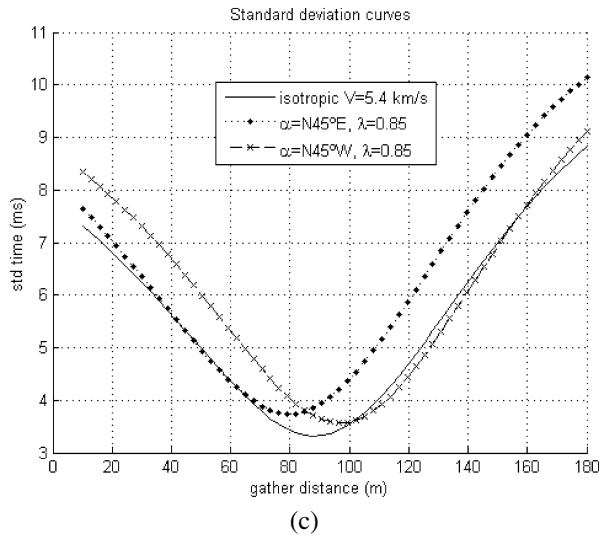
(a)



(b)

physical layers, the mean traveltimes present discontinuities or slope breaks, which indicates the transition to a different velocity zone of the geological medium. Then, the MTC analysis (either isotropic or anisotropic) can be performed separately in each individual zone. Thus, this methodology is valid not only for homogeneous anisotropic media at the scale of the experiment (anisotropic single-zone MTC analysis), but also for zonal elliptical anisotropic media (anisotropic multi-zone MTC analysis).

Optimization problems (6) are nonlinear due to the dependency of the theoretical mean traveltimes curves on the anisotropic parameters, and over-determined since more data gatherings than unknowns (3 in each zone of analysis) are usually available. The use of global heuristic algorithms makes it easier to solve the above men-

Fig. 6 (Continued)

tioned optimization problems, even using different L^p norms. The norm choice obviously influences the solution found (Tarantola 2005). Finally, the aim of the global algorithm used (PSO) is not only to find in each case the anisotropic parameters which best fits the corresponding experimental traveltime curve,² but also to sample and explore the region of equivalent anisotropic parameters, i.e., those which fit the experimental traveltime curves within the same tolerance, to perform posterior sample statistics. The dispersions around the modes of the sample histograms (best fit anisotropic parameters) serve to quantify the way traveltime data individually resolves each anisotropic parameter. As we will show, the maximum velocity parameter is the one which always shows lower dispersion (is better resolved). An example of this way of proceeding is given in the study case section.

4.1 The Optimization Algorithm: Particle Swarm Optimization (PSO)

Due to the nonlinear character of (6), to the low number of parameters -3- that speed up the error evaluation for a swarm of anisotropic velocity models, and to the presence of different equivalent models (as we will show in the sensibility analysis section), optimization is performed in the real case study by means of a global algorithm: particle swarm. The particle swarm is a stochastic evolutionary computation technique (Kennedy and Eberhart 1995) used in optimization, which was inspired by the social behavior of individuals (called particles) in nature, such as bird flocking or fish schooling.

The basic PSO algorithm is very intuitive and easy to program. An individual, or particle, is represented by a vector whose length is the number of degrees of freedom of the problem. To start, a population of particles is initialized with random positions

²For noise-free data sets, the 4 optimization problems should give as result the same anisotropic model.

$(x_i(0))$ and velocities $(v_i(0))$. An error or misfit function is evaluated for each particle, to measure the difference between the observed and the predicted data. As time advances, the positions and velocities of each particle are updated as a function of its history of misfits and the information about the misfit of its neighbors. In our case, the positions are the anisotropic velocity models found, and the velocities stand for the parameter perturbations needed for these positions to find the global minimum. At time-step $k + 1$, the algorithm updates positions $(x_i(k))$ and velocities $(v_i(k))$ of individuals as follows

$$\begin{aligned}v_i(k+1) &= wv_i(k) + \phi_1(x_i(k) - g(k)) + \phi_2(x_i(k) - l_i(k)), \\x_i(k+1) &= x_i(k) + v_i(k+1), \\ \phi_1 &= r_1a_g, \quad \phi_2 = r_2a_l, \quad r_1, r_2 \in U(0, 1), \quad w, a_g, a_l \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

The velocity of each particle i at iteration step $k + 1$ is a function of three major components:

1. The inertia term which consists of the old velocity vector of the particle, $v_i(k)$, weighted by a real constant w .
2. The cognitive learning term which is the difference between the particle's best position found so far (called $l_i(k)$) and the particle current position $(x_i(k))$.
3. The social learning term which is the difference between the global best position found thus far in the entire swarm (called $g(k)$) and the particle's current position $(x_i(k))$.

Constants w, a_g, a_l constitute the tuning PSO parameters and are called, respectively, inertia, global, and local accelerations. The local and global acceleration terms are stochastically weighted by uniform random numbers in the interval $[0, 1]$, r_1 and r_2 , causing each particle trajectory at iteration k to oscillate at each iteration around the point

$$o_i(k) = \frac{a_g g(k) + a_l l_i(k)}{a_g + a_l},$$

and thus the algorithm convergence is related to the stability of particle trajectories which depend on inertia constant, w , and the total mean acceleration, $\bar{\phi} = \frac{a_g + a_l}{2}$. A complete analysis of this algorithm can be seen in Fernández Martínez and García Gonzalo (2008). Finally, the Carlisle and Dozier (2001) PSO point

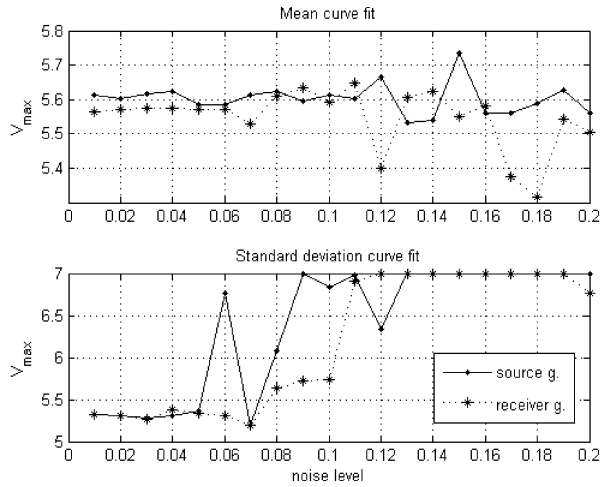
$$(w, a_g, a_l) = (0.729, 0.948, 2.041),$$

provides a good-enough balance between convergence and exploration, while solving optimization problems (6).

4.2 Sensibility Analysis

To analyze the effect of errors in data during the identification process, we have generated a synthetic anisotropic traveltime data set corresponding to a theoretical medium with the following anisotropic parameters ($V_{\max} = 5.4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha = 120^\circ$, $\lambda = 0.95$).

Fig. 7 Identification of the maximum velocity, V_{\max} , for increasing levels of Gaussian noise. Parameter identification is always accurate from the mean curve for noise levels under 10%. For the standard deviation curve the parameter identification becomes very inaccurate for noise levels higher than 5%. Velocity is always overestimated; this behavior is identical in the source and receiver domains



The times were perturbed by different levels of Gaussian noise. Figure 7 shows the effect of the noise level on the identification of V_{\max} from the mean and standard deviation curves, both in the source and receiver gather domains. The following conclusions may be obtained:

1. This parameter is well identified for noise levels under 10% in the mean curve, and under 5% in the standard deviation curve. Nevertheless, this velocity is overestimated in all the cases. For higher levels of noise, the identification becomes very inaccurate originating high velocity artifacts.
2. This behavior is identical in the source and receiver domains.

Figures 8 and 9 show the same kind of analysis done for parameters λ and α . It can be observed that the anisotropic ratio is always underestimated (higher levels of anisotropy) and for noise levels higher than 10% there is a clear degradation of this ratio, which is around 0.7. This fact has been also remarked by Pratt and Chapman (1992) even in presence of regularization. In the standard deviation case, the direction of anisotropy is not well identified for noise levels higher than 5%, showing a bias towards 180° (horizontal direction).

In conclusion, noise makes anisotropy direction identification ambiguous and biased towards 0° , and generates artifacts in the estimated anisotropy ratios. In all the cases, the standard deviation curve is more sensitive to the presence of measurement errors than the mean curve. Similar results are obtained in presence of non-Gaussian noise. This constitutes a very important result: Data noise might be wrongly interpreted as geological anisotropy. Thus, in the anisotropic MTC analysis, the mean curve should be used to infer the anisotropic parameters, whilst the standard deviation curve has to be used to analyze the effect of data errors. In the next section, we will show that the identification problem from the mean traveltime curve becomes quite stable when the maximum velocity parameter is well constrained. Also, as we will show in the case study, L^1 norm can be used to solve the optimization problem (6) and to look (if possible) for more robust solutions.

Fig. 8 Identification of the anisotropic ratio, λ , for increasing levels of Gaussian noise. It can be observed that the anisotropic ratio is always underestimated (higher levels of anisotropy). For noise levels higher than 10%, there is a clear degradation of this ratio around 0.7 for the standard deviation curve

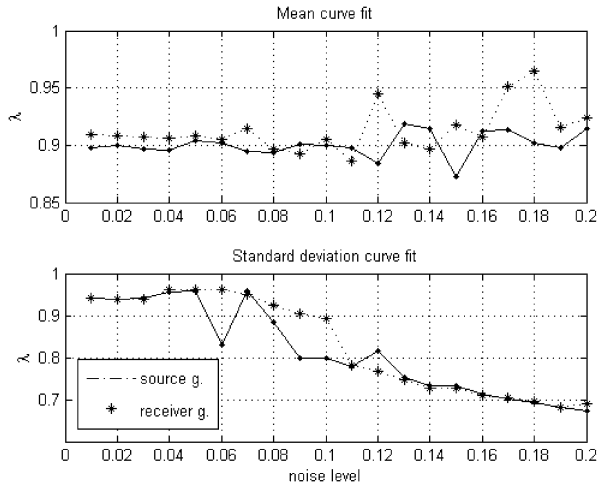
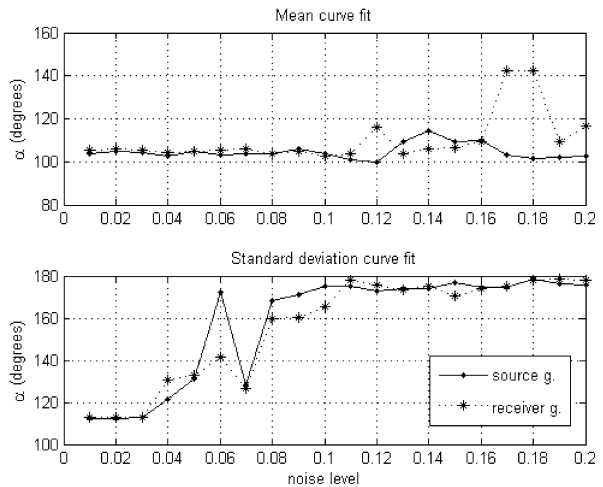


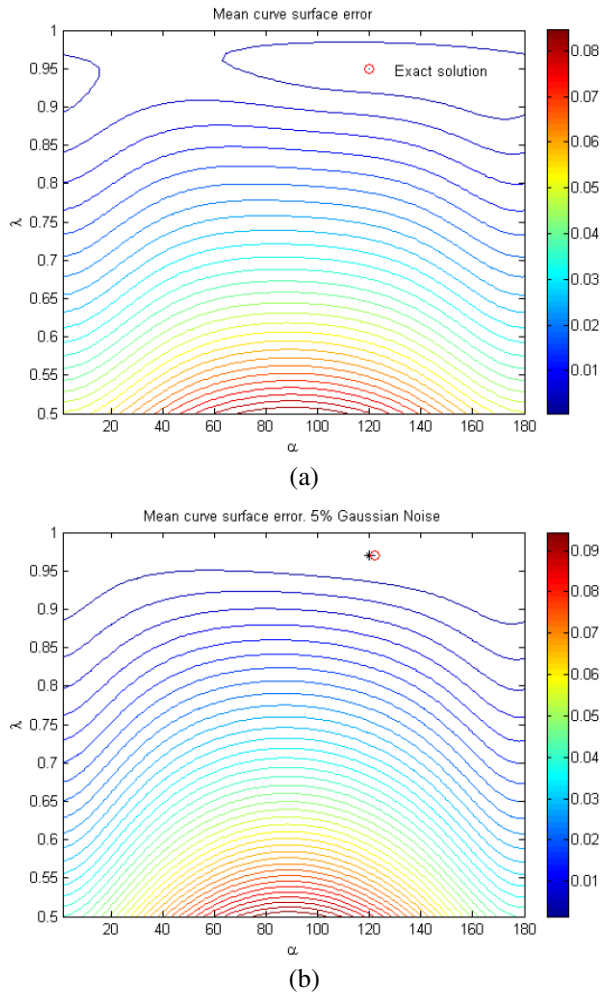
Fig. 9 Identification of the anisotropy angle, α , for increasing levels of Gaussian noise. In the standard deviation case, direction of anisotropy is not well identified for noise levels higher than 5%, presenting a bias towards 180° (east–west direction)



4.3 The Identification of the Direction and Ratio of Anisotropy

In this synthetic case, it is assumed that V_{max} is correctly identified. Due to this last hypothesis, the obtained results should be slightly different than in the previous analysis where all the parameters are identified at the same time. To explain how noise affects the identification of anisotropy parameters (direction and ratio), we represent the misfit function (error surface) as a function of λ and α . Figure 10 shows how the shape of the objective function for the mean traveltime curve varies when we increase the level of noise from 0% (Fig. 10(a)) to 15% (Fig. 10(d)). It can be observed that the region of equivalent models (i.e., the anisotropy sets of parameters which fit equally well the experimental traveltime curve) becomes broader as the level of noise increases. Also, the numerical solution of the perturbed misfit differs from the exact solution in the presence of Gaussian errors; nevertheless, they are close to each

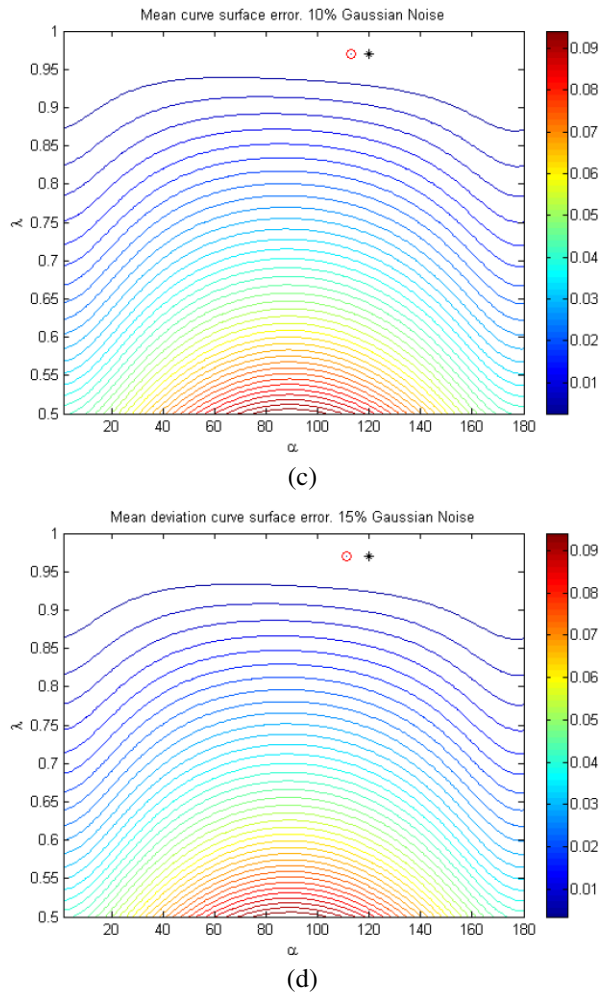
Fig. 10 Evolution of the misfit surface as a function of λ and α , for the mean travelttime curve, and increasing levels of Gaussian noise. The numerical and exact solutions are slightly different



other, at least for noise levels under 15%. This means that when the maximum velocity parameter is well constrained, the identification from the mean travelttime curve becomes stable for noise levels under 15%.

Figure 11 shows the same analysis for the standard deviation curve. The unperturbed objective function exhibits a central elongated valley parallel to the λ axis. This valley deforms progressively when the level of noise increases (the numerical solution differs from the exact solution) to 15%, becoming a flat elongated area where all the directions give a good fit for a broad range of anisotropic ratios (the so-called equivalent anisotropic velocity models). Thus, an important conclusion is that, for noise levels higher than 5%, identification of the anisotropic parameters from the standard deviation curve becomes very inaccurate since the angle of the anisotropy becomes progressively more biased towards 0° (or 180°) as noise level increases.

Fig. 10 (Continued)



5 The Use of MTC Anisotropic Parameters in Traveltime Inversion

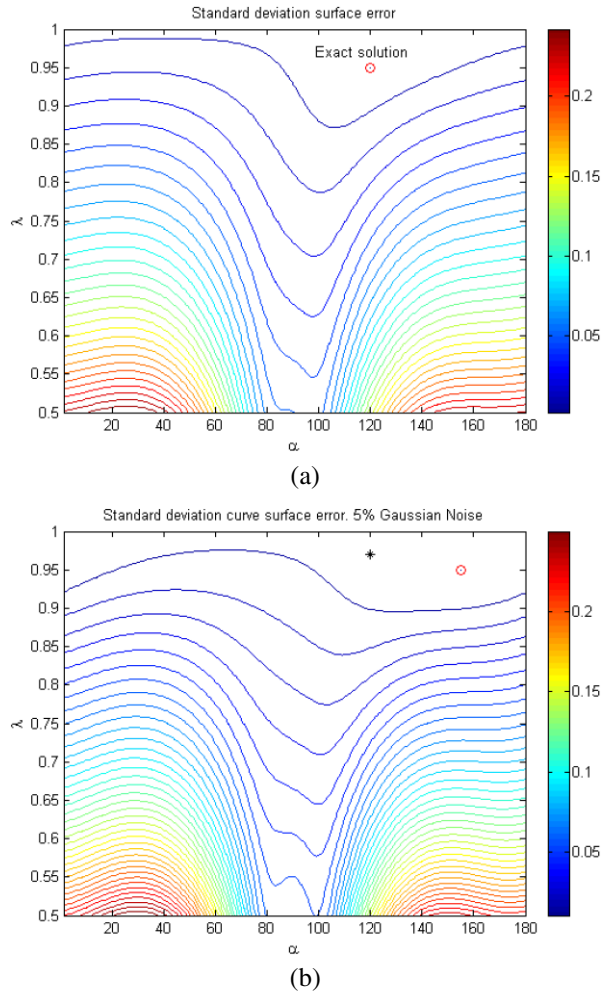
The ‘linear’ traveltime tomographic inverse problem consists in solving the system of equations

$$\mathbf{M}\mathbf{s} = \mathbf{t}, \tag{7}$$

where $\mathbf{M} \in M(m, n)$ is the raypath matrix, $\mathbf{s} \in M(n, 1)$ is the slowness vector, and $\mathbf{t} \in M(m, 1)$ is the observed traveltime data vector, with \mathbf{M} ‘not depending’ on \mathbf{s} . Nevertheless, in the ‘real nonlinear’ problem, \mathbf{M} does depend on \mathbf{s} since coefficients in \mathbf{M} gather information of the raypath lengths in each mesh cell, and these, in turn, depend on the (unknown) slowness distribution, \mathbf{s} . This difficulty forces the use of iterative methods to find \mathbf{M} and \mathbf{s} simultaneously, so as to fit traveltime data, \mathbf{t} .

The transmission tomography inverse problem is ill-posed, meaning that errors in the data, \mathbf{t} , propagate backwards, amplifying their magnitude and conta-

Fig. 11 Evolution of the misfit surface as a function of λ and α for the standard deviation traveltime curve, and increasing levels of Gaussian noise. The numerical and exact solutions tend to be very different, showing a bias towards lower values of λ (around 0.8) and east–west direction of anisotropy

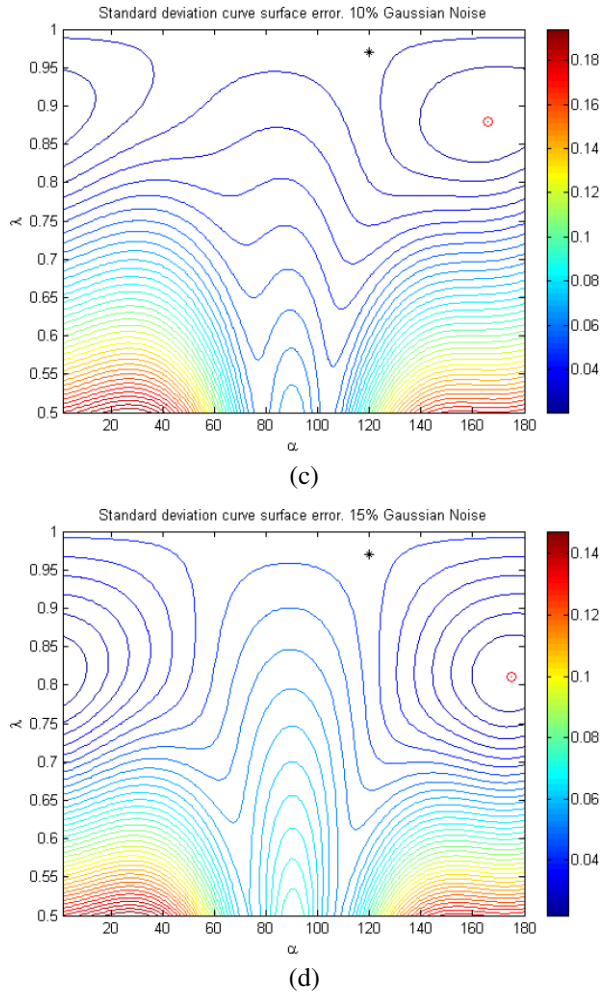


minating model parameters, \mathbf{s} . Different regularization approaches have been proposed to partially cope with the difficulties generated by the existence of the null space components of \mathbf{M} (non-uniqueness of solution) and/or the numerical instabilities caused by its ill-conditioning in the presence of noisy data (Hansen 1998; Pratt and Chapman 1992). These methods automatically filter part of the undesirable data influence. One of the most popular algorithms used to cope with these difficulties while solving (7) is the least-squares algorithm with Tikhonov regularization, i.e., finding the pixel slowness model, $\mathbf{s} \in S$, which solves the minimization problem

$$\min_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{M}\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{s} - \mathbf{s}^*\|_2^2,$$

where \mathbf{s}^* is the a priori (or reference) slowness model, and ε^2 the damping parameter which defines the amount of regularization that is chosen in the model construction.

Fig. 11 (Continued)



The L curve (Hansen 1998) is used for this purpose. On occasions, the regularization term might adopt the form of a discrete difference operator in order to penalize the roughness of the solution (Pratt and Chapman 1992). Also, L_1 norms might be adopted (Scales and Gersztenkorn 1988) to look for sharp solutions and to minimize the effect of data outliers.

In any case, an initial model, \mathbf{s}^0 , and a reference model, \mathbf{s}^* , which might depend on the anisotropic parameters $(\lambda, \alpha, V_{\max})$, should be given by the modeler to the inversion algorithm. Then, the inversion program will provide a result, a pixel model \mathbf{s} with anisotropic parameters varying in each cell, which should not differ too much (depending on the regularization parameter ε^2) from the macroscopic reference model, \mathbf{s}^* . Usually, the initial guess, \mathbf{s}^* , is homogeneous and isotropic, and prior information rarely exists about the kind of anisotropic model the inversion program is looking for. Also, minimum norm solutions (null \mathbf{s}^*) are not always the more realistic ones. Finally, with no regularization term, data errors do strongly affect the to-

mographic inverse problem because it is clearly underdetermined (or of mixed type), depending on the pixel mesh. Thus, it is easy to conclude that, for the same level of data noise, the MTC identification problem is always more stable than the tomographic inverse problem.

MTC analysis uses a linear approximation of raypaths and can be classified as a linear tomography method. The aim of the anisotropic MTC analysis is not to compete with inversion codes, but to complement the approach (if needed) to provide additional model information that the inversion codes need. That is the “best” anisotropic velocity model, valid at an experimental scale, which best fits the travel-time statistical distribution. Finally, the MTC philosophy is based on inspecting data variability at the pre-inversion stage, and it is the modeler’s decision to use (or not) the knowledge issued from the MTC analysis to provide additional constraints for the regularized tomographic inverse problem.

6 Case Study: Application to the Grimsel Test Site

In this section, we show an application of the mean traveltime curves analysis to a data set which comes from an area with granitic geology: the Grimsel test site-field 1 (NAGRA, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste). The geometry of the survey is approximately rectangular, bounded by two boreholes (B1 and B2) and an access tunnel. The dimensions are approximately $70 \times 150 \text{ m}^2$. The data have been acquired in three sequences (Fig. 12):

Data set	Source	Receiver	Number of sources	Number of receivers
1	B1	B2	58	60
2	Tunnel	B2	28	60
3	Tunnel	B1	28	59

Fig. 12 Grimsel test site (field 1) acquisition geometry: the survey is composed of three different recording geometries, providing three traveltime sets. The distance between adjacent sources and receivers is approximately 2.5 meters in all the cases. Shape of the experimental mean traveltime curves for data sets 2 and 3 is also influenced by tunnel topography irregularities

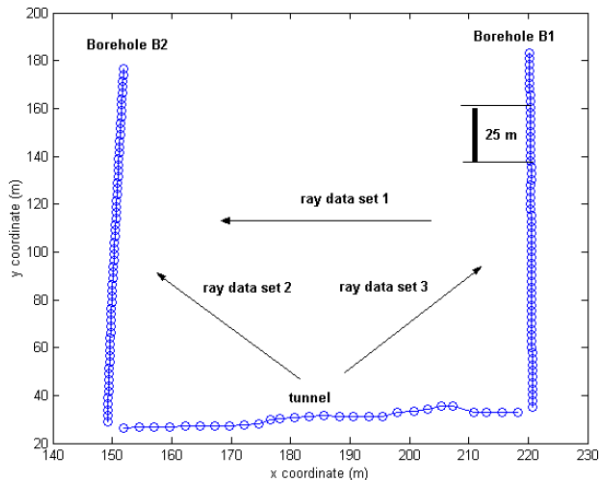


Table 1 Data set 1. Results of the anisotropic mean travelttime analysis in the L^2 norm. Degrees are measured from the east counter-clockwise

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{\max}	5.26 km/s	6.44 km/s	5.24 km/s	5.54 km/s
λ	0.97	0.88	0.97	0.96
α	56°	6°	30°	27°

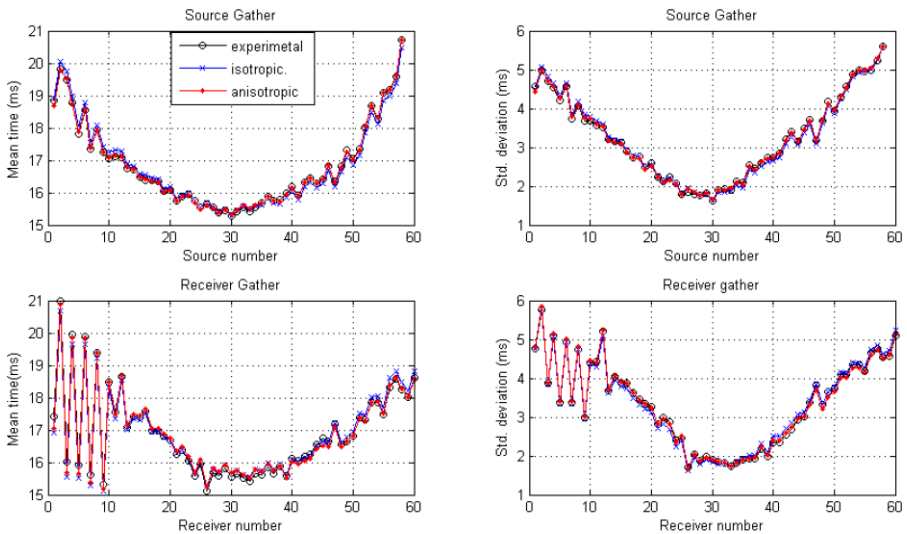


Fig. 13 Mean travelttime curves for data set 1: experimental, isotropic MTC, and anisotropic MTC

The distance between adjacent sources or receivers is approximately 2.5 meters. This data set was also analyzed in Fernández Martínez et al. (2006) to illustrate the isotropic MTC analysis. The conclusion was that this data set was contaminated by a level of at least 6% of non-Gaussian errors.

Data set 1 Table 1 shows the results of this analysis for data set 1 using the Euclidean norm. Results are very coherent in the mean time curve: $V_{\max} = 5.26$ km/s, $\lambda = 0.97$, $\alpha = E30^\circ - 56^\circ N$. The standard deviation curve shows in the source gather a high velocity anomaly and the degradation of the anisotropic ratio. Also, the direction of anisotropy does not coincide with the direction deduced from the mean curves. Figure 13 shows the results of the isotropic and anisotropic MTC analysis. The results are very similar; nevertheless, the anisotropic curves fit better the experimental mean travelttime curves than the isotropic counterparts. Finally, Table 2 shows the anisotropic parameters found using the L^1 norm. It can be observed that results do coincide with those shown in Table 1.

Data set 2 Figure 14 shows the comparison between the isotropic and anisotropic curves. Table 3 shows the results obtained for data set 2 using the L^2 norm, and Table 4 using the L^1 norm. It can be observed that, while the mean source gather curve

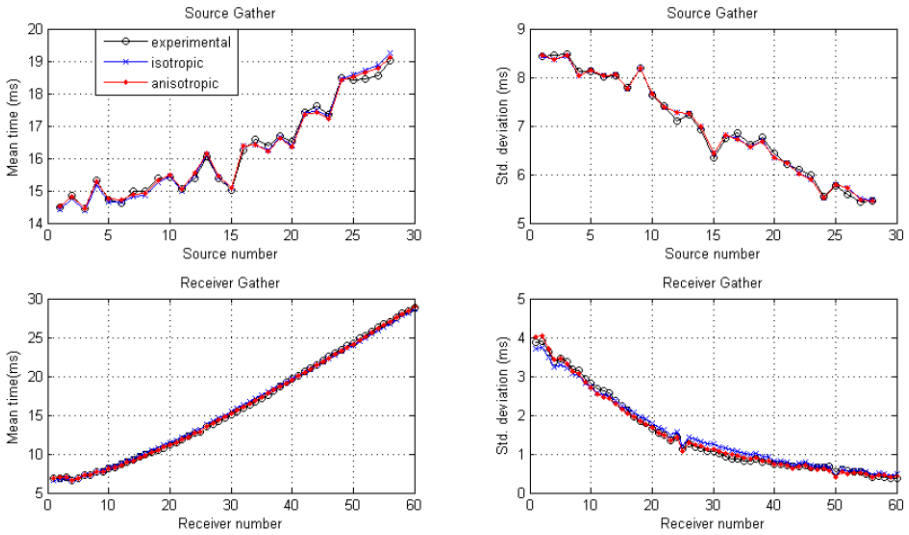


Fig. 14 Mean traveltime curves for data set 2: experimental, isotropic MTC, and anisotropic MTC

Table 2 Data set 1. Results of the anisotropic mean traveltime analysis in the L^1 norm

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{max}	5.27 km/s	6.19 km/s	5.26 km/s	5.79 km/s
λ	0.97	0.90	0.97	0.94
α	55°	7°	28°	16°

Table 3 Data set 2. Results of the anisotropic mean traveltime analysis in the L^2 norm

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{max}	5.4 km/s	5.16 km/s	5.43 km/s	5.14 km/s
λ	0.97	1.0	0.90	0.91
α	0°	–	44°	0°

Table 4 Data set 2. Results of the anisotropic mean traveltime analysis in the L^1 norm

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{max}	5.53 km/s	5.18 km/s	5.42 km/s	5.18 km/s
λ	0.95	1.0	0.90	0.90
α	162°	–	44°	0°

shows a geological medium close to the isotropic behavior, the receiver gather mean shows a very anomalous anisotropic ratio. An identical behavior can be observed for the standard deviation curve in the receiver domain with the anisotropic direction biased towards 0° . Both features mean that this data set is affected by an important level of measurement noise.

Data set 3 Tables 5 and 6 show the results obtained for data set 3, using the L^2 and L^1 norms. Analysis of the mean curves gives the following result: $V_{\max} = 5.30\text{--}5.35$ km/s, $\lambda = 0.94\text{--}0.97$, $\alpha = E84^\circ\text{--}118^\circ N$, which is close to the north–south direction. Also, the standard deviation curve shows in the receiver gather degradation of the anisotropic ratio and a bias of the anisotropic direction towards 180° . Figure 15

Table 5 Data set 3. Results of the anisotropic mean traveltime analysis in the L^2 norm

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{\max}	5.31 km/s	5.63 km/s	5.35 km/s	5.24 km/s
λ	0.94	0.95	0.97	0.89
α	84°	180°	118°	164°

Table 6 Data set 3. Results of the anisotropic mean traveltime analysis in the L^1 norm

	Mean SG	Std. SG	Mean RG	Std. RG
V_{\max}	5.32 km/s	5.51 km/s	5.35 km/s	5.28 km/s
λ	0.96	0.97	0.97	0.92
α	102°	180°	118°	159°

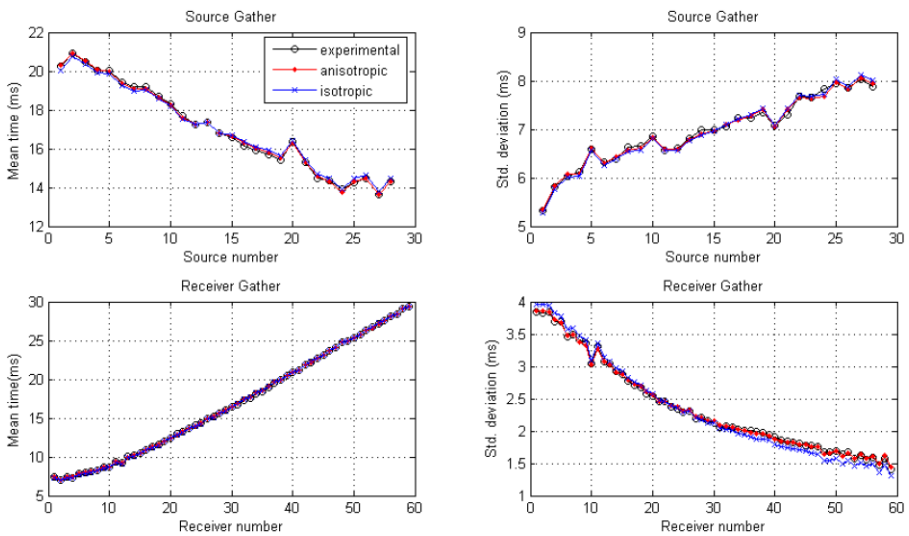


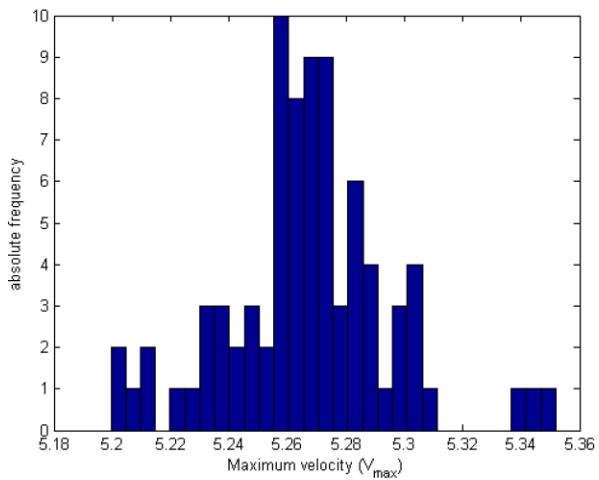
Fig. 15 Mean traveltime curves for data set 3: experimental, isotropic MTC, and anisotropic MTC

shows the comparison of both types of curves. Notice that the fitting is clearly better when anisotropy is considered.

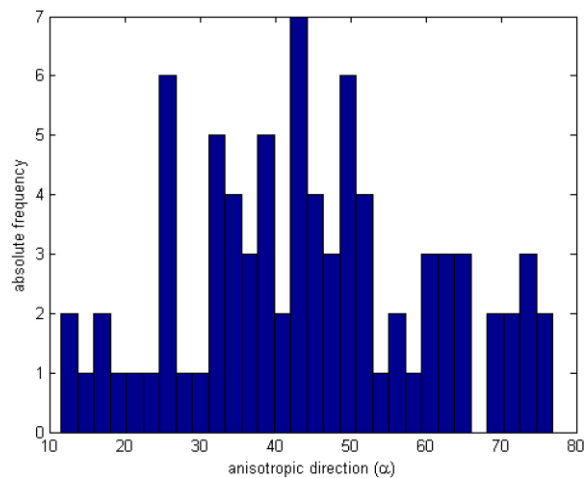
6.1 Posterior Analysis

As a general conclusion, the mean curve is less prone to errors than the standard deviation curve. Taking advantage of the global nature of the particle swarm optimization algorithm, it is possible to generate histograms of the anisotropic parameters for the models that fit the empirical mean traveltimes within a given tolerance (equivalent models). Figure 16 shows the histogram of the anisotropic model parameters deduced from the mean traveltimes curve fit in the source gather for ray data set 1, which is less affected by measurement noise. The direction (Fig. 16(b)) and ratio

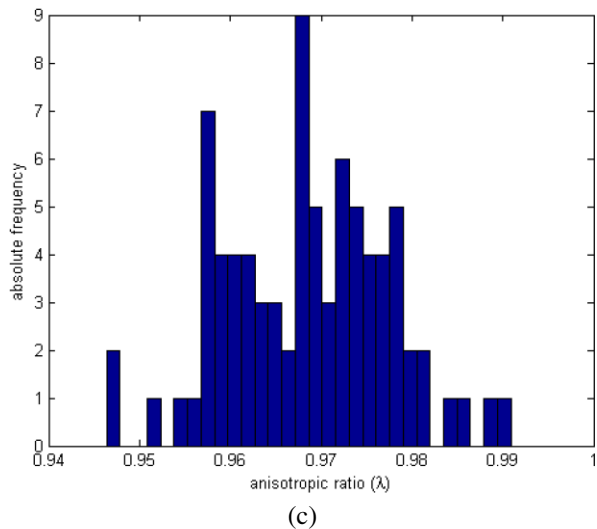
Fig. 16 Ray data set 1. Histograms of the anisotropic parameters for the models that fit the empirical mean traveltimes curves within a given tolerance



(a)



(b)

Fig. 16 (Continued)

of anisotropy (Fig. 16(c)) are the parameters which show the biggest dispersion. The maximum velocity (Fig. 16(a)) is quite well resolved. These conclusions are in agreement with those shown in the sensibility analysis section. Finally, the modes of the histograms are close to those shown in Table 1 for the mean curve.

7 Conclusions

In the present work we have presented the mathematical deduction and analysis of mean traveltime curves in elliptical anisotropic media. The fitting of the empirical traveltime curves provides us with a new simple method to estimate the model of elliptical anisotropy from traveltime data before the inversion. In the case of rectangular recording geometries, simple visual inspection of the minimum mean traveltime shift with respect to the middle of the gather line provide to the geophysicist the direction of anisotropy (NE or NW). Sensitivity analysis to measurement noise shows that maximum velocity, V_{\max} , is the most robust parameter in the identification. The presence of data errors motivates very anomalous anisotropic ratios and wrong directions of anisotropy biased towards 0° . The direction of anisotropy is the parameter which shows the biggest interval for equivalent solutions in the range of weak anisotropy. Application of this methodology to the Grimsel data set provides very coherent results from the mean time curves, and confirms the presence of errors, as deduced from the analysis of the standard deviation curves in data sets 2 and 3. The MTC philosophy is based on inspecting data variability at pre-inversion stage. The knowledge issued from the MTC analysis can be used to provide additional constraints to regularize the transmission tomographic inverse problem.

Acknowledgements We would like to thank NAGRA for the permission to use the Grimsel data set to illustrate this methodology, and Dr. Heidi Kuzma (UC Berkeley) for a constructive review and remarks.

References

- Byun BS, Corrigan D (1990) Seismic travelt ime inversion for transverse isotropy. *Geophysics* 55(2):192–200
- Carlisle A, Dozier G (2001) An off-the-shelf PSO. In: Proceedings of the workshop on particle swarm optimization, Indianapolis, USA
- Carrion P, Costa J, Ferrer-Pinho JE, Schoenberg M (1992) Cross-borehole tomography in anisotropic media. Short note. *Geophysics* 57(9):1194–1198
- Elapavuluri PK (2003) Estimation of Thomsen's anisotropic parameters from geophysical measurements using equivalent offset gathers and shifted-hyperbola NMO equation. MSc thesis, University of Calgary
- Fernández Martínez JL, García Gonzalo E (2008) The generalized PSO: a new door to PSO evolution. *J Artif Evol Appl*. DOI:[10.1155/2008/861275](https://doi.org/10.1155/2008/861275)
- Fernández Martínez JL, Fernández Álvarez JP, Pedruelo González LM (2006) Mean travelt ime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. *Math Geol* 38(3):343–374
- Fernández Martínez JL, Fernández Álvarez JP, Pedruelo González LM (2008) MTCLAB: a MATLAB®-based program for travelt ime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. *Comput Geosci*. doi:[10.1016/j.cageo.2007.03.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2007.03.008)
- Hansen C (1998) Rank deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion. SIAM, monographs of mathematical modelling and computation. SIAM, Philadelphia
- Kennedy J, Eberhart RC (1995) Particle swarm optimization. In: Proceedings of the 1995 IEEE international joint conference on neural networks. IEEE Service Center, Piscataway, NJ, pp 1942–1948
- Pratt RG, Chapman CH (1992) Travelt ime tomography in anisotropic media. *Theory Geophys J Int* 109:1–19
- Scales JA, Gersztenkorn A (1988) Robust methods in inverse theory. *Inverse Probl* 4:1071–1091
- Schoenberg M, Sayers CM (1995) Seismic anisotropy of fracture rock. *Geophysics* 60(1):204–211
- Tarantola A (2005) Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. SIAM, Philadelphia
- Thomsen L (1986) Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51:1954–1966
- Upadhyay SK (2004) Seismic reflection processing. With special reference to anisotropy. Springer, Berlin
- Van der Baan M, Kendall JM (2002) Estimating anisotropy parameters and travelt imes in the τ - p domain. *Geophysics* 67(4):1076–1086
- Vernik L, Liu X (1997) Velocity anisotropy in shales: a petrophysical study. *Geophysics* 62(2):521–532
- Xiao C, Bancroft JC, Brown RJ (2004) Estimation of anisotropy parameters in VTI media. Crewes project, University of Calgary
- Wang Z (2002) Seismic anisotropy in sedimentary rocks. Laboratory data. *Geophysics* 67(5):1423–1440
- Watanabe T, Hirai T, Sassa K (1996) Seismic travelt ime tomography in anisotropic heterogeneous media. *J Appl Geophys* 35:133–143
- Williamson PR, Sams MS, Worthington MH (1993) Crosshole imaging in anisotropic media. *Lead Edge* 12:19–23

ARTÍCULO 4

Robust Mean Traveltime Curves in 2D Transmisión Tomographic Surveys.

Autores:

Juan Luis Fernández Martínez
Luis Mariano Pedruelo González
James Rector

MATHEMATICAL GEOSCIENCES
VOL. 42, No. 4, PP 377-400, doi:10.1007/s11004-010-9272-y.
2009

Resumen Artículo 4

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M. y Rector J. (2009).
Robust Mean Traveltime Curves in 2D Transmisión Tomographic Surveys. Mathematical Geosciences, Vol. 42, Number 4, pp 377-400, doi: 10.1007/s11004-010-9272-y.

En este artículo se presenta la deducción teórica y el análisis de las curvas de tiempos medios robustas para el caso de un medio isótropo o elípticamente anisótropo, explorado mediante una geometría de adquisición de datos bien regular o bien irregular. Estas curvas se implementan en el programa AMTCLAB (Fernández Martínez et al., 2009).

Su desarrollo teórico fue motivado puesto que el análisis de sensibilidad realizado sobre las curvas de tiempos medios en los artículos anteriores mostró dos conclusiones importantes:

1. La curva de medias es menos propensa a errores que la curva de desviación típica, y por lo tanto, más apropiada para identificar la velocidad del medio (Fernández Martínez et al., 2006; Fernández Martínez y Pedruelo González 2008),
2. Los errores en los datos pueden ser malinterpretados como altos valores de anisotropía (Fernández Martínez y Pedruelo González, 2008).

Una alternativa común en la inversión para disminuir el efecto del ruido en los datos es la utilización de la norma L1 (Scales and Gersztenkorn, 1988). El empleo de esta norma está implícitamente relacionado con la distribución de probabilidad exponencial del desajuste en los datos. Este tipo de distribuciones son capaces de ajustar los datos anómalos (outliers) sin modificar drásticamente su centro de masas. Esta idea nos ha conducido a proponer las curvas de tiempos medios robustas que describen los *p*-percentiles y los descriptores de dispersión asociados (rango intercuartílico y la desviación mínima absoluta) de la distribución experimental de tiempos de viaje.

Se comienza el análisis deduciendo la expresión teórica de dichas curvas para el caso de un medio homogéneo e isótropo explorado mediante un dispositivo de adquisición rectangular (figura 1). Se deduce la expresión analítica de los siguientes descriptores estadísticos:

***p*-Percentiles**

El *p*-percentil, m_p , de la distribución de tiempos de viaje

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}},$$

se define como $P(t(\xi; x_s) < m_p) = p \in [0,1]$, donde p es la probabilidad correspondiente a m_p . Por ejemplo, a la mediana le corresponde $p = 0.5$, y al cuartil inferior y superior $p = 0.25$ y $p = 0.75$ respectivamente. Dicho descriptor se compone de tres tramos:

1. $0 < x_s < \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL - x_s)^2}{V^2}}$
2. $\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL)^2}{4V^2}}$
3. $L - \frac{pL}{2} < x_s < L \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{((p-1)L + x_s)^2}{V^2}}$

Las curvas de p -percentiles son simétricas y poseen un tramo horizontal cuya longitud es $L(1-p)$ y cuyo valor, m_{pc} , está relacionado con la velocidad isótropa V del medio:

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + \left(\frac{pL}{2}\right)^2}}{m_{pc}}.$$

Esta fórmula proporciona un método simple y robusto (resistente a errores) para determinar la velocidad isótropa, V , puesto que utiliza el valor, m_{pc} , que es el tiempo correspondiente a la posición $x_p = x_s + \frac{pL}{2}$, y es el mismo para todos los agrupamientos del intervalo $\left[\frac{pL}{2}, L - \frac{pL}{2}\right]$

Rango Intercuartílico

Teniendo en cuenta la expresión analítica de los p -percentiles, se muestra como la curva IQR también presenta un tramo horizontal de longitud $\frac{L}{4}$ y cuyo valor, iqr_c , está relacionado con la velocidad isótropa mediante la expresión

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + \left(\frac{3L}{8}\right)^2} - \sqrt{A^2 + \left(\frac{L}{8}\right)^2}}{iqr_c}.$$

Esta fórmula puede ser generalizada a cualquier otro rango de percentiles, $[m_{p1}, m_{p2}]$:

$$iqp(x_s) = m_{p_2}(x_s) - m_{p_1}(x_s).$$

La longitud del tramo horizontal es en este caso, $L(1-p_2)$ y el valor constante, iqp_c , está relacionado con la velocidad isotrópica mediante la expresión:

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + \left(\frac{p_2 L}{2}\right)^2} - \sqrt{A^2 + \left(\frac{p_1 L}{2}\right)^2}}{iqp}.$$

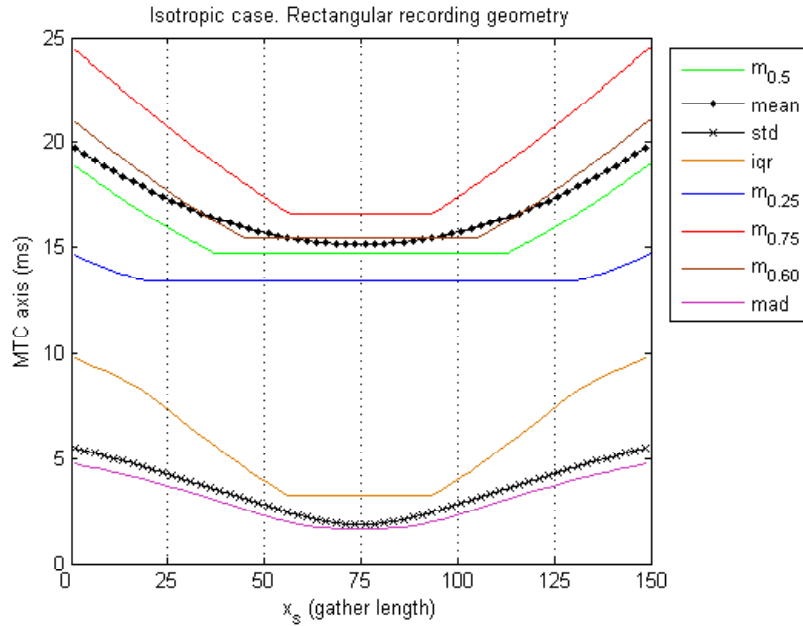


Figura 1: Mediana, cuartil inferior y superior, rango intercuartílico y desviación mínima absoluta para un medio homogéneo isotrópico explorado con una configuración de grabación rectangular ($L = 140 \text{ m}$, $V = 5.4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ y $A = 70 \text{ m}$).

Desviación Mínima Absoluta

Definida como

$$mad(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^L |t(\xi; x_s) - m_{1/2}(x_s)| d\xi,$$

estas integrales pueden ser calculadas analíticamente y puestas en la relación con el percentil, m_p , y los valores de las medias de los tiempos, calculados en ciertos intervalos de agrupamientos, $[a, b]$. Al igual que la curva de p -percentiles, la curva de desviación mínima absoluta se define por tramos. No obstante la curva MAD no posee un tramo horizontal, sino que posee un mínimo en el punto medio de la línea de agrupamientos (en el caso isotrópico). También, esta curva tiene dos puntos de inflexión localizados en $\frac{pL}{2}$ y $L - \frac{pL}{2}$ respectivamente.

Las relaciones anteriores fueron generalizadas a un medio isótropo explorado con un dispositivo de geometría irregular. Las expresiones analíticas son similares a las del caso rectangular utilizando las correspondientes variables del dispositivo.

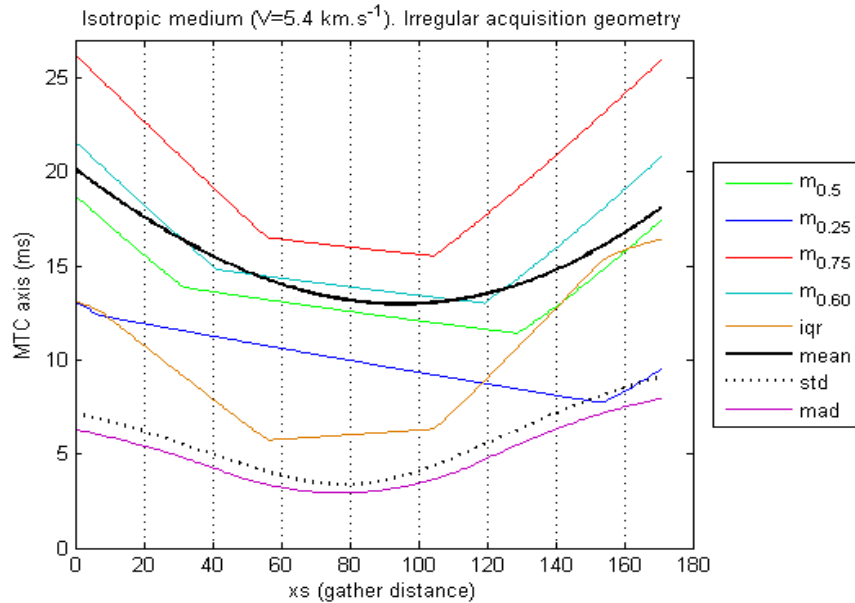


Figura 2: Curvas Robustas de tiempos medios comparadas con las curvas de medias y desviaciones típicas.

La figura 2 muestra las curvas robustas de tiempos medios que se obtienen para este caso. La configuración irregular provoca la asimetría de estas curvas. El tramo rectilíneo pierde su horizontalidad, puesto que el *p-percentil* depende de la posición donde se realiza el agrupamiento.

Para el caso de medios anisótropos se generalizan las expresiones de todas las curvas robustas que dependen obviamente de los parámetros de la anisotropía. Por ejemplo se observa que las curvas de *p-percentiles* conservan el tramo horizontal, siendo su longitud la misma que en el caso isótropo, pero desplazado una distancia

$$\frac{b}{2a} = \frac{A(\lambda^2 - 1) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}$$

y desviaciones típicas en medios anisótropos (Fernández Martínez y Pedruelo González, 2008). Asimismo el valor del percentil en el tramo llano está relacionado con los parámetros de anisotropía.

Si el dispositivo de adquisición es irregular las fórmulas son similares al caso isótropo irregular y al caso anisótropo regular, pero en este caso las curvas combinan ambos efectos al mismo tiempo. La figura 3 muestra la comparación de las curvas robustas de tiempos medios para un medio anisótropo con

$$V_{\max} = 5.4 \text{ km/s}, \alpha = 45^\circ (N45^\circ E), \text{ y } \lambda = 0.95.$$

Se puede observar el parecido entre las curvas mostradas en las figuras 2 y 3(b).

Se analiza la influencia de los parámetros anisótropos sobre la forma de dichas curvas. El ratio y la dirección de anisotropía provocan traslaciones en las curvas de *p*-percentiles, aumentando su valor según el ratio disminuye, a la vez que se hacen más asimétricas, pudiendo incluso desaparecer alguna de sus ramas. Si el parámetro V_{\max} , aumenta, los valores de las curvas de *p*-percentiles disminuyen. Señalar que las curvas de cuartiles son más sensibles a los efectos de anisotropía que las curvas IQR y MAD, por lo cual serán preferibles en la identificación de los parámetros de anisotropía.

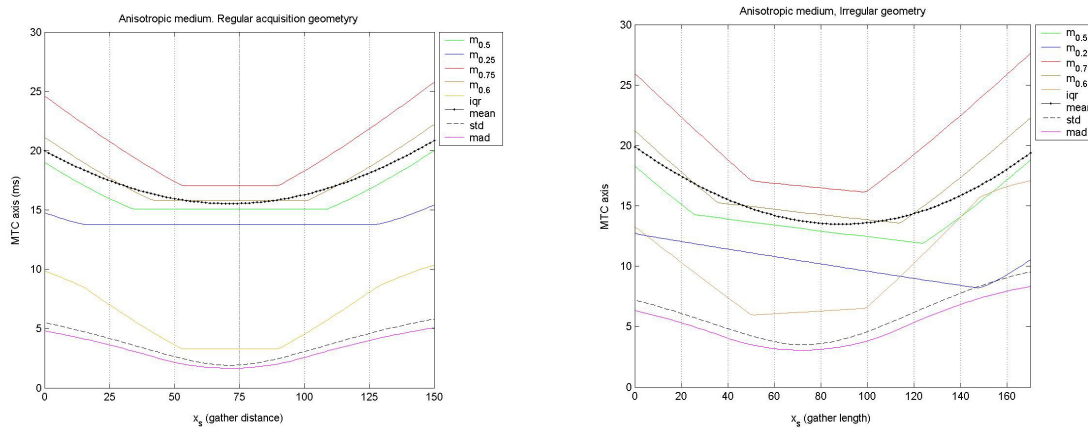


Figura 3: (a) Curvas robustas de tiempos medios para un medio anisótropo con $V_{\max}=5.4$ km/s, $\alpha=45^\circ(N45^\circ E)$ y $\lambda=0.95$. (b) Curvas Robustas para un medio con la misma anisotropía y dispositivo que en la figura 2.

También se estudia el efecto de anomalías geológicas (zonas de bajas y altas velocidades) en la forma de las curvas robustas. Las curvas donde mejor se aprecia el efecto de estas anomalías son las correspondientes a los cuartiles inferiores y a las medianas. En el extremo opuesto se encuentran las curvas de IQR que aunque también detectan dichas anomalías, el efecto es mucho más complicado de analizar, induciendo dos tramos horizontales diferentes, que dificultan una interpretación clara de la anomalía. El efecto que produce sobre las curvas de medias y cuartiles superiores es muy sutil.

Para inferir los parámetros de anisotropía (V_{\max} , α , λ) a partir de las curvas de tiempos medios experimentales se utiliza el algoritmo PSO. como ya se ha relatado en el artículo 3.

Se analiza el efecto que produce el ruido (en los datos) en la identificación de los parámetros de la anisotropía. Las principales conclusiones a las que se llegó fueron:

- V_{\max} es el parámetro de isotropía que mejor se identifica.

- El ratio de anisotropía tiende a ser subestimado (niveles altos de anisotropía), siendo muy mal estimado si el nivel de ruido es superior al 10%.
- La identificación de la dirección de anisotropía, mediante la curva de cuartiles superiores, resulta fiable incluso para niveles de ruido altos. Este resultado es, si cabe, aún más importante si tenemos en cuenta la dificultad de identificar este parámetro mediante otras curvas. Esta fiabilidad puede ser explicada analizando la topografía de la superficie de desajuste como una función de λ y α , asumiendo que V_{max} está bien identificada. La región de modelos equivalentes es reducida y está bien identificada para la curva mediana y cuartil superior, mientras para el resto de descriptores estadísticos (cuartil inferior, IQR y MAD) esta región se hace más amplia e incluso en algunos casos presentan un valle central alargado paralelo al eje λ . Este valle se deforma progresivamente según el nivel de ruido se incrementa, convirtiéndose en una zona ancha y llana donde todas las direcciones proporcionan un buen ajuste para cierto rango de ratios de anisotropía, y por lo tanto dificultando la identificación de los modelos de anisotropía para estas curvas.

Finalmente se presenta, como caso de estudio, la aplicación de esta metodología al conjunto de datos Grimsel. La tabla 1 muestra los resultados obtenidos

	Media	Desviación Típica	Median	Cuartil Superior	Cuartil Inferior	IQR	MAD
V_{max} (km/s)	5.28	5.64	5.37	5.25	5.21	6.37	5.76
λ	0.97	0.95	0.95	0.97	0.92	0.89	0.94
α	61°	13°	65°	72°	13°	0°	8°

Tabla 1 Conjunto de datos 1 del macizo Grimsel. Parámetros de anisotropía deducidos mediante un análisis de MTC robustas en fuente común (los grados se miden desde el Este en sentido antihorario).

Recientemente esta metodología ha sido aplicada para analizar la anisotropía de un macizo rocoso, situado en Francia, estudiado mediante GPR (Ground Penetrating Radar) (Fernández Martínez et al., 2009b) y datos VSP.

En la actualidad se tiene ya desarrollado este análisis para los casos más generales en tres dimensiones, estando preparada su próxima publicación. Esto nos permitirá afinar aún más en nuestros ajustes y avanzar un paso más en nuestros objetivos.

Robust Mean Traveltime Curves in 2D Transmission Tomographic Surveys

Juan L. Fernández Martínez ·
Luis M. Pedruelo González · James W. Rector

Received: 22 October 2009 / Accepted: 4 February 2010 / Published online: 12 March 2010
© The Author(s) 2010. This article is published with open access at Springerlink.com

Abstract Acoustic tomography methods belong to the class of nondestructive inspection techniques and are used in engineering applications. One of the main issues for these methods is the direct arrival, which can be noisy or can be affected by scattering or other propagation effects. In this paper, we present the mathematical deduction and analysis of the so-called robust mean traveltime curves—the median, p -percentiles, inter-quartile range and minimum absolute deviation—for homogeneous isotropic or elliptical anisotropic media. Robust mean traveltime curves are a simple model used to describe the variation of the traveltime statistical descriptors for the different gathering subsets as a function of a gather index, and generalize the mean traveltime curves introduced in the past to the case of robust statistics. These curves admit analytical expression for zonal isotropic and elliptical anisotropic media explored via rectangular or irregular acquisition geometries, and thus, apply to 2D acoustic transmission tomography experiments conducted in relatively homogeneous blocks. The robust mean traveltime curves are more resistant to the presence of outliers, and thus they are preferred to infer background velocity models which can be taken into account in the resolution of the tomographic inverse problem. The property of robust descriptors to find blocky solutions in presence of velocity heterogeneities is also illustrated. Finally, we show the application of this methodology to a granitic medium (Febex Project, Nagra, Switzerland).

J.L. Fernández Martínez (✉) · L.M. Pedruelo González
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, C/Calvo Sotelo, 33007 Oviedo, Spain
e-mail: jlfm@uniovi.es

J.L. Fernández Martínez · J.W. Rector
Department of Civil and Environmental Eng., UC-Berkeley, Berkeley, CA 94720-1710, USA

J.L. Fernández Martínez
Department of Energy Resources Eng., Stanford University, Stanford, CA 94305-2220, USA

Keywords Inverse problems · Transmission tomography · Mean traveltimes curves · Robust fitting

1 Introduction

Tomographic inversion techniques have been widely used in very different geological engineering applications, and consist of iteratively finding the velocity field of a geological medium that better fits the traveltimes data acquired from their boundaries. Different numerical methods have been reported in the literature to solve the transmission tomographic inverse problem, including biomedical reconstruction techniques (Gordon 1974; Dines and Lytle 1979; Ivansson 1986), conjugate gradient methods (Scales 1987), and least-squares algorithms (Berryman 1991). Since the tomographic inverse problem is ill-posed, it is crucial to have methodologies to analyze the traveltimes quality on hand in order to identify and filter possible errors, and to infer prior velocity information to win stability at inversion. The Mean Traveltimes Curves (MTC) is a simple methodology that has been designed to accomplish this task by analyzing the data variability the source and receiver gathers at the preinversion stage. These curves describe the variation of the main statistical descriptors (mean and standard deviation) of the experimental traveltimes for the different gathering subsets as a function of their gather index (Fernández-Martínez et al. 2006). The theoretical mean traveltimes curves assume that the geological medium can be divided into homogeneous layers, either isotropic or elliptical anisotropic (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008). Least-squares fitting of the empirical traveltimes curves using the theoretical models allows the inference of background velocity models valid at experiment scale, which can be taken incorporated in the resolution of the inverse problem as regularization term. In the case of elliptical anisotropic media, the mean traveltimes curves are a simple method to infer the anisotropic parameters from traveltimes data at preinversion stage (Fernández-Martínez et al. 2009a).

These curves can also be useful in the detection of outliers. Since our first paper devoted to this subject, we have shown that different kind of data errors have different signatures that can be used to discriminate them from geological heterogeneities (Fernández-Martínez et al. 2006). Also, sensibility analysis performed on these curves showed two important conclusions: (i) the mean curve is less prone to errors than the standard deviation curve, and thus is more suitable for velocity identification (Fernández-Martínez et al. 2006; Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008); and (ii) data errors can be misinterpreted as high anomalous values of anisotropy (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008). A common alternative in inversion to diminish the effect of the data errors is to make use of the L1 norm (Scales and Gersztenkorn 1988). The use of this norm is implicitly related to long-tail probability distribution (exponential) for the misfit error. These kinds of distributions are able to anticipate outliers without drastically modifying its center of mass. This idea has led us to propose the robust mean traveltimes curves that describe the p -percentiles and the associated dispersion descriptors (inter-quartile range and minimum absolute deviation) of the experimental traveltimes distribution.

In this paper, we present the theoretical deduction and analysis of the robust mean traveltimes curves for the case of a layered isotropic or elliptical anisotropic media explored via any arbitrary recording geometry. As mentioned above, these statistical measures belong to the category of robust statistics, since they are less sensible to the presence of outliers than the classical descriptors (mean and standard deviation). These curves have already been implemented in AMTCLAB (Fernández-Martínez et al. 2009a). We show how the anisotropy of the geological medium and the irregularity of the recording geometry affect the shape of these curves. Sensitivity analysis to data errors and different geological heterogeneities is also performed by means of synthetic cases. As the main conclusion we find that the mean, median, and upper-quartile curves are less prone to errors than the mean curve. Similar conclusions are also reached by the application of this methodology to the Grimsel data set. This methodology has also been recently applied to analyze the anisotropy of a rock massif in France studied by GPR (Ground Penetrating Radar) transmission data (Fernández-Martínez et al. 2009b).

2 The Robust Mean Traveltimes Curves in the Isotropic Case

Let Ω be homogeneous and isotropic medium with constant velocity to be studied by transmission tomography. Let us also assume that we have two lines of sources and receivers located on the boundary of Ω . Gathering subsets can be defined grouping together traveltimes arriving to each receiver (common receiver gathering) and those emitted from each source. Mean traveltimes curves describe analytically the variation of the main statistical parameters (mean and standard deviation) of the different gathering subsets as a function of the gather distance (Fernández-Martínez et al. 2006). Robust mean traveltimes curves refer to the variation of the different p -percentiles and related measures of dispersion (inter-quartile range and minimum absolute deviation) for the above mentioned gathering subsets. It will be shown that these measures are more robust in presence of data errors.

2.1 The Rectangular Recording Geometry Case

Let Ω be a homogeneous isotropic domain explored by means of a rectangular recording geometry (sources and receivers placed along two parallel boreholes) as shown in Fig. 1(a). Seismic rays follow straight lines. Due to the isotropy and homogeneity, the traveltimes distributions in each source gather, x_s , follow the hyperbolic law

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}},$$

where ξ describes the receiver positions with respect to the gather origin, V is the constant velocity of the medium, and t_0 is the minimum traveltimes in the gathering, which remains the same for all gathers due to the rectangular acquisition geometry.

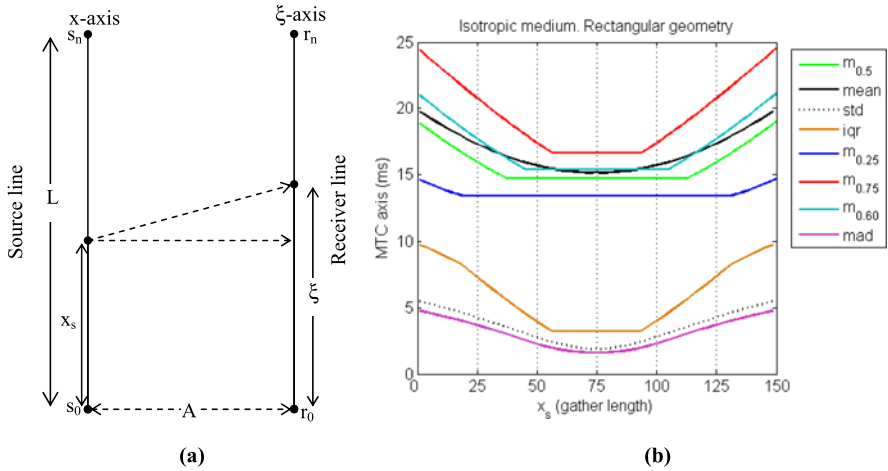


Fig. 1 (a) Rectangular recording geometry and variables involved in the mean travelttime curve analysis. (b) Robust MTC curves in relation to the mean and standard deviation curves

The following statistical descriptors of the travelttime distribution for different gathering subsets are of interest:

2.1.1 *p*-Percentiles

The *p*-percentile, m_p , of the travelttime distribution,

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}},$$

is implicitly defined as

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = p \in [0, 1],$$

where p is the probability threshold corresponding to m_p . For instance, the median corresponds to $p = 0.5$, and the lower and upper percentiles to $p = 0.25$ and $p = 0.75$.

Considering that the spatial variable ξ is distributed uniformly on the borehole length, $L(\xi \rightarrow U(0, L))$, this probability can be calculated as follows

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{L} dx,$$

where

$$x_1 = \max\left\{0, x_s - \sqrt{(m_p^2 - t_0^2) \cdot V}\right\},$$

$$x_2 = \min\left\{L, x_s + \sqrt{(m_p^2 - t_0^2) \cdot V}\right\}.$$

In this calculation, three cases arise

Case 1.

$$0 < x_s < \frac{pL}{2} \implies m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL - x_s)^2}{V^2}},$$

Case 2.

$$\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \implies m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL)^2}{4V^2}},$$

Case 3.

$$L - \frac{pL}{2} < x_s < L \implies m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{((p - 1)L + x_s)^2}{V^2}}.$$

As a main conclusion, the p -percentile curves are symmetric with respect to the middle of the gather line, $x_s = \frac{L}{2}$, and have a sill interval whose length is $L(1 - p)$ of constant value, m_{pc} , which is related to the isotropic velocity

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (\frac{pL}{2})^2}}{m_{pc}}.$$

This formula provides a simple and robust method (resistant to outliers) to determine the isotropic velocity, V , since it uses the p -percentile sill value, m_{pc} , which is the traveltim at position $x_p = x_s + \frac{pL}{2}$, and is the same for all the gathers on the interval $[\frac{pL}{2}, L - \frac{pL}{2}]$.

The median curve, $m_{p=1/2}(x_s)$, is a particular case and provides the trajectory of the center of the traveltim distribution as a function of the gather index, x_s . This curve is a symmetric curve, has a sill whose length is $\frac{L}{2}$, and constant value, $m_{1/2}$, which is related to the isotropic velocity as follows

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (\frac{L}{4})^2}}{m_{1/2}}.$$

2.1.2 The Inter-Quartile Range

The inter-quartile range is the difference

$$\text{iqr}(x_s) = m_{3/4}(x_s) - m_{1/4}(x_s).$$

Taking into account the analytical expression of the p -percentiles, it is easy to show that the inter-quartile range for gather subset, x_s , has the following expression

Case 1.

$$0 < x_s < \frac{L}{8} \implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{3L}{4} - x_s)^2}{V^2}} - \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{L}{4} - x_s)^2}{V^2}},$$

Case 2.

$$\frac{L}{8} < x_s < \frac{3L}{8} \implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{3L}{4} - x_s)^2}{V^2}} - \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{L}{8})^2}{V^2}},$$

Case 3.

$$\frac{3L}{8} < x_s < \frac{5L}{8} \implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{3L}{8})^2}{V^2}} - \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{L}{8})^2}{V^2}},$$

Case 4.

$$\frac{5L}{8} < x_s < \frac{7L}{8} \implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(x_s - \frac{L}{4})^2}{V^2}} - \sqrt{t_0^2 + \frac{(\frac{L}{8})^2}{V^2}},$$

Case 5.

$$\frac{7L}{8} < x_s < L \implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(x_s - \frac{L}{4})^2}{V^2}} - \sqrt{t_0^2 + \frac{(x_s - \frac{3L}{4})^2}{V^2}}.$$

The iqr curve has a sill whose length is $\frac{L}{4}$ and constant value, iqr_c , related to the isotropic velocity as follows

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (\frac{3L}{8})^2} - \sqrt{A^2 + (\frac{L}{8})^2}}{\text{iqr}_c}.$$

This formula can be generalized to any other percentile range, $[m_{p1}, m_{p2}]$, by

$$\text{iqp}(x_s) = m_{p2}(x_s) - m_{p1}(x_s).$$

The sill length is in this case $L(1 - p_2)$, and the corresponding constant value, iqp_c , is related to the isotropic velocity in the following way

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (\frac{p_2L}{2})^2} - \sqrt{A^2 + (\frac{p_1L}{2})^2}}{\text{iqp}_c}.$$

2.1.3 The Minimum Absolute Deviation (mad)

The minimum absolute deviation is

$$\text{mad}(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^L |t(\xi; x_s) - m_{1/2}(x_s)| d\xi,$$

i.e., the mean absolute distance of $t(\xi; x_s)$ to the median, $m_{1/2}(x_s)$, for each source gather, x_s .

The minimum absolute deviation has the following expression

Case 1.

$$0 < x_s < \frac{pL}{2},$$

$$\text{mad}(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^{Lp} (m_p(x_s) - t(\xi; x_s)) d\xi + \frac{1}{L} \int_{Lp}^L (t(\xi; x_s) - m_p(x_s)) d\xi,$$

Case 2.

$$\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{mad}(x_s) &= \frac{1}{L} \int_0^{x_s - \frac{Lp}{2}} (t(\xi; x_s) - m_p(x_s)) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{L} \int_{x_s - \frac{Lp}{2}}^{x_s + \frac{Lp}{2}} (m_p(x_s) - t(\xi; x_s)) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{L} \int_{x_s + \frac{Lp}{2}}^L (t(\xi; x_s) - m_p(x_s)) d\xi, \end{aligned}$$

Case 3.

$$L - \frac{pL}{2} < x_s < L,$$

$$\begin{aligned} \text{mad}(x_s) &= \frac{1}{L} \int_0^{L(1-p)} (t(\xi; x_s) - m_p(x_s)) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{L} \int_{L(1-p)}^L (m_p(x_s) - t(\xi; x_s)) d\xi. \end{aligned}$$

These integrals can be analytically calculated and can be put in relation with the percentile, m_p , and the mean traveltime values, $\bar{t}_{[a,b]}$, calculated over certain gather intervals $[a, b]$ where the percentile function is defined

Case 1.

$$\text{mad}(x_s) = m_p(2p - 1) + \bar{t}_{[0,L]} - 2p\bar{t}_{[0,Lp]},$$

Case 2.

$$\text{mad}(x_s) = m_p(2p - 1) + \bar{t}_{[0,L]} - 2p\bar{t}_{[x_s - \frac{Lp}{2}, x_s + \frac{Lp}{2}]},$$

Case 3.

$$\text{mad}(x_p) = m_p(2p - 1) + \bar{t}_{[0,L]} - 2p\bar{t}_{[L(1-p),L]}.$$

The mad curve does not reach a sill, it is a decreasing–increasing curve with its minimum in the middle of the gather line (in the isotropic case). Also, this curve has

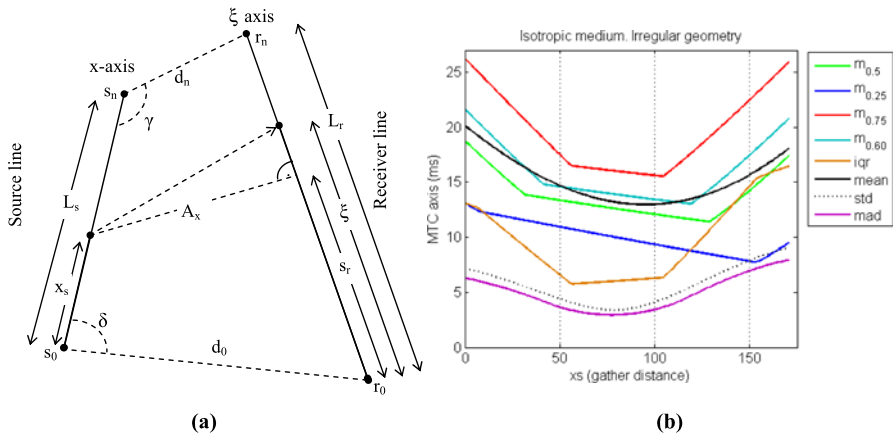


Fig. 2 (a) Parameters in the irregular recording geometry case. (b) Robust MTC curves compared to the mean and standard deviation curves. The medium is in this case isotropic with $V = 5.4$ km/s. The recording geometry parameters are: $d_0 = 66$ m, $d_n = 32$ m, $L_r = 191$ m, and $L_s = 170$ m

two inflexion points located at $\frac{pL}{2}$ and $L - \frac{pL}{2}$, respectively, i.e., the x_s -values where the mad function changes.

Figure 1(b) shows the median, the lower and upper quartile, the inter-quartile range, and the minimum absolute deviation for an isotropic and homogeneous medium explored with a rectangular recording configuration ($L = 140$ m, $V = 5.4$ km s⁻¹ and $A = 70$ m), compared to the mean and standard deviation curves. The mean curve is close to the 0.6 percentile curve in this case, and the standard deviation to the mad curve.

2.2 The Irregular Recording Geometry Case

The above mentioned relationships can be generalized to an isotropic medium explored with an irregular recording geometry. Analytical expressions are identical to those in the rectangular case with the following identifications: $x_s \rightarrow s_r$, $L \rightarrow L_r$, $A \rightarrow A_x$. Calculations depend on recording geometry parameters d_0, d_n, L_r, L_s , where d_0 is the distance between the source in $x = x_0$ and the receiver in $\xi = \xi_0$, d_n is the distance between the source in $x = x_n$ and the receiver in $\xi = \xi_n$, A_x is the distance between the source in $x = x_s$ and the receiver borehole, L_r is the receiver borehole length, and L_s is the source borehole length. Development and deduction of the robust mean traveltimes curves for irregular recording geometries is provided in Appendix A. Figure 2 shows all the variables involved in an irregular recording geometry and the shape of the robust traveltimes curves we get for this case. As it can be observed, the irregular configuration provokes asymmetry of these curves. The sill also becomes a dipping straight line, since the p -percentile depends on the parameter A_x for the gathering position, x_s .

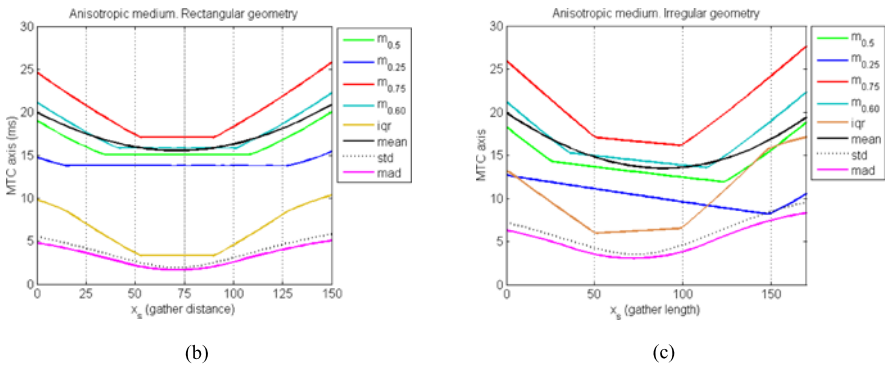
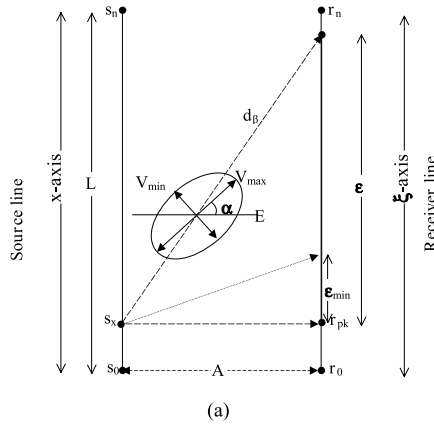


Fig. 3 (a) Parameters in the anisotropic case for a rectangular recording geometry. (b) Robust mean traveltime curves for an anisotropic medium with $V_{max} = 5.4$ km/s, $\lambda = 0.95$, and $\alpha = 45$ ($E45^\circ N$). (c) Robust mean traveltime curves for the same anisotropic medium and an irregular configuration geometry (same as in Fig. 2)

3 The Robust Mean Traveltime Curves in the Anisotropic Case

Fernández-Martínez and Pedruelo-González (2008) generalized the mean traveltime curves for media with an elliptical velocity model explored either with a rectangular or irregular recording geometry (Fig. 3). In this section, we present the robust mean traveltime curves for these two cases.

3.1 The Rectangular Recording Geometry Case

In this case, the traveltime variations in each source gather, x_s , can be described through the following relationship (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008)

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha)(\xi - x_s)^2 + 2A \tan \alpha (\lambda^2 - 1)(\xi - x_s) + A^2(\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha)V_{\max}^2}}$$

By introducing the variables

$$a = \frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha)V_{\max}^2}, \quad b = \frac{2A \tan \alpha (\lambda^2 - 1)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha)V_{\max}^2},$$

$$c = \frac{A^2(\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha)V_{\max}^2},$$

it is straightforward to show that the discriminate of the quadratic expression inside $t(\xi; x_s)$ is always negative

$$\Delta = b^2 - 4ac = -\frac{4A^2}{\lambda^2 V_{\max}^4},$$

and thus the traveltime $t(\xi; x_s)$ is never null.

Reasoning in the same way as in the isotropic case, the p -percentile curve for an elliptical anisotropic medium has the following expressions:

Case 1.

$$0 < x_s < \frac{pL}{2} + \frac{b}{2a} \implies m_p(x_s) = \sqrt{\frac{[2a(x_s - pL) - b]^2 - \Delta}{4a}},$$

Case 2.

$$\frac{pL}{2} + \frac{b}{2a} < x_s < L - \frac{pL}{2} + \frac{b}{2a} \implies m_p(x_s) = \sqrt{\frac{(apL)^2 - \Delta}{4a}},$$

Case 3.

$$L - \frac{pL}{2} + \frac{b}{2a} < x_s < L \implies m_p(x_s) = \sqrt{\frac{[2a((1 - p)L - x_s) + b]^2 - \Delta}{4a}}.$$

The following can be observed: (i) the percentile curves have a sill whose length is the same than in the isotropic case, but which is shifted a distance equal to $\frac{b}{2a} = \frac{A(\lambda^2 - 1) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}$; this effect has already been presented for the mean and the standard deviation curves for anisotropic media (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008), and (ii) the value of the sill, $m_{pc} = \sqrt{\frac{(apL)^2 - \Delta}{4a}}$, is related to the anisotropic parameters.

3.2 The Irregular Recording Geometry Case

The formulas are similar to those developed in the irregular isotropic and rectangular anisotropic cases, but in this case both features act at the same time. A correc-

tion of the anisotropy angle, α , with respect to the A_x direction (Fig. 2(a)) is now needed. Deduction is provided in Appendix B. Figure 3(c) shows the comparison of the robust mean traveltime curves for an anisotropic medium with $V_{\max} = 5.4$ km/s, $\alpha = 45^\circ$ ($N45^\circ E$), and $\lambda = 0.95$, explored through the same irregular recording geometry used in Fig. 2(a). It can be observed that the robust mean traveltime curves shown in this case have similarities to those shown in Figs. 2 and 3(b).

4 Influence of the Anisotropic Parameters on the Robust Mean Traveltime Curves

The influence of the anisotropic parameters on the mean curves is explained via synthetic modeling, considering an elliptical anisotropic medium with maximum velocity 5.4 km/s and anisotropy direction $N30^\circ W$. The recording geometry is rectangular, limited by two parallel boreholes of length $L = 150$ meters, located 70 meters apart (distance A) as shown in Fig. 1(a). Figure 4(a) shows the robust mean traveltime curves for anisotropic ratios, λ , of 0.7 and 0.95. Anisotropy induces a vertical shift of the percentile curves towards higher values as λ decreases; these curves become more asymmetric and may lose one of their branches. Also, horizontal asymptotes may appear in some of the robust MTC curves—inter-quartile range, minimum absolute deviation and standard deviation (Fig. 4(c)). On the other hand, as the parameter λ increases, these curves become more symmetric, tending to the isotropic case. Same conclusions are valid for the mad curve, but the vertical shift with respect to the isotropic counterpart is much lower than for the other robust curves. The upper quartile curve is the most sensible to anisotropy type-effects. The other curves are not very different for parameters in the range of weak anisotropy. For the inter-quartile range curve, anisotropy only provokes a lateral shift, i.e., the sill value is constant for any anisotropic ratio. The effect of the anisotropic direction is a lateral shift of the percentile curve, inducing asymmetry. For a source-left recording configuration, the shift is towards the right of the middle point of the line source (70 meters in this case) if the anisotropy direction is northwest, and towards the left if the anisotropy direction is northeast. The shift is the distance $\frac{b}{2a}$. Finally, increasing V_{\max} lowers the percentile values of the traveltime distribution. These effects are similar to those commented on in Fernández-Martínez and Pedruelo-González (2008) for the mean and the standard deviation curves. Figure 4(b) shows the comparison between the isotropic and anisotropic curves in the range of weak anisotropy ($\lambda = 0.95$). It can be observed that the quartiles are most sensible to anisotropy effects rather than the iqr and mad curves. This result becomes very important for the anisotropic parameter identification.

4.1 The Effect of Geological Heterogeneities

The adjustment of the empirical mean traveltime curves, carried over independently on the different mean traveltime curves (robust and classical descriptors) on each region of analysis, is an identification problem whose results might shed light over the causes of data variability. The degree of agreement between the velocity model

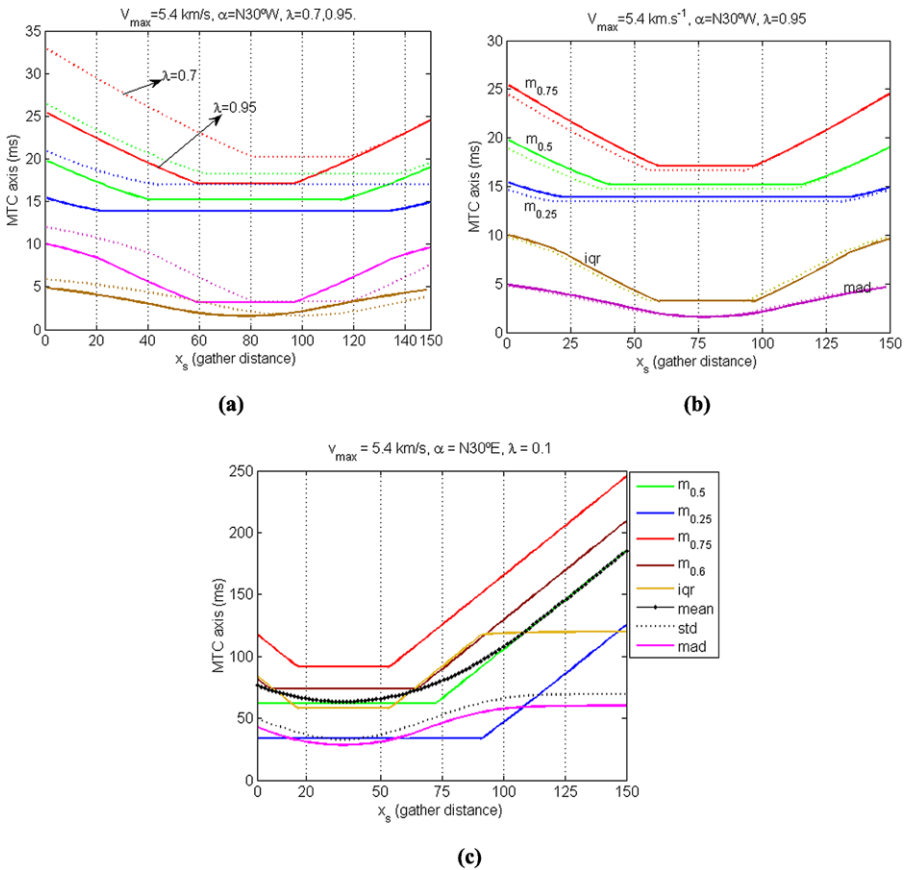


Fig. 4 Rectangular recording geometry case (source left). **(a)** Influence of the anisotropic ratio on the robust mean traveltimes curves. **(b)** Comparison to the isotropic curves for an anisotropic medium with $V_{max} = 5.4 \text{ km/s}$, $\lambda = 0.95$, and $\alpha = 30^\circ$ ($N60^\circ E$). **(c)** Robust mean traveltimes curves for a medium with $V_{max} = 5.4 \text{ km/s}$, $\lambda = 0.1$, and $\alpha = 30^\circ$

estimated from the empirical mean traveltimes curves for the shot and the receiver domains provides criteria that help the analysis and the classification of the sources of data variation. This has been investigated for the classical descriptors (mean and standard deviation curves) in Fernández-Martínez et al. (2006). Figure 5 shows the effect of a fault (low velocity anomaly) or an intrusion (high velocity anomaly) zone on the robust mean traveltimes curves. The effect of these anomalies is better observed on the lower-quartile and median curves, where a pull-up or pull-down effect can be observed. The std and mad curves in these cases show slope breaks on the boundaries of the velocity heterogeneity. The iqr curves also detect these features, but the effect is much more complicated, inducing two different sills which hamper a clear interpretation of this effect. It can be observed that the effect on the mean and upper-quartile curves is very subtle.

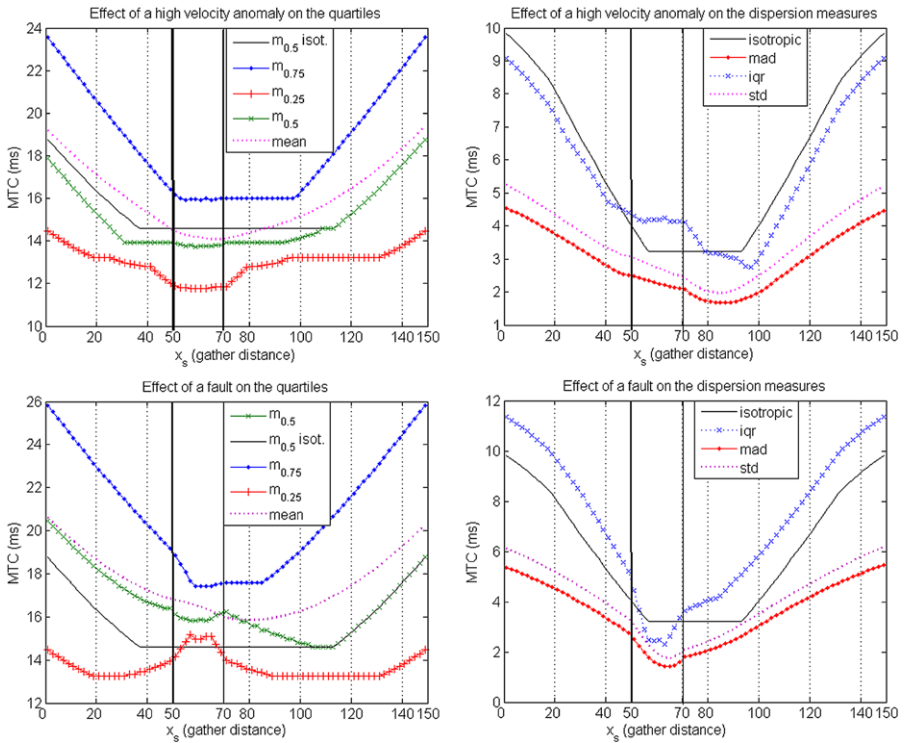


Fig. 5 Effect of an intrusion (high velocity anomaly) and of a fault (low velocity) on the robust mean traveltimes curves. Comparison to the isotropic case and to the mean and standard deviation curves

4.2 Inference of the Anisotropic Velocity Parameters

The anisotropic parameters ($V_{\max}, \alpha, \lambda$) can be inferred from the experimental traveltimes counterparts. The method consists in dividing the domain into fairly homogeneous zones (isotropic or anisotropic), and reducing the misfit between the experimental traveltimes curves and the theoretical predictions in each gather, solving the following optimization problems of the kind (one for each robust mean time curve in the source and receiver gathers)

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \left\| \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \\ m_p \\ \text{mad} \\ \text{iqr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \\ m_p \\ \text{mad} \\ \text{iqr} \end{pmatrix}^* \right\|_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^2,$$

where

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \\ m_p \\ \text{mad} \\ \text{iqr} \end{pmatrix}$$

are the experimental robust mean traveltime curves in the considered gather (source or receiver), and

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_g \\ \sigma_g \\ m_p \\ \text{mad} \\ \text{iqr} \end{pmatrix}^*_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}$$

are the corresponding anisotropic robust MTC theoretical predictions for a certain set of anisotropic parameters.

M is the search space for the anisotropic parameters

$$\begin{aligned} V_l &\leq V_{\max} \leq V_s, \\ -90^\circ &\leq \alpha \leq 90^\circ, \\ 0.8 &\leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Lower and upper bounds for V_{\max} and the zones of analysis can be deduced from prior information or from the analysis of the isotropic mean traveltime curves themselves, as we have shown for the zonal isotropic case (Fernández-Martínez et al. 2006). Due to the small number of parameters to infer and to the presence of equivalent models and local minima, the optimization is accomplished by means of a global optimization algorithm (Fernández-Martínez et al. 2009a). This methodology is valid for homogeneous anisotropic media at the scale of the experiment (anisotropic single-zone MTC analysis), and also for zonal elliptical anisotropic media (anisotropic multi-zone MTC analysis).

4.3 Sensitivity Analysis

To analyze the effect of errors in data in the identification process, we generate a synthetic anisotropic traveltime data set corresponding to a theoretical medium with the following anisotropic parameters ($V_{\max} = 5.4$, $\alpha = 120^\circ$, $\lambda = 0.95$), and times are perturbed by different levels of Gaussian noise. Figure 6 shows the effect of the noise level on the identification of $(V_{\max}, \alpha, \lambda)$ for the main robust mean traveltime curves, both in the source and receiver gather. The following conclusions may be obtained. First, V_{\max} is the anisotropic parameter that is better identified. This parameter was well identified for noise levels under 10% in the mean curve and under 5% in the standard deviation curve (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008). For high levels of noise, the identification becomes inaccurate originating high velocity artifacts. Second, the anisotropic ratio tends to be underestimated (higher levels

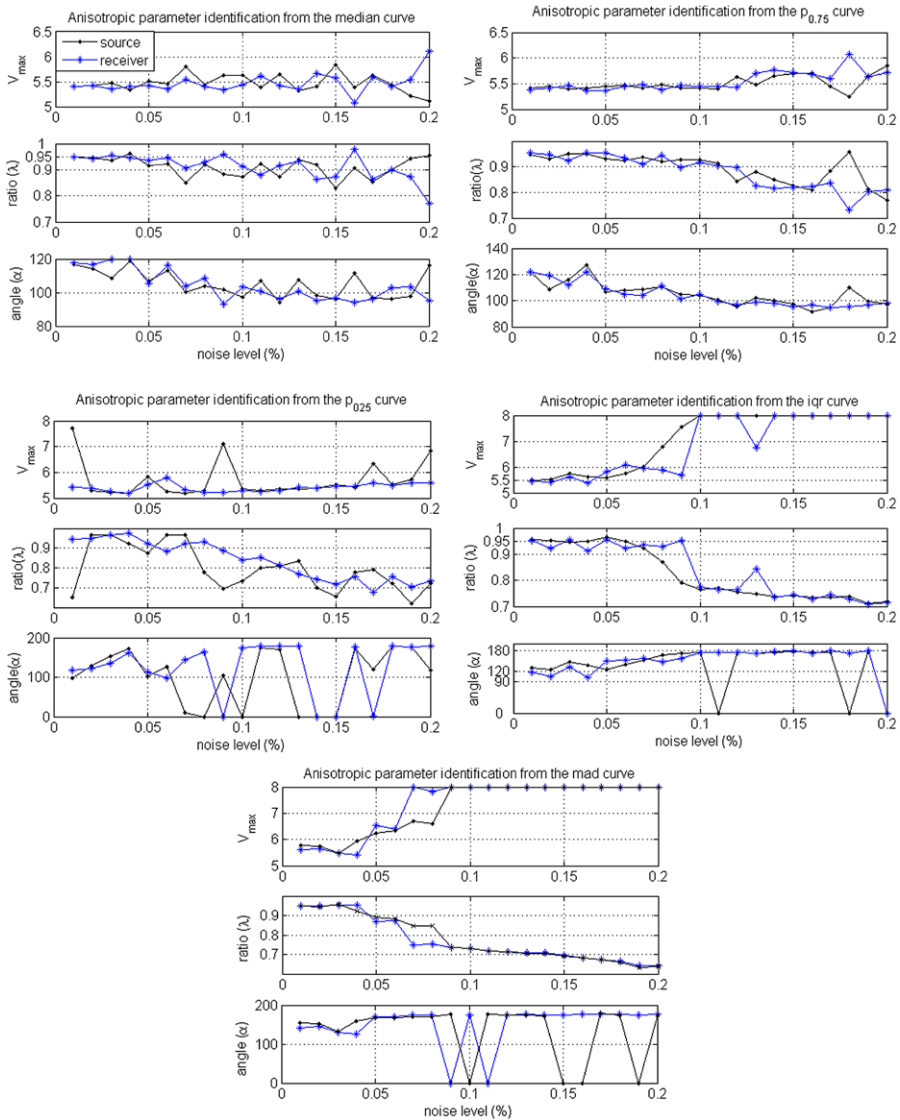


Fig. 6 Effect of the noise on the anisotropic parameter identification for the different robust MTC curves

of anisotropy), and for noise levels higher than 10% there is a clear degradation of this ratio, which is around 0.7. Third, generally speaking, the direction of anisotropy is the parameter that is worst identified. For noise levels higher than 8%, this parameter does present a bias towards 180° (horizontal direction). This behavior is identical in the source and receiver domains. Last, taking into account the above mentioned points, the more robust identification of the anisotropic parameters comes from the median and upper-quartile curves, while the iqr and mad curves are the most sensible to the presence of noise. For instance, the identification of the direction of anisotropy

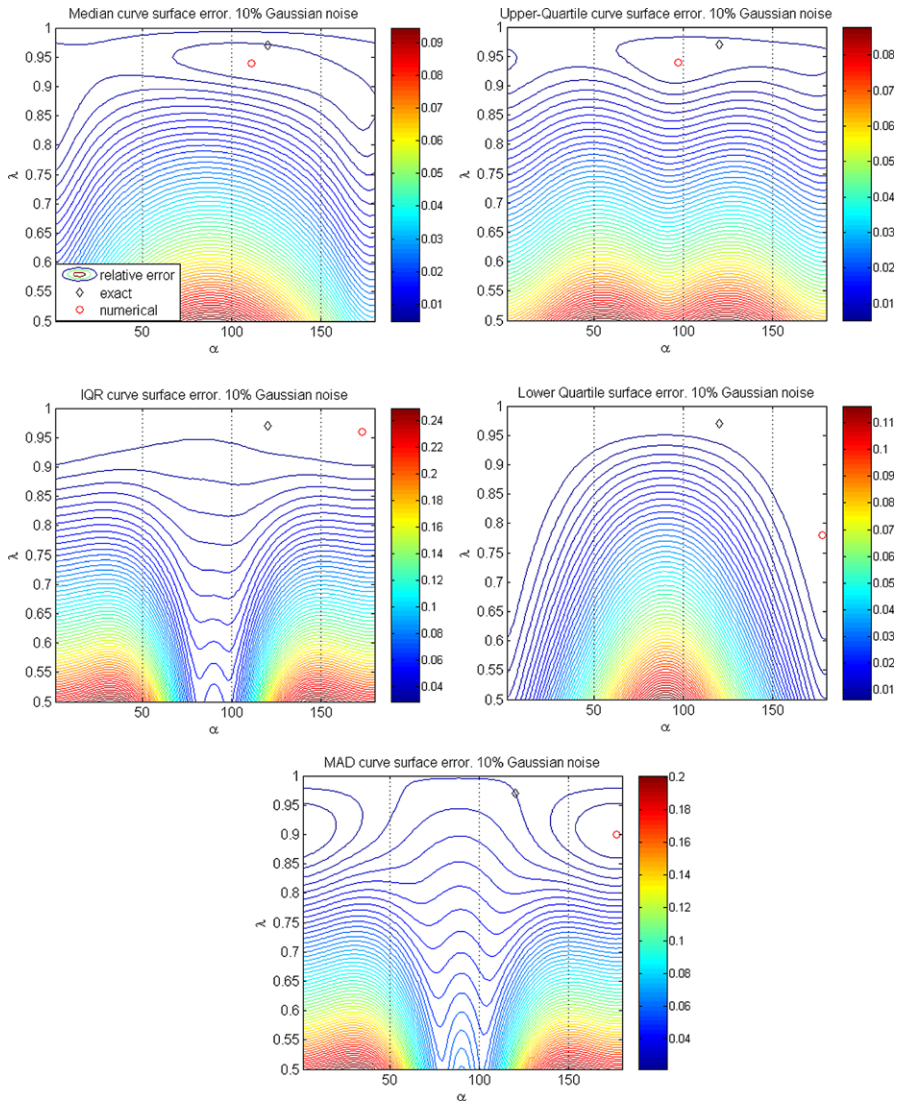


Fig. 7 Effect of the noise on the error surfaces for the different robust MTC curves

from the upper-quartile curve is very robust for very high noise levels. This result is even more important if we take into account the difficulty to identify this parameter from the other curves.

In conclusion, noise makes direction identification ambiguous and biased towards 0 degrees, and generates artifacts in the estimated anisotropy ratios in most of the curves. The median and upper-quartile curves are the most robust descriptors in the presence of noise. These features can be explained analyzing the topography of the misfit surface as a function of λ and α , assuming that V_{\max} is well constrained. Figure 7 shows the shape of the objective function for the median, upper-quartile,

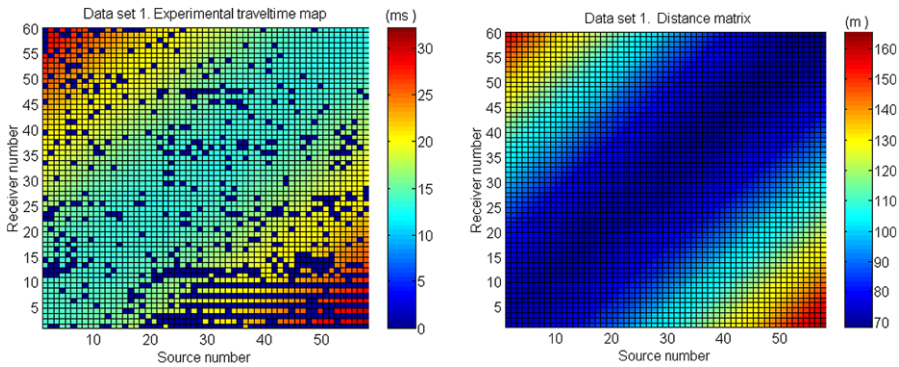


Fig. 8 Experimental traveltime and distance map for the Grimsel data set

lower-quartile and inter-quartile curves for a level of noise of 10%. The region of equivalent models (i.e., the anisotropy sets of parameters which fit equally well the corresponding experimental traveltime curve) is well constrained for the median and upper-quartile curve, whilst for the rest of statistical descriptors (lower quartile, iqr and mad curves) this region becomes broader in size and for some of them presents a central elongated valley parallel to the λ axis. This valley deforms progressively as the level of noise increases, becoming a flat elongated area where all the directions give a good fit for a certain range of anisotropic ratios. Thus, when a high level of errors is present, the identification of anisotropic parameters from the lower quartile, inter-quartile and mad curves might become inaccurate.

5 Study Case: Application to the Grimsel Test Site

In this section, we show an application of the mean traveltime curves analysis to a data set which comes from an area with granitic geology: the Grimsel test site Field 1 (NAGRA, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste).

The geometry of the survey is approximately rectangular, bounded by two boreholes. The dimensions are approximately $70 \times 150 \text{ m}^2$. The numbers of sources and receivers are 58 and 60, and the distance between adjacent sources or receivers is approximately 2.5 meters. The geological and geophysical studies in this granite have been originally undertaken by Gelbke et al. (1989). This data set was also analyzed in Fernández-Martínez et al. (2006, 2008, 2009a) and in Fernández-Martínez and Pedruelo-González (2008), to illustrate the MTC analysis with isotropic and anisotropic assumptions for the velocity model. These authors arrived at the conclusion that this data set was contaminated by a level of approximately 6% of non-Gaussian noise. These authors also inferred the parameters of the acoustic anisotropy, showing via synthetic experiments that errors in data can be misinterpreted as anomalous values of anisotropy (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008).

The aim in this section is not to perform a complete modeling analysis, but to show how the results issued from the analysis of the robust mean traveltime curves match previous results obtained the classical MTC descriptors (Fernández-Martínez and Pedruelo-González 2008). Figure 8 shows the experimental traveltime and the

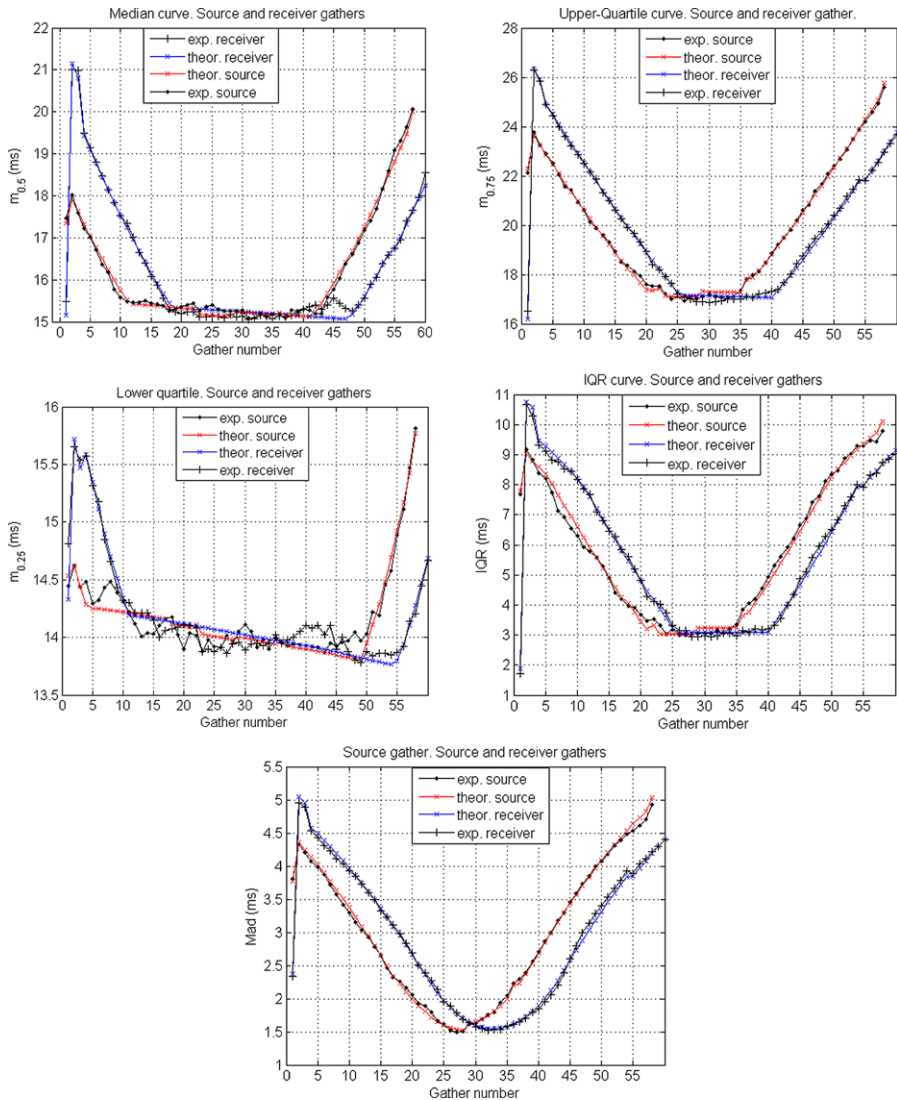


Fig. 9 Experimental and theoretical robust MTC curves for the Grimsel data set (source and receiver gathers). We also show the mean traveltime curve that has been introduced in past publications

acquisition distance maps for this data set. Cells with zero traveltime map indicate pairs of sources and receivers with no available traveltime measurements (mainly receiver gathers 1 to 13) due to acquisition problems. The similarity between both maps indicates behavior close to isotropy and homogeneity. Nevertheless, the experimental traveltime is deformed with respect to the distance map due to the effect of the weak anisotropy. Figure 9 shows the experimental robust mean traveltime curves and their corresponding theoretical models. The corresponding theoretical models are shown in Sect. 3.2. The inference of the anisotropic parameters is developed in Sect. 4.2. It

Table 1 Grimsel data set 1. Source Gather. Anisotropic parameters deduced from the robust MTC analysis (degrees measured from the east counter-clockwise)

	Mean	Std	Median	Upper-quartile	Lower-quartile	iqr	mad
V_{\max} (km/s)	5.28	5.64	5.37	5.25	5.21	6.37	5.76
λ	0.97	0.95	0.95	0.97	0.92	0.89	0.94
α	61°	13°	65°	72°	13°	0°	8°

Table 2 Grimsel data set 1. Receiver Gather. Anisotropic parameters deduced from the robust MTC analysis (degrees measured from the east counter-clockwise)

	Mean	Std	Median	Upper-quartile	Lower-quartile	iqr	mad
V_{\max} (km/s)	5.24	5.56	5.35	5.26	5.21	5.30	5.57
λ	0.97	0.96	0.95	0.975	0.93	0.97	0.96
α	28°	25°	65°	51°	11°	56°	25°

can be observed that there is a good match between them in all the cases. The lower quartile curve is the one that presents more low scale variabilities, which can be due partially to the effect of noise.

Tables 1 and 2 show the results of this analysis for the source and receiver gathers. These tables show the maximum velocity, direction and ratio of anisotropy deduced from the analysis and fitting of the different mean time descriptors (Sect. 4.2). We outline in bold the parameters inferred from the mean, median, and upper-quartile curves. Results are very coherent for these descriptors in the source and receiver gathers, since they are less prone to errors than the standard deviation, inter-quartile range, lower quartile and minimum absolute deviation. This situation agrees with the conclusions that have been presented on the section devoted to the sensibility analysis of the robust mean traveltimes descriptors via synthetic experiments.

6 Conclusions

In the present work, we have presented the mathematical deduction and analysis of robust traveltimes curves in elliptical anisotropic media, which complete the analysis presented in the past for the mean and standard deviation curves. The fitting of the empirical traveltimes curves provide us with a new simple method to estimate the model of elliptical anisotropy from traveltimes data before the inversion, and to analyze the traveltimes quality. The mean, median, and upper-quartile curves are the most robust descriptors to identify anisotropic parameters. Conversely, the rest of descriptors are very sensible to data errors, and they can be used to detect their presence before the inversion. This filtering process is very important because we have shown that data errors provoke anisotropy artifacts, very anomalous anisotropic ratios and wrong directions of anisotropy biased towards 0 degrees. This is a very important conclusion, since it highlights that data errors can be interpreted as false anisotropy. Thus, performing mean traveltimes curve analysis is always recommended, since it does not need stringent numerical requirements.

Acknowledgements We would like to thank NAGRA for the permission to use the Grimsel data set to illustrate this methodology. This work benefited from a sabbatical grant at the University of California Berkeley (Department of Civil and Environmental Engineering) given by the University of Oviedo (Spain), and by the “Secretaría de Estado de Universidades y de Investigación” of the Spanish Ministry of Science and Innovation. We also acknowledge the financial support for the present academic year coming from the University of California Berkeley and the Lawrence Berkeley National Laboratory (Earth Science Division), and from the Energy Resources Engineering Department of Stanford University (Stanford Center for Reservoir Forecasting and Smart Field Consortiums).

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Noncommercial License which permits any noncommercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and source are credited.

Appendix A: Isotropic Medium Explored via an Irregular Recording Geometry

These formulas correspond to Sect. 2.2. The variables that appear in the following formulas are those presented in Fig. 2(a).

A.1 *p*-Percentiles and the mad Curves

Case 1.

$$\begin{aligned}
 &0 < s_r < \frac{pL_r}{2}, \quad \text{that is,} \\
 &0 < x_s < \frac{(p-1)L_r^2 - d_0^2 + L_s^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma}{2(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}, \\
 &m_p(x_s) = \sqrt{\frac{(pL_r - s_r)^2 + A_x^2}{V^2}}, \\
 &\text{mad}(x_s) = m_p(2p - 1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[0, L_r p]},
 \end{aligned}$$

Case 2.

$$\begin{aligned}
 &\frac{pL_r}{2} < s_r < L_r - \frac{pL_r}{2}, \quad \text{that is,} \\
 &\frac{(p-1)L_r^2 - d_0^2 + L_s^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma}{2(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)} \\
 &< x_s < \frac{(1-p)L_r^2 - d_0^2 + L_s^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma}{2(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}, \\
 &m_p(x_s) = \sqrt{\frac{(\frac{pL_r}{2})^2 + A_x^2}{V^2}}, \\
 &\text{mad}(x_s) = m_p(2p - 1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[s_r - \frac{L_r p}{2}, s_r + \frac{L_r p}{2}]},
 \end{aligned}$$

Case 3.

$$L_r - \frac{pL_r}{2} < s_r < L_r, \quad \text{that is,}$$

$$\frac{(1-p)L_r^2 - d_0^2 + L_s^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma}{2(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)} < x_s < L_s,$$

$$m_p(x_s) = \sqrt{\frac{((p-1)L_r + s_r)^2 + A_x^2}{V^2}},$$

$$\text{mad}(x_s) = m_p(2p-1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[L_r(1-p), L_r]}.$$

A.2 Inter-Quartile Range

Case 1.

$$0 < s_r < \frac{L_r}{8}, \quad \text{that is,}$$

$$0 < x_s < \frac{-3L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}$$

$$\implies \text{iqr}(x_s) = \sqrt{\frac{(\frac{3L_r}{4} - s_r)^2 + A_x^2}{V^2}} - \sqrt{\frac{(\frac{L_r}{4} - s_r)^2 + A_x^2}{V^2}},$$

Case 2.

$$\frac{L}{8} < s_r < \frac{3L_r}{8}, \quad \text{that is,}$$

$$\frac{-3L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}$$

$$< x_s < \frac{-L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)},$$

$$\text{iqr}(x_s) = \sqrt{\frac{(\frac{3L_r}{4} - s_r)^2 + A_x^2}{V^2}} - \sqrt{\frac{(\frac{L_r}{8})^2 + A_x^2}{V^2}},$$

Case 3.

$$\frac{3L_r}{8} < s_r < \frac{5L_r}{8}, \quad \text{that is,}$$

$$\frac{-L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}$$

$$< x_s < \frac{L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)},$$

$$\text{iqr}(x_s) = \sqrt{\frac{(\frac{3L_r}{8})^2 + A_x^2}{V^2}} - \sqrt{\frac{(\frac{L_r}{8})^2 + A_x^2}{V^2}},$$

Case 4.

$$\begin{aligned} \frac{5L_r}{8} < s_r < \frac{7L_r}{8}, \quad \text{that is,} \\ \frac{L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)} \\ < x_s < \frac{3L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}, \\ \text{iqr}(x_s) &= \sqrt{\frac{(s_r - \frac{L_r}{4})^2 + A_x^2}{V^2}} - \sqrt{\frac{(\frac{L_r}{8})^2 + A_x^2}{V^2}}, \end{aligned}$$

Case 5.

$$\begin{aligned} \frac{7L_r}{8} < s_r < L_r, \quad \text{that is,} \\ \frac{3L_r^2 + 4(L_s^2 - d_0^2 + d_n^2 - 2L_s d_n \cos \gamma)}{8(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)} < x_s < L_s, \\ \text{iqr}(x_s) &= \sqrt{\frac{(s_r - \frac{L_r}{4})^2 + A_x^2}{V^2}} - \sqrt{\frac{(s_r - \frac{3L_r}{4})^2 + A_x^2}{V^2}}. \end{aligned}$$

Appendix B: Elliptical Anisotropic Medium Explored via an Irregular Recording Geometry

These formulas correspond to Sect. 3.2. In this case, for the sake of simplicity, we omit the formulas describing the inter-quartile range, since they do not provide additional insights.

B.1 p -Percentiles and the mad Curve

Case 1.

$$\begin{aligned} 0 < s_r < \frac{pL_r}{2} + \frac{b}{2a}, \quad \text{that is,} \\ 0 < x_s < \frac{(p-1)L_r^2 a + L_r b - a(d_0^2 - L_s^2 - d_n^2 + 2L_s d_n \cos \gamma)}{2a(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)}, \\ m_p(x_s) &= \sqrt{\frac{[(pL_r - s_r)2a + b]^2 - \Delta}{4a}}, \\ \text{mad}(x_s) &= m_p(2p-1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[0, L_r p]}, \end{aligned}$$

Case 2.

$$\frac{pL_r}{2} + \frac{b}{2a} < s_r < L_r - \frac{pL_r}{2} + \frac{b}{2a}, \quad \text{that is,}$$

$$x_s > \frac{(p-1)L_r^2 a + L_r b - a(d_0^2 - L_s^2 - d_n^2 + 2L_s d_n \cos \gamma)}{2a(L_s - d_n \cos \gamma - d_0 \cos \delta)} \quad \text{and}$$

$$x_s < \frac{(p-1)L_r^2 a - L_r b + a(d_0^2 - L_s^2 - d_n^2 + 2L_s d_n \cos \gamma)}{2a(d_n \cos \gamma + d_0 \cos \delta - L_s)},$$

$$m_p(x_s) = \sqrt{\frac{(apL_r)^2 - \Delta}{4a}},$$

$$\text{mad}(x_s) = m_p(2p-1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[s_r - \frac{L_r p}{2} - \frac{b}{2a}, s_r + \frac{L_r p}{2} - \frac{b}{2a}]},$$

Case 3.

$$L_r - \frac{pL_r}{2} + \frac{b}{2a} < s_r < L_r, \quad \text{that is,}$$

$$\frac{(p-1)L_r^2 a - L_r b + a(d_0^2 - L_s^2 - d_n^2 + 2L_s d_n \cos \gamma)}{2a(d_n \cos \gamma + d_0 \cos \delta - L_s)} < x_s < L_s,$$

$$m_p(x_s) = \sqrt{\frac{[2a((1-p)L - s_r) + b]^2 - \Delta}{4a}},$$

$$\text{mad}(x_s) = m_p(2p-1) + \bar{t}_{[0, L_r]} - 2p\bar{t}_{[L_r(1-p), L_r]}.$$

References

Berryman JG (1991) Lectures notes on nonlinear inversion and tomography. Borehole seismic tomography. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory

Dines KA, Lytle RJ (1979) Computerized geophysical tomography. *IEEE Proc* 67(7):1065–1073

Fernández-Martínez JL, Pedruelo-González LM (2008) Anisotropic mean travelttime curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. *Math Geosci* 41(2):163–192. doi:10.1007/s11004-008-9202-4

Fernández-Martínez JL, Fernández-Álvarez JP, Pedruelo-González LM (2006) Mean travelttime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. *Math Geol* 38(3):343–374

Fernández-Martínez JL, Fernández-Alvarez JP, Pedruelo-González LM (2008) MTCLAB: a MATLAB®-based program for travelttime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. *Comput Geosci* 34(3):213–225. doi:10.1016/j.cageo.2007.03.008

Fernández-Martínez JL, Pedruelo-González LM, García-Gonzalo E (2009a) AMTCLAB: a MATLAB®-based program for travelttime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media. *Comput Geosci* 35(10):2057–2064. doi:10.1016/j.cageo.2008.11.013

Fernández-Martínez JL, Pedruelo-González LM, DeParis J, Mangriotis MD, Rector JW (2009b). Application of the mean travelttime curves to GPR and VSP data. In: Annual meeting, EEGS, SAGEEP

Gelbke C, Miranda F, Sattel G (1989) The results of a seismic transmission tomography survey at the Grimsel rock laboratory. *Log Anal* 243–260

Gordon R (1974) A tutorial on ART. *IEEE Trans Nucl Sci NS-21*:78–93

Ivansson S (1986) Seismic borehole tomography. Theory and computational methods. *IEEE Proc* 74(2):328–338

Scales JA (1987) Tomographic inversion via the conjugate gradient method. *Geophysics* 52:179–185

Scales JA, Gersztenkorn A (1988) Robust methods in inverse theory. *Inverse Probl* 4:1071–1091

ARTÍCULO 5

AMTCLAB: a MATLAB[®]-based program for traveltime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media

Autores:

Juan Luis Fernández Martínez
Luis Mariano Pedruelo González
Esperanza García Gonzálo

COMPUTER AND GEOSCIENCES
VOL. 35, PP 2057-2064, doi:10.1016/j.cageo.2008.11.013.
2009

Resumen Artículo 5

Fernández Martínez J.L, Pedruelo González L.M, García Gonzalo E. (2009). *AMTCLAB: a MATLAB[®]-based program for travelttime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media Computer and Geosciences. Vol. 35, pp 2057-2064, doi:10.1016/j.cageo.2008.11.013.*

Las técnicas de inversión tomográfica en medios anisótropos precisan de informaciones a priori sobre los parámetros de anisotropía para estabilizar la inversión. Esta necesidad origina el desarrollo del programa AMTCLAB. En este artículo se presenta el programa AMTCLAB, basado en el código MATLAB[®]. Este programa va dirigido a casos de medios anisótropos y sigue la misma filosofía y utiliza las mismas estructuras que el programa MTCLAB, presentado anteriormente y al que generaliza. El programa AMTCLAB utiliza los estadísticos robustos de la distribución de tiempos que no estaban presentes en el programa MTCLAB. Un interfaz dirige al usuario a través de los diferentes pasos del algoritmo. De forma similar a MTCLAB, el programa AMTCLAB fue concebido para aprovechar las capacidades computacionales de MATLAB[®]. Se estructura en tres partes: preprocesado, análisis de parámetros del modelo y salidas gráficas.

El artículo comienza describiendo brevemente las curvas de tiempos medios (descriptores robustos y no robustos) para medios con anisotropía de tipo elíptico. Un análisis detallado de los descriptores robustos ha sido realizado en el artículo 4. Inicialmente se muestran las curvas de tiempos de viaje robustas en un medio con anisotropía elíptica débil, explorado con un dispositivo rectangular, para posteriormente observar como la geometría irregular del dispositivo de adquisición provoca una asimetría en las curvas que además depende de la dirección de anisotropía. En el caso de dispositivos rectangulares la dirección de anisotropía puede ser estimada visualmente a partir de la asimetría de dichas curvas.

Los parámetros anisótropos $(\lambda, \alpha, V_{\max})$ son deducidos de las curvas de tiempos medios experimentales. Se utiliza para ello el algoritmo PSO (Fernández Martínez y García Gonzalo (2008)). El método consiste en dividir el dominio en zonas completamente homogéneas (isótropas o anisótropas), y reducir el desajuste entre las curvas de tiempos medios experimentales y las predicciones teóricas en cada uno de los agrupamientos resolviendo los siguientes problemas de optimización:

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \left\| t - t_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^* \right\|_p,$$

donde t es uno de los posibles descriptores experimentales de las curvas de tiempos medios (robusto y no robusto) en el agrupamiento considerado (emisor o receptor), y $t_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^*$ es la correspondiente predicción anisótropa de las curvas de tiempos medios teóricas para un cierto conjunto de parámetros anisótropos $(V_{\max}, \alpha, \lambda)$, estimados tal como se explica en el tercer artículo.

En el programa AMTCLAB los siguientes elementos son definidos por usuario:

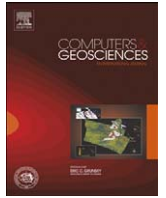
1. La norma de optimización, p . La norma por defecto es la euclídea.
2. Los parámetros PSO: tamaño de la manada, el número máximo de iteraciones, inercia y aceleraciones locales y globales. Por lo general un tamaño de bandada de 100 modelos y 20 iteraciones son suficiente para encontrar la región de modelos anisótropos aceptables.
3. Los límites de espacio de búsqueda de S . El programa realiza un análisis isotrópico para informar al usuario sobre el valor de la velocidad isotrópica inicial, y supervisa la evolución de los mejores parámetros anisótropos encontrados en las iteraciones.
4. Los descriptores estadísticos escogidos para realizar el análisis de las curvas de tiempos medios (medidas robustas y no robustas) tanto en fuente como en receptor común.
5. Finalmente el programa produce salidas gráficas y alfanuméricas, incluyendo:
 - La representación de las curvas empíricas y teóricas en fuente y receptor común para cada uno de los descriptores seleccionados.
 - Los resultados alfanuméricos de los problemas de optimización.
 - La representación del mapa de residuos y opcionalmente el análisis de la distribución a posteriori de los parámetros de la anisotropía.

Al igual que el programa MTCLAB, el código está disponible en la dirección <http://www.iamg.org/Cgeditor/index/htm>.

Se analiza la influencia del ruido en los datos, que provoca una estimación defectuosa del ratio y la dirección de anisotropía. Sin embargo, los estudios sintéticos han mostrado que las curvas de medias, medianas y cuartiles superiores son muy resistentes al ruido en los datos, y por lo tanto, serán preferidas para deducir modelos de velocidad. Además el problema inverso se estabiliza de forma notable cuando V_{\max} está correctamente identificada.

Por último se muestra la aplicación del programa AMTCLAB al macizo granítico Grimsel. Los resultados, de nuevo, son coherentes con resultados anteriores, para todas las curvas y todos los agrupamientos indicándonos un medio débilmente anisótropo, con

un ratio de anisotropía entre 0.95 y 0.97, una dirección de anisotropía 40° - 73° EN y una velocidad máxima entre 5.26 y 5.37 km/s. También se muestran los mapas de tiempos residuales obtenidos, y por último se realiza el análisis de incertidumbre para el modelo $(V_{\max}, \alpha, \lambda) = (5.26 \text{ km/s}, E53.6^{\circ} N, 0.97)$ en una región con un error relativo del 8 % (el error relativo para el mejor modelo encontrado era del 5.6 %). La velocidad máxima es el parámetro que siempre presenta la dispersión más baja y, por lo tanto, el que mejor es identificado.



AMTCLAB: A MATLAB[®]-based program for traveltimes analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media [☆]

J.L. Fernández Martínez ^{*,1}, L.M. Pedruelo González, E. García Gonzalo

Departamento de Matemáticas, Área de Matemática Aplicada, Universidad de Oviedo, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 August 2008

Received in revised form

25 November 2008

Accepted 28 November 2008

Keywords:

Transmission tomography

Mean traveltimes curves

Elliptical anisotropic media

ABSTRACT

In this paper we present the program AMTCLAB, a MATLAB[®]-based computer code that analyzes the traveltimes distribution and performs quality analysis at the pre-inversion stage for elliptically anisotropic media explored via 2D transmission experiments. This software generalizes the program MTCLAB presented in the past for the case of layered isotropic media, and makes use of traditional and robust traveltimes distribution descriptors (mean, standard deviation, median, lower and upper quartiles, inter-quartile range and minimum absolute deviation), which are valid for all kinds of recording geometries. A guided user interface leads the modeller through the algorithm steps using the same data MTCLAB-structures. This methodology offers better understanding of the data variability prior to inversion, and provides the geophysicist with a macroscopic elliptical anisotropic velocity model, which is valid at the experiment scale, and matches the experimental mean traveltimes distribution. To solve the inverse problems involved, program AMTCLAB uses the particle swarm optimisation algorithm, which allows the use of different norms and sampling the region of equivalent anisotropic velocity models in order to perform posterior sample statistics in each individual model parameter. The approximated velocity model issued from this analysis can serve in the traveltimes inverse problem as an initial guess, or as a reference model in the subsequent inversion.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Transmission seismic tomography methods are aimed to infer the velocity distribution of a real geological medium by means of the inversion of the measured seismic traveltimes data acquired from their boundaries. The tomographic inverse problem is ill posed, so, it is crucial to have at disposal methodologies to analyze the traveltimes distribution, to identify and filter possible errors, and to infer prior velocity information to add stability at inversion. Mean traveltimes curves (MTC) describe the variation of the main statistical parameters of the traveltimes distribution for the different gathering subsets, as a function of the gather index (Fernández Martínez et al., 2006a). These curves constitute a simple methodology to accomplish a guided structured analysis of the data variability before the inversion, which helps to discriminate the contribution of data errors from that of geological heterogeneities.

This methodology was first applied to layered isotropic media, and has given birth to the program MTCLAB (Fernández Martínez

et al., 2008). This program analyzes at the pre-inversion stage the sources of data variability, being able to infer from data prior velocity information, which is of great importance for the tomographic inversion.

Experimental results in hydrocarbon exploration show that anisotropy with angular dependence of velocity is the most common form of anisotropy found in seismic experiments (Upadhyay, 2004; Tsvankin, 2005). Thomsen (1986) also noted that in most cases the anisotropy is weak and developed the theory of weak anisotropy starting from the theory of transversely isotropic media. Elliptical anisotropy thereby stems as a particular case.

Clays and fine layering are mentioned in the bibliography among the main causes of seismic anisotropy in sedimentary rocks (Wang, 2002). Studies in clays also have shown that velocity anisotropy is influenced by the content of organic matter and the interaction with pore fluids (Vernik and Liu, 1997). Macroscopically, anisotropy occurs as a result of the natural fractures of rocks (Schoenberg and Sayers, 1995).

Seismic anisotropy has been taken into account in seismic traveltimes inversion through different kinds of numerical algorithms (Byun and Corrigan, 1990; Carrion et al., 1992; Pratt and Chapman, 1992; Williamson et al., 1993; Watanabe et al., 1996), and still is an important field of research in geophysics (see for instance Tsvankin and Grechka, 2006).

[☆] Code available from server at <http://www.iimg.org/CGEditor/index.htm>

* Corresponding author.

E-mail address: jlfm@uniovi.es (J.L. Fernández Martínez).

¹ Visiting professor at UC-Berkeley, Department of Civil and Environmental Engineering.

Considering anisotropy in tomographic inversion techniques introduces the need of estimating the anisotropic model parameters. In some numerical algorithms, these parameters are taken as unknowns in the inversion problem (Pratt and Chapman, 1992; Williamson et al., 1993), but in other cases, these parameters are fed into the inverse problem, being previously estimated by different geophysical and numerical techniques (see for instance, Van der Baan and Kendall, 2002; Xiao et al., 2004).

In this paper, we present the AMTCLAB program, a generalization of MTCLAB for the case of elliptical anisotropic media explored via an arbitrary recording geometry (Fernández Martínez et al., 2006b). This program makes use of the traditional mean traveltime curves (Fernández Martínez et al., 2006a), and of the robust traveltime descriptors: median, lower and upper quartiles, inter-quartile range, and the minimum absolute deviation. This last feature is an addition to AMTCLAB which was not present in MTCLAB.

This methodology helps to grasp a better understanding of the data variability (before) prior to the inversion, and provides the geophysicist with a macroscopic elliptical anisotropic velocity model, which is valid at the experiment scale, and is able to match the experimental mean traveltime distribution. The knowledge issued from this analysis is very important since elliptical anisotropy can be considered as a first step while analyzing anisotropy in real traveltime data. Finally, the use of particle swarm to solve the identification problems involved allows the sampling of the region of equivalent anisotropic velocity models in order to perform posterior sample statistics in each individual model parameter.

2. The AMTCLAB program

The main feature of MTCLAB program (Fernández Martínez et al., 2008) was the introduction of the mean traveltime curves analysis to infer the best homogeneous velocity model in each zone of analysis of the medium. Moreover, the inspection of traveltime residuals between the theoretical and empirical curves, checking for the existence of jumps, discontinuities, sharp oscillations, systematic bias or any other misfit pattern, might allow the modeller to unravel the presence of data errors, and/or medium heterogeneities. In addition, comparison of estimated velocities in the source gather domain with those in the receiver gather helps to classify the causes of traveltime anomalies (Fernández Martínez et al., 2006a).

In this section, we briefly present the main features of the mean traveltime curves (robust and non-robust descriptors) for elliptical anisotropic media (Fernández Martínez et al., 2006b).

2.1. Mean traveltime curves in elliptical anisotropic media

Let us suppose that the recording geometry is rectangular, and assume that the velocity model describing the inspected geological medium has elliptical form (Fig. 1) given by the following parameters: the maximum velocity (V_{max}), the direction of the elliptical anisotropy (α), and the ratio of anisotropy ($\lambda = V_{min}/V_{max}$). In this case, the traveltime corresponding to a seismic ray with a direction with angle β , measured counter-clockwise with respect to the V_{max} direction, satisfies the relation

$$t_\beta = \frac{d_\beta}{v_\beta} = \frac{\sqrt{A^2 + \varepsilon^2}}{v_\beta},$$

where d_β is the distance between the source and the receiver (defining this direction), A is the minimum distance between the source and the line of receivers, ε is the distance between the

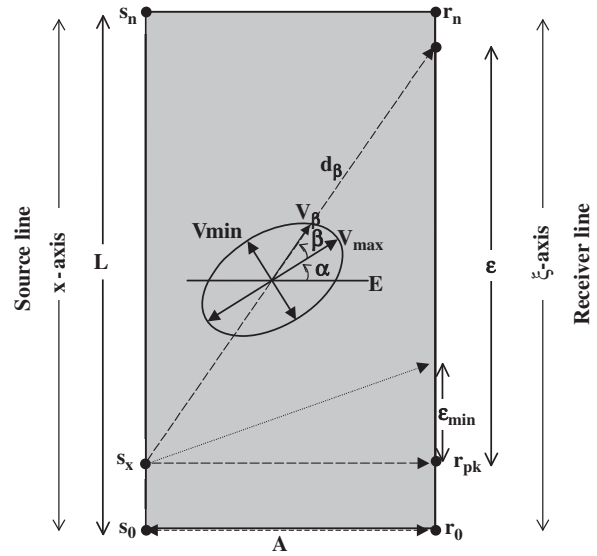


Fig. 1. Elliptical anisotropic medium explored via a rectangular acquisition geometry.

hypothetical receiver located at the perpendicular line to the considered source and the receiver where the seismic ray arrives, and, v_β is the velocity in the β direction.

Furthermore, v_β can be written in terms of the anisotropic parameters as follows:

$$v_\beta = \sqrt{\frac{\lambda^2(A^2 + \varepsilon^2)(1 + \tan^2 \alpha)}{2\varepsilon A \tan \alpha(\lambda^2 - 1) + (\lambda^2 \varepsilon^2 + A^2)\tan^2 \alpha + (\lambda^2 A^2 + \varepsilon^2)}} V_{max},$$

and, thus,

$$t_\beta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha)\varepsilon^2 + 2A \tan \alpha(\lambda^2 - 1)\varepsilon + A^2(\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2(1 + \tan^2 \alpha)V_{max}^2}} \quad (1)$$

Mean traveltime curves are obtained by inserting the former expression (1) in the mean and standard deviation definitions

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} \sqrt{\frac{A^2 + \xi^2}{a_{\lambda\beta}^2 V_{max}^2}} d\xi,$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} (t_\beta(\xi) - \bar{t})^2 d\xi.$$

Anisotropic mean traveltime curves have several interesting properties (Fernández Martínez and Pedruelo González, 2008). In particular, the degree of asymmetry of the anisotropic mean traveltime curves (displacement ε_{min} of the mean time and standard deviation minima from the middle of the gathering line) is related to the ratio and direction of anisotropy as follows:

$$\varepsilon_{min} = \frac{A(1 - \lambda^2) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}.$$

Then, the approximate direction of anisotropy, α , can be visually estimated (northeast or northwest) by the displacement of the minimum of these curves with respect to the middle point of the gather line, ε_{min} . Also, the least squares fit of the empirical mean traveltime curves provides a simple methodology to estimate at the pre-inversion step a macroscopic elliptical anisotropic model which is able to match the empirical traveltime distribution. MTC analysis can be considered as a linear tomography method, since it uses straight approximation of seismic ray-paths.

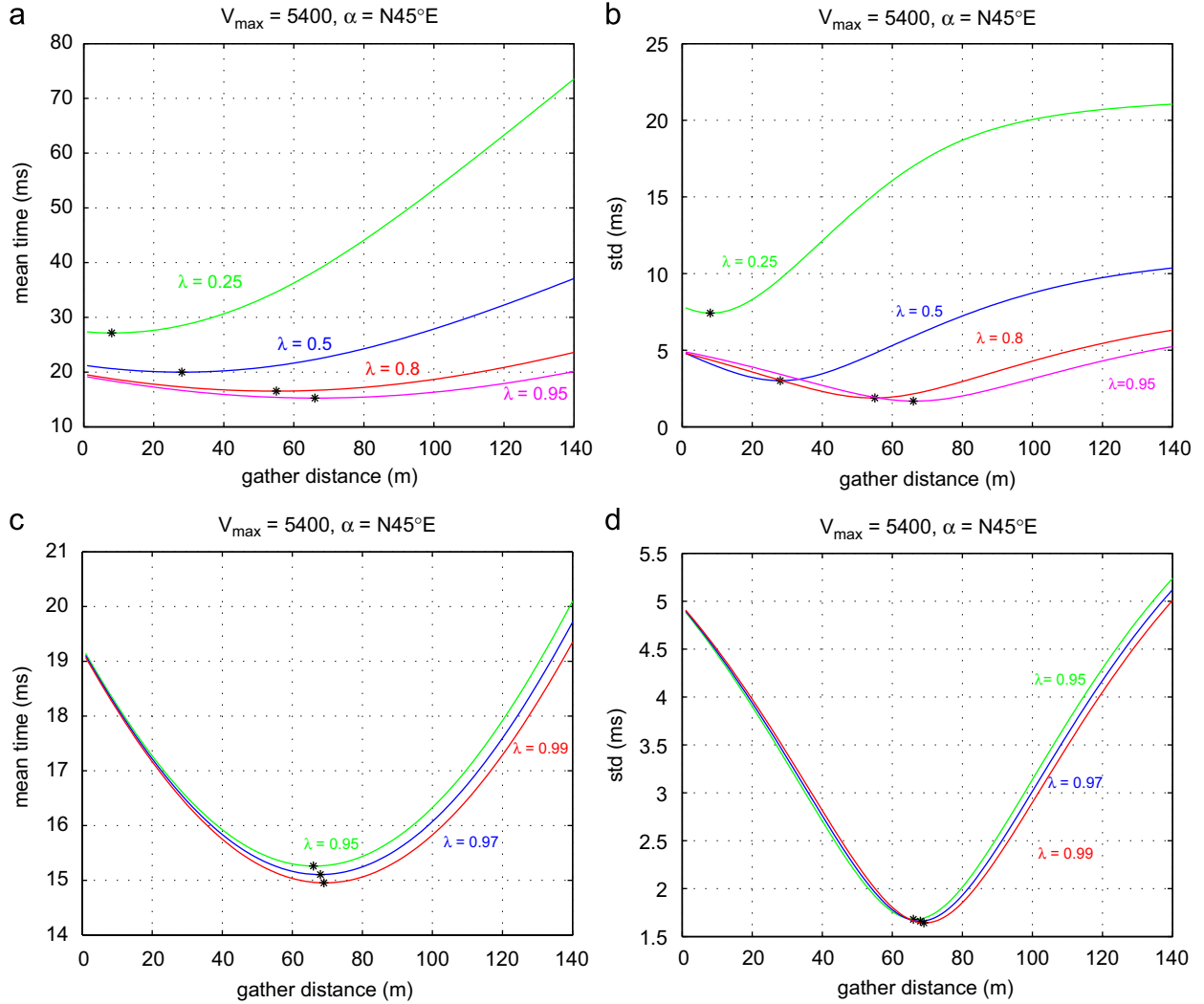


Fig. 2. (a, b) Influence of anisotropic ratio on shape of the mean and standard deviation curves. Direction of anisotropy is in this case N45°E, maximum velocity $V_{\max} = 5.4$ km/s. (c, d) Same curves for anisotropic ratio varying between 0.95 and 1 (isotropic case).

Fig. 2 shows an example of mean traveltime curves (mean and standard deviation) for an anisotropic medium explored via a rectangular recording geometry, having the source line placed left with respect to the receiver line, as shown in Fig. 1. Both boreholes are set 75 m apart. The direction of anisotropy is in this case N45°E ($\alpha = 45^\circ$) and the maximum velocity is 5.4 km/s. Mean traveltime curves (mean and standard deviation) are asymmetric and have their minimum placed towards the left with respect to the middle of the gather line, as it should be the case for a NE anisotropy direction. Also, as the ratio $\lambda = V_{\min}/V_{\max}$ increases the curve becomes more symmetric tending to the isotropic case when $\lambda = 1$.

2.2. The robust mean traveltime descriptors

The so-called robust mean traveltime curves refer to the variation of the different percentiles and other related measures of dispersion (inter-quartile range and minimum absolute deviation) for the traveltime distribution of the gathering subsets mentioned above.

In this section we first illustrate the methodology for the simplest case: a homogeneous and isotropic domain explored by means of a rectangular recording geometry. These concepts are

extended in AMTCLAB for the elliptical anisotropic case. MTCLAB did not incorporate the robust traveltime descriptors, since these curves are a very recent theoretical development.

2.3. Percentiles

The p -percentiles, m_p , describing the traveltime statistical distribution for the different gathering subsets fulfil

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = p \in [0, 1].$$

Considering that ξ is uniformly distributed in the interval $(0, L)$, this probability is

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{L} dx.$$

$$x_1 = \max\{0, x_s - \sqrt{(m_p^2 - t_0^2)}V\},$$

$$x_2 = \min\{L, x_s + \sqrt{(m_p^2 - t_0^2)}V\}.$$

In this calculation, three cases arise:

- $0 < x_s < \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL - x_s)^2}{V^2}},$

2. $\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL)^2}{4V^2}}$,
3. $\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{((p-1)L + x_s)^2}{V^2}}$.

As a main conclusion, the p -percentile curves are symmetric with respect to the middle of the gather line, $x_s = L/2$ and have a sill interval whose length is $L(1-p)$ of constant value, m_{pc} , which is

related to the isotropic velocity

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (pL/2)^2}}{m_{pc}}$$

This formula provides a robust method to identify the isotropic velocity, V , since it uses the p -percentile sill value, m_{pc} , which is the traveltimes at position $x_p = x_s + (pL/2)$, and is the same for all the gathers on the interval $[(pL/2), L - (pL/2)]$.

The median curve, $m_{p=1/2}(x_s)$, provides the trajectory of the centre of the traveltimes distribution as a function of the gather index, x_s . This curve is symmetric, has a sill of length $L/2$ and constant value $m_{1/2}$, which is related to the isotropic velocity as follows:

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + (L/4)^2}}{m_{1/2}}$$

The same way of reasoning can be applied to deduce the interquartile range and the minimum absolute deviation

$$iqr(x_s) = m_{3/4}(x_s) - m_{1/4}(x_s),$$

$$mad(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^L |t(\xi; x_s) - m_{1/2}(x_s)| d\xi.$$

Both descriptors admit analytical expressions.

This theoretical development can also be generalized either for isotropic or anisotropic media explored via any arbitrary recording geometry, which is what has been implemented in AMTCLAB.

Fig. 3 shows the robust traveltime curves for a weak elliptical anisotropic medium explored via a rectangular as well as an irregular recording configuration. The irregular configuration causes asymmetry of these curves and the sill becomes a dipping straight line. Anisotropy induces an additional lateral shift of these curves, which depends on the anisotropy direction (northeast or northwest).

3. AMTCLAB program structure

Similar to MTCLAB, AMTCLAB program was conceived to take advantage of the MATLAB[®] array computation capabilities. In addition, the use of structure-type objects lightens the information flow through the program. A guided user interface (GUI) leads the user through all the algorithm steps. The program uses the same pre-processing structures as MTCLAB to select and read the traveltimes data, the recording geometry configuration, and the zones for anisotropic MTC analysis. In this sense, both programs are data compatible. Experimental traveltimes curves are then calculated and stored on the corresponding *sgather* and *rgather* structures, for sources and receivers gathers, respectively.

3.1. Inference of the elliptical anisotropic velocity parameters

The anisotropic parameters $(\lambda, \alpha, V_{\max})$ can be inferred from the experimental mean traveltime curves. The method consists of dividing the domain into fairly homogeneous zones (isotropic or anisotropic), and reducing the misfit between the experimental traveltime curves and the theoretical predictions in each gather by solving the following optimisation problems in the source and receiver domains:

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \|m - m_{(V_{\max}, \alpha, \lambda)}^*\|_p, \tag{2}$$

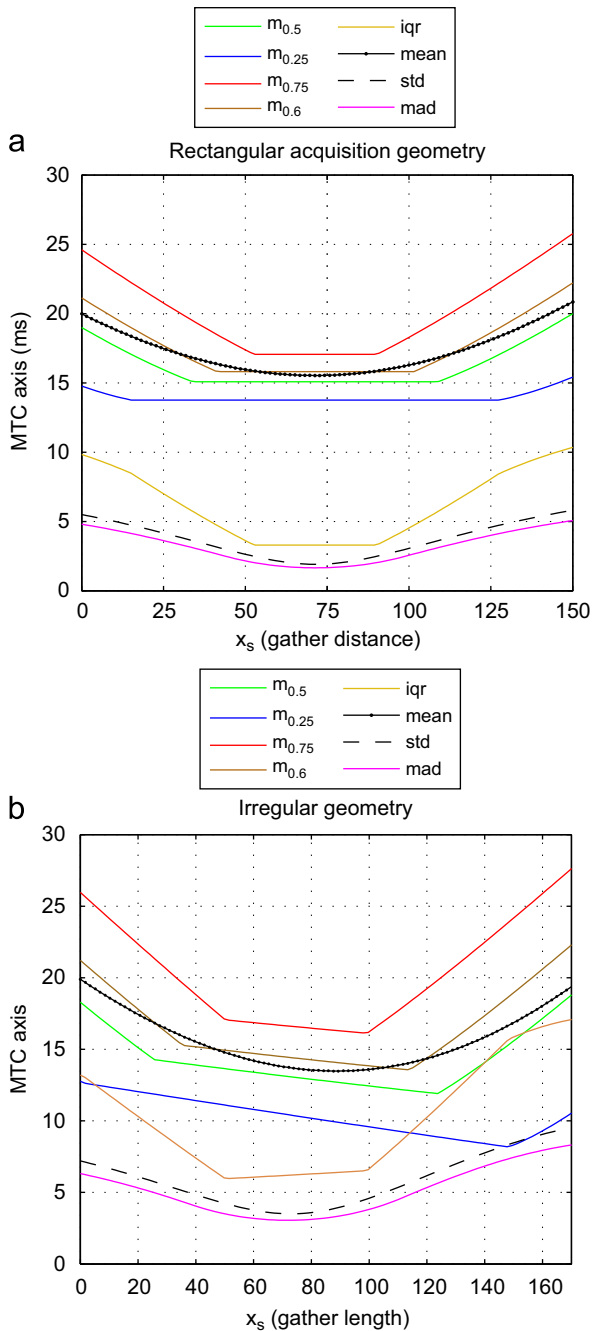


Fig. 3. (a) Robust mean traveltime curves for an anisotropic medium with $V_{\max} = 5.4$ km/s, $\lambda = 0.95$ and $\alpha = 45$ (E45°N) explored via a rectangular recording geometry. (b) Robust mean traveltime curves for same anisotropic medium explored via an irregular configuration geometry.

where m is one of the following experimental mean traveltime descriptors (robust and non-robust) in the considered gather (source or receiver):

$$m \in (\bar{t}_g, \sigma_g, m_{0.25}, m_{0.5}, m_{0.75}, mad, iqr),$$

and $m_{(V_{max}, \alpha, \lambda)}^*$ is the corresponding anisotropic MTC theoretical prediction for a certain set of anisotropic parameters, $(V_{max}, \lambda, \alpha)$, which has to be found.

M , is the \mathbb{R}^3 prismatic search space

$$\begin{aligned} 0.8 &\leq \lambda \leq 1; \\ -90 &\leq \alpha \leq 90; \\ V_l &\leq V_{max} \leq V_u, \end{aligned}$$

and p is the norm used for optimisation. Lower and upper bounds for V_{max} and the zones of analysis can be deduced from a priori information or from the analysis of the isotropic mean traveltime curves themselves (Fernández Martínez et al., 2006a).

Identification problems in (2) are non-linear and over-determined. The optimisation is performed in the real study case by means of a global algorithm: particle swarm optimisation. The reasons for having adopted this global optimisation algorithm are the following:

1. The presence of different equivalent anisotropic velocity models, which are those that fit the experimental traveltime curves within the same error tolerance.
2. The low number of parameters (1), allowing to speed-up the error evaluation for a swarm of anisotropic velocity models.
3. Global heuristic algorithms allow easier solving the above-mentioned optimisation problems using different L^p norms, which obviously influence the solution found.
4. Finally, as explained in the next section, the basic PSO algorithm is very intuitive and easy to program.

All the results (velocity models) coming from the optimisation are stored in the *vmodel* structure.

3.2. The optimisation algorithm: particle swarm optimisation (PSO)

The particle swarm is a stochastic evolutionary computation technique (Kennedy and Eberhart, 1995) used in optimisation, which is inspired by the social behaviour of individuals (called particles) in nature, such as bird flocking and fish schooling.

An individual, or particle, is represented by a vector whose length is the number of degrees of freedom of the inverse problem. To start, a population of particles is initialized with random positions $(x_i(0))$ in the search space M , and null velocities $(v_i(0) = 0)$. An error or misfit function is evaluated for each particle (velocity model), to quantify the difference between the observed and the predicted data (experimental and theoretical MTC). As time advances, the position and velocity of each particle are updated as a function of its own history of misfits and the information about the misfit of its neighbours. In the present case, the positions are the anisotropic velocity models found, and the velocities stand for the parameter perturbations needed for these positions (anisotropic velocity models) to find the global minima of (2).

At iteration step $k+1$, the algorithm updates positions $(x_i(k))$ and velocities $(v_i(k))$ of individuals at time k , as follows:

$$\begin{aligned} v_i(k+1) &= wv_i(k) + \phi_1(x_i(k) - g(k)) + \phi_2(x_i(k) - l_i(k)), \\ x_i(k+1) &= x_i(k) + v_i(k+1), \\ \phi_1 &= r_1 a_g \quad \phi_2 = r_2 a_l \quad r_1, r_2 \in U(0, 1) \quad w, a_g, a_l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

As can be seen, the velocity of each particle (i) at each iteration step $(k+1)$ is a function of three major components

1. The inertia term, which consists of the old velocity vector of the particle, $v_i(k)$, weighted by a real constant w , called inertia.
2. The social learning term, which is the difference between the global best position found thus far in the entire swarm (called $g(k)$) and the particle's current position $(x_i(k))$.
3. The cognitive learning term, which is the difference between the particle's best position so far found (called $l_i(k)$) and the particle current position $(x_i(k))$.

Constants w, a_g, a_l constitute the tuning PSO parameters to achieve convergence. a_g, a_l are called, respectively, the global and local accelerations, and are stochastically weighted by uniform random numbers in the interval $[0,1]$, r_1 and r_2 . This stochastic effect causes each particle trajectory to oscillate at each iteration step k around the point:

$$o_i(k) = \frac{a_g g(k) + a_l l_i(k)}{a_g + a_l}.$$

The algorithm convergence is somehow related to the particle trajectories stability, which depends on inertia constant, w , and the total mean acceleration $\bar{\phi} = a_g + a_l/2$. A complete analysis of the algorithm properties can be seen in Fernández Martínez and García Gonzalo (2008).

As mentioned above, the PSO not only allows finding in each case the anisotropic parameters which better fit the corresponding experimental traveltime curve, but also sampling and exploring the region of equivalent anisotropic velocity models, in order to perform posterior sample statistics in each individual model parameter. The dispersions around the modes of the sample histograms serve to analyze how each anisotropic parameter is individually resolved by the mean traveltime data. Usually, the maximum velocity is the parameter that always exhibits the lowest dispersion and, thus, is better resolved or identified. Data noise produces smearing of the value of the estimated anisotropy ratio and wrong directions of anisotropy, biased towards zero degrees (Fernández Martínez et al., 2006b). Nevertheless, synthetic studies have shown that the mean, median and upper-quartile curves are very resistant to data noise, and thus, they are preferred to infer background velocity models, which can be taken into account in the solution of the traveltime tomographic inverse problem. Furthermore, the inverse problems involved become more stable when V_{max} is correctly identified.

In the AMTCLAB program the following parameters are user-defined:

1. The optimisation norm, p . The default norm is the Euclidean.
2. The PSO parameters: swarm size, maximum number of iterations, inertia and local and global accelerations. Usually a swarm size of 100 models and 20 iterations are enough to find the region of good anisotropic models. The Carlisle and Dozier (2001) PSO point, $(w, a_g, a_l) = (0.729, 0.948, 2.041)$, provides a good-enough balance between convergence and exploration while solving optimisation problems (2).
3. The M search space limits. The program performs an isotropic analysis to inform the user about the value of the isotropic velocity background, and monitors the evolution of the best anisotropic parameters found through the iterations.
4. The statistical descriptors chosen to perform the MTC analysis (robust and non-robust measures): mean, standard deviation, median, minimum absolute deviation, inter-quartile range, and upper and lower quartile. It is important to note that AMTCLAB performs the source and receiver gather analysis at the same time.

Finally the program produces the *graphical and alphanumeric outputs*, including:

- Plot of empirical and theoretical traveltime curves in source and receiver gather for each of the selected descriptors.
- The alphanumeric results for the optimisation problems on the ascii file “amtclab.out”
- Plots of the residual traveltime maps (program aresidual_maps.m) and posterior histogram analysis (program histoparam.m) if desired. Obviously, to perform posterior analysis on a descriptor, the corresponding experimental curves have to be previously selected for optimisation.

The MATLAB command *clear all* is required to clean all the workspace variables (data structures) to allow for a new execution of the AMTCLAB program changing the data set, and/or the zones of analysis.

4. Tutorial example

In this section, we show as a tutorial example the application of AMTCLAB to a data set, which comes from an area with granitic geology: the Grimsel test site-field 1 (a data set acquired and kindly put at disposal by NAGRA, the Swiss National Cooperative

for the disposal of Radioactive Waste). We recall that the goal of this section is to provide the user with a quick visual understanding of the main steps and potentialities of the program based on a real example, and not to perform a complete analysis of this data set. Interested readers can find more details in Fernández Martínez et al. (2006a,b).

The geometry of the survey is approximately rectangular bounded by two boreholes. The dimensions of the domain are approximately $70 \times 150 \text{ m}^2$ and the distance between adjacent sources or receivers was approximately 2.5 m. The tomography is aimed at imaging the geological structure of the granitic body, specially the presence of faults and intrusions.

In this case, we show the inference of the anisotropic velocity model using the most robust descriptors: mean, median and upper-quartile. The results obtained were the following:

1. Source gather:

- Mean: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.26, 46.6, 0.97)$
- Median: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.34, 54.6, 0.95)$
- Upper-quartile: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.28, 73.2, 0.97)$

2. Receiver gather:

- Mean: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.26, 53.6, 0.97)$
- Median: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.37, 64.9, 0.95)$
- Upper-quartile: $(V_{\max, \alpha, \lambda})^* = (5.25, 61.3, 0.97)$

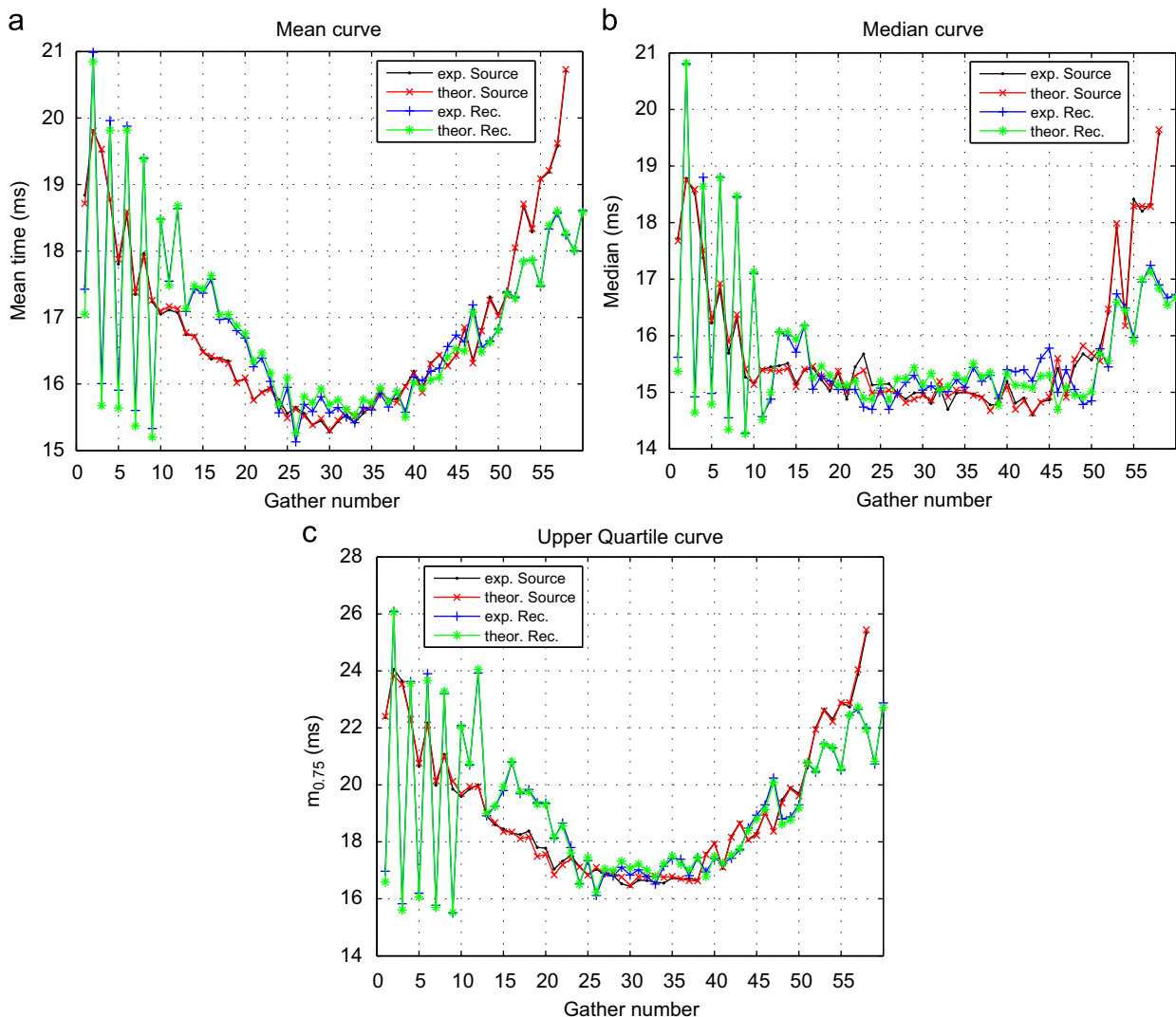


Fig. 4. Grimsel data set 1. Results of anisotropic MTC analysis for mean (a), median (b) and upper-quartile (c) curves.

Results are very coherent for all the selected curves in both gathers, and correspond to a weak anisotropic medium with anisotropic ratio between 0.95 and 0.97, anisotropy

direction, E47–73°N, and maximum velocity between 5.26 and 5.37 km/s.

Fig. 4 shows the graphical results obtained for these analysis, both, on the source and on the receiver gathers. The theoretical predictions match reasonably well the corresponding empirical curves. Sharp zigzagging oscillations observed in all the curves for the first 10 receiver gathers are due to a lack of traveltme data caused by acquisition problems.

Fig. 5 shows the residual traveltme map obtained for example for the velocity model issued from the receiver gather mean traveltme curve. Blue and red colours indicate the zones where the geological medium exhibits a geophysical behaviour that differs from the theoretical model $(V_{max,\alpha,\lambda}) = (5.26 \text{ km/s}, E53.6^\circ N, 0.97)$. The causes of these differences can be data errors and/or geological heterogeneities.

Fig. 6 shows the posterior histogram analysis for this last model, $(V_{max,\alpha,\lambda}) = (5.26 \text{ km/s}, E53.6^\circ N, 0.97)$, in the region of 8% relative error (the relative error for the reference model was 5.6%). As expected, the histogram's mode is close to the reference model. The lower the dispersion is around the histogram mode, the better each individual anisotropic parameter is resolved by the empirical traveltme curve under analysis.

Finally, it is important to note that this analysis can be performed in different zones of the geological medium, provided there are sufficient source/receiver gathers in each zone.

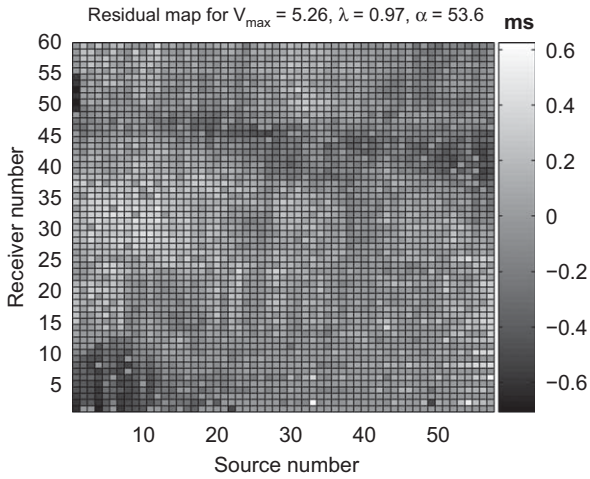


Fig. 5. Grimsel data set 1. Residual traveltme map (modelled-experimental) in milliseconds for theoretical model $(V_{max,\alpha,\lambda}) = (5.26 \text{ km/s}, 0.97, 53.6^\circ)$.

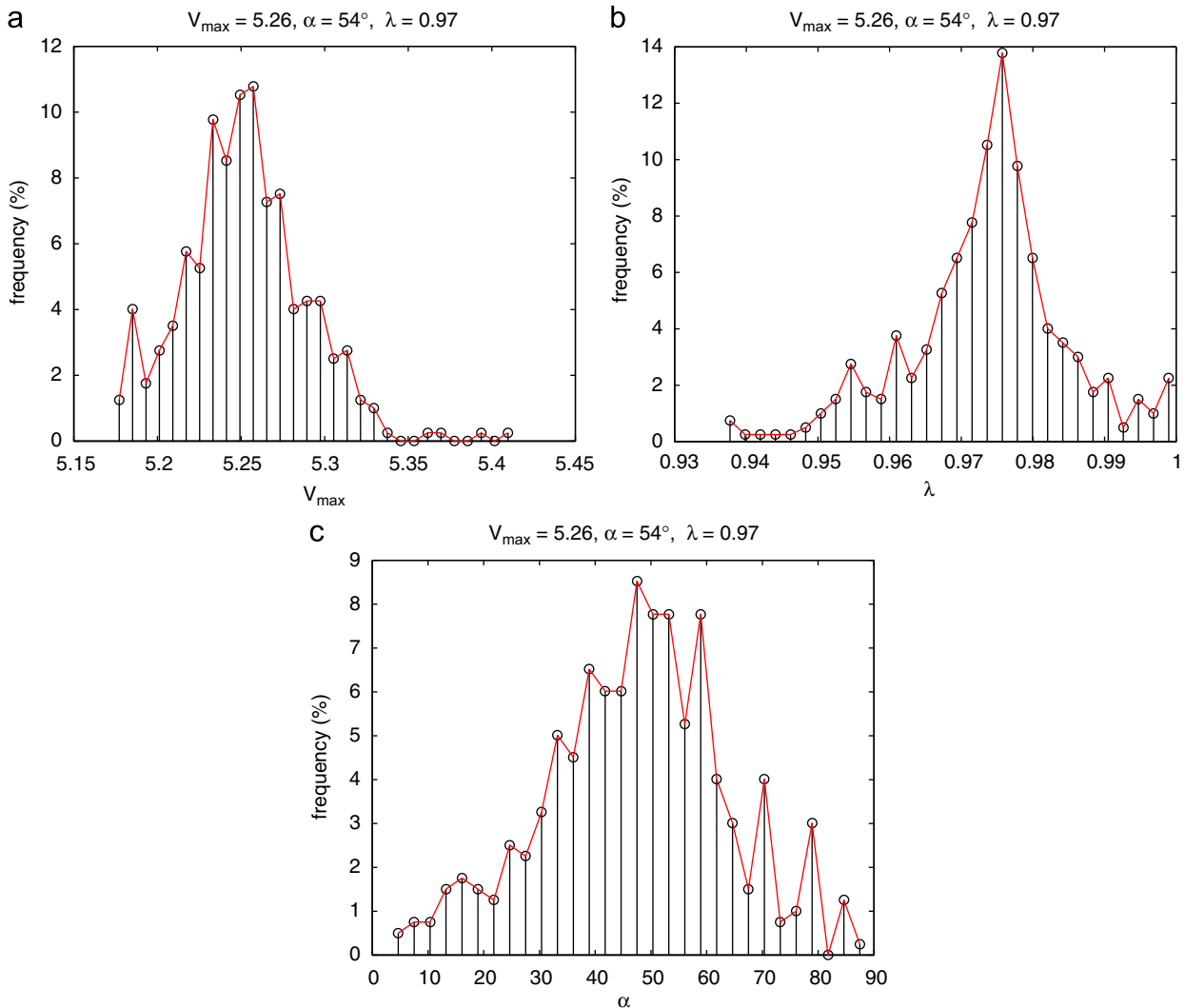


Fig. 6. Grimsel data set 1. Posterior analysis around reference model $(V_{max,\alpha,\lambda}) = (5.26 \text{ km/s}, 0.97, 53.6^\circ)$ on region of 8% relative error.

5. Conclusions

In this paper, we have presented a MATLAB[®]-based program to perform mean traveltimes curves analysis for 2D transmission experiments in elliptical anisotropic media. This program generalizes the code MTCLAB, published in the past for layered isotropic media, providing a structured procedure to understand the causes of data variability and delivering an approximate macroscopic anisotropic velocity model, which is able to match the experimental traveltimes distribution. This approximate anisotropic velocity model can be used as a reference model (regularization term) in the inverse problem thereby improving its stability. The particle swarm algorithm allows to solve the corresponding identification problems using different norms, and also performing posterior sampling in each individual anisotropic parameter. The knowledge issued from this analysis is very important since elliptical anisotropy is a first modelling step while analyzing anisotropy in real traveltimes data.

Acknowledgments

We would like to thank NAGRA for the permission to use the Grimsel data set to illustrate this methodology, and Maria-Daphne Mangriotis (UC-Berkeley) for constructive review and remarks. We would like also to acknowledge the reviewers of this paper who helped us to improve the quality of the final manuscript.

This work benefited from a sabbatical grant given by the “Secretaría de Estado de Universidades y de Investigación” of the Spanish Ministry of Science and Innovation.

Appendix A. Supporting Information

Supplementary data associated with this article can be found in the online version at [doi:10.1016/j.cageo.2008.11.013](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2008.11.013).

References

- Byun, B.S., Corrigan, D., 1990. Seismic traveltimes inversion for transverse isotropy. *Geophysics* 55 (2), 192–200.
- Carlisle, A., Dozier, G., 2001. An off-the-shelf PSO. In: Proceedings of the Workshop on Particle Swarm Optimization. Indianapolis, USA, pp. 1–6.
- Carrion, P., Costa, J., Ferrer-Pinho, J.E., Schoenberg, M., 1992. Cross-borehole tomography in anisotropic media. *Geophysics* 57 (9), 1194–1198.
- Fernández Martínez, J.L., Fernández Álvarez, J.P., Pedruelo González, L.M., 2006a. Mean traveltimes curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. *Mathematical Geology* 38 (3), 343–374.
- Fernández Martínez, J.L., Fernández Álvarez, J.P., Pedruelo González, L.M., 2006b. Inferring anisotropy parameters through mean traveltimes curve analysis in 2D transmission tomography experiments. In: Proceedings of the International Association for Mathematical Geology Conference, Quantitative Geology from Multiple Sources. Liège, Belgium. CD-ROM.
- Fernández Martínez, J.L., Fernández Álvarez, J.P., Pedruelo González, L.M., 2008. MTCLAB: a MATLAB[®]-based program for traveltimes quality analysis and pre-inversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. *Computers & Geosciences* 34 (3), 213–225.
- Fernández Martínez, J.L., García Gonzalo, E., 2008. The generalized PSO: a new door to PSO evolution. *Journal of Artificial Evolution and Applications* 3, Article ID 861275, 15pp. [Doi:10.1155/2008/861275](https://doi.org/10.1155/2008/861275).
- Fernández Martínez, J.L., Pedruelo González, L.M., 2008. Anisotropic mean traveltimes curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. *Mathematical Geosciences* 41 (2), 163–192.
- Kennedy, J., Eberhart, R.C., 1995. Particle swarm optimisation. In: Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks. IEEE Service Center, Piscataway, NJ, pp. 1942–1948.
- Pratt, R.G., Chapman, C.H., 1992. Traveltimes tomography in anisotropic media. *Geophysical Journal International* 109, 1–19.
- Schoenberg, M., Sayers, C.M., 1995. Seismic anisotropy of fracture rock. *Geophysics* 60 (1), 204–211.
- Tsvankin, I., 2005. *Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media*, 2nd Ed. Elsevier Science, Amsterdam, 454pp.
- Tsvankin, I., Grechka, V., 2006. Developments in seismic anisotropy: treating realistic subsurface models in imaging and fracture detection. *CSEG Recorder* 31, 43–46.
- Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51, 1954–1966.
- Upadhyay, S.K., 2004. *Seismic Reflection Processing: With Special Reference to Anisotropy*. Springer, New York, 636 pp.
- Van der Baan, M., Kendall, J.M., 2002. Estimating anisotropy parameters and traveltimes in the τ - p domain. *Geophysics* 67 (4), 1076–1086.
- Vernik, L., Liu, X., 1997. Velocity anisotropy in shales: a petrophysical study. *Geophysics* 62 (2), 521–532.
- Xiao, C., Bancroft, J.C., Brown, R.J., 2004. Estimation of anisotropy parameters in VTI media. In: Proceedings of the 74th Annual International Meeting of Society Exploration Geophysicists, Dallas, TX, Expanded Abstract, CD-ROM.
- Williamson, P.R., Sams, M.S., Worthington, M.H., 1993. Crosshole imaging in anisotropic media. *The Leading Edge* 12 (1), 19–23.
- Watanabe, T., Hirai, T., Sassa, K., 1996. Seismic traveltimes tomography in anisotropic heterogeneous media. *Journal of Applied Geophysics* 35, 133–143.
- Wang, Z., 2002. Seismic anisotropy in sedimentary rocks. Part 2: Laboratory data. *Geophysics* 67 (5), 1423–1440.

Capítulo 6: APLICACIÓN AL CONJUNTO DE DATOS GRIMSEL

6.1 Caso de estudio: aplicación al conjunto de datos Grimsel

A finales del año 1996 se propone al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, colaborar en un proyecto de investigación conjuntamente con el Departamento de Geología de esta misma Universidad, liderado por el catedrático de Geología de la Universidad de Oviedo Dr. Modesto Montoto San Miguel, al que se unen los profesores del Departamento de Matemáticas Dr. Santiago de Vicente Cuenca y Dr. Juan Luis Fernández Martínez. Este proyecto es financiado por la empresa ENRESA (Empresa Nacional de Residuos Radiactivos) y tiene básicamente como objetivo, fomentar la creación de un equipo de investigadores y tecnólogos españoles que trabajen en el terreno de los problemas inversos y en particular en el estudio y modelización de macizos rocosos mediante técnicas de inspección no destructivas (radar y tomografía sísmica en transmisión) con el fin de evaluar la idoneidad geotécnica de dichos macizos como futuros cementerios de residuos nucleares de baja, media y alta actividad. En concreto, se pretendía la aplicación de dichas técnicas al macizo granítico Grimsel (Proyecto Febex) cuyos datos de tomografía sísmica fueron proporcionados a ENRESA por la empresa Nagra (the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste, Suiza).

El objetivo de este capítulo no es tanto el mostrar una modelización geofísica de dicho macizo rocoso, que ya fue realizada en su día en tiempo y hora mediante el programa DIVINE en el marco del proyecto de investigación entre ENRESA y FICYT (*Programa de investigación para la caracterización petrofísica de macizos cristalinos mediante procedimientos no destructivos. Tomografía radar y sísmica*), sino mostrar el papel de las curvas de tiempos medios en dicha modelización.

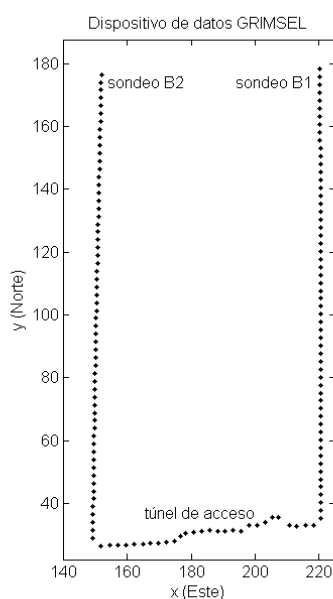


Figura 6.1.1: Dispositivo de adquisición de Grimsel, campo 1.

La geometría de este macizo rocoso es aproximadamente rectangular con una superficie de $70 \times 150 \text{ m}^2$, estando limitado por dos sondeos prácticamente paralelos, B1 y B2, y un túnel de acceso al laboratorio subterráneo (figura 6.1.1). El conjunto de datos está compuesto por tres campañas de adquisición (tiros) diferentes, según se detalla en la tabla adjunta:

TIRO	FUENTE	RECEPTOR	Número de Fuentes	Número de Receptores
1	B1	B2	58	60
2	Túnel	B2	28	60
3	Túnel	B1	28	59

Tabla 1: Dispositivos de adquisición de Grimsel.

En todos los casos la separación entre las diferentes fuentes es de 2.5 metros, la misma distancia separa los diferentes receptores. Es preciso destacar que sólo se poseen los tiempos de las primeras llegadas (ondas P) por lo que se trata de un problema de tomografía acústica en transmisión entre las diferentes parejas de emisión recepción.

Este conjunto de datos ya fue estudiado anteriormente por Gelbke, Miranda, y Sattel, (1989), mostrando que el rango de velocidades se encontraba entre 4.7 y $5.6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, y que dicho macizo granítico podía modelizarse mediante una anisotropía acústica de tipo elíptico débil, cuyo ratio de anisotropía $\lambda = \frac{v_{\min}}{v_{\max}}$ se encontraba en el rango $0.95-0.97$, y donde la velocidad máxima posee una dirección $N30^\circ W$ con respecto al norte geográfico (que no coincide con la dirección del eje Y en la figura 6.1.1). La figura 6.1.2 muestra los mapas de tiempos observados para los tres tiros en un plano fuentes-receptor. Las celdas en color negro indican la ausencia de datos observados (tiempos de viaje) entre las parejas emisor i y receptor j involucradas y representadas en dicha matriz. Esto puede deberse a problemas en la adquisición que motivan que el geófono j no haya registrado la traza en la emisión correspondiente a la fuente i , o que debido a la atenuación y al ruido de medida sea imposible distinguir el tiempo correspondiente a la primera llegada. Esta falta de datos se observa de forma clara en los doce primeros receptores del tiro 1. Esto es un ejemplo de la importancia que tiene el ruido en los experimentos tomográficos que por definición son realizados en situaciones reales lejos del control de calidad que se poseería en un experimento realizado en laboratorio. Por ejemplo la determinación en el terreno de las coordenadas geográficas de los diferentes emisores y receptores, o la falta de coordinación entre el inicio del disparo y el inicio de la medida del tiempo de viaje, suelen ser dos de las fuentes de error más habituales. Por lo tanto el análisis de la calidad de los datos observados es muy recomendable para así inferir modelos iniciales de velocidad adecuados.

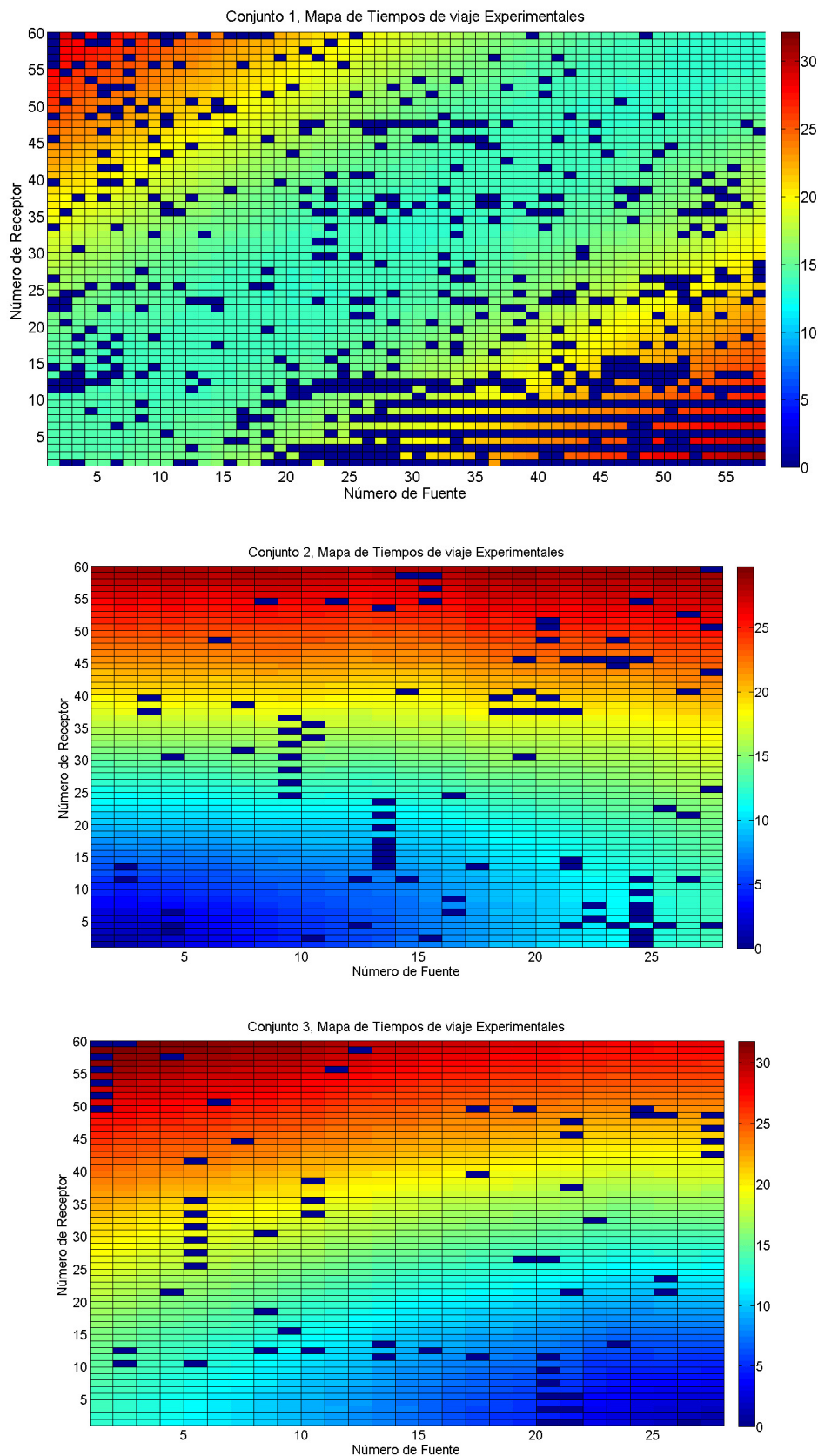


Figura 6.1.2: Mapas de tiempos observados para los tres tiros en un plano fuentes-receptor. Las celdas en color negro indican la ausencia de datos observados (tiempos de viaje) entre las parejas emisor i y receptor j involucradas y representadas en dicha matriz.

Como recordatorio (un análisis detallado se puede consultar en los artículos que forman parte de esta tesis) decir que las curvas anisótropas de tiempos medios han proporcionado un modelo macroscópico anisótropo elíptico con los siguientes parámetros

1. V_{\max} (km/s): 5.25 - 5.64,
2. λ : 0.95 - 0.97,
3. α : 60° - 75° , donde los ángulos se miden desde el Este en sentido antihorario.

Este conjunto de parámetros puede ser adoptado como modelo inicial en la inversión.

6.1.1 Modelización tomográfica

La tomografía lineal simplifica el problema de trazado de rayos adoptando rayos rectos entre las diferentes parejas de emisores y receptores. Este algoritmo es teóricamente correcto para el caso de medios homogéneos, sean estos isotrópicos o bien presenten una anisotropía elíptica. En ambos casos la matriz M del problema tomográfico discreto (que denominaremos por simplicidad matriz de longitudes de rayos) es la misma. Dado que el comportamiento geofísico del macizo Grimsel es cuantitativamente muy similar al caso homogéneo, las técnicas de tomografía lineal se pueden utilizar como una primera aproximación.

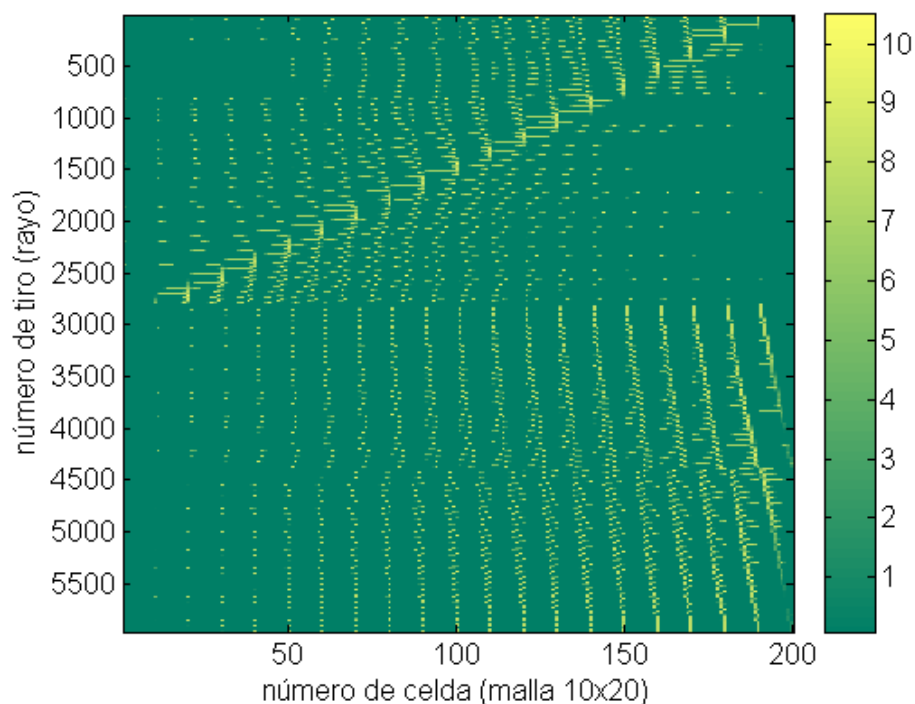


Figura 6.1.3: Matriz M , para una malla de 10x20 celdas.

La figura 6.1.3 muestra la matriz de longitudes de rayos M , obtenida al discretizar el macizo con una malla de 10 celdas en horizontal por 20 celdas en vertical. La matriz está compuesta por 5.964 tiempos observados entre las diferentes parejas de emisión-recepción. Los tiempos observados varían entre 0.69 y 32.1 milisegundos. Puede observarse que la matriz es dispersa dado que la mayor parte de sus elementos son nulos. Esta matriz está muy mal condicionada. En este caso particular el número de condición es $\kappa(M) = 1,8 \cdot 10^{16}$, lo que ilustra la dificultad de la resolución numérica del sistema tomográfico discreto mediante técnicas de mínimos cuadrados. La figura 6.1.4a muestra la curva de valores singulares de la matriz M que en este caso posee un rango de 200, que coincide con el número de celdas de la malla, es decir, no se ha sobreparametrizado el modelo de lentitudes, dado que si ese fuese el caso la matriz M sería deficiente en rango. Cabe observar que los valores singulares descienden más bruscamente a partir del valor singular de índice 144.

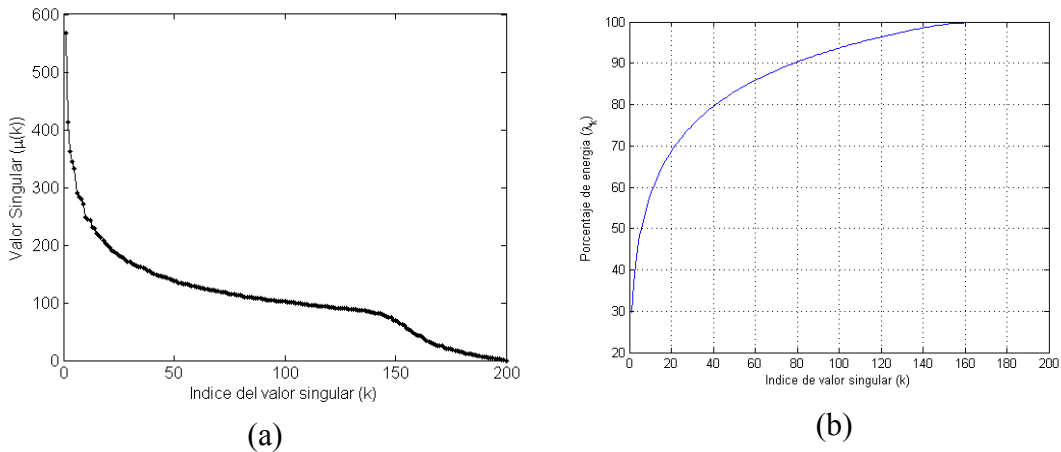


Figura 6.1.4: (a) Curva de valores singulares de la matriz M . (b) Variación de la energía de la matriz M en función del número de valores singulares que se considere en su reconstrucción.

La figura 6.1.4b muestra como varía la energía¹ de la matriz M en función del número de valores singulares que se considere en su reconstrucción. Se puede observar que el 90 % de la energía de dicha matriz se obtiene considerando únicamente los 80

¹ Se define la energía de una matriz como

$$\|M\|_F = \sqrt{\text{traza}(M^T M)} = \sqrt{\text{traza}(\Sigma^T \Sigma)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2},$$

teniendo en cuenta la descomposición en valores singulares de la matriz M

$$M = U \Sigma V^T.$$

Y como porcentaje de energía

$$E(p) = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2}}{\|M\|_F} \cdot 100.$$

primeros valores singulares, mientras que si se pretende reconstruir con el 99% de la energía se necesitarían aproximadamente 145 valores singulares, que coincide con el punto de inflexión que se observa en la curva de valores singulares.

La figura 6.1.5 muestra el campo de lentitudes que se obtiene al invertir la matriz de rayos M , antes comentada, utilizando la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose. La presencia de errores en los datos observados origina que aparezcan en la solución del sistema lineal valores negativos de lentitudes, lo cual es físicamente imposible. El origen de las inestabilidades se debe a los valores singulares más pequeños que amplifican en el modelo de lentitudes el ruido presente en los datos observados, dado que

$$\mathbf{s}^\dagger = M^\dagger \mathbf{t} = V \Sigma^\dagger U^T \mathbf{t} = \sum_{j=1}^{r_c} \frac{\mathbf{t}_{U_j}}{\mu_j} \mathbf{v}_j + \sum_{j=r_c+1}^{r=n} \frac{\mathbf{t}_{U_j}}{\mu_j} \mathbf{v}_j, \quad (6.1)$$

donde \mathbf{t}_U es el vector de tiempos observados referido a la base ortonormada U del espacio de datos, r_c indica el número de vectores propios \mathbf{v}_j que generan la parte estable de la solución y r (en este caso igual a n , que es el número de parámetros del modelo de lentitudes) el rango de la matriz M .

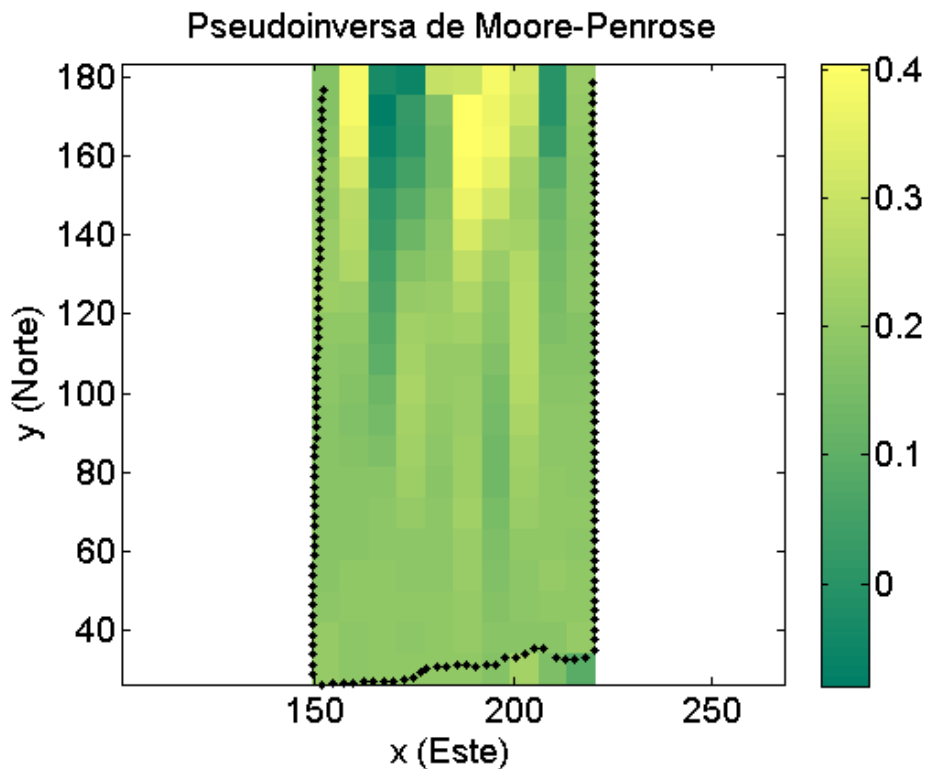


Figura 6.1.5 Modelo de lentitudes obtenido mediante la pseudoinversa de Moore_Penrose.

La solución \mathbf{s}^\dagger de mínimos cuadrados coincide con el centro de la hipercuádrlica (Fernández Martínez et al, 2012):

$$\|\mathbf{M}\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2^2 \leq \text{tol}^2 \Rightarrow \mathbf{s}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{s} - 2\mathbf{s}^T \mathbf{M}^T \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{t} \leq \text{tol}^2. \quad (6.2)$$

como ya se ha comentado en la sección 4.3.

Al estar la matriz M mal condicionada, esta hipercuádrlica puede degenerar en un cilindro elíptico (caso deficiente en rango) o en un hiperelipsoide cuyos ejes, según las direcciones \mathbf{v}_j asociadas a los valores singulares más pequeños, tienen un tamaño inversamente proporcional a sus respectivos valores singulares asociados. Por este motivo el centro del hiperelipsoide, puede estar situado en un punto con algunas componentes negativas, razón por lo cual aparecen las lentitudes negativas, antes mencionadas. La regularización de Tikhonov de orden cero provoca que el centro de la hipercuádrlica en la base V sea:

$$\left(\frac{\mu_k}{\sqrt{\mu_k^2 + \varepsilon^2}} t_{U_k}, 0_j \right) \text{ con } k = 1, \dots, r, \quad j = r + 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

y así logra evitar dichas incongruencias (“inestabilidades”) para ciertos valores del parámetro de regularización ε^2 . Como se ha comentado anteriormente en el apartado 4.1.2 y en el apartado 3.4, la regularización de Tikhonov de orden cero con modelo de referencia \mathbf{s}_{ref} tiene como efecto que el centro de la hipercuádrlica se desplace informado por las componentes del modelo de referencia, siendo sin embargo necesario, disponer de información a priori para tomar un adecuado parámetro de regularización ε^2 y poder invertir con garantías.

Otra opción diferente es plantear y resolver un problema de mínimos cuadrados con restricciones de intervalo, es decir, hallar

$$\min_{\mathbf{s} \in D} \|\mathbf{M}\mathbf{s} - \mathbf{t}\|_2^2 : D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : L_k \leq x_k \leq U_k \}, \quad (6.4)$$

donde los vectores \mathbf{L} , $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$ indican las cotas inferiores y superiores del modelo de lentitudes en las celdas de la malla de discretización. Dichas cotas, como se ha comentado, se deducen del análisis de las curvas de tiempos medios. La figura 6.1.6 muestra el resultado obtenido mediante el algoritmo de mínimos cuadrados lineales con

restricciones para un modelo de lentitud homogéneo $L = 0.1724$ s/km y $U = 0.2128$ s/km, lo cual se corresponde a unas velocidades entre 4.7 y 5.5 km/s.

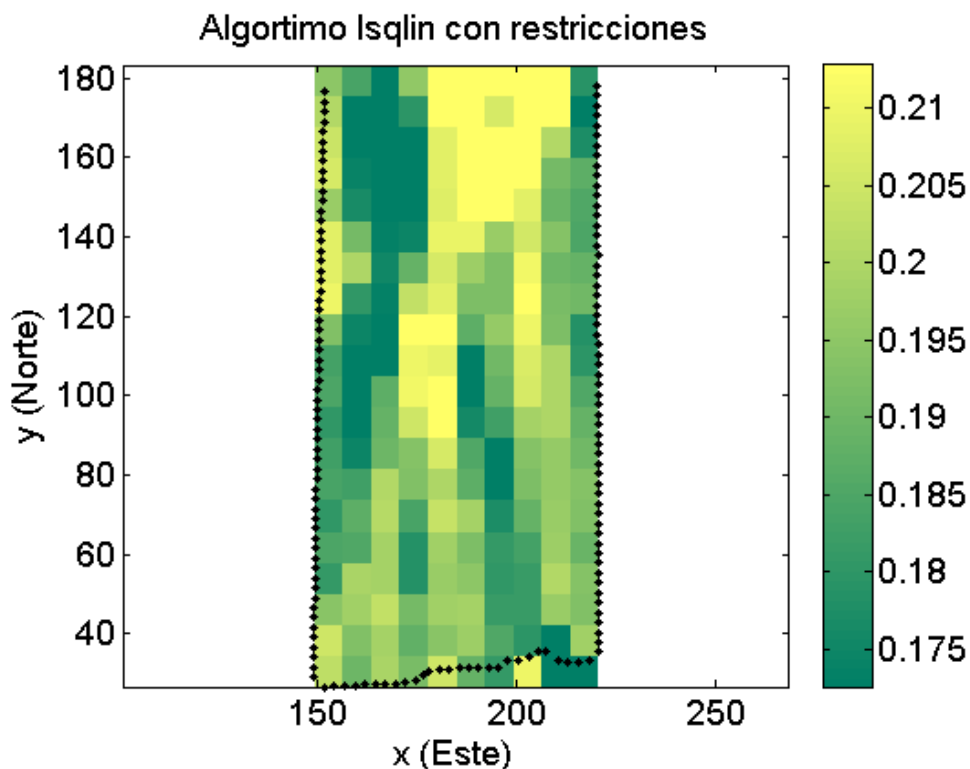


Figura 6.1.6 Modelo de lentitudes obtenido mediante el algoritmo de mínimos cuadrados lineales con restricciones.

La inversión también puede ser realizada mediante los algoritmos biomédicos expuestos en la sección 3.3.

El modelo de lentitudes obtenido mediante las técnicas de tomografía lineal mostrado en la figura 6.1.6 puede ser utilizado como modelo inicial en un algoritmo de inversión que tenga en cuenta la refracción de los rayos sísmicos en cada celda del dominio.

6.1.2 Modelización mediante un trazador basado en la ley de Snell en medios anisótropos

Mediante el análisis de las curvas de tiempos medios es posible la inferencia del modelo zonal anisótropo elíptico que mejor ajusta los diferentes descriptores estadísticos de la distribución de tiempos observados. Asimismo en esta tesis doctoral como se ha visto en la sección 2.7, se ha generalizado la ley de Snell a medios acústicos con una anisotropía de tipo elíptico, lo cual permite generalizar la inversión tomográfica a modelos de lentitudes discretos, anisótropos de tipo elíptico

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n s_k(\lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k) \Psi_k(\mathbf{x}), \quad (6.5)$$

donde $\Psi_k(\mathbf{x})$ son las ya comentadas funciones de base de la discretización (funciones constantes a trozos). En este caso el número de incógnitas del problema inverso es $3n$ y consiste en hallar:

$$\mathbf{s}^\dagger = \left(\{ \lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k \}_{k=1, \dots, n} \right) \in \mathbb{R}^{3n}, \text{ donde:}$$

$$c(\mathbf{s}^\dagger) = \min_{\mathbf{s} \in S} (c(\mathbf{s})),$$

$$\text{con } S = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{L} \left(\{ \lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k \}_{k=1, \dots, n} \right) \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{U} \left(\{ \lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k \}_{k=1, \dots, n} \right) \right\} \quad (6.6)$$

$$\text{y } c(\mathbf{s}) = \left\| M\mathbf{s} - \mathbf{t} \right\|_2^2 + \varepsilon^2 \left\| \mathbf{s} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \left(\{ \lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k \}_{k=1, \dots, n} \right) \right\|_2^2.$$

En este caso los modelos \mathbf{L} , \mathbf{U} que restringen los parámetros de anisotropía del medio, así como el modelo macroscópico de referencia $\mathbf{s}_{\text{ref}} \left(\{ \lambda_k, s_{\max,k}, \alpha_k \}_{k=1, \dots, n} \right)$ pueden ser igualmente deducidos del análisis de las curvas de tiempos medios (figura 6.1.7). Esto será uno de los desarrollos futuros de esta metodología y constituye el paso previo a la tomografía sísmica en medios elásticos transversalmente isótropos, como se comentó en el capítulo segundo.

En la figura 6.1.7 se muestra la comparación entre los tiempos predichos mediante un modelo macroscópico anisótropo elíptico con los siguientes parámetros

$$V_{\max} \text{ (km/s)} = 5.3, \quad \lambda = 0.97 \quad \text{y} \quad \alpha = 65^\circ.$$

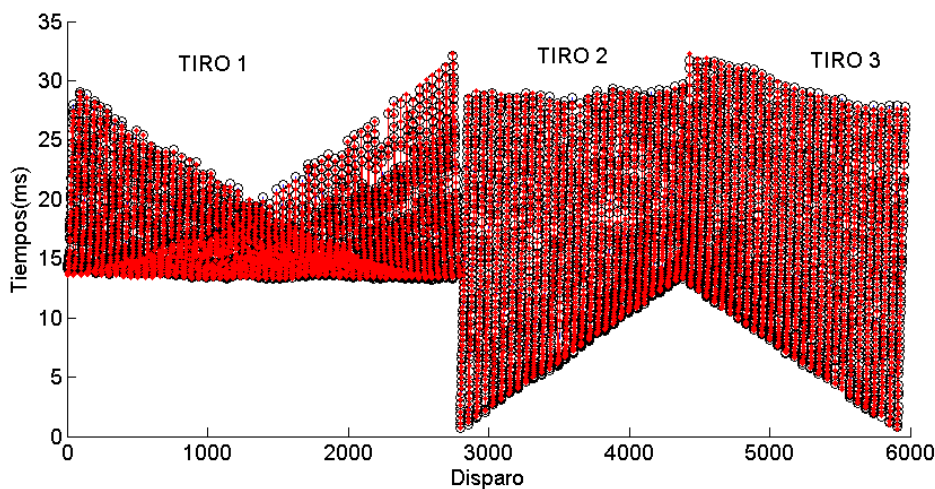


Figura 6.1.7 Tiempos predichos mediante un modelo macroscópico anisótropo elíptico con los siguientes parámetros: V_{max} (km/s) = 5.3, $\lambda = 0.97$ y $\alpha = 65^\circ$. Modelo de lentitudes obtenido mediante el algoritmo de mínimos cuadrados lineales con restricciones.

Cabe observar, para este macizo rocoso, la calidad del ajuste de los tiempos observados que se obtienen con un modelo macroscópico tan sencillo como el anteriormente comentado, con lo cual es de esperar que la inversión anisótropa (6.6) con modelo de referencia y límites de inversión proporcionados por las curvas de tiempos medios, mejore aún dicho ajuste. La inversión anisótropa proporcionaría la variación local de la anisotropía del medio entorno al modelo de referencia proporcionado por las curvas de tiempos medios.

La adaptación de los algoritmos de trazado de rayos al caso anisótropo utilizando la ley de Snell expuesta en la sección 2.7 constituye también una de las líneas de investigación futuras que surgen de esta tesis doctoral.

6.2 Las curvas de tiempos medios y el Análisis de Incertidumbre

Finalmente se muestra como las informaciones proporcionadas por las curvas de tiempos medios pueden ser utilizadas en el análisis de incertidumbre del modelo solución.

Las curvas de tiempos medios proporcionan un modelo macroscópico inicial de velocidades y un conjunto S de restricciones

$$S = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{L} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{U} \}, \quad (6.7)$$

donde

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n s_k \Psi_k(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{s}_{\{\Psi_1(\mathbf{x}), \dots, \Psi_n(\mathbf{x})\}} \right), \quad (6.8)$$

que estabilizan la inversión según los métodos de regularización de los problemas inversos mal planteados $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}$, tal como establecen Tikhonov y Arsenin.

Finalmente los valores \mathbf{L} , \mathbf{U} proporcionados por las curvas de tiempos medios pueden ser utilizados en el análisis de incertidumbre del problema sísmico-tomográfico inverso mediante el algoritmo denominado *Geometric Sampling* (Fernández Martínez J. L. et al, 2010) que consiste en:

1.- Dada una solución \mathbf{s}_{sol} del problema inverso

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} \left\| \mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{t} \right\| + \varepsilon^2 \left\| \mathbf{s} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \right\|, \quad (6.9)$$

se realiza una descomposición espectral de \mathbf{s}_{sol}

$$\mathbf{s}_{\text{sol}} = \sum_{k=1}^p \mu_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T. \quad (6.10)$$

2.- Fijados los modos principales de \mathbf{s}_{sol}

$$\{ \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^T \}, \quad (6.11)$$

se buscan los escalares α_k : $\mathbf{s}_\alpha = \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$, con $\mathbf{L} \leq \mathbf{s}_\alpha \leq \mathbf{U}$, lo cual origina un politopo convexo en el espacio \mathbb{R}^p .

3.- Se muestrean puntos α^i , con $i = 1, \dots, N_T$, dentro de dicho politopo, mediante un algoritmo de muestreo disperso.

4.- Se reconstruyen los modelos muestreados

$$\mathbf{s}_{\alpha^i} = \sum_{k=1}^p \alpha_k^i \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, \quad i = 1, \dots, N_T. \quad (6.12)$$

5.- Se resuelve el problema directo asociado a cada uno de estos modelos y se calcula su error de predicción relativo

$$E^i = \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{s}_{\alpha^i}) - \mathbf{t}^{\text{obs}}\|}{\|\mathbf{t}^{\text{obs}}\|}, \quad i = 1, \dots, N_T. \quad (6.13)$$

6.- Se seleccionan aquellos modelos cuyo E^i asociado es menor que una cierta tolerancia y se confeccionan los mapas de incertidumbre como se muestra en Fernández Muñiz (2012).

El muestreo realizado por *Geometric Sampling* constituye una aproximación fiable de la región no lineal de equivalencia del problema sísmico-tomográfico no lineal, según se ha mostrado (figura 4.2.2).

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Como ha sido reseñado en el capítulo de Síntesis y Objetivos de la tesis doctoral, este proyecto de tesis surge de la modelización geotécnica por métodos no destructivos, del macizo granítico GRIMSEL (proyecto FEBEX, Nagra, Suiza) que en 1997 fue elegido por la Empresa Nacional de Residuos S.A. (ENRESA) como uno de los posibles cementerios nucleares españoles.

Esta tesis doctoral consta de las siguientes contribuciones:

1. Aportar un análisis metodológico del problema inverso sísmico-tomográfico en transmisión que incluye:
 - a) Un análisis de la propagación de las ondas en medios acústicos y elásticos.
 - b) El planteamiento matemático del problema inverso sísmico-tomográfico en transmisión, de los algoritmos de trazado de rayos para la resolución del problema directo y de los algoritmos numéricos para la resolución del problema inverso, tanto lineales como no lineales.
2. El desarrollo de diferentes algoritmos de trazados de rayos en medios geológicos que presentan heterogeneidades de diferente tipo. Se desarrollaron tanto trazadores lineales que aproximan dicho problema, como métodos de tiro que se basan en el uso de la ley de Snell en el dominio geológico discretizado. Dicho algoritmo se ha generalizado al caso de medios geológicos con anisotropía acústica de tipo elíptico, para lo cual fue necesario generalizar la ley de Snell a dicho tipo de medios. Aunque dicha generalización todavía no se ha enviado a publicación, este trabajo constituye también una originalidad de dicha tesis aparte de los algoritmos que han sido publicados sobre las curvas de tiempos medios.
3. El problema inverso sísmico-tomográfico en transmisión es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard, y debido al mal condicionamiento del problema inverso discreto, los errores en los datos (tiempos de viaje observados de las ondas P) se transmiten a los parámetros del modelo (modelo de lentitudes del medio) a través del algoritmo de inversión produciendo soluciones espurias, carentes de todo significado físico. La incertidumbre en el problema inverso en tomografía proviene del ruido en los datos (trazas sísmicas), de la cobertura parcial del dominio objeto de estudio, así como de las hipótesis y aproximaciones numéricas adoptadas en el modelo matemático (caso por ejemplo de la hipótesis de isotropía en un macizo anisótropo). Por lo tanto es importante poseer una herramienta preinversión que sirva para identificar dichos errores,

poder eventualmente filtrarlos, y finalmente inferir información a priori (previa a la inversión) que ayude a guiar los algoritmos de inversión y a obtener soluciones plausibles con significado geofísico. En esto se fundamenta la solución aportada por Tikhonov y Arsenin para convertir los problemas inversos mal planteados en problemas condicionalmente bien planteados. Las curvas de tiempos medios constituyen un método preinversión que proporcionan el conjunto de soluciones correctas o admisibles. Estos descriptores estadísticos de la distribución teórica de los tiempos observados son válidos en medios zonalmente isótropos así como en medios que presentan zonalmente anisotropías de tipo elíptico. Se presentan las curvas de tiempos medios estándar (medias y desviaciones típicas) así como sus descriptores robustos (mediana, curvas de percentiles, rango intercuartil, etc) en problemas sísmico-tomográficos en transmisión.

4. Asimismo, las curvas de tiempos medios constituyen una herramienta sencilla de interpretación geológica dado que sirven para diferenciar las anomalías del medio geológico de las posibles causas de error en la adquisición de los tiempos observados. El análisis, detección y posible filtrado de datos anómalos (“outliers”) es uno de los pasos más importantes en todo problema inverso real, dado que forma parte del análisis de calidad de los datos. Normalmente en muchos problemas inversos no se dispone de dichos métodos y se procede a realizar una inversión “a ciegas” haciendo un uso avanzado de las técnicas de regularización. En cierto modo esta es una manera de paliar matemáticamente el desconocimiento que se posee de los datos observados, así como del conjunto de soluciones plausibles del problema inverso. La metodología aportada por las curvas de tiempos medios, aunque no prejuzga el uso de técnicas y de métodos avanzados de regularización, procede más bien al contrario: se parte de un análisis del espacio de datos y del espacio de modelos mediante modelos muy sencillos homogéneos e isótropos (análisis unizonal). Dicho análisis se va afinando mediante modelos más complicados (zonalmente isótropos o zonalmente elípticamente anisótropos) según indican las diferentes escalas de heterogeneidad de los datos observados. Como fruto de este análisis y del ajuste de las curvas de tiempos medios se obtiene un modelo macroscópico del medio que explica una gran parte de la variabilidad observada en los datos (“background model”) y que mediante técnicas de inversión se puede detallar o refinar aún más. Por lo tanto, las curvas de tiempos medios nos proporcionan el conjunto de soluciones admisibles para estabilizar dichas inversiones.

Las curvas de tiempos medios pueden ser utilizadas también en el diseño de matrices de pesos en el espacio de datos. Con estas matrices se modifica el producto escalar en dicho espacio de datos y por lo tanto la manera de realizar la proyección.

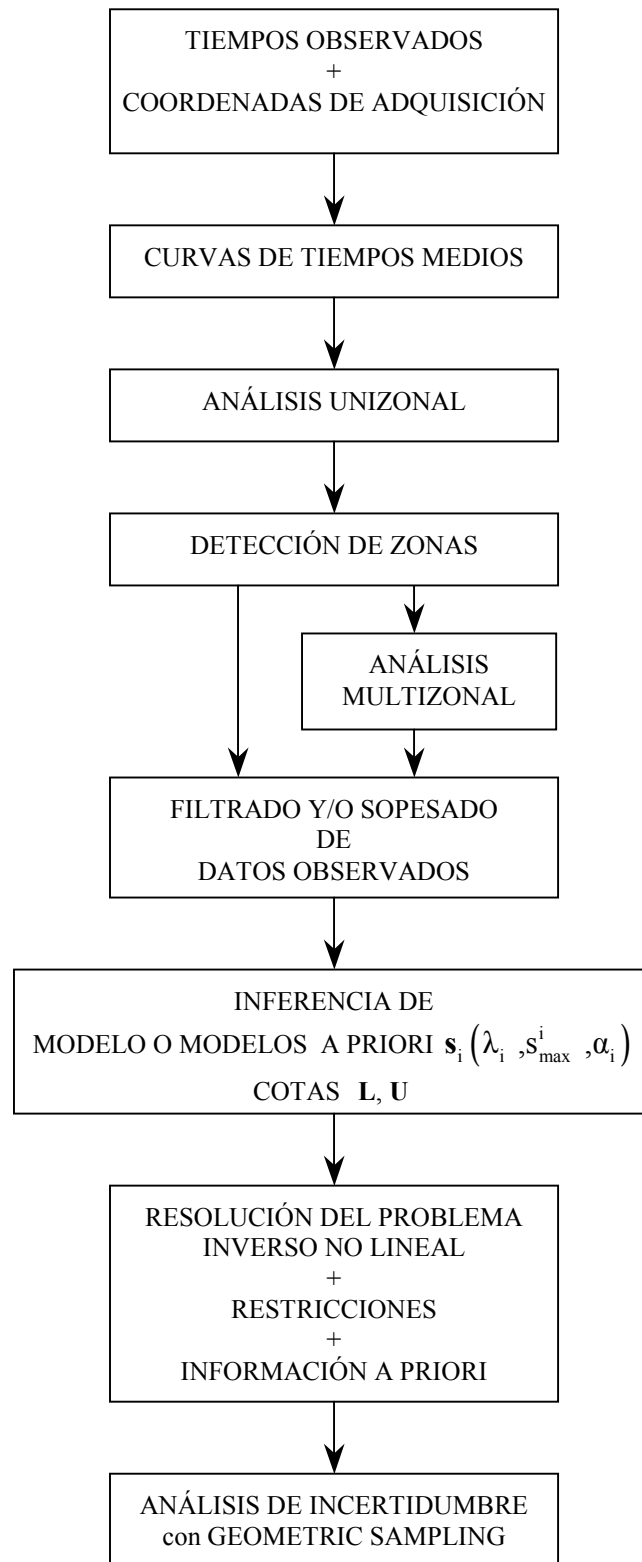
Se ha mostrado como en el conjunto de datos GRIMSEL, procediendo de esta manera, no son necesarias las técnicas de regularización de Tikhonov y que los modelos hallados

mediante técnicas de tomografía lineal (rayos rectilíneos) y técnicas de tomografía no lineal (métodos de disparo basados en la ley de Snell generalizada y resolución iterativa del problema inverso) poseen una estructura similar. Esta circunstancia se debe a que el macizo es débilmente anisótropo, lo que suele ser muy corriente en muchos medios geológicos.

La metodología aportada tiene características comunes con los métodos de inversión multiescala utilizando, por ejemplo, inversión en bases de ondículas.

5. Las curvas de tiempos medios aportan un espacio de restricciones para el modelo de lentitudes (hiperprisma en el espacio n -dimensional) que es una información primordial en el análisis de incertidumbre no lineal del problema inverso sísmico-tomográfico mediante el algoritmo denominado “*Geometric sampling*”, es decir, hallar las soluciones equivalentes pertenecientes al conjunto de soluciones plausible aportado por las curvas de tiempos medios. Esto constituirá, igualmente, una de las líneas futuras de investigación.
6. Finalmente, la metodología que se ha presentado para la resolución del problema tomográfico inverso en transmisión puede ser adaptada a otros problemas inversos en sísmica, como el problema inverso en reflexión o el problema inverso VSP (vertical seismic profile) de gran aplicación en el mundo de la exploración petrolífera. Hay que reseñar que la investigación en modelos matemáticos utilizados en exploración y producción petrolífera es claramente escasa en nuestro país, dado que apenas existen grupos de investigación que trabajen en dicho terreno. Asimismo se pretende generalizar esta metodología al caso del problema tomográfico en medios elásticos (Full Wave Inversion), si bien en este último caso las curvas de tiempos medios aportarían sólo información acústica, y por lo tanto la tomografía acústica (tiempos de llegadas de las ondas P) no procesa toda la información que aportan las trazas sísmicas. No obstante la tomografía acústica suele ser un paso previo a la elástica. Esta es otra de las líneas de investigación futuras. Dada la complejidad de dichos problemas y la importancia de poseer datos reales, se tiene la firme intención de llevar a cabo esta línea de investigación con diferentes grupos de investigación de las Universidades de Berkeley y de Stanford, con los cuales el grupo de investigación en el que se encuadra esta tesis, posee relación.

Como colofón a la tesis, el siguiente cuadro resume la metodología que se ha diseñado en esta tesis doctoral. El principio de Occam en inversión (o *lex parsimoniae*) indica que entre varias hipótesis aquella que implica menos asunciones debe de ser seleccionada. La metodología de la curvas de tiempos medios siguen, en su génesis, dicho principio.



Bibliografía Adicional

Se incluye en esta bibliografía adicional aquellas referencias que no aparecen en las bibliografías que aporta cada uno de los artículos que compendian esta tesis.

- [1] Aki, K., and P. G. Richards, (1980) “Quantitative Seismology: Theory and Methods”, Vol. II, *Freeman*, New York, Chapter 12.
- [2] Anderson, D. L., and A. M. Dziewonski, (1984), “Seismic tomography”, *Scientific American* 251, n° 10, pp. 60-68.
- [3] Backus, G., and F. Gilbert, (1968), “The resolving power of gross earth data”, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* n° 16, pp. 169-205.
- [4] Backus, G., and F. Gilbert, (1970), “Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data”, *Philos. Trans. R. Soc. London* 266A, pp. 123-192.
- [5] Barnett, S., (1990), “Matrices-Methods and Applications”, *Clarendon Press*, Oxford, Chapters 6 and 10.
- [6] Berryman, J. G., (1989a), “Weighted least-squares criteria for seismic traveltime tomography”, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* n° 27, pp. 302-309.
- [7] Berryman, J. G., (1989b), “Fermat's principle and nonlinear traveltime tomography”, *Phys. Rev. Lett.* n° 62, pp. 2953-2956.
- [8] Berryman, J. G. and R. V. Kohn, (1990), “Variational constraints for electrical impedance tomography”, *Phys. Rev. Lett.* n° 65, pp. 325-328.
- [9] Berryman, J. G., (1991), “Lecture Notes on Nonlinear Inversion and Tomography”, *Lawrence Livermore National Laboratory*, University of California.
- [10] Berryman, J. G., (1991), “Convexity properties of inverse problems with variational constraints”, *J. Franklin Inst.* n° 328, pp. 1-13.
- [11] Berryman, J. G., (1996), “Nonlinear least squares and regularization”, *Stanford Exploration Project*, n° 7, pp.
- [12] Bleistein, N., (1984), “Mathematical Methods for Wave Phenomena”, *Academic Press*, New York.
- [13] Bois P., M. La Porte, M. Lavergne and G. Thomas (1972), “Well to well seismic measurements”. *Geophysics*, n° 37, pp. 471-480.
- [14] Bording, G., R. P., A. Gersztenkorn, L. R. Lines, J. A. Scales, and S. Treitel, (1987), Applications of seismic travel-time tomography, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* n° 90, pp. 285-303.

- [15] Burkhard, N. R., (1980), “Resolution and error of the back projection technique algorithm for geophysical tomography”, *Lawrence Livermore National Laboratory preprint*, UCRL52984.
- [16] Claerbout, J. F., and F. Muir, (1973), “Robust modeling with erratic data”, *Geophysics* n° 38, pp. 826-844.
- [17] Daily, W., and E. Owen, (1991), “Cross-borehole resistivity tomography”, *Geophysics* n° 56, 1228-1235.
- [18] Daley, P.F. and F. Hron, (1977), “Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media”, *Bull. Seis. Soc. Am.* n° 67, pp. 661-675.
- [19] Dyer, B. C., and M. H. Worthington (1988), Seismic reflection tomography: a case study, *First Break* Vol 6, n° 11, pp. 354-366.
- [20] Fernández Martínez, J.L., M. Tompkins, T. Mukerji, and D. Alumbaugh, (2010), “Geometric Sampling: An Approach to Uncertainty in High Dimensional Spaces, Combining Soft Computing in Data Analysis”. *Adv. in Intell. and Soft Comp.* n° 77, pp. 247-254.
- [21] Fernández Martínez, J.L., M. Z. Fernández Muñiz and M. Tompkins, (2012), “On the topography of de cost functional in linear and nonlinear inverse problems”. *Geophys.* n° 77, (1), pp. 1-15.
- [22] Fernández Muñiz, M.Z., (2012), ”Problemas inversos en espacios de altas dimensiones y técnicas de reducción de parámetros”. Tesis. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.
- [23] Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, (1963), “The Feynman Lectures on Physics”, *Addison-Wesley*, Reading, Massachusetts, Vol. I, Chapter 26 and Vol. II, Chapter 19.
- [24] Franklin, J. N., (1970), “Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems”, *J. Math. Anal. Appl.* n° 31, pp. 682-716.
- [25] García Gonzalo, E. (2011), ” Avances en el análisis teórico del algoritmo Particle Swarm Optimization. Aplicación a la resolución de problemas inversos”. Tesis. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.
- [26] Gilbert, P., (1972), “Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections”, *J. Theor. Biol.* n° 36, pp. 105-117.
- [27] González , R., R. Woods, (1996), “Tratamiento Digital de Imágenes”. *Addison-Wesley/Díaz de Santos*.
- [28] Gordon, R., (1974), “A tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Techniques)”, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* NS-21, pp. 78-93.

- [29] Hadamard, J., (2003) [1923], “ Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations”, Dover Phoenix editions, Dover Publications, New York.
- [30] Herman, G. T., (1980), “Image Reconstruction from Projectione - The Fundamentals of Computerized Tomography”, *Academic*, New York, Chapter 6, pp. 100-107.
- [31] Herman, G. T., A. Lent, and S. Rowland, (1973), “ART: Mathematics and applications. A report on the mathematical foundations and on the applicability to real data of the Algebraic Reconstruction Techniques”, *J. Theor. Biol.* n° 42, pp. 1-32.
- [32] Ivansson, S., (1983), Remark on an earlier iterative tomographic algorithm, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* n° 75, pp. 855-860.
- [33] Ivansson, S., (1987), “Crosshole transmission tomography, Seismic tomography with applications in global seismology and exploration geophysics”, *D. Reidel Publishing company*, Dordrecht .
- [34] Jackson, P. D. and D. M. McCann, (1997), Cross-hole seismic tomography for engineering site investigation, *Geological Society, London, Engineering Geology Special Publications*, n°12, pp. 247-264.
- [35] Jordan, T. H., and J. N. Franklin, (1971), “Optimal solutions to a linear inverse problem in geophysics”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* n° 68, pp. 291-293.
- [36] Kaczmarz, S., (1937), “Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichungen”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett. A*, pp. 355-357.
- [37] Kennet, B. L. N., (1983), “Seismic Wave Propagation in Stratified Media”, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- [38] La Porte, M., J. Lakshmanan, M. Lavergne, and C. Willm, (1973). Mesures sismiques par transmission, Application au génie civil, *Geophysical Prospecting*, n° 21, pp. 146-158.
- [39] Lavergne, M., (1986), “Méthodes Sismiques”, *Editions Technip*, Paris, Chapter 4 and 5, pp. 83-174.
- [40] Levenberg, K., (1944), “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares”, *Quart. Appl. Math.* n° 2, pp. 164-168.
- [41] Luneburg, R. K., (1964), “Mathematical Theory of Optics”, *University of California Press*, Berkeley.
- [42] Lytle, R. J., and K. A. Dines, (1980), “Iterative ray tracing between boreholes for underground image reconstruction”, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* n° 18, pp. 234-240.

- [43] Marquardt, D. W., (1963), "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters", *SIAM J. Appl. Math.* n° 11, pp. 431-441.
- [44] Marquardt, D. W., (1970), "Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation", *Technometrics* n° 12, pp. 591-612.
- [45] McCann, D. M., P. Grainger, and C. McCann, (1975). "Interborehole acoustic measurements and their use in engineering geology". *Geophysical prospecting*, n° 25, pp. 50-69.
- [46] Menke, W., (1984). "The resolving power of cross-borehole tomography". *Geophysical Research Letters*, n° 11, pp. 105-108.
- [47] Moore, E. H., (1920), On the reciprocal of the general algebraic matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.* n° 26, pp. 394-395.
- [48] Natterer, F., (1986), "The Mathematics of Computerized Tomography", *Wiley*, New York, Chapter V.
- [49] Nelder, J. A., and R. Mead, (1965), "A simplex method for function minimization", *Computer J.* n° 7, pp. 308-313.
- [50] Parker, R.L., (1994), "Geophysical Inverse Theory", *Princeton University Press*, Princeton, N.J.
- [51] Peterson, J.E., Paulsson, B.N.P. and McEvelly, T.V., (1985). "Applications of algebraic reconstruction Techniques to crosshole seismic data", *Geophysics*, n° 50, pp. 1566-1580.
- [52] Penrose, R., (1955a), "A generalized inverse for matrices", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* n° 51, pp. 406-413.
- [53] Penrose, R., (1955b), "On best approximation solutions of linear matrix equations", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* n° 52, pp. 17-19.
- [54] Prothero, W. A., W. J. Taylor, and J. A. Eickemeyer, (1988), "A fast, two-point, threedimensional raytracing algorithm using a simple step search method", *Bull. Seismol. Soc. Am.* n° 78, pp. 1190-1198.
- [55] Rao, C. R., and S. K. Mitra, (1971), "Generalized Inverse of Matrices and Its Applications", *Wiley*, New York.
- [56] Richardson, R. M., and G. Zandt, (2003), "Inverse Problems in Geophysics", *Department of Geosciences*, University of Arizona.
- [57] Ramírez, A. L., (1986). "Recent experiments using geophysical tomography in fractured granite", *Proc. IEEE.*, n° 74, pp. 347-352.

- [58] Ramachandran, G. N., and A.V. Lakshminarayanan, (1971), Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms, *Proc Natl Acad Sci USA*. Sep; n° 68(9), pp. 2236-2240.
- [59] Ramakrishnan, R. S., S. K. Mullick, R. K. S. Rathore, and R. Subramanian, (1979), Orthogonalization, Bernstein polynomials. and image restoration, *Appl. Opt.*, n° 18, pp. 464-468.
- [60] Scales, J. A., and L. Tenorio, (2001), “Prior information and uncertainty in inverse problems”, *Geophys.*, 66, 389-397.
- [61] Schuster, G. T., (2007), “Basics of Seismic Wave Theory” . Notes for course. Capetown University.
- [62] Shepp, L., and B. F. Logan (1974), Reconstructing interior head tissue from x-ray transmissions, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, n° 21, pp. 228 - 236.
- [63] Slawinski, M.A. (2003), “Seismic Waves and Rays in Elastic Media”, Handbook of Geophysical Exploration, Seismic Exploration, vol 34, Pergamon, Oxford, U.K.
- [64] Smith, M. L., and J. N. Franklin, (1969), “Geophysical application of generalized inverse theory”, *J. Geophys. Res.* n° 74, pp. 2783-2785.
- [65] Smith, J., and B. C. Dyer, (1990), Seismic tomography as a tool for monitoring condition of a concrete dam, *Proc. Instn Civ. Engrs*, Part 2, n° 89, pp. 289-293.
- [66] Spencer, T.W., J.R. Sonnad, and T.W. Butler, (1982), Seismic Q; Stratigraphy or Dissipation, *Geophysics*, n° 47, pp. 16-24.
- [67] Strang, G., (1980), “Linear Algebra”, *Academic Press*, Inc., New York, E.U.A.
- [68] Strang, G., (1986), “Introduction to Applied Mathematics”, *Wellesley-Cambridge Press*, Wellesley, MA, Chapter 8, pp. 665-734.
- [69] Tanabe, K., (1971), “Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications”, *Numer. Math.* n° 17, pp. 203-214.
- [70] Tarantola, A., (1984), “Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation”, *Geophysics* n° 49, pp. 1259-1266.
- [71] Thomsen, L., (1986), “Weak elastic anisotropy”, *Geophysics*, n° 51, pp. 1954-1966.
- [72] Tikhonov, A.N., (1963), “Solutions of incorrectly formulated problems and the regularization method”, *Soviet Math. Dokl*, 4, 1035-1038.
- [73] Tikhonov, A.N., and V.Y. Arsenin, (1977), “Solution of ill-posed problems”, *V. H. Winston and Sons*, 258 pp.

- [74] Vidale, J. E., (1988), "Finite-difference calculation of travel time", *Bull. Seismol. Soc. Am.* n° 78, pp. 2062-2076.
- [75] Waters, K. H., (1978), "Reflection Seismology", *John Wiley and Sons*, New York.
- [76] Whitham, G. B., (1974), "Linear and Nolinear Waves", *Wiley*, New York, Chapters 7, 11 and 14.
- [77] Worthington, M. H., I.M. Mason and P. M. Wheller, (1983), Application of seismic tomography in mineral exploration, *Trans. Instn. Min. Metall*, pp. 209-213.
- [78] Zhdanov, M. S. (2002), "Geophysical inverse theory and regularization problems". *Methods in Geochemistry and Geophysics*, Número 36. Elsevier.

NOTAS

ANEXOS

A.1 Programación de trazadores

Como se ha comentado, el paso más costoso en los algoritmos tomográficos es el que nos conduce a la estimación de un nuevo modelo velocidades a partir de la resolución iterativa del problema inverso, lo cual implica la resolución también iterativa del problema directo de trazado de rayos sísmicos, dado que en el caso de medios geológicos la aproximación de altas frecuencias de tipo rayo se considera válida en general. De ahí la importancia de diseñar un trazador computacionalmente eficaz.

La primera decisión fue escoger el método de discretización mediante celdas o bloques de lentitudes constantes (discretización de tipo Lagrange P0), que suele ser el que se adopta en la mayoría de los trazadores. Asimismo la modelización mediante las curvas de tiempos medios mostró que el macizo objeto de estudio poseía un comportamiento cercano a un modelo de lentitudes homogéneo y débilmente anisótropo. Se pueden adoptar otros tipo de discretizaciones.

Se han diseñado y programado dos trazadores. En ambos el método de trazado de rayos que se adopta, es un método de disparo. En el primer programa de trazado se utilizan rayos rectos, esto nos permite, entre otras cosas, obtener un modelo inicial de lentitudes sin gran coste computacional. El segundo programa de trazado adopta un método de disparo fundamentado en la ley de Snell, lo que parece más correcto, pues el índice de refracción de los medios geológicos no es constante y los rayos en tomografía sísmica no son rectos. Con el fin de evitar posibles situaciones anómalas de curvatura, se desestima la posibilidad de pasar de refracción a reflexión en el trazado de los rayos, dado que en nuestro caso se busca la señal transmitida no reflejada.

Aunque los métodos de disparo, en general no se recomiendan en modelos de celdas de lentitudes constantes (Berryman, 1991), lo hemos considerado adecuado en nuestro caso por los siguientes motivos:

- Buscamos un modelo de lentitudes relativamente suave.
- Se sospecha de la existencia de anisotropía elíptica, lo que enmascararía el efecto de la curvatura de rayos.
- Podemos aplicar la ley de Snell, en concreto la versión generalizada, en la frontera de las celdas, lo que va generando la curvatura de los rayos.

Aún, aunque algunos autores (Berryman, 1991) consideran que las fronteras de las celdas de lentitud constante, resultan excesivamente artificiales, el hecho de que el usuario pueda ajustar la finura de la malla (compensando el correspondiente coste con la existencia de procesadores cada día más potentes) permite aprovechar la ganancia en exactitud que se consigue con la aplicación de la ley de Snell y a la postre el cumplimiento del principio de Fermat.

Trazador Homogéneo

Sin ánimo de ser exhaustivo, el esquema básico de este trazador es el siguiente:

1. Se realiza la lectura de los ficheros de coordenadas de emisores y receptores.
2. Se calculan los 4 vértices del cuadrilátero que delimita el dominio de estudio.
3. Se calcula la malla (ecuaciones de las rectas que forman las celdas) de acuerdo con el tamaño de las celdas que fija el usuario, diferenciándose la frontera externa de la malla.
4. Se calculan:
 - a. Para cada emisor y cada receptor, la ecuación de la recta que describe la trayectoria del rayo recto que los une.
 - b. La intersección de la recta de la trayectoria del rayo con cada una de las rectas horizontales que forman la malla, no teniendo en cuenta los puntos de intersección incoherentes tales como puntos de intersecciones localizados fuera del dominio o bien “por detrás” de los emisores o receptores. Se almacenan las coordenadas de estos puntos de corte y el número de la recta horizontal de la malla donde se encuentran.
 - c. La intersección de la recta de la trayectoria del rayo con cada una de las rectas verticales que forman la malla. Observando las mismas consideraciones que en el apartado anterior.
5. Las coordenadas de los puntos de corte del rayo con la malla, se almacena en la matriz *MAUX2*, donde cada registro fila se corresponde con un punto del plano y está formado por cuatro campos. El primer campo: coordenada x del punto de corte, segundo campo: coordenada y, tercer campo: corte con una horizontal (si = h, no = 0) y cuarto campo: corte con una vertical (si = v, no = 0). El emisor y el receptor se recogen señalando que no es corte ni con vertical ni con horizontal. Un ejemplo es:

2.1178	1.2759	h	0
--------	--------	---	---

que indica que la intersección ha sido en horizontal.

Además los registros están ordenados, de forma creciente, respecto del primer campo correspondiente a la coordenada x. Esta matriz se construye en varios pasos utilizando las matrices auxiliares *MPCH*, *MPCV*, *MGLOBAL*, *MAUX1* y *VAUX3*.

6. Se calcula, para el rayo en curso, el tamaño de cada uno de los segmentos que lo forman y la celda de la malla a la que pertenece cada segmento. Se almacena el resultado en una matriz, llamada *Mrayosaux*, cuya dimensión es (*ncv*) x (*nch*), donde *ncv* es el n° de celdas verticales, y *nch* es el n° de

celdas horizontales de la malla. Esta matriz resulta muy intuitiva pues cada uno de los elementos de la matriz a_{ij} , se corresponde con la longitud del segmento del rayo que atraviesa la celda situada en la fila i y columna j .

7. Se calcula una matriz conjunta para todos los rayos del dispositivo. Se llama **Mrayos** y tiene de dimensión $(ncv) \times (nch \times nrayos)$, donde $nrayos$ es el producto del número de emisores por el número de receptores.
8. Dado el sistema de ecuaciones $Ms = t$, la matriz **Mrayos** es la matriz M , el vector t está formado por los tiempos observados, siendo el vector s el modelo de lentitudes que queremos hallar. Utilizando la subrutina del programa MATLAB®, “*lsqlin*” calculamos el modelo de lentitudes s_0 , la solución de mínimos cuadrados del sistema anterior. Esta subrutina permite acotar el intervalo de búsqueda de las componentes de la solución.
9. Se representa:
 - a. Un mapa de la matriz **Mrayos**
 - b. En una misma figura, los tiempos observados y los tiempos teóricos correspondientes al modelo de lentitudes encontrado s_0 .
 - c. Un mapa del modelo de lentitudes del dominio.

Observación

En nuestro caso de estudio, existen 3 conjuntos de datos, ya que sobre el mismo dominio, se utilizan 3 tipos de dispositivos. Por cada dispositivo o conjunto de datos se calcula una matriz de rayos (*Mrayos1*, *Mrayos2*, *Mrayos3*), pudiéndose crear una matriz general **Mrayos** con la unión de las tres.

Trazador Snell

Puesto que para el trazado de los rayos se utiliza la refracción, se producirá una curvatura de los rayos y será preciso fijar una tolerancia de captura ya que la posibilidad de alcanzar el receptor con total precisión es bastante remota. Esta es uno de los principales inconvenientes de los métodos de tiro.

Al igual que en la descripción del trazador anterior, no se pretende ser exhaustivo, comentando simplemente la estructura y los aspectos generales de este trazador, siendo la siguiente:

1. Lectura de los ficheros de coordenadas de emisores y receptores.
2. Calculo de los 4 vértices del cuadrilátero o figura que forma el dominio de estudio.
3. Generación de la malla. Se describe la malla recorriendo las celdas y generando dos matrices: *CELDAS* y *VECINAS*. En la matriz *CELDAS*, en cada fila se sitúan las coordenadas (x,y) de los cuatro vértices de una celda.

En la matriz *VECINAS* en cada fila se sitúan los números de las cuatro celdas colindantes.

4. Se inicia el trazador con un modelo inicial de lentitudes homogéneo, donde se asigna la misma lentitud a todas las celdas. En el interior de la celda la trayectoria se supone rectilínea, produciéndose refracción únicamente en la frontera, de acuerdo a las lentitudes correspondientes a cada lado de ésta. Se localizan las celdas donde se sitúan la fuente y el receptor, pues estos no tienen por que encontrarse en la frontera de la malla. Por la operatividad del programa, se busca el trazado del rayo entre un pseudoemisor y un pseudoreceptor, donde denominamos pseudoemisor al punto de intersección del segmento con extremos en el emisor y el receptor, y la frontera de la celda a la que pertenece el emisor. De forma análoga se encuentra el pseudoreceptor (si el emisor y el receptor se hallasen en la misma celda o celdas contiguas, no será preciso hallarlos). A partir de ahora simplemente los llamaremos emisor y receptor.
5. Dada una pareja de emisor-receptor, para trazar el rayo correspondiente, se considera un abanico inicial de ángulos que se utilizará para hacer un barrido de disparos y se comienza el bucle con el ángulo del abanico asociado a la dirección del rayo recto que une el emisor y el receptor.
6. La subrutina “*intersección*” proporciona como resultado: la longitud del segmento del rayo en la celda, las coordenadas de los puntos de entrada y salida y las aristas de la celda en la que estos puntos se encuentran.
7. Después de atravesar el rayo una celda, nos encontramos tres posibles situaciones:
 - Éxito: Ha llegado al receptor.
 - Fracaso: Ha llegado a la última columna de celdas y esta lejos (distancia superior a la tolerancia fijada) del receptor, o bien se ha salido por un lado de la malla o bien se ha producido reflexión.
 - Aún está en camino.

Si ha concluido con éxito, se guardan las longitudes de los segmentos del rayo en la matriz *MIJ*.

Si ha concluido con fracaso llegando a la última columna de celdas de la malla (tras atravesar toda la malla y efectuar las correspondientes refracciones, de acuerdo con el modelo de lentitudes vigente), y el rayo no llega a un entorno del receptor de acuerdo a una tolerancia fijada, entonces se incrementa el ángulo de salida en el emisor y se procede de nuevo. Si recorrido el abanico, en tamaño de ángulos creciente, no se encuentra el posible rayo, se recorre el resto del abanico a partir de ángulo inicial, ahora en orden descendente. Lo más normal es que ninguno de los rayos iniciales resulte ser el correcto (i.e. que alcance el receptor), pero a menudo el

receptor es bordeado por dos de estos rayos. Entonces la interpolación nos permite encontrar una aproximación tan fina como se quiera, es decir, se toma un nuevo conjunto de ángulos entre los ángulos iniciales de la pareja de rayos que bordea al receptor. Se trazan de nuevo rayos para este nuevo abanico, una vez más se guardan los dos más cercanos que bordean el receptor y así se continúa el proceso para intentar conseguir alcanzar el objetivo con la tolerancia e iteraciones fijadas. Si agotado completamente el abanico no hemos encontrado el rayo buscado, se renuncia al rayo de la pareja actual emisor-receptor, que no será tenido en cuenta en la inversión pues no disponemos de tiempo teórico. Si aún esta en camino, se continua con el proceso de trazado a través de las celdas. Otra opción consistiría en interpretar algunas no llegadas de la siguiente manera: aunque el frente de ondas representado por el rayo sísmico posee su primera llegada en un punto de la línea de receptores diferente al receptor, sin embargo dicho rayo alcanzaría al receptor posteriormente, una vez que éste haya avanzado y sobrepasado la línea de receptores. Por lo tanto, podría considerarse el punto donde interseca a la línea de receptores como un nuevo punto intermedio del camino, cambiándose la dirección de propagación según la línea de receptores.

Una manera de evitar dichos inconvenientes sería resolver numéricamente la ecuación de ondas, si bien esto es computacionalmente muy costoso. De hecho los métodos de tiro se inventaron para aligerar la resolución de la ecuación de ondas, que en los años 80, cuando se iniciaron los métodos tomográficos no lineales era de imposible resolución en tiempo real con los ordenadores de la época. La resolución de la ecuación de ondas es la única opción cuando se realiza tomografía en medios elásticos (full-wave inversión).

8. Se calcula una matriz conjunta para todos los rayos del dispositivo. Se llama **MIJ** y tiene de dimensión $(ncv) \times (nch \times nrayos)$, donde $nrayos$ es el producto del número de emisores por el número de receptores.
9. Dado el sistema de ecuaciones $Ms = t$, la matriz **MIJ** es la matriz M , el vector t está formado por los tiempos observados, siendo el vector s el modelo de lentitudes que queremos hallar. Utilizando la subrutina del programa MATLAB®, “*lsqlin*” calculamos el modelo de lentitudes s_1 , la solución de mínimos cuadrados del sistema anterior. Esta subrutina permite acotar el intervalo de búsqueda de las componentes de la solución .
10. Se representa:
 - a. Un mapa de la matriz **MIJ**
 - b. Los tiempos observados y los tiempos teóricos correspondientes al modelo de lentitudes encontrado s_1 .

c. Un mapa del modelo de lentitudes del dominio.

Como se comentó anteriormente, en el macizo GRIMSEL, existen 3 conjuntos de datos. Por cada dispositivo o conjunto de datos se calcula una matriz de rayos (MIJ1, MIJ2, MIJ3), creando una matriz general **MIJ** con la unión de las tres.

Hay que observar que el propio usuario o modelador puede jugar tanto con la tolerancia exigida en el entorno del receptor, así como con el tamaño de las diferencias entre dos ángulos consecutivos del abanico, debiendo encontrar un equilibrio satisfactorio entre la primera opción que disminuye el ajuste y la segunda opción que eleva el coste del algoritmo.

A.2 Programa MTCLAB

```
% PROGRAM AIM: multi-zone mean travelttime analysis and velocity
% tuning in transmission tomography experiments
%
% Authors: J.L. Fernández-Martínez, L. M. Pedruelo-González,
%
%
% Copyright (c) University of Oviedo (Spain) , November 2006
%
% This program is distributed in the hope that it will be useful, but
% WITHOUT ANY WARRANTY.
%
% Contact Dr. J.L.Fernández-Martínez with enhancements or suggestions
for changes.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
```

Installation procedure:

We suggest to create a directory called

C:\ctm

and unzip the contents of MTCLAB.rar file on it.

Enter Matlab program and add this directory to the matlab path

```
addpath c:\ctm
```

The ascii data files (source.cor, receiver.cor, time.tim) have to be in this directory.

Execute the main program from the command line

```
>>MTCLAB
```

The program works using the Matlab user interface and allows you to treat your own travelttime data files.

List of Programs:

- ```
%-----
1. mtclab: Main program with GUI.
%-----
%-----
2. function [rgeometry]=read_data
%-----
```



## A.2 Programa MTCLAB

```
% Reading source and receivers coordinates and experimental
traveltimes
%INPUT:
% None
%
%OUTPUT:
% rgeometry: recording geometry structure
%-----
3. function [zones]=read_zones(nsource,nreceiver)
%-----

% % REAGING ZONES for MTC analysis
%INPUT:
% nsource: total number of sources
% nreceiver: total number of receivers
%OUTPUT:
% zones: zones structure
%-----
4. function
 [IMtime,counter]=fill_interp(nsource,nreceiver,Mtime,ntours)
%-----
% Filling traveltime gaps by linear interpolation
%INPUT:
% nsource: total number of sources
% nreceiver: total number of receivers
% Mtime: experimental traveltime matrix
% ntours: number of interpolation tours
%OUTPUT:
% IMtime: interpolated traveltime matrix
% counter: number of interpolated values for each tour
%-----
5. function [sgf,rgf]=gather_filtering
%-----

% FILTERING ANOMALOUS GATHERS IN THE LEAST SQUARES ALGORITHM
%INPUT:
% NONE
%OUTPUT:
% sgf: source gathers numbers
% rgf: receiver gathers numbers
%-----
6. function [sgather]=sg_mtc(c,rgeom,zones,sgather);
%-----

% Experimental MTC curves for source gather
%INPUT:
% c : zone number.
% rgeometry: recording geometry structure
% zones: zones structure
%OUTPUT:
% sgather: source gather structure
%-----
7. function [rgather]=rg_mtc(c,rgeom,zones,rgather);
%-----

% Experimental MTC curves for receiver gather
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
%INPUT:
% c : zone number.
% rgeometry: recording geometry structure
% zones: zones structure
%OUTPUT:
% rgather: receiver gather structure

%-----
8. function []=MTC_graphics(zones,sgather,rgather);
%-----

% Mean travelttime graphic plots: experimental and theoretical mean
% travelttime curves and residual maps
%INPUT:
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID

%-----
9. function []=residual_maps(rgeom,zones,sgather,rgather)
%-----

% Residual maps for isotropic velocities deduced from MTC analysis.
%INPUT:
% rgeom: reording geometry structure
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID

%-----
10. function []=lowup_MTC(zones,sgather,rgather)
%-----

% Upper and lower velocity envelope curves analysis, to determine the
feasible
% velocity bandwidth where most of the points of the experimental
curve lie.
%
%INPUT:
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID
%-----

%-----
% Structure of the data (recording geoemtry and traveltimes)
%-----

% files source.cor and receiver.cor

% source and receiver data coordinates

% the minimum information contains variables xscor and yscor
%(other columns eventually could be present).
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
%
% xscor yscor
220.6740 35.28578
220.6721 37.77625
220.6707 40.26804
220.6694 42.75983
220.6671 45.25129
220.6664 47.74439
220.6647 50.23717
220.6599 52.72984
... etc

% file time.tim
% the minimum information contains variable traveltime for
% first arrivals in one column (all the times from the first source
% to the last source pasted together one behind the other). Other time
% structures could be eventually consider modifying the read_data
routine.

% first arrivals with zero value means no data.
14.530
14.450
14.360
14.250
14.230
14.150
14.210
14.250
14.210
14.150
0.000
0.000
14.300
.... etc
```

## A.2 Programa MTCLAB

```

% PROGRAM MTCLAB for Mean traveltime curves analysis
%
% PROGRAM AIM: multi-zone mean traveltime analysis and velocity
% tuning in transmission tomography experiments
%
% Authors: J.L. Fernández-Martínez, L. M. Pedruelo-González,
% Febrero 2010
%=====
=====
mess1=' MTCLAB'
mess11=' TRAVELTIME QUALITY ANALYSIS-VELOCITY TUNING IN 2D-T.
TOMOGRAPHY ';
uline='
_____';
mess2=' _____J.L.Fernández, L.M. Pedruelo _____';
mess3=' _____University of Oviedo,
2010_____';
gap=' ';
message=strvcat(gap,mess1,mess11,uline,gap,mess2,gap,mess3);
texttitle='MTCLAB: Help';
uiwait(msgbox(message,texttitle,'modal'));
if ~exist('rgeom')
% -----
% Reading traveltimes and zones of analysis
% -----
[rgeom]=read_data;
% -----
% Reading zones parameters
% -----
[nreceiver,nsource]=size(rgeom.Mtime);
[zones]=read_zones(nsource,nreceiver);
%
rgeom.Mtime=rgeom.Mtime(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send);
%
rgeom.Mdistance=rgeom.Mdistance(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones
.send);
% [nreceiver,nsource]=size(rgeom.Mtime);
nzones=length(zones.sini);
% -----
% Traveltime interpolation of gaps
% -----
message='Traveltime interpolation?';
button = questdlg(message,texttitle,'YES','NO','YES');
if isequal(button, 'YES')
 ntours=5;
 [Int_Mtime]=fill_interp(nsource,nreceiver,rgeom.Mtime,ntours);
 rgeom.Mtime=Int_Mtime;
 clear Int_Mtime;
end

figure;
pcolor(rgeom.Mtime(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title('Experimental traveltime map');
%
figure;

pcolor(rgeom.Mdistance(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');

```

## A.2 Programa MTCLAB

```
title(' Acquisition distances');
%
figure

pcolor(rgeom.Mtime(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send)./rgeom
.Mdistance(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title(' Apparent slowness field');
%

% Variables Initialisation
% -----
%
% source gather
% -----
sgather.mean=zeros(nzones,nsourse); %source gather mean time
sgather.median=zeros(nzones,nsourse); %source gather median time
sgather.std=zeros(nzones,nsourse); %source gather standard
deviation
sgather.mad=zeros(nzones,nsourse); %source gather mad
sgather.iqr=zeros(nzones,nsourse); %source gather iqr
sgather.psup=zeros(nzones,nsourse);
sgather.pinf=zeros(nzones,nsourse);
sgather.ndat=zeros(nzones,nsourse); %number of data for source
gather
%
gather.meandist=zeros(nzones,nsourse); %mean distance for each
gather
gather.stdist=zeros(nzones,nsourse); %std distance for each
gather
gather.meddist=zeros(nzones,nsourse);
gather.maddist=zeros(nzones,nsourse);
gather.iqrdist=zeros(nzones,nsourse);
gather.psupdist=zeros(nzones,nsourse);
gather.pinfdist=zeros(nzones,nsourse);
%
gather.tmc=zeros(nzones,nsourse); %theoretical mean time (s.
gather)
gather.sdc=zeros(nzones,nsourse); %theoretical std time (s.
gather)
gather.medc=zeros(nzones,nsourse);
gather.madc=zeros(nzones,nsourse);
gather.iqrc=zeros(nzones,nsourse);
gather.psupc=zeros(nzones,nsourse);
gather.pinfrc=zeros(nzones,nsourse);
%
gather.mvel=zeros(1,nzones);
gather.stdvel=zeros(1,nzones);
gather.medvel=zeros(1,nzones);
gather.madvel=zeros(1,nzones);
gather.iqrvel=zeros(1,nzones);
gather.psupvel=zeros(1,nzones);
gather.pinfvel=zeros(1,nzones);
%

% same for the receiver gather
% -----
rgather.mean=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.median=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.std=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.mad=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqr=zeros(nzones,nreceiver);
```

## A.2 Programa MTCLAB

```

rgather.psup=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinf=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.ndat=zeros(nzones,nreceiver);
%
rgather.meandist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.stdist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.meddist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.maddist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqrdist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.psupdist=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinfdist=zeros(nzones,nreceiver);
%
rgather.tmc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.sdc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.medc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.madc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqrc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.psupc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinfrc=zeros(nzones,nreceiver);
%
rgather.mvel=zeros(1,nzones);
rgather.stdvel=zeros(1,nzones);
rgather.medvel=zeros(1,nzones);
rgather.madvel=zeros(1,nzones);
rgather.iqrvel=zeros(1,nzones);
rgather.psupvel=zeros(1,nzones);
rgather.pinfvel=zeros(1,nzones);
%
% -----
% GATHER FILTERING
% -----
[sgf,rgf]=gather_filtering;
nsf=length(sgf);
nrf=length(rgf);
end
% -----
% Least squares fitting Zones loop
% -----
for c=1:nzones
% -----
% EXPERIMENTAL MTC CURVES. SOURCE GATHER
% -----
[sgather]=sg_mtc(c,rgeom,zones,sgather);
% -----
% EXPERIMENTAL MTC CURVES. RECEIVER GATHER
% -----
[rgather]=rg_mtc(c,rgeom,zones,rgather);
% -----
% -----
% LEAST SQUARES FITTING OF SLOWNESS
% -----
% -----
stm=0;
stsum2=0;
ssdsum=0;
ssdsum2=0;
smed=0;
smedsum2=0;
smad=0;
smadsum2=0;
siqr=0;
siqrsum2=0;

```

## A.2 Programa MTCLAB

```

smsup=0;
smsupsum2=0;
sminf=0;
sminfsum2=0;
%
rtm=0;
rtsum2=0;
rsdsum=0;
rsdsum2=0;
rmed=0;
rmedsum2=0;
rmad=0;
rmadsum2=0;
riqr=0;
riqrsum2=0;
rmsup=0;
rmsupsum2=0;
rminf=0;
rminfsum2=0;
%
iflag=0;
%
% -----
% zones loop
% -----
%
% SOURCE GATHER
% -----
%
for p=zones.sini(c):zones.send(c)
 if sgather.mean(c,p) > 0 % mean exists
 if nsf > 0
 for k=1:nsf
 if isequal(p,sgf(k))
 iflag=1;
 end
 end
 end
 if isequal(iflag, 0)
 stm=stm+sgather.meandist(c,p)*sgather.mean(c,p);
 stsum2=stsum2+sgather.meandist(c,p)^2;
 smed=smed+sgather.meddist(c,p)*sgather.median(c,p);
 smedsum2=smedsum2+sgather.meddist(c,p)^2;
 ssdsum=ssdsum+sgather.stdist(c,p)*sgather.std(c,p);
 ssdsum2=ssdsum2+sgather.stdist(c,p)^2;
 smad=smad+sgather.maddist(c,p)*sgather.mad(c,p);
 smadsum2=smadsum2+sgather.maddist(c,p)^2;
 siqr=siqr+sgather.iqrdist(c,p)*sgather.iqr(c,p);
 siqrsum2=siqrsum2+sgather.iqrdist(c,p)^2;
 smsup=smsup+sgather.psupdist(c,p)*sgather.psup(c,p);
 smsupsum2=smsupsum2+sgather.psupdist(c,p)^2;
 sminf=sminf+sgather.pinfdist(c,p)*sgather.pinf(c,p);
 sminfsum2=sminfsum2+sgather.pinfdist(c,p)^2;
 end
 iflag=0;
 end % if end
end % for end
%
% -----
% RECEIVER GATHER
% -----
%
for p=zones.rini(c):zones.rend(c)

```

## A.2 Programa MTCLAB

```

if rgather.mean(c,p) > 0
 if nrf > 0
 for k=1:nrf
 if isequal(p,rgf(k))
 iflag=1;
 end
 end
 end
 if iflag==0
 rtm=rtm+rgather.meandist(c,p)*rgather.mean(c,p);
 rtsum2=rtsum2+rgather.meandist(c,p)^2;
 rmed=rmed+rgather.meddist(c,p)*rgather.median(c,p);
 rmedsum2=rmedsum2+rgather.meddist(c,p)^2;
 rsdsum=rsdsum+rgather.stdist(c,p)*rgather.std(c,p);
 rsdsum2=rsdsum2+rgather.stdist(c,p)^2;
 rmad=rmad+rgather.maddist(c,p)*rgather.mad(c,p);
 rmadsum2=rmadsum2+rgather.maddist(c,p)^2;
 riqr=riqr+rgather.iqrdist(c,p)*rgather.iqr(c,p);
 riqrsum2=riqrsum2+rgather.iqrdist(c,p)^2;
 rmsup=rmsup+rgather.psupdist(c,p)*rgather.psup(c,p);
 rmsupsum2=rmsupsum2+rgather.psupdist(c,p)^2;
 rminf=rminf+rgather.pinfdist(c,p)*rgather.pinf(c,p);
 rminfsum2=rminfsum2+rgather.pinfdist(c,p)^2;
 end
 iflag=0;
end % if end
end % for end
% -----
% fitting algorithm for zone c
% -----
% -----
% calculation of isotropic velocities
% -----
sgather.mvel(c)=stsum2/stm;
sgather.stdvel(c)=ssdsum2/ssdsum;
sgather.medvel(c)=smedsum2/smed;
sgather.madvel(c)=smadsum2/smad;
sgather.iqrvel(c)=siqrsum2/siqr;
sgather.psupvel(c)=smsupsum2/smsup;
sgather.pinfvel(c)=sminfsum2/sminf;
%
rgather.mvel(c)=rtsum2/rtm;
rgather.stdvel(c)=rsdsum2/rsdsum;
rgather.medvel(c)=rmedsum2/rmed;
rgather.madvel(c)=rmadsum2/rmad;
rgather.iqrvel(c)=riqrsum2/riqr;
rgather.psupvel(c)=rmsupsum2/rmsup;
rgather.pinfvel(c)=rminfsum2/rminf;
%
fprintf('\nZone %d \n \n',c);
fprintf('
 Source gather Receiver gather
\n\n');
fprintf('Mean %5.2f %5.2f
\n',sgather.mvel(c),rgather.mvel(c));
fprintf('Median %5.2f %5.2f
\n',sgather.medvel(c),rgather.medvel(c));

```



## A.2 Programa MTCLAB

```

 fprintf('St. dev. %5.2f %5.2f
\n', sgather.stdvel(c), rgather.stdvel(c));
 fprintf('Mad %5.2f %5.2f
\n', sgather.madvel(c), rgather.madvel(c));
 fprintf('IQR %5.2f %5.2f
\n', sgather.iqrvel(c), rgather.iqrvel(c));
 fprintf('QS %5.2f %5.2f
\n', sgather.psupvel(c), rgather.psupvel(c));
 fprintf('QI %5.2f %5.2f
\n', sgather.pinfvel(c), rgather.pinfvel(c));

% -----
% theoretical MTC
% -----
for p=zones.sini(c):zones.send(c)
 sgather.tmc(c,p)=sgather.meandist(c,p)/sgather.mvel(c);
 sgather.sdc(c,p)=sgather.stdist(c,p)/sgather.stdvel(c);
 sgather.medc(c,p)=sgather.meddist(c,p)/sgather.medvel(c);
 sgather.madc(c,p)=sgather.maddist(c,p)/sgather.madvel(c);
 sgather.iqrc(c,p)=sgather.iqrdist(c,p)/sgather.iqrvel(c);
 sgather.psupc(c,p)=sgather.psupdist(c,p)/sgather.psupvel(c);
 sgather.pinf(c,p)=sgather.pinfdist(c,p)/sgather.pinfvel(c);
end
for p=zones.rini(c):zones.rend(c)
 rgather.tmc(c,p)=rgather.meandist(c,p)/rgather.mvel(c);
 rgather.sdc(c,p)=rgather.stdist(c,p)/rgather.stdvel(c);
 rgather.medc(c,p)=rgather.meddist(c,p)/rgather.medvel(c);
 rgather.madc(c,p)=rgather.maddist(c,p)/rgather.madvel(c);
 rgather.iqrc(c,p)=rgather.iqrdist(c,p)/rgather.iqrvel(c);
 rgather.psupc(c,p)=rgather.psupdist(c,p)/rgather.psupvel(c);
 rgather.pinf(c,p)=rgather.pinfdist(c,p)/rgather.pinfvel(c);
end
end % end of zones loop
% -----
% GRAPHICS, times diferences
% -----
MTC_graphics(zones, sgather, rgather);
residual_maps(rgeom, zones, sgather, rgather);
% -----
% UPPER AND LOWER VELOCITY ANALYSIS
% -----
message='UPPER AND LOWER VELOCITY ANALYSIS?';
button = questdlg(message, texttitle, 'YES', 'NO', 'YES');
if isequal(button, 'YES')
 lowup_MTC(zones, sgather, rgather);
end

```

## A.2 Programa MTCLAB

```
function [rgeometry]=read_data
%-----

% Reading source and receivers coordinates and experimental
traveltimes
%INPUT:
% None
%
%OUTPUT:
% rgeometry: recording geometry structure
%-----

% -----
% reading sources coordinates
% -----
[FileName,PathName] = uigetfile('*.cor','Select the source file');
fsource=strcat(PathName,FileName);
sdata=load(fsource);
[nsource, ncol]=size(sdata);
rgeometry.nsource=nsource;
prompt={'x-source column','y-source column'};
name='Sources coordinates';
numlines=1;
defaultanswer={'2','3'};
answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
answer=char(answer);
values=str2num(answer);
cx=values(1);
cy=values(2);
xs=sdata(:,cx);
ys=sdata(:,cy);
rgeometry.xs=xs;
rgeometry.ys=ys;
clear sdata;
% -----
% reading receivers coordinates
% -----
[FileName,PathName] = uigetfile('*.cor','Select the receiver file');
frec=strcat(PathName,FileName);
rdata=load(frec);
[nreceiver, ncol]=size(rdata);
rgeometry.nreceiver=nreceiver;
prompt={'x-receiver column','y-receiver column'};
name='Receivers coordinates';
numlines=1;
defaultanswer={'2','3'};
answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
answer=char(answer);
values=str2num(answer);
cx=values(1);
cy=values(2);
xr=rdata(:,cx);
yr=rdata(:,cy);
rgeometry.xr=xr;
rgeometry.yr=yr;
clear rdata;
% -----
% reading traveltimes
% -----
[FileName,PathName] = uigetfile('*.tim','Select the traveltime file');
fdata=strcat(PathName,FileName);
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
tdata=load(fdata);
[ntimes, ncol]=size(tdata);
if ntimes ~= nsource*nreceiver
 h=errorlg('erroneous data files');
 close(h);
 return;
end
prompt={'time column'};
name='traveltime data';
numlines=1;
defaultanswer={'1'};
answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
answer=char(answer);
values=str2num(answer);
ctime=values(1);
dtime=tdata(:,ctime);
clear tdata;
%-----
%-----
% Putting the data in MATRIX Mtime (each column corresponds to a
source)
%-----
%-----
rgeometry.Mtime=zeros(nreceiver,nsource);
for j=1:nsource
 rgeometry.Mtime(:,j)=dtime((j-1)*nreceiver+1:1:j*nreceiver,1);
end
%-----
%-----
% Distace matrix calculation (each column corresponds to a different
% source)
%-----
%-----
rgeometry.Mdistance=zeros(nreceiver,nsource);
for i=1:nreceiver;
 for j=1:nsource
 rgeometry.Mdistance(i,j)=sqrt((xs(j)-xr(i))^2+(ys(j)-
yr(i))^2);
 end
end
end
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
function [zones]=read_zones(nsource,nreceiver)
%-----
% % READING ZONES for MTC analysis
%INPUT:
% nsource: total number of sources
% nreceiver: total number of receivers
%OUTPUT:
% zones: zones structure
%-----
%-----
prompt={'Number of zones for MTC analysis'};
name='READING ZONES OF ANALISIS';
numlines=1;
defaultanswer={'1'};
answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
answer=char(answer);
nzones=str2num(answer);
% initialization
zones.sini=zeros(1,nzones);
zones.send=zeros(1,nzones);
zones.rini=zeros(1,nzones);
zones.rend=zeros(1,nzones);
k=1;
while k <= nzones
 for i=1:nzones
 prompt={'Initial source','Final Source', 'Initial Receiver',
'Final Receiver'};
 name=['Reading parameters of zone ' num2str(k)];
 numlines=1;
 defaultanswer={'1', num2str(nsource), '1',
num2str(nreceiver)};
 answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 values=str2num(answer);
 zones.sini(i)=values(1);
 zones.send(i)=values(2);
 zones.rini(i)=values(3);
 zones.rend(i)=values(4);
 % checking zones parameters
 if max(zones.send) > nsource | zones.send(i) < zones.sini(i);
 errordlg('WRONG SOURCES NUMBERS');
 elseif max(zones.rend) > nreceiver | zones.rend(i) <
zones.rini(i)
 errordlg('WRONG RECEIVER NUMBERS');
 else
 k=k+1;
 end
 end
end
end
```

## A.2 Programa MTCLAB

```

function [IMtime,counter]=fill_interp(nsource,nreceiver,Mtime,ntours)
%-----
%-----
% Filling travelttime gaps by linear interpolation
%INPUT:
% nsource: total number of sources
% nreceiver: total number of receivers
% Mtime: experimental travelttime matrix
% ntours: number of interpolation tours
%OUTPUT:
% IMtime: interpolated travelttime matrix
% counter: number of interpolated values for each tour
%-----
%-----
%ntours: number of interpolation tours
counter=zeros(1,ntours);
Mdata_work=Mtime;
for k = 1:ntours
 for i=1:nreceiver
 for j=1:nsource
 if Mdata_work(i,j)==0 & k~=3
 if i~=1 & i~=nreceiver
 if j~=1 & j~=nsource
 %-----
 % Interior
 %-----
 if Mdata_work(i,j-1)~=0 & Mdata_work(i,j+1)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i,j-
1)+Mdata_work(i,j+1))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 if Mdata_work(i-1,j)~=0 &
Mdata_work(i+1,j)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i-
1,j)+Mdata_work(i+1,j))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 end
 end
 else
 %-----
 % Sides
 %-----
 if Mdata_work(i-1,j)~=0 & Mdata_work(i+1,j)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i-
1,j)+Mdata_work(i+1,j))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 end
 end
 else
 if j~=1 & j~=nsource
 %-----
 % Up and down
 %-----
 if Mdata_work(i,j-1)~=0 & Mdata_work(i,j+1)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i,j-
1)+Mdata_work(i,j+1))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 end
 end
 end
 end
 end
 end
end

```

## A.2 Programa MTCLAB

```

 else
 end
 end
else
end
%-----
% Two steps interpolation
%-----
if Mdata_work(i,j)==0 & k==3
 if i>2 & i < nreceiver-1
 if j>2 & j < nsource-1
 %-----
 % Interior
 %-----
 if Mdata_work(i,j-2)~=0 & Mdata_work(i,j+2)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i,j-
2)+Mdata_work(i,j+2))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 if Mdata_work(i-2,j)~=0 &
Mdata_work(i+2,j)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i-
2,j)+Mdata_work(i+2,j))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 end
 else
 %-----
 % Sides
 %-----
 if Mdata_work(i-2,j)~=0 & Mdata_work(i+2,j)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i-
2,j)+Mdata_work(i+2,j))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 end
 else
 if j>2 & j < nsource-1
 %-----
 % Up and down
 %-----
 if Mdata_work(i,j-2)~=0 & Mdata_work(i,j+2)~=0
 Mdata_work(i,j)=(Mdata_work(i,j-
2)+Mdata_work(i,j+2))/2;
 counter(1,k)=counter(1,k)+1;
 else
 end
 else
 end
 end
end
else
end
end
end
end
IMtime=Mdata_work;

```

## A.2 Programa MTCLAB

```
function [sgf,rgf]=gather_filtering
%-----

% FILTERING ANOMALOUS GATHERS IN THE LEAST SQUARES ALGORITHM
%INPUT:
% NONE
%OUTPUT:
% sgf: source gathers numbers
% rgf: receiver gathers numbers
%-----

nsf=0;
nrf=0;
sgf=[];
rgf=[];
message='IS THERE ANY ERRONEOUS GATHERS???';
texttitle='Gather filtering';
button = questdlg(message,texttitle,'YES','NO','YES');
if isequal(button, 'YES')
 mess1='Total number of source gathers to filter';
 name=' Source gather filtering';
 numlines=1;
 defaultanswer={'0'};
 answer=inputdlg(mess1,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 nsf=str2num(answer);
 if nsf>0
 sgf=zeros(1,nsf);
 for k=1:nsf
 mess3=['Enter source gather position ' num2str(k)];
 name=' Source gather filtering';
 numlines=1;
 defaultanswer={' '};
 answer=inputdlg(mess3,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 sgf(k)=str2num(answer);
 end
 end
 %
 mess2='Total number of receiver gathers to filter';
 name=' Receiver gather filtering';
 numlines=1;
 defaultanswer={'0'};
 answer=inputdlg(mess2,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 nrf=str2num(answer);
 if nrf>0
 rgf=zeros(1,nrf);
 for k=1:nrf
 mess3=['Enter receiver gather position ' num2str(k)];
 name=' Receiver gather filtering';
 numlines=1;
 defaultanswer={' '};
 answer=inputdlg(mess3,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 rgf(k)=str2num(answer);
 end
 end
end
else
 disp('Begin parameter identification');
end
end
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
function [sgather]=sg_mtc(c,rgeom,zones,sgather);
%-----

% Experimental MTC curves for source gather
%INPUT:
% c : zone number.
% rgeometry: recording geometry structure
% zones: zones structure
%OUTPUT:
% sgather: source gather structure
%-----

ps=75;
pin=25;
for ns=zones.sini(c):zones.send(c)
 % Mean and std of traveltimes
 rini=zones.rini(c);
 rend=zones.rend(c);
 time_nonul=find(rgeom.Mtime(rini:rend,ns));
 sgather.ndat(c,ns)=length(time_nonul);
 if sgather.ndat(c,ns) > 0
 sgather.mean(c,ns)=mean(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.median(c,ns)=median(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-
1,ns));
 sgather.std(c,ns)=std(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.mad(c,ns)=mad(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.iqr(c,ns)=iqr(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.psup(c,ns)=prctile(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-
1,ns), [75]);
 sgather.pinf(c,ns)=prctile(rgeom.Mtime(rini+time_nonul-
1,ns), [25]);
 % mean distances
 sgather.meandist(c,ns)=mean(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-
1,ns));
 sgather.stdist(c,ns)=std(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.meddist(c,ns)=median(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-
1,ns));
 sgather.maddist(c,ns)=mad(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.iqrdist(c,ns)=iqr(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-1,ns));
 sgather.psupdist(c,ns)=prctile(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-
1,ns), [ps]);
 sgather.pinfdist(c,ns)=prctile(rgeom.Mdistance(rini+time_nonul-
1,ns), [pin]);
 end
end
```



## A.2 Programa MTCLAB

```

function [rgather]=rg_mtc(c,rgeom,zones,rgather);
%-----

% Experimental MTC curves for receiver gather
%INPUT:
% c : zone number.
% rgeometry: recording geometry structure
% zones: zones structure
%OUTPUT:
% rgather: receiver gather structure
%-----

ps=75;
pin=25;
for nr=zones.rini(c):zones.rend(c)
 % Mean and std of traveltimes
 sini=zones.sini(c);
 send=zones.send(c);
 time_nonul=find(rgeom.Mtime(nr,sini:send)');
 rgather.ndat(c,nr)=length(time_nonul);
 if rgather.ndat(c,nr) > 0
 rgather.mean(c,nr)=mean(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-
1)');
 rgather.median(c,nr)=median(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-
1)');
 rgather.std(c,nr)=std(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.mad(c,nr)=mad(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.iqr(c,nr)=iqr(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.psup(c,nr)=prctile(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-
1)',[75]);
 rgather.pinf(c,nr)=prctile(rgeom.Mtime(nr,sini+time_nonul-
1)',[25]);
 % mean distances
 rgather.meandist(c,nr)=mean(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-
1)');
 rgather.stdist(c,nr)=std(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.meddist(c,nr)=median(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-
1)');
 rgather.maddist(c,nr)=mad(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.iqrdist(c,nr)=iqr(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-1)');
 rgather.psupdist(c,nr)=prctile(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-
1)',[ps]);
 rgather.pinfdist(c,nr)=prctile(rgeom.Mdistance(nr,sini+time_nonul-
1)',[pin]);
 end
end
end

```

## A.2 Programa MTCLAB

```

function []=MTC_graphics(zones,sgather,rgather);
%-----

% Mean traveltime Graphic plots: experimental and theoretical mean
% traveltime curves and residual maps
%INPUT:
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID
%-----

nzones=length(zones.sini);
for c=1:nzones
 sini=zones.sini(c);
 send=zones.send(c);
 x1=[sini:send];
 y1=sgather.mean(c,x1);
 y2=sgather.std(c,x1);
 z1=sgather.tmc(c,x1);
 z2=sgather.sdc(c,x1);
 rini=zones.rini(c);
 rend=zones.rend(c);
 x2=[rini:rend];
 y3=rgather.mean(c,x2);
 y4=rgather.std(c,x2);
 z3=rgather.tmc(c,x2);
 z4=rgather.sdc(c,x2);

 % general plot
 % mtc source gather
 if ~isequal(sum(z1),0)
 figure(4);
 hold on;
 subplot(2,2,1);
 plot(x1,y1,'k.-',x1,z1,'g-x');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Mean time (ms)');
 title('Source Gather');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
 % std curve source gather
 hold on;
 subplot(2,2,2);
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'g-x');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Std. deviation (ms)');
 title('Source Gather');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
 % mtc receiver gather
 hold on;
 subplot(2,2,3);
 plot(x2,y3,'k.-',x2,z3,'g-x');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Mean time (ms)')
 end
end

```

## A.2 Programa MTCLAB

```

 title('Receiver Gather');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
 % std receiver gather
 hold on
 subplot(2,2,4);
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'g-x');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Std. deviation (ms)');
 title('Receiver Gather');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
% individual graphics
xlt=[sini(1)-1:5:send(end)];
if ~isequal(sum(z1),0)
 figure(5);
 hold on;
 plot(x1,y1,'k.-',x1,z1,'r-x');
 title('Source gather. Mean traveltime curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Mean time (ms)');
 set(gca,'Xtick',xlt,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(6);
 hold on;
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. Standard deviation curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Standard deviation (ms)');
 set(gca,'Xtick',xlt,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
y2=sgather.median(c,x1);
z2=sgather.medc(c,x1);
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(7);
 hold on;

 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. Median curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Median (ms)');
 set(gca,'Xtick',xlt,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones

```

## A.2 Programa MTCLAB

```
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
y2=sgather.mad(c,x1);
z2=sgather.madc(c,x1);
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(8);
 hold on;
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. Mad curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('Mad (ms)');
 set(gca,'Xtick',x1t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
y2=sgather.iqr(c,x1);
z2=sgather.iqrc(c,x1);
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(9);
 hold on;
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. IQR curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('IQR (ms)');
 set(gca,'Xtick',x1t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
y2=sgather.psup(c,x1);
z2=sgather.psupc(c,x1);
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(10);
 hold on;
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. Quartile Sup. curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('QS (ms)');
 set(gca,'Xtick',x1t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.', 'Location', 'Best')
 end
end
%
y2=sgather.pinf(c,x1);
z2=sgather.pinf(c,x1);
if ~isequal(sum(z2),0)
 figure(11);
 hold on;
 plot(x1,y2,'k.-',x1,z2,'r-x');
 title('Source gather. Quartile Inf. curve');
 xlabel('Source number');
 ylabel('QI (ms)');
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
 set(gca,'Xtick',x1t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.','Location','Best')
 end
 end
end
%
% Receiver gather
%
x2t=[rini(1)-1:5:rend(end)];
if ~isequal(sum(z3),0)
 figure(12);
 hold on;
 plot(x2,y3,'k.-',x2,z3,'r-x');
 title('Receiver gather. Mean traveltime curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Mean time (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.','Location','Best')
 end
end
%
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(13);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. Std curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Std (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.','Location','Best')
 end
end
%
y4=rgather.median(c,x2);
z4=rgather.medc(c,x2);
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(14);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. Median curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Median (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend ('exp.', 'theor.','Location','Best')
 end
end
%
y4=rgather.mad(c,x2);
z4=rgather.madc(c,x2);
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(15);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. Mad curve');
```

## A.2 Programa MTCLAB

```
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('Mad (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
end
%
y4=rgather.iqr(c,x2);
z4=rgather.iqrc(c,x2);
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(16);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. IQR curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('IQR (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
end
%
y4=rgather.psup(c,x2);
z4=rgather.psupc(c,x2);
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(17);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. QS curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('QS (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
end
%
y4=rgather.pinf(c,x2);
z4=rgather.pinf(c,x2);
if ~isequal(sum(z4),0)
 figure(18);
 hold on;
 plot(x2,y4,'k.-',x2,z4,'r-x');
 title('Receiver gather. QI curve');
 xlabel('Receiver number');
 ylabel('QI (ms)');
 set(gca,'Xtick',x2t,'Xgrid','on');
 grid on;
 if c==nzones
 legend('exp.','theor.','Location','Best')
 end
end
end % zones loop
```

## A.2 Programa MTCLAB

```

function []=residual_maps(rgeom,zones,sgather,rgather)
%-----

% Residual maps for isotropic velocities deduced from MTC analysis.
%INPUT:
% rgeom: reording geometry structure
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID
%-----

Mdiff1=zeros(size(rgeom.Mdistance));
Mdiff2=zeros(size(rgeom.Mdistance));
Mdiff3=zeros(size(rgeom.Mdistance));
Mdiff4=zeros(size(rgeom.Mdistance));
nzones=length(zones.sini);
for c=1:nzones
 sini=zones.sini(c);
 send=zones.send(c);
 rini=zones.rini(c);
 rend=zones.rend(c);
 svelm=sgather.mvel(c);
 svels=sgather.stdvel(c);
 rvelm=rgather.mvel(c);
 rvels=rgather.stdvel(c);
 for p=sini:send
 for q=rini:rend
 MtimeMTSG(q,p)=rgeom.Mdistance(q,p)/svelm;
 MtimeSDSG(q,p)=rgeom.Mdistance(q,p)/svels;
 MtimeMTRG(q,p)=rgeom.Mdistance(q,p)/rvelm;
 MtimeSDRG(q,p)=rgeom.Mdistance(q,p)/rvels;
 if ~isequal(rgeom.Mtime(q,p), 0)
 %residual time= model-experimental
 Mdiff1(q,p)=MtimeMTSG(q,p)-rgeom.Mtime(q,p);
 Mdiff2(q,p)=MtimeSDSG(q,p)-rgeom.Mtime(q,p);
 Mdiff3(q,p)=MtimeMTRG(q,p)-rgeom.Mtime(q,p);
 Mdiff4(q,p)=MtimeSDRG(q,p)-rgeom.Mtime(q,p);
 end
 end
 end
end
figure;
pcolor(Mdiff1(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title('Source gather (mtc). Residual map (modelled-experimental)');
%
figure;
pcolor(Mdiff2(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title('Source gather (sdc). Residual map (modelled-experimental)');
%
figure;
pcolor(Mdiff3(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title('Receiver gather (mtc). Residual map (modelled-experimental)');
%

```

## *A.2 Programa MTCLAB*

```
figure;
pcolor(Mdiff4(zones.rini:zones.rend,zones.sini:zones.send));
colorbar('vert');
xlabel('Source number');ylabel('Receiver number');
title('Receiver gather (sdc). Residual map (modelled-experimental)');
```



## A.2 Programa MTCLAB

```
function []=lowup_MTC(zones,sgather,rgather)
%-----
%-----
% Upper and lower velocity envelope curves analysis, to determine the
feasible
% velocity bandwidth where most of the points of the experimental
curve lie.
%
%INPUT:
% zones: zones structure
% sgather: source gather structure
% rgather: receiver gather structure
%OUTPUT:
% VOID
%-----
%-----

message='Gather choice';
texttitle='Lower and Upper Velocity Analysis';
button1=questdlg(message,texttitle,'S.Gather','R.Gather','S.Gather');
message='MTC choice';
button2=questdlg(message,texttitle,'Mean','Std','Mean');
nzones=length(zones.sini);
for c=1:nzones
 if isequal(button1, 'S.Gather') & isequal(button2, 'Mean')
 name='Mean Curve. Source Gather';
 svelm1=sgather.mvel(c)*0.9;
 svelm2=sgather.mvel(c)*1.1;
 prompt={'Lower Velocity', 'Upper Velocity'};
 numlines=2;
 defaultanswer={num2str(svelm1), num2str(svelm2)};
 answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 svtm=str2num(answer);
 vmin=svtm(1);
 vmax=svtm(2);
 type=1;
 numfig=5;
 elseif isequal(button1, 'S.Gather') & isequal(button2, 'Std')
 name='Std Curve. Source Gather';
 svelm1=sgather.stdvel(c)*0.9;
 svelm2=sgather.stdvel(c)*1.1;
 prompt={'Lower Velocity', 'Upper Velocity'};
 numlines=2;
 defaultanswer={num2str(svelm1), num2str(svelm2)};
 answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 svsd=str2num(answer);
 vmin=svsd(1);
 vmax=svsd(2);
 type=2;
 numfig=6;
 elseif isequal(button1, 'R.Gather') & isequal(button2, 'Mean')
 name='Mean Curve. Receiver Gather';
 rvelm1=rgather.mvel(c)*0.9;
 rvelm2=rgather.mvel(c)*1.1;
 prompt={'Lower Velocity', 'Upper Velocity'};
 numlines=2;
 defaultanswer={num2str(rvelm1), num2str(rvelm2)};
 answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
```

## A.2 Programa MTCLAB

```

 rvtm=str2num(answer);
 vmin=rvtm(1);
 vmax=rvtm(2);
 type=3;
 numfig=12;
elseif isequal(button1, 'R.Gather') & isequal(button2, 'Std')
 name='Std Curve. Receiver Gather';
 rvelm1=rgather.mvel(c)*0.9;
 rvelm2=rgather.mvel(c)*1.1;
 prompt={'Lower Velocity', 'Upper Velocity'};
 numlines=2;
 defaultanswer={num2str(rvelm1), num2str(rvelm2)};
 answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);
 answer=char(answer);
 rvsd=str2num(answer);
 vmin=rvsd(1);
 vmax=rvsd(2);
 type=4;
 numfig=13;
end
if isequal(button1, 'S.Gather')
 for p=zones.sini(c):zones.send(c)
 if type==1
 gtmin(c,p)=sgather.meandist(c,p)/vmin;
 gtmax(c,p)=sgather.meandist(c,p)/vmax;

 else
 gtmin(c,p)=sgather.stdist(c,p)/vmin;
 gtmax(c,p)=sgather.stdist(c,p)/vmax;
 end
 end
 end
else
 for p=zones.rini(c):zones.rend(c)
 if type ==3
 gtmin(c,p)=rgather.meandist(c,p)/vmin;
 gtmax(c,p)=rgather.meandist(c,p)/vmax;
 else
 gtmin(c,p)=rgather.stdist(c,p)/vmin;
 gtmax(c,p)=rgather.stdist(c,p)/vmax;
 end
 end
end
end
% plotting the low an upper MTC curves
if type==1 |type==2
 figure(numfig);
 hold on;
 sini=zones.sini(c);
 send=zones.send(c);
 plot([sini:send],gtmin(c,sini:send),'k--');
 plot([sini:send],gtmax(c,sini:send),'k.');
elseif type ==3 |type==4
 figure(numfig);
 hold on;
 rini=zones.rini(c);
 rend=zones.rend(c);
 plot([rini:rend],gtmin(c,rini:rend),'k--');
 plot([rini:rend],gtmax(c,rini:rend),'k.');
end
end
end

```



## A.3 Programa AMTCLAB

```
%=====
=====
% Program anisotropic_corrections
% AIM OF THE PROGRAM: Anisotropic correction for multizone MTC
ANALYSIS
% This program takes the variables from workspace and is executed
after
% program MTCLAB
%
% Utiliza Mínimos Cuadrados
% Authors: J.L. Fernández-Martínez, L. M. Pedruelo,
% November 2004
%=====
=====
mess1='AMTCLAB: TRAVELTIME QUALITY ANALYSIS IN 2D-T.T FOR ANISOTROPIC
MEDIA';
uline= '
_____';
mess2=' J.L.Fernández and L.M. Pedruelo ';
mess3=' _____University of Oviedo,
2004_____';
gap=' ';
message=strvcat(gap,mess1,uline,gap,mess2,gap,mess3);
texttitle='MTCLAB: Help';
uiwait(msgbox(message,texttitle,'modal'));
%
error=[];
ig=0; % graphics control variable
if ~exist('rgeom')
 ig=1;
 % -----
 % Reading traveltimes and zones of analysis
 % -----
 [rgeom]=read_data;
 % -----
 % Reading zones parameters
 % -----
 [nreceiver,nsouce]=size(rgeom.Mtime);
 [zones]=read_zones(nsouce,nreceiver);
 nzones=length(zones.sini);
 % -----
 % Travelttime interpolation of gaps
 % -----
 message='Travelttime interpolation?';
 button = questdlg(message,texttitle,'YES','NO','YES');
 if isequal(button, 'YES')
 ntours=5;
 [Int_Mtime]=fill_interp(nsouce,nreceiver,rgeom.Mtime,ntours);
 rgeom.Mtime=Int_Mtime;
 clear Int_Mtime;
 end
end
end
% -----
% Variables Initialisation
% -----
% -----
% source gather
% -----
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

sgather.mean=zeros(nzones,nsourse); %source gather mean time
sgather.median=zeros(nzones,nsourse); %source gather median time
sgather.std=zeros(nzones,nsourse); %source gather standard
deviation
sgather.mad=zeros(nzones,nsourse); %source gather mad
sgather.iqr=zeros(nzones,nsourse); %source gather iqr
sgather.psup=zeros(nzones,nsourse); %source gather QSup
sgather.pinf=zeros(nzones,nsourse); %sourcegather QInf
sgather.ndat=zeros(nzones,nsourse); %number of data for source
gather
sgather.tmc=zeros(nzones,nsourse); %theoretical mean time (s.
gather)
sgather.sdc=zeros(nzones,nsourse); %theoretical std time (s.
gather)
sgather.medc=zeros(nzones,nsourse); %idem
sgather.madc=zeros(nzones,nsourse);
sgather.iqrc=zeros(nzones,nsourse);
sgather.psupc=zeros(nzones,nsourse);
sgather.pinfrc=zeros(nzones,nsourse);
% -----
% same for the receiver gather
% -----
rgather.mean=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.median=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.std=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.mad=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqr=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.psup=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinf=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.ndat=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.tmc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.sdc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.medc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.madc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqrc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.psupc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinfrc=zeros(nzones,nreceiver);
% -----
% GATHER FILTERING
% -----
[sgf,rgf]=gather_filtering;
nsf=length(sgf);
nrf=length(rgf);

lowlimit=[0.1,0.1,0]; % search space
upperlimit=[7,1,180];
x0=lowlimit+rand(1,3).*(upperlimit-lowlimit); %initial solution
x0(2)=1;
% -----
% Least squares fitting Zones loop
% -----
lista=[8,9,14]
for c=1:nzones
% -----
% EXPERIMENTAL MTC CURVES. SOURCE GATHER
% -----
[sgather]=sg_mtc(c,rgeom,zones,sgather);
% -----
% EXPERIMENTAL MTC CURVES. RECEIVER GATHER
% -----

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

[rgather]=rg_mtc(c,rgeom,zones,rgather);
% -----
%
% LEAST SQUARES FITTING of anisotropic parameters
% -----
for index_MTC=lista
 if index_MTC>=1 & index_MTC<=7 % S. Gather
 pinil=zones.sini;
 pend1=zones.send;
 pini2=zones.rini;
 pend2=zones.rend;
 x1=rgeom.xs;
 y1=rgeom.ys;
 x2=rgeom.xr;
 y2=rgeom.yr;

 empirical_MTC=[];
 if index_MTC==1
 empirical_MTC=sgather.mean(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==2
 empirical_MTC=sgather.std(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==3
 empirical_MTC=sgather.median(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==4
 empirical_MTC=sgather.mad(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==5
 empirical_MTC=sgather.iqr(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==6
 empirical_MTC=sgather.psup(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==7
 empirical_MTC=sgather.pinf(c,pinil(c):pend1(c));
 end
 end
 if index_MTC>=8 & index_MTC<=14 % R. Gather
 pinil=zones.rini;
 pend1=zones.rend;
 pini2=zones.sini;
 pend2=zones.send;
 x1=rgeom.xr;
 y1=rgeom.yr;
 x2=rgeom.xs;
 y2=rgeom.ys;
 if index_MTC==8
 empirical_MTC=rgather.mean(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==9
 empirical_MTC=rgather.std(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==10
 empirical_MTC=rgather.median(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==11
 empirical_MTC=rgather.mad(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==12
 empirical_MTC=rgather.iqr(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==13
 empirical_MTC=rgather.psup(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==14
 empirical_MTC=rgather.pinf(c,pinil(c):pend1(c));
 end
 end
end
% -----

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

% solution by means of lsqnonlin
% -----

options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','on',...
 'MaxIter',300,'Tolfun',1e-6,'Display','iter',
'MaxFunEvals',1000);
% -----
% non linear least-squares
% -----

[solution,resnorm]=lsqnonlin(@fobj_anisolsq,x0,lowlimit,upperlimit,opt
ions,c,pinil,pendl,pini2,pend2,x1,y1,x2,y2,empirical_MTC,index_MTC,sgf
,rgf,rgeom.Mtime);
Vi(c,index_MTC)=solution(1);
landai(c,index_MTC)=solution(2);
alfai(c,index_MTC)=solution(3);
error=[error resnorm];
% -----
% Graphics with final solution
% -----

[tcalc,Mtc]=MTC_aniso(pinil(c),pendl(c),pini2(c),pend2(c),x1,y1,x2,y2,
...);

Vi(c,index_MTC),landai(c,index_MTC),alfai(c,index_MTC),index_MTC,rgeom
.Mtime);
 if index_MTC>=8 & index_MTC<=14 %receiver gather curves
 alfai(c,index_MTC)=180-alfai(c,index_MTC);
 end
% -----
% theoretical MTC
% -----
 if index_MTC==1
 sgather.tmc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==2
 sgather.sdc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==3

sgather.medc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==4

sgather.madc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==5

sgather.iqrc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==6

sgather.psupc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==7

sgather.pinfrc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==8
 rgather.tmc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==9
 rgather.sdc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==10

rgather.medc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==11

```

### *A.3 Programa AMTCLAB*

```
rgather.madc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==12

rgather.iqrc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==13

rgather.psupc(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==14

rgather.pinf(c,pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 end
 end
end
MTC_graphics(zones,sgather,rgather);
```



### A.3 Programa AMTCLAB

```

%=====
=====
% Program anisotropic_corrections
% AIM OF THE PROGRAM: Anisotropic correction for multizone MTC
ANALYSIS
% This program takes the variables from workspace and is executed
after
% program MTCLAB
%
% Utiliza PSO
%
% Authors: J.L. Fernández-Martínez, L. M. Pedruelo,
% November 2004
%=====
=====
mess1='AMTCLAB: TRAVELTIME QUALITY ANALYSIS IN 2D-T.T FOR ANISOTROPIC
MEDIA';
uline= '
_____';
mess2=' J.L.Fernández, L.M. Pedruelo ';
mess3=' _____University of Oviedo,
2007_____';
gap=' ';
message=strvcat(gap,mess1,uline,gap,mess2,gap,mess3);
texttitle='MTCLAB: Help';
uiwait(msgbox(message,texttitle,'modal'));
%
opc_pso=pso_opciones;
lowlimit=[0.7E+8,0.5,0];
upperlimit=[1.4E+8,1,180];
opciones.seed='random';
opciones.pso=opc_pso;
opciones.pso.maxiter=50;
opciones.lowlimit=lowlimit;
opciones.upperlimit=upperlimit;
ig=0; % graphics control variable
Vi=zeros(1,14);
alfai=zeros(1,14);
landai=zeros(1,14);
lista=[1];
if ~exist('rgeom')
 ig=1;
 % -----
 % Reading traveltimes and zones of analysis
 % -----
 [rgeom]=read_data;
 % -----
 % Reading zones parameters
 % -----
 [nreceiver,nsouce]=size(rgeom.Mtime);
 [zones]=read_zones(nsouce,nreceiver);
 nzones=length(zones.sini);
 % -----
 % Traveltime interpolation of gaps
 % -----
 message='Traveltime interpolation?';
 button = questdlg(message,texttitle,'YES','NO','YES');
 if isequal(button, 'YES')
 ntours=5;
 [Int_Mtime]=fill_interp(nsouce,nreceiver,rgeom.Mtime,ntours);

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

 rgeom.Mtime=Int_Mtime;
 clear Int_Mtime;
 end
end
%
% -----
% Variables Initialisation
% -----
%
% source gather
% -----
sgather.mean=zeros(nzones,nsorce); %source gather mean time
sgather.median=zeros(nzones,nsorce); %source gather median time
sgather.std=zeros(nzones,nsorce); %source gather standard
deviation
sgather.mad=zeros(nzones,nsorce); %source gather mad
sgather.iqr=zeros(nzones,nsorce); %source gather iqr
sgather.psup=zeros(nzones,nsorce); %source gather QSup
sgather.pinf=zeros(nzones,nsorce); %sourcegather QInf
sgather.ndat=zeros(nzones,nsorce); %number of data for source
gather
sgather.tmc=zeros(nzones,nsorce); %theoretical mean time (s.
gather)
sgather.sdc=zeros(nzones,nsorce); %theoretical std time (s.
gather)
sgather.medc=zeros(nzones,nsorce); %idem
sgather.madc=zeros(nzones,nsorce);
sgather.iqrc=zeros(nzones,nsorce);
sgather.psupc=zeros(nzones,nsorce);
sgather.pinfc=zeros(nzones,nsorce);
% -----
% same for the receiver gather
% -----
rgather.mean=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.median=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.std=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.mad=zeros(nzones,nsorce);
rgather.iqr=zeros(nzones,nsorce);
rgather.psup=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinf=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.ndat=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.tmc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.sdc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.medc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.madc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.iqrc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.psupc=zeros(nzones,nreceiver);
rgather.pinfc=zeros(nzones,nreceiver);
% -----
% GATHER FILTERING
% -----
[sgf,rgf]=gather_filtering;
nsf=length(sgf);
nrf=length(rgf);
error=zeros(1,length(lista));
% -----
% Least squares fitting Zones loop
% -----
for c=1:nzones
 % -----
 % EXPERIMENTAL MTC CURVES. SOURCE GATHER

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

% -----
[sgather]=sg_mtc(c,rgeom,zones,sgather);
% -----
% EXPERIMENTAL MTC CURVES. RECEIVER GATHER
% -----
[rgather]=rg_mtc(c,rgeom,zones,rgather);
% -----
% LEAST SQUARES FITTING OF SLOWNESS
% -----
for index_MTC=lista
 if index_MTC>=1 & index_MTC<=7 % S. Gather
 pinil=zones.sini;
 pend1=zones.send;
 pini2=zones.rini;
 pend2=zones.rend;
 x1=rgeom.xs;
 y1=rgeom.ys;
 x2=rgeom.xr;
 y2=rgeom.yr;
 if index_MTC==1
 empirical_MTC=sgather.mean(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==2
 empirical_MTC=sgather.std(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==3
 empirical_MTC=sgather.median(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==4
 empirical_MTC=sgather.mad(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==5
 empirical_MTC=sgather.iqr(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==6
 empirical_MTC=sgather.psup(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==7
 empirical_MTC=sgather.pinf(c,pinil(c):pend1(c));
 end
 end
 if index_MTC>=8 & index_MTC<=14 % R. Gather
 pinil=zones.rini;
 pend1=zones.rend;
 pini2=zones.sini;
 pend2=zones.send;
 x1=rgeom.xr;
 y1=rgeom.yr;
 x2=rgeom.xs;
 y2=rgeom.ys;
 if index_MTC==8
 empirical_MTC=rgather.mean(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==9
 empirical_MTC=rgather.std(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==10
 empirical_MTC=rgather.median(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==11
 empirical_MTC=rgather.mad(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==12
 empirical_MTC=rgather.iqr(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==13
 empirical_MTC=rgather.psup(c,pinil(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==14
 empirical_MTC=rgather.pinf(c,pinil(c):pend1(c));
 end
 end
end

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

 end
 end

 % -----
 % solution by PSO
 % -----
 modelo=[]; %se genera aleatoriamente
 opfun.c=c;
 opfun.empirical_MTC=empirical_MTC;
 opfun.index_MTC=index_MTC;
 opfun.pini1=pini1;
 opfun.pini2=pini2;
 opfun.pend1=pend1;
 opfun.pend2=pend2;
 opfun.x1=x1;
 opfun.y1=y1;
 opfun.x2=x2;
 opfun.y2=y2;
 opfun.sgf=sgf;
 opfun.rgf=rgf;

 [results]=pso(@fobj_anisopso,modelo,rgeom.Mtime,opciones,opfun);
 [MTCerror,mejor]=min(results.error_fittest);
 mejor_modelo=results.fittest(mejor,:);
 Vi(c,index_MTC)=mejor_modelo(1);
 landai(c,index_MTC)=mejor_modelo(2);
 alfai(c,index_MTC)=mejor_modelo(3);
 error(index_MTC)=MTCerror;
 % -----
 % Graphics with final solution
 % -----

 [tcalc,Mtc]=MTC_aniso(pini1(c),pend1(c),pini2(c),pend2(c),x1,y1,x2,y2,
 ...,
 Vi(c,index_MTC),landai(c,index_MTC),alfai(c,index_MTC),index_MTC,rgeom
 .Mtime);
 if index_MTC>=8 & index_MTC<=14 %receiver gather curves
 alfai(c,index_MTC)=180-alfai(c,index_MTC);
 end
 % -----
 % theoretical MTC
 % -----
 if index_MTC==1
 sgather.tmc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==2
 sgather.sdc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==3

 sgather.medc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==4

 sgather.madc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==5

 sgather.iqrc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==6

 sgather.psupc(c,pini1(c):pend1(c))=tcalc(pini1(c):pend1(c));
 elseif index_MTC==7

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
sgather.pinf(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==8
 rgather.tmc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==9
 rgather.sdc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==10

rgather.medc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==11

rgather.madc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==12

rgather.iqrc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==13

rgather.psupc(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 elseif index_MTC==14

rgather.pinf(c, pinil(c):pendl(c))=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 end
 end
end
MTC_graphics(zones, sgather, rgather);
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
function
[desajuste]=fobj_anisolsq(param,c,pini1,pend1,pini2,pend2,x1,y1,x2,y2,
...
 emtc,index,sfilt,rfilt,Mtime);
%-----
%-----
% Objective function for misfit calculation
%INPUT:
% param: anisotropic model velocity
% zones parameters and coordinates: c,
pini1,pend1,pini2,pend2,x1,y1,x2,y2
% emtc:empirical mean traveltime curve
% index: type of MTC curve
%OUTPUT:
% rgeometry: recording geometry structure
%-----
%-----
% calculo de los tiempos reales anisotropos para los parametros en
curso Vi,landai,alfai
Vi=param(1);
landai=param(2);
alfai=param(3);
[tcalc,Mtc]=MTC_aniso(pini1(c),pend1(c),pini2(c),pend2(c),x1,y1,x2,y2,
Vi,...,
 landai,alfai,index,Mtime);
thmtc=tcalc(pini1(c):pend1(c));
desajuste=emtc-thmtc;
if desajuste ~=0
 W=(1./emtc);
 desajuste=(emtc-thmtc).*W;
end
if index>=1 & index<=7
 if length(sfilt) >0
 desajuste(sfilt)=0.;
 end
end
%
if index>=8 | index<=14
 if length(rfilt)>0
 desajuste(rfilt)=0.;
 end
end
end
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
function
[tcalc,Mtc]=MTC_aniso(pini1,pend1,pini2,pend2,x1,y1,x2,y2,Vi,...,
 landai,alfai,indice,Mtime);

% COORDENADAS REALES

% IGUAL QUE TIEMPOS PERO CALCULANDO TAMBIEN EN RECEPTOR COMUN
% Este programa calcula de forma sintetica la matriz Mtc de tiempos de
viaje
% y posteriormente los tiempos medios y desviaciones tipicas.
%
% Autores: L. M. Pedruelo y Juan Luis Fernández Martínez Marzo
2002
alfai=alfai*pi/180;
Mtc=zeros(size(Mtime));
tcalc=[];
%tcalc=zeros(1,pini1:pend1);
ps=75;
pin=25;
for sal=pini1:pend1

 % -----
 % Calculo de tiempos (Entre la fuente "s" y los receptores de
su capa)
 % -----
 for ent=pini2:pend2
 if indice>=1 & indice<=7
 fil=ent;
 col=sal;
 elseif indice>=8 & indice<=14
 fil=sal;
 col=ent;
 end
 %
 if Mtime(fil,col)~=0
 A=abs(x2(ent)-x1(sal));
 E=y2(ent)-y1(sal);
 tangenteB=(E-A*tan(alfai))/(A+E*tan(alfai));
 Ro2=(1+tangenteB^2)/(1+(tangenteB/landai)^2);
 atime=sqrt((A^2+E^2)/((Ro2)*Vi^2));
 Mtc(fil,col)=atime;
 else
 %Mtc(fil,col)=0;
 end
 end
end
%
if indice==1
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=mean(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal));
 end
elseif indice==2
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=std(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal));
 end
elseif indice==3
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=median(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal));
 end
 elseif indice==4
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=mad(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal));
 end
 elseif indice==5
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=iqr(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal));
 end
 elseif indice==6
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=prctile(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal),[ps]);
 end
 elseif indice==7
 timec_nonul=find(Mtc(pini2:pend2,sal));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=prctile(Mtc(pini2+timec_nonul-1,sal),[pin]);
 end
 elseif indice==8
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=mean(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1));
 end
 elseif indice==9
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=std(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1));
 end
 elseif indice==10
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=median(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1));
 end
 elseif indice==11
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=mad(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1));
 end
 elseif indice==12
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=iqr(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1));
 end
 elseif indice==13
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=prctile(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1),[ps]);
 end
 elseif indice==14
 timec_nonul=find(Mtc(sal,pini2:pend2));
 if length(timec_nonul)>0
 tcalc(sal)=prctile(Mtc(sal,pini2+timec_nonul-1),[pin]);
 end
 end
end
end
```



### A.3 Programa AMTCLAB

```
function []=agraph(c, indice, tcalc, pinil, pendl, x1, ig, emtc)
if ig==1
 tm=tcalc(pinil(c):pendl(c));
 x1=[pinil(c):pendl(c)];
 figure(indice+4);
 hold on;
 plot(x1,tm,'m-.');
 plot(x1,emtc,'r-');
 figure(4);
 subplot(2,2,indice);
 hold on;
 plot(x1,tm,'m-.');
 plot(x1,emtc,'r-');
else
end
```

### *A.3 Programa AMTCLAB*

```
tol=0.08
[fil,col]=find(results.error_hist<tol);
models=results.historia(col,:);
hist(models(:,1),30);
figure
hist(models(:,2),30);
figure
hist(models(:,3),30);
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

function [results]=pso(funobj,model,data,opciones,opfun)
%.....
%.....
%AIM : a generic particle swarm optimizer to solve inverse
problems
% following data, model and opciones structure
%
%INPUT:
%funobj: objective function
%model: model parameters after formatting
%data: data structure
%opciones: inverse options structure
%opfun: problem-dependent parameter structure
%Output:
% results: results structure
%SINTAXIS
%.....
%.....
% [results]=psoves(funobj,modelo,datos,opciones,opfun)
%.....
%.....
nmaxsinmejora=3;
pinteriormin=80;
inter=[];
nmejoras=[];
rand('state',sum(100*clock));
%
pso=opciones.pso;
esquema=pso.esquema;
pasot=pso.deltat;
maxiter=pso.maxiter;
talla=pso.talla;
%.....
%.....
% Search space
%.....
%.....
lowlimit=opciones.lowlimit;
upperlimit=opciones.upperlimit;
% kind of seed
seed=opciones.seed;
nparam=length(lowlimit);
inercia=pso.inercia;
aclocal=pso.aclocal;
acglobal=pso.acglobal;
suma=aclocal+acglobal;
relajacion=inercia*ones(talla,nparam);
proyeccion=pso.proyeccion;
% PLOTTING
message = sprintf('PSO: %%g/%%g iterations, Iteration best fit =
%%g.\n',maxiter);
%%
%%
% Inicialización de la población y de las velocidades
%%
%%
if isequal(seed,'given') & ~isempty(model.inicio),
 swarm0=model.inicio;
 talla=size(swarm0,1); % initial swarm size
elseif isequal(seed,'random') | isempty(model.inicio),

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

 % construcción de la población inicial por filas (cada fila es un
modelo)
 % de modo aleatorio
 rango=upperlimit-lowlimit;

swarm0=(ones(talla,1)*rango).*(rand(talla,nparam))+(ones(talla,1)*lowl
imit);
 disp('Initial random population generated');
else
end
swarm=swarm0;
varmin=repmat(lowlimit,talla,1);
varmax=repmat(upperlimit,talla,1);
% Initial velocities
vel(1:talla,1:nparam)=zeros(talla,nparam);
% forwardproblem
rutina_directo=func2str(funobj);
problema_directo=['[misfit]=' rutina_directo
'(swarm,data,opciones,opfun)'];
%%
%%
% Algoritmo iterativo
%%
%%
mejores_globales =[]; % el número de parámetros + 1 es
% para guardar el valor funcional
mejores_locales =ones(talla,nparam+1)*NaN;
contador=0;
historia=[];
error_hist=[];
models_outmin=[];
models_outmax=[];
error_iter=[];
hwbar = waitbar(0,'PSO algorithm');
% iteration
k=1;
sinmejora=0; %number of iterations without improving
interior=100;
for iter=1:maxiter
 waitbar (iter/maxiter);
 historia=[historia;swarm];
 %%%%%%%%%%% forward solution
 eval(problema_directo);
 error_hist=[error_hist misfit];
 % local best initialisation
 if isequal (iter,1)
 local_bestval=misfit;
 valorf0=misfit;
 [filas,columnas]=size(valorf0);
 if columnas==1
 valorf0=valorf0';
 end
 mejores_locales =[swarm0 valorf0'];
 mod_sinmejora=[1:talla];
 mejoras_iter=[];
 [gbest_val,mejor]=min(misfit);
 gbest=swarm0(mejor,:);
 error_iter(1)=gbest_val;
 iter_bestval=gbest_val;
 else

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```

%misfit es el desajuste en la iteracion en curso
[mejoras_iter]=find(local_bestval>misfit);
% mejoras_iter proporciona los indices de los modelos que
mejoraron
mod_sinmejora=find(local_bestval<=misfit);
nmejoras=[nmejoras length(mejoras_iter)];
% gbest search (minimum problem: minimize the error)
[iter_bestval,mejor]=min(misfit);
if iter_bestval < gbest_val
 % improving: we change the global optimum
 gbest_val=iter_bestval;
 gbest=swarm(mejor,:);
 mejores_globales =[mejores_globales;
[gbest,iter_bestval]];
 % we keep the history fittest
 fittest(k,:)=gbest; % best individual
 error_fittest(k)=gbest_val;
 k=k+1;
 sinmejora=0;
else %local
 sinmejora=sinmejora+1;
 mejores_globales =[mejores_globales; [gbest,gbest_val]];
end
error_iter(iter)=iter_bestval;
% those which are improved are automatically actualize
local_bestval(mejoras_iter)=misfit(mejoras_iter);
end
mejores_locales (mejoras_iter,1:end-1)=swarm(mejoras_iter,:);
mejores_locales (mejoras_iter,end)=local_bestval(mejoras_iter);
[iter_bestval,mejor] = min(misfit);
gbest=swarm(mejor,:); % mejor global en la iteración iter
gbest_val=iter_bestval;
bestpos(iter,1:nparam+1) = [gbest,iter_bestval];
% random coefficients for acceleration
rannum1 = rand([talla,nparam]);
rannum2 = rand([talla,nparam]);
aclocal1 = rannum1.*aclocal;
acglobal2 = rannum2.*acglobal;
localbest=mejores_locales(:,1:end-1);
talla=talla;
% changing the pasot parameter in the convergence stage
if iter >0.75*maxiter
 if sinmejora >= nmaxsinmejora | interior < pinteriormin
 pasot=0.8;
 disp('Reducing deltat to 0.8');
 else
 pasot=pso.deltat;
 end
else
 if rem(iter,2)==0
 pasot=0.8;
 else
 pasot=1.2;
 end
end
% esquema PSO
if isequal(esquema, 'PSO') %reprogram for deltat
 termino1=relajacion(1:talla,:).*vel(1:talla,:);
 termino2=aclocal1(1:talla,:).*(localbest(1:talla,:)-
swarm(1:talla,:))*pasot;

```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
 termino3=acglocal2(1:talla,:).*(repmat(gbest,talla,1)-
swarm(1:talla,:))*pasot;
 vel=(termino1+termino2+termino3)*pasot;
 elseif isequal(esquema, 'CC')
 elseif isequal(esquema, 'CP')
 end
 % new population
 swarm= swarm + vel;
 % Projection over search space
 vmin_away = swarm <= varmin;
 vmin_keep = swarm > varmin;
 vmax_away = swarm >= varmax;
 vmax_keep = swarm < varmax;
 % counting interior models
 parinterior=(swarm >= varmin) & (swarm <= varmax);
 aux=sum(parinterior');
 nvarin=length(find(aux==nparam));
 interior=nvarin/talla*100;
 fprintf('Percentage of interior models %f \n',interior);
 inter(iter)=interior;
 % Projection method
 if isequal(proyeccion, 'near')
 swarm = (vmin_away.*varmin) + (vmin_keep.*swarm);
 swarm = (vmax_away.*varmax) + (vmax_keep.*swarm);
 elseif isequal(proyeccion, 'far')
 swarm = (vmin_away.*varmax) + (vmin_keep.*swarm);
 swarm = (vmax_away.*varmin) + (vmax_keep.*swarm);
 elseif isequal(proyeccion, 'bounce')
 swarm = (vmin_away.*varmin) + (vmin_keep.*swarm);
 swarm = (vmax_away.*varmax) + (vmax_keep.*swarm);
 vel = (vel.*vmin_keep) + (-vel.*vmin_away);
 vel = (vel.*vmax_keep) + (-vel.*vmax_away);
 else
 % no projection
 end
 outmin=length(vmin_away);
 outmax=length(vmax_away);
 models_outmin=[models_outmin,outmin];
 models_outmax=[models_outmax,outmax];
 % The global best
 fprintf(message,iter,iter_bestval);
end
%
% output arguments in results are always in real format to work with
% non oriented and non-log
results.historia=historia;
results.fittest=fittest;
results.localbest=localbest;
% important: parent and parent0 are written in the format they had
been
% generated (for rebooting purposes)
results.parent=swarm;
results.parent0=swarm0;
results.misfit=misfit;
results.error_fittest=error_fittest;
results.error_hist=error_hist;
results.error_iter=error_iter;
results.nmejoras=nmejoras;
results.models_outmin=models_outmin;
results.models_outmax=models_outmax;
```

### *A.3 Programa AMTCLAB*

```
results.models_interior=inter;
close(hwbar);
```

### A.3 Programa AMTCLAB

```
function [pso]=pso_opciones(),
%OBJETIVO: La funcion tiene por objetivo crear el esqueleto de la
estructura
% en la que se introducen las opciones para el algortimo de PSO.
%VARIABLES DE ENTRADA: Ninguna
%VARIABLES DE SALIDA:
%[opc_na]: Es la estructura en la que se almacenan los parametros.
%
pso.maxiter=30;
pso.talla=100;
pso.inercia=0.73;
pso.aclocal=1.495;
pso.acglobal=1.495;
pso.proyeccion='near'; %'far' 'rebond' kind of projection over
search space
pso.esquema='PSO'; %'CC' 'CP' % PSO algorithm
pso.deltat=1.0;
```





## A.4 Programas de trazado de rayos

### Programa de trazado de rayos en medio homogéneo

```
% PROGRAMA DE GENERACION DE LA MATRIZ M DE RAYOS CONJUNTO para los
tres tiros a la vez (TRAZADORCon)
% -----
% OBJETIVO DEL PROGRAMA: Dados unos datos de tiempos reales observados
en un medio,
% y utilizando las coordenadas reales de
fuentes y receptores,
% diseño una malla que recubre el dominio y
% hallo la matriz M de caminos de rayo
% es decir cada fila i me da los trozos que
rayo i tiene en cada celda
% cada columna j me da las longitudes de los
rayos atravesando esa celda
% mij es la longitud del rayo i en la celda j.
% FORMA: Por desarrollar Coordenadas minimas y maximas de x e y en
fuentes receptores.
%
% Autor: L.M. Pedruelo y J.L. Fernández Martínez Marzo 2012
% -----
%
% Tiro 1 A-----B Tiro 2 A Tiro 3 A
% | | | | | | |
% | | | | | | |
% C-----D BC-----D C-----BD
%
% -----
% -----
% INICIALIZACION DE VARIABLES
% -----
% nch numero de celdas horizontales
% ncv numero de celdas verticales
% seph separacion horizontal (entre las lineas horizontales)
% sepv separacion vertical (entre las lineas horizontales)
nch=40.;
ncv=50.;
seph=0.;
sepv=0.;
% psi puntos superiores izquierdos
% lsi limite superior izquierdo de la malla conjunta
psi1=[];
psi2=[];
psd1=[];
psd2=[];
pii1=[];
pii2=[];
pid1=[];
pid2=[];
%lsi=zeros(1,2);
%lsd=zeros(1,2);
%lii=zeros(1,2);
%lid=zeros(1,2);
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
% limites para cada dispositivo
limA=zeros(1,2);
limB=zeros(1,2);
limC=zeros(1,2);
limD=zeros(1,2);

% -----
--
% LECTURA DE COORDENADAS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS LIMITES DE LA
MALLA CONJUNTA
% -----
--
%
for dispo=1:3
 if dispo==1
 data=struct('ffuentes','bls.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tirol.tim','ctime',7,'sini',1,'send',58, 'rini',1,
 'rend',60);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 clear rdata;

 psil=[psil min(xr)];
 psi2=[psi2 max(max(yr),max(ys))];
 piil=[piil min(xr)];
 pii2=[pii2 min(min(yr),min(ys))];
 psd1=[psd1 max(xs)];
 psd2=[psd2 max(max(yr),max(ys))];
 pid1=[pid1 max(xs)];
 pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

 elseif dispo==2
 data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro2.tim','ctime',7);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 clear rdata;

 psil=[psil min(min(xr),min(xs))];
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
psi2=[psi2 max(yr)];
pii1=[pii1 min(min(xr),min(xs))];
pii2=[pii2 min(min(ys),min(yr))];
pid1=[pid1 max(xs)];
pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

elseif dispo==3
 data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','blrec.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro3.tim','ctime',7);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 clear rdata;

 pii1=[pii1 min(xs)];
 pii2=[pii2 min(min(ys),min(yr))];
 psd1=[psd1 max(max(xr),max(xs))];
 psd2=[psd2 max(yr)];
 pid1=[pid1 max(max(xr),max(xs))];
 pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

end

end

%lsi(1)=min(psi1);
%lsi(2)=max(psi2);
%lsd(1)=max(psd1);
%lsd(2)=max(psd2);
%lii(1)=min(pii1);
%lii(2)=min(pii2);
%lid(1)=max(pid1);
%lid(2)=min(pid2);

cotaiz=min(min(psi1), min(pii1));
cotade= max(max(psd1), max(pid1));
cotasu= max(max(psi2), max(psd2));
cotain =min(min(pii2), min(pid2));

%-----
% Definicion de rectas que forman la frontera y el interior de la
malla (ncv x nch)
%-----

% rvi: x=cotaiz;
% rvd: x=cotade;
% rhs: y=cotasu;
% rhi: y=cotain;
rhs=cotasu;
rvi=cotaiz;
rvd=cotade;

% Definicion de rectas VERTICALES de la malla
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

% rv(k): x = rvi + k * seph;
% seph=|cotaiz-cotade|/nch (separacion horizontal)
% seph=(sqrt((lid(1)-lii(1))^2+(lid(2)-lii(2))^2))/nch;
seph=abs(cotaiz-cotade)/nch;

% Definicion de rectas HORIZONTALES de la malla
% rh(k): x = rhs - k * sepv;
% sepv=|cotasu-cotain|/ncv (separacion vertical)
% sepv=(sqrt((lii(1)-lsi(1))^2+(lii(2)-lsi(2))^2))/ncv;
sepv=abs(cotasu-cotain)/ncv;

%-----
%-----
% calculo una matriz de rayos por cada dispositivo y las junto
todas
%
for dispo=1:3 %bucle47
 Mrayos=[];
 if dispo==1
 tiro='tiro1'
 data=struct('ffuentes','bls.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro1.tim','ctime',7,'sini',1,'send',58, 'rini',1,
 'rend',60);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 clear rdata;
 % DATOS DE TIEMPOS
 tdata=load(data.ftiempos);
 dtime=tdata(:,data.ctime);
 [ntime, ncol]=size(tdata);
 %cleaning unused variables
 clear tdata;

 limA(1)=min(xr);
 limA(2)=max(max(yr),max(ys));
 limB(1)=min(xr);
 limB(2)=min(min(yr),min(ys));
 limC(1)=max(xs);
 limC(2)=max(max(yr),max(ys));
 limD(1)=max(xs);
 limD(2)=min(min(ys),min(yr));

 elseif dispo==2
 tiro='tiro2'
 data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro2.tim','ctime',7);
 % COORDENADAS DE FUENTES

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
sdata=load(data.ffuentes);
[nsource, ncol]=size(sdata);
xs=sdata(:,data.cxs);
ys=sdata(:,data.cys);
clear sdata;
% COORDENADAS DE RECEPTORES
rdata=load(data.frecept);
[nreceiver, ncol]=size(rdata);
xr=rdata(:,data.cxr);
yr=rdata(:,data.cyr);
clear rdata;
% DATOS DE TIEMPOS
tdata=load(data.ftiempos);
dtime=tdata(:,data.ctime);
[ntime, ncol]=size(tdata);
%cleaning unused variables
clear tdata;

limA(1)=min(min(xr),min(xs));
limA(2)=max(yr);
limB(1)=min(min(xr),min(xs));
limB(2)=min(min(ys),min(yr));
limC=limB;
limD(1)=max(xs);
limD(2)=min(min(ys),min(yr));
elseif dispo==3
 tiro='tiro3'
 data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','blrec.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro3.tim','ctime',7);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 clear rdata;
 % DATOS DE TIEMPOS
 tdata=load(data.ftiempos);
 dtime=tdata(:,data.ctime);
 [ntime, ncol]=size(tdata);
 %cleaning unused variables
 clear tdata;

 limA(1)=max(max(xr),max(xs));
 limA(2)=max(yr);
 limB(1)=max(max(xr),max(xs));
 limB(2)=min(min(ys),min(yr));
 limC(1)=min(xs);
 limC(2)=min(min(ys),min(yr));
 limD=limB;

else
end
%-----
% Corte del rayo con las rectas de la malla.
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

%-----

% Guardo las coordenadas de los puntos de corte en las matrices MPCH,
MPCV y maux2
% Corte con rectas horizontales en MPCH , Corte con rectas verticales
en MPCV
% Y junto todo en MGLOBAL
ctiro=1;
for f=1:nsource %%for1
 a1=xs(f);
 a2=ys(f);
 for r=1:nreceiver %for2
 if (dtime(ctiro)>0)
 b1=xr(r);
 b2=yr(r);
 v1=b1-a1;
 v2=b2-a2;
 MPCH=[];
 MPCV=[];
 MGLOBAL=[];
 Mrayosaux=zeros(ncv,nch);
 puntozona=zeros(4,1);

% bucle 3 No trato los rayos que caminan por la frontera de la malla
% if (v1~=0 | (((v2*a1-v1*a2)/v2)~=limA(1) & tiro=='tiro2')...
% | (((v2*a1-v1*a2)/v2)~=limD(1) & tiro=='tiro3'))&...
% (v2~=0 | (((v2*a1-v1*a2)/(-v1))~=limA(2) & ((v2*a1-v1*a2)/(-
v1))~=limD(2)))
% % cargo las coordenadas del punto inicial y final del rayo
MPCH(1,1)=a1;
MPCH(2,1)=a2;
MPCH(3,1)=0;
MPCH(4,1)=0;
MPCH(1,2)=b1;
MPCH(2,2)=b2;
MPCH(3,2)=0;
MPCH(4,2)=0;

% cortes con las rectas horizontales
%-----
for h=1:ncv-1; %%for3
 corcorh=zeros(2,1);
 corcorh=inv([v2,-v1;0,1])*[v2*a1-v1*a2;rhs-h*sepv];
 % guardo las coordenadas en una matriz puntos
de corte r.horizontales
 % recogo tambien el numero de recta interna en
la que se produce, h
 % si el corte esta dentro de los limites ABCD
alimento, en caso contrario no alimento
 puntozona=zeros(4,1);
 if tiro=='tiro1'|tiro=='tiro2' %if_1
 if corcorh(1)>=limB(1) & corcorh(1)<=limD(1) &
corcorh(2)>=limB(2) & corcorh(2)<=limA(2)...
 & corcorh(1)<=a1 & corcorh(1)>=b1
 puntozona(1)=corcorh(1);
 puntozona(2)=corcorh(2);
 puntozona(3)=h;
 MPCH=[MPCH puntozona];
 end
 elseif tiro=='tiro3'

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

 if corcorh(1)>=limC(1) & corcorh(1)<=limD(1) &
corcorh(2)>=limB(2) & corcorh(2)<=limA(2)...
 & corcorh(1)>=a1 & corcorh(1)<=b1
 puntozona(1)=corcorh(1);
 puntozona(2)=corcorh(2);
 puntozona(3)=h;
 MPCH=[MPCH puntozona];
 end
 end %fin if_1
 end %fin_for3
%
% cortes con las rectas verticales
%-----
for v=1:nch-1; %for4
 % guardo las coordenadas en una matriz de
puntos de corte r. verticales
 % recogo tambien el numero de recta interna en
la que se produce, v
 % si el corte esta dentro de los limites ABCD
alimento, en caso contrario no alimento
 corcorv=zeros(2,1);
 puntozona=zeros(4,1);
 if tiro=='tirol'|tiro=='tiro2' %if_2
 corcorv=inv([v2,-v1;1,0])*[v2*a1-
v1*a2;rvi+v*seph];
 if corcorv(1)>=limB(1) & corcorv(1)<=limD(1) &
corcorv(2)>=limB(2) & corcorv(2)<=limA(2)...
 & corcorv(1)<=a1 & corcorv(1)>=b1
 puntozona(1)=corcorv(1);
 puntozona(2)=corcorv(2);
 puntozona(4)=v;
 MPCV=[MPCV puntozona];
 end
 elseif tiro=='tiro3'
 corcorv=inv([v2,-v1;1,0])*[v2*a1-v1*a2;rvi-
v*seph];
 if corcorv(1)>=limC(1) & corcorv(1)<=limD(1) &
corcorv(2)>=limB(2) & corcorv(2)<=limA(2)...
 & corcorv(1)>=a1 & corcorv(1)<=b1
 puntozona(1)=corcorv(1);
 puntozona(2)=corcorv(2);
 puntozona(4)=nch-v;
 MPCV=[MPCV puntozona];
 end
 end %fin if_2
 end %fin_for4
%
% recoger la informacion del rayo f-r y volcar a
una matriz lo recogido por MPCH y PPCV
MGLOBAL=[MGLOBAL; MPCH MPCV];
% Ordeno la matriz MGLOGAL (4 x (nch+1)+(ncv+1))
% de puntos de corte del rayo con las lineas de las
malla horizontales y verticales y punto salida y punto llegada
% para poder ordenarla la he de trasponer
maux1=(MGLOBAL)';
% la ordeno en orden ascendente de la coordenada x (por
defecto,
% versiones posteriores admiten el parametro 'ascend'
'descend') de las coordenadas x,
% mezclando puntos en lineas horizontales y puntos en
lineas verticales

```



#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

maux2=sortrows(maux1);
% % vector con las posiciones de las filas con
coordenadas x no nulas
% vaux3=find(maux2(:,1));
%-----
% CALCULO Y COLOCACION DE LOS TROZOS DE RAYO
%-----
Mrayosaux=zeros(ncv,nch);
% calculo de los trozos del rayo
for k=1:length(maux2(:,1))-1; %for_5
 P1=maux2(k,1);
 P2=maux2(k,2);
 hP=maux2(k,3);
 vP=maux2(k,4);
 Q1=maux2(k+1,1);
 Q2=maux2(k+1,2);
 hQ=maux2(k+1,3);
 vQ=maux2(k+1,4);
 trozo=sqrt((Q1-P1)^2+(Q2-P2)^2);
 % -----
%-----
% COLOCAR cada TROZO en la matriz Mrayosaux dado el
rayo f-r lo coloco en su celda en la malla ncv x nch
% si el trozo es cero significa que pasa por la
esquina de una celda y no hay que colocarle
if trozo~=0 %if_3
 % -----trozo determinado por corte
Horizontal y corte Vertical
 if hP~=0 & vQ~=0
 if Q2>=P2
 Mrayosaux(hP,vQ)=trozo;
 elseif Q2<P2
 Mrayosaux(hP+1,vQ)=trozo;
 end
 elseif vP~=0 & hQ~=0
 if Q2>=P2
 Mrayosaux(hQ+1,vP+1)=trozo;
 elseif Q2<P2
 Mrayosaux(hQ,vP+1)=trozo;
 end
 end
end

% -----trozo determinado por cortes a
Verticales
 if vP~=0 & vQ~=0 %
 vM=max(vP,vQ);
 % alimento Mrayos (, vM)
 % ¿Como determino la fila de Mrayos?,
con la y de uno de los puntos de corte
 for ba=1:ncv %for_6
 if rhs-(ba-1)*sepv >= P2 & P2 >= rhs-
(ba)*sepv
 Mrayosaux(ba,vM)=trozo;
 end
 end %end for_6
 end
end
% -----trozo determinado por cortes a
Horizontales
 if hP~=0 & hQ~=0
 hM=max(hP,hQ);
 % alimento Mrayos (hM,)

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

% ¿Como determino la columna de Mrayos?,
con la x de uno de los puntos de corte
 for bb=1:nch %for_7
 if tiro=='tiro1'|tiro=='tiro2'
 if rvi+(bb-1)*seph <= P1 & P1 <=
rvi+(bb)*seph
 Mrayosaux(hM,bb)=trozo;
 end
 elseif tiro=='tiro3'
 if rvd-(bb-1)*seph >= P1 & P1 >= rvd-
(bb)*seph
 Mrayosaux(hM,nch-(bb-1))=trozo;
 end
 end
 end %end for_7
end
% -----trozo del principio o del final del
rayo h=0 y v=0
if vP==0 & hP==0 | vQ==0 & hQ==0
 mediax=(Q1+P1)/2;
 mediay=(Q2+P2)/2;
 for bc=1:ncv %for_8
 if rhs-(bc-1)*sepv >= mediay & mediay >=
rhs-(bc)*sepv
 fil=bc;
 end
 end %end_for8
%
 for bd=1:nch %for_9
 if tiro=='tiro1'|tiro=='tiro2'
 if rvi+(bd-1)*seph <= mediax & mediax
<= rvi+(bd)*seph
 col=bd;
 end
 elseif tiro=='tiro3'
 if rvd-(bd-1)*seph >= mediax & mediax
>= rvd-(bd)*seph
 col=nch-(bd-1);
 end
 end
 end %end_for9
 Mrayosaux(fil,col)=trozo;
end
%-----
 end %if_3
end % fin for_5
%---GENERACION DE LA MATRIZ DE LONGITUDES-----
Mrayos=[Mrayos; reshape(Mrayosaux', 1, nch*ncv)];
%-----
end
ctiro=ctiro+1;
end %for_2
end %FOR 1

if dispo==1
 Mrayos1=Mrayos;
 dtimel=dtime;
elseif dispo==2
 Mrayos2=Mrayos;
 dtime2=dtime;
elseif dispo==3

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
 Mrayos3=Mrayos;
 dtime3=dtime;
 else
 end

end %bucle47
% % -----
% % GRAFICOS
% % -----
figure(1);
%hold on;
imagesc(flipud(Mrayos1));
figure(2);
%hold on;
imagesc(flipud(Mrayos2));
figure(3);
%hold on;
imagesc(flipud(Mrayos3));

tobs1=dtime1(dtime1>0);
tobs2=dtime2(dtime2>0);
tobs3=dtime3(dtime3>0);

Mrayos=[Mrayos1;Mrayos2;Mrayos3];
tobs=[tobs1;tobs2;tobs3];

% slow=pinv(Mrayos)*tobs;

ub=0.71*ones(nch*ncv,1);
lb=0.1724*ones(nch*ncv,1);
slow=lsqlin(Mrayos,tobs,[],[],[],[],lb,ub);
%smat=reshape(slow,nch,ncv);
% smat=[];
% inicio=1;
% for k=1:nch
% smat=[smat;slow(inicio:fin)']
% inicio=
% end
imagesc(1000./smat);
hold on
plot(tobs)
figure
plot(Mrayos*slow(:),'r')
```

## Programa de trazado de rayos (con ley de Snell)

```

% PROGRAMA DE GENERACION DE LA MATRIZ M, DE RAYOS refracción con ley
de Snell
% CONJUNTO para los tres tiros a la vez (principal_snell)
% -----
% -----
% OBJETIVO DEL PROGRAMA: Dados unos datos de tiempos reales observados
en un medio,
% y utilizando las coordenadas reales de
fuentes y receptores,
% diseño una malla que recubre el dominio y
asignando
% una velocidad por cada celda
% hallo la matriz MIJ de caminos de rayo
refractados
% es decir cada fila i me da los trozos que el
rayo i tiene en cada celda
% cada columna j me da las longitudes de los
rayos atravesando esa celda.
%
% Autor: L.M. Pedruelo y J.L. Fernández Martínez Abril 2012
%
% -----
% -----
% Tiro 1 A-----B Tiro 2 A Tiro 3 A
% | | | . . |
% | | | . . |
% C-----D BC-----D C-----BD
%
% -----
% -----
% INICIALIZACION DE VARIABLES
% -----
% nch numero de celdas horizontales
% ncv numero de celdas verticales

nch=10.;
ncv=20.;

% -----
% Calculo de los limites de la malla
% para que se ajuste a los tres tipos de disparo
% -----
%limitesm.dispo=dispo;

[xs,ys,xr,yr,cotaiz,cotade,cotasu,cotain,lineade,lineaiz,lineain]=lect
uraD;

% -----
% -----
% Generacion de la malla.
% Recorriendo las celdas de la malla abajo a arriba y de izda a dcha
% se generan dos matrices CELDAS y VECINAS.
% CELDAS: En cada fila se situan las coordenadas (x,y)de los cuatro
vértices
% de una celda. De abajo a arriba y en sentido antihorario.
% (4) (3)
% (1) (2)

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
% VECINAS: En cada fila se sitúan los números de las cuatro celdas
colindantes
% celda de abajo, celda de la dcha, celda de arriba, celda de
la izda.

% -----

[celdas,vecinas,centrosx,centrosy]=genera_malla(nch,ncv,cotaiz,cotade,
cotasu,cotain);

% -----
% Asignación de VELOCIDADES a cada celda de la malla
% -----
vhomog=5000;
% velocidad=vhomog*ones(ncv,nch);
velocidad=smat;

% -----

% calculo una matriz de rayos por cada dispositivo y las junto todas
% -----

for dispo=1:3 %bucle GENERAL

 MIJ=[];
 if dispo==1 | dispo==2
 propagacion='izda';
 else
 propagacion='dcha';
 end
 [xs,ys,xr,yr,dtime]=lecturaDT(dispo);

 [nsource, ncol]=size(xs);
 [nreceiver, ncol]=size(xr);

 ctiro=1;
 for i=1:nsource
 for j=1:nreceiver
 fuente=[xs(i),ys(i)];
 receptor=[xr(j),yr(j)];
 MIJaux=zeros(1,nch*ncv);

 % -----

 % anulo los tiros que siendo de propagacion izda van a la
dcha por la geom
 % anulo los tiros que siendo de propagacion dcha van a la
izda por la geom
 if (dispo==2 & xr(j)>= xs(i)) | (dispo==3 & xr(j)<= xs(i))
 dtime(ctiro)=0
 end
 % -----

 if (dtime(ctiro)>0)
[MIJaux,norayo]=trazadosnell(velocidad,celdas,vecinas,propagacion,cota
iz,cotade,cotain,cotasu,fuente,receptor);
 if norayo==0
 MIJ=[MIJ;MIJaux];
 elseif norayo==1
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

 dtime(ctiro)=0; %anulamos el tiempo observado que
proporciona % un lanzamiento sin rayo posible
 end
 end
 ctiro=ctiro+1;
 end
 end
 if dispo==1
 MIJ1=MIJ;
 dtime1=dtime;
 elseif dispo==2
 MIJ2=MIJ;
 dtime2=dtime;
 elseif dispo==3
 MIJ3=MIJ;
 dtime3=dtime;
 else
 end
 end %bucle GENERAL
% -----
% GRAFICOS
% -----
% figure(1);
% %hold on;
% imagesc(MIJ1);
% figure(2);
% %hold on;
% imagesc(MIJ2);
% figure(3);
% %hold on;
% imagesc(MIJ3);

tobs1=dtime1(dtime1>0);
tobs2=dtime2(dtime2>0);
tobs3=dtime3(dtime3>0);

MIJ=[MIJ1;MIJ2;MIJ3];
tobs=[tobs1;tobs2;tobs3];
figure;
imagesc(MIJ);

% slow=pinv(MIJ)*tobs
% smin=1/5.5;
% smax=1/4.7;
ub=0.71*ones(nch*ncv,1);
lb=0.1724*ones(nch*ncv,1);
% ub=smax*ones(nch*ncv,1);
% lb=smin*ones(nch*ncv,1);

slow=lsqlin(MIJ,tobs,[],[],[],[],lb,ub);
smat=flipud(reshape(slow,nch,ncv)'); %en su sitio

figure;
plot(tobs)
hold on
plot(MIJ*slow(:),'r')

figure;
%hay que voltear los centros según y

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
imagesc(centrosx, fliplr(centrosy), 1./smat);
axis equal
axis xy
colormap summer
hold on
plot(lineaiz(:,1), lineaiz(:,2), 'k.', lineade(:,1), lineade(:,2), 'k.',
lineain(:,1), lineain(:,2), 'k. ');
title('Dispositivo de datos GRIMSEL');
xlabel('x (Este)');
ylabel('y (Norte)');
% set(gca, 'Xtick', xlt, 'Xgrid', 'on');
grid off;
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[xs,ys,xr,yr,cotaiz,cotade,cotasu,cotain,lineade,lineaiz,lineain]=lect
uraD()

% Se leen las coordenadas de las posiciones de fuentes y
% receptores y se fijan los límites de la malla.
% es una malla conjunta para los tres tipos de dispositivos
% -----
% INICIALIZACION DE VARIABLES
% -----
% psi puntos superiores izquierdos
% lsi limite superior izquierdo de la malla conjunta
psi1=[];
psi2=[];
psd1=[];
psd2=[];
pii1=[];
pii2=[];
pid1=[];
pid2=[];
% -----
--
% LECTURA DE COORDENADAS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS LIMITES DE LA
MALLA
% CONJUNTA
% -----
--
%dispo=limitesm.dispo;

for dispo=1:3
 if dispo==1
 data=struct('ffuentes','bls.cor','cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor','cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tirol.tim','ctime',7,'sini',1,'send',58,'rini',1,
 'rend',60);
 % COORDENADAS DE FUENTES
 sdata=load(data.ffuentes);
 [nsource, ncol]=size(sdata);
 xs=sdata(:,data.cxs);
 ys=sdata(:,data.cys);
 lineade=[xs,ys];
 clear sdata;
 % COORDENADAS DE RECEPTORES
 rdata=load(data.frecept);
 [nreceiver, ncol]=size(rdata);
 xr=rdata(:,data.cxr);
 yr=rdata(:,data.cyr);
 lineaiz=[xr,yr];
 clear rdata;

 psi1=[psi1 min(xr)];
 psi2=[psi2 max(max(yr),max(ys))];
 pii1=[pii1 min(xr)];
 pii2=[pii2 min(min(yr),min(ys))];
 psd1=[psd1 max(xs)];
 psd2=[psd2 max(max(yr),max(ys))];
 pid1=[pid1 max(xs)];
 pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

 elseif dispo==2
```



#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','b2.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro2.tim','ctime',7);
% COORDENADAS DE FUENTES
sdata=load(data.ffuentes);
[nsource, ncol]=size(sdata);
xs=sdata(:,data.cxs);
ys=sdata(:,data.cys);
lineain=[xs,ys];
clear sdata;
% COORDENADAS DE RECEPTORES
rdata=load(data.frecept);
[nreceiver, ncol]=size(rdata);
xr=rdata(:,data.cxr);
yr=rdata(:,data.cyr);
clear rdata;

psi1=[psi1 min(min(xr),min(xs))];
psi2=[psi2 max(yr)];
pii1=[pii1 min(min(xr),min(xs))];
pii2=[pii2 min(min(ys),min(yr))];
pid1=[pid1 max(xs)];
pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

elseif dispo==3
data=struct('ffuentes','tunel.cor', 'cxs',2,'cys',3,...
 'frecept','blrec.cor', 'cxr',2,'cyr',3,...
 'ftiempos','tiro3.tim','ctime',7);
% COORDENADAS DE FUENTES
sdata=load(data.ffuentes);
[nsource, ncol]=size(sdata);
xs=sdata(:,data.cxs);
ys=sdata(:,data.cys);
clear sdata;
% COORDENADAS DE RECEPTORES
rdata=load(data.frecept);
[nreceiver, ncol]=size(rdata);
xr=rdata(:,data.cxr);
yr=rdata(:,data.cyr);
clear rdata;

pii1=[pii1 min(xs)];
pii2=[pii2 min(min(ys),min(yr))];
psd1=[psd1 max(max(xr),max(xs))];
psd2=[psd2 max(yr)];
pid1=[pid1 max(max(xr),max(xs))];
pid2=[pid2 min(min(ys),min(yr))];

end
end

% limitesm.xs=xs;
% limitesm.ys=ys;
% limitesm.xr=xr;
% limitesm.yr=yr;
% limitesm.nsource=nsource;
% limitesm.nreceiver=nreceiver;

cotaiz=min(min(psi1), min(pii1));
cotade=max(max(psd1), max(pid1));
cotasu=max(max(psi2), max(psd2));
```

#### *A.4 Programas de trazado de rayos*

```
cotain=min(min(pii2), min(pid2));
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[celdas,vecinas,centrosx,centrosy]=genera_malla(nch,ncv,cotaiz,cotade,
cotasu,cotain)
% -----
% -----
% Generacion de la malla.
% Recorriendo las celdas de la malla abajo a arriba y de izda a dcha
% se generan dos matrices CELDAS y VECINAS.
% CELDAS: En cada fila se situan las coordenadas (x,y)de los cuatro
vértices
% de una celda. De abajo a arriba y en sentido antihorario.
% (4) (3)
% (1) (2)
% VECINAS: En cada fila se situan los numeros de las cuatro celdas
colindantes
% celda de abajo, celda de la dcha, celda de arriba, celda de
la izda.
% -----
% -----

xd=linspace(cotaiz,cotade,nch+1);
deltax=abs(cotaiz-cotade)/nch;
centrosx=xd(1,1:nch)+deltax/2;

yd=linspace(cotain,cotasu,ncv+1);
deltay=abs(cotasu-cotain)/ncv;
centrosy=yd(1,1:ncv)+deltay/2;

celdas=[];

vecinas=zeros(nch*ncv,4);

% matriz de vertices de celdas, cada fila son las coordenadas de los
vertices de una celda
% tantas filas como celdas
% |1x,1y|2x,2y|3x,3y|4x,4y|
% -----

for i=1:ncv
 for j=1:nch

vector=[xd(j),yd(i),xd(j+1),yd(i),xd(j+1),yd(i+1),xd(j),yd(i+1)];
 celdas=[celdas;vector];
 end
end

% vecinas de una celda
% ejemplo dim=5x4 vecinas(7,:)= (3,8,11,6)
% -----

for i=1:ncv
 for j=1:nch
 posicion=(i-1)*nch+j;
 pos_down=(i-2)*nch+j;
 pos_dcha=posicion+1;
 pos_up=i*nch+j;
 pos_izda=posicion-1;

 if (pos_down <= 0)
 pos_down=-1;
 end
 end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
 if (pos_dcha > i*nch)
 pos_dcha=-1;
 end
 if (pos_up > nch*ncv)
 pos_up=-1;
 end
 if (pos_izda == (i-1)*nch)
 pos_izda=-1;
 end
 vecinas(posicion,:)=[pos_down pos_dcha pos_up pos_izda];
end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[MIJaux,norayo]=trazadosnell(velocidad,celdas,vecinas,propagacion,cota
iz,cotade,cotain,cotasu,fuente,receptor)

norayo=0;
tolerancia_captura=0.015;
[nch,ncv]=size(velocidad);
MIJaux=zeros(1,nch*ncv);%reparar si sobra
dibuMIJauxX=[];
dibuMIJauxY=[];
% mediante este reshape la velocidad de la celda p (numerada por
filas) es
% rvel(p)
% Dada una matriz de velocidades (que vaya de abajo a arriba y de izda
a dcha)
% para pasarla a un vector fila ordenada 1° la volteo(hay instr) 2° la
traspongo
% 3° reshape
rvel=reshape((flipud(velocidad))',1,nch*ncv);% cuidado rvel misma
estructura que vecinas
%=====
=====
% localización de las celdas (celda_fuente,celda_receptor) en las
que
% se sitúan la fuente y el receptor. (pues estos no tienen por que
% encontrarse en la frontera de la malla)
%=====
=====

% coordenadas de las x de los vértices de las celdas
% están en las columnas impares del matriz celdas);
% coordenadas de las y de los vértices de las celdas
% están en las columnas pares del matriz celdas);
% fuente
% receptor

for k=1:size(celdas,1)
 % coordenadas x de la celda k
 xp1=celdas(k,1);
 xp2=celdas(k,3);
 % coordenadas y de la celda k
 yp1=celdas(k,2);
 yp4=celdas(k,8);
 if fuente(1)>=xp1 & fuente(1)<= xp2 & fuente(2)>= yp1 &
fuente(2)<=yp4;
 celda_fuente=k;
 break;
 end
end
for k=1:size(celdas,1)
 % coordenadas x de la celda k
 xp1=celdas(k,1);
 xp2=celdas(k,3);
 % coordenadas y de la celda k
 yp1=celdas(k,2);
 yp4=celdas(k,8);
 if (receptor(1)>=xp1 & receptor(1)<= xp2) & (receptor(2)>= yp1 &
receptor(2)<=yp4);
 celda_receptor=k;
 break;
 end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
end
cor_celda_fuente=celdas(celda_fuente,:); %coordenadas(x,y) de los 4
vertices
cor_celda_receptor=celdas(celda_receptor,:); %coordenadas(x,y) de los 4
vertices

% if display==1
% figure;
% plot(fuente(1),fuente(2),'r*');
% hold on
% plot(receptor(1),receptor(2),'bo');
% axis([cotaiz,cotade,cotain,cotasu])
% title('fuente en rojo');
% end

%=====
%
% Determinación del ángulo inicial de la propagación entre (0,pi)
%=====
%=====

if propagacion=='izda'
 angulo_inicial=atan((fuente(2)-receptor(2))/(fuente(1)-
receptor(1)));
elseif propagacion=='dcha'
 angulo_inicial=atan((receptor(2)-fuente(2))/(receptor(1)-
fuente(1)));
end
if angulo_inicial < 0
 angulo_inicial=angulo_inicial+pi;
end
abanico=[150*pi/180,30*pi/180]; % limite del aumento del angulo
 % limite de la disminucion del angulo

% parámetros que si valen uno indican respectivamente el fin de la
% propagación, el fin del muestreo antihorario, el fin del muestreo
horario o
% que se ha producido la reflexion, en este orden.
fin=0;
fin_dism_ang=0;
fin_aum_ang=0;
reflexion=0;

%=====
%=====
% Previo al comienzo de la propagación, Calculo de Pseudofuente y
pseudoreceptor
%=====
%=====

% El bucle de la propagacion no sera entre la fuente y el receptor
% sino entre los puntos de corte de la recta que los une con las
aristas de
% sus respectivas celdas, calculamos estos puntos

% si fuente y receptor estan en la misma celda
if celda_receptor==celda_fuente
 trozo=sqrt((fuente(2)-receptor(2))^2+(fuente(1)-receptor(1))^2);
 MIJaux(1,celda_receptor)=trozo;
 fin=1;
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
if propagacion=='izda' & fin ==0
 % Hallamos el pseudoreceptor
 punto=receptor;
 angulo=angulo_inicial;
 rectangulo=cor_celdareceptor;
 [punto_inter, aristac, trozo]=inter_dcha(rectangulo, angulo, punto);
 psd_recep=punto_inter;
 trozofin=trozo;
 MIJaux(1, celda_receptor)=trozofin;
 dibutrozofinX=[receptor(1);psd_recep(1)];
 dibutrozofinY=[receptor(2);psd_recep(2)];
 dibuMIJauxX=[dibuMIJauxX dibutrozofinX];
 dibuMIJauxY=[dibuMIJauxY dibutrozofinY];
 % Hallamos la pseudofuente
 punto=fuente;
 rectangulo=cor_celdafuente;
 celda_corriente=celda_fuente;
 [punto_inter, aristac, trozo]=inter_izda(rectangulo, angulo, punto);
 psd_fuente=punto_inter;
 trozoini=trozo;
 MIJaux(1, celda_fuente)=trozoini;
 celda_aneja=vecinas(celda_corriente, aristac);
 dibutrozoiniX=[fuente(1);psd_fuente(1)];
 dibutrozoiniY=[fuente(2);psd_fuente(2)];
 dibuMIJauxX=[dibuMIJauxX dibutrozoiniX];
 dibuMIJauxY=[dibuMIJauxY dibutrozoiniY];

 % si fuente y receptor estan en celdas contiguas
 if abs(psd_recep(1)-psd_fuente(1))<0.0001 & abs(psd_recep(2)-
psd_fuente(2))<0.0001%| celda_receptor==celda_aneja
 fin=1;
 else
 v1=rvel(celda_corriente);
 v2=rvel(celda_aneja);
 celda_psdfuente=celda_aneja;
 if aristac==1
 incidente=angulo-(pi/2);
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)+refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 if aristac==3
 incidente=(pi/2)- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 end
end
```

```

 end
 end
 if aristac==4
 if angulo>(pi/2)
 incidente= pi- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=pi-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 else
 incidente=angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
end
end
end
elseif propagacion=='dcha' & fin ==0
 % Hallamos el pseudoreceptor
 punto=receptor;
 angulo=angulo_inicial;
 rectangulo=cor_celdareceptor;
 [punto_inter, aristac, trozo]=inter_izda(rectangulo, angulo, punto);
 psd_recep=punto_inter;
 trozofin=trozo;
 MIJaux(1, celda_receptor)=trozofin;
 dibutrozofinX=[receptor(1);psd_recep(1)];
 dibutrozofinY=[receptor(2);psd_recep(2)];
 dibuMIJauxX=[dibuMIJauxX dibutrozofinX];
 dibuMIJauxY=[dibuMIJauxY dibutrozofinY];

 % Hallamos la pseudofuente
 punto=fuente;
 rectangulo=cor_celdafuente;
 celda_corriente=celda_fuente;
 [punto_inter, aristac, trozo]=inter_dcha(rectangulo, angulo, punto);
 psd_fuente=punto_inter;
 trozoini=trozo;
 MIJaux(1, celda_fuente)=trozoini;
 celda_aneja=vecinas(celda_corriente, aristac);
 dibutrozoiniX=[fuente(1);psd_fuente(1)];
 dibutrozoiniY=[fuente(2);psd_fuente(2)];
 dibuMIJauxX=[dibuMIJauxX dibutrozoiniX];
 dibuMIJauxY=[dibuMIJauxY dibutrozoiniY];

```



#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
if abs(psd_recep(1)-psd_fuente(1))<0.0001 & abs(psd_recep(2)-
psd_fuente(2))<0.0001%| celda_receptor==celda_aneja
 fin=1;
else
 v1=rvel(celda_corriente);
 v2=rvel(celda_aneja);
 celda_psd_fuente=celda_aneja;
 if aristac==1
 incidente=(pi/2)-angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 if aristac==3
 incidente=angulo-(pi/2);
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)+refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 if aristac==2
 if angulo>(pi/2)
 incidente= pi- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=pi-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 end
 else
 incidente=angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 end
 end
 end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

 reflexion==1;
 end
 end

 end
 end
 end

end % de elseif propagacion=='izda' 'dcha'

%=====
%=====
% comienza la propagación
%=====
%=====

if fin==0
punto=psd_fuente;
rectangulo=celdas(celda_psd_fuente,:);
celda_corriente=celda_psd_fuente;
angulo_ini_aux1=angulo;
angulo_ini_aux2=angulo;
end

while fin==0
% angulo
% punto
% celda_corriente
% aristac
 [punto_inter,aristac,trozo]=interseccion(rectangulo,angulo,punto);

%%punto_inter
% if display==1
% xplot=[punto(1),punto_inter(1)];
% yplot=[punto(2),punto_inter(2)];
% plot(xplot,yplot,'k. ');
% end
 MIJaux(1,celda_corriente)=trozo;
 dibuMIJauxX=[dibuMIJauxX [punto(1);punto_inter(1)]];
 dibuMIJauxY=[dibuMIJauxY [punto(2);punto_inter(2)]];
 celda_aneja=vecinas(celda_corriente,aristac);
 dis_captura=sqrt((psd_recep(1)-punto_inter(1))^2+(psd_recep(2)-
punto_inter(2))^2);

%=====
%=====
% Despues de atravesar una celda me encuentro en tres posibles
situaciones:
% 1° Exito : He llegado a la ultima encontrando el pseudoreceptor.
% 2° Fracaso : He llegado a al ultima (lejos del pseudoreceptor)
% o me he salido por un lado de la malla o me he pasado el
psdreceptor.
% 3° Aun estoy en camino, debo seguir cortando celdas.
%=====
%=====

if dis_captura < tolerancia_captura
% if abs(psd_recep(1)-punto_inter(1)) < 0.01 & dis_captura <
tolerancia_captura
%=====
% 1° se terminó la propagación con éxito
%=====

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```

% se guardarán las longitudes de rayos en la matriz MIJ .

fin=1;

elseif (abs(psd_recep(1)-punto_inter(1)) < 0.001 & dis_captura >
tolerancia_captura)...
| (punto_inter(2)< cotain) | (punto_inter(2)> cotasu) |
celda_aneja == -1 ...
| propagacion=='izda' & psd_recep(1) > punto_inter(1) ...
| propagacion=='dcha' & psd_recep(1) < punto_inter(1) ...
| reflexion==1

%=====
% 2 ° se terminó la propagación sin éxito, es decir, se llegó
a la
% línea de pseudo-receptores a una distancia mayor que la
distancia
% mínima de captura o bien se produce reflexion.
% Borro el camino recorrido por el rayo y vuelvo a comenzar.

%=====
MIJaux=zeros(1,nch*ncv);
dibuMIJaux=[];
% Se inicia el procedimiento desde la pseudo-fuente,
% modificando el ángulo de inicio en un grado
MIJaux(1,celda_receptor)=trozofin;
MIJaux(1,celda_fuente)=trozoini;
dibuMIJauxX=[dibutrozofinX dibutrozoiniX];
dibuMIJauxY=[dibutrozofinY dibutrozoiniY];

punto=psd_fuente;
rectangulo=celdas(celda_psdfuente,:);
celda_corriente=celda_psdfuente;
if fin_dism_ang==0;
 angulo_ini_aux1=angulo_ini_aux1-0.25*pi/180;
 % se sobrepasa el valor del abanico y cambiamos la
propagacion
 %en sentido horario
 angulo=angulo_ini_aux1;
 if angulo < abanico(2)
 fin_dism_ang=1;
 end
elseif fin_dism_ang== 1 & fin_aum_ang==0;
 angulo_ini_aux2=angulo_ini_aux2+0.25*pi/180;
 angulo=angulo_ini_aux2;
 if angulo > abanico(1)
 fin_aum_ang=1;
 end
elseif fin_dism_ang== 1 & fin_aum_ang==1
 disp('Tiro anulado. No se llega al receptor, ¿menguar la
tolerancia, disminuir el paso del abanico, abrir mas el abanico?');
 % se terminó la propagación sin éxito, despues de
recorrer todo el abanico
 % Se marcar con el código norayo para indicar que no
guardo el rayo y no debe
% ser usado en la inversión pues no hay tiempo teórico
norayo=1;
fin=1;
break

```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
% de la subrutina trazadosnell, ademas MIJaux es una linea de
ceros es decir
% no debo tener en cuenta ese rayo Fuente-Receptor, i.e. debo
eliminar esa ecuación del sistema
end
else
%=====
% 3° Aun estoy en camino
% nueva fuente de emisión en la nueva celda
%=====
punto=punto_inter;

v1=rvel(celda_corriente);
v2=rvel(celda_aneja);

celda_corriente=celda_aneja;
rectangulo=celdas(celda_corriente,:);

% siempre tomo el angulo de la pendiente entre (0,pi)
if angulo<0
 angulo=angulo+pi;
end

if isequal(propagacion, 'izda')
 if aristac==1
 incidente=angulo-(pi/2);
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)+refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 if aristac==3
 incidente= (pi/2)- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
 if aristac==2 | aristac==4
 if angulo>(pi/2)
 incidente= pi- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=pi-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 end
 end
 end
 end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
end
end
else
 incidente=angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang=1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
end
end
elseif isequal(propagacion, 'dcha')
 if aristac==1
 incidente=(pi/2)-angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang=1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
end
if aristac==3
 incidente=angulo-(pi/2);
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=(pi/2)+refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang=1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
end
end
if aristac==2 | aristac==4
 if angulo>(pi/2)
 incidente= pi- angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=pi-refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang=1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
 end
end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
 end
 end
else
 incidente=angulo;
 if abs((v2/v1)*sin(incidente)) < 1
 refraccion=asin(v2/v1*sin(incidente));
 angulo=refraccion;
 else
 if fin_dism_ang==0
 fin_dism_ang==1;
 elseif fin_dism_ang==1 & fin_aum_ang==0
 fin_aum_ang=1;
 reflexion==1;
 end
 end
end
end
end

 end
 angulo=angulo;
end % de las tres posibilidades
end % del while
%hold on;
figure(1);
line(dibuMIJauxX,dibuMIJauxY);
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[punto_inter,aristac,trozo]=interseccion(rectangulo,angulo,punto)

impar=[1,3,5,7];
par=[2,4,6,8];
xmin=min(rectangulo(impar));
xmax=max(rectangulo(impar));
ymin=min(rectangulo(par));
ymax=max(rectangulo(par));

xint=ones(1,4)*(xmin-1);
yint=ones(1,4)*(ymin-1);
 %otra forma
%xiz=rectangulo(1);
%xde=rectangulo(3);
%ysu=rectangulo(8);
%yin=rectangulo(2);

% =====
% calculamos las intersecciones con las cuatro aristas del rectángulo
% =====
pendiente=tan(angulo);
for i=1:4
 cont=2*i-1;
 x1=rectangulo(cont);
 y1=rectangulo(cont+1);
 if i==4
 x2=rectangulo(1);
 y2=rectangulo(2);
 else
 x2=rectangulo(cont+2);
 y2=rectangulo(cont+3);
 end
 % puntos de interseccion
 if i==1 & pendiente~=0
 yint(i)=y1;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 elseif i==2 & angulo~=pi/2
 xint(i)=x2;
 yint(i)=punto(2)+pendiente*(xint(i)-punto(1));
 elseif i==3 & pendiente~=0
 yint(i)=y2;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 elseif i==4 & angulo~=pi/2
 xint(i)=x1;
 yint(i)=punto(2)+pendiente*(xint(i)-punto(1));
 end

%
=====
=====
 % Hallamos los puntos de corte que están en la frontera del
 rectángulo(hay 2)
 % uno es el punto de emisión, debo tomar el otro.
%
=====
=====
 if xint(i) >= xmin & xint(i)<= xmax & yint(i) >= ymin & yint(i)<=
ymax
 distancia=sqrt((xint(i)-punto(1))^2+(yint(i)-punto(2))^2);
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
 if distancia > 0 & distancia <= sqrt((xmin-xmax)^2+(ymin-
ymax)^2)
 aristac = i;
 trozo = distancia;
 punto_inter=[xint(i),yint(i)];
 end
end
end
```



#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[punto_inter,aristac,trozo]=inter_dcha(rectangulo,angulo,punto)

xint=zeros(1,4);
yint=zeros(1,4);
impar=[1,3,5,7];
par=[2,4,6,8];
xmin=min(rectangulo(impar));
xmax=max(rectangulo(impar));
ymin=min(rectangulo(par));
ymax=max(rectangulo(par));
xint=ones(1,4)*(xmin-1);
yint=ones(1,4)*(ymin-1);

%
=====
% calculamos las intersecciones con las tres aristas de la izda del
rectángulo
%
=====
pendiente=tan(angulo);
for i=1:3
 cont=2*i-1;
 x1=rectangulo(cont);
 y1=rectangulo(cont+1);
 x2=rectangulo(cont+2);
 y2=rectangulo(cont+3);
 % puntos de interseccion
 if i==1 & pendiente~=0
 yint(i)=y1;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 elseif i==2 & angulo~=pi/2
 xint(i)=x2;
 yint(i)=punto(2)+pendiente*(xint(i)-punto(1));
 elseif i==3 & pendiente~=0
 yint(i)=y2;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 end

% =====
% Hallamos el punto de corte que está en la frontera del rectángulo
% =====
 if xint(i) >= xmin & xint(i)<= xmax & yint(i) >= ymin & yint(i)<=
ymax
 distancia=sqrt((xint(i)-punto(1))^2+(yint(i)-punto(2))^2);
 if distancia >= 0 & distancia <= sqrt((xmin-xmax)^2+(ymin-
ymax)^2)
 if (pendiente<=0 & i==1) |(pendiente>=0 & i==3)|i==2
 aristac = i;
 trozo = distancia;
 punto_inter=[xint(i),yint(i)];
 %
 elseif (pendiente<=0 & i==3) |(pendiente>=0 & i==1)
 %
 display ('ERROR EN EL CORTE DCHA')
 end
 end
 end
end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
function
[punto_inter,aristac,trozo]=inter_izda(rectangulo,angulo,punto)

xint=zeros(1,4);
yint=zeros(1,4);
impar=[1,3,5,7];
par=[2,4,6,8];
xmin=min(rectangulo(impar));
xmax=max(rectangulo(impar));
ymin=min(rectangulo(par));
ymax=max(rectangulo(par));
xint=ones(1,4)*(xmin-1);
yint=ones(1,4)*(ymin-1);

%
=====
% calculamos las intersecciones con las tres aristas de la izda del
rectángulo
%
=====
pendiente=tan(angulo);
for i=1:4
 cont=2*i-1;
 x1=rectangulo(cont);
 y1=rectangulo(cont+1);
 if i==4
 x2=rectangulo(1);
 y2=rectangulo(2);
 else
 x2=rectangulo(cont+2);
 y2=rectangulo(cont+3);
 end
 % puntos de interseccion
 if i==1 & pendiente~=0
 yint(i)=y1;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 % elseif i==2
 % xint(i)=x2;
 % yint(i)=punto(2)+pendiente*(xint(i)-punto(1));
 elseif i==3 & pendiente~=0
 yint(i)=y2;
 xint(i)= punto(1)+(y1-punto(2))/pendiente;
 elseif i==4 & angulo~=pi/2
 xint(i)=x1;
 yint(i)=punto(2)+pendiente*(xint(i)-punto(1));
 end

% =====
% Hallamos el punto de corte que está en la frontera del rectángulo
% =====
 if xint(i) >= xmin & xint(i)<= xmax & yint(i) >= ymin & yint(i)<=
ymax
 distancia=sqrt((xint(i)-punto(1))^2+(yint(i)-punto(2))^2);
 if distancia >= 0 & distancia <= sqrt((xmin-xmax)^2+(ymin-
ymax)^2)
 if (pendiente<=0 & i==3)|(pendiente>=0 & i==1)|i==4
 aristac = i;
 trozo = distancia;
 punto_inter=[xint(i),yint(i)];
 end
 end
 end
end
```

#### A.4 Programas de trazado de rayos

```
% elseif (pendiente<=0 & i==1) |(pendiente>=0 & i==3)
% display ('ERROR EN EL CORTE IZDA')
% end
% end
% end
end
```

## **A.5 Publicación FastTimes**



## Mean Traveltime Curves: A Simple Tool for Traveltime Analysis, Velocity Tuning, and Anomaly Detection in 2D Transmission Tomographic Surveys

by J. L. Fernández-Martínez<sup>\*,1</sup>, L. M. Pedruelo-González<sup>1</sup>, and J. W. Rector<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mathematics Dpt. Oviedo University, Spain

<sup>2</sup> Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley

\* Visiting Professor at the University of California Berkeley

### Summary

Tomography methods belong to the class of non-destructive inspection techniques and are widely used in engineering applications. One of the main disadvantages of these methods is their data dependence, since data errors are often present in transmission tomography experiments. We present the mean traveltime curves (robust and non-robust descriptors) as a simple method to analyze and to interpret traveltime in 2D transmission tomography experiments. These curves also allow the inference of velocity models which can be taken into account in the resolution of the tomographic inverse problem. These curves admit an analytical expression for layered isotropic and elliptically anisotropic media explored using any kind of acquisition geometry. This method has been published recently in the programs MT-CLAB and AMTCLAB, and can be easily implemented in a spreadsheet for use in field studies. We show the application of this method to real and synthetic data sets to illustrate the effect of geological heterogeneities, faults, intrusions, and cavities.

### Introduction

Tomographic methods have been widely used in mining exploration (for example, Dyer and Fawcett, 1994), geotechnical studies and civil engineering (for example, Smith and Dyer, 1990), and hydrogeology (for example, Hyndman and Harris, 1996). These methods are aimed at inferring the velocity distribution of a real geological medium by means of the inversion of the measured traveltime data acquired from their boundaries. The numerical resolution of this inverse problem is iterative because the traveltime paths are unknown and depend on the velocity distribution of the geological medium. Thus, specific programs are needed for solving the traveltime inverse problem.

The mean traveltime curves (robust and non-robust descriptors) are conceptually much simpler, since they describe the variation of the main statistical parameters of the traveltime distribution for different source and receiver gathering subsets as a function of a gather index. The theoretical mean traveltime curves (Fernández-Martínez and others, 2006, 2008) assume that the geological medium can be divided in homogeneous layers, either isotropic or elliptically anisotropic, and constitute a simple method to accomplish a guided structured analysis of the data variability before inversion and to analyze traveltime quality in 2D acoustic transmission tomography experiments. Comparison of the theoretical mean traveltime curves to the empirical counterparts allow the inference of background velocity models that are valid at experiment scale and that can be taken into account in the resolution of the inverse problem as a regularization term. The robust mean traveltime curves (MTC) are more resistant to the presence of outliers, and thus they are preferred to infer the velocity model. These curves admit analytical expression for zonally isotropic and elliptically anisotropic media explored using any kind of acquisition geometry. We show the application of this method to a granitic medium (Febex Project, Nagra, Switzerland), to a sedimentary sequence showing how to detect a layer transition, and finally we perform synthetic modelling to show the effect on these curves on faults, dikes, and cavities.

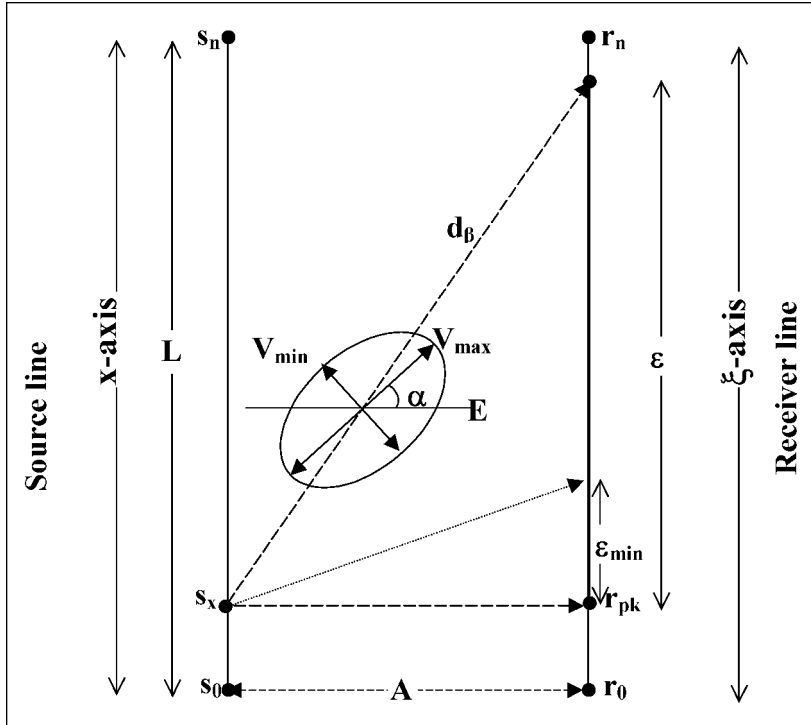


Figure 1. Rectangular recording geometry case. Variables involved in the zone analysis. Isotropy corresponds to the case  $V_{min} = V_{max}$ .

time and the standard deviation of the traveltime distribution for different source and receiver gathering subsets. For rectangular acquisition geometry, these curves are symmetric with respect to the middle point of the gather line ( $x_s = L / 2$ ). These curves have also been generalized for the case of an irregular acquisition geometry (Fernández-Martínez and others, 2006), which provoke them to lose their symmetry (Figure 2).

MTC analysis can be considered as a linear tomography method, since it uses straight approximation of seismic ray-paths (Berryman, 1994).

*The Robust Mean Traveltime Curves*

Also, using the same hypothesis (homogeneous and isotropic medium) it is possible to determine the p-percentiles of the traveltime distribution:

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = p \in (0,1)$$

Three cases arise:

$$0 < x_s < \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL - x_s)^2}{V^2}}$$

$$\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL)^2}{4V^2}}$$

$$\frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} \Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{((p-1)L + x_s)^2}{V^2}}$$

**The Mean Traveltime Curves**

*Mean and Standard Deviation Curves*

We illustrate the method for the simplest case, a geological domain,  $\Omega$  (homogeneous and isotropic), explored using a rectangular recording geometry (sources and receivers along two parallel bore-holes, Figure 1). Due to isotropy and homogeneity, traveltime variations in each source gather follow the hyperbolic law:

$$t(\xi; x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}}$$

where  $\xi$  describes the receiver position (with respect to the gather origin),  $V$  is the constant velocity of the medium, and  $t_0$  is the minimum traveltime in each gather.

Fernández Martínez and others (2006) found the theoretical models for the mean



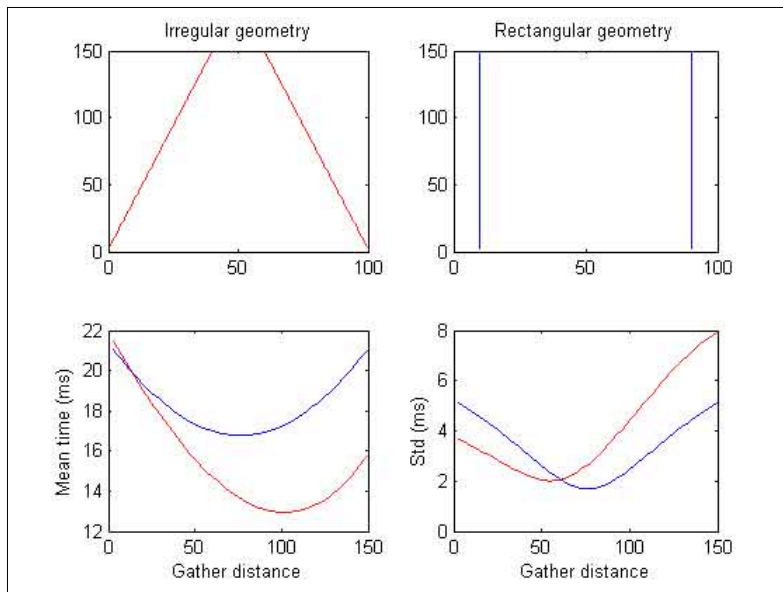


Figure 2. Comparison of mean traveltime curves for rectangular and irregular acquisition geometries.

Also, as is true for the mean and standard deviation curves, the so-called robust descriptors can be generalized to any kind of recording geometry (Figure 3a, b). The irregular configuration provokes asymmetry of these curves and the sill becomes a dipping straight line (Fernández-Martínez and others, 2008d).

### Detecting Anisotropies: A Simple Geometrical Approach

The MTC method has been generalized recently to geological media showing an angular dependency of the velocity (Fernández-Martínez and Pedruelo-González, 2008b, c). Let us suppose that the recording geometry is rectangular, and assume that the velocity model describing the inspected geological medium has elliptical form given by the following parameters: the maximum velocity ( $V_{\max}$ ), the anisotropy direction ( $\alpha$ ), and the ratio of anisotropy ( $\lambda = V_{\min} / V_{\max}$ ). In this case, the traveltime corresponding to a seismic ray with a direction angle  $\beta$ , measured counter-clockwise with respect to the  $V_{\max}$  direction (Figure 1), satisfies the relation:

$$t_{\beta}(\varepsilon) = \frac{d_{\beta}}{v_{\beta}} = \frac{\sqrt{A^2 + \varepsilon^2}}{v_{\beta}}$$

where  $d_{\beta}$  is the distance between the source and the receiver (defining this direction),  $A$  is the minimum distance between the source and the line of receivers,  $\varepsilon$  is the distance between the hypothetical receiver located at the perpendicular line to the considered source and the receiver where the seismic ray arrives, and  $v_{\beta}$  is the velocity in the  $\beta$  direction. Furthermore,  $v_{\beta}$  can be written in terms of the anisotropic parameters as follows:

$$v_{\beta} = \sqrt{\frac{\lambda^2 (A^2 + \varepsilon^2) (1 + \tan^2 \alpha)}{2\varepsilon A \tan \alpha (\lambda^2 - 1) + (\lambda^2 \varepsilon^2 + A^2) \tan^2 \alpha + (\lambda^2 A^2 + \varepsilon^2)}} V_{\max}$$

The p-percentile curves are symmetric with respect to the middle of the gather line, and have a sill interval whose length is a constant value that is related to the isotropic velocity:

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + \left(\frac{\rho L}{2}\right)^2}}{m_{pc}}$$

It is possible to determine the median, low, and upper quartile curves, and other curves related to the dispersion of the traveltime distribution, such as the inter-quartile range curve:

$$iqr(x_s) = m_{3/4}(x_s) - m_{1/4}(x_s)$$

and the minimum absolute deviation:

$$mad(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^L |t(\xi; x_s) - m_{1/2}(x_s)| d\xi$$



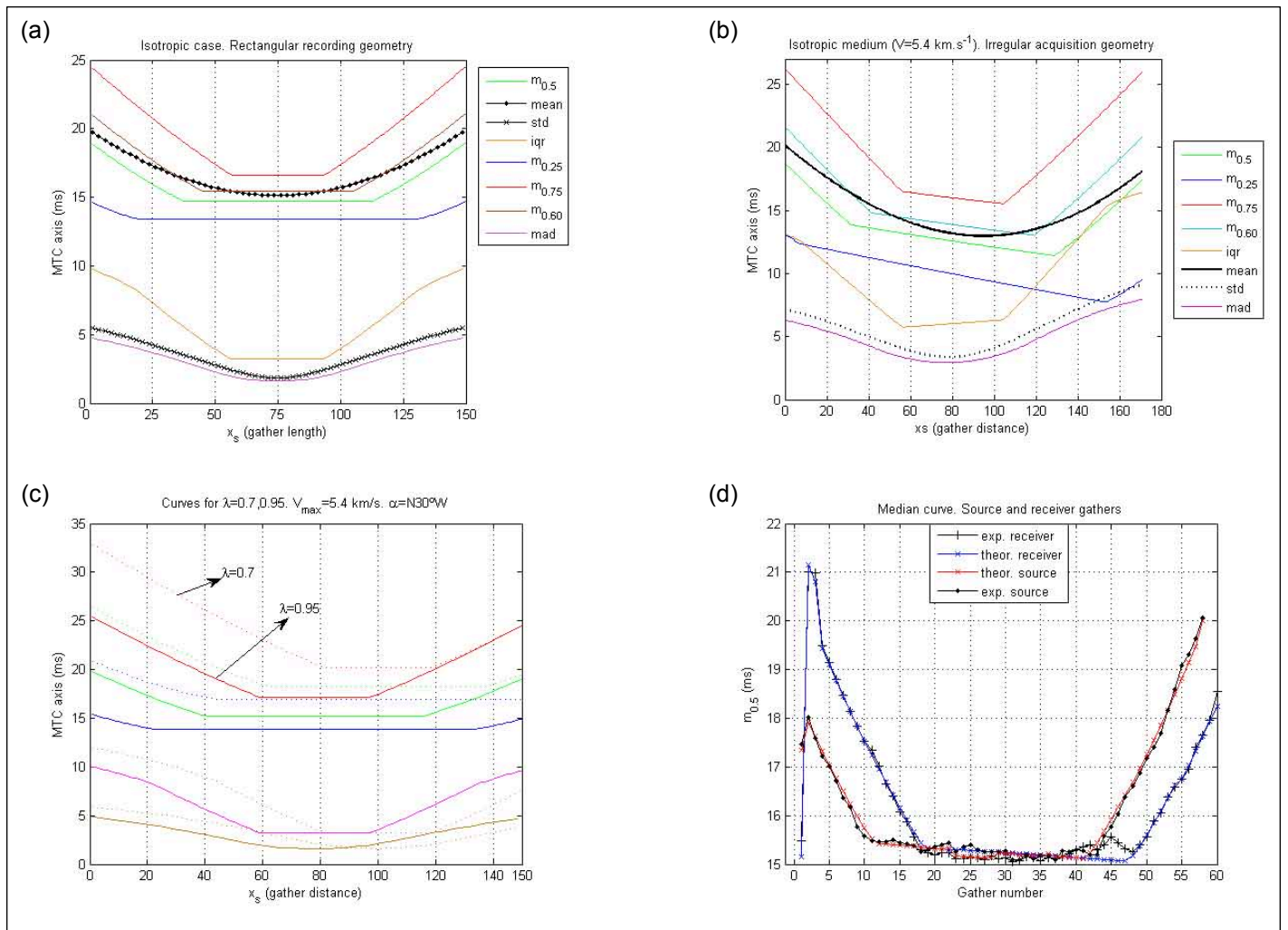


Figure 3. Robust mean traveltime curves: (a) isotropic case; (b) effect of the irregular recording geometry; (c) effect of the anisotropy parameters; (d) median curve for a granitic medium (Grimsel site) (Fernández-Martínez and others, 2008).

and thus,

$$t_{\beta}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha) \varepsilon^2 + 2A \tan \alpha (\lambda^2 - 1) \varepsilon + A^2 (\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2 (1 + \tan^2 \alpha) V_{\text{max}}^2}} \quad (1)$$

Mean traveltime curves are obtained by inserting the former expression (1) in the mean and standard deviation definitions. Robust mean traveltime curves can be deduced in the same way we have shown for the homogeneous isotropic media.

Anisotropic mean traveltime curves have several interesting properties. In particular, the degree of asymmetry of the anisotropic mean traveltime curves (displacement of the mean time and standard deviation minima from the middle of the gathering line) is related to the ratio and direction of anisotropy as follows:

$$\varepsilon_{\text{min}} = \frac{A(1 - \lambda^2) \tan \alpha}{(\lambda \tan \alpha)^2 + 1}$$

The approximate direction of anisotropy ( $\alpha$ ) can be visually estimated (northeast or northwest) by the displacement of the minimum of these curves with respect to the middle point of the gather line  $\epsilon_{\min}$ . Also, the least-squares fit of the empirical mean traveltime curves provides a simple method to estimate (at the pre-inversion step) a macroscopic elliptical anisotropic model that matches the empirical traveltime distribution.

Figure 3c shows how the robust MTC curves depend on the anisotropic parameters: anisotropy induces a vertical shift of the percentile curves towards higher values as the anisotropic ratio,  $\lambda = V_{\min} / V_{\max}$ , decreases (the medium becomes more anisotropic). The effect of the anisotropic direction is a lateral shift of the mean traveltime curves. For instance, for a source-left recording configuration, the shift is toward the right of the middle point of the line source if the anisotropy direction is northwest, and toward the left if the anisotropy direction is northeast. Finally, increasing the maximum velocity lowers the percentile values of the traveltime distribution.

The anisotropic parameters ( $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $V_{\max}$ ) can be inferred from the experimental traveltime counterparts (Fernández-Martínez and Pedruelo-González, 2008). The method consist of dividing the domain into fairly homogeneous zones (isotropic or anisotropic), reducing the misfit between the experimental traveltime curves and the theoretical predictions in each gather, and solving the following optimization problems (one for each robust mean time curve in the source and receiver gathers):

$$(V_{\max}, \alpha, \lambda)^* = \min_{(V_{\max}, \alpha, \lambda) \in M} \|MTC - MTC^*(V_{\max}, \alpha, \lambda)\|_2^2$$

$M$  is the search space:

$$\begin{aligned} 0.8 &\leq \lambda \leq 1 \\ -90 &\leq \alpha \leq 90 \\ V_l &\leq V_{\max} \leq V_u \end{aligned}$$

Lower and upper bounds for the zones of analysis can be deduced from prior information or from the analysis of the isotropic mean traveltime curves themselves, as we have shown for the zonal isotropic case (Fernández Martínez and others, 2006). Due to the low number of parameters (3) and the presence of equivalent models and local minima, optimization is done in the real study case by means of a global algorithm. Figure 3d shows the fit of the experimental median curve in the source and receiver domains for a granitic medium (Grimsel site, NAGRA, the Swiss National Cooperative for the disposal of Radioactive Waste). As can be observed, the theoretical curves account for the variabilities observed in the experimental using a weak anisotropic velocity model. A more detailed description of this data set can be seen in Fernández-Martínez and Pedruelo-González (2008b).

Numerical models have also shown us that the upper quartile curve is the most sensitive to anisotropy. The other curves are not very different for parameters in the range of weak anisotropy. For instance, anisotropy only provokes a lateral shift in the inter-quartile range curve; the sill value is constant for any anisotropy ratio.

The method has given rise to open-source programs MTCLAB and AMTCLAB (Fernández-Martínez and others, 2006; Fernández-Martínez and Pedruelo-González, 2008b) developed at the Department of Mathematics of Oviedo University (Spain). This method can be implemented easily in a spreadsheet for field studies.

## The Effect of Geological Heterogeneities

### The Effect of a Layer Transition

In this section we show how to detect the foundation in a geotechnical study in the United Kingdom, done in collaboration with Zetica International Geoservices. The geological domain consisted of a horizontally stratified detritic sequence composed of 33 m of sand and lime having a very competent limestone at its base that produces a large acoustic impedance contrast. The recording configuration was rectangular: two parallel boreholes at a distance of 15.2 m with 55 sources and receivers at a spacing of 1 m. Figure 4 shows the empirical and fitted mean travelttime curves. A discontinuity can be observed at 35 m marking the transition to limestone.

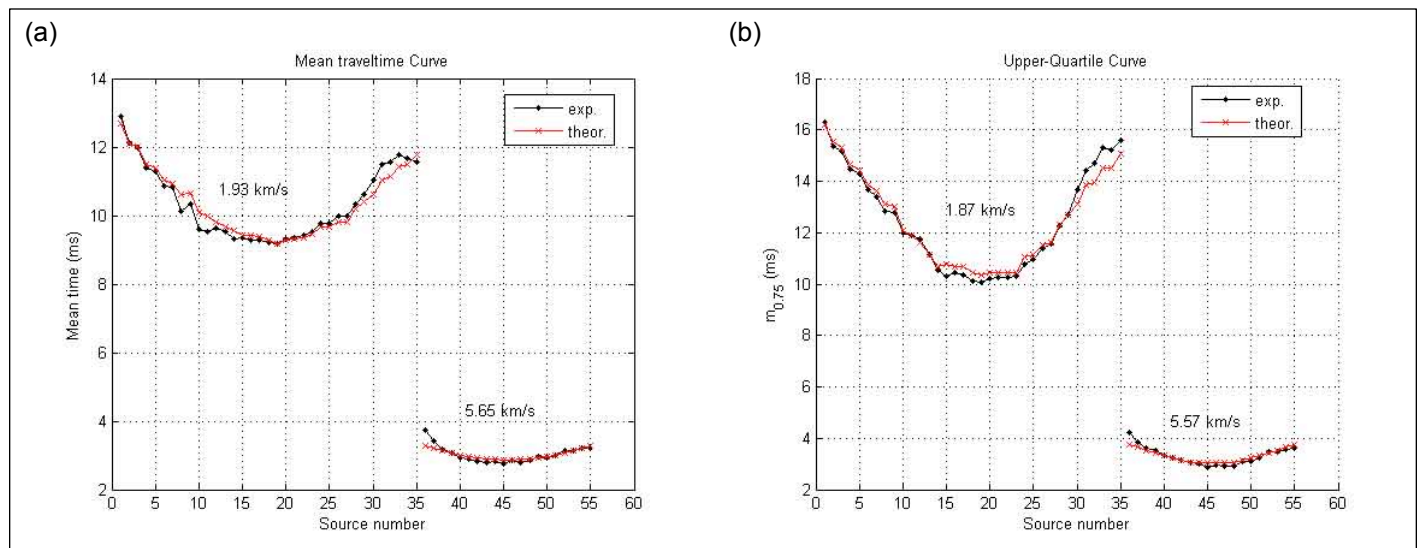


Figure 4. Experimental and theoretical mean travelttime curves. MTC provides a very coherent velocity model: 1.87 to 1.93 km/s for the detritic sequence and 5.57 to 5.65 km/s for the underlying limestone. The transition is well represented by a discontinuity on the mean and upper-quartile curves.

### The Effect of Faults and Intrusions

Figure 5 shows the effects of a fault (low velocity anomaly) and one intrusion (high velocity anomaly) on several mean travelttime curves: mean, median, and inter-quartile range. It can be observed that robust descriptors localize very well the position of these geological features. The effect on the mean travelttime curves depends on the position and extent of these geological heterogeneities and on the background velocity difference.

### The Effect of Voids and Cavities

Voids and cavities might be detected depending on their size and position in the geological domain. Basically they produce the same kind of effects shown for the faults, but in some situations their effect cannot be clearly differentiated on the mean travelttime curves. If the cavity is close to the line of sources or receivers, it can be easily identified through the standard deviation curve, which is affected along the gathers by the cavity. To perform these synthetic simulations, we have supposed that the geological medium has a background velocity of 4 km/s and the velocity in the cavity is 0.4 km/s.

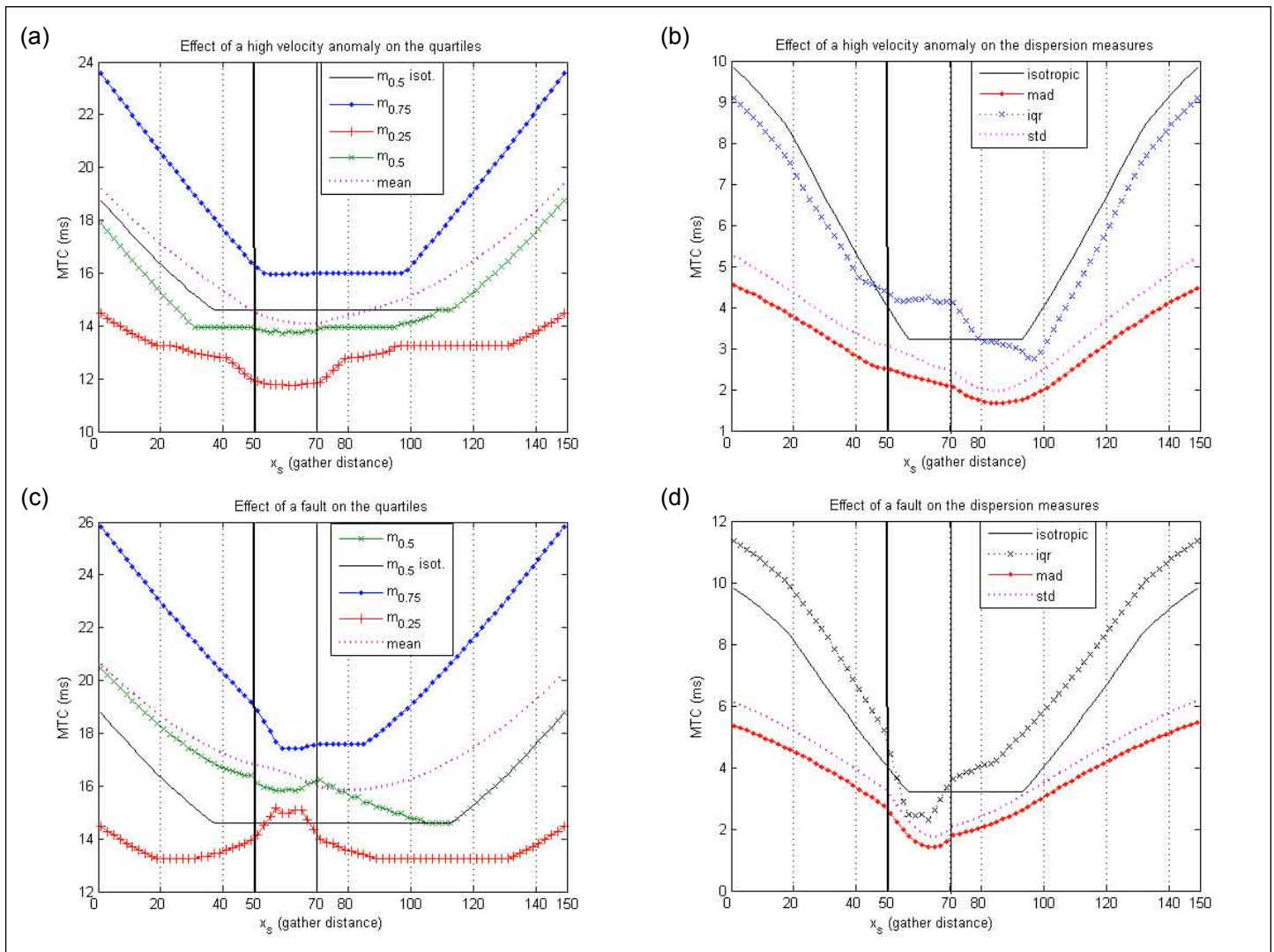


Figure 5. Effect of a fault and an intrusion on different mean traveltime curves.

Figures 6a and b show the results for a cavity 10-m high and 5-m wide, located close to the source gathers 27 to 33. The cavity affects all the mean traveltime curves, but its effect is better detected on the lower- and upper-quartile curves (Figure 6a). The effect of this cavity on the dispersion curves is better seen on the inter-quartile range.

Figures 6c and d show the effect of a cavity of 20-m high and 3-m wide, placed at the center of a geological domain (source and receiver gathers 32 to 43). The conclusions are similar to the case shown in Figures 6a and b. The effects on the mean curve (which is shifted toward highest mean traveltime values) and the standard deviation curve (which is laterally compressed) are not easy to interpret, but the robust curves are easier to interpret.

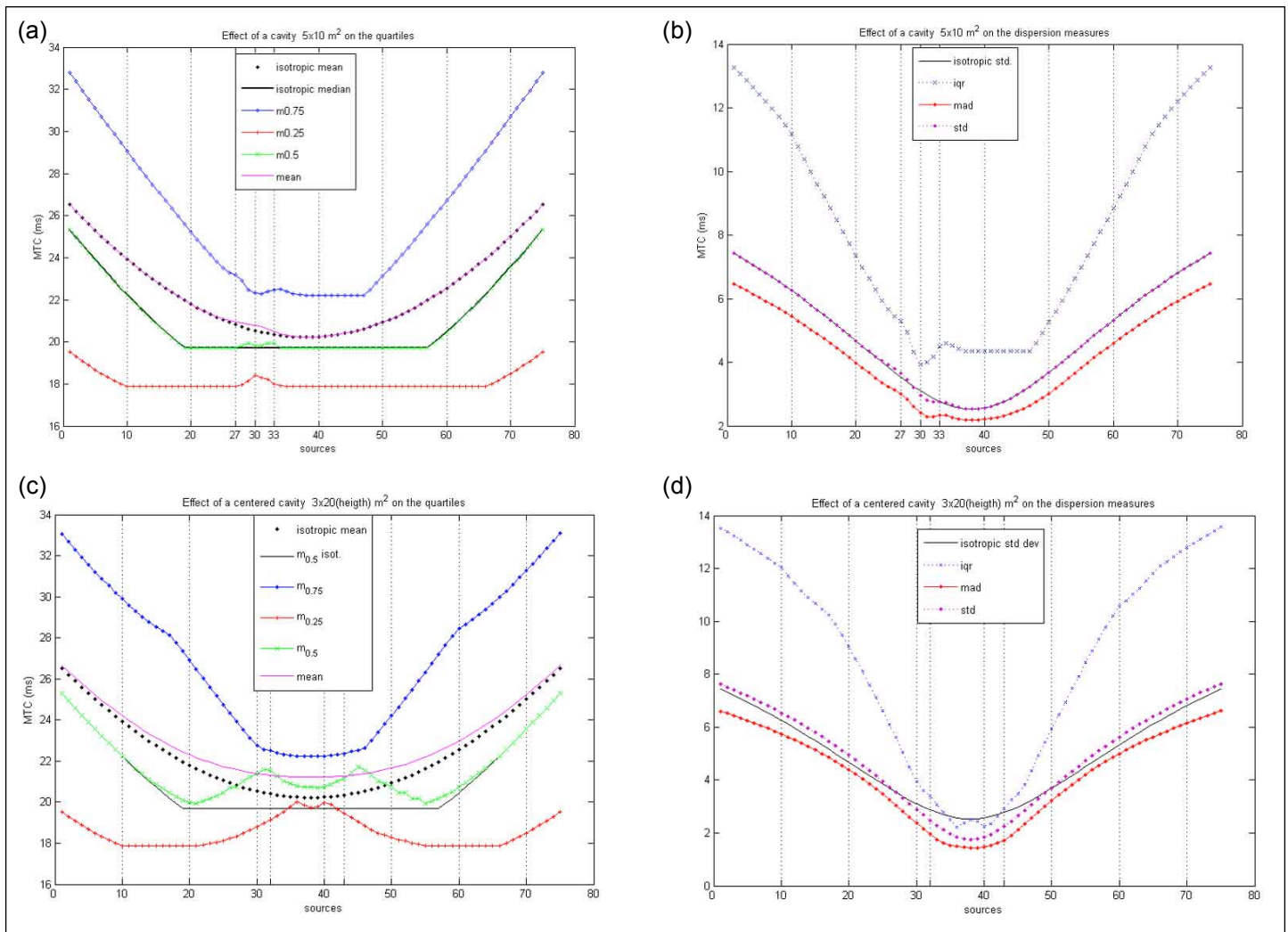


Figure 6. (a, b) Effect of a 5 m x 10 m cavity on the quartiles and on the dispersion curves. (c, d) Effect of a 3 m x 20 m cavity on the quartiles and on the dispersion curves.

Numerical simulations have also demonstrated the following attributes:

1. Narrow vertical cavities (with the larger dimension parallel to the line of sources or receivers) are well detected by the lower-quartile and inter-quartile range curves. These cavities are better detected if they are close to the gathering line (positions A or B) than if they are located on the center of the domain (positions C and D), as shown in Figure 7.
2. Narrow horizontal cavities (with the larger dimension perpendicular to the line of sources or receivers) are much more difficult to detect, but the observations in point 1 remain valid.
3. Cavities in positions C and D are harder to detect. Narrow horizontal cavities in position D are not detected. This result basically means that cavity detection depends on the number of rays passing through the cavity.

Finally, real experiments are affected by measurement noise, and the void detection becomes harder. Nevertheless, mean traveltime curves is an easy methodology to implement and can always be performed to complement other types of geophysical investigations.

## Conclusions

We have presented mean traveltime curves as a simple method to perform traveltime analysis in tomographic experiments. This approach promotes a better understanding of the data variability before inversion and provides the geophysicist an approximate zonal isotropic or anisotropic model that can be used in the inverse problem as a reference model on the regularization term. Finally, interpretation of these curves may help detect geological heterogeneities, including layer transitions, faults, dikes, cavities, and angular anisotropy.

## Acknowledgments

We would like to thank NAGRA and Zetica International Geoservices for the permission to use data sets to illustrate this method. This work benefitted from a sabbatical grant at University of California at Berkeley (Department of Civil and Environmental Engineering) given by the Secretaría de Estado de Universidades y de Investigación of the Spanish Ministry of Science and Innovation.

## References

- Berryman, J. G., 1994, Constraints on minimum velocity variance for seismic traveltime tomography: *Geophysical Journal International*, v. 119, p. 689–692.
- Dyer, B. C., and Fawcett, A., 1994, The use of tomographic imaging in mineral exploration: *Exploration and Mining Geology*, v. 3, no. 4, p. 383–387.
- Fernández-Martínez, J. L., Fernández-Alvarez, J. P., and Pedruelo-González, L. M., 2006, Mean traveltime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage: *Mathematical Geology*, v. 38-3, p. 343–374.
- Fernández-Martínez, J. L., Fernández-Alvarez, J. P., and Pedruelo-González, L. M., 2008a, MTCLAB: a MATLAB®-based program for traveltime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography: *Computers & Geosciences*, v. 34, no. 3, p. 213–225.
- Fernández-Martínez, J. L., and Pedruelo-González, L. M., 2008b, Anisotropic mean traveltime curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data: *Mathematical Geosciences*, manuscript accepted for publication.
- Fernández-Martínez, J. L., Pedruelo-González, L. M., and García-Gonzalo, E., 2008c, AMTCLAB: a MATLAB®-based program for traveltime analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media: *Computers & Geosciences*, manuscript accepted for publication.
- Fernández-Martínez, J. L., Pedruelo-González, L. M., and Rector, J. W., 2008d, Robust mean traveltime curves in 2D transmission tomographic surveys: *Journal of Applied Geophysics*, manuscript submitted for publication.
- Hyndman, D. W., and Harris, J. M., 1996, Traveltime inversion for the geometry of aquifer lithologies: *Geophysics*, v. 61, no. 6, p. 1728–1737.
- Smith, J., and Dyer, B. C., 1990, Seismic tomography as a tool for monitoring condition of a concrete dam: in *Expanded Abstracts*, Ground Engineering Group, Technical note 526, v. 89, p. 289–293.

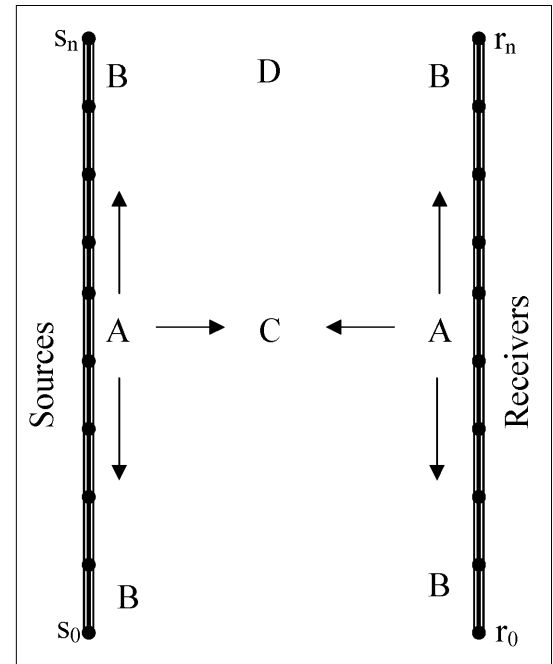


Figure 7: Positions of the cavities with respect to the lines of sources and receivers depending on the degree of difficulty to be detected (ranging from A to D).



## **A.6 XII Congreso Internacional de Energía y recursos Minerales**





## Las curvas de tiempo medio, un método sencillo para resolver problemas de inspección no destructiva. Aplicaciones geotécnicas.

Juan Luis Fernández Martínez<sup>1</sup>, Luis Mariano Pedruelo González<sup>1</sup>,  
José Paulino Fernández Álvarez<sup>2</sup>, Asger Eriksen<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas. Grupo de Modelización de Fenómenos Naturales. Universidad de Oviedo. C/Calvo Sotelo S/N. Oviedo. jlfm@uniovi.es

<sup>2</sup>Dpto. de Explotación y Prospección de Minas. Universidad de Oviedo. Independencia 13, 33004 Oviedo. pauli@uniovi.es.

<sup>3</sup>Zetica International Geoservices. Hanborough Bussiness Park. OxfordShire. www.zetica.com.

**Palabras clave:** Ensayos no destructivos, tomografía, curvas de tiempo medio, geotecnia, ingeniería del terreno.

### Resumen

En este artículo se presentan las curvas de tiempo medio, una herramienta conceptualmente muy sencilla y de gran utilidad en la interpretación y análisis de datos tomográficos, mostrando sus peculiaridades y su aplicación en geotecnia al estudio de cimentaciones. Esta herramienta aunque ha sido recientemente publicada en el programa MTCLAB se implementa en una hoja de cálculo muy versátil para su uso en campo.

### 1. Introducción

Las técnicas tomográficas han sido ampliamente utilizadas en exploración de yacimientos metálicos (e.g., Dyer and Fawcett, 1994, Fernández Martínez et al, 1998), estudios geotécnicos e ingeniería civil (e.g., Smith and Dyer, 1990), estudios hidrogeológicos (e.g., Hyndman and Harris, 1996), etc.

La palabra tomografía viene del griego *tomé* que significa sección o rebanada. El objetivo de estas técnicas es determinar el valor de una magnitud en el interior de un dominio a partir de sus proyecciones. En el caso de la tomografía sísmica la magnitud involucrada es la velocidad de transmisión de las ondas acústicas, y las proyecciones son los tiempos de viaje observados entre las diferentes parejas de emisión-recepción situadas en la frontera del dominio. Los tiempos de viaje son de hecho una “media” ponderada por las distancias de la lentitud, y por lo tanto poseen información de la estructura de la zona estudiada. Se trata pues de métodos de inspección no invasivos o no destructivos.

Imaginemos que se desea resolver un problema de inspección no destructiva en un dominio bidimensional (por ejemplo, un macizo rocoso o una estructura de hormigón). Denotamos por  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  dicho dominio, y supongamos que desde su frontera,  $\partial\Omega$ , se realiza un experimento tomográfico (en transmisión), y se adquieren un conjunto de tiempos de viaje  $t_1, t_2, \dots, t_m$  entre  $m$  parejas de emisores y receptores situados en  $\partial\Omega$  (figura 1).

Dichos tiempos corresponden a las trayectorias de tiempo mínimo,  $\Gamma(v)$ , entre las parejas de emisión-recepción (camino de Fermat) y por lo tanto se verifica:

$$\int_{\Gamma_i(v)} \frac{1}{v(x, y)} dl_{\Gamma_i} = t_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $v(x, y)$  es el campo de velocidades del macizo. Su análisis aporta informaciones geotécnicas interesantes de cara a la toma de decisiones.

La resolución numérica de dicho problema es iterativa, dado que las trayectorias son desconocidas y dependen del campo de velocidades  $v(x, y)$  del macizo rocoso. El algoritmo numérico utilizado es el siguiente:

1. Inicialmente se divide el macizo en celdas homogéneas en velocidad y se determinan las trayectorias para un campo inicial de velocidades mediante un algoritmo de trazado de rayos (figura 2).
2. Se calcula el desajuste entre los tiempos observados y los tiempos predichos, y en función de éste se actualiza el campo de velocidades. Aunque dicho proceso no es muy complicado, su resolución necesita de códigos específicos que resuelvan este tipo de problemas, lo que encarece el uso de dichas técnicas (Fernández Martínez et al, 2003).

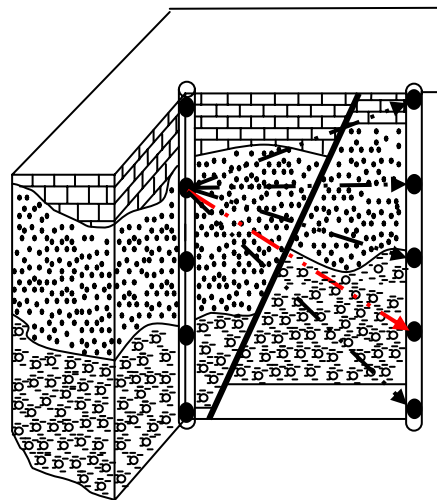


Figura 1: Esquema ilustrativo de un experimento tomográfico entre sondeos en un macizo rocoso.

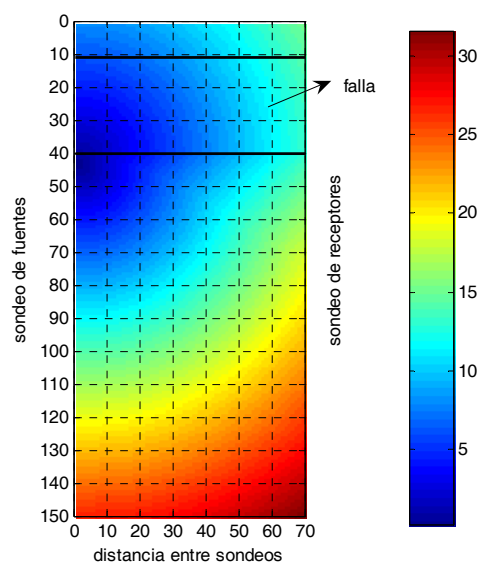


Figura 2: Trazado de rayos en un macizo rocoso de velocidad 5.4 km/s y que posee una falla horizontal de velocidad 4.0 km/s entre los receptores 10 y 40. Obsérvese la discretización en celdas del dominio rocoso.

Las curvas de tiempo medio son conceptualmente mucho más sencillas, dado que asumen una división del macizo en bandas homogéneas de velocidad, modelo plausible en la mayoría de los casos en aplicaciones geotécnicas, como por ejemplo en el estudio de cimentaciones. Su sencillez permite por ejemplo su implementación informática en una hoja de cálculo para su uso en campo. La idea consiste en considerar un conjunto de emisores y receptores y calcular los tiempos medios y desviaciones típicas relativas a los diferentes agrupamientos (en fuente y receptor común) en función de la distancia al origen de los agrupamientos. Fernández Martínez et al (2006-a) han deducido la expresión matemática de dichas curvas para cualquier tipo de geometría de emisión-recepción y han mostrado su versatilidad para el análisis de variabilidades (incluidos errores de medida) en experimentos tomográficos en transmisión y en la deducción de modelos de velocidades preinversión, y en el estudio de anisotropías ligadas principalmente a fracturas (Fernández Martínez et al, 2006-b). Dicha metodología ha dado lugar al código MTCLAB (Fernández Martínez et al, 2007) desarrollado bajo MATLAB en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, que es un código de libre disposición.

## 2. El problema inverso tomográfico

En aplicaciones geofísicas el problema tomográfico inverso antes mencionado se aborda de modo iterativo en varias etapas:

1. Linealización: consiste en independizar los caminos de Fermat del modelo de lentitudes buscado. Para ello se parte de un modelo inicial al priori,  $s^k(x)$ , y se determinan las trayectorias de Fermat, mediante el uso de algoritmos de trazado de rayos o más genéricamente de resolución del problema inverso tomográfico (Berryman, 1991).

2. Discretización: se divide el dominio  $\Omega$  en  $n$  celdas rectangulares en las que el modelo de lentitudes se considera constante (homogéneo), se trata de una aproximación del problema lineal anterior. Denominando  $l_{ij}$  a la longitud atravesada por el rayo  $i$  en la celda  $j$ , cuya lentitud denotamos mediante  $s_j$ , se llega al sistema lineal:

$$Ms_h = t,$$

donde  $M$  se denomina la matriz de rayos y posee como términos las longitudes  $l_{ij}$ ,  $s_h \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de lentitudes buscado, y  $t \in \mathbb{R}^m$  es el vector de tiempos observados entre las diferentes parejas de emisión recepción.

La resolución de dicho sistema de matriz rectangular y en general deficiente en rango hace uso de diferentes algoritmos numéricos (Fernández Martínez et al, 2003) que provienen bien de la teoría general de optimización (son una generalización de las técnicas de mínimos cuadrados), bien de las técnicas de ingeniería biomédica.

Los algoritmos más importantes son:

### Algoritmo de retroproyección (SBP o Simple Back Projection)

En este algoritmo la lentitud  $s_j$  de la celda  $j$  es la media de las lentitudes medias correspondientes a los rayos que atraviesan dicha celda, es decir,

$$s_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^m \text{sgn}(l_{ij}) \frac{t_i}{L_i},$$

donde  $L_i$  es la longitud total del rayo  $i$ . Dicho algoritmo proporciona un campo suave que suele ser utilizado para inicializar el algoritmo de inversión.

### ART (Algebraic Reconstruction Technique, Ivansson 1986)

Se trata de resolver el sistema lineal  $M\Delta s = \Delta t = t_{\text{calculado}} - t_{\text{observado}}$ , de forma que  $\Delta s$  no cambie de forma drástica. Para ello utiliza el método de resolución de sistemas singulares conocido como Método de las Proyecciones.

### SIRT (Algebraic Reconstruction Technique, Dines y Lytle, 1979)

El algoritmo SIRT sin restricciones puede escribirse de la siguiente manera:

SIRT) Encontrar  $s \in \mathbb{R}^n$  que satisface la ecuación matricial:

$$s^{k+1} = s^k + N^{-1}M^t D^{-1}(t - Ms^k),$$

donde

- $s^{k+1}$  es el modelo de lentitudes en la iteración  $k+1$ ,
- $s^k$  es el modelo de lentitudes en la iteración  $k$ ,
- $N$  es la matriz diagonal de cobertura de rayos,  $N_{kk} = \sum_{i=1}^m \text{sgn} l_{ik}$ , y
- $D$  es la matriz diagonal cuyos componentes son  $D_{kk} = (MM^t)_{kk} = \sum_{j=1}^n l_{kj}^2$ .

Este algoritmo puede interpretarse a grandes rasgos como un promediado estadístico de las soluciones obtenidas mediante el algoritmo ART, lo que produce una especie de amortiguamiento y estabilidad de la solución.

### Mínimos cuadrados regularizados

El algoritmo de mínimos cuadrados regularizados busca  $s \in \mathbb{R}^n$  que minimice el siguiente funcional:

$$\psi(s) = (Ms - t)^t W_t (Ms - t) + \varepsilon^2 (s - s^0)^t W_s (s - s^0) = \|Ms - t\|_{W_t}^2 + \varepsilon^2 \|s - s^0\|_{W_s}^2,$$

donde  $s^0$  es el modelo de lentitudes a priori,  $\varepsilon^2$  es el parámetro de regularización y  $W_t$  y  $W_s$  son las matrices de pesos de los datos y de los parámetros del modelo. Existen diferentes elecciones de dichas matrices. Una elección lógica es sopesar los tiempos inversamente a la longitud de los rayos y las lentitudes según la cobertura de cada celda, es decir, dependiendo del número de rayos que las ilumina.

Dos características de suma importancia en la resolución correcta del problema inverso tomográfico son:

- La existencia de información a priori para guiar el proceso de búsqueda de soluciones.
- La cobertura angular del macizo estudiado, dado que si ésta es completa se reduce el conjunto de soluciones posibles, dado que todas las celdas del dominio están iluminadas.

Un tipo más simplificado de algoritmos lo constituye la tomografía lineal en el cual se supone que los "rayos" entre emisor y receptor siguen una línea recta, lo cual es incongruente con el hecho de que el medio geológico posee una lentitud diferente en cada celda, y por lo tanto debe de existir refracción. Este tipo de algoritmo se utilizó en un principio cuando no se habían desarrollado los programas de trazado de rayos, es decir, de resolución del problema

directo en tomografía sísmica. También se utilizan para realizar aproximaciones iniciales en el proceso iterativo que conduce al campo de velocidades final, como en el caso del algoritmo SBP. Berryman (1994) mostró que la aproximación lineal es asumible, es decir, que la curvatura de los rayos no juegan un papel importante en el problema tomográfico, si se verifica que denominado ratio de Berryman es inferior al 20%:

$$R = \frac{\max_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)} - \min_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)}}{\min_{\{(x_s, x_r)\}} \frac{t(x_s, x_r)}{d(x_s, x_r)}} \leq 0.2.$$

Esta condición delimita las velocidades mínima y máxima de las ondas en el medio de propagación, y posee como ventaja el basarse únicamente en los datos de tiempos de viaje y en un conocimiento de las posiciones de fuentes y receptores.

La importancia de este ratio en la metodología aquí presentada radica en que las curvas de tiempo medio conllevan de modo implícito la hipótesis de tomografía lineal.

### 3. Las curvas de tiempos medios

La metodología de las curvas de tiempo medio (Fernández Martínez et al, 2006-a,b, 2007) se basa en un idea muy sencilla: estudiar como varían los principales descriptores estadísticos de los tiempos observados, cuando se consideran los distintos agrupamientos en fuente y/o receptor común para un conjunto de emisores y receptores de una zona del macizo objeto de estudio. Un agrupamiento en fuente común lo constituyen todos los tiempos observados en los distintos receptores que oyen cuando se dispara en dicha fuente. Análogamente, un agrupamiento en receptor común lo forman todos los tiempos que han sido oídos por dicho receptor en los sucesivos disparos realizados por las distintas fuentes. Las curvas de tiempo medio sólo muestran la variación de dichos descriptores estadísticos a lo largo de los distintos agrupamientos.

El caso más sencillo es el de un tiro frontal en un dispositivo de adquisición rectangular, es decir, la tomografía entre sondeos. Se asume que el dominio rocoso es homogéneo e isótropo, y por lo tanto los rayos sísmicos siguen trayectorias rectilíneas entre emisor y receptor y el tiempo relativo a un agrupamiento en fuente común (o en receptor común) sigue la ley hiperbólica de la indicatriz:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{(\xi - x)^2}{V^2}.$$

$t_0$  es el tiempo mínimo de tránsito entre la fuente considerada y la línea de receptores (o el receptor y la línea de emisores, si se considera un agrupamiento en receptor común), y corresponde al receptor (o emisor) situado en la perpendicular a la fuente considerada;  $(\xi - x)$  es la distancia entre los receptores y el receptor con el tiempo mínimo y  $V$  es la velocidad del medio geológico (Figura 3).

Obviamente la homogeneidad e isotropía del medio no es más que una hipótesis del modelo (válida en la realidad, si se cumple la condición indicada por el ratio de Berryman) que nos permite demostrar que el tiempo medio y la varianza correspondiente a un agrupamiento específico en fuente (o en receptor) común

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} t(\xi) d\xi, \quad sd^2(x) = \frac{1}{L} \int_{-x}^{L-x} (\bar{t}(x) - t(\xi))^2 d\xi$$

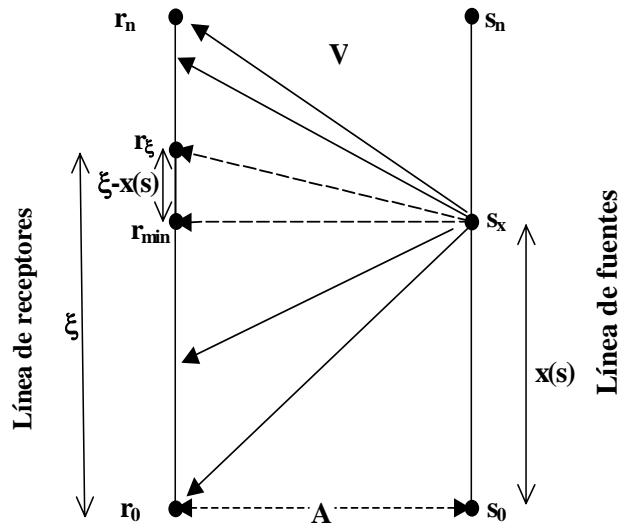


Figura 3: Dispositivo de adquisición: variables involucradas y concepto de agrupamiento en fuente común a distancia  $x$ .

siguen una ley teórica que depende de la velocidad del medio,  $V$ , y de los parámetros geométricos (longitud de las líneas de fuentes y receptores  $L$  y la distancia entre estas líneas  $A$ ) del dispositivo de adquisición (Fernández Martínez, 2006-a). Además en este caso (dispositivo rectangular y un medio homogéneo), las curvas de tiempos medios y desviaciones típicas son funciones continuas, que poseen un mínimo en el punto medio de la línea de fuentes (o de receptores si se considera un agrupamiento en receptor común) y son simétricas con respecto al eje de tiempos. Dichas curvas también se han generalizado para el caso de un dispositivo de adquisición irregular (Fernández Martínez, 2006-a). Debido a la geometría irregular las curvas dejan de ser simétricas pero conservan una forma similar al caso rectangular (figura 4).

En las curvas de tiempos medios experimentales, los elementos de cada agrupamiento son medidos en el campo, donde ambos, fuentes y receptores, tienen una localización discreta. Los estimadores discretos correspondiente son (por ejemplo en el caso de fuente común)

$$\bar{t}_i = \frac{1}{nr_i} \sum_{j=1}^{nr_i} t_{f_i r_j}, \quad sd_i^2 = \frac{1}{nr_i - 1} \sum_{j=1}^{nr_i} (t_{f_i r_j} - \bar{t}_i)^2$$

donde,  $t_{f_i r_j}$  es el tiempo de viaje observado entre la fuente  $f_i$  y cada uno de los  $nr_i$  receptores,  $r_j$ , asociados con el agrupamiento en fuente considerado. Si el número de datos es elevado, éstos son unos buenos estimadores estadísticos de los valores medios integrales anteriormente presentados. En el caso de un agrupamiento en receptor común las fórmulas utilizadas son similares a las anteriores.

Las propiedades comentadas de las curvas de tiempo medio teóricas son importantes para entender la forma de las curvas que surgen en aplicaciones prácticas. Además su interpretación es sencilla, dado que si el dispositivo de adquisición es rectangular y el medio se aproxima a la isotropía, las CTM en una zona de análisis homogénea, son simétricas respecto al punto medio de la línea de agrupamientos, suaves y continuas; con lo cual cualquier perturbación que se produzca en el conjunto de tiempos aflorará en dichos descriptores medios. Dichas variabilidades en las CTM pueden ser debidas bien a errores de medida o a accidentes geológicos que nos alejen de las hipótesis de homogeneidad e isotropía.

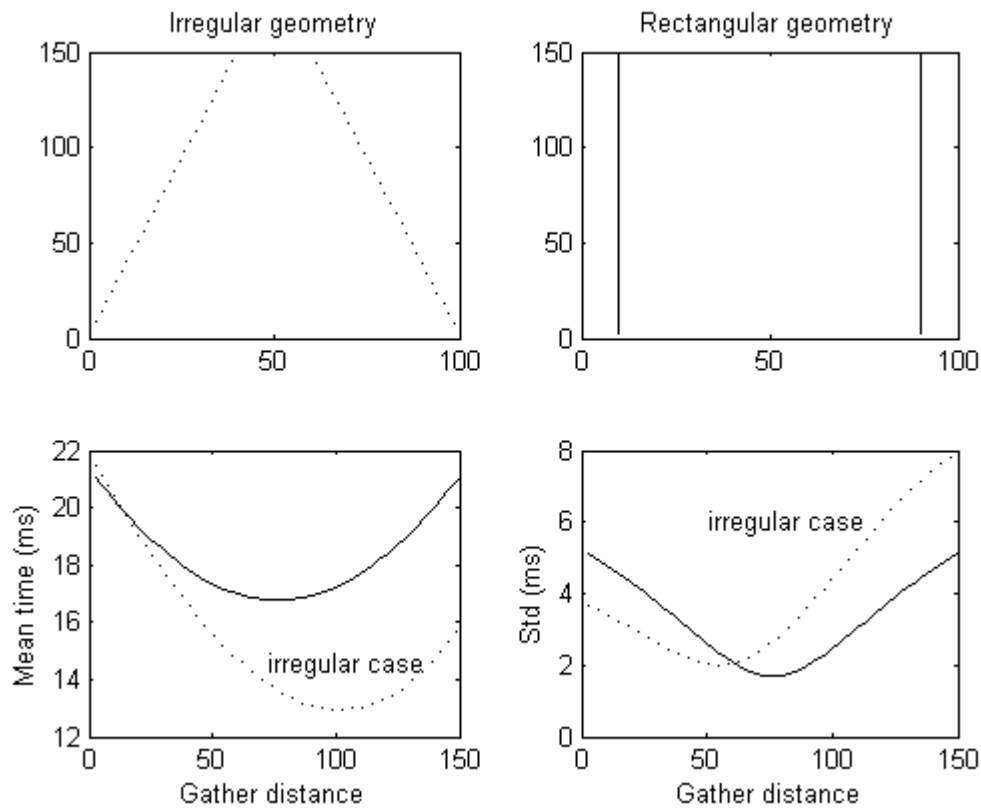


Figura 4: Curvas de tiempos medios para un dispositivo de adquisición irregular. Se observa la asimetría de las mismas y el desplazamiento del mínimo en uno u otro sentido dependiendo de la geometría del dispositivo.

La figura 5 muestra diferentes casuísticas de interés: un conjunto de fuentes que ha funcionado deficientemente en la adquisición, el efecto de una falla (zona de baja velocidad) o de una zona compacta de alta velocidad (dique). Además, como veremos en el caso de estudio la transición a un medio de velocidad diferente, queda denotado por un cambio brusco de pendiente o incluso una discontinuidad de las curvas.

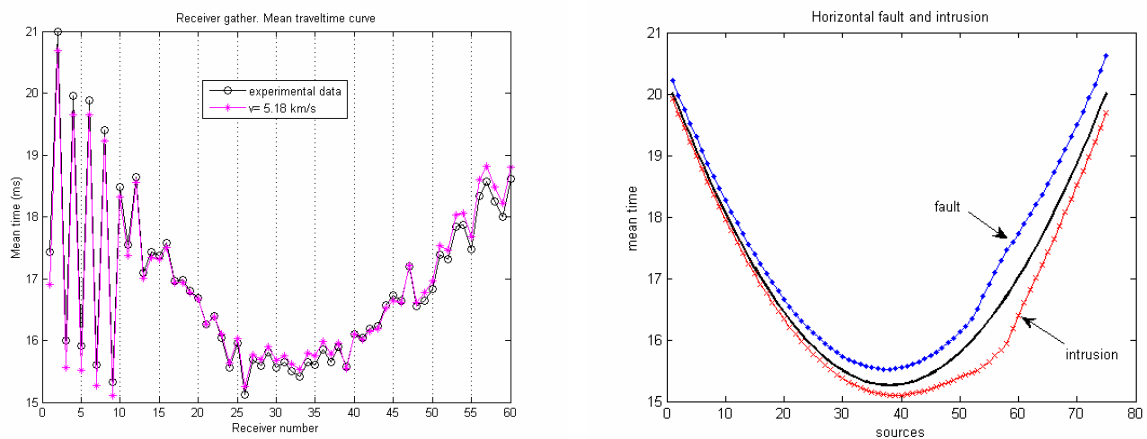


Figura 5: a) Conjunto de receptores que han funcionado deficientemente. b) Efecto de una zona de alta velocidad (dique) o de una zona de baja velocidad (falla) en la curva de tiempos medios.



#### 4. El ajuste de velocidades

El cálculo de las curvas experimentales no sólo puede ser para macizos homogéneos e isotrópicos a la escala del experimento tomográfico (análisis unizonal), sino también para medios formados por la superposición de diferentes capas homogéneas (análisis zonal). Dicha división del macizo en zonas "bastante" homogéneas e isotrópicas, pueden ser deducidas de información geológica a priori, o indicadas por la presencia de rupturas de pendiente y/o discontinuidades en las curvas experimentales. Las curvas de tiempos medios empíricas se utilizan para inferir el mejor modelo de velocidades homogéneas, en cada zona de análisis del medio. Este proceso implica resolver un sistema lineal (Fernández Martínez et al, 2006-a).

Aunque los modelos teóricos poseen una fórmula analítica que tiene en cuenta la velocidad del medio en la zona del macizo analizada, y la geometría del dispositivo (Fernández Martínez et al, 2006-a) el ajuste de las CTM teóricas es mucho más sencillo. Si tenemos en cuenta la homogeneidad del modelo de velocidades, los rayos siguen trayectorias rectas entre fuentes y receptores; conocidas las coordenadas donde se encuentran estos emisores y receptores y por simples consideraciones geométricas se calculan las distancias entre cada pareja formada por una fuente  $f_i$  y un receptor  $r_j$ . Halladas estas distancias, se agrupan bien por fuente (conjunto de distancias de esa fuente a todos los receptores), bien por receptor y de cada agrupamiento se calculan los distintos descriptores estadísticos del dispositivo de adquisición. Si consideramos el medio isotrópico, entonces, la velocidad  $V$  es constante en todo el dominio y todas las direcciones, con lo cual es posible estimar  $V$  para cada agrupamiento.  $\bar{d}_i = V\bar{t}_i$  donde  $\bar{t}_i$  es el tiempo medio en el agrupamiento  $i$ , y  $\bar{d}_i$  es la distancia media en el agrupamiento  $i$ . Tendremos tantas ecuaciones como agrupamientos, y por medio del método de mínimos cuadrados estimaremos la velocidad del medio. Igualmente se puede hacer con otros descriptores estadísticos (desviaciones típicas, medianas, etc) sin más que calcular estos descriptores para los tiempos y para las distancias del dispositivo en cada agrupamiento, establecer su proporcionalidad, y proceder al ajuste de mínimos cuadrados.

Dicho algoritmo se ha publicado en un código bajo MATLAB, (Fernández Martínez et al, 2007) que utilizando las Curvas de Tiempos Medios, analiza la distribución y calidad de los tiempos de viaje. Este programa trabaja con un dispositivo de adquisición de datos genérico (no necesariamente rectangular) y permite un análisis por zonas (multizonal), infiriendo la velocidad isotrópica que proporcione el mejor ajuste en cada zona.

Con el modelo de velocidades obtenido, se calculan las curvas de tiempos medios teóricas y se analizan las diferencias que presentan con respecto a las curvas de tiempos medios experimentales. La presencia, en una zona de emisión-recepción, de valores muy dispares entre ambas familias de curvas, o de irregularidades en las CTM empíricas, puede sugerir el uso de un análisis multizonal para modelizar dichas heterogeneidades del medio, o bien que se ha producido algún tipo de error en la adquisición de datos. Estas anomalías poseen firmas diferentes y pueden ser diferenciados mediante esta técnica (Fernández Martínez et al, 2006-a). Además la presencia de velocidades diferentes en el ajuste incluso puede ser el resultado de estar ante un medio anisótropo (Fernández Martínez et al, 2006-b)

#### 5. Implementación en una hoja Excel

Resulta cómodo y fácil calcular las curvas de tiempo medio experimentales utilizando una hoja EXCEL. Se precisa introducir las coordenadas de fuentes y receptores  $(x_f, y_f)$ ,  $(x_r, y_r)$  y los datos de tiempos observados entre fuentes y receptores  $(F_i, R_j)$ , en las diferentes casillas: cada columna corresponde a los tiempos entre una determinada fuente y todos los receptores.



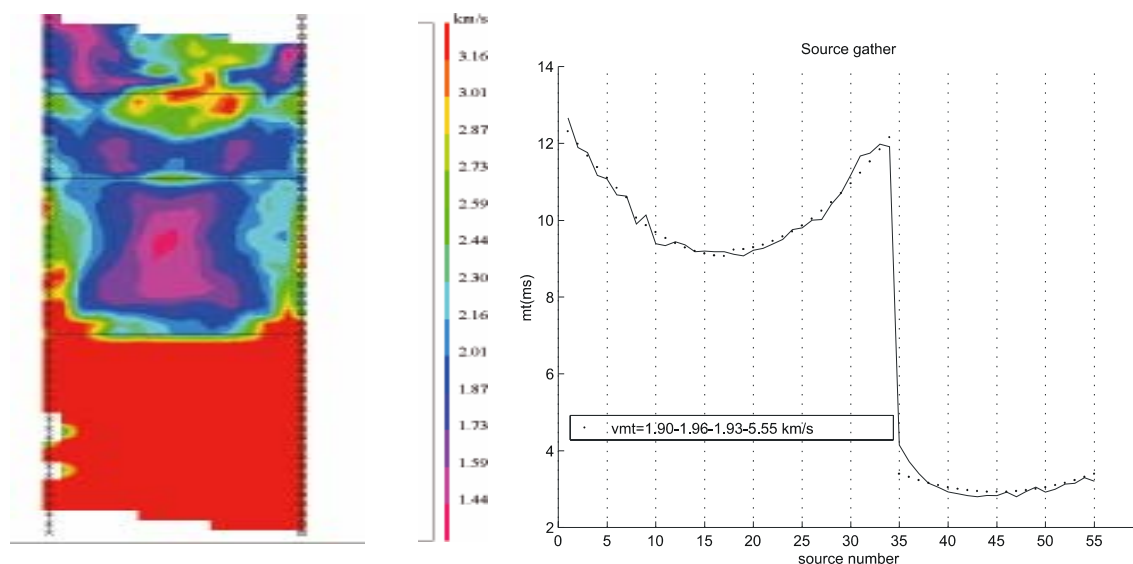


Figura 7: Tomograma obtenido mediante el programa de inversión comercial DIVINE y curvas de tiempos medios experimental y teórica ajustada mediante un modelo de cuatro capas establecido a partir de información geológica de sondeos. Ambos métodos proporcionan modelos de velocidad coherentes: 1.90 km/s para el medio detrítico y 5.55 km/s para el medio carbonatado.

## 7. Conclusiones

La metodología de las curvas de tiempo medio es sencilla, versátil y cómodamente desarrollable en una hoja de cálculo para su uso en trabajos de campo, por ejemplo de tipo geotécnico, como el que aquí se presenta.

## Referencias

- Berryman J.G., 1991. Lectures notes on non linear inversion and tomography. Borehole seismic tomography. Technical report. Lawrence Livermore National Laboratory, 164 p.
- Berryman J.G., 1994. Constraints on minimum velocity variance for seismic travelt ime tomography. *Geophys. J. Int.*, v. 119, p. 689-692.
- Dines K.A., and Lytle R.J., 1979. Computerized geophysical tomography. *IEEE Proceedings*, v. 67-7, p. 1065-1073.
- B.C. Dyer, A.Fawcett (1994). The use of tomographic imaging in mineral exploration. *Explor. Mining Geol.*, Vol. 3(4), pp. 383-387.
- S.Ivansson.,1986. Seismic borehole tomography. theory and computational methods. Volume74, pages 328--338. IEEE.
- J. Smith, B.C. Dyer (1990). Seismic tomography as a tool for monitoring condition of a concrete dam. *In Expanded Abstracts*. Vol. 89, pp. 289-293. Ground Engineering Group. Technical note 526.
- J.L. Fernández Martínez, B.C. Dyer, L.M. Pedruelo (1998). Application of tomography to gold exploration. *Exploration and mining in NW Spain*, pp. 125-129, ISBN:84-600-9483-9.
- D.W. Hyndman and J.M. Harris (1996). Travelt ime inversion for the geometry of aquifer lithologies. *Geophysics*, Vol. 61(6):1728-1737.
- J.L. Fernández Martínez, Pedruelo González L.M, Menéndez Pérez C.O. (2003). Una nueva metodología para resolver problemas de tomografía en transmisión. *Boletín Geológico Minero*, Vol. 114-1, pp. 17-40.
- J.L. Fernández Martínez, J.P. Fernández Alvarez, Pedruelo González L.M. (2006-a). Mean travelt ime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D

transmission tomography at the pre-inversion stage. *Mathematical Geology*, Vol. 38-3, pp. 343-374.

J.L. Fernández Martínez, J.P. Fernández Alvarez , Pedruelo González L.M. (2006-b). Inferring anisotropy parameters through mean travelttime curve analysis in 2D transmission tomography experiments. Int. Assoc. for Mathematical Geology. XI<sup>th</sup> International Congress. Université de Liège - Belgium .

J.L. Fernández Martínez, J.P. Fernández Alvarez , Pedruelo González L.M. (2007). MTCLAB: a MATLAB based program for travelttime quality analysis and preinversion velocity tuning in 2D transmission tomography. *Computer and Geosciences*. En impression.



## **A.7 Congreso EEGS Anual Meeting 2009 TEXAS**



# APPLICATION OF THE MEAN TRAVELTIME CURVES TO GPR AND VSP DATA

*J. L. Fernández-Martínez (University of California Berkeley),  
L.M. Pedruelo-González (University of Oviedo, Spain),  
Jacques Deparis (BRGM-Orléans, France),  
Maria-Daphne Mangriotis (University of California Berkeley),  
James W. Rector (University of California Berkeley).*

## Abstract

Acoustic tomography methods belong to the class of non destructive inspection techniques and are widely used in engineering applications. One of the main issues for these methods is the direct arrivals, which can be noisy or affected by scattering or other propagation effects. Mean traveltime curves describe the variation of the main statistical parameters (robust and non robust) of the traveltime distribution for the different gathering subsets as a function of the gather index. These curves constitute a simple methodology to analyze before inversion the traveltime quality in 2D acoustic transmission tomography experiments conducted in relatively homogeneous blocks or even in heterogeneous media. This analysis can help to discriminate the contribution of picking errors from that of geological heterogeneities, providing to the geophysicist the best isotropic or elliptical anisotropic velocity model, valid at experimental scale, and matching the empirical traveltime distribution. In this contribution we show the application of this methodology to two different novel kinds of data sets: VSP and GPR data.

## Methodology: The Mean Traveltime Curves

### *The Mean and Standard Deviation Curves*

Let us consider a geological domain,  $\Omega$  explored via any arbitrary recording geometry, i.e., sources and receivers placed along two boreholes as in Figure 1. We suppose that the geological is homogeneous, either isotropic or elliptical anisotropic. In this case, the traveltime variations in each source gather,  $x_s$ , can be described through the following relationship:

$$t(\xi, x_s) = \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 \tan^2 \alpha)(\xi - x_s)^2 + 2A \tan \alpha (\lambda^2 - 1)(\xi - x_s) + A^2 (\lambda^2 + \tan^2 \alpha)}{\lambda^2 (1 + \tan^2 \alpha) V_{\max}^2}},$$

which involves the anisotropic parameters maximum velocity,  $V_{\max}$ , the anisotropic ratio  $\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$ , and the anisotropy direction  $\alpha$ , and  $\xi$  describes the receiver position (with respect to the gather origin). Also if  $\lambda = 1$  the medium becomes isotropic and the traveltime relationship simplifies to:

$$t(\xi, x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(\xi - x_s)^2}{V^2}},$$

where  $V = V_{\min} = V_{\max}$  is the constant velocity of the medium, and  $t_0$ , is the minimum traveltime in each gathering. The mean traveltime curves describe the traveltime distribution for different source and gathering subsets (Fernández Martínez et al, 2006, 2008). Mean traveltime curves belong to the category



of linear tomography methods (Berryman, 1994). In these two cases (isotropic and elliptical anisotropic) mean and standard deviation traveltime curves admit analytical expressions and can be used to fit the experimental traveltime curves. In case of an isotropic medium explored via two parallel boreholes, these curves are symmetric with respect to the middle point of the gather line,  $x_s = \frac{L}{2}$ . These curves have been also generalized for the case of irregular acquisition geometries, losing their symmetry.

### **The Robust Descriptors**

Also, under the same hypothesis (isotropy or elliptical anisotropy) it is possible to determine the  $p$ -percentiles,  $m_p$ , of the traveltime distribution:

$$P(t(\xi; x_s) < m_p) = p \in (0,1).$$

The median ( $m_{1/2}$ ) of the traveltime distribution corresponds to  $p=0.5$ . Values of  $p=0.25$  and  $p=0.75$  are respectively the lower ( $m_{1/4}$ ) and upper quartiles ( $m_{3/4}$ ). The inter-quartile range ( $iqr$ ) is the difference between the lower and upper quartiles. In our methodology each gather along the source or the receiver lines constitutes one point on the so-called robust mean traveltime curves. Robust mean traveltime curves can be constructed for all the afore-mentioned quartiles. For instance for the isotropic-rectangular case, three cases arise:

$$\begin{aligned} 0 < x_s < \frac{pL}{2} &\Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL - x_s)^2}{V^2}} \\ \frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} &\Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{(pL)^2}{4V^2}} \\ \frac{pL}{2} < x_s < L - \frac{pL}{2} &\Rightarrow m_p(x_s) = \sqrt{t_0^2 + \frac{((p-1)L + x_s)^2}{V^2}}. \end{aligned}$$

In this case, the  $p$ -percentile curves are symmetric with respect to the middle of the gather line, and have a sill interval whose length is  $L(1-p)$  and constant value,  $m_{pc}$ , which is related to the isotropic velocity:

$$V = \frac{\sqrt{A^2 + \left(\frac{pL}{2}\right)^2}}{m_{pc}}.$$

Then, it is possible to determine the median, low and upper quartile curves, and other curves related to the dispersion of the traveltime distribution, such as, the inter-quartile range curve:

$$iqr(x_s) = m_{3/4}(x_s) - m_{1/4}(x_s),$$

and the minimum absolute deviation:

$$mad(x_s) = \frac{1}{L} \int_0^L |t(\xi; x_s) - m_{1/2}(x_s)| d\xi.$$

A detailed description of these curves is given in Fernández Martínez et al. (2008D).

### ***Detecting Angular Anisotropy***

A detailed description of mean traveltimes curves in geological medium showing an angular dependency of the velocity can be seen in Fernández Martínez and Pedruelo González (2008). This methodology constitutes a simple geometrical approach to study anisotropy in rocks.

The effect of anisotropy is a vertical shift of the mean time curves towards higher values as the anisotropic ratio,  $\lambda = \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$ , decreases. The effect of the anisotropic direction is a lateral shift of the mean traveltimes curves: for a source-left recording configuration the shift is towards the right of the middle point of the line source if the anisotropy direction is northwest, and towards the left if the anisotropy direction is northeast. Finally, the increasing of maximum velocity lowers the percentiles values of the traveltimes distribution.

Mean and standard deviation curves and the robust descriptors have been generalized for the case of anisotropic media, as well as for any arbitrary recording geometry, as we show in the current applications to GPR and VSP data.

Synthetic numerical models have also shown us that the upper quartile curve is the most sensible to anisotropy type-effects (Fernández Martínez et al, 2008D). The other curves are not very different for parameters in the range of weak anisotropy. For instance, in the inter-quartile range curve anisotropy only provokes a lateral shift, i.e., the sill value is constant for any anisotropic ratio.

## **APPLICATION TO GPR DATA**

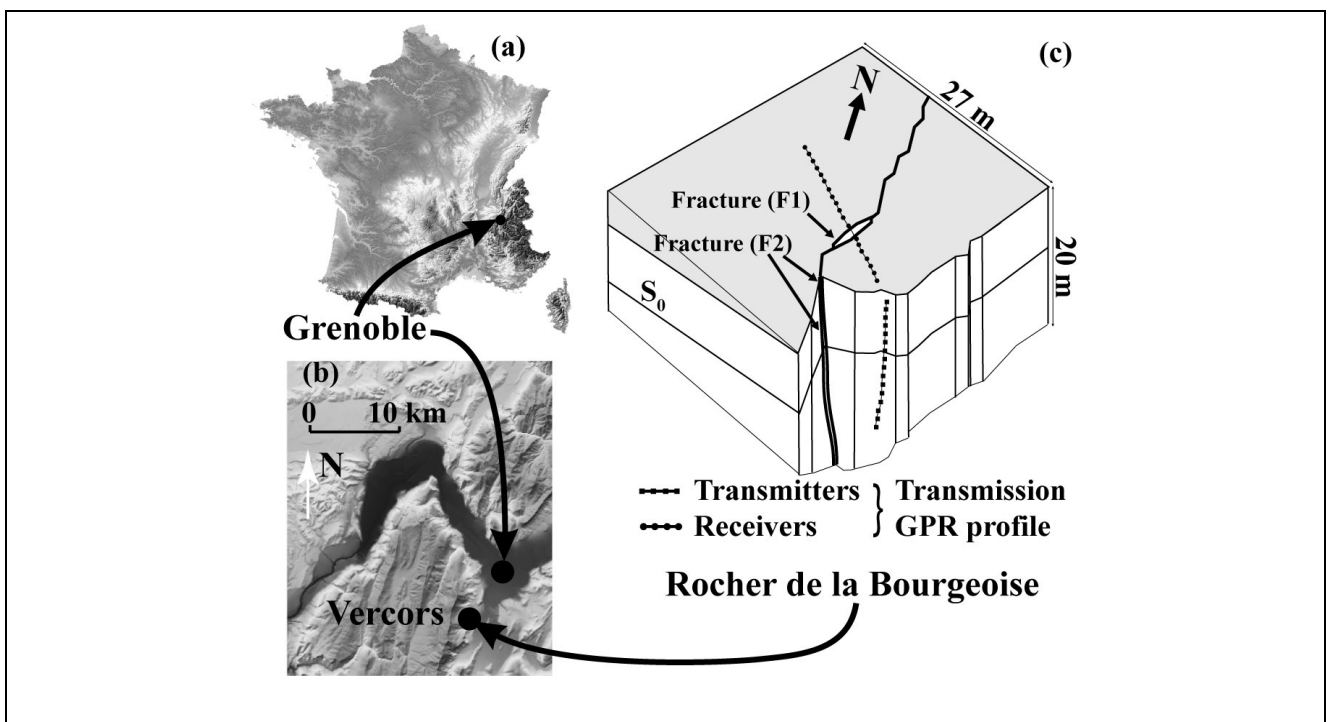
### ***Geological Setting***

The “Rocher de la Bourgeoise” site is located in the Vercors Massif (French Alps), 10 km south of Grenoble (Figure 1a and b). The Vercors massif belongs to the external thrust belts of the western alpine chain (Philippe et al., 1998). Morphologically it corresponds to a group of plateaus reaching an elevation between 1,000 m and 2,000 m and limited by near vertical cliffs. Initial bedding has been folded and faulted during the alpine tertiary shortening. It results mostly in subvertical strike-slip faults associated to large thrust zones (Arnaud et al. 1978, Philippe et al. 1998). The test site is an unstable rock mass of approximately 3000 cubic meters, located at the top of a 400-m high cliff in the Vercors massif. The cliff is made of hard Urgonian limestone (lower cretaceous) and the horizontal plateau is recovered by soil and vegetation. Three discontinuity sets were measured: the bedding plane (N40°E/45°W), dipping gently inwards the massif, and two subvertical fractures sets (N50°E/70°SE and N170°E/70°E). The rock flake is limited on two sides by two open fractures (F1 and F2) belonging to each discontinuity set (Fig. 1c). These two fractures are clearly visible on the cliff and on the horizontal plateau. Fracture F1 is widely open on the surface of the plateau and can reach an aperture of 1 meter. The second fracture, denoted F2, delimits the western part of the rock mass. The eastern limit of the rock column is not well defined. The GPR transmission profile is located on Figure 1c. The recording

configuration is composed by 21 sources and 24 receivers. The antennae were placed perpendicularly to the line of measurement and the waves were recorded on the H-plane.

### Isotropic Modelling

Figure 2 shows the mean time, median, upper-quartile and standard deviation curve of the source gather. Figure 3 shows the other representative mean traveltimes curves for the receiver gather. The isotropic velocities deduced from this analysis are given in Table 1. All the mean traveltimes curves for the source gathers show a discontinuity at source gather 17, indicating a transition to a medium of higher velocity. A zonal isotropic analysis shows that the first medium has an isotropic velocity of  $0.963E+8$  m/s whilst the second one has a velocity around  $1.2 E+8$  m/s. Also the standard deviation curve in figure 2 shows clearly an anomaly in source gather 15, which can be related to the stratification plane  $S_0$  (Figure 1c).

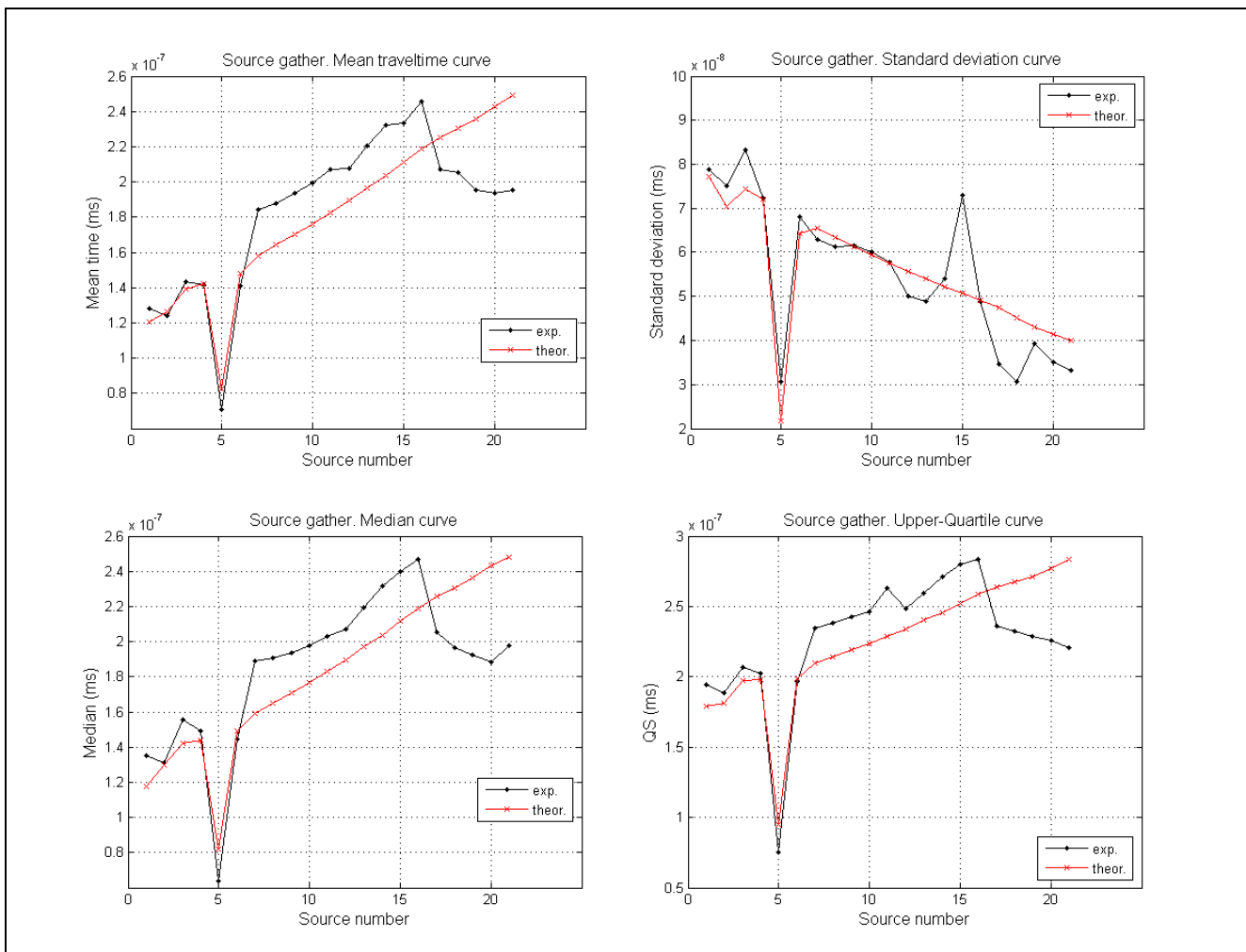


**Figure 1:** Location map of the study site (the « Roche du Midi »). a) and b): Digital elevation model of France and of the Vercors Massif, respectively. c) Schematic representation of site (Vercors massif) including the location of the main fractures (F1 & F2) and the transmission GPR profile.

On the receiver domain (Figure 3) the mean, median and upper-quartile curves indicate also a medium with similar velocity to that fitted for the source gather domain. Receiver 8 (in Figure 3) shows a transition towards a lower velocity medium. Also the inter-quartile range curve indicates very clearly this transition. This can be due to the effect of the system of fractures F1 and F2 shown on Figure 1c. The residual traveltimes map in Figure 4 shows clearly these two zones on the source and receiver gathers.

**Table 1:** Results of the isotropic velocity analysis. Mean median and Upper-Quartile curves are the most stable descriptors to perform velocity analysis. Dispersion measures are preferred to analyze errors/anomalies.

| MTC     | Source gather | Receiver Gather |
|---------|---------------|-----------------|
| Mean    | 1.069 E+8     | 1.044 E+8       |
| Median  | 1.049 E+8     | 1.015 E+8       |
| UQ      | 1.044 E+8     | 1.094 E+8       |
| LQ      | 1.121 E+8     | 1.019 E+8       |
| St. dev | 0.911 E+8     | 1.108 E+8       |
| Mad     | 0.925 E+8     | 1.159 E+8       |
| IQR     | 0.918 E+8     | 1.214 E+8       |



**Figure 2:** GPR data. Source gather: mean, standard deviation, median and upper-quartile curves.

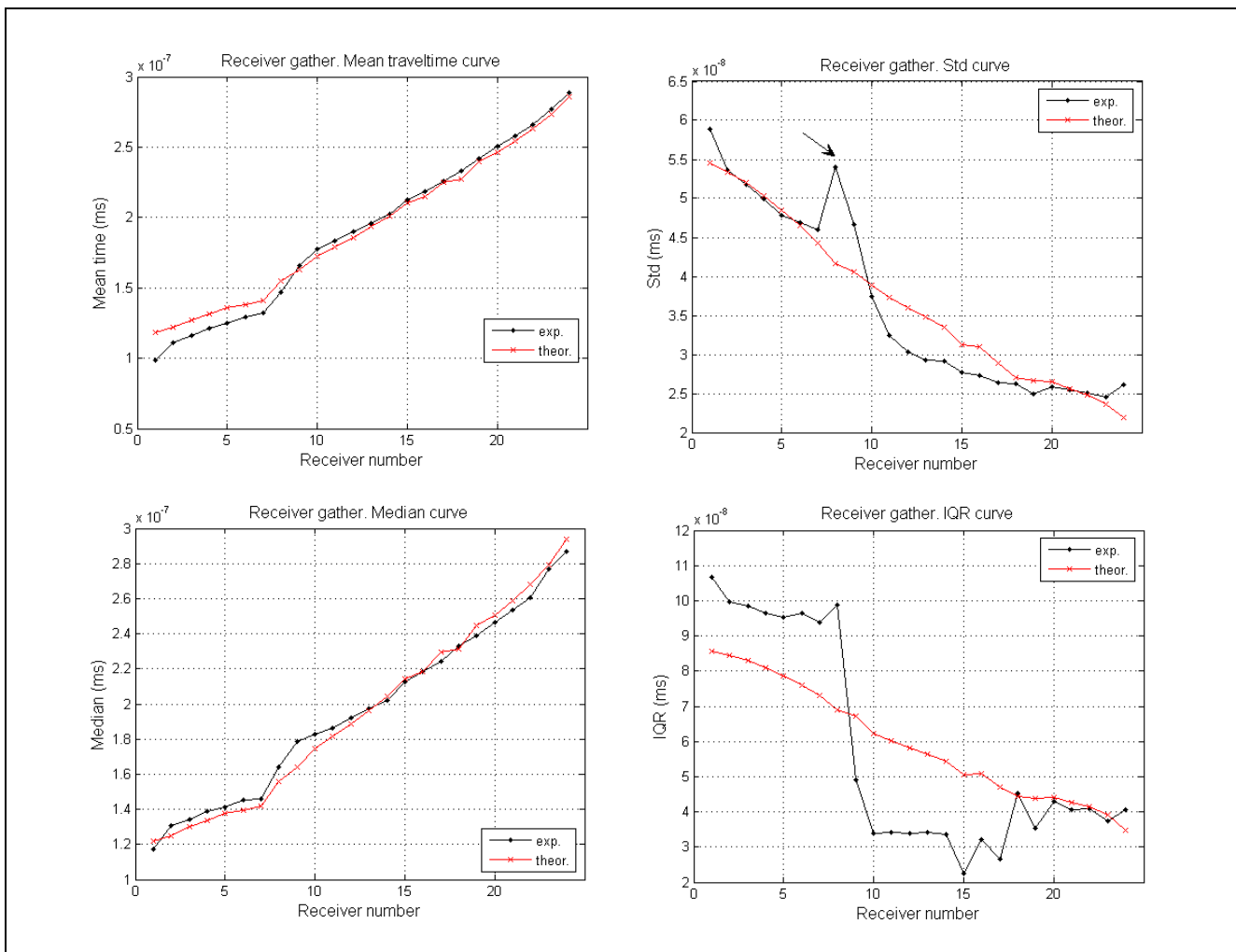
### Anisotropic Modelling

The introduction of a homogeneous elliptical anisotropic velocity model improves the fitting of the empirical mean traveltime curves. Table 2 shows the results for a 2D anisotropic model analysis done in the source-receiver plane of the GPR configuration.

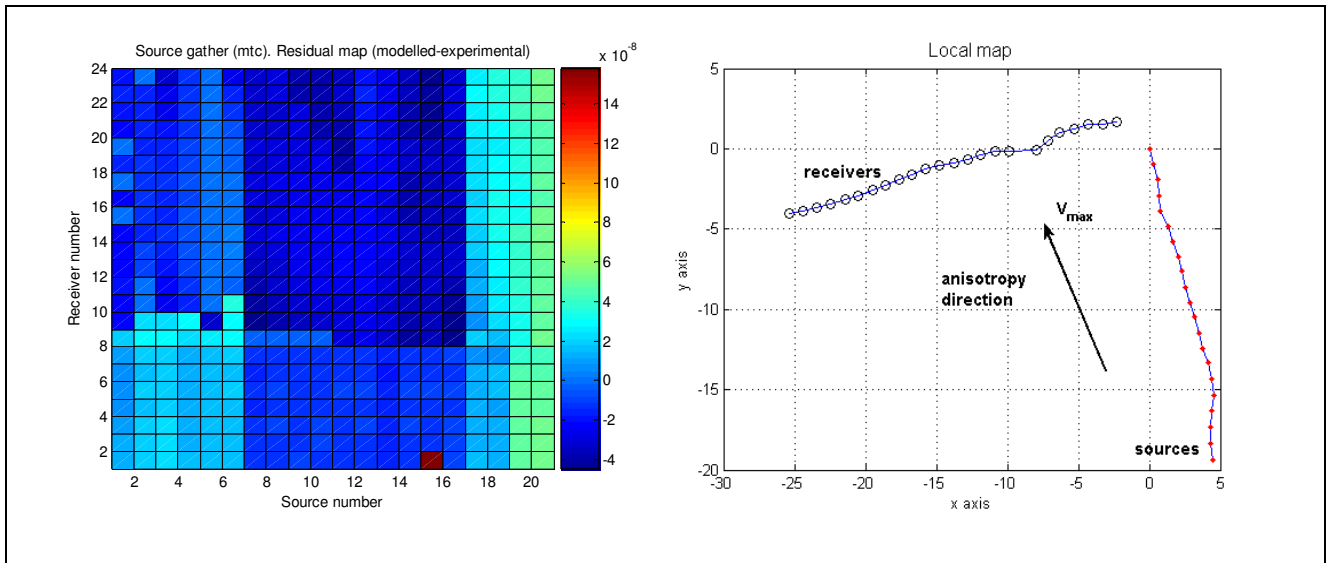
**Table 2:** Results of the anisotropic velocity analysis.

| MTC    | $V_{\max}$ | $V_{\min}/V_{\max}$ | Direction |
|--------|------------|---------------------|-----------|
| Mean   | 1.362 E+8  | 0.695               | 101°      |
| Median | 1.136 E+8  | 0.824               | 113°      |
| UQ     | 1.156 E+8  | 0.815               | 123°      |

The direction of anisotropy, inferred using the most reliable mean traveltimes curves to accomplish this optimization problem (mean, median and upper-quartile curve), is between 100 and 120 degrees (Figure 4-b) measured counter-clockwise from x-axis, on the plane of the source-receiver configuration. This direction of anisotropy is almost orthogonal to the direction of the main fractures, F1 and F2. The high maximum velocity highlight that fractures might be filled with high velocity materials in term of EM waves, such as for example wet sand and/or air.



**Figure 3:** GPR data. Receiver gather: mean, median, standard deviation and inter-quartile range curves.



**Figure 4:** GPR data. (a) Residual traveltime map for a velocity of  $1.049 \text{ E}+8 \text{ m/s}$ . (b) Anisotropy direction.

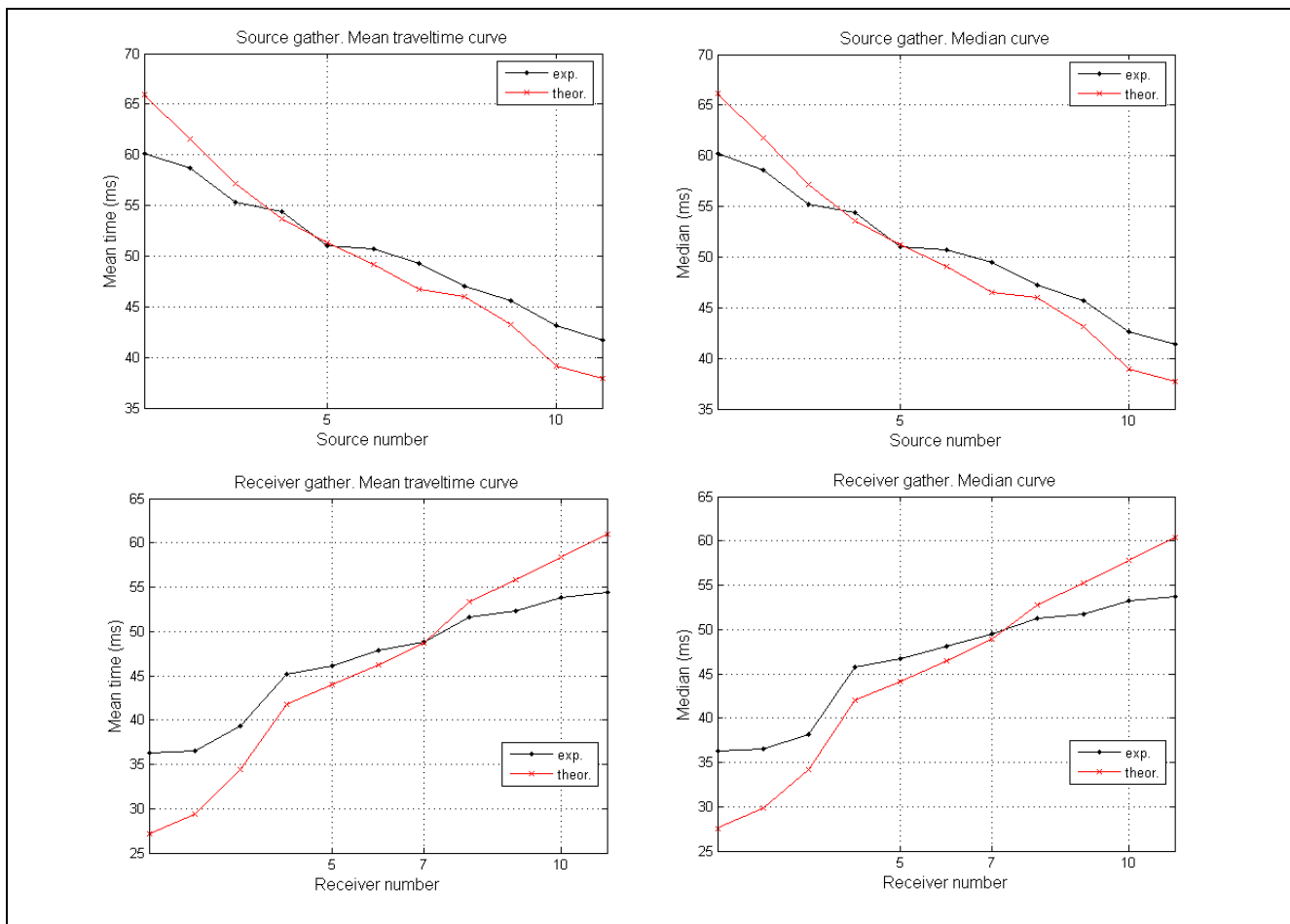
## APPLICATION TO VSP DATA

### *Geological Setting*

The Lawrence Livermore National Lab facility, located in Livermore, CA, is underlain by over 100 m of unconsolidated, heterogeneous alluvial sediments, consisting of clays, silts, sands and gravels, which form complex fluvial structures of inter-bedded paleostream channels. Depth to the water table is greater than 33m in the southeast corner of LLNL and about 10 m in its northwestern corner. The complex stratigraphy of the site results in a complex pattern of hydraulic conductivity, which has been modeled into a set of distinct hydrostratigraphic units (Noyes et al, 2000). The hydrostratigraphic units also show small scale heterogeneities with a distinct p-wave velocity signature, as in the case of a perched aquifer, which has an anomalously high p-wave velocity due to the relationship between saturation and p-wave velocity (Crews et al., 2006). The VSP consists of a down-hole 3-component geophone array with 12 levels at 3.03 m (10 ft) spacing, with the bottom level at 42.4 m (140 ft) depth. The well is located in the SE corner of the Lawrence Livermore National Lab facility and has a PVC casing of 15 cm (5") diameter. We grouted the geophones with a cement-bentonite mix, in an effort to suppress tube waves and improve coupling. The groundwater at the time of the grouting was at 36 m (120 ft) depth. In July 2006, we collected multiple offset shot points at multiple azimuths around the well, using an elastic wave generator source. We picked the first-breaks of the 3-component data and rotated the components in the direction of maximum velocity arrival in a 11 ms window past the first-break arrival. Traces of negative polarity past the first break time in the vertical component were not included in the mean traveltime analysis, as they corresponded either to a head wave or to a reflection event, the negative polarity of the vertical component arising from their direction of arrival being below the receiver level. We selected the most trace populated source line in the mean traveltime analysis presented in this paper.

## Isotropic Modeling

The results of the isotropic modeling are in Table 3. Figure 5 shows the mean and median curves corresponding to the source and receiver gathers. It can be observed that experimental and theoretical mean traveltimes intersect at the same source and receiver gather. The receiver at which intersection occurs indicates a transition to higher velocities in depth, since the experimental MTC is placed below the theoretical one for deeper receivers.

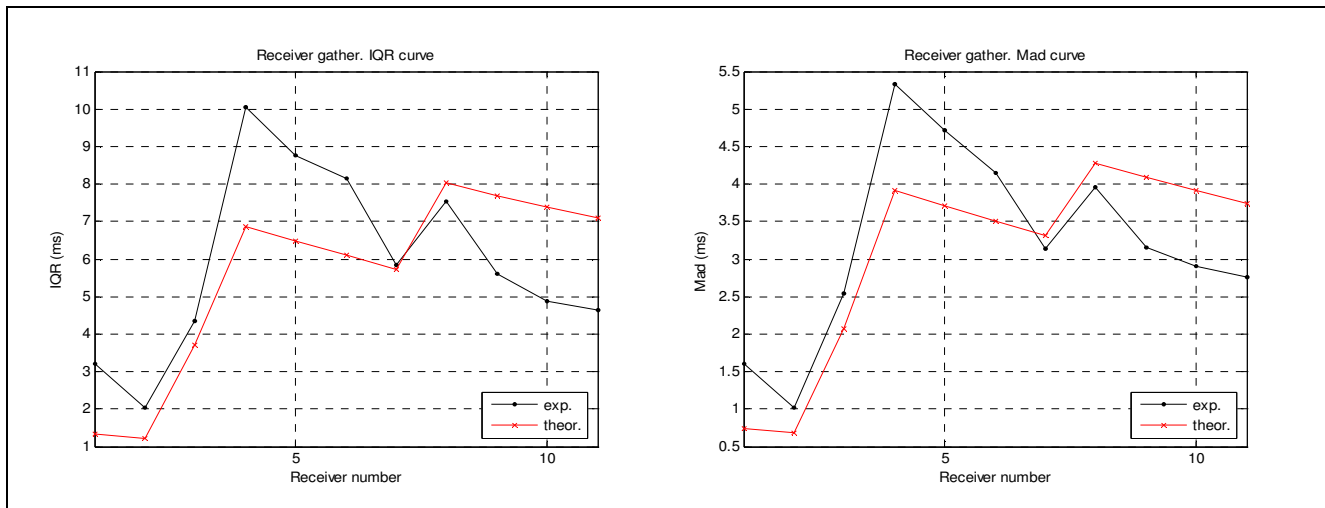


**Figure 5:** VSP data. Isotropic modeling. Mean and median curves for the source and receiver gathers.

**Table 3:** Results of the isotropic velocity analysis on VSP data from robust MTC.

| MTC    | Source gather | Receiver Gather |
|--------|---------------|-----------------|
| Mean   | 0.98 km/s     | 0.94            |
| Median | 0.97 km/s     | 0.93            |
| UQ     | 1.02 km/s     | 0.97            |
| LQ     | 0.93 km/s     | 0.92            |

The intersection at the source gather indicates that small offset gathers show a behavior which is compatible with the above mentioned fact, since the experimental curve is lower (higher velocities) than the theoretical one. These results have been also confirmed using synthetic models simulating a typical velocity profile. Figure 6 shows some dispersion curves on the receiver gather. The big drop observed after receiver 9 might indicate the transition to the water table (high velocity anomaly).



**Figure 6:** VSP data. Isotropic modeling. Dispersion curves (“mad and iqr”) on the receiver gather.

## Conclusions

In this contribution we have shown the application of this methodology to two different novel kinds of data sets: GPR and VSP data for two different applications: geotechnical studies and hydrogeophysics. In the first case, the results of the isotropic and anisotropic modeling are very well correlated to the geology. In the second case a simple isotropic modeling provided us with very important results about how the velocity profile varies in depth.

## References

1. Arnaud H. Bravard, Y. Fournier, D. Gidon, M. and Monjuvent G., 1978. *Carte géologique à 1/50000, feuille de Grenoble*. Tech. rept. BRGM Ed.
2. Berryman J.G., 1994. Constraints on minimum velocity variance for seismic travelttime tomography. *Geophys. J. Int.*, v. 119, p. 689-692.
3. Crews J., Rector J.W. and Bainer R.W., March 2006. Velocity Imaging of the Shallow Subsurface using 3D inversion of VSP data to Visualize a Saturated Portion of the Vadose Zone at Lawrence Livermore National Laboratory, *The Leading Edge*, Vol. 25, No. 3
4. Fernández Martínez J.L., Fernández Álvarez J.P. and Pedruelo González L.M., 2006. Mean travelttime curves analysis: a method to improve understanding of data behaviour in 2-D transmission tomography at the pre-inversion stage. *Mathematical Geology*, Vol. 38-3, pp. 343-374.



5. Fernández Martínez J.L., Fernández Álvarez J.P. and Pedruelo González L.M., 2008A. MTCLAB: a MATLAB<sup>®</sup>-based program for traveltimes quality analysis and preinversion velocity tuning in 2-D transmission tomography. *Computer & Geosciences*:34-3,213-225.
6. Fernández Martínez J.L. and Pedruelo González L.M., 2008B. Anisotropic Mean traveltimes curves: a method to estimate anisotropic parameters from 2D transmission tomographic data. *Mathematical Geosciences*. Accepted for publication. To appear.
7. Fernández Martínez J.L., Pedruelo González L.M. and García Gonzalo E., 2008C. AMTCLAB: a MATLAB<sup>®</sup>-based program for traveltimes analysis and velocity tuning in 2D elliptical anisotropic media. *Computer & Geosciences*. Accepted for publication. To appear.
8. Fernández Martínez J.L., Pedruelo González L.M. and Rector J.W., 2008D. Robust mean traveltimes curves in 2D transmission tomographic surveys. *Journal of Applied Geophysics*. Submitted.
9. Noyes M., Maley M.P. and Blake R.G., 2000. Defining hydrostratigraphic units within the Heterogeneous Alluvial Sediments at Lawrence Livermore National Laboratory. University of California, Livermore, CA. UCRL-JC-139779.
10. Philippe Y., Deville E. and Mascle A., 1998. Thin-skin inversion tectonics at oblique basin margin: example of the western Vercors and Chartreuse Subalpine massifs. Mascle A., Puigdefabregas C., Luterbacher H., Fernández M. (eds). Geological Society, London, Special Publications. Pages 239-262.

## **Acknowledgments**

We would like to thank the Environmental Restoration Division of Lawrence National Livermore Laboratory, and Stéphane Garambois and Mathieu Jeannin (LGIT, Grenoble University) who provided us with the VSP and GPR field data used to illustrate the MTC methodology. The authors acknowledge also the Onassis Foundation for their provision of Maria-Daphne Mangriotis' student scholarship. This work benefited from a sabbatical grant at University of California Berkeley (Department of Civil and Environmental Engineering) given by the "Secretaría de Estado de Universidades y de Investigación" of the Spanish Ministry of Science and Innovation.