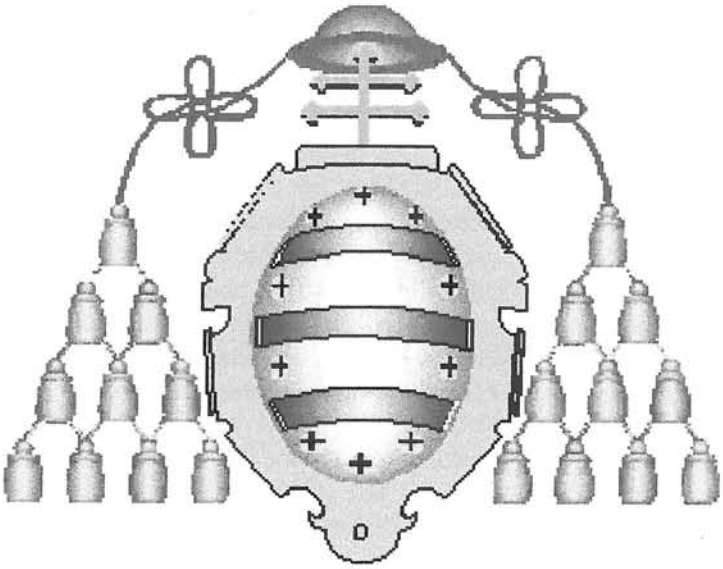
UNIVERSIDAD DE OVIEDO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



TESIS DOCTORAL

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE SEMEJANZA A LOS MOTORES DE CICLO STIRLING

Autor: Marcelino Javier Fano Suárez
Ingeniero de Telecomunicación
Profesor Titular de Escuela Universitaria

Director: Jesús Ignacio Prieto García
Dr. Ingeniero Industrial, Ingeniero Naval
Profesor Titular de Universidad

1997

RESUMEN

El objetivo de la presente memoria de Tesis es aplicar el Análisis Dimensional y la Teoría de Semejanza al análisis y proyecto de motores Stirling cinemáticos. A partir del análisis de los fenómenos físicos, los principios básicos y las ecuaciones fundamentales, se ha deducido un sistema completo de magnitudes ordinarias influyentes en el funcionamiento del motor Stirling. Mediante el teorema Pi de Buckingham, se han obtenido relaciones funcionales entre monomios adimensionales que proporcionan útiles criterios de semejanza para métodos de análisis y proyecto. El modelo ha sido contrastado mediante resultados experimentales de pruebas de los motores GPU-3 de General Motors, P-40 y M102C de Philips, y 4V-275 Mark II de Kockums. La simulación cuasiestática permite mejorar métodos pioneros de semejanza introducidos por Organ y basados en la correlación del número de Beale. Se ha desarrollado un nuevo programa informático para anteproyecto de motores Stirling cinemáticos. El programa proporciona curvas de potencia y mapas de trayectorias de partículas para las configuraciones básicas de motores y los mecanismos de accionamiento usuales, con hidrógeno, helio o aire como fluidos de trabajo.

ABSTRACT

The present Thesis dissertation aims at applying Dimensional Analysis and Dynamic Similarity to kinematic Stirling engine analysis and design. A complete set of absolute quantities involving Stirling engine performance has been obtained from the analysis of physical phenomena, main principles and fundamental equations. Using Buckingham's Pi theorem, functional relationships among dimensionless groups, which provide useful scaling criteria for analysis and design methods, have been obtained. The model has been corroborated by experimental test results carried out on General Motors GPU-3 engine, Philips P-40 and M102C engines, and Kockums 4V-275 Mark II engine. Quasi-static simulation allows the improvement of pioneer scaling methods first introduced by Organ and based on Beale number correlation. New software for preliminary design of kinematic Stirling engines has been developed. The program provides power curves and particle trajectory maps for basic engine configurations and usual drive mechanisms, with hydrogen, helium or air as working fluids.

ÍNDICE

Página

NOTACIÓN 1

0. OBJETIVOS, METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO 6

0.1 OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL 6

0.2 METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO 8

1. ANTECEDENTES 10

1.1 LOS ORÍGENES DEL MOTOR STIRLING 10

1.2 PRIMERAS VARIACIONES SOBRE EL DISEÑO ORIGINAL. CONFIGURACIONES BÁSICAS DE MÁQUINAS STILING 11

1.3 IDEAS GENERALES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR STIRLING 14

1.3.1 CONCEPTO DE DESPLAZADOR Y PISTÓN DE TRABAJO 14

1.3.2 CICLO TEÓRICO STIRLING DEL MOTOR MONOCILÍNDRICO 15

1.3.3 MOTORES CINEMÁTICOS Y DE PISTÓN LIBRE 17

1.4 MODELOS DE PRIMER ORDEN 20

1.4.1 MODELO TEÓRICO. DIAGRAMAS CINEMÁTICOS, DE PRESIONES Y DE INDICADOR 20

1.4.2 MODELO DE SCHMIDT 24

1.5 MODELOS DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN. EL PROBLEMA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA 26

1.6 LA SIMULACIÓN CUASIESTÁTICA 27

1.7 EL ANÁLISIS DIMENSIONAL Y LA TEORÍA DE SEMEJANZA 29

1.8 REFERENCIAS 31

2. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y DEL ACCIONAMIENTO MECÁNICO 34

2.1 ACCIONAMIENTOS CINEMÁTICOS DE USO FRECUENTE 34

2.1.1 ACCIONAMIENTO BIELA-MANIVELA 34

2.1.2 ACCIONAMIENTO RÓMBICO 36

2.2 ACCIONAMIENTO RÓMBICO GENERALIZADO 37

2.2.1 PARÁMETROS ANGULARES CARACTERÍSTICOS 37

2.2.1.1 Angulo canónico del volante 38

2.2.1.2 Angulo de desfase extrínseco 39

2.2.1.3 Angulo entre ejes de pistones 39

2.2.2 ECUACIONES CINEMÁTICAS CARACTERÍSTICAS 41

2.3 INFLUENCIA DE LA CONFIGURACIÓN DEL MOTOR 42

2.4 ANGULO DE DESFASE TOTAL. ANGULO DE DESFASE INTRÍNSECO 43

2.4.1 MOTOR ALPHA CON DOBLE ACCIONAMIENTO BIELA-MANIVELA 44

5.3 PREDICCIONES PARA EL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO DE MÁXIMA POTENCIA INDICADA 93
5.4 ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL COEFICIENTE DE PÉRDIDAS *m* 94
5.5 CORRELACIÓN DE MÁXIMA POTENCIA INDICADA ADIMENSIONAL 97
5.6 CORRELACIÓN DEL NÚMERO DE MACH CORRESPONDIENTE AL MÁXIMO DE POTENCIA INDICADA 99
5.7 FACTOR ADIMENSIONAL DE PÉRDIDAS DE POTENCIA INDICADA 101
5.8 POTENCIA INDICADA DEL MOTOR GPU-3 A 6.90 MPa 103
5.9 DATOS EXPERIMENTALES DE OTROS MOTORES 103
5.9.1 MOTOR P-40 DE UNITED STIRLING 104
5.9.2 MOTOR M102C DE PHILIPS 107
5.9.3 MOTOR V4-275R MARK II DE KOCKUMS 114
5.10 GPU-3: PREDICCIONES DE POTENCIA AL FRENO 118
5.11 PREDICCIONES DE POTENCIA INDICADA PARA EL MOTOR M102C 121
5.12 INTERPRETACIÓN FINAL DE LOS RESULTADOS 124
5.13 REFERENCIAS 126
6. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE SEMEJANZA AL PROYECTO 128
6.1 PROGRAMA PARA EL ANTEPROYECTO DE MOTORES STIRLING 128
6.1.1 ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DE PROTOTIPOS 128
6.1.2 ANTEPROYECTO DE MODELOS 139
6.1.3 LIBRERÍA DE PROTOTIPOS 130
6.1.4 ESPECIFICACIONES DEL PROGRAMA 130
6.2 CRITERIOS PARA LA RELAJACIÓN DE LA SEMEJANZA DINÁMICA 130
6.3 MAPA DE TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS 135
6.3.1 VOLUMEN REDUCIDO 135
6.3.2 VOLUMEN REDUCIDO ADIMENSIONAL 136
6.3.3 MAPA DE TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS 137
6.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN 139
6.4.1 GRANDES MOTORES STIRLING FUNCIONANDO CON AIRE 139
6.4.2 MOTOR STIRLING PARA COGENERACIÓN DOMÉSTICA CON GAS NATURAL 141
6.5 REFERENCIAS 149
7. CONCLUSIONES 151
APÉNDICE: CONCEPTOS BÁSICOS DE ANÁLISIS DIMENSIONAL 154

NOTACIÓN

A	área (m^2)
A_{xx}	área de sección transversal (m^2)
A_{Wx}	área de pared lateral (m^2)
b	anchura de malla del regenerador (m)
c	calor específico (kJ/kg·K)
C_f	coeficiente de fricción
d_x	diámetro de tubo de un intercambiador de calor (m)
d_w	diámetro del alambre del regenerador (m)
D	diámetro de un tubo, cilindro o pistón (m)
D_C	diámetro del cilindro de compresión (m)
D_E	diámetro del cilindro de expansión (m)
e	excentricidad del mecanismo de accionamiento (m)
h	coeficiente de película local e instantáneo ($W/m^2 \cdot K$)
I	momento de inercia ($kg \cdot m^2$)
k	conductividad térmica (W/m·K)
k_C	conductividad térmica de un gas a la temperatura de referencia T_C en la fórmula de Sutherland (W/m·K)
k_α	coeficiente de permeabilidad de Darcy (m^2)
k_β	coeficiente de permeabilidad característico de la tortuosidad de los canales (m)
l	longitud de biela (m)
L	solape máximo (m)
$\{L\}$	longitud como magnitud
L_x	longitud de tubo de un intercambiador de calor (m)
m	masa instantánea del fluido de trabajo (kg)
M	masa total del fluido de trabajo
$\{M\}$	masa como magnitud
n	número de mallas de la matriz del regenerador
n_s	velocidad del motor (rev/s)
$n_{s,max}$	velocidad del motor correspondiente al máximo de potencia indicada (rev/s)
$n_{sB,max}$	velocidad del motor correspondiente al máximo de potencia al freno (rev/s)
n_x	número de tubos de un intercambiador de calor
N_C	número de Courant $= u\,\Delta t / \Delta x$
N_F	número de Fourier $= \alpha_r / \left(n_s V_E^{2/3}\right)$

N_{ma}	número de Mach local e instantáneo
N_{MA}	número de Mach $= n_s V_E^{1/3} / \sqrt{RT_C}$
$N_{MA,max}$	número de Mach correspondiente al máximo de potencia indicada
N_{nu}	número de Nusselt local e instantáneo
N_{pr}	número de Prandtl local e instantáneo
N_{re}	número de Reynolds local e instantáneo
$N_{RE,max}$	número de Reynolds correspondiente a la máxima velocidad de las partículas de gas
N_{SG}	número de Stirling $= p_m / \mu n_s$
N_{st}	número de Stanton local e instantáneo
N_{TCR}	número característico de la capacidad térmica del regenerador $= \rho_r c_r T_C / p_m$
N_{VA}	número de Valensi
N_1	número adimensional $= N_{SG} N_{MA} = p_m V_E^{1/3} / \left(\mu \sqrt{RT_C}\right)$
N_2	número adimensional $= N_F N_{MA} = \alpha_r / V_E^{1/3} \sqrt{RT_C}$
p	presión del fluido de trabajo (Pa)
P	potencia (W)
Q	calor (J)
Q_C	calor cedido al foco frío (J)
Q_E	calor entregado por el foco caliente (J)
Q_f	potencia térmica de la fuente (W)
Q_r	calor intercambiado con el regenerador (J)
r	radio de manivela (m)
r_{hx}	radio hidráulico de un intercambiador (m)
R	constante característica del gas de trabajo $= c_p - c_v$ (kJ/kg·K)
R_H	radio hidráulico característico definido por Organ
s_i, s_i'	desplazamiento instantáneo del pistón (m)
s_x	factor de escala de la magnitud $x = x^d/x^p$
S	carrera del pistón (m)
t	tiempo (s)
T	temperatura instantánea (K)
$\{T\}$	tiempo como magnitud
T_C	temperatura del foco frío (K)
T_E	temperatura del foco caliente (K)
T_{Sk}	temperatura de Sutherland para la conductividad térmica (K)
$T_{S\mu}$	temperatura de Sutherland para la viscosidad (K)

T_w	temperatura en el interior del alambre del regenerador (K)
u	velocidad local e instantánea del gas (m/s)
u_p	velocidad instantánea del pistón (m/s)
u_0	velocidad del sonido (m/s)
U	velocidad del fluido en la superficie de contacto con el material del regenerador (m/s)
v	volumen activo instantáneo de un espacio (m^3)
v_{dR}	volumen muerto reducido (m^3/K)
v_R	volumen reducido (m^3/K)
V	cilindrada o máximo volumen activo de un espacio (m^3)
V_{dx}	volumen muerto de un espacio del motor (m^3)
W	trabajo indicado por ciclo (sistema cerrado) (J/rev)
W_B	trabajo al freno por ciclo (J/rev)
x_i	posición instantánea de la cabeza de biela (m)

SÍMBOLOS GRIEGOS

α	ángulo de desfase total entre pistones (rad)
α'	ángulo de desfase entre valores máximos de s_C y s_E (rad)
α''	ángulo de desfase entre valores mínimos de s_C y s_E (rad)
α_e	ángulo de desfase extrínseco (rad)
α_i	ángulo de desfase intrínseco (rad)
α_K	ángulo de desfase entre pistones según Kazumoto (rad)
α_r	difusividad térmica del material del alambre regenerador (m^2/s)
α_{xx}	parámetro adimensional de área de sección transversal = $A_{xx}\, r/V_E$
β	ángulo entre ejes de pistones (rad)
δ	parámetro adimensional de presión = $(p_{max} - p_{min})\,/2p_m$
δ_R	grado de irregularidad del motor = $(\omega_{max} - \omega_{min})\,/\,\omega_m$
ε	relación entre la excentricidad y el radio de manivela = e/r
ϕ	ángulo de giro del cigüeñal (rad)
ϕ_{ci}	ángulo canónico del volante correspondiente a cada pistón (rad)
Φ	factor adimensional de pérdidas de potencia indicada = $m\sqrt{RT_C}\,/\,V_E^{1/3}$
γ	coeficiente adiabático del gas de trabajo
η	rendimiento
κ	relación entre cilindradas = V_C/V_E
λ	relación entre la longitud de biela y el radio de manivela = l/r

λ_{hx}	parámetro adimensional de radio hidráulico = r_{hx}/r_{he}
Λ	relación de amplitudes o 'flushing ratio'
μ	viscosidad del fluido de trabajo (Pa·s)
μ_C	viscosidad a la temperatura de referencia T_C en la fórmula de Sutherland (Pa·s)
μ_{dx}	parámetro adimensional de volumen muerto = V_{dx}/V_E
μ_V	parámetro adimensional de volumen definido por Organ = V_E/V_{ref}
Π_V	porosidad volumétrica del regenerador
θ	ángulo de giro del cigüeñal (rad)
$\{\theta\}$	temperatura como magnitud
Θ	ángulo de giro correspondiente a la presión máxima en el modelo de Schmidt (rad)
ρ	densidad (kg/m^3)
τ	relación entre temperaturas = T_C/T_E
υ	volumen reducido adimensional = $T_C\, v_R/V_E$
υ_d	volumen muerto reducido adimensional = $T_C v_{dR}/V_E$
ω	velocidad angular del cigüeñal (rad/s)
ψ_i	ángulo formado por la biela con el eje del pistón correspondiente (rad)
ψ_{Ai}, ψ_{Bi}	valores de ψ_i correspondientes a las posiciones extremas de la cabeza de biela (rad)
Ψ	factor adimensional de pérdidas de potencia indicada $= \dfrac{qRT_C}{V_E^{2/3}}$
ζ	potencia indicada adimensional $= P_{ind}/(p_m V_E n_s)$
ζ_B	potencia al freno adimensional $= P_B/(p_m V_E n_s)$
$\zeta_{B,max}$	potencia al freno adimensional correspondiente al máximo de la misma
ζ_{max}	potencia indicada adimensional correspondiente al máximo de la misma
ζ_{mec}	pérdidas mecánicas de potencia indicada adimensionalizadas $= P_{mec}/(p_m V_E n_s)$

SUBÍNDICES

a	ambiente
B	al freno
c	enfriador
C	espacio de compresión
cc	cilindro de compresión
ce	cilindro de expansión
cil	cilindro
e	calentador

E	espacio de expansión
i	pistón o cabeza de biela genéricos
ind	indicada
m	valor medio
max	valor máximo
mec	mecánico
min	valor mínimo
p	presión constante
r, R	regenerador
RC	zona del regenerador adyacente al espacio de compresión
RE	zona del regenerador adyacente al espacio de expansión
ref	referencia
T	total
v	volumen constante
w	alambre del regenerador
W	pared de un cilindro o intercambiador de calor
x	espacio genérico
xc	enfriador
xe	calentador
0	simulación cuasiestática

SUPERÍNDICES

d	modelo
p	prototipo

0. OBJETIVOS, METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO

0.1 OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL

La investigación acerca de su funcionamiento y el desarrollo de algunas de sus aplicaciones han alcanzado tal extensión durante las últimas décadas que algunos autores han calificado a las máquinas de *ciclo Stirling* como uno de los mayores retos pendientes de la ciencia y tecnología modernas.

Actualmente, las contribuciones más numerosas proceden de Japón, Estados Unidos, Alemania y el Reino Unido. Las aplicaciones más interesantes son los motores para equipos subacuáticos y para conversión de energía solar, así como los microactuadores, refrigeradores y la cogeneración en general.

Puede afirmarse que desde hace unos 8 años la investigación realizada en el seno de la industria supera la desarrollada en las universidades, y los estudios sobre componentes alcanzan un nivel que parece indicar que se está pasando de las investigaciones básicas al desarrollo de las mismas.

Las conferencias internacionales particularmente dedicadas a las máquinas de ciclo Stirling se vienen realizando en Reading (1982), Shanghai (1984), Roma (1986), Tokyo (1988), Dubrovnik (1991), Eindhoven (1993), Tokyo (1995) y Ancona, Italia (mayo de 1997). La 9ª conferencia está prevista en Johannesburg, Sudáfrica, en 1999.

Además, el motor Stirling es objeto, desde hace décadas, de sesiones específicas en las reuniones anuales de la InterSociety Energy Conversion Engineering Conference (IECEC) que tienen lugar en los Estados Unidos. La 31st IECEC tuvo lugar en Washington, en agosto de 1996, y fue organizada por el Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).

En abril de 1996 tuvo lugar la International Solar Energy Conference, organizada por la división de energía solar de la American Society of Mechanical Engineers (ASME), donde se presentaron trabajos sobre aplicaciones solares del motor Stirling.

A nivel europeo parece que se incrementa el interés por el motor Stirling. Así, en febrero de 1996 se celebró en Osnabrück, Alemania, el tercer European Stirling Forum, organizado por diversas entidades comunitarias. La siguiente reunión está prevista en febrero de 1998.

Sin embargo, salvo escasas excepciones, puede decirse que los intentos para desarrollar motores Stirling fiables y competitivos han sido tan numerosos como los fallos en conseguirlo. Aunque no hay duda de que los esfuerzos humanos y económicos han sido y son cuantiosos, parece que no siempre han estado acompañados de una metodología idónea para abordar la complejidad de los fenómenos físicos que intervienen en el funcionamiento.

A escala nacional, parece ser que la investigación sobre máquinas de ciclo Stirling se inició en 1984 en el Departamento de Física de la Universidad de Oviedo atendiendo las sugerencias del Profesor Mazarredo, Catedrático de Termodinámica de la Universidad Politécnica de Madrid.

A finales de 1989 se terminaron los trabajos teóricos y experimentales correspondientes a la Tesis Doctoral titulada "Funcionamiento del motor Stirling y aplicaciones navales", realizada por J. I. Prieto y dirigida por el Profesor Díaz Carril, quienes comienzan a participar en las actividades del Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional a raíz de la tesis.

Puede decirse que la tesis de J. I. Prieto analizó el funcionamiento del motor Stirling mediante un modelo teórico que presenta discrepancias notables con el funcionamiento de las máquinas modernas, usualmente a velocidades relativamente elevadas. Sin embargo se observó por primera vez que los resultados experimentales obtenidos por el autor en un motor de baja potencia, y los obtenidos por el NASA Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, en el motor GPU-3 construido por General Motors, si se extrapolaban a muy bajas velocidades, podían guardar relación con las predicciones de tal modelo teórico.

La tesis que ahora se presenta constituye una continuación de aquellos trabajos, que se revisan y amplían desde la perspectiva del Análisis Dimensional y la Teoría de Semejanza, se aplican a los resultados experimentales de motores en diversos rangos de potencia, y culminan estableciendo criterios para un procedimiento de análisis y proyecto de motores.

Los modelos matemáticos más avanzados que describen los fenómenos físicos a que está sometido el fluido de trabajo en una máquina de ciclo Stirling emplean las ecuaciones de estado y de conservación para el flujo compresible no estacionario. Para una máquina determinada, las ecuaciones se complementan con la descripción de su geometría, accionamiento mecánico, y condiciones térmicas de funcionamiento, que permite establecer las condiciones iniciales y de contorno correspondientes.

Dos cosas se pueden hacer con las ecuaciones fundamentales:

a) Resolverlas, preferentemente por métodos analíticos o, alternativamente, mediante computadores tras convertir a la forma de diferencias finitas las formas no lineales en derivadas parciales de 1° y 2° orden.

b) No resolverlas, sino inspeccionarlas para determinar las variables influyentes en el funcionamiento, que servirán de partida para el estudio mediante Análisis Dimensional.

Se demostrará que esta segunda opción proporciona una información más inmediata que la primera de cara al proyecto de máquinas. En cuanto a la exactitud de una u otra, ambas deben someterse a la corroboración experimental, que será finalmente quien determine el éxito logrado. En último caso, ambos procedimientos habrán de estar de acuerdo, y puede afirmarse que el primero aún no ha tenido un éxito reconocido en el ámbito de los motores Stirling. Entretanto lo consigue, se verá cómo el segundo proporciona avances interesantes.

Los objetivos de la Tesis son, pues, los siguientes:

- Estudiar, mediante Análisis Dimensional, el funcionamiento de las máquinas de ciclo Stirling y accionamiento cinemático.

- Obtener ecuación(es) completa(s) y homogénea(s) de potencia indicada aplicables a las diversas configuraciones de motores y puntos de funcionamiento.

- Analizar resultados experimentales para corroborar la validez de la(s) ecuación(es) propuesta(s).
- Aplicar la Teoría de Semejanza al análisis de motores y al proyecto de prototipos.

0.2 METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO

El trabajo se ha organizado en los siguientes capítulos:

1. *Antecedentes*: se muestran los trabajos anteriores, de los cuales constituye una continuación la presente Tesis.
2. *Características geométricas y del accionamiento mecánico*: se seleccionan las variables geométricas y mecánicas de las que depende el funcionamiento de un motor cinemático.
3. *Características físicas del fluido de trabajo y del material del regenerador*: se identifican las variables influyentes no contempladas en el capítulo anterior.
4. *Análisis Dimensional del funcionamiento*: se obtiene mediante la aplicación del Análisis Dimensional la función de variables adimensionales que representa el modelo de funcionamiento de los motores Stirling cinemáticos.
5. *Aplicación de la Teoría de Semejanza al análisis del funcionamiento*: se contrasta el cumplimiento del modelo deducido en el capítulo anterior, analizando resultados experimentales. El estudio experimental está basado, principalmente, en los resultados experimentales conocidos de los motores GPU-3 de General Motors, M102C de Philips y V4-275R Mark II de Kockums.
6. *Aplicación de la Teoría de Semejanza al proyecto*: se muestra el procedimiento a seguir en el anteproyecto de motores cinemáticos de ciclo Stirling, empleando los criterios desarrollados en la Tesis. También se realizan algunos ejemplos numéricos para aplicaciones de actualidad.
7. *Conclusiones*: se sintetizan los resultados obtenidos y se proponen temas para ser desarrollados en posteriores trabajos.

Por otro lado, la Tesis constituye no sólo un trabajo personal del doctorando, sino también el fruto de la línea de investigación del equipo en que éste ha trabajado. Durante su desarrollo, se ha participado en las siguientes actividades científico-técnicas:

— Sesiones del Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional, de ámbito universitario nacional, que tienen una periodicidad aproximadamente cuatrimestral. Las comunicaciones presentadas se debaten y, si procede, a juicio del autor y del comité editorial, son publicadas en los Anuarios Científicos del GTAD.

— Congresos Internacionales sobre máquinas de ciclo Stirling, de periodicidad bianual. Se ha participado en los Congresos de 1993, 1995 y 1997, presentando tres artículos relacionados con el contenido de la Tesis.

— Proyecto de Investigación de Difícil Financiación Exterior de la Universidad de Oviedo, titulado "Aplicación del método discriminado de semejanza dinámica al análisis y proyecto de máquinas de ciclo Stirling" (DF94/214-1).

— Proyecto de Investigación de Difícil Financiación Exterior de la Universidad de Oviedo, titulado "Motor Stirling de 500 W para cogeneración doméstica" (DF96/514-4).

— Publicaciones en revistas internacionales: se han publicado dos artículos directamente relacionados con el contenido de la Tesis en *Proc. Instn. Mech. Eng. (Part C): J Mech Eng Sci*. Se trata de una revista de amplia difusión en el ámbito de la Ingeniería Mecánica, pues es el órgano oficial de Institution of Mechanical Engineers británico, que ha celebrado su 150 aniversario. En esta revista se publicaron informes sobre los motores originales de los hermanos Stirling.

1. ANTECEDENTES

1.1 LOS ORÍGENES DEL MOTOR STIRLING

Con el término de motor Stirling se denomina actualmente a un tipo de máquina de combustión externa cuya invención se data en 1816[1] y se atribuye a Robert Stirling, miembro de una acomodada familia escocesa de granjeros e ingenieros[2], aunque firmó sus patentes posteriores en colaboración con su hermano menor James.

Robert Stirling (1790-1878), ministro de la iglesia escocesa desde 1824, cursó estudios universitarios pero nunca se licenció, lo que por cierto no era raro en aquellos tiempos. No obstante, en 1840 recibió el grado de Doctor, parece que más bien por las atenciones religiosas y humanitarias prestadas durante una epidemia de cólera que por méritos científicos[3].

En contrapartida, James Stirling (1800-1876) fue un renombrado ingeniero civil que ejerció en Glasgow. Como argumento de que James fue probablemente el protagonista más relevante, si no de la invención original al menos del desarrollo posterior de algunas variantes, puede indicarse que en 1854 presentó y explicó sin la presencia de su hermano el informe de pruebas de un motor Stirling ante una comisión de once eminentes expertos, entre los que se encontraban Sir John Renie, Sir George Cailey y Robert Stephenson.

Los siguientes párrafos son una traducción de la explicación que hace Stirling del funcionamiento de su motor original (Fig. 1.1):

> *"La parte del cilindro rodeada por los humos se calienta hasta una temperatura de 480 grados por encima de la parte inferior del cilindro. En la posición representada el émbolo superior está casi en contacto con el otro pistón, por lo cual el aire encerrado está confinado en la parte caliente del cilindro, aumenta su elasticidad y presiona contra el pistón con una fuerza mayor que la de la atmósfera. El pistón es así movido hacia abajo y el vástago y el cigüeñal suben hasta que la presión del aire encerrado y la de la atmósfera se igualan.*
>
> *El impulso comunicado al volante mueve el cigüeñal y el vástago elevando el émbolo respecto del pistón. El aire encerrado es así obligado a descender por el espacio entre el émbolo y el cilindro hasta la parte fría, se enfría en el descenso, disminuye su elasticidad y su presión se hace menor que la atmosférica, el pistón es empujado hacia arriba y el cigüeñal hacia abajo.*
>
> *La vuelta del volante y del cigüeñal llevan de nuevo el émbolo hacia el pistón, el aire asciende a través del mismo recorrido por el que descendió, se calienta en su ascenso y fuerza el pistón hacia abajo y el cigüeñal hacia arriba, y así alternativamente. De este modo se produce un movimiento rotativo que puede ser aplicado al movimiento de maquinaria.*
>
> *La potencia del motor se regula permitiendo que una porción de aire entre o salga por una pequeña válvula que se abre o cierra como en un regulador de*

máquinas de vapor, situada en la parte fría del cilindro inmediatamente por encima del ascenso más alto del pistón."

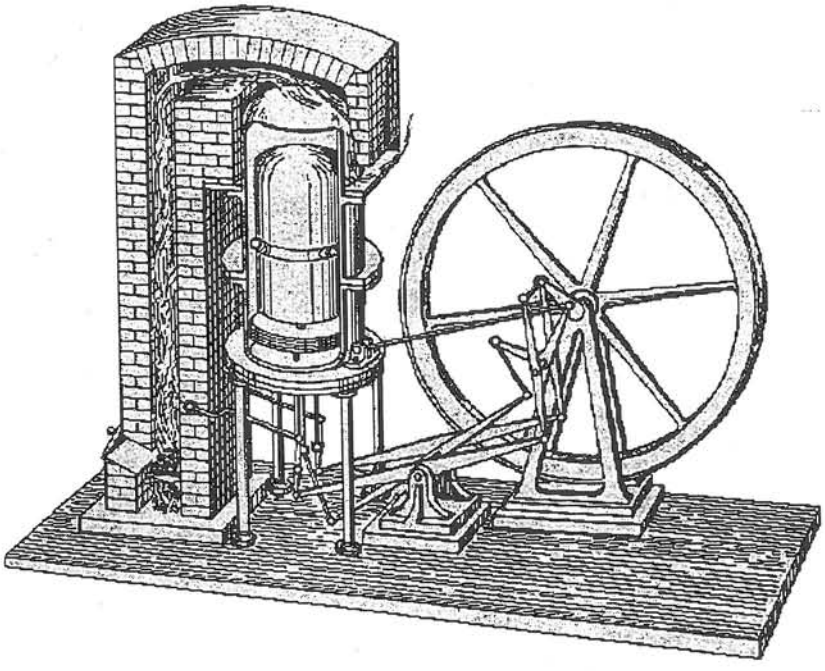


Fig. 1.1 Esquema del motor Stirling original de 1816 (reproducido de Ivo Kolin[3])

La patente original de Stirling describe formalmente por primera vez el concepto de *regenerador* como elemento destinado a mejorar el rendimiento de los motores térmicos, que en aquellos tiempos apenas superaba valores del 1%. La importancia del acontecimiento sólo puede comprenderse desde la perspectiva de que en aquella época de la *teoría del calórico*, en que el calor era considerado como una especie de fluido, aún no se habían establecido los principios de la Termodinámica (Carnot, 1824, y Joule, 1845). De hecho, algunos ingenieros pensaron que con un regenerador perfecto el motor podría convertirse en un *móvil perpetuo* y el mismo Michael Faraday no tuvo a mengua confesar, tras unos instantes de dudas, en una reunión de la Royal Society, que desconocía los principios de su funcionamiento[4].

Los motores Stirling que fueron muy populares hasta comienzos del siglo XX no solían tener regenerador y eran conocidos en su tiempo como *motores de aire caliente*. Empleaban cualquier tipo de combustible y tenían un funcionamiento sencillo, seguro, silencioso y económico respecto de las máquinas alternativas de vapor de la época. Aunque de poca potencia para su tamaño y peso, superaban a sus competidores en las aplicaciones para bombas de agua y accionamiento de maquinaria ligera como ventiladores y sierras, por lo que fueron producidos en muchos tamaños y variantes.

1.2 PRIMERAS VARIACIONES SOBRE EL DISEÑO ORIGINAL. CONFIGURACIONES BÁSICAS DE MÁQUINAS STIRLING

La patente de Robert Stirling de 1816 correspondía a un motor monocilíndrico, hoy día denominado generalmente *tipo beta*, considerado como el primer motor de aire de ciclo cerrado. Parece ser que el primer modelo de este tipo fue un motor de unos 2 H.P., cuya duración fue breve a causa de la débil resistencia a la oxidación presentada por el hierro forjado utilizado en las zonas calientes.

En 1824, James Stirling pensó en diseñar un motor que funcionara a presión media superior a la atmosférica, para lograr unidades más compactas. La presión alta se producía mediante un compresor accionado por el propio motor. Los experimentos y mejoras dieron lugar a otra patente de los hermanos Stirling[5]. Un año más tarde se construyo un motor de este tipo cuyo pistón tenía un diámetro de 66 cm y una carrera de 91.5 cm. Aunque alcanzó una potencia de unos 20 H.P. en las primeras pruebas, al cabo de un tiempo se redujeron apreciablemente sus prestaciones.

James Stirling pensó que los problemas más importantes eran causados por la mala refrigeración del motor, idea que era un anticipo del segundo principio de la Termodinámica. Las pruebas realizadas en este sentido mediante un pequeño motor de unos 2 H.P., 9.2 cm de diámetro de cilindro y 30.5 cm de carrera, dieron lugar en 1840 a la tercera patente[6].

Hacia 1843 parece que muchos de los inconvenientes anteriores ya se habían resuelto, pues en la Compañía de la Fundición de Dundee se instaló un motor de 45 H.P. cuyo rendimiento fue estimado en un 18%[7], cifra que sólo se volvería a alcanzar hacia mediados del siglo XX. Este motor funcionó durante cuatro años con un consumo bastante bajo, pero a causa de las averías en las zonas calientes fue sustituido por una máquina de vapor. La Fig. 1.2 muestra un esquema de dicho motor, que emplea un pistón de doble acción actuando en un cilindro separado de los cilindros donde operan los émbolos. Este diseño equivale a dos motores con pistones de simple efecto alojados en diferente cilindro que sus émbolos, configuración que actualmente suele denominarse *tipo gamma*.

Puede decirse que el motor tipo gamma es una variante del beta que se obtiene separando en cilindros independientes las carreras del émbolo y del pistón (Fig. 1.3), lo cual simplifica el accionamiento del émbolo y reduce los riesgos de fugas, pues su vástago no tiene que atravesar el pistón. No obstante, el motor beta, de un solo cilindro, permite que las carreras del pistón y del émbolo se solapen, lo cual implica una reducción del volumen muerto en la máquina con el consecuente incremento de potencia.

Otra variante muy usada fue la ideada por A. K. Rider en 1876, en Philadelphia, modelo que se conoce hoy día como *tipo alpha*. Emplea dos cilindros, con sus respectivos pistones, conectados a través del regenerador.

Un motor de diseño avanzado fue anterior al de Rider. Se trata del ideado por Charles Franchot en 1853, que empleaba también dos cilindros pero con pistones de doble acción. El diseño de Rider es el precursor del ideado por Wilhelm Siemens en 1860, quien dispuso cuatro cilindros de doble acción, tal como haría unos 85 años más tarde H. Rinia, uno de los ingenieros de Philips, en una de las configuraciones que actualmente se consideran más interesantes, confirmando los augurios de Babcock en 1885[8]. A fines del siglo XIX el motor Stirling se encontró con más y definitivos competidores, los motores eléctricos y los de combustión interna, con mayor potencia específica. Relegado prácticamente a aplicaciones domésticas, cae en el olvido hacia los años 20, precisamente cuando comienzan a aparecer los aceros especiales, que posibilitarían su renacimiento.

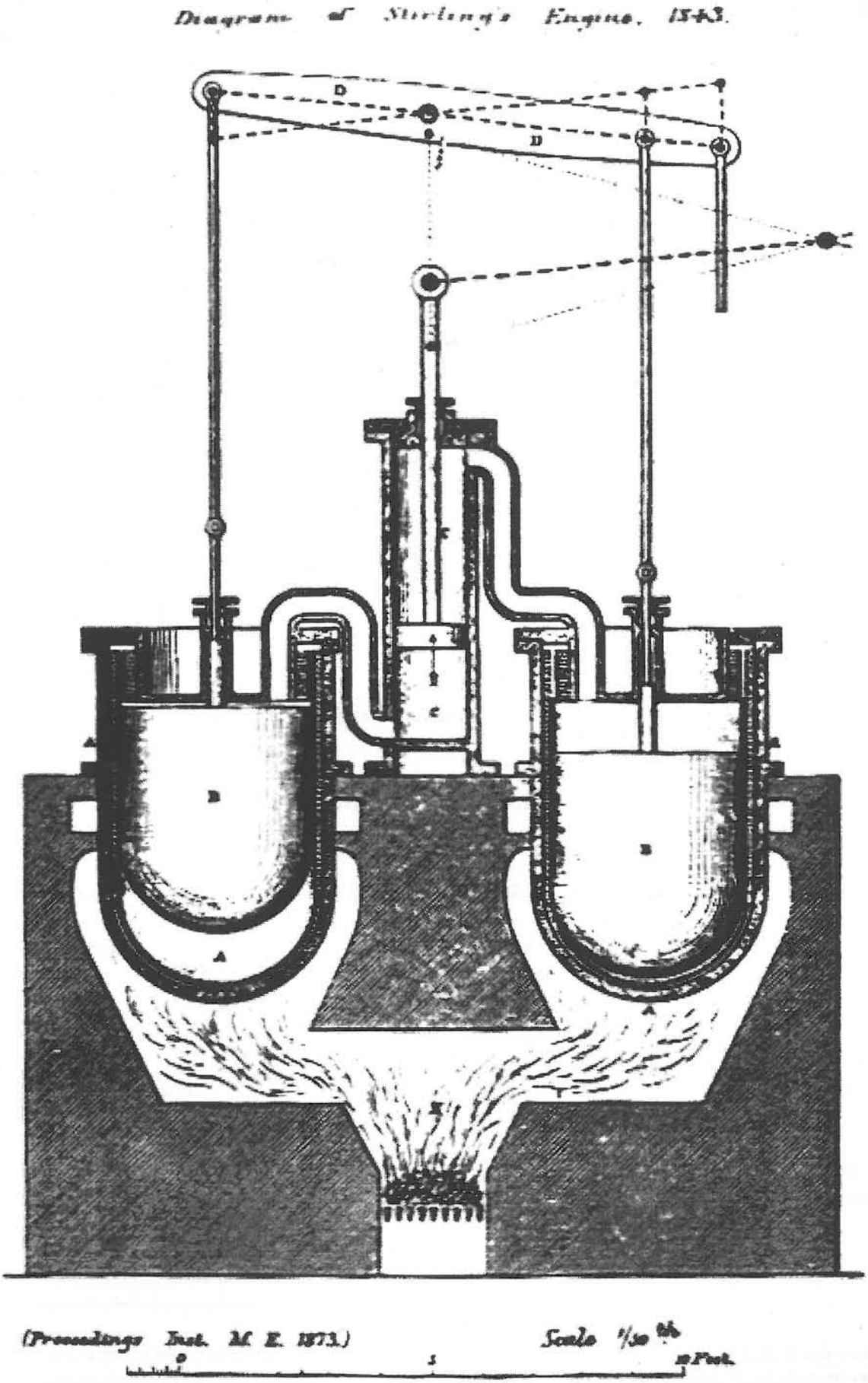


Fig. 1.2 Esquema del motor Stirling de la Compañía de Fundición de Dundee (rep. de C. M. Hargreaves[7])

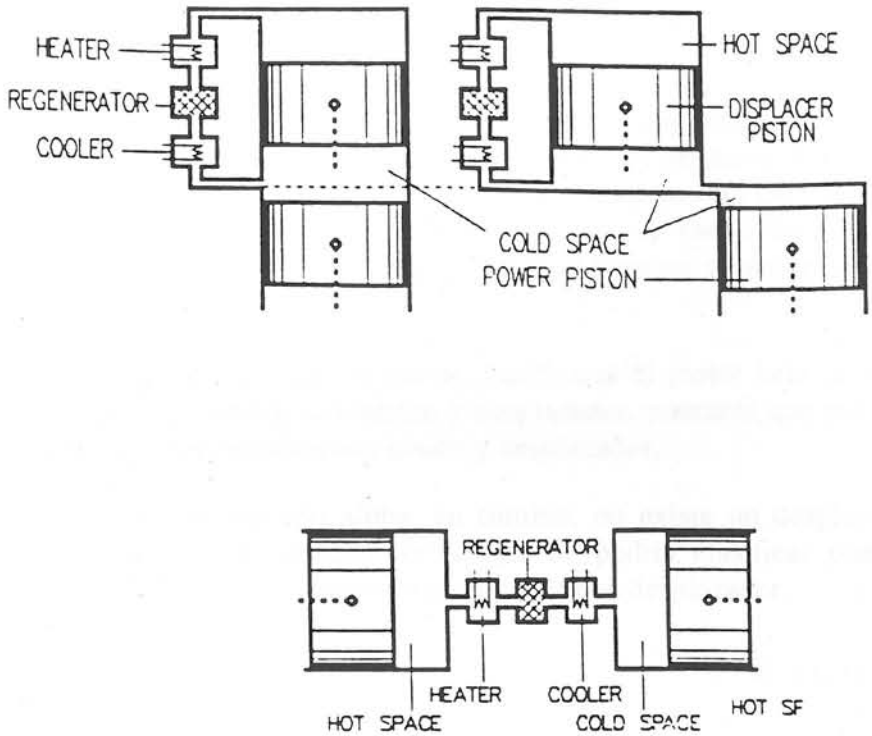


Fig. 1.3 Configuraciones básicas de motores Stirling

1.3 IDEAS GENERALES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO TEÓRICO DEL MOTOR STIRLING

1.3.1 CONCEPTOS DE DESPLAZADOR Y PISTÓN DE TRABAJO

Al igual que otros motores térmicos, el motor Stirling produce trabajo mediante expansiones y compresiones de un gas, respectivamente, a alta y baja temperatura. No obstante, su peculiaridad primordial radica en que es calentado desde el exterior, por ejemplo a través de una pared cilíndrica, por lo que recibe la denominación de motor de *combustión externa*. Debido a la inercia térmica de la pared, el gas no puede ser calentado y enfriado simplemente calentando y enfriando la misma*, sino que se varía cíclicamente su temperatura mediante un émbolo que transfiere el gas entre los espacios a diferente temperatura.

La descripción de la patente original de Robert Stirling menciona la existencia de un émbolo y un pistón, términos que podrían ser conceptualmente equivalentes, lo que requiere su diferenciación.

* En realidad, algunos motores térmicos primitivos utilizaban el procedimiento de enfriar y calentar una misma pared cilíndrica, pero obviamente su régimen de revoluciones era extraordinariamente bajo. Es el caso del ciclo ideado por Papin en 1690, probablemente el primer motor térmico, en los albores de las máquinas de vapor.

Es el llamado émbolo quien tiene la misión de desplazar el aire alternativamente desde la parte caliente a la fría. Como está rodeado totalmente del aire encerrado en el cilindro, está sometido a una presión resultante nula, luego no desarrolla trabajo a lo largo del ciclo. En lo sucesivo, este émbolo será denominado con el término de *desplazador* en alusión a su cometido.

El pistón propiamente dicho, en cambio, separa el aire encerrado en el cilindro del aire exterior, que se encontraba a la presión atmosférica en los primeros motores Stirling. Luego su cara activa o interior está sometida a la presión instantánea del ciclo, mientras que la cara exterior se encuentra prácticamente a presión constante. Por tanto es este pistón quien desarrolla el trabajo útil del motor, de ahí que se denomine generalmente como *pistón de trabajo* o simplemente *pistón*.

Atendiendo a estos conceptos, puede clasificarse el motor beta de la patente original como un motor monocilíndrico con pistón y desplazador, mientras que el motor tipo gamma sería así un motor de dos cilindros con pistón y desplazador.

En el caso del motor tipo alpha, en cambio, no existe un desplazador propiamente dicho sino dos pistones de trabajo, por lo que se podría clasificar como motor de dos cilindros, precisando, si se estima necesario, que no tiene desplazador.

1.3.2 CICLO TEÓRICO STIRLING DEL MOTOR MONOCILÍNDRICO

La Fig. 1.4 muestra los cuatro estados termodinámicos correspondientes a los vértices del ciclo teórico Stirling.

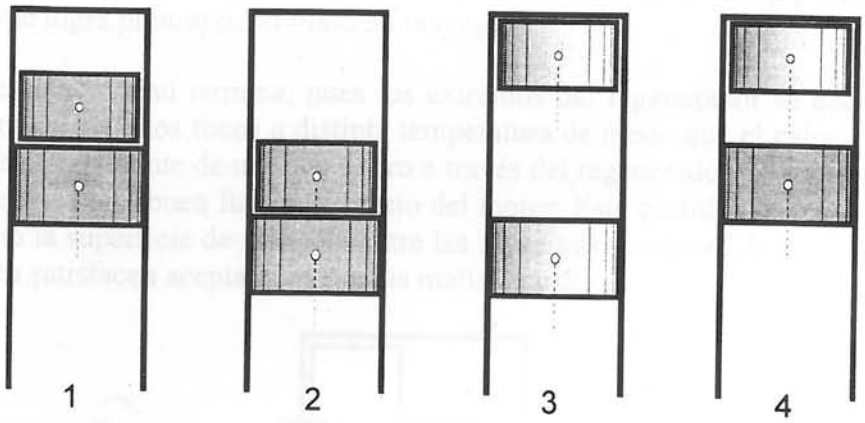


Fig. 1.4 Estados característicos del ciclo teórico Stirling en el motor monocilíndrico

En el estado 1 todo el gas se encuentra en la zona superior del cilindro, que se supone corresponde al espacio caliente. Si a partir de dicha situación descienden solidariamente el pistón y el desplazador, el gas alcanza un estado 2 en el que sigue a la temperatura alta pero ocupando mayor volumen. El proceso 12 es, pues, una expansión isoterma que se produce mediante la energía aportada por la fuente externa a través de la parte superior del cilindro.

Si a continuación se mantiene el pistón en su punto más bajo y asciende el desplazador, el gas es obligado a moverse hacia la zona inferior del cilindro, que se supone a temperatura más fría debido a la existencia de algún sistema de refrigeración. En la Fig. 1.4 se representa un desplazador que permite el paso del aire por su contorno, de modo que en el recorrido el aire cede calor a las paredes del desplazador, que hace las veces de regenerador. El proceso 23 es, pues, un enfriamiento del gas a volumen constante.

Si, una vez todo el gas en el espacio frío, el desplazador se mantiene en su punto más alto mientras el pistón asciende, se realiza una compresión isoterma 34, durante la cual el gas cede energía al foco frío a través del sistema de refrigeración existente en la pared inferior del cilindro.

A partir del estado 4, si se mantiene inmóvil el pistón mientras desciende el desplazador, el gas es obligado a retornar a través del contorno del desplazador desde el espacio frío al caliente, volviendo al estado 1 inicial. Este proceso 41 es, pues un calentamiento a volumen constante, durante el cual el gas recupera de las paredes del desplazador la energía que le había cedido en el proceso inverso 23.

Las paredes del desplazador se comportan como un almacén de energía, como corresponde a la misión del regenerador. Sin embargo, se comprende que un desplazador de paredes metálicas difícilmente puede realizar esta misión con eficacia, por lo que en la práctica los motores que emplean este diseño no tienen un buen rendimiento. Para lograr un regenerador eficaz se emplean elementos independientes del desplazador (Fig. 1.5), generalmente constituidos por mallas de fino alambre metálico fuertemente prensadas que combinan las siguientes cualidades necesarias para lograr un regenerador eficaz:

- Alta capacidad calorífica por unidad de volumen, para almacenar el máximo de energía en reducido espacio.
- Baja inercia térmica, para ceder o absorber con rapidez el calor intercambiado con el gas de trabajo, lo que se consigue con alambres muy finos.
- Poco volumen muerto, que tiene una influencia determinante en la potencia del motor, lo que se logra prensando al máximo las mallas.
- Poca conductividad térmica, pues los extremos del regenerador se encuentran en las proximidades de los focos a distinta temperatura de modo que el calor tiene tendencia a pasar directamente de un foco a otro a través del regenerador en lugar de hacia el gas como requiere el buen funcionamiento del motor. Esta cualidad se logra reduciendo al máximo la superficie de contacto entre las sucesivas secciones del regenerador, lo que también satisfacen aceptablemente las mallas metálicas.

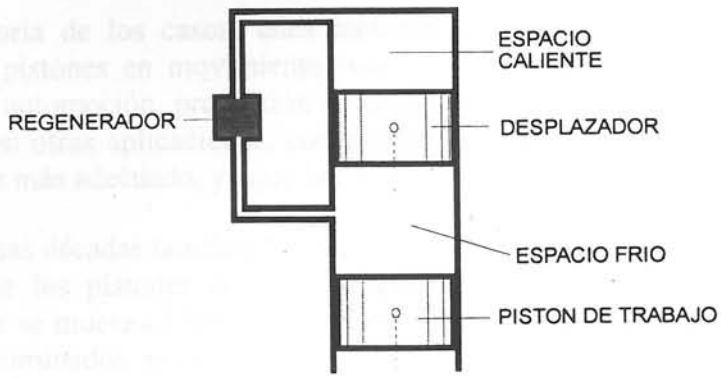


Fig. 1.5 Disposición esquemática del motor *beta* con regenerador

Resumiendo, del análisis del ciclo teórico se deducen las siguientes ventajas potenciales de las máquinas Stirling:

- Posibilidad de emplear cualquier fuente de calor, puesto que es externa, incluso energías alternativas o residuales de procesos industriales.

- Posibilidad de funcionamiento con aire comburente procedente de ambientes nocivos (polvo, etc.).

- Posibilidad de expulsión subacuática de gases de escape mediante cámaras de combustión presurizadas.

- Posibilidad de controlar la emisión de gases de escape contaminantes con mayor facilidad que en las máquinas de combustión interna.

- Posibilidad de aprovechar sin conversiones intermedias el calor residual cedido al foco frío, con fines de cogeneración, por ejemplo.

- Máximo rendimiento teórico del ciclo térmico.

- Funcionamiento silencioso, por no existir válvulas ni fases del ciclo con admisión o expulsión de gases.

- Posibilidad de operar reversiblemente como bomba de calor o refrigerador empleando fluidos de trabajo no condensables en el rango de servicio, lo que proporciona un funcionamiento con gran independencia de las condiciones térmicas exteriores.

1.3.3 MOTORES CINEMÁTICOS Y DE PISTÓN LIBRE

Son muchas las configuraciones que pueden clasificarse como máquinas de ciclo Stirling, siendo el tipo de accionamiento mecánico de los pistones uno de los criterios posibles de clasificación.

En los motores denominados *cinemáticos* existen ligaduras mecánicas entre el movimiento de los pistones, de modo que el accionamiento de uno arrastra al otro en algunas fases del ciclo, por ejemplo, mediante el convencional volante de inercia dispuesto en un cigüeñal sobre el que actúan las bielas correspondientes.

En la mayoría de los casos, tales motores cinemáticos convierten el movimiento alternativo de los pistones en movimiento rotativo, por lo que son los más utilizados en aplicaciones como automoción, propulsión submarina y conversión de energía solar térmica. También se usan en otras aplicaciones, como el bombeo de líquidos, donde el movimiento alternativo lineal es más adecuado, ya que la conversión es relativamente sencilla.

En las últimas décadas también se ha prestado mucha atención a otras máquinas en las que uno o más de los pistones no están acoplados a ningún sistema de accionamiento mecánico, sino que se mueven libremente bajo la influencia de la presión del gas de trabajo. Se trata de los denominados motores *híbridos* y de *pistón libre*, que ofrecen ventajas por su sencillez y facilidad para resolver los problemas de cierres de estanqueidad.

O. Ringbom[9] patentó en 1907 el primero de los motores que hoy se conocen como híbridos[10], modificando un motor Stirling tipo gamma que empleaba aire a una presión media próxima a la atmosférica.

El motor disponía el desplazador en posición vertical, con su vástago hacia arriba (Fig. 1.6). El diámetro del vástago estaba calculado de modo que, para una presión algo mayor que la atmosférica, las fuerzas sobre la cara inferior del desplazador superaran las de la cara superior y el peso propio del mismo.

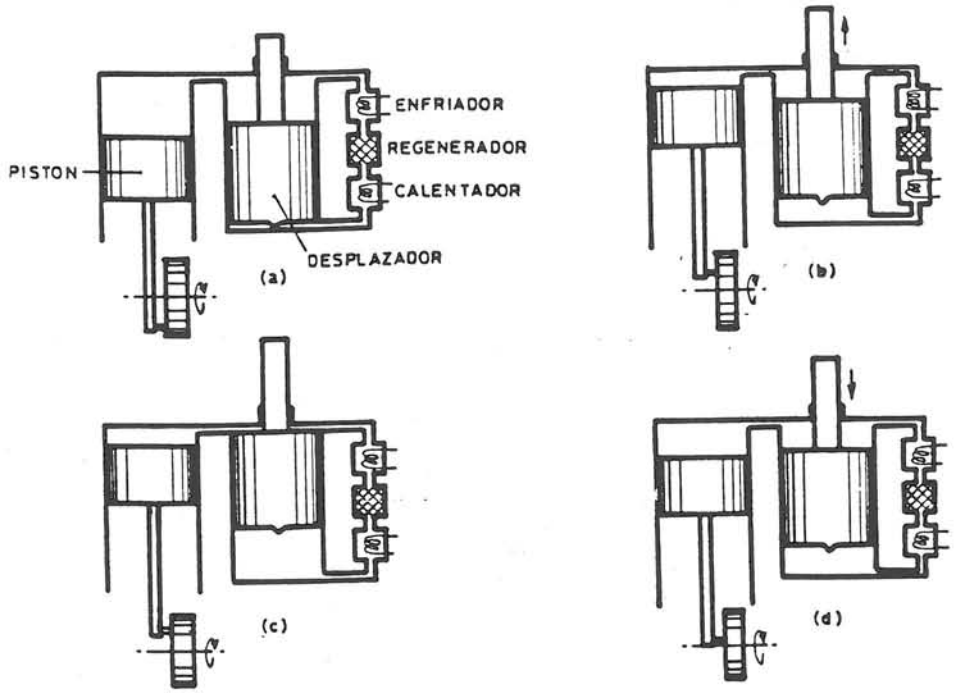


Fig. 1.6 Secuencias de funcionamiento del motor Ringbom

Su funcionamiento es sencillo de explicar si se admite que, en cada instante, la presión es aproximadamente igual a lo largo de las diversas partes del motor. Al comienzo de la compresión isoterma (Fig. 1.6a), la mayor parte del gas se encuentra en el espacio frío y la presión es menor que la media, por lo que el desplazador permanece por su propio peso en su punto más bajo.

Al aumentar la presión, llega a superar la atmosférica y se alcanza un estado en el que el desplazador comienza a ascender al vencer su peso las fuerzas de presión verticales (Fig. 1.6b). De este modo, pasa gas del espacio frío al caliente y aumenta aún más la presión.

Cuando el pistón comienza a descender (Fig. 1.6c), pasa gas del espacio caliente al frío y la presión disminuye, alcanzándose la situación en que ya no compensa el peso del desplazador, que desciende (Fig. 1.6d). Así, tras el arranque, el movimiento alternativo del vástago del desplazador produce el giro del volante que acciona el pistón, o viceversa, sin conexión mecánica entre ambos.

Otro diseño híbrido interesante, con origen en la patente de W. Martini de 1968 relativa al bombeo de sangre para un corazón artificial, es el denominado *amplificador termomecánico*, donde se acciona mecánicamente el desplazador (Fig. 1.7).

El desplazador tiene prácticamente la misma presión a su alrededor en todo instante, por lo que su movimiento continuado se puede producir aportando sólo la energía consumida por fricción, por ejemplo, mediante un motor eléctrico de poca potencia.

El movimiento del desplazador provoca el paso del gas del espacio caliente al frío y viceversa, con las consiguientes oscilaciones cíclicas de presión, que dan lugar al movimiento alternativo del pistón, donde se podrá desarrollar mucha mayor potencia que la consumida por el desplazador.

El pistón puede accionar un volante rotativo o proporcionar un efecto de bombeo, mediante válvulas o directamente a través de un diafragma.

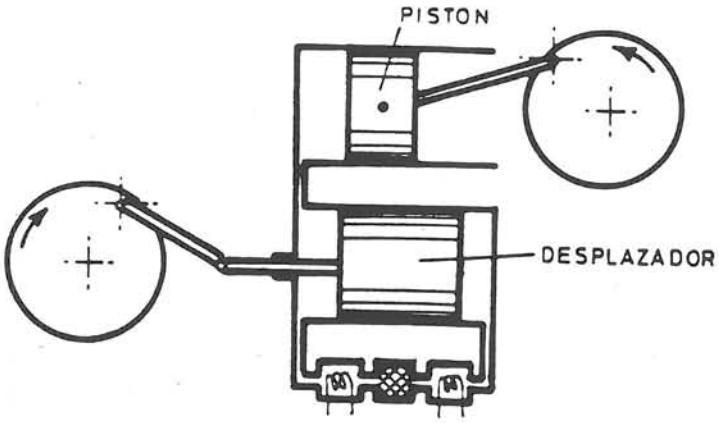


Fig. 1.7 Esquema del amplificador termomecánico

En los motores híbridos, el movimiento de un pistón, producido por un accionamiento mecánico rotativo, provoca el movimiento del otro pistón. En los motores de *pistón libre* no existen accionamientos mecánicos que acoplen un pistón al otro o bien a un eje de giro común, sino que se mueven exclusivamente en virtud de las fuerzas de presión del gas u otras fuerzas elásticas existentes entre ellos.

W. Beale inventó el motor de pistón libre a finales de los años 50 durante su actividad como profesor de la Universidad de Ohio, desarrollándose diversas mejoras en las siguientes décadas. Beale fundó la empresa Sunpower Inc., orientada a la fabricación y comercialización de pequeños motores de pistón libre, destinados principalmente a aplicaciones en países del tercer mundo.

El motor de pistón libre consta de un pistón pesado y un desplazador ligero dispuestos en un mismo cilindro cerrado al menos por el extremo del desplazador (Fig. 1.8).

El gas contenido en el espacio bajo el pistón, denominado espacio *de rebote*, actúa como un muelle neumático, y de hecho es sustituido por un resorte propiamente dicho en algunos diseños. En ambos casos, el muelle hace oscilar al pistón en el cilindro a una frecuencia característica denominada *frecuencia natural*. El movimiento del desplazador puede ser sinusoidal en el caso de los motores denominados *resonantes*, o bien puede corresponder a un diagrama cinemático similar a una onda cuadrada en los motores *sobreimpulsados* (overdriven)[11].

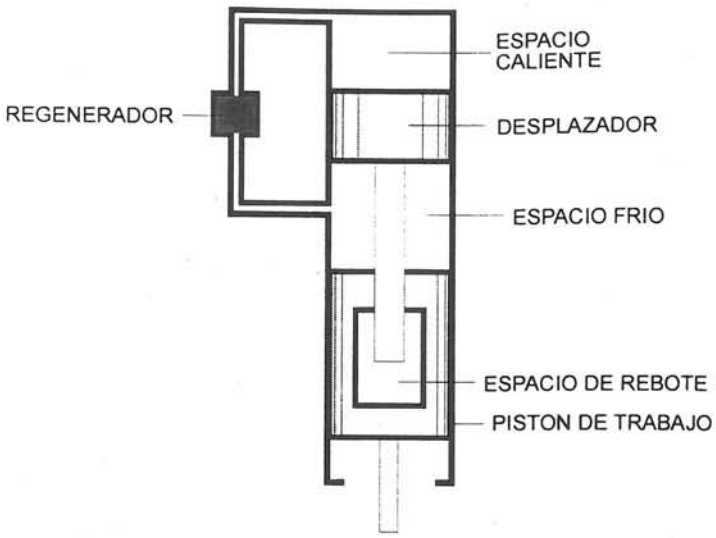


Fig. 1.8 Esquema del motor de pistón libre

Entre las ventajas más significativas de los motores de pistón libre frente a los cinemáticos pueden resaltarse las siguientes:

- El motor de pistón libre es un sistema dinámico resonante que funciona a una frecuencia más o menos constante, de modo que arranca por sí solo o bien se para ante cualquier perturbación que modifique su frecuencia. La propiedad de autoarranque es exclusiva del motor de pistón libre, aunque algunos cinemáticos también presentan facilidad de arranque.

- Los esfuerzos laterales de los pistones contra el cilindro se minimizan, ya que sólo existen movimientos alternativos, lo que simplifica el diseño de los cierres de estanqueidad y permite el uso de pistones lubricados por el propio gas.

- El motor de pistón libre es más o menos autorregulable, de modo que la carrera del pistón es mayor cuando la carga resistente es baja y viceversa, manteniéndose virtualmente constante el producto de ambas. Prácticamente es imposible que el motor se cale como consecuencia de las variaciones de la carga resistente.

Como inconveniente de los motores de pistón libre suele citarse la ausencia de un eje rotativo, requerido por un considerable número de instalaciones.

1.4 MODELOS DE PRIMER ORDEN

1.4.1 MODELO TEÓRICO. DIAGRAMAS CINEMÁTICOS, DE PRESIONES Y DE INDICADOR

Es ilustrativo representar el movimiento del pistón y del desplazador a lo largo del ciclo en función del tiempo o mejor del ángulo θ girado por el cigüeñal, lo que da lugar a los denominados *diagramas cinemáticos*, característicos del tipo de accionamiento. En la práctica suelen representarse los *diagramas de volúmenes*, que se obtienen al multiplicar la sección del pistón o del desplazador por su recorrido instantáneo:

$$v_E(\theta) = \frac{\pi D_E^2}{4} x_E(\theta) \tag{1.1}$$

$$v_C(\theta) = \frac{\pi D_C^2}{4} x_C(\theta) \tag{1.2}$$

La Fig. 1.9 muestra los diagramas de volúmenes correspondientes al ciclo teórico descrito anteriormente, donde se observan las correspondientes funciones discontinuas que sólo podrían obtenerse aproximadamente mediante accionamientos de levas. Como tales funciones dan lugar a esfuerzos generalmente inadmisibles en las discontinuidades, los accionamientos usados en la práctica son más o menos próximos al movimiento armónico simple de los pistones, como ocurre con el mecanismo convencional de biela-manivela.

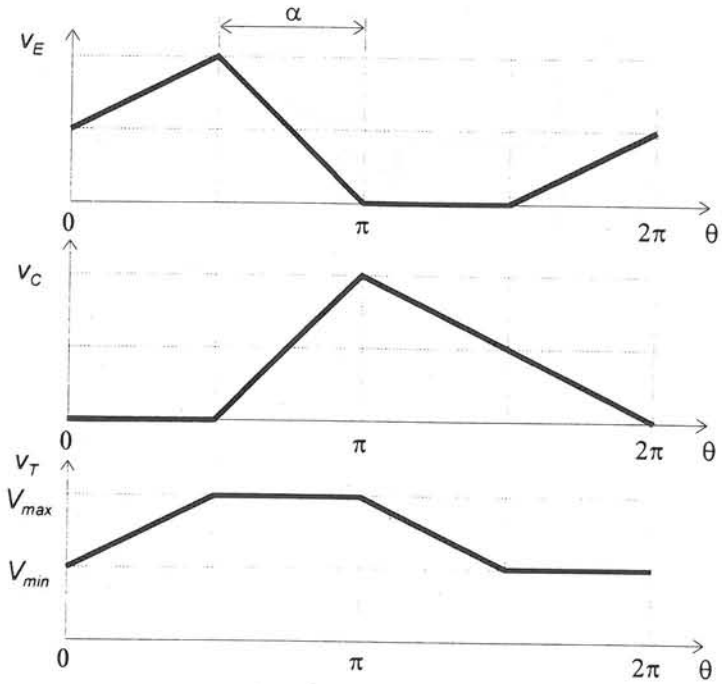


Fig. 1.9 Diagramas de volúmenes del ciclo teórico Stirling del motor monocilíndrico

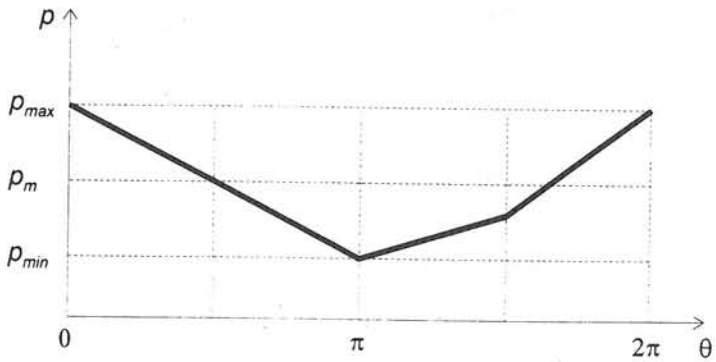


Fig. 1.10 Diagrama de presiones del ciclo teórico Stirling del motor monocilíndrico

La máxima presión del ciclo teórico descrito se produce en el estado 1, ya que entonces el gas ocupa el mínimo volumen con la mayor temperatura. La mínima presión tiene lugar en el estado 3, que corresponde al máximo volumen con la mínima temperatura. Los

estados 2 y 4 corresponden a presiones intermedias. La Fig. 1.10 muestra el *diagrama de presiones* correspondiente al ciclo teórico.

Si se elimina el ángulo de giro como parámetro de las funciones de volúmenes y presiones se obtiene la presión en función del volumen, cuya representación se denomina *diagrama indicador*, que en el caso del ciclo teórico está formado por dos transformaciones isotermas y dos transformaciones a volumen constante (Fig. 1.11).

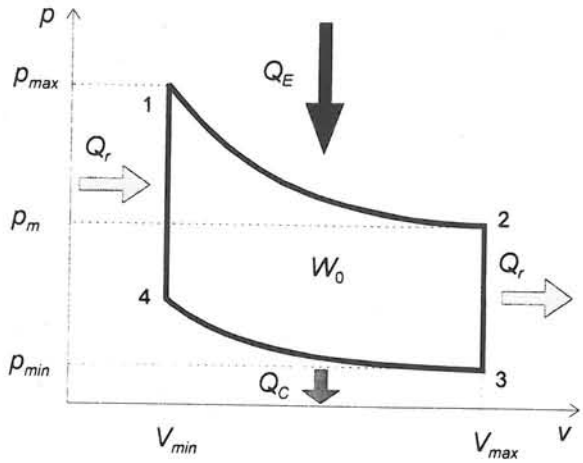


Fig. 1.11 Diagrama indicador *p-v* del ciclo teórico Stirling del motor monocilíndrico

El calor absorbido del foco caliente, a la temperatura T_E, durante la expansión isoterma 12, puede calcularse mediante:

$$Q_E = MRT_E \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} \tag{1.3}$$

siendo M la masa del gas de trabajo. Análogamente, el calor cedido al foco frío, a la temperatura T_C, durante la compresión isoterma 34, será:

$$Q_C = MRT_C \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} \tag{1.4}$$

En el proceso 23 el gas cede al regenerador el calor dado por:

$$Q_r = Mc_v (T_E - T_C) \tag{1.5}$$

que recupera en el proceso 41.

Por tanto, el trabajo desarrollado en cada ciclo es:

$$W_0 = Q_E - Q_C = MR(T_E - T_C) \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} \tag{1.6}$$

que equivale al área encerrada por el ciclo en el diagrama indicador, por lo que se denomina trabajo *indicado*.

Para que la secuencia de los estados 1234 corresponda al sentido de las agujas del reloj y, por tanto, predomine el trabajo de expansión frente al de compresión, o, lo que es lo

mismo, la máquina desarrolle un trabajo positivo, es preciso que el desplazador tenga un desfase α en adelanto respecto del pistón, como ocurre en los diagramas de la Fig. 1.9 donde el máximo del volumen del desplazador se produce para un ángulo de giro menor que el máximo del volumen del pistón. De otro modo, el funcionamiento correspondería a una máquina de ciclo inverso, frigorífica o bomba de calor, que intercambiaría en cada ciclo con los focos los calores dados por las Ec. (1.3) y (1.4), requiriendo para ello ser accionada por un agente externo que aportase el trabajo dado por la Ec. (1.6). La máquina Stirling es, pues, una máquina *reversible*, lo que constituye una de sus características más interesantes.

Por otro lado, el rendimiento de la máquina de ciclo Stirling en el funcionamiento como motor vale:

$$\eta = \frac{W_0}{Q_E} = 1 - \frac{T_C}{T_E} \tag{1.7}$$

de modo que equivale al rendimiento de un ciclo de Carnot entre las mismas isotermas, es decir, el máximo teóricamente alcanzable para un salto térmico dado, lo que sin duda es otra interesante cualidad del ciclo Stirling teórico.

Los ciclos reales son diferentes del teórico como consecuencia de la inevitable existencia de volumen muerto en el regenerador y en otras partes del motor como los huelgos entre pistones y cilindros, así como debido al accionamiento continuo de los pistones, que da al ciclo real una forma redondeada, y por la dificultad para obtener procesos isotermos, ya que la transmisión de calor a través de las paredes de los cilindros a un determinado régimen de revoluciones no es capaz de compensar la tendencia del gas a enfriarse en la expansión y calentarse en la compresión. Por otro lado, el regenerador tampoco es totalmente eficaz, por lo que el fluido sale del mismo con temperaturas más o menos diferentes de las teóricas T_E y T_C.

Para compensar la ineficacia del regenerador y la de los cilindros, como transmisores de calor, se suelen disponer sendos intercambiadores adicionales denominados *calentador*, entre el regenerador y el espacio de expansión, y *enfriador*, entre el regenerador y el espacio de compresión (Fig. 1.12).

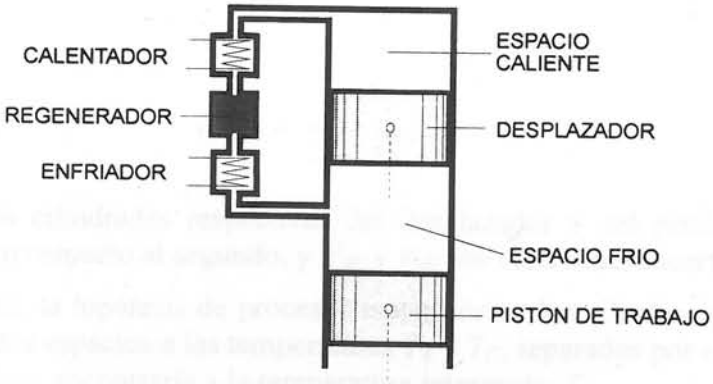


Fig. 1.12 Disposición esquemática de los intercambiadores de calor en un motor *beta*

Esta necesidad de emplear varios intercambiadores requiere, en principio, mayor espacio que en otros motores, en detrimento de la potencia específica. Otros inconvenientes que obstaculizaron el desarrollo de esta máquina en el siglo pasado, como la necesidad de emplear materiales resistentes a altas temperaturas y la dificultad para disponer cierres de estanqueidad con gases tan ligeros como el hidrógeno o el helio a altas presiones, con ser

obviamente los más notables, parecen resolubles con el grado de desarrollo tecnológico actual.

1.4.2 MODELO DE SCHMIDT

Al describir el funcionamiento del ciclo teórico Stirling del motor cinemático tipo beta se hicieron las hipótesis de ausencia de irreversibilidades térmicas y mecánicas, regenerador totalmente eficaz y sin pérdidas de calor por conducción, ausencia de volumen muerto, ausencia de fugas y accionamiento discontinuo. Para aproximarse al funcionamiento real es preciso modificar estas hipótesis o añadir otras nuevas.

Schmidt[12] hizo en 1871 un análisis que parece ser la primera descripción teórica completa del funcionamiento del ciclo Stirling, cuya comprensión se vio facilitada al ser reformulada en inglés por Rinia y du Pré[13]. Las hipótesis consideradas en este modelo pionero son las siguientes:

- Procesos isotermos en los cilindros
- Comportamiento del fluido de trabajo como gas ideal
- Accionamiento armónico simple de los pistones
- Ausencia de pérdidas de presión por viscosidad del gas de trabajo
- Ausencia de fugas
- Existencia de volumen muerto
- Regenerador eficaz y sin pérdidas de calor por conducción

Suponiendo accionamiento armónico, las ecuaciones de volúmenes de los espacios caliente y frío resultan:

$$v_E(\theta) = \frac{V_E}{2}\left(1-\cos(\theta+\alpha)\right)+V_{dE} \tag{1.8}$$

$$v_C(\theta) = \frac{V_C}{2}(1-\cos\theta)+V_{dC} \tag{1.9}$$

siendo V_E y V_C las cilindradas respectivas del desplazador y del pistón, α el desfase en adelanto del primero respecto al segundo, y V_{dE} y V_{dC} los volúmenes muertos de cada espacio.

Por otro lado, la hipótesis de procesos isotermos en los cilindros permite imaginar el motor dividido en dos espacios a las temperaturas T_E y T_C, separados por el regenerador, cuyo volumen muerto V_{dr} se encontraría a la temperatura intermedia T_r.

La ecuación de estado de los gases ideales permite obtener la masa total del gas de trabajo como suma de la existente en cada espacio a temperatura constante:

$$M = \frac{pv_E(\theta)}{RT_E} + \frac{pV_{dr}}{RT_r} + \frac{pv_C(\theta)}{RT_C} = \text{cte} \tag{1.10}$$

donde se ha considerado la misma presión en cada espacio en virtud de la hipótesis de ausencia de pérdidas de presión por viscosidad. Despejando la presión:

$$p(\theta) = \frac{MR}{\dfrac{v_E(\theta)}{T_E} + \dfrac{V_{dr}}{T_r} + \dfrac{v_C(\theta)}{T_C}} \tag{1.11}$$

se obtiene la ecuación que permite construir el diagrama de presiones. Es útil sustituir la masa de gas M por la presión media o de llenado p_m, lo que conduce[14,15,16] a la siguiente ecuación, común a todo tipo de motores:

$$p(\theta) = p_m \frac{1-\delta^2}{1-\delta\cos(\theta+\Theta)} \tag{1.12}$$

donde δ y Θ son parámetros adimensionales que tienen distintas expresiones para cada tipo de máquina, y dependen de las relaciones adimensionales de temperaturas τ, cilindradas κ y volúmenes muertos μ_{dE} y μ_{dC}. Nótese que 2π - Θ es el ángulo de giro correspondiente a la presión máxima y que $2\delta p_m$ es la amplitud de presión, pues:

$$\delta = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}} = \frac{p_{max} - p_{min}}{2p_m} = \frac{\Delta p}{2p_m}$$

Repartiendo el volumen muerto del regenerador a partes iguales entre los espacios frío y caliente, para un motor *beta sin solape* entre las carreras del pistón y del desplazador, o para un motor *gamma*, δ y Θ valdrían:

$$\delta = \frac{\sqrt{(1-\tau)^2 - 2\kappa(1-\tau)\cos\alpha + \kappa^2}}{(1+2\mu_{dE})\tau + \kappa + 2\mu_{dC} + 1} \tag{1.13}$$

$$\Theta = \tan^{-1}\frac{(1-\tau)\operatorname{sen}\alpha}{(1-\tau)\cos\alpha - \kappa} \tag{1.14}$$

siendo:

$$\tau = \frac{T_C}{T_E} \qquad \kappa = \frac{V_C}{V_E} \qquad \mu_{dE} = \frac{V_{dE}}{V_E} \qquad \mu_{dC} = \frac{V_{dC}}{V_E}$$

El trabajo indicado por ciclo se puede calcular por integración:

$$W_0 = \oint p\,\mathrm{d}v \tag{1.15}$$

llegándose al siguiente resultado en los casos del motor beta sin solape o del motor gamma:

$$W_0 = p_m V_E\, \mathrm{f}(\delta)[-\kappa\operatorname{sen}\Theta] \tag{1.16}$$

siendo:

$$\mathrm{f}(\delta) = \pi\frac{\sqrt{1-\delta^2} - (1-\delta^2)}{\delta} \tag{1.17}$$

Del análisis se deduce[16] que f(δ) tiene un valor máximo de 0.943 para $\delta = 0.786$, al que conviene aproximarse en el diseño para cada combinación de parámetros adimensionales de temperaturas, volúmenes y desfase.

Si el accionamiento no es armónico no se puede obtener una solución integral para el trabajo por ciclo, excepto en el caso del ciclo teórico sin volumen muerto y accionamiento discontinuo, ya visto. No obstante, esta simulación, que suele denominarse *isoterma*, no presenta especiales dificultades, pues la Ec. (1.11), obtenida de la condición de ausencia de fugas Ec. (1.10), puede ser utilizada para resolver la Ec. (1.15) por integración numérica[14,15,16].

Tanto el modelo de Schmidt como la simulación isoterma son el resultado de combinar el *principio de conservación de masa*, que equivale a la ausencia de fugas, con una serie de hipótesis más o menos realistas, entre las que figuran características geométricas del motor y una ecuación de estado, y se clasifican en el grupo de los denominados *modelos de primer orden*. Dentro de este grupo existen variantes en función de cuáles son las restantes hipótesis utilizadas, destacando, por ejemplo, los trabajos de Finkelstein[17], Creswick[18], y Walker[19]. Aparte del tipo de accionamiento, las diferencias más importantes radican en suponer procesos isotermos o adiabáticos en los cilindros.

1.5 MODELOS DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN. EL PROBLEMA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

Entre los denominados *modelos de segundo y de tercer orden* se encuentran aquéllos que añaden al principio de conservación de masa los principios de *conservación de cantidad de movimiento* y de *conservación de energía*.

Los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía pueden formularse, al menos, mediante el simbolismo de la termodinámica o mediante el simbolismo de la teoría de campos de la mecánica de fluidos.

En el primer caso, el conjunto del motor o alguna de sus partes se consideran sistemas termodinámicos que se pueden definir mediante variables macroscópicas, esto es, independientes del punto del sistema y del instante considerados. Al añadir algún procedimiento para incorporar la variación temporal y espacial de las variables de los sistemas dinámicos,. se obtienen los modelos denominados de *parámetros acoplados* ('lumped parameters'), de *celdas finitas* ('finite-cells') y *nodal*, utilizados por Finkelstein[20,21,22,23], Kirkley[24], Schock[25], Heames *et al.*[26], Tew *et al.*[27] y Urieli[28], entre otros. La formulación de mecánica de fluidos ha sido empleada, entre otros autores, por Organ[29,30] y Rispoli[31]. Obviamente, ambos procedimientos han de estar de acuerdo finalmente con los resultados experimentales.

Desde el punto de vista del análisis numérico, los dos métodos citados usan ecuaciones en diferencias finitas como aproximación a los incrementos infinitesimales. La diferencia fundamental es que las formulaciones de celdas finitas tratan los incrementos como diferenciales totales, mientras que en mecánica de fluidos se tratan como diferenciales parciales antes de la discretización, cambiando a nuevas coordenadas a lo largo de las cuales se pueden justificar los cambios de las propiedades del fluido en forma de diferenciales totales.

El nivel del debate acerca de los modelos analíticos se elevó súbitamente con motivo de la tesis doctoral de Urieli[26], que abordó la difícil tarea de definir un esquema de discretización unidimensional de celdas finitas equivalente a la forma diferencial del campo unidimensional de flujo compresible, lo que supuso la primera llamada de atención sobre la importancia de los efectos de la cantidad de movimiento. A pesar del mérito de este trabajo, se ha criticado el uso que hace del teorema de Gauss, que requiere la continuidad de las derivadas de las variables dependientes en el intervalo de integración. De hecho, el campo unidimensional de flujo compresible contiene infinitas discontinuidades en tales derivadas.

Los modelos de celdas finitas contienen la hipótesis implícita de que los incrementos de masa, cantidad de movimiento y energía ocurren en un intervalo de tiempo Δt determinado sólo por el hecho de que sea menor que el intervalo temporal de integración. En este intervalo de tiempo, se supone que tiene lugar la mezcla completa del contenido de la superficie de control, de modo que sus propiedades puedan aceptarse como uniformes o variables linealmente con la distancia Δx a lo largo de la celda. Como las diversas relaciones entre Δx y Δt, es decir los diversos números de Courant N_C, dan lugar a diferentes tasas de difusión y de propagación de presión, la solución numérica de tales modelos depende de N_C. Aumentando el número de subdivisiones se puede esperar una solución *diferente* pero no necesariamente más *exacta*, como se proclama a veces.

El *método de las características* parece un procedimiento de integración numérica más apropiado para estudiar la dinámica de gases, pues los incrementos de tiempo y distancia son las coordenadas 'naturales' del intervalo de integración[32], de modo que, al menos dentro de ciertos límites, puede asegurarse que la solución obtenida por este camino es una imagen correcta de las ecuaciones fundamentales que definen físicamente el problema, independientemente del tamaño del intervalo de integración.

1.6 LA SIMULACIÓN CUASIESTÁTICA

En sentido estricto, las magnitudes termodinámicas son macroscópicas e independientes del tiempo, puesto que se entienden referidas a la totalidad de un cierto sistema que realiza procesos cuasiestáticos, es decir, lentas sucesiones de estados de equilibrio entre sistema y ambiente. Asumiendo la existencia de equilibrio eléctrico y químico, el equilibrio contemplaría únicamente los aspectos mecánico y térmico, es decir:

$$p = p_a \pm \mathrm{d}\,p \tag{1.18}$$

$$T = T_a \pm \mathrm{d}\,T \tag{1.19}$$

donde p_a y T_a representan la presión y temperatura del ambiente. El signo de las variaciones determina el sentido de los procesos, que podrían ser reversibles.

Es decir, los procesos cuasiestáticos suponen inexistencia de irreversibilidades térmicas y mecánicas y de pérdidas de energía asociadas a ellas.

Si se postula, en lo referente al motor Stirling, que las fuentes térmicas tienen *capacidad calorífica infinita*, la temperatura de sus paredes permanecerá constante a lo largo del tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T_W} \to \infty \quad T_W = \text{constante} \tag{1.20}$$

Si adicionalmente se suponen *cuasiestáticos* los procesos del gas de trabajo, se deducen las siguientes consecuencias:

* A causa del *equilibrio mecánico*:

- Las pérdidas de presión debidas a la viscosidad y las subsiguientes pérdidas de trabajo indicado serán despreciables.
- Las pérdidas de trabajo indicado debidas a las fuerzas de inercia también serán despreciables.
- No existirán pérdidas de potencia al freno.

* A causa del *equilibrio térmico*:

- Los procesos en los cilindros serán isotermos, ya que

$$T_W = T \tag{1.21}$$

- El regenerador tendrá eficiencia máxima, puesto que

$$\eta_r = \frac{T_{RE} - T_{RC}}{T_{WRE} - T_{WRC}} = 1 \tag{1.22}$$

Si además se postula que *no hay pérdidas de calor por conducción* ni a lo largo de las paredes del regenerador ni entre los extremos del mismo y las secciones adyacentes de los espacios caliente y frío, se podrá escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_{WE} &= T_{WRE} \\ T_{WC} &= T_{WRC} \\ k_{WR} &= 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

donde k_{WR} representa la componente de la conductividad térmica de las paredes del regenerador en la dirección del flujo.

En resumen, las hipótesis de procesos cuasiestáticos y ausencia de pérdidas por conducción en el regenerador traen las siguientes consecuencias:

- La presión y la temperatura del gas de trabajo se convierten en magnitudes termodinámicas macroscópicas. Así, los cilindros y el resto de los espacios del motor pueden ser considerados sistemas termodinámicos.

- El calentador y el enfriador serían innecesarios, ya que el calor sería transferido a través de las paredes de los cilindros, lo cual era común en los diseños de los motores originales. El calor tendrá el mismo valor que el trabajo en cada ciclo:

$$Q_{cil} = W_{cil} \tag{1.24}$$

- Serían factibles los procesos reversibles, lo que justificaría el hecho de que las máquinas Stirling son frecuentemente mencionadas como ejemplo de reversibilidad.

Bajo tales condiciones, los principios a los que se subordinan las magnitudes se reducen a la *conservación de masa* y a los *principios termodinámicos*, cuyas ecuaciones más simples para ciclo completo y sistema cerrado serán:

$$M = \text{constante} \qquad Q = W \qquad \eta < 1 \qquad T > 0 \tag{1.25}$$

El principio de conservación de la cantidad de movimiento no es aplicable, porque la hipótesis de procesos cuasiestáticos implica $\omega \to 0$. Por tanto, sólo es posible esperar que los resultados experimentales se acerquen a las predicciones teóricas derivadas de tales hipótesis en el rango de bajas velocidades, típicas de los primeros motores de aire caliente.

Se ha visto, pues, que las hipótesis del modelo de Schmidt se deducen de la condición de procesos cuasiestáticos, por lo que Prieto y Díaz[16] sugirieron sustituir el término de *modelo isotermo* por el de *simulación cuasiestática*, que se extiende además a mecanismos distintos del armónico.

1.7 EL ANÁLISIS DIMENSIONAL Y LA TEORÍA DE SEMEJANZA

La utilización de la semejanza dinámica para el diseño de motores Stirling consiste esencialmente en aplicar un cambio de escala a un prototipo en un punto de funcionamiento conocido, para obtener un modelo con un comportamiento satisfactorio en otro punto de funcionamiento.

La importancia del análisis dimensional en la aplicación al estudio del motor Stirling parece haber sido percibida por primera vez por Finkelstein[20], quien formuló un análisis del ciclo en términos de parámetros adimensionales del funcionamiento, en un trabajo que ha llegado a ser un 'clásico'.

Por otra parte, parece que fue Gedeon[33] quien primero concibió explícitamente la semejanza como herramienta de diseño. Este autor supone que el modelo y el prototipo tienen la misma configuración geométrica, el mismo desfase entre desplazador y pistón e igual relación entre carreras de ambos, el mismo rango de temperaturas de funcionamiento e idénticos fluido de trabajo y material del regenerador. A partir de las variables de escala que selecciona como relevantes en el funcionamiento, Gedeon deduce grupos de variables que garantizan la semejanza siempre que se mantengan iguales en el proceso de escala. Sin embargo, en contraste con el teorema Pi de Buckingham, no todos estos grupos de variables son adimensionales, y su número es mayor que el número de variables de escala. Por tanto, el tratamiento de Gedeon no tiene tanta aplicación ni es tan simple como podría ser.

Más recientemente, se llevó a cabo un análisis a escala en micromáquinas por Nakajima *et al.*[34], en el que suponen que la presión, temperatura, velocidad del motor, gas de

trabajo y materiales de los componentes permanecen invariables. No obstante, el enfoque de la semejanza no está tampoco explícito en esta publicación.

En los tres últimos años, como consecuencia de las publicaciones de Organ[35,36,37,38], el empleo de las técnicas de semejanza dinámica en el diseño ha adquirido cierta importancia. Por ejemplo, el enfoque de la semejanza ha sido corroborado por Olson y Swift[39] en el funcionamiento de la máquina termoacústica. Estos autores presentaron medidas experimentales para demostrar las predicciones de la semejanza y discutieron las implicaciones de ésta en el proceso de escala.

Prieto[40,41] ha discutido algunos conceptos fundamentales de los trabajos de Organ, y comentado la concordancia de tales trabajos con algunos de los estudios desarrollados en el seno del Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional en la Universidad Politécnica de Madrid[14,42,43], sugiriendo el uso de una base dimensional con discriminación espacial como alternativa para el análisis.

1.8 REFERENCIAS

[1] **Stirling, R.** Improvements for diminishing the consumption of fuel, and in particular an engine capable of being applied to the moving machinery on a principle entirely new, British Patent No. 4081 (1816)

[2] **Reader, G.** The engineering heritage of the Stirlings, *Proc 7th ICSC*, 95001, pp.29-32, Tokyo (1995)

[3] **Kolin, I.** Stirling motor: history, theory, practice, *Zagreb Univ. Publ. Ltd.*, Dubrovnik (1991)

[4] **Ross, A.** *Stirling cycle engines*, Solar engines, Phoenix, Arizona (1977)

[5] **Stirling, R.** and **Stirling, J.** British patent No.5456 (1827)

[6] **Stirling, R.** and **Stirling, J.** British patent No.8652 (1840)

[7] **Hargreaves, C. M.** *The Philips Stirling engine*, Elsevier (1991)

[8] **Babcock, G. H.** Substitutes for steam, *Trans. ASME*, VII, pp.680-741 (1885)

[9] **Ringbom, O.** Hot air engine, U. S. Patent 856,102, June 4 (1907)

[10] **Senft, J. R.** *Ringbom Stirling engines*, Oxford University Press, New York (1993)

[11] **Walker, G.** and **Senft, J. R.** *Free piston Stirling engines*, Springer-Verlag, Berlin (1985)

[12] **Schmidt, G.** Theorie der Lehmann'schen calorischen Maschine, *Zeitschrift des Vereins Deustcher Ingenieure* **XV**(2) Jan., pp.1-12, Feb., pp.98-112 (1871)

[13] **Rinia, H.** and **du Pré, F. K.** Air engines, *Philips Tech Rev,* **8**(5), pp.129-160 (1946)

[14] **Prieto, J. I.** y **Díaz, R.** Relaciones adimensionales para el estudio analítico y experimental del motor Stirling, *Anuario Científico del GTAD*, Madrid, pp.95-107 (1990)

[15] **Prieto, J. I.** *Funcionamiento del motor Stirling y aplicaciones navales*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo (1990)

[16] **Prieto, J. I.** and **Díaz, R.** Isothermal simulation with decoupled losses for kinematic Stirling engine design, *JSME Int J*, **36**(4), pp.697-710 (1993)

[17] **Finkelstein, T.** Specific performance of Stirling engines, *Proc. 3rd Conf. on Perf. of High Temperature Systems* (De. G. S. Bahn) II, Pasadena, California, Dec. (1964), Gordon and Breach, New York (1969)

[18] **Creswick, F. A.** Thermal design of Stirling cycle machines, *Proc. SAE Int. Automotive Engineering Cong.*, paper 949C, Detroit, Michigan (1965)

[19] **Walker, G.** *Stirling engines*, Clarendon, Oxford (1980)

[20] **Finkelstein, T.** Generalized thermodynamic analysis of Stirling engines, *Proc. SAE Winter Annual Meeting*, paper 118B, Detroit (1960)

[21] **Finkelstein, T.** Cyclic processes in closed regenerative gas machines analysed by digital computer simulating a differential analyser, *ASME Summer Annual Meeting*, paper 61-SA-21, Los Angeles (1961)

[22] **Finkelstein, T.** Simulation of a regenerative reciprocating machine on an analogue computer, *Proc. SAE Int. Automotive Engeneering Cong.*, paper 949F, Detroit (1965)

[23] **Finkelstein, T., Walker, G.** and **Joshi, T.** Design optimization of Stirling cycle cryogenic cooling engines by digital simulation, *Criogenic Engineering Conf.*, paper K4 (1970)

[24] **Kirkley, D. W.** A thermodynamic analysis of the Stirling cycle and a comparison with experiment, *Proc. SAE Int Automotive Engineering Cong.*, paper 949B, Detroit (1965)

[25] **Schock, A.** Stirling engine nodal analysis program, *J. Energy*, **2**(6), pp.354-362 (1978)

[26] **Heames, T. J., Uherka, D. J., Zabel, J. C.** and **Daley, J. G.** Stirling engine thermodynamic analysis- a user's guide to SEAM1, *Argonne National Laboratory*, report ANL-82-59, Argonne, Illinois (1982)

[27] **Tew, R., Jeffries, K.** and **Miao, D. A.** A Stirling engine computer model for performance calculations, *US DOE/NASA*, report TM-78884 (1978)

[28] **Urieli, I.** A computer simulation of Stirling cycle machines, PhD dissertation, University of the Witwatersrand (1977)

[29] **Organ, A. J.** Gas dynamics of Stirling cycle machines, *IMechE Conf. Stirling engines, Progress Towards Reality*, Univ. of Reading (1982)

[30] **Organ, A. J.** Gas dynamics of the temperature-determined Stirling cycle, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **23**(4), pp.207-215 (1982)

[31] **Rispoli, F.** The λ-scheme applied to Stirling engines, *Proc. 20 Intersociety Energy Conv. Engineering Conf.*, paper 859325, pp.3301-3306 (1985)

[32] **Ames, W.** Non-linear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York (1965)

[33] **Gedeon, D.** Scaling rules for Stirling engines, *Proc. 16th IECEC*, paper 819796, pp.1929-1935, Atlanta (1981)

[34] **Nakajima, N., Ogawa, K.** and **Fujimasa, I.** Study on microengines: miniatirizing Stirling engines for actuators, *Sensors and Actuators*, **20**, pp.75-82 (1982)

[35] **Organ, A. J.** Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **205** (C6), pp.421-430 (1991)

[36] **Organ, A. J.** *Thermodynamics and gas dynamics of the Stirling cycle machine*, Cambridge University Press (1992)

[37] **Organ, A. J.** A tumb-nail sketch of the gas processes in the Stirling cycle machine, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206** (C4), pp.239-248 (1992)

[38] **Organ, A. J.** and **Finkelstein, T.** Stirling engine thermodynamic design—the missing link, *Proc. 28th IECEC*, 93492, pp.2719-2724 (1993)

[39] **Olson, J. R.** and **Swift, G. W.** Similitude in thermoacoustics, *report LA-UR-93-2840, Los Alamos National Laboratory*, Los Alamos, New Mexico (1993)

[40] **Prieto, J. I.** Comentarios al artículo de A. J. Organ titulado 'Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer', *Anuario Científico del GTAD*, Madrid, pp.11-14 (1992)

[41] **Prieto, J. I.** Discussion on Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206** (C3), pp.219-220 (1992)

[42] **Prieto, J. I., Díaz, R.** y **González, M. A.** Perspectiva desde el Análisis dimensional del modelo de gas ideal con procesos cuasiestáticos como origen del estudio del motor Stirling, *Congreso Julio Palacios y la Física de su tiempo*, Maliaño, Cantabria (1991)

[43] **Prieto, J. I., Díaz, R.** y **González, M. A.** Orientación del Análisis Dimensional para el estudio del motor Stirling cinemático a niveles prácticos de rpm mediante simulación isoterma y pérdidas desacopladas, *Congreso Julio Palacios y la Física de su tiempo*, Maliaño, Cantabria (1991)

2. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y DEL ACCIONAMIENTO MECÁNICO

2.1 ACCIONAMIENTOS CINEMÁTICOS DE USO FRECUENTE

Para cada tipo de máquina Stirling cinemática, los parámetros del mecanismo de accionamiento determinan las ecuaciones de volúmenes de las que depende su funcionamiento termodinámico y, en particular, la potencia indicada. Tales parámetros deben ser considerados cuando se quiere optimizar cada tipo de máquina, o bien cuando se pretende extrapolar los resultados de un tipo de máquina a otra siguiendo las leyes de semejanza del Análisis Dimensional.

A continuación, se analizarán los accionamientos más usuales en este tipo de máquinas: el *biela-manivela* y el *rómbico*.

2.1.1 ACCIONAMIENTO BIELA-MANIVELA

Aunque el mecanismo biela-manivela más frecuente es el que tiene el centro del cigüeñal en la recta sobre la que se desplaza la cabeza de biela, se estudiará el caso general, en el que se supone que el centro del cigüeñal se encuentra a una cierta distancia del eje del cilindro. Esta distancia recibe el nombre de *excentricidad*, y el mecanismo de accionamiento el de *biela-manivela excéntrico* (Fig. 2.1).

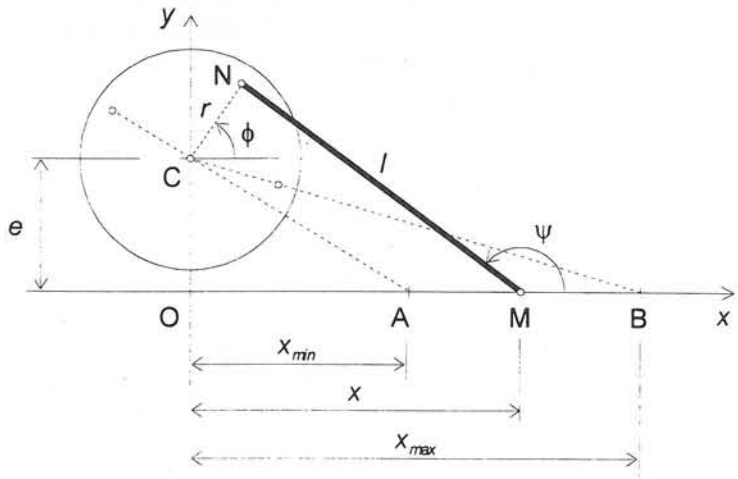


Fig. 2.1 Accionamiento biela-manivela excéntrico

Para obtener la ecuación cinemática de la cabeza de biela M se consideran unos ejes cartesianos tal como se muestra en la mencionada figura: el eje x se hace coincidir con la recta sobre la que se desplaza la cabeza de biela, y el eje y con la perpendicular trazada por el centro C del cigüeñal. En el eje x se considera como positivo el sentido desde el punto O de intersección de ambos ejes (origen de coordenadas) hacia el lado donde tiene lugar el movimiento de M, mientras que el sentido positivo en el eje y se obtiene haciendo girar el eje x en sentido antihorario. Todas las magnitudes angulares se considerarán positivas cuando tengan sentido antihorario.

Si se llama r al radio de manivela, l a la longitud de biela y e a la excentricidad, la posición de la cabeza de biela M, en función del ángulo de giro ϕ del cigüeñal, vendrá dada por:

$$x = r\cos\phi + l\cos(\pi - \psi) = r\cos\phi - l\cos\psi \tag{2.1}$$

De la Fig. 2.1 se deduce:

$$e + r\,\mathrm{sen}\,\phi = l\,\mathrm{sen}(\pi - \psi) = l\,\mathrm{sen}\,\psi$$

de donde se obtiene:

$$l\cos\psi = -\sqrt{l^2 - l^2\,\mathrm{sen}^2\,\psi} = -\sqrt{l^2 - (e + r\,\mathrm{sen}\,\phi)^2}$$

Sustituyendo en (2.1) se obtiene la ecuación cinemática del movimiento de la cabeza de biela:

$$x(\phi) = r\cos\phi + \sqrt{l^2 - (e + r\,\mathrm{sen}\,\phi)} = r\cos\phi + l\sqrt{1 - \left(\frac{e}{l} + \frac{r}{l}\mathrm{sen}\,\phi\right)^2} \tag{2.2}$$

La carrera de la cabeza de biela será:

$$S = x_{max} - x_{min} = x_B - x_A = \sqrt{(l+r)^2 - e^2} - \sqrt{(l-r)^2 - e^2} \tag{2.3}$$

El accionamiento biela-manivela más usual, con el centro del cigüeñal en la recta sobre la que se desplaza la cabeza de biela (eje x), es un caso particular del anterior con excentricidad nula ($e = 0$). La ecuación cinemática de M y la carrera serán, pues:

$$x(\phi) = r\cos\phi + \sqrt{l^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi} = r\cos\phi + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\mathrm{sen}\,\phi\right)^2} \tag{2.4}$$

$$S = 2r \tag{2.5}$$

Si, además de ser $e = 0$, la longitud de biela es mucho mayor que el radio de manivela ($l >> r$), el accionamiento se reduce al *armónico*, y la expresión de la ecuación cinemática del movimiento es:

$$x(\phi) = l + r\cos\phi \tag{2.6}$$

A la vista de estas expresiones, los parámetros a tener en cuenta en el accionamiento biela-manivela son el *radio de manivela r*, la *longitud de biela l* y la *excentricidad e* (sólo los dos primeros en el biela-manivela más usual). En caso de que tanto el pistón como el desplazador estén accionados por un mecanismo biela-manivela, debe añadirse el *ángulo de desfase entre pistones*, sin el cual no sería posible obtener un trabajo termodinámico en un motor Stirling con cualquier tipo de configuración.

2.1.2 ACCIONAMIENTO RÓMBICO

El accionamiento rómbico fue ideado por Meijer[1] en 1953, facilitando el camino para resolver los problemas de fugas que hasta entonces presentaban los motores desarrollados por Philips. Este mecanismo, que llegó a estar protegido bajo patentes en más de quince países, tiene sus antecedentes en el mecanismo de "pistones opuestos" (1898) de Lanchester[2] y en el accionamiento simétrico de la máquina de "cilindros gemelos" ideada por Lucas[3], usada en los coches construidos por Dodson alrededor de 1908[4], así como en el accionamiento patentado en 1943 por Bird[5].

La Fig. 2.2 muestra un esquema del accionamiento rómbico. Dos cigüeñales acoplados mediante engranajes están situados simétricamente a cada lado del eje central de la máquina. El pistón de trabajo está conectado mediante un vástago a una cruceta, la cual está unida a su vez por sus dos extremos (M_1 y M'_1) a los dos cigüeñales mediante bielas. El desplazador es accionado por un dispositivo similar: está unido mediante un vástago a una segunda cruceta, cuyos extremos (M_2 y M'_2) están conectados mediante bielas a ambos cigüeñales.

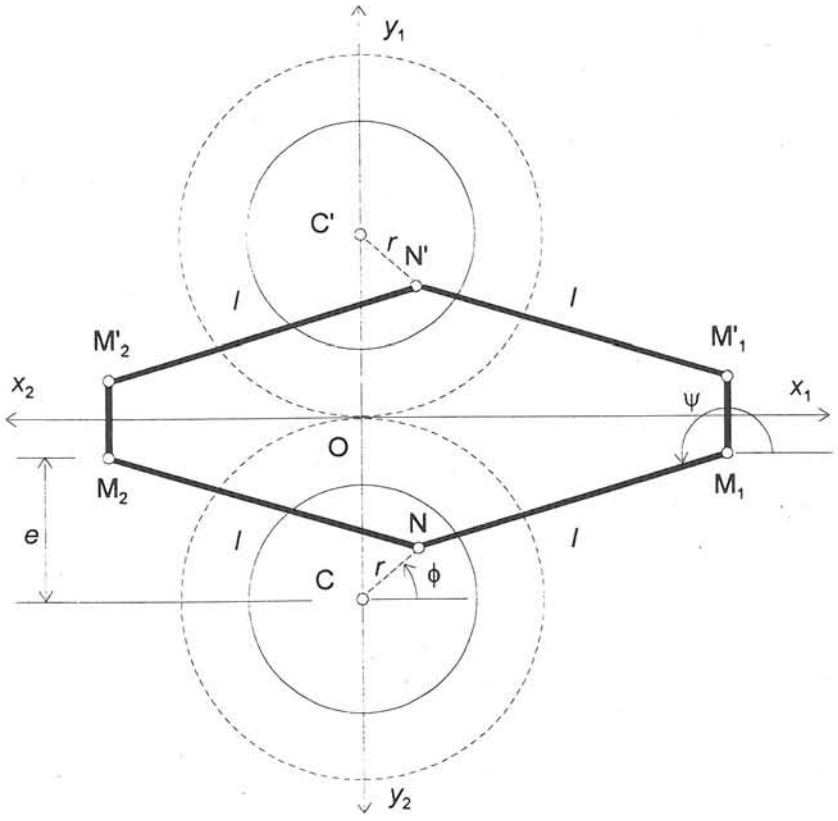


Fig. 2.2 Accionamiento rómbico

Aunque es posible una forma más general, e incluso cabe plantearse si podría presentar ventajas desde el punto de vista termodinámico en el sentido de aumentar el trabajo del ciclo, el caso más usual es el *simétrico*, en el cual las bielas y manivelas de cada cigüeñal tienen la misma longitud; esto hace que, si no se tienen en cuenta las longitudes de las crucetas (en principio podrían ser nulas), los dos pares de bielas formen un rombo, de donde deriva el nombre del accionamiento. Los engranajes aseguran la simetría exacta del sistema en todo momento, con las consiguientes ventajas desde el punto de vista de los esfuerzos laterales en los cilindros y del equilibrado dinámico[6], lo que fue considerado como una innovación revolucionaria de este mecanismo.

Para obtener la ecuación cinemática del movimiento de cada cabeza de biela (M_1 y M_2), se utilizará, en cada caso, un sistema de ejes cartesianos de acuerdo con el criterio establecido en el apartado anterior. Las ecuaciones cinemáticas de las cabezas de biela, en función del ángulo de giro ϕ del cigüeñal inferior, obtenidas de forma análoga al del accionamiento biela-manivela excéntrico, son:

$$x_1(\phi) = r\cos\phi + \sqrt{l^2 - (r\,\mathrm{sen}\,\phi - e)^2} = r\cos\phi + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\mathrm{sen}\,\phi - \frac{e}{l}\right)^2} \tag{2.7}$$

$$x_2(\phi) = r\cos\phi - \sqrt{l^2 - (r\,\mathrm{sen}\,\phi - e)^2} = r\cos\phi - l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\mathrm{sen}\,\phi - \frac{e}{l}\right)^2} \tag{2.8}$$

Las carreras de ambos pistones son iguales y coinciden con la carrera en el accionamiento biela-manivela excéntrico, es decir:

$$S_1 = S_2 = \sqrt{(l+r)^2 - e^2} - \sqrt{(l-r)^2 - e^2}$$

Por tanto, los parámetros característicos del accionamiento rómbico simétrico serán el *radio de manivela r*, la *longitud de biela l* y la *excentricidad e*. No es necesario añadir ningún parámetro angular, pues puede comprobarse que en este mecanismo se obtiene un desfase entre pistones de forma distinta que en el biela-manivela, como se resaltará más adelante.

2.2 ACCIONAMIENTO RÓMBICO GENERALIZADO

Las diferentes configuraciones básicas de motores Stirling (*alpha*, *beta*, *gamma*) añaden a las variables cinemáticas particularidades geométricas que también influyen en el comportamiento termodinámico del motor.

En esencia, tales particularidades son parámetros angulares, conceptualmente diversos, que serán denominados *ángulo de desfase extrínseco*, *ángulo de desfase intrínseco* y *ángulo entre ejes de pistones*.

Como se verá, estos nuevos conceptos permiten definir el *ángulo de desfase entre pistones*, término citado someramente en párrafos anteriores, pero aún no analizado con precisión.

Además, tanto las características cinemáticas como las geométricas de las configuraciones, pueden integrarse mediante ecuaciones cinemáticas unificadas correspondientes al mecanismo que se denominará *rómbico generalizado*[7,8].

2.2.1 PARÁMETROS ANGULARES CARACTERÍSTICOS

Si se considera un mecanismo de accionamiento rómbico (en general, no simétrico), el movimiento de cada pistón está definido por los valores del radio de manivela r_i, la longitud de la biela l_i y la excentricidad e_i. En algunos casos, entre la cabeza de biela y el pistón, existe un vástago, dando lugar a una traslación de ambos extremos A_i y B_i de la trayectoria de la cabeza de biela M_i, lo cual no modifica la carrera ni otras características que puedan ser influyentes desde el punto de vista termodinámico.

Para obtener la ecuación cinemática de la cabeza de biela M_i, se considerarán unos ejes cartesianos tal como se indicó en la Sección 2.1 y se muestran en la Fig. 2.3, con los criterios de signos allí mencionados. Se considerará positiva la excentricidad e_i cuando el centro C del cigüeñal esté situado en el semieje positivo de y_i y negativa en caso contrario.

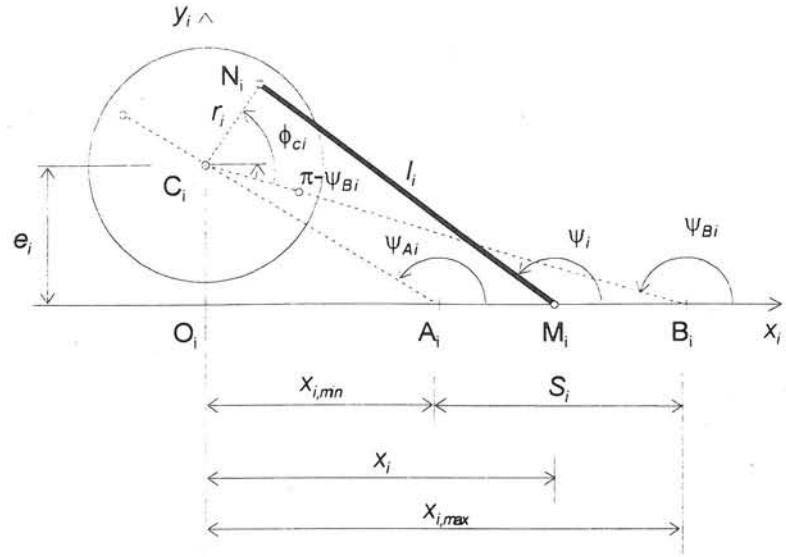


Fig. 2.3 Mecanismo de accionamiento rómbico generalizado

2.2.1.1 Angulo canónico del volante.

Cuando la cabeza de biela M_i está en el extremo B_i de su trayectoria, la biela y el radio de manivela correspondiente al punto donde se articula están alineados. Puede utilizarse esta posición como origen para las medidas del ángulo del volante. Al ángulo ϕ_{ci} medido con respecto a dicha referencia se le denominará *ángulo canónico*. Por otra parte, la biela define con el eje x_i (trayectoria de M_i, que coincide con el eje del pistón o es paralela al mismo) el ángulo ψ_i, que está en correspondencia biunívoca con el denominado ángulo canónico, ya que

$$l_i \operatorname{sen}(\pi - \psi_i) = e_i + r_i \operatorname{sen}\left(\phi_{ci} - (\pi - \psi_{Bi})\right) \tag{2.9}$$

Por lo que se refiere a los valores extremos de ψ_i (correspondientes a los puntos extremos A_i y B_i de la trayectoria de M_i) pueden obtenerse de las siguientes ecuaciones:

$$\psi_{Ai} = \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{e_i}{l_i - r_i}\right) \tag{2.10}$$

$$\psi_{Bi} = \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{e_i}{l_i + r_i}\right) \tag{2.11}$$

que, en variables adimensionales, se convierten en:

$$\psi_{Ai} = \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i - 1}\right) \tag{2.12}$$

$$\psi_{Bi} = \pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i + 1}\right) \tag{2.13}$$

donde λ_i representa la relación entre la longitud de la biela y el radio de manivela, y ε_i la relación entre la excentricidad y el propio radio de manivela. Es decir:

$$\lambda_i = l_i / r_i \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_i = e_i / r_i \tag{2.15}$$

2.2.1.2 Angulo de desfase extrínseco.

El mecanismo de accionamiento puede ser diseñado de modo que las bielas de cada pistón estén articuladas a distintos puntos N_1 y N_2 del volante. Así puede conseguirse un desfase entre pistones aún cuando satisfagan idénticas ecuaciones cinemáticas con referencia a los respectivos ángulos canónicos. El ángulo α_e definido por los radios que unen los puntos donde se articulan las bielas al volante (N_1 y N_2) con el centro C del volante será llamado *ángulo de desfase extrínseco*. Este ángulo se considerará positivo cuando el pistón 2 está adelantado respecto al pistón 1 (como se muestra en la Fig. 2.4). Si los pistones tienen diferentes volantes (por ejemplo, unidos mediante correas de transmisión), α_e deberá medirse después de que los volantes sean trasladados imaginariamente a un eje común sobre el que giren en el mismo sentido.

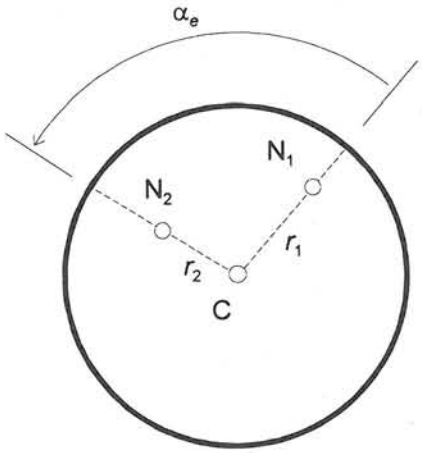


Fig. 2.4 Angulo de desfase extrínseco

2.2.1.3 Angulo entre ejes de pistones.

En algunos tipos básicos de máquinas Stirling cinemáticas los ejes de los pistones o cilindros forman un cierto ángulo β. Como se muestra en la Fig. 2.5, este ángulo se medirá entre los respectivos semiejes positivos Ox_1 y Ox_2.

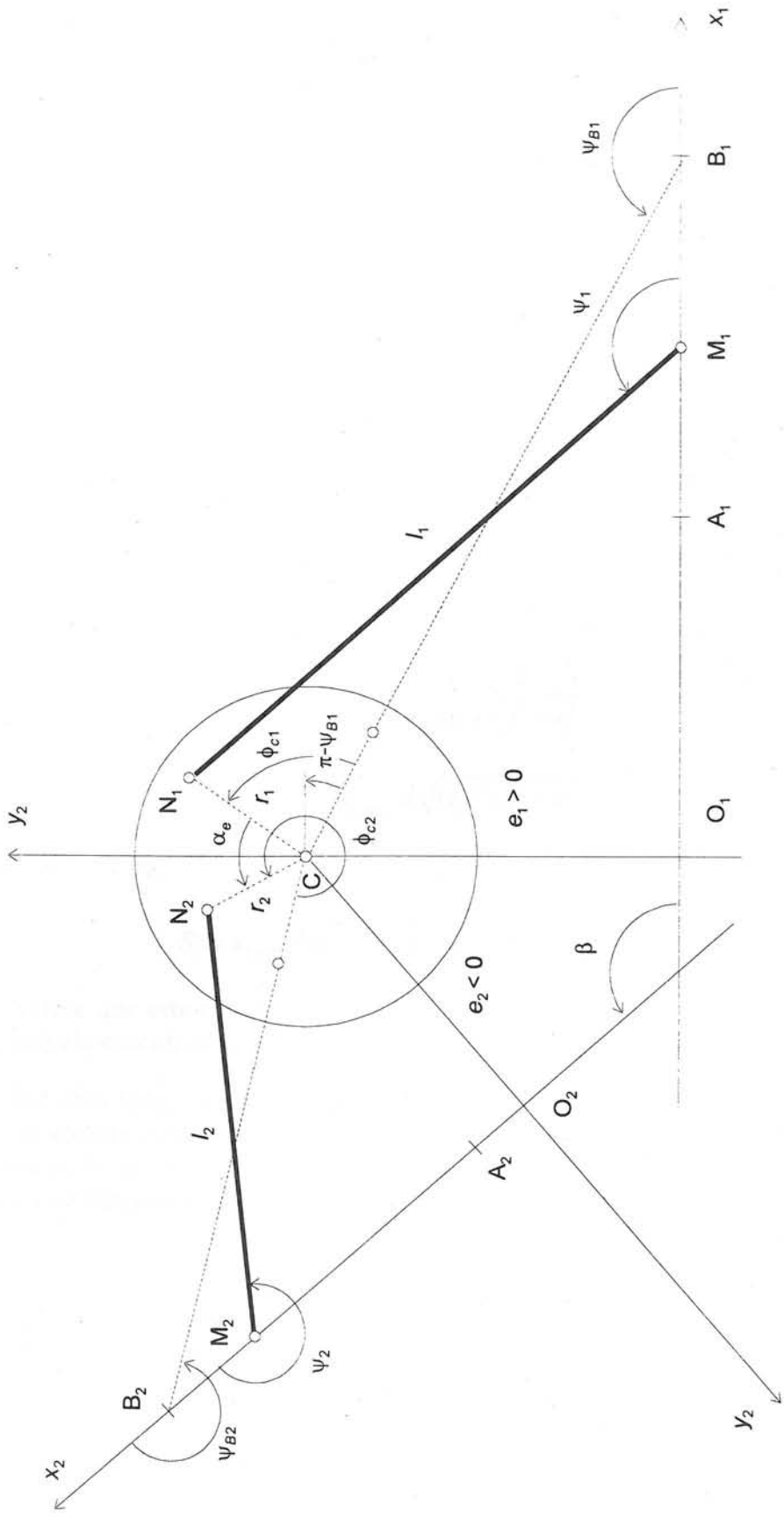


Fig. 2.5 Angulo entre ejes de pistones

2.2.2 ECUACIONES CINEMÁTICAS CARACTERISTÍCAS

Las ecuaciones cinemáticas del movimiento de las cabezas de biela pueden ser referidas a los respectivos ángulos canónicos. Así, en general, para obtener la ecuación de M_i, a partir de la Fig. 2.3 se tiene:

$$x_i = l_i \cos(\pi - \psi_i) + r_i \cos\left(\phi_{ci} - (\pi - \psi_{Bi})\right)$$

Eliminando ψ_i, a partir de la Ec. (2.9), resulta:

$$x_i = \sqrt{l_i^2 - \left[e_i + r_i \operatorname{sen}\left(\phi_{ci} - (\pi - \psi_{Bi})\right)\right]^2} + r_i \cos\left(\phi_{ci} - (\pi - \psi_{Bi})\right)$$

es decir:

$$x_i(\phi_{ci}) = \sqrt{l_i^2 - \left(e_i - r_i \operatorname{sen}(\phi_{ci} + \psi_{Bi})\right)^2} - r_i \cos(\phi_{ci} + \psi_{Bi}) \tag{2.16}$$

Los valores de x_i correspondientes a las posiciones extremas se obtienen haciendo $\phi_{ci} = 0$ y $\phi_{ci} = \pi + \psi_{Ai} - \psi_{Bi}$ en la Ec. (2.16), como puede deducirse de la Fig. 2.3. Los valores de ψ_{Ai} y ψ_{Bi} vienen dados por las expresiones (2.10) y (2.11). Así, se obtiene, respectivamente:

$$x_{i,max} = \sqrt{(l_i + r_i)^2 - e_i^2}$$

$$x_{i,min} = \sqrt{(l_i - r_i)^2 - e_i^2}$$

y la carrera de M_i es:

$$S_i = x_{i,max} - x_{i,min} = \sqrt{(l_i + r_i)^2 - e_i^2} - \sqrt{(l_i - r_i)^2 - e_i^2} \tag{2.15}$$

Nótese que este resultado está de acuerdo con la Ec. (2.3), válida para el mecanismo biela-manivela excéntrico y para el rómbico convencional.

Por otro lado, desde un punto de vista práctico, es conveniente emplear un único ángulo de volante como referencia para definir las posiciones de los pistones en un instante determinado. Si se toma el ángulo canónico de M_1 como referencia común para ambos pistones, y se denomina θ, se tiene (Fig. 2.5):

$$\phi_{c1} = \theta \tag{2.16}$$

$$\phi_{c2} = \theta + \psi_{B1} - \psi_{B2} - \beta + \alpha_e \tag{2.17}$$

Resultan así las siguientes ecuaciones cinemáticas de M_1 y M_2:

$$x_1(\theta) = \sqrt{l_1^2 - \left(e_1 - r_1 \operatorname{sen}(\theta + \psi_{B1})\right)^2} - r_1 \cos(\theta + \psi_{B1}) \tag{2.18}$$

$$x_2(\theta) = \sqrt{l_2^2 - \left(e_2 - r_2 \operatorname{sen}(\theta + \psi_{B1} - \beta + \alpha_e)\right)^2} - r_2 \cos(\theta + \psi_{B1} - \beta + \alpha_e) \tag{2.19}$$

A la vista de estas expresiones, los parámetros característicos del accionamiento en una máquina Stirling serán los *radios de manivela,* las *longitudes de biela*, las *excentricidades*, el *ángulo de desfase extrínseco* y el *ángulo entre ejes de pistones*.

2.3 INFLUENCIA DE LA CONFIGURACIÓN DEL MOTOR

La ecuación de volumen en cada cilindro está relacionada con la ecuación cinemática de la cabeza de biela correspondiente. Sin embargo, tal como se muestra en la Fig. 2.6, disponiendo de forma adecuada un vástago entre la cabeza de biela M_i y el pistón P_i, puede conseguirse que uno de los extremos de la carrera del pistón, por ejemplo A_i, corresponda al punto muerto superior o al punto muerto inferior. En cada caso, el desplazamiento del pistón que debe considerarse para obtener la correspondiente ecuación de volumen (s_i o s'_i) podrá ser hallado mediante las siguientes ecuaciones:

$$s_i = x_{i,max} - x_i = \sqrt{(l_i + r_i)^2 - e_i^2} - x_i \tag{2.20}$$

$$s'_i = x_i - x_{i,min} = x_i - \sqrt{(l_i - r_i)^2 - e_i^2} = S_i - s_i \tag{2.21}$$

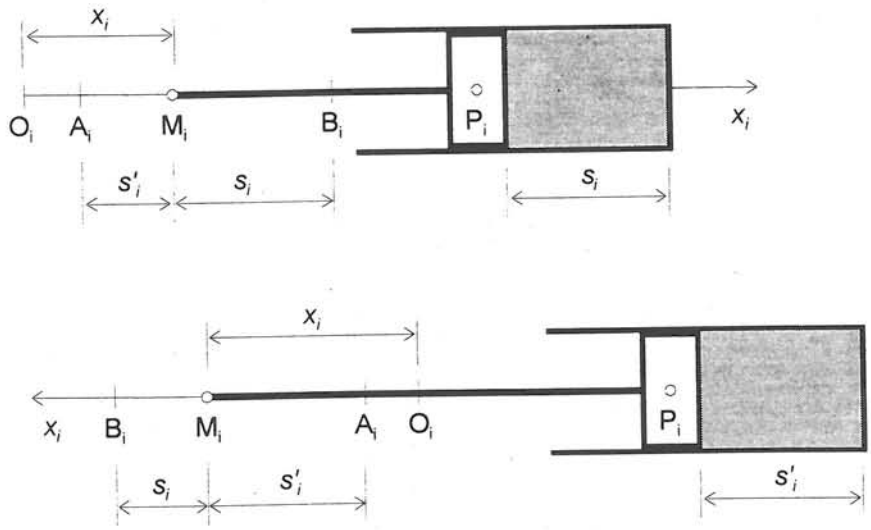


Fig. 2.6 Disposición de vástagos

A la vista de las diversas configuraciones se ha deducido que, mediante el uso de unos coeficientes numéricos (que representaremos con las letras *f*, *g*, *h*, *j* y *k*), todas ellas responden a las siguientes ecuaciones unificadas para los diferentes tipos de máquinas y accionamientos, donde los pistones 1 y 2 se asocian respectivamente al espacio frío y al espacio caliente:

$$s_C = fs_1 + (1-f)s'_1 + ghs_2 + g(1-h)s'_2 - jL \tag{2.22}$$

$$s_E = ks_2 + (1-k)s'_2 \tag{2.23}$$

donde L es el "solape" máximo, que es un valor característico del motor monocilíndrico (motor *beta*). En cada caso, L se calculará haciendo $j = 1$ e imponiendo la condición:

$$s_{C,min} = 0$$

Dependiendo de la configuración de la máquina, los parámetros f, g, h y k tomarán los valores enteros 0 ó 1. En particular, $g = 0$ para el motor de dos cilindros (denominado motor alpha) y $g = 1$ para los tipos *beta* y *gamma* (motor de dos cilindros con desplazador). Por lo que se refiere al parámetro j, para el motor *beta* puede tomar cualquier valor real comprendido entre 0 y 1, dependiendo del grado de solape, mientras que para el resto de motores $j = 0$. Por ejemplo, para el motor *beta* con accionamiento rómbico de la Fig. 2.7, con $f = g = h = 1$, $j = k = 0$, $\alpha_e = 0$ y $\beta = \pi$, se obtiene:

$$s_C = s_1 + s_2$$

$$s_E = s'_2$$

que es el resultado esperado.

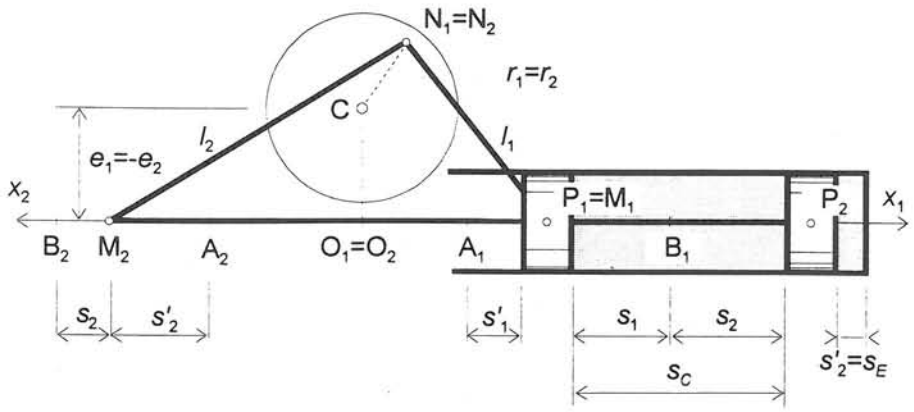


Fig. 2.7 Motor *beta* con accionamiento rómbico

Así pues, tras algunas operaciones se obtienen las siguientes ecuaciones unificadas, que se complementan con las Ec. (2.18) y (2.19):

$$s_C = (1-2f)x_1 + g(1-2h)x_2 + f\sqrt{(l_1+r_1)^2 - e_1^2} + (f-1)\sqrt{(l_1-r_1)^2 - e_1^2} +$$

$$gh\sqrt{(l_2+r_2)^2 - e_2^2} + g(h-1)\sqrt{(l_2-r_2)^2 - e_2^2} - jL \qquad (2.24)$$

$$s_E = (1-2k)x_2 + k\sqrt{(l_2+r_2)^2 - e_2^2} + (k-1)\sqrt{(l_2-r_2)^2 - e_2^2} \qquad (2.25)$$

2.4 ANGULO DE DESFASE TOTAL. ANGULO DE DESFASE INTRÍNSECO

El desfase entre s_C y s_E es un parámetro con un importante significado en el comportamiento termodinámico del motor, pues equivale al desfase entre los volúmenes de barrido de los respectivos espacios frío y caliente, que resultan de multiplicar s_i o s'_i, (según haya o no un vástago entre la cabeza de biela y el pistón correspondiente, y dependiendo de la disposición del mismo, tal como se comentó en la sección 2.3) por el área de la sección transversal del pistón correspondiente ($\pi D_i^2 / 4$, siendo D_i el diámetro de dicho pistón). Tal parámetro se denominará *ángulo de desfase total* α, y se distinguirá entre el ángulo de desfase total entre los valores *máximos* de s_C y s_E (α'), y el correspondiente a los valores *mínimos* de s_C y s_E (α''), es decir:

$$\alpha' = \theta\{s_{C,max}\} - \theta\{s_{E,max}\} \tag{2.26}$$

$$\alpha'' = \theta\{s_{C,min}\} - \theta\{s_{E,min}\} \tag{2.27}$$

Derivando en las Ec. (2.24) y (2.25), los ángulos de volante que corresponden a los valores máximos y mínimos de s_C y s_E pueden ser relacionados con los correspondientes a los valores máximos y mínimos de x_1 y x_2. Así, resulta:

$$\frac{ds_C}{d\theta} = (1-2f)\frac{dx_1}{d\theta} + g(1-2h)\frac{dx_2}{d\theta} \tag{2.28}$$

$$\frac{ds_E}{d\theta} = (1-2k)\frac{dx_2}{d\theta} \tag{2.29}$$

Puesto que ya han sido definidos los ángulos canónicos correspondientes a los valores máximos y mínimos de x_1 y x_2, considerando las Ec. (2.16) y (2.17) puede escribirse:

$$\theta\{x_{1,max}\} = 0 \tag{2.30}$$

$$\theta\{x_{1,min}\} = \pi + \psi_{A1} - \psi_{B1} \tag{2.31}$$

$$\theta\{x_{2,max}\} = -\psi_{B1} + \psi_{B2} + \beta - \alpha_e \tag{2.32}$$

$$\theta\{x_{2,min}\} = \pi - \psi_{B1} + \psi_{A2} + \beta - \alpha_e \tag{2.33}$$

Las Ec. (2.26) a (2.33) permiten obtener α' y α''. Estos ángulos son, en general, diferentes (como se comprueba en los subapartados que siguen) para las distintas configuraciones de las máquinas y para los diversos tipos de accionamiento.

2.4.1 MOTOR ALPHA CON DOBLE ACCIONAMIENTO DE BIELA-MANIVELA.

Un diseño usual del motor *alpha* se obtiene para $f = k = 1$, $g = j = 0$. En este caso, el ángulo de desfase α' entre los valores máximos de s_C y s_E es igual al desfase entre los valores mínimos de x_1 y x_2. Análogamente, el desfase α'' entre valores mínimos de s_C y s_E será igual al desfase entre máximos de x_1 y x_2. Entonces:

$$\alpha' = \psi_{A1} - \psi_{A2} - \beta + \alpha_e \tag{2.34}$$

$$\alpha'' = \psi_{B1} - \psi_{B2} - \beta + \alpha_e \tag{2.35}$$

Se observa que puede existir desfase incluso en los casos en que $\beta = \alpha_e$. Este ángulo de desfase, independiente de β y α_e se denominará, por este motivo, *ángulo de desfase intrínseco*, y se representará por α_i. Dependerá de los parámetros adimensionales λ_1, λ_2, ε_1 y ε_2 (ya definidos), y, en general, será distinto entre máximos y mínimos.

Por tanto, al *ángulo de desfase total* entre pistones contribuyen el ángulo de desfase intrínseco, el ángulo entre ejes de pistones y el ángulo de desfase extrínseco. Es decir:

$$\alpha = \alpha_i - \beta + \alpha_e \tag{2.36}$$

Con el accionamiento de biela-manivela en ambos pistones el ángulo de desfase intrínseco α_i se anula, independientemente del tipo de configuración de la máquina, ya que entonces $e_1 = e_2 = 0$, lo cual corresponde a $\psi_{Ai} = \psi_{Bi} = \pi$. En este caso, el ángulo de desfase total será entonces:

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = -\beta + \alpha_e \tag{2.37}$$

Por ejemplo, un ángulo de desfase $\alpha = \pi/2$ puede ser obtenido con $\beta = 0$ y $\alpha_e = \pi/2$, con $\beta = \pi$ y $\alpha_e = \pi/2$, o con $\beta = 3\pi/2$ y $\alpha_e = 0$, que corresponden a las configuraciones usuales mostradas en la Fig. 2.8.

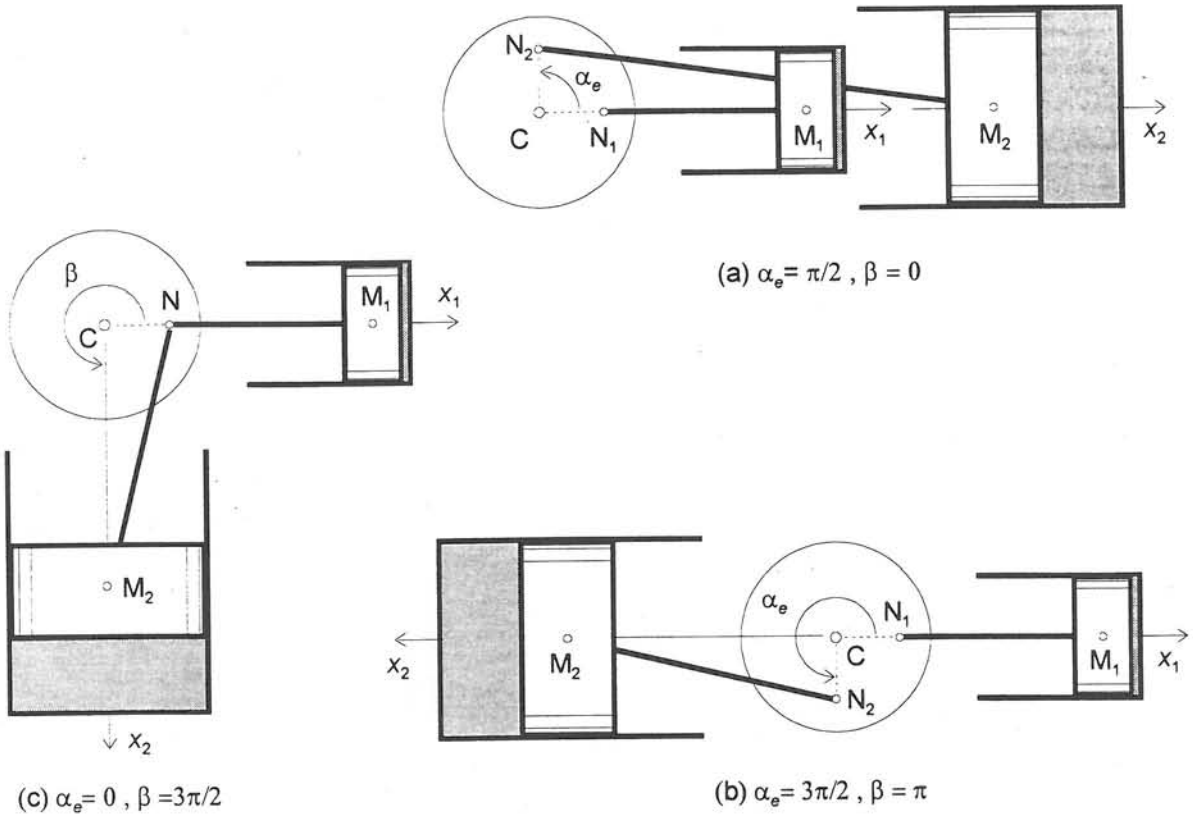


Fig. 2.8 Configuraciones del motor *alpha* con doble biela-manivela correspondientes a $f = k = 1$, $g = j = 0$

2.4.2 MOTOR ALPHA CON ACCIONAMIENTO RÓMBICO.

En el mecanismo de accionamiento rómbico se satisface $\beta = \pi$ y, usualmente, $\alpha_e = 0$. En los casos más generales, con accionamiento rómbico, para calcular el ángulo de desfase total será necesaria la utilización de métodos numéricos No obstante, en el caso particular en que $l_1 = l_2$, $r_1 = r_2$ y $e_1 = -e_2$, puede escribirse, independientemente del tipo de motor:

$$\psi_{A1} = 2\pi - \psi_{A2}$$

$$\psi_{B1} = 2\pi - \psi_{B2}$$

Por tanto, para la configuración típica del motor *alpha* ($f = k = 1$, $g = j = 0$), de la Ec. (2.34) se deduce la siguiente expresión para el desfase entre valores máximos de s_C y s_E:

$$\alpha' = 2\psi_{A1} - 3\pi \tag{2.38}$$

y de la Ec. (2.35) la correspondiente al ángulo de desfase total entre mínimos de s_C y s_E:

$$\alpha'' = 2\psi_{B1} - 3\pi \tag{2.39}$$

debiendo hacerse notar que ambos desfases son diferentes. En la Fig. 2.9(a) se muestra el esquema de la mencionada configuración con accionamiento rómbico de las características indicadas.

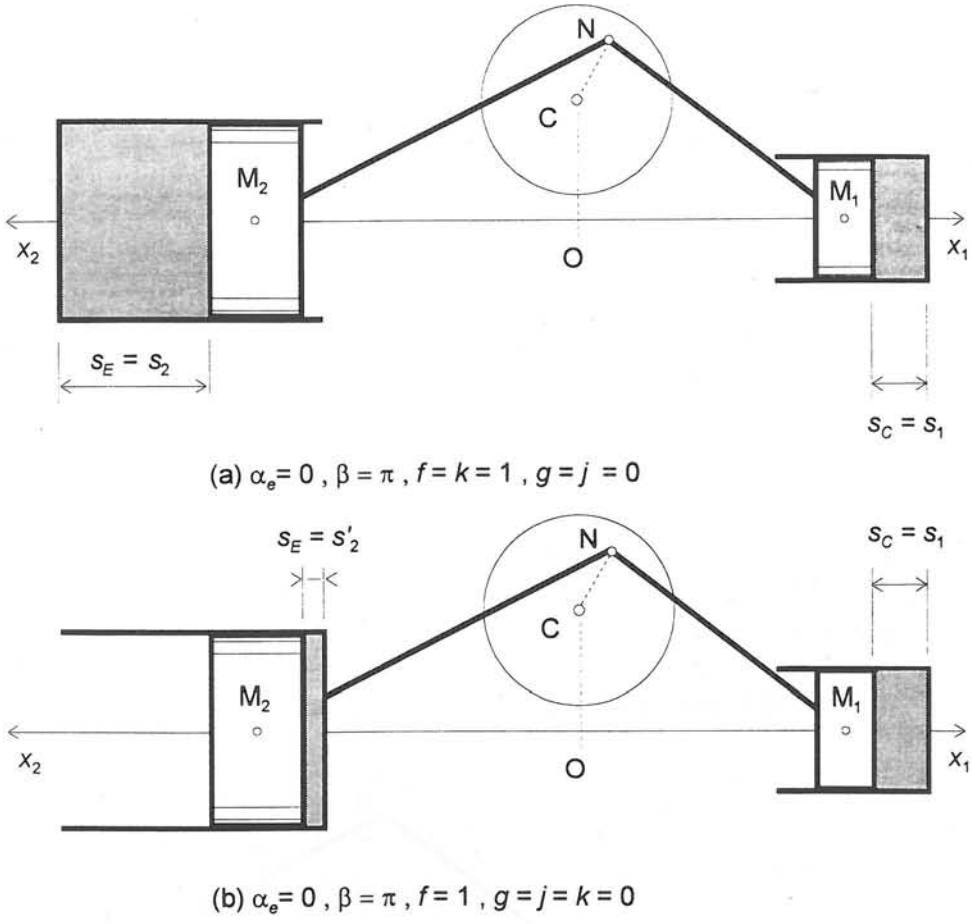


Fig. 2.9 Configuraciones del motor *alpha* con accionamiento rómbico

El accionamiento rómbico también puede ser dispuesto en el motor *alpha* con la configuración $f = 1$, $g = j = k = 0$ (Fig. 2.9(b)). En este caso, α' es igual al desfase entre el mínimo valor de x_1 y el máximo de x_2, mientras que α'' será igual al ángulo de desfase entre el máximo valor de x_1 y el mínimo valor de x_2. Por tanto:

$$\alpha' = \psi_{A1} - \psi_{B2} \tag{2.40}$$

$$\alpha'' = \psi_{B1} - \psi_{A2} \tag{2.41}$$

En el caso sencillo ya comentado en que $l_1 = l_2$, $r_1 = r_2$ y $e_1 = -e_2$, las Ec. (2.40) y (2.41) conducen a:

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \psi_{A1} + \psi_{B1} \tag{2.42}$$

2.4.3 MOTORES BETA Y GAMMA.

Un diseño usual de las máquinas *beta* y *gamma* con mecanismo de accionamiento por biela-manivela en ambos pistones, se obtiene con $\beta = 0, f = g = k = 1$ y $h = 0$. En este caso, de las Ec. (2.28) y (2.29) se deduce que el ángulo de desfase total entre máximos de s_C y s_E coincide con el ángulo de desfase entre el valor máximo de x_2 - x_1 y el mínimo valor de x_2. Asímismo, el desfase entre mínimos valores de s_C y s_E es igual al desfase existente entre el valor mínimo de x_2 - x_1 y el máximo de x_2.

Empleando accionamiento rómbico, es usual la configuración de las máquinas *beta* y *gamma* obtenida con $\beta = \pi, f = g = h = 1$ y $k = 0$. En este caso particular, de las Ec. (2.28) y (2.29) se deduce que el ángulo de desfase entre valores máximos de s_C y s_E coincide con el desfase entre el mínimo valor de $x_1 + x_2$ y el valor máximo de x_2. De manera análoga, el ángulo de desfase entre valores mínimos de s_C y s_E es igual al desfase entre el valor máximo de $x_1 + x_2$ y el mínimo valor de x_2.

En la Fig. 2.10 se muestran los esquemas de las configuraciones mencionadas para el motor *beta*, con ambos accionamientos (doble biela-manivela y rómbico).

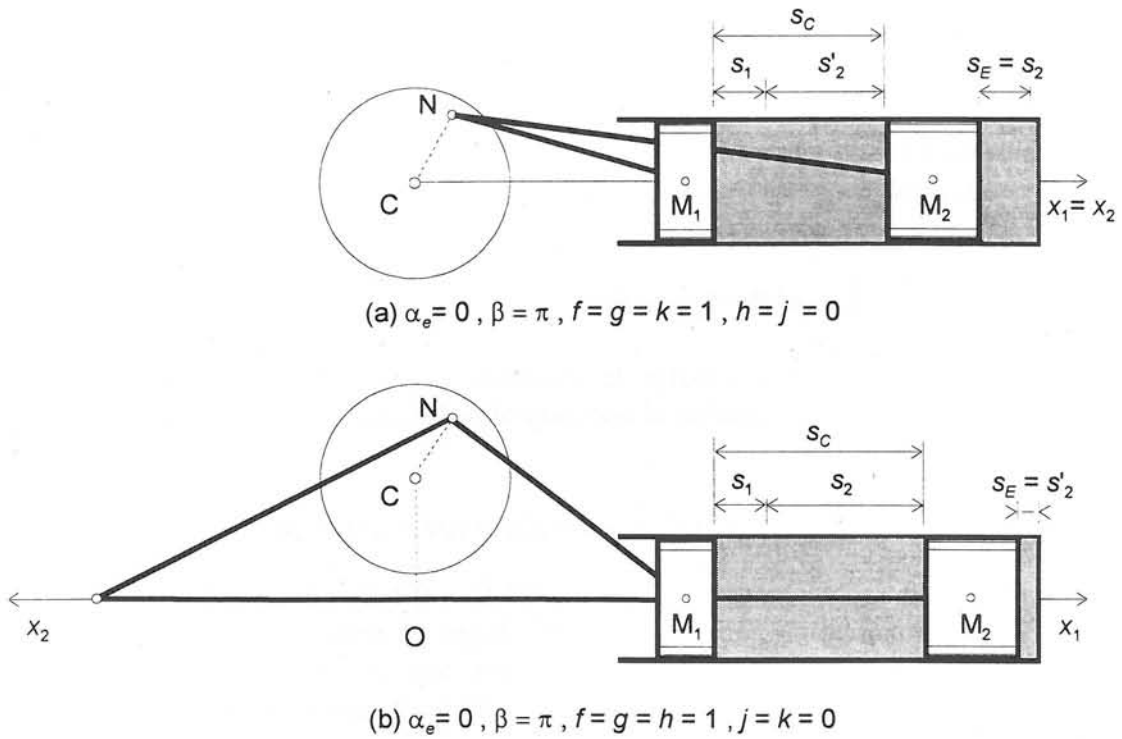


Fig. 2.10 Configuraciones del motor *beta* con accionamientos de doble biela-manivela y rómbico

En general, es necesario analizar los valores máximos y mínimos de $x_1 + x_2$ y x_2 - x_1 por métodos de cálculo numérico. No obstante, si en la configuración con accionamiento rómbico se cumple $l_1 = l_2$, $r_1 = r_2$, $e_1 = -e_2$, y además $e_1 > r_1$ y $\alpha_e = 0$, puede deducirse:

$$\theta\{(x_1 + x_2)_{max}\} = \frac{\pi}{2} - \psi_{B1} \tag{2.43}$$

$$\theta\{(x_1 + x_2)_{min}\} = \frac{3\pi}{2} - \psi_{B1} \tag{2.44}$$

Estas ecuaciones conducen a ángulos de desfase que son del orden de la mitad de los obtenidos para el motor *alpha* con la configuración de la Fig. 2.9(a) a partir de las Ec. (2.38) y (2.39):

$$\alpha' = \psi_{B1} - \frac{3\pi}{2} \tag{2.45}$$

$$\alpha'' = \psi_{A1} - \frac{3\pi}{2} \tag{2.46}$$

2.4.4 EL ESTUDIO DE KAZUMOTO *ET AL.*[9]

Kazumoto *et al.* han analizado la influencia del mecanismo de accionamiento en el funcionamiento termodinámico del motor *beta* con solape máximo, comparando los mecanismos de doble biela-manivela y rómbico, descritos en el subapartado anterior, con un accionamiento mixto formado por biela-manivela en el pistón de trabajo y una leva de aceleración constante en el desplazador.

El objetivo de su artículo tiene, pues, aspectos comunes a los del presente trabajo, y se considera obligado su estudio al encontrarse algunas discrepancias o, al menos, diferentes criterios de análisis.

Para efectuar comparaciones con el ángulo de desfase extrínseco del accionamiento de doble biela-manivela, los autores introducen el concepto de *ángulo de desfase entre pistones* para el accionamiento rómbico, definiéndolo de una forma general como sigue:

$$\alpha_K = \theta\{x_{1,max}\} - \theta\{x_{2,min}\} = \theta\{x_{1,min}\} - \theta\{x_{2,max}\} \tag{2.47}$$

En el caso de accionamiento rómbico, el estudio está limitado a los casos que satisfagan $l_1 = l_2$, $r_1 = r_2$ y $e_1 = -e_2$, de modo que, con la notación utilizada hasta ahora se llega a:

$$\alpha_K = \psi_{A2} - \psi_{B1} = \psi_{B2} - \psi_{A1} = 2\pi - \psi_{A1} - \psi_{B1} \tag{2.48}$$

Se observa que las Ec. (2.47) y (2.48) no corresponden a lo que llamamos ángulo de desfase total entre s_C y s_E, sino al ángulo de desfase entre las posiciones x_1 y x_2 de los pistones, siendo el primero el que presenta mayor interés desde el punto de vista termodinámico, por su relación inmediata con los volúmenes instantáneos v_C y v_E de los espacios frío y caliente.

2.5 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LOS CILINDROS

En cualquier espacio en el que tienen lugar fenómenos termodinámicos, fluidomecánicos o de transferencia de calor, deben considerarse las características geométricas como variables influyentes.

En los cilindros, dado que el volumen instantáneo de barrido es el producto del desplazamiento del pistón s_i por la sección transversal del mismo, $\pi D_i^2/4$, es necesario añadir el *diámetro* D_i o la *cilindrada* V_i al parámetro s_i ya definido con criterios cinemáticos.

Además, a los volúmenes instantáneos de barrido deben añadirse los *volúmenes muertos* para obtener el volumen instantáneo total, que determina la presión para cada espacio del motor a una determinada temperatura:

$$v_C(\theta) = \frac{\pi D_C^2}{4} s_C(\theta) + V_{dcc} \tag{2.49}$$

$$v_E(\theta) = \frac{\pi D_E^2}{4} s_E(\theta) + V_{dce} \tag{2.50}$$

Los fenómenos de mecánica de fluidos y de transferencia de calor que se producen en los espacios muertos de los cilindros suelen despreciarse en las simulaciones del funcionamiento de máquinas Stirling, pues constituyen una pequeña fracción de las pérdidas de potencia indicada. Por ello, no suele ser preciso definir en tres dimensiones la geometría de tales espacios, sino que basta con conocer el volumen muerto de cada uno.

2.6 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LOS INTERCAMBIADORES DE CALOR

2.6.1 CALENTADOR Y ENFRIADOR

En estos espacios es necesario definir la geometría con precisión, ya que no sólo son importantes las influencias termodinámicas de los volúmenes muertos, sino otros fenómenos relativos a las pérdidas de presión y a la transferencia de calor.

Los parámetros que se deben de considerar son el *volumen muerto* y la *longitud* y el *número de conductos*, o cualquier otra combinación equivalente, como, por ejemplo, el *volumen muerto*, el *área transversal total* de los conductos y el *radio hidráulico* de cada uno de ellos, que posibilita la generalización del procedimiento en el caso de conductos de sección no circular.

Así pues, en el calentador se considerarán como variables influyentes V_{dxe}, A_{xe} y r_{he}, y en el enfriador V_{dxc}, A_{xc} y r_{hc}.

2.6.2 REGENERADOR

Como en los anteriores intercambiadores, es preciso considerar el volumen muerto V_{dr}, el área total transversal A_{xr} por la que circula el gas, y el radio hidráulico r_{hr} de los conductos.

Los regeneradores usualmente empleados en máquinas Stirling suelen estar constituidos por mallas de alambre trenzado con geometrías diversas. La Fig. 2.11 muestra los dos tipos más empleados.

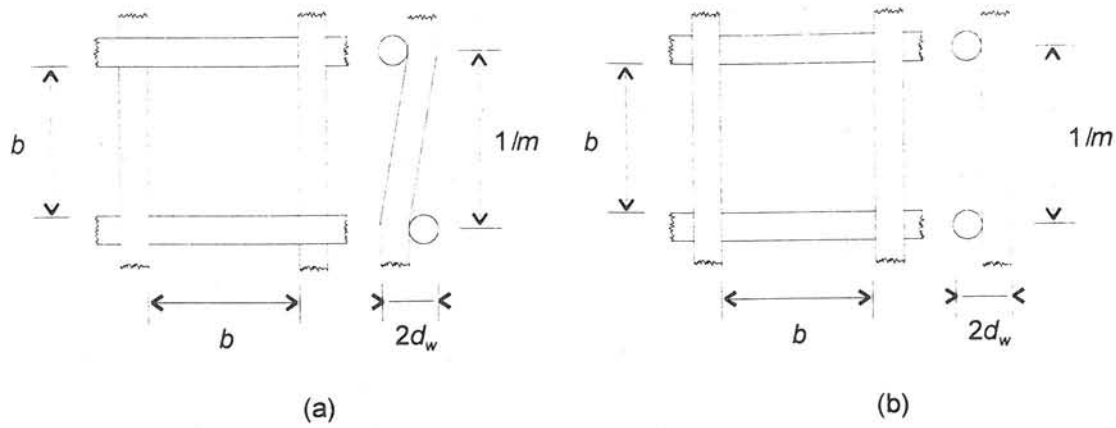


Fig. 2.11 Tipos más usuales de mallas en regeneradores

Desde el punto de vista geométrico, cada tipo de malla queda definido por el *diámetro de alambre*, d_w, y por el *ancho de malla*, b, aunque frecuentemente éste se sustituye por el *número de malla m*, que es más usado comercialmente:

$$\frac{1}{m} = b + d_w \tag{2.51}$$

Sin embargo, el ancho de malla b, y por tanto el número de malla m, están relacionados con el radio hidráulico r_{hr}, por lo que la geometría del regenerador queda definida añadiendo m o d_w a V_{dr}, A_{xr} y r_{hr}. En efecto, el radio hidráulico se define como

$$r_{hr} \equiv \frac{\text{volumen del regenerador ocupado por el fluido}}{\text{superficie mojada por el fluido}}$$

que, para la malla tipo (a) de la Fig. 2.11 se convierte en la expresión

$$r_{hr} \approx \frac{1}{\pi m\sqrt{1+(md_w)^2}} - \frac{d_w}{4} \tag{2.52}$$

y para la malla tipo (b) de la misma figura, en

$$r_{hr} = \frac{1}{\pi m} - \frac{d_w}{4} \tag{2.53}$$

En la práctica, el parámetro que suele añadirse no es m ni d_w, sino la *porosidad volumétrica* Π_V del regenerador, físicamente más interesante, definida como

$$\Pi_V \equiv \frac{\text{volumen del regenerador ocupado por el fluido}}{\text{volumen total del regenerador}}$$

Para la malla tipo (a) de la Fig. 2.11, se obtiene:

$$\Pi_V = 1 - \frac{\pi d_w\sqrt{(b+d_w)^2 + d_w^2}}{4(b+d_w)^2} = 1 - \frac{\pi m d_w}{4}\sqrt{1+(md_w)^2} \tag{2.54}$$

Para la malla tipo (b) de la misma figura:

$$\Pi_V = 1 - \frac{\pi d_w}{4(b + d_w)} = 1 - \frac{\pi m d_w}{4} \tag{2.55}$$

Sustituyendo m en función de Π_V en las expresiones (2.52) y (2.53) del radio hidráulico, se llega a una expresión de éste en función de la porosidad que es común a ambos tipos de malla:

$$r_{hr} = \frac{1}{4} \frac{\Pi_V}{1 - \Pi_V} d_w \tag{2.56}$$

2.7 APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES UNIFICADAS A LA SIMULACIÓN DE CICLOS CUASIESTÁTICOS

Los parámetros considerados en la secciones anteriores son suficientes para realizar simulaciones cuasiestáticas del funcionamiento de cada tipo de motor Stirling. Incluso se puede prescindir de todos los parámetros de los intercambiadores, salvo su volumen muerto, pues, por hipótesis, se excluyen las irreversibilidades térmicas y mecánicas, y de ello se derivan resultados independientes del fluido de trabajo[10].

Los programas elaborados en trabajos que anteceden al presente[11], estaban orientados a cada determinado tipo de motor y accionamiento. Con un programa basado en las ecuaciones cinemáticas unificadas se consigue un ahorro de tiempo en el proceso de simulación y optimización de configuraciones de anteproyecto, y se sistematiza el procedimiento.

Los resultados de la simulación cuasiestática correspondientes a la configuración de la Fig. 2.8(a) se muestran como ejemplo en la Tabla 2.1. Se obtiene una potencia indicada adimensional (cuasiestática) de $\zeta_0 = P_{ind} / (p_m V_E n_s) = 0.384$, con los siguientes parámetros:

$D_E = D_C = 50$ mm

$r_E = r_C = 25$ mm

$l_E = l_C = 125$ mm

$V_E = V_C = 98.2$ cm^3

$V_{dce} = V_{dcc} = 10$ cm^3

$V_{dxe} = V_{dxc} = 30$ cm^3

$V_{dr} = 20$ cm^3

$T_E = 1000$ K

$T_C = 300$ K

Tabla 2.1 Ejemplo de resultados de la simulación cuasiestática

θ	p/p_m	v_E/V_E	v_C/V_E	v_T/V_E	$m_E RT_C/p_m V_E$	$m_C RT_C/p_m V_E$	$MRT_C/p_m V_E$
0.000	1.360	1.060	0.509	1.559	0.432	0.693	1.125
10.000	1.305	1.145	0.518	1.663	0.448	0.677	1.125
20.000	1.233	1.225	0.545	1.770	0.453	0.672	1.125
30.000	1.150	1.297	0.589	1.886	0.448	0.677	1.125
40.000	1.066	1.360	0.647	2.007	0.435	0.690	1.125
50.000	0.986	1.413	0.717	2.130	0.418	0.707	1.125
60.000	0.912	1.455	0.797	2.252	0.398	0.727	1.125
70.000	0.847	1.485	0.883	2.368	0.377	0.748	1.125
80.000	0.791	1.503	0.971	2.475	0.357	0.768	1.125
90.000	0.744	1.509	1.060	2.569	0.337	0.788	1.125
100.000	0.705	1.503	1.145	2.648	0.318	0.807	1.125
110.000	0.674	1.485	1.225	2.710	0.300	0.825	1.125
120.000	0.649	1.455	1.297	2.752	0.283	0.842	1.125
130.000	0.631	1.413	1.360	2.773	0.267	0.858	1.125
140.000	0.618	1.360	1.413	2.773	0.252	0.873	1.125
150.000	0.610	1.297	1.455	2.752	0.237	0.888	1.125
160.000	0.607	1.225	1.485	2.710	0.223	0.902	1.125
170.000	0.609	1.145	1.503	2.648	0.209	0.916	1.125
180.000	0.616	1.060	1.509	2.569	0-196	0.929	1.125
190.000	0.627	0.971	1.503	2.475	0.183	0.942	1.125
200.000	0.643	0.883	1.485	2.368	0.170	0.955	1.125
210.000	0.664	0.797	1.455	2.252	0.159	0.966	1.125
220.000	0.691	0.717	1.413	1.130	0.149	0.976	1.125
230.000	0.724	0.647	1.360	2.007	0.140	0.985	1.125
240.000	0.763	0.589	1.297	1.886	0.135	0.990	1.125
250.000	0.810	0.545	1.225	1.770	0.133	0.992	1.125
260.000	0.865	0.518	1.145	1.663	0.135	0.990	1.125
270.000	0.928	0.509	1.060	1.569	0.142	0.983	1.125
280.000	0.998	0.518	0.971	1.490	0.155	0.970	1.125
290.000	1.075	0.545	0.883	1.428	0.176	0.949	1.125
300.000	1.155	0.589	0.797	1.386	0.204	0.921	1.125
310.000	1.234	0.647	0.717	1.364	0.240	0.885	1.125
320.000	1.305	0.717	0.647	1.364	0.281	0.844	1.125
330.000	1.359	0.797	0.589	1.386	0.325	0.800	1.125
340.000	1.389	0.883	0.545	1.428	0.368	0.757	1.125
350.000	1.389	0.971	0.518	1.490	0.405	0.720	1.125
360.000	1.360	1.060	0.509	1.569	0.432	0.693	1.125

Los resultados de la simulación permiten construir los gráficos de volúmenes, presiones, masas y diagramas indicadores para los espacios frío y caliente, así como para el sistema cerrado o total. La Fig. 2.12 muestra los diagramas de indicador:

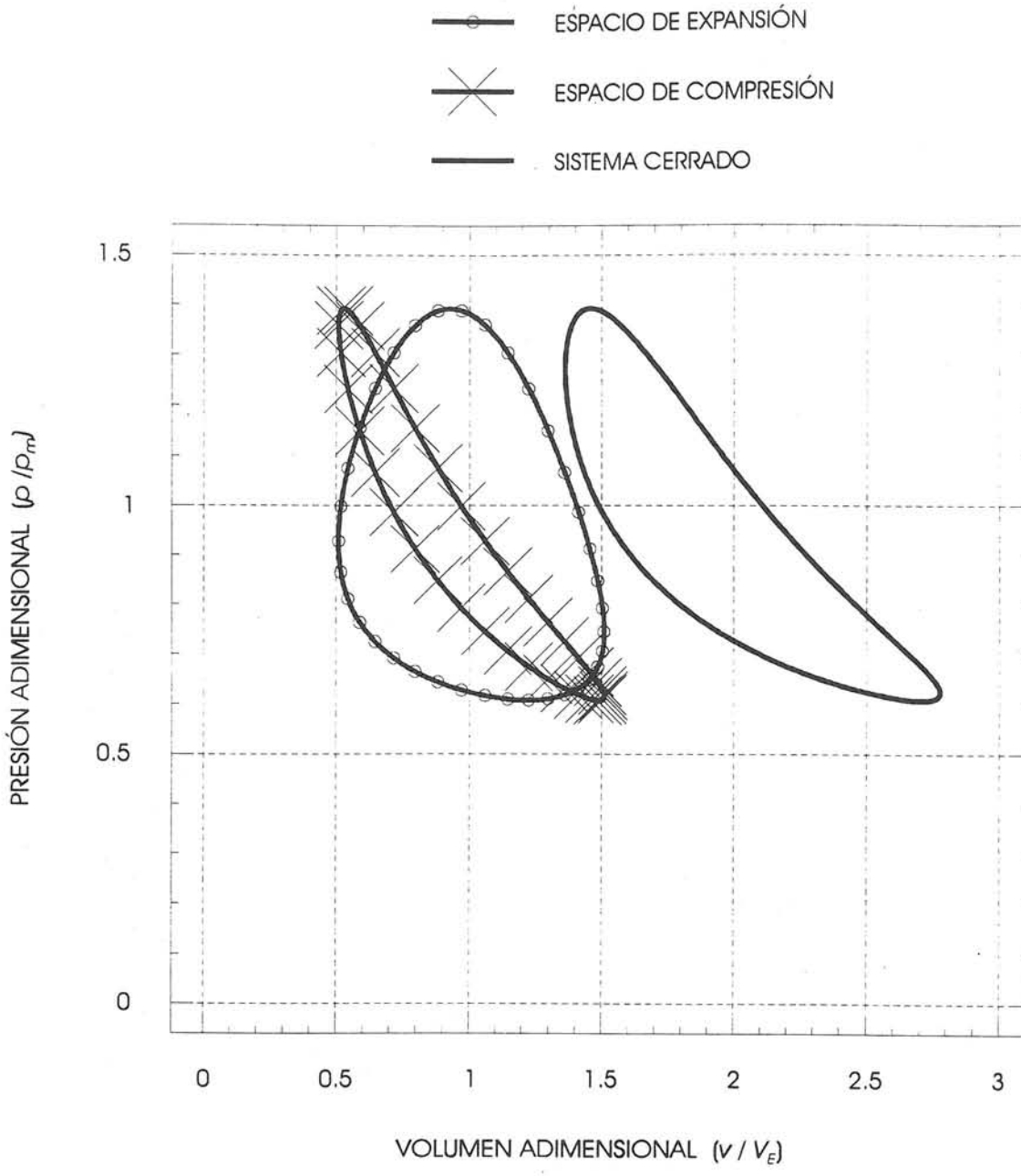


Fig. 2.12 Ejemplo de diagramas indicadores

2.8 REFERENCIAS

[1] **Meijer, R. J.** Improvements in or relating to hot-gas reciprocating engines and heat pumps and refrigerators operating according to the reversed hot-gas engine principle, British Patent 762,731 (1956); Dutch Patent 84033 (1953); French Patent 1,111,462 (1954)

[2] **Lanchester, F. W.** British Patent 10, 836 (1898); *Proc. Instn. Automobile Engrs.*, **8**, pp. 195-271 (1913/14). See also D. C. Field, *Internal combustion engines*, Singer et al. (Editors) (*A History of Technology*, Vol. 5, Fig. 73), Oxford (1958)

[3] **Lanchester, F. W.** *Proc. Instn. Automobile Engrs.*, **8**, p.217 and fig.12 (1913/14)

[4] **Gardiner, R.** *Contact Supplement, David Brown Newsletter*, **12**(1), pp.12-16 (Jan.-March, 1960)

[5] **Bird, J. T.** British Patent 558,115 (1943)

[6] **Hargreaves, C. M.** *The Philips Stirling engine*, Elsevier, Amsterdam (1991)

[7] **Fano, J.** *Ecuaciones homogéneas de potencia para el proyecto y análisis de máquinas de ciclo Stirling y accionamiento cinemático*, Trabajo de Investigación, Universidad de Oviedo (1993)

[8] **Prieto, J. I.**, **González, M. A.** and **Fano, J.** Unified characteristic parameters of kinematic Stirling engine drive mechanisms, *Proc. 6th ISEC*, 93030, pp.167-172, Eindhoven, Holanda (1993)

[9] **Kazumoto, Y.**, **Fujiwara, M.** and **Nomaguchi, T.** Effects of drive mechanism on thermodynamic performance of piston-displacer type Stirling engine, *Proc. 2nd ISEC*, Shanghai (1984)

[10] **Prieto, J. I.** and **Díaz, R.** Isothermal simulation with decoupled losses for kinematic Stirling engine design, *JSME Int. J.*, **36**(4), pp.697-710 (1993)

[11] **Prieto, J. I.** *Funcionamiento del Motor Stirling y aplicaciones navales*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo (1990)

3. CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL FLUIDO DE TRABAJO Y DEL MATERIAL DEL REGENERADOR

3.1 CARACTERÍSTICAS DEL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO

3.1.1 TEMPERATURA

La temperatura de los focos térmicos es obviamente una variable influyente en el funcionamiento del motor Stirling.

En el régimen estacionario de funcionamiento suele aceptarse que el calentador y el enfriador adquieren una temperatura superficial de pared uniforme e independiente del tiempo. A los efectos de estudiar el ciclo termodinámico del fluido de trabajo, esta hipótesis equivale a considerar que el calentador y el enfriador se comportan como fuentes de capacidad calorífica infinita. Desde el punto de vista de la dinámica de gases y de la transferencia convectiva de calor, se trata de una condición de contorno de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema gaseoso. Luego, si se considera que las temperaturas de las paredes del calentador y del enfriador son constantes, suponiendo la existencia de simetría cilíndrica, que es bastante usual, se puede escribir:

$$T_{WE}(x,t) \approx T_E(\text{cte}) \tag{3.1}$$

$$T_{WC}(x,t) \approx T_C(\text{cte}) \tag{3.2}$$

La temperatura del material del regenerador, como se apreciará con mayor detalle en secciones posteriores, una vez planteadas las ecuaciones fundamentales de los fenómenos, puede ser expresada en función de las coordenadas del punto considerado (posición x respecto a una sección de referencia, distancia r al centro del alambre), del instante del ciclo y de las restantes características geométricas y físicas del fluido de trabajo y del material del regenerador:

$$T_r \approx T_r(x,r,t,T_E,T_C,\text{geometría, etc.}) \tag{3.3}$$

En el cilindro caliente suele aceptarse la hipótesis[1] de que las paredes se encuentran a una temperatura uniforme y constante igual o inferior a la de las paredes del calentador, T_E. En el cilindro frío se supone que las paredes se encuentran a una temperatura uniforme y constante igual o superior a la de las paredes del enfriador, T_C.

Así pues, las características térmicas influyentes en el funcionamiento del motor Stirling resultan ser T_E y T_C, consideradas como temperaturas superficiales de pared, no como temperaturas del fluido de trabajo, lo que frecuentemente no ha sido suficientemente diferenciado. La temperatura del gas, local e instantánea, será función de estas *temperaturas de los focos térmicos* T_E y T_C, así como de los restantes parámetros característicos del funcionamiento.

3.1.2 PRESIÓN

La masa del fluido de trabajo es una característica influyente en cualquier problema termodinámico y de mecánica de fluidos. Evidentemente, la masa está directamente relacionada con lo que se puede denominar "presión de llenado" del motor, esto es, la que adquiere el fluido antes de la puesta en funcionamiento de la máquina.

La presión de llenado podría normalizarse para unas determinadas condiciones de temperatura ambiental y posiciones de los pistones. Sin embargo, está mucho más generalizado el uso de una presión instantánea como referencia significativa de la masa del fluido de trabajo. Cualquier presión local e instantánea es función de la masa del fluido y de las restantes características del funcionamiento (térmicas, geométricas, etc.), lo que justifica que no haya acuerdo entre los diversos autores. Así, Organ[2] comenta el uso de una *presión media* como referencia, destacando las diferencias entre la definición dada por Finkelstein[1]:

$$p_m = \frac{1}{2\pi} \oint p \, \mathrm{d}\theta , \tag{3.4}$$

la utilizada por Prieto[3]:

$$p_m = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} , \tag{3.5}$$

y otras posibles definiciones, como por ejemplo:

$$p_m = \frac{1}{V_{SW}} \oint p \, \mathrm{d}V , \tag{3.6}$$

donde $V_{SW} = V_{max} - V_{min}$, lo cual está más próximo al concepto de presión media efectiva, usado generalmente en los motores de combustión interna.

Resultan interesantes los comentarios de Organ, en el mismo libro, al respecto de que está muy poco explorado el concepto de presión media en el ámbito de la optimización. Efectivamente, *cualquier presión instantánea* sirve como referencia a la masa del fluido de trabajo, pero los materiales de las secciones del motor sometidas a altas temperaturas tienen una capacidad limitada para resistir altas presiones, lo que aconsejaría el uso de una presión máxima como referencia desde el punto de vista del diseño.

La referencia a una presión media tiene también interés por la rapidez con que se adquiere una idea acerca del rango de funcionamiento del motor, ya que tal presión suele coincidir con la del espacio ("buffer") hacia el que pueden presentarse fugas en los cierres de los pistones. Así, por ejemplo, puede hablarse de "motores atmosféricos" cuando el "buffer" no está presurizado.

Ante esta gama de posibilidades, se adoptará como parámetro característico de la influencia de la masa cualquier presión media p_m, debiendo precisarse cuál es su definición para que tengan sentido las comparaciones entre diversos autores. Walker[4], por ejemplo, emplea el criterio (3.4) de Finkelstein; Prieto y Díaz[5] utilizaron el criterio (3.5) para el análisis del modelo isotermo de funcionamiento de motores, observando la coincidencia de resultados con Walker y advirtiendo discrepancias con las interpretaciones realizadas por Isshiki *et al.*[6] a partir de un modelo con las mismas hipótesis.

3.1.3 VELOCIDAD DEL MOTOR

Puede decirse que la carga a la que está sometido un motor se encuentra entre los diversos parámetros que influyen en su funcionamiento, pues la velocidad del motor está determinada por el equilibrio entre la potencia útil que desarrolla y la resistencia ejercida por la carga.

Si ω representa la velocidad de rotación del cigüeñal, I el momento de inercia de las partes móviles, y W_B el trabajo útil que desarrolla el motor en cada ciclo, se puede escribir:

$$W_B = \frac{1}{2} I\left(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2\right) = I\omega_m^2 \delta_R \tag{3.7}$$

donde ω_m es la velocidad media aritmética de rotación y δ_R es el *grado de irregularidad* del motor, definido mediante:

$$\delta_R = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m}$$

El valor del grado de irregularidad varía de unos motores a otros en función del tipo de aplicación, pero una vez conocida ésta puede considerarse como un parámetro prefijado. Por tanto, el punto de funcionamiento de un motor determinado corresponde a una velocidad media de rotación mayor o menor en función del momento de inercia de las partes móviles. Por razones prácticas, es más empleada la frecuencia media n_s:

$$\omega_m = 2\pi n_s$$

La velocidad del motor es una variable influyente en la mayoría de sus características de funcionamiento, como se comprende tras observar cómo afecta, por ejemplo, a la velocidad de las partículas de fluido en cada estado del ciclo (definido por el instante t o por el ángulo de volante θ, medidos respecto de referencias prefijadas) y en cada posición del motor (con sus particulares características geométricas). En efecto, si dx es el recorrido elemental de una partícula en un intervalo de tiempo dt o de ángulo dθ, se cumple:

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} 2\pi n_s$$

3.2 PROCESOS TERMODINÁMICOS EN LOS CILINDROS

Mediante hipótesis simplificativas, algunas propiedades del gas pueden caracterizarse como variables termodinámicas macroscópicas a riesgo de alejarse de la definición realista de los fenómenos físicos. Así, en la simulación cuasiestática, como ya se ha dicho, la temperatura del gas podría considerarse como dependiente sólo de la sección del motor considerada, posibilitando un modelo termodinámico de varios espacios con temperaturas uniformes. La presión sería entonces función sólo del instante del ciclo considerado, y la densidad sería función de la posición (por la temperatura) y del instante (por la presión). Pero tal modelo sólo se ajustaría al funcionamiento real a muy bajas revoluciones, por lo que en el problema general es necesario adoptar las formulaciones matemáticas típicas de la Termodinámica de Procesos Irreversibles o de la Mecánica de Fluidos y la Transmisión de Calor, que caracterizan las magnitudes p, ρ y T como campos escalares.

Tales formulaciones matemáticas, que se expresan a continuación con las particularidades de los diversos espacios del motor, se ponen de manifiesto en un conjunto de ecuaciones diferenciales fundamentales, que suelen referirse a un *sistema termodinámico*, a un *volumen de control* del fluido (sistema de referencia de Euler) o a una *partícula* de fluido a lo largo de su trayectoria (sistema de referencia de Lagrange). La selección de la formulación matemática o del sistema de referencia es de capital importancia para la resolución de las ecuaciones, pero no es relevante a los efectos de identificar las variables funcionales que han de ser consideradas como punto de partida del estudio mediante Análisis Dimensional.

En todo caso, el análisis del ciclo Stirling requiere el empleo de una ecuación de estado aplicable al fluido de trabajo, pues no pueden ignorarse los efectos de la compresibilidad y la temperatura. La densidad, la presión y la temperatura del gas, en cada estado del ciclo y en cada posición a lo largo del motor, están determinadas por las variables independientes del funcionamiento, entre las que se debe incluir la *constante específica R*, que expresa las diferencias entre los diversos gases de trabajo:

$$p = \rho R T \tag{3.8}$$

Si Schmidt[7] es considerado como el autor del primer modelo termodinámico del ciclo Stirling, Finkelstein es el pionero de los modelos generalizados, basados en soluciones analíticas o numéricas.

El modelo original de Finkelstein[1] consiste esencialmente en un análisis adiabático modificado para tener en cuenta la transferencia finita de calor en los espacios de volumen variable, es decir, los correspondientes a los cilindros. Las hipótesis a destacar son:

- Los efectos de la cantidad de movimiento se desprecian, de modo que la presión es uniforme en cualquier instante a lo largo del circuito del gas, hipótesis justificada por una relación alta entre el diámetro y la carrera de los pistones.

- En el regenerador, calentador y enfriador, la temperatura del gas se supone igual a la de las paredes adyacentes.

- En los cilindros se supone que la temperatura del gas cuando entra procedente del calentador es aproximadamente igual a T_E y cuando entra procedente del enfriador aproximadamente igual a T_C.

- En cada cilindro, existe transferencia de calor por convección a través de una superficie variable formada por dos secciones circulares y una superficie cilíndrica de longitud variable, cuya área A sería:

$$A(\theta) = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} + \pi D\, s(\theta)$$

donde D es el diámetro del cilindro.

Empleando la formulación de la Termodinámica, el primer principio aplicado al sistema abierto formado por el gas encerrado en un cilindro, en determinado instante, conduce a la ecuación:

$$\mathrm{d}Q + \mathrm{d}H - p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}U$$

Considerando que los diferenciales corresponden a un intervalo elemental dt, y expresando el calor intercambiado mediante un *coeficiente de película h* local e instantáneo, se puede escribir para los estados correspondientes a fluido entrante (dm > 0) desde el espacio adyacente:

$$hA\left(T_W - T\right)\mathrm{d}\,t + c_p T_{Wx}\,\mathrm{d}\,m - p\,\mathrm{d}V = c_v T\,\mathrm{d}\,m + mc_v\,\mathrm{d}\,T \tag{3.9}$$

donde T_{Wx} representa la temperatura del intercambiador adyacente (T_E o T_C), y T_W la de las paredes del cilindro considerado, y c_p y c_v son los *calores específicos* del gas a presión y volumen constantes, respectivamente.

Análogamente, para los estados correspondientes a fluido saliente (dm < 0) hacia el espacio adyacente:

$$hA\left(T_W - T\right)\mathrm{d}\,t + c_p T\,\mathrm{d}\,m - p\,\mathrm{d}V = c_v T\,\mathrm{d}\,m + mc_v\,\mathrm{d}\,T \tag{3.10}$$

En el modelo original, Finkelstein supuso que la temperatura de las paredes de los cilindros era constante, uniforme e igual a la del intercambiador adyacente; posteriormente[8] supuso que, manteniendo su constancia y uniformidad, existía un salto térmico con la temperatura del intercambiador adyacente.

Considerando que $\mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,\theta/(2\pi n_s)$ y que las variaciones de volumen están determinadas en cada cilindro por su geometría y su accionamiento mecánico, la masa m (o la densidad ρ) y la temperatura T, instantáneas del gas en cada espacio, y la presión instantánea p de todo el sistema están relacionadas mediante las anteriores ecuaciones de estado y de conservación de la energía para una masa total M determinada (conservación de la masa), pudiendo obtenerse siempre que se conozcan las variables independientes geométricas y R, c_p, c_v, T_E, T_C, n_s, θ y h.

No obstante, debido a la relación de Mayer:

$$c_p - c_v = R \tag{3.11}$$

no hace falta considerar más que uno de los calores específicos en la lista de variables independientes. Por otra parte, en lugar de dicho calor específico, suele añadirse el *coeficiente adiabático* γ del gas, ya que se cumple:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{3.12}$$

El coeficiente de película h no precisa ser considerado como variable independiente, pues en la convección forzada interior a un cilindro puede escribirse:

$$h = \mathrm{f}\left(\rho, u_p, D, \mu, k, c_p\right) \tag{3.13}$$

donde μ es la *viscosidad* del gas, k su *conductividad térmica*, y u_p representa la velocidad instantánea del pistón considerado, que para un mecanismo de accionamiento aproximadamente armónico satisface:

$$u_p \approx 2\pi\, n_s\, r \operatorname{sen}\theta$$

En la práctica, h se expresa indirectamente a partir de correlaciones experimentales cuyas variables se deducen mediante Análisis Dimensional, cuyos fundamentos se resumen en el Apéndice.

Tales correlaciones son del tipo*:

$$N_{nu} = N_{nu}\,(N_{re}\,,\,N_{pr}) \tag{3.14}$$

donde N_{nu}, N_{re} y N_{pr} son los *números de Nusselt, de Reynolds* y *de Prandtl*, respectivamente, locales e instantáneos. Un ejemplo es la propuesta por Annand[9] a partir de mediciones en cilindros de máquinas de combustión interna:

$$N_{nu} = aN_{re} + b$$

donde $0.35 \leq a \leq 0.80$, dependiendo de la intensidad del movimiento del gas, y $b = 0.7$ (Fig. 3.1). Es aceptable no considerar la influencia del número de Prandtl, pues no varía mucho de unos gases a otros.

De hecho, Finkelstein utiliza el *número de Stanton* N_{st} local instantáneo como parámetro de la simulación, entre los extremos correspondientes a los procesos adiabáticos ($N_{st} = 0$) e isotermos ($N_{st} \to \infty$), lo cual no afecta especialmente al procedimiento, pues:

$$N_{st} = \frac{h}{\rho u_p D} = \frac{N_{nu}}{N_{re}\,N_{pr}}$$

---

* En efecto, la matriz de exponentes dimensionales de las variables de la Ec. (3.13) en la base dimensional estricta $\{L, M, T, \theta\}$ de la Mecánica de Fluidos con Convección de Calor es:

	ρ	u_p	D	μ	k	c_p	h
L	-3	1	1	-1	1	2	0
M	1	0	0	1	1	0	1
T	0	-1	0	-1	-3	-2	-3
θ	0	0	0	0	-1	-1	-1

El rango de esta matriz es igual a 4, por lo que el número de monomios adimensionales a que conduce es 7 - 4 = 3. Si se eligen como variables de referencia ρ, u_p, D y k, los monomios adimensionales asociados a la viscosidad, al calor específico y al coeficiente de película son:

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho u_p D} = \frac{1}{N_{re}} \qquad \Pi_2 = \frac{\rho u_p c_p D}{k} = \frac{\rho u_p D}{\mu}\cdot\frac{\mu c_p}{k} = N_{re}\cdot N_{pr} \qquad \Pi_3 = \frac{hD}{k} = N_{nu}$$

Luego el teorema Pi de Buckingham conduce a una relación entre los números locales instantáneos de Reynolds N_{re}, de Prandtl N_{pr} y de Nusselt N_{nu}:

$$\mathrm{f}(N_{re}\,,N_{pr}\,,N_{nu}) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$N_{nu} = N_{nu}(N_{re}\,,N_{pr})$$

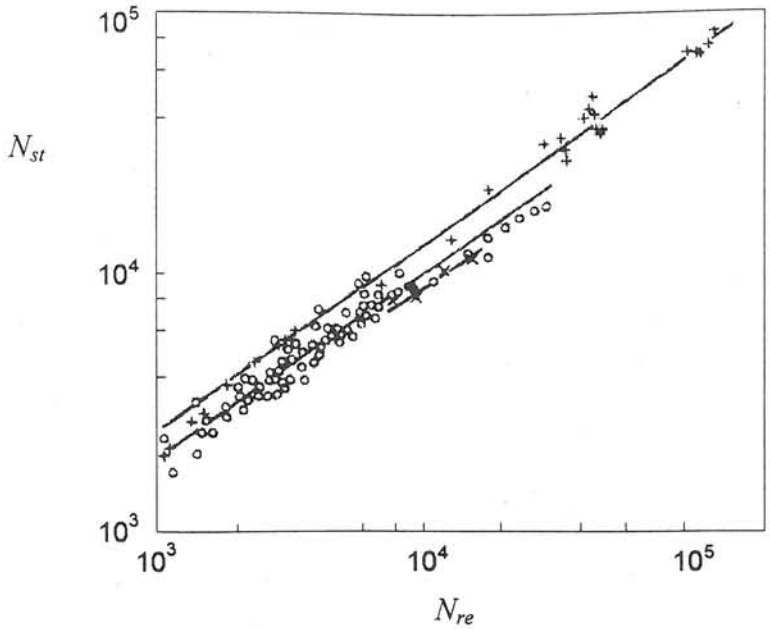


Fig. 3.1 Correlación de Annand (Reproducida de Organ[10])

Resumiendo, el análisis de los procesos en los cilindros añade R, γ, μ, k y θ a las variables independientes.

Debe tenerse en cuenta que la viscosidad y la conductividad térmica dependen del tipo de gas y de su temperatura en cada posición y en cada instante, es decir, $\mu = \mu(T)$, $k = k\,(T)$. Para facilitar las comparaciones entre diversos motores, se sugiere evaluar estas propiedades empleando como temperatura de referencia T_C, que apenas varía de unos motores a otros. Los valores de μ y de k a otras temperaturas se pueden deducir en función de la temperatura de Sutherland (Tablas 3.1 y 3.2) mediante las expresiones:

$$\mu = \mu_C \frac{T_C + T_{S\mu}}{T + T_{S\mu}} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2}$$

$$k = k_C \frac{T_C + T_{Sk}}{T + T_{Sk}} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2}$$

Tabla 3.1 Temperaturas de Sutherland para el cálculo de la viscosidad

Gas	T_C (K)	μ_C (Pa.s)	$T_{S\mu}$ (K)
H_2	300	0.0090×10^{-3}	84.4
He	300	0.0178×10^{-3}	80
N_2	300	0.0179×10^{-3}	106
Aire	300	0.0184×10^{-3}	112
O_2	300	0.0208×10^{-3}	139
Ar	300	0.0229×10^{-3}	144
CO_2	300	0.0150×10^{-3}	222

Tabla 3.2 Temperaturas de Sutherland para el cálculo de la conductividad térmica

Gas	T_C (K)	k_C (W/m.K)	T_{Sk} (K)
H_2	300	0.163	166
He	300	0.151	
N_2	300	0.024	166
Aire	300	0.024	194
O_2	300	0.025	222
Ar	300	0.016	150
CO_2	300	0.049	222

3.3 FLUJO EN EL CALENTADOR Y EN EL ENFRIADOR

Generalmente, el calentador y el enfriador existentes en las máquinas de ciclo Stirling pueden considerarse formados por haces de conductos paralelos. Aplicando las ecuaciones fundamentales de conservación para el flujo a lo largo de un elemento de conducto, y simplificando la notación con la hipótesis usualmente aceptada de flujo unidimensional a lo largo del eje x, se tiene:

3.3.1 CONSERVACIÓN DE LA MASA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{3.15}$$

donde u representa la velocidad local instantánea del fluido y ρ la densidad del mismo en cada punto y en cada instante.

Dado que tanto u como ρ son funciones de x y t, la ecuación (3.15) no implica la necesidad de añadir ninguna característica del fluido a las variables independientes influyentes en el funcionamiento de la máquina. La ecuación de conservación proporciona un procedimiento para obtener la velocidad si se conoce la densidad, o viceversa.

3.3.2 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{sign}(u)\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\delta p}{\delta x} = 0 \tag{3.16}$$

donde $\delta p/\delta x$ representa las *pérdidas de presión*, locales e instantáneas, producidas en la longitud dx, y la función sign(u) contempla la posibilidad de que el flujo pueda invertirse y tener sentido contrario al considerado como positivo del eje x.

A la vista de esta ecuación, puede decirse que la presión está determinada por el resto de variables, a condición de que se conozca el valor del término correspondiente a las pérdidas por fricción $\delta p/\delta x$, que de otro modo habría de incorporarse a la lista de variables influyentes. Ahora bien, puede escribirse:

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \mathrm{f}\big(\rho, u, r_h, \mu(T)\big) \tag{3.17}$$

siendo r_h el radio hidráulico del conducto y μ la viscosidad del fluido, que ya están incluidos entre las variables influyentes, por lo que la lista no aumenta por causa de las pérdidas de presión. En la práctica, el término $\delta p/\delta x$ puede determinarse mediante un *coeficiente de fricción* C_f, adimensional, a partir de correlaciones experimentes del tipo*:

$$C_f = C_f(N_{re}) \tag{3.18}$$

Es bastante empleada la correlación de Kays y London[11] (Fig. 3.2), aunque ha sido obtenida para flujo incompresible. La curva superpuesta corresponde a la ecuación

$$C_f = \frac{a}{N_{re}} + b$$

con $a = 16$ y $b = 0.005$.

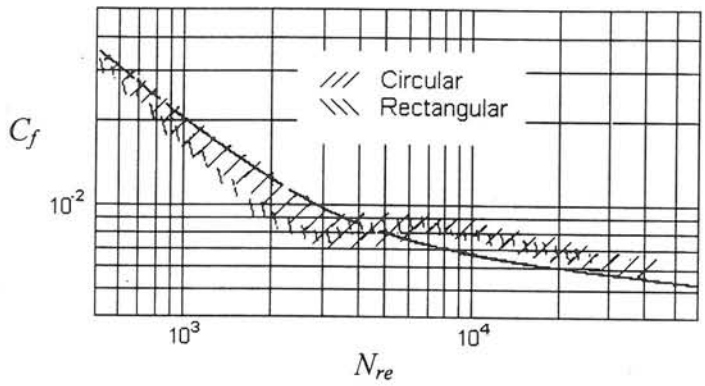


Fig. 3.2 Correlación de Kays y London para el coeficiente de fricción en tubos de sección circular y rectangular (adaptada de Organ[10])

---

* Para aplicar el teorema de Buckingham, se escribirá la matriz de exponentes dimensionales de las variables de la Ec. (3.17) en la base dimensional estricta $\{L, M, T\}$ de la Mecánica de Fluidos:

	ρ	u	r_h	μ	$\delta p/\delta x$
L	-3	1	1	-1	-2
M	1	0	0	1	1
T	0	-1	0	-1	-2

El rango de esta matriz es igual a 3, por lo que el número de monomios adimensionales a que conduce es 5 - 3 = 2. Si se eligen como variables de referencia ρ, u y r_h, los monomios asociados a la viscosidad μ y a las pérdidas de presión $\delta p/\delta x$ son:

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho u r_h} = \frac{4}{N_{re}} \qquad \Pi_2 = \frac{r_h(\delta p/\delta x)}{\rho u^2} = \frac{1}{2}C_f$$

Luego se puede escribir:

$$C_f = C_f(N_{re})$$

3.3.3 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$h\,\frac{A_{xx}}{r_{hx}}\,\mathrm{d}\,x\,(T_W - T) = A_{xx}\,\mathrm{d}\,x\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_v T + \frac{1}{2}\rho u^2\right) + A_{xx}\,\mathrm{d}\,x\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(c_p T + \frac{1}{2}u^2\right)\right] \qquad (3.19)$$

donde A_{xx} representa el área de la sección transversal del conducto y T_W y T son las temperaturas locales instantáneas de la pared y del gas respectivamente.

A la vista de esta ecuación, puede decirse que la temperatura del gas está determinada por las variables ya consideradas como influyentes, a condición de que el coeficiente de transferencia convectiva de calor esté determinado. Ahora bien, h no precisa ser considerado como variable independiente, pues puede escribirse:

$$h = \mathrm{f}\left(\rho, u, c_p, \mu(T), k(T), r_h\right) \qquad (3.20)$$

Por tanto, tras analizar el calentador y el enfriador, se deduce que no aumentan las variables influyentes en el comportamiento de la máquina.

En la práctica, h puede determinarse mediante correlaciones experimentes del tipo*:

$$N_{st} = N_{st}(N_{re}, N_{pr}) \qquad (3.21)$$

como la de Kays y London (Fig. 3.3), que, al igual que la correspondiente al coeficiente de fricción, fue obtenida para flujo incompresible. La curva superpuesta corresponde a la expresión

---

* El coeficiente de película h puede obtenerse a partir de correlaciones obtenidas experimentalmente. Si se expresa la matriz de exponentes dimensionales de las variables que aparecen en la Ec. (3.20) en la base dimensional estricta de la Mecánica de Fluidos con Convección de Calor, resulta:

	ρ	u	c_p	μ	k	r_h	h
L	-3	1	2	-1	1	1	0
M	1	0	0	1	1	0	1
T	0	-1	-2	-1	-3	0	-3
θ	0	0	-1	0	-1	0	-1

cuyo rango es 4, por lo que se obtendrán 7 - 4 = 3 monomios adimensionales. Eligiendo como variables de referencia ρ, u, r_h y c_p, dichos monomios, asociados a la viscosidad, a la conductividad térmica y al coeficiente de transferencia convectiva de calor, son:

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho u r_h} = \frac{4}{N_{re}} \qquad \Pi_2 = \frac{k}{\rho u r_h c_p} \qquad \Pi_3 = \frac{h}{\rho u c_p} = N_{st}$$

El segundo monomio puede escribirse de la forma

$$\Pi_2 = 4\,\frac{k}{\mu c_p}\,\frac{\mu}{4\rho u r_h} = 4\,\frac{1}{N_{pr}}\,\frac{1}{N_{re}}$$

Aplicando el teorema Pi de Buckingham resulta:

$$N_{st} = N_{st}(N_{re}, N_{pr})$$

$$N_{st} N_{pr}^{2/3} = \frac{a}{N_{re}} + b$$

con $a = 4$ y $b = 0.0025$.

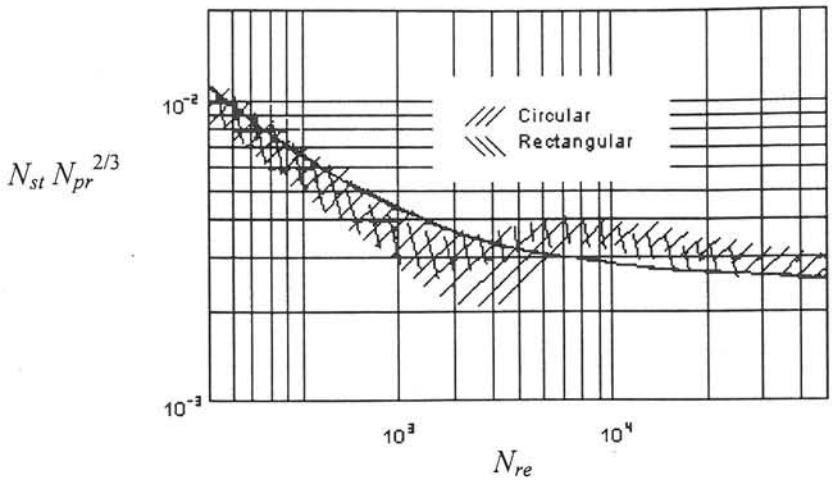


Fig. 3.3 Correlación de Kays y London para el número de Stanton en tubos de sección circular y rectangular (adaptada de Organ[10])

Observando las correlaciones de las Fig. 3.2 y 3.3, se aprecia que tienen un cierto grado de paralelismo, como apuntó Creswick[12], coherente con la existencia de fenómenos moleculares análogos. En este sentido, Prieto *et al.*[13] advirtieron que, en alguna medida, podría ser aplicable la analogía de Colburn[14]:

$$N_{st} N_{pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

3.4 FLUJO EN EL REGENERADOR

El análisis y diseño del regenerador es posiblemente la mayor dificultad pendiente para la comprensión del funcionamiento de las máquinas de ciclo Stirling. Si los problemas derivados de los cierres sometidos a altas temperaturas han sido la causa de que muchos motores no funcionaran, quizá el regenerador ha motivado que otros muchos lo hicieran por debajo de las expectativas deseadas. Es conocida la frase de Max Jakob*:

> "*Las teorías del regenerador se encuentran entre las más complicadas de la ingeniería.*"

3.4.1 CONSERVACIÓN DE LA MASA Y DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de conservación de la masa (3.15) y de conservación de la cantidad de movimiento (3.16) son aplicables al regenerador, con la particularidad de que en la segunda las pérdidas locales e instantáneas de presión habrán de ser obtenidas a partir de un

* **Jakob, M.** *Heat Transfer*, Vol.II, 1957 (John Wiley, New York)

coeficiente de fricción C_f específico del regenerador, para el cual no existen correlaciones experimentales suficientemente corroboradas.

Organ[10] comienza su exposición acerca del estado del arte en el estudio del flujo en el regenerador afirmando:

> "*No es satisfactorio el camino empleado para el análisis del flujo en el regenerador de las máquinas Stirling.*"

Este autor basa su argumentación en los siguientes motivos:

- El flujo es tratado mediante el método tradicional de la circulación en tuberías de un fluido viscoso incompresible en régimen estacionario. Cuando los análisis y correlaciones no se ajustan a las mediciones experimentales es frecuente ajustar arbitrariamente las correlaciones. Este procedimiento se conoce como "*validación*" y se han publicado trabajos en los que el coeficiente de fricción se ha multiplicado por factores entre 4 y 7.

- La discrepancia entre las mediciones experimentales y las predicciones teóricas se han atribuido al hecho de que las correlaciones empleadas no tienen en cuenta la ausencia de régimen estacionario, típica del funcionamiento de las máquinas Stirling. Parece que tal circunstancia ha de ser tenida en cuenta, pero probablemente también otros efectos, como se deducirá de lo que sigue.

La Fig. 3.4 representa la correlación de Kays y London, obtenida a partir de experiencias con mallas de alambres cruzados simulando gasas, que se suponen perfectamente prensadas (Fig. 2.11(b)), con la hipótesis de flujo incompresible. El diámetro de los alambres era 9 mm y el fluido empleado fue aire, supuesto aproximadamente a la temperatura ambiente. Sobre los resultados de Kays y London figuran los obtenidos por Su[15] para una malla cuadrada con porosidad de 0.714 y flujo compresible, pues la malla única actúa como una especie de tobera convergente-divergente.

El gráfico original de Kays y London está formado por cuatro curvas correspondientes a las porosidades de 0.602, 0.725, 0.766 y 0.832, de similar aspecto. La curva superpuesta en la Fig. (3.4) corresponde a la ecuación

$$C_f = \frac{40}{N_{re}} + 0.3$$

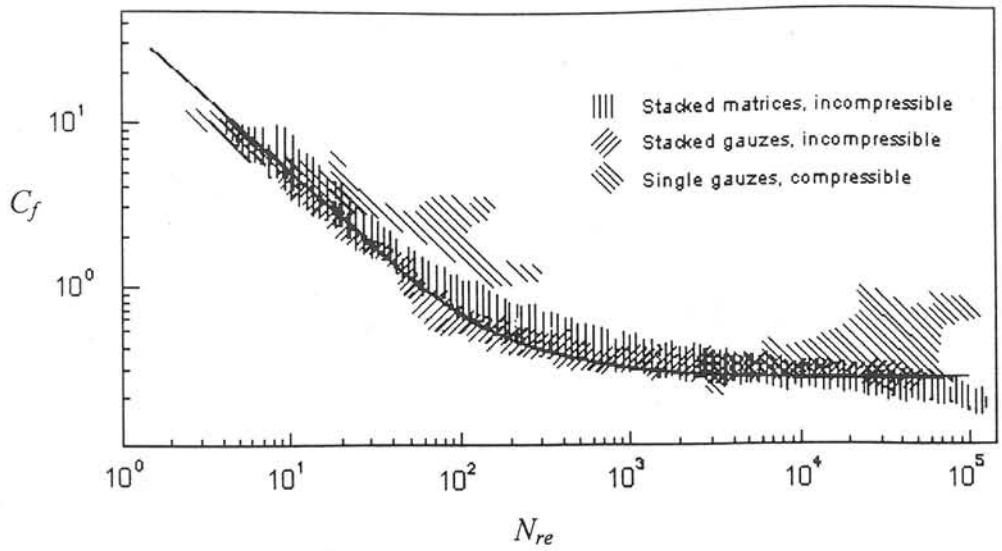


Fig. 3.4 Correlación de Kays y London (adaptada por Su) (Reproducida de Organ[10])

Puede comprobarse que para la porosidad de 0.832 se obtiene un radio hidráulico del orden de 10 mm. Para el número de Reynolds de 10^5, hasta el que se extienden las curvas, se deduce una velocidad de unos 35 m/s a la presión atmosférica, es decir, del orden del 10% de la velocidad del sonido. Para una matriz con radio hidráulico típico del regenerador Stirling, del orden de 25 micras, el mismo número de Reynolds daría una velocidad de las partículas de $1.5 \cdot 10^4$ m/s, o lo que es lo mismo, un número de Mach del orden de 40, lo que provocaría ondas de choque. Incluso un número de Reynolds bastante inferior (por ejemplo, del orden de 10^3) todavía daría un número de Mach de 0.4, más que suficiente para causar dichos problemas. La conclusión de Organ no puede ser más contundente: *La correlación de Kays y London no es aplicable al diseño de regeneradores Stirling, al menos en parte del rango de las variables.*

Por tanto, antes de atribuir las discrepancias de los experimentos a que la correlación está realizada para régimen estacionario, es preciso investigar la influencia de las *características geométricas de la matriz de mallas* y de la combinación de los *efectos viscosos*, *de inercia* y *de compresibilidad.*

En primer lugar, hay que resaltar que la correlación de Kays y London puede conducir a importantes errores si se aplica a regeneradores de un tipo de malla diferente, como el de la Fig. 2.11 (a). La Ec. (2.55) proporciona una porosidad de 0.685 para d_w = 0.05 mm y m = 8 mm^{-1} (valores típicos de los regeneradores), mientras que la Ec. (2.54) conduce a una porosidad de 0.661 para los mismos valores. Luego el error es del orden del 3.5% para los valores usuales en regeneradores Stirling, que se considera elevado para las exigencias de las simulaciones. Este error repercutiría en el radio hidráulico, pues, por diferenciación de la Ec. (2.56), se deduce:

$$\frac{\Delta(r_{hr}/d_w)}{r_{hr}/d_w} = \frac{\Delta\Pi_V}{\Pi_V(1-\Pi_V)}$$

luego un error del 3.5% en la porosidad implica un error del 10% en el radio hidráulico, y por tanto en el número de Reynolds, en el coeficiente de fricción y en el número de Stanton (como se justifica más adelante).

Por otro lado, al objeto de considerar los efectos de la viscosidad, de la inercia y de la compresibilidad, parece razonable establecer la siguiente dependencia funcional para las pérdidas de presión en un regenerador formado por una matriz de mallas prensadas:

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \mathrm{f}\left(\rho, u, r_{hr}, \Pi_V, \mu(T), u_0\right) \tag{3.22}$$

donde u_0 representa la velocidad del sonido, y se introduce para tener en cuenta la compresibilidad del gas de trabajo. De esta relación se deduce la siguiente ecuación en variables adimensionales*:

$$C_f = C_f\,(N_{re}, N_{ma}, \Pi_V) \tag{3.23}$$

que no añade nuevas magnitudes a la lista de variables influyentes.

Cabe, por tanto, esperar que resultados experimentales más completos que los obtenidos por Kays y London tengan el aspecto de una familia de curvas similares a la curva superpuesta en la Fig. 3.5, con la porosidad y el número de Mach como parámetros. Sorprende la presentación de los resultados obtenidos recientemente por Miyabe *et al.*[16], que emplean un único parámetro geométrico y no consideran los efectos de la compresibilidad.

El análisis puede generalizarse para materiales porosos de cualquier estructura, siendo destacables los trabajos de Masha *et al.*[17] y de Green y Duwez[18]. En este caso, cabe considerar que a muy bajos valores del número de Reynolds (*creeping flow*) las pérdidas de presión por unidad de longitud satisfacen:

$$-\,\delta p/\delta x \propto \mu\, U/\delta^2$$

siendo δ una longitud característica del tamaño de los poros y U la velocidad del fluido en la superficie de contacto del fluido con el material poroso, que, según Green y Duwez, se puede relacionar con la velocidad en el centro de los poros mediante:

$$U = \Pi_V u \tag{3.24}$$

*E*n cambio, para flujos en los que predominan los efectos de la inercia se puede escribir:

$$-\,\delta p/\delta x \propto \rho\, U^2/\delta$$

La transición entre los dos regímenes es más gradual que en el caso de flujos en tuberías, pudiendo presentarse los efectos combinados. Así, la ley de Forschheimer expresa el gradiente de presiones mediante:

---

* Del mismo modo que en el caso del calentador y el enfriador, se aplica a la Ec. (3.22) el teorema de Buckingham, según el método clásico, y, empleando como variables de referencia ρ, u y r_h, se obtienen los siguientes monomios adimensionales:

$$\Pi_1 = \Pi_V \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho u r_{hr}} = \frac{4}{N_{re}} \qquad \Pi_3 = \frac{u_0}{u} = \frac{1}{N_{ma}} \qquad \Pi_4 = \frac{r_{hr}\left(\delta p/\delta x\right)}{\rho u^2} = \frac{1}{2} C_f$$

que conducen a la Ec. (3.23) en variables adimensionales:

$$C_f = C_f\left(N_{re}, N_{ma}, \Pi_V\right)$$

$$-\frac{\delta p}{\delta x}=\frac{\mu U}{k_\alpha}+\frac{\rho U^2}{k_\beta} \tag{3.25}$$

El parámetro k_α se corresponde con el *coeficiente de permeabilidad* de Darcy[10], mientras que k_β es un coeficiente característico de la tortuosidad de los canales por los que circula el fluido. Si se añaden los efectos de la compresibilidad (mediante la velocidad del sonido u_0), y teniendo en cuenta la relación entre u y U (Ec. (3.24)), se puede plantear una ecuación del tipo:

$$\frac{\delta p}{\delta x}=\mathrm{f}\left(\rho,u,\Pi_V,\mu,u_0,k_\alpha,k_\beta\right) \tag{3.26}$$

que conduce, tras aplicar el método clásico de Análisis Dimensional* a:

$$C_f^*=C_f^*\left(N_{re}^*,N_{ma},\Pi_V,\frac{k_\alpha}{k_\beta^2}\right) \tag{3.27}$$

donde

$$N_{re}^*=\frac{\rho U k_\alpha}{\mu k_\beta} \tag{3.28}$$

$$C_f^*=\frac{k_\beta(\delta p/\delta x)}{(1/2)\rho U^2} \tag{3.29}$$

---

* La matriz de exponentes dimensionales de las variables de la Ec. (3.26) en la base dimensional estricta $\{L, M, T\}$ de la Mecánica de Fluidos es:

	ρ	u	Π_V	μ	u_0	k_α	k_β	$\delta p/\delta x$
L	-3	1	0	-1	1	2	1	-2
M	1	0	0	1	0	0	0	1
T	0	-1	0	-1	-1	0	0	-2

El rango de esta matriz es igual a 3, por lo que el número de monomios adimensionales a que conduce es 8 - 3 = 5. Si se eligen como variables de referencia ρ, u y k_β, los monomios asociados a las restantes variables son:

$$\Pi_1=\Pi_V \qquad \Pi_2=\frac{\rho u k_\beta}{\mu}=\frac{\rho U k_\alpha}{\mu k_\beta}\cdot\frac{1}{\Pi_V}\cdot\frac{k_\beta^2}{k_\alpha}=N_{re}^*\cdot\frac{1}{\Pi_1\Pi_4} \qquad \Pi_3=\frac{u_0}{u}=\frac{1}{N_{ma}}$$

$$\Pi_4=\frac{k_\alpha}{k_\beta^2} \qquad \Pi_5=\frac{k_\beta(\delta p/\delta x)}{\rho u^2}=\frac{1}{2}C_f^*\cdot\Pi_V^2$$

Luego, aplicando el teorema Pi, se puede escribir:

$$C_f^*=C_f^*\left(N_{re}^*,N_{ma},\Pi_V,\frac{k_\alpha}{k_\beta^2}\right)$$

Actualmente no se dispone de correlaciones de este tipo. La Fig. 3.5, que debe entenderse obtenida para valores determinados de N_{ma} y Π_V, muestra el excelente grado de correlación obtenido por Green y Duwez[18] mediante la ecuación:

$$C_f^* = \frac{2}{N_{re}^*} + 2$$

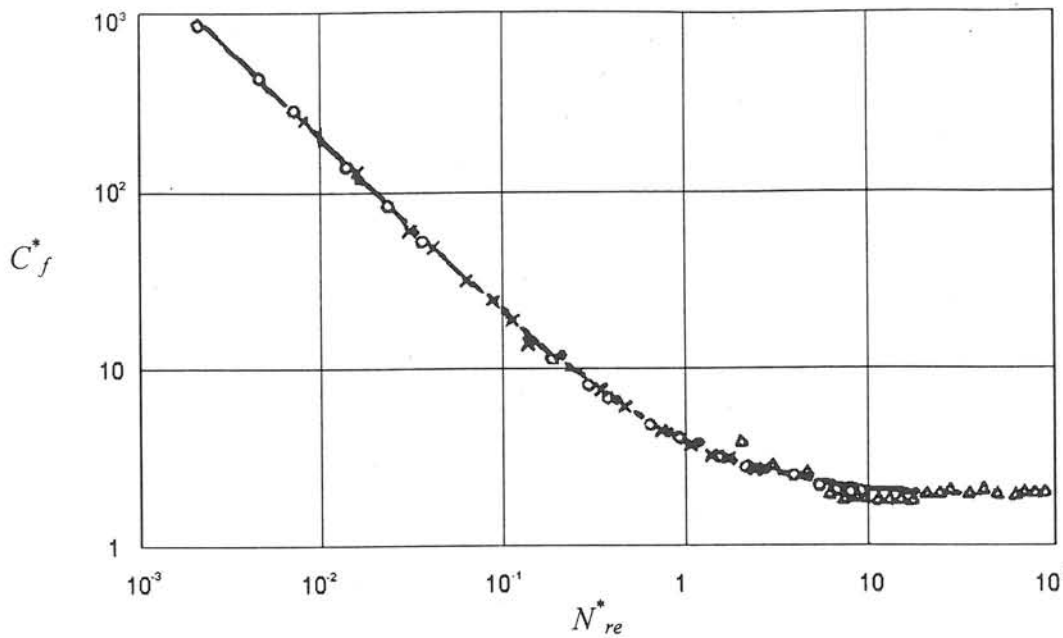


Fig. 3.5 Correlación de Green y Duwez para el coeficiente de fricción (reproducida de Organ[10])

Tanto Green y Duwez como Organ[10], al comentar el trabajo de los primeros, no aprecian la necesidad de considerar la relación k_α / k_β^2 como parámetro, lo que hace suponer que se trata de un monomio espurio que podría desaparecer al aplicar el método de Análisis Dimensional con discriminación espacial, con precedentes en Williams[19], Huntley[20] y Palacios[21], y justificado teóricamente por González de Posada[22]. Este procedimiento atribuye a cada magnitud una dimensión que contiene información completa acerca de su carácter escalar, vectorial o tensorial. Además, la aplicación del teorema Pi con discriminación espacial presenta la ventaja adicional de facilitar el trabajo experimental, ya que, generalmente, se reduce el número de monomios adimensionales independientes.

Para aplicar el método discriminado a la Ec. (3.26), se elige un sistema de coordenadas espaciales cilíndricas r, ϕ, x. Se considerará flujo unidimensional en la dirección x. El problema se enmarca en el ámbito de la conservación de la cantidad de movimiento, por lo que las magnitudes se caracterizarán con criterios de 'fuerzas' en lugar de 'energías', es decir, como vectoriales y tensoriales en lugar de escalares[23].

Así, se puede escribir, análogamente al problema del régimen de Poiseuille en tuberías:

$$[p] = L_x M T^{-2} / (L_r L_\phi) \qquad \rightarrow \qquad \left[\frac{\delta p}{\delta x}\right] = L_r^{-1} L_\phi^{-1} M T^{-2}$$

$$\tau_{rx} = \mu_{rr} \frac{\partial u_x}{\partial r} \qquad \rightarrow \qquad [\mu_{rr}] = L_r L_\phi^{-1} L_x^{-1} M T^{-1}$$

Además, por la homogeneidad dimensional de la ecuación de ondas, para una perturbación genérica Y:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = u_0^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad \rightarrow \qquad [u_0] = L_x T^{-1}$$

Por otro lado, del requisito de homogeneidad dimensional de la ecuación de Forschheimer (Ec. (3.25)) se deduce:

$$[k_\alpha] = L_r^2$$

$$[k_\beta] = L_x$$

Luego, la matriz de exponentes dimensionales de las variables de la Ec. (3.26) será:

	ρ	u	Π_V	μ	u_0	k_α	k_β	$\delta p/\delta x$
L_r	-1	0	0	1	0	2	0	-1
L_ϕ	-1	0	0	-1	0	0	0	-1
L_x	-1	1	0	-1	1	0	1	0
M	1	0	0	1	0	0	0	1
T	0	-1	0	-1	-1	0	0	-2

El rango de esta matriz es igual a 4, de modo que, si se emplean como variables de referencia ρ, u, k_α y k_β, se obtienen los siguientes monomios:

$$\Pi_1 = \Pi_V \qquad \Pi_2 = \frac{\rho u k_\alpha}{\mu k_\beta} = N_{re}^* \cdot \frac{1}{\Pi_V}$$

$$\Pi_3 = \frac{u_0}{u} = \frac{1}{N_{ma}} \qquad \Pi_4 = \frac{k_\beta (\delta p / \delta x)}{\rho u^2} = \frac{1}{2} C_f^* \cdot \Pi_V^2$$

por lo que la Ec. (3.27) deberá ser sustituida por la siguiente:

$$C_f^* = C_f^*\left(N_{re}^*, N_{ma}, \Pi_V\right) \tag{3.30}$$

Es decir, se ha eliminado el monomio espurio y, a pesar de definir la geometría con tres parámetros, se obtiene igual número de monomios que en los regeneradores formados por mallas de alambre, donde había sólo dos parámetros geométricos. Actualmente no se dispone de correlaciones del tipo de la Ec. (3.30), pero puede predecirse que las futuras tendrán presumiblemente el aspecto de una familia de curvas como la de Green y Duwez de la Fig. 3.5, con la porosidad y el número de Mach como parámetros.

Luego para matrices de estructura arbitraria, actualmente no muy empleadas, habría que incorporar los coeficientes de permeabilidad k_α y k_β a la lista de variables influyentes.

3.4.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La ecuación de conservación de la energía (3.19) también es aplicable al flujo en el regenerador, con la particularidad de que en este caso suelen aceptarse las siguientes hipótesis adicionales:

- Es despreciable el término de la energía cinética.
- El caudal másico de fluido es constante y uniforme entre los cambios de sentido del flujo.
- Los calores específicos del gas son independientes de la temperatura.

Se obtiene:

$$h\frac{A_{xr}}{r_{hr}}\mathrm{d}x(T_W - T) = \rho c_v A_{xr}\,\mathrm{d}x\frac{\partial T}{\partial t} + \rho u c_p A_{xr}\,\mathrm{d}x\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.31}$$

Además, la igualdad entre el calor transferido por convección desde el gas y la variación de energía interna de la matriz del regenerador, en el volumen de control de sección transversal A_{xr} y longitud elemental dx, conduce a la ecuación:

$$h\frac{A_{xr}}{r_{hr}}\mathrm{d}x(T - T_W) = \rho_r c_r A_{xr}\,\mathrm{d}x\frac{1-\Pi_V}{\Pi_V}\frac{\partial T_W}{\partial t} \tag{3.32}$$

Los balances de energía se completan con la ecuación diferencial de conducción de calor, que describe el avance de la onda térmica en el alambre de las mallas del regenerador. Suponiendo simetría cilíndrica, se puede escribir:

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \alpha_r\left(\frac{\partial^2 T_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_w}{\partial r}\right) \tag{3.33}$$

donde $T_w = T_w(x,r,t)$ representa la temperatura local instantánea en el interior del alambre, y α_r es el *coeficiente de difusividad térmica* del material del regenerador.

Como condición de contorno, debe considerarse la correspondiente a la transmisión convectiva en la superficie mojada del alambre. Para cada x y t, en un elemento cilíndrico de alambre de longitud dx y radio $r = d_w/2$, se puede escribir:

$$h(\pi d_w \mathrm{d}x)(T_w - T) = -k_r(\pi d_w \mathrm{d}x)\frac{\partial T_w}{\partial r} \tag{3.34}$$

Fijadas las restantes condiciones de funcionamiento, la temperatura superficial del material del alambre del regenerador es función de las temperaturas del calentador y del enfriador. Frecuentemente, las simulaciones suponen un gradiente lineal, es decir:

$$[T_w]_{r=d_w/2} = T_{Wr}(x,t) \approx T_{Wr}(x) = T_E - \frac{T_E - T_C}{L_r}x \tag{3.35}$$

Por lo tanto, de las Ec. (3.31) a (3.35) se desprende que, en el regenerador, además de las características geométricas ya comentadas en el Capítulo 2, es preciso incluir en la lista de variables influyentes la *difusividad térmica* α_r y el producto $\rho_r \cdot c_r$, es decir, la *capacidad calorífica volumétrica*, relacionada con la *conductividad térmica* k_r del material del alambre por la expresión:

$$\alpha_r = \frac{k_r}{\rho_r c_r} \tag{3.35}$$

Respecto del coeficiente de transferencia convectiva de calor h, si se considera aplicable la siguiente ecuación:

$$h = \mathrm{f}\left(\rho, u, c_p, \mu(T), k(T), r_{hr}, \Pi_V\right) \tag{3.36}$$

siguiendo un procedimiento análogo al empleado para deducir la Ec.(3.21), se obtiene:

$$N_{st} = N_{st}(N_{re}, N_{pr}, \Pi_V) \tag{3.37}$$

Luego, con este planteamiento, h no precisa ser incluido en la lista de variables independientes que influyen en el funcionamiento del regenerador. Sin embargo, se advierte que no existen todavía correlaciones experimentales o simulaciones unánimemente corroboradas del número de Stanton N_{st}, local e instantáneo, específico del regenerador, ni siquiera con las hipótesis realizadas.

La Ec.(3.37) estaría de acuerdo con la correlación entre N_{st}, N_{re} y N_{pr} que se muestra en la Fig.(3.6), adaptada por Organ del trabajo de Kays y London. El trabajo original presenta seis curvas correspondientes a porosidades entre 0.602 y 0.832. La curva superpuesta en la figura corresponde a la ecuación:

$$N_{st} N_{pr}^{2/3} = \frac{1.25}{\sqrt{N_{re}}} \tag{3.38}$$

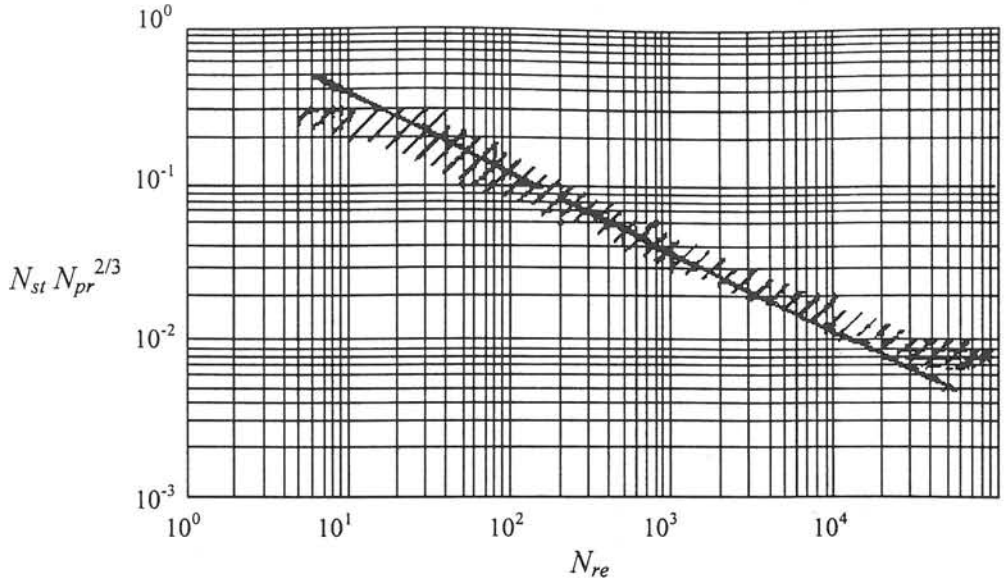


Fig. 3.6 Correlación de Kays y London para regeneradores con mallas de alambre (adaptada de Organ[10])

Finalmente, aunque no es imprescindible para cumplir los objetivos de este Capítulo, resulta interesante comentar también que las simulaciones analíticas o numéricas de diversos autores presentan discrepancias notables.

En los trabajos clásicos y pioneros sobre el regenerador, Hausen[24] y Nusselt[25] omiten el término $\partial/\partial t$ en la ecuación de la energía, por lo que las soluciones que obtienen ambos no consideran la fase denominada '*flushing*'*, crucial en el regenerador Stirling.

Heggs y Carpenter[26] mantienen $\partial/\partial t$ y, por tanto, son los primeros que tienen en cuenta la fase del '*flushing*'.

Miyabe *et al.*[16] emplean la transformada de Laplace para analizar el flujo unidireccional inicial, mantienen el término $\partial/\partial t$ y tienen en cuenta la fase del '*flushing*'. No está claro cómo puede extenderse el método al flujo inverso y subsiguientes flujos tras el inicial.

Todos suponen fluidos incompresibles. En los trabajos de Hausen y Nusselt, esta hipótesis se deduce de suponer que u y ρ son constantes. En los de Heggs y Carpenter, y Miyabe *et al.*, la hipótesis se deduce del uso de c_p tanto en la derivada convectiva $\partial/\partial x$ como en el término $\partial/\partial t$.

Luego todos los estudios citados son soluciones particulares del problema para el caso $\gamma = 1$, pues, empleando como variable $\Delta T = T(x,t) - T_w(x,t)$ y considerando el número de Stanton local e instantáneo como un módulo siempre positivo, la Ec.(3.31) puede escribirse como:

* En los diversos espacios de una máquina Stirling el flujo es variable en caudal másico y sentido. Existen intervalos en que el flujo entra (o sale) simultáneamente por las secciones fronterizas de un espacio. Algunas partículas de fluido incluso están *atrapadas* en un espacio, de modo que la relación ('*flushing ratio*') entre la longitud que recorre una partícula y la longitud del espacio donde se encuentra es menor que la unidad.

$$-\frac{N_{st}}{r_{hr}\,\mathrm{sign}(u)}\left[\gamma+\frac{\Pi_V}{1-\Pi_V}\cdot\frac{\rho c_p}{\rho_r c_r}\right]u\,\Delta T-\gamma u\frac{\partial T_W}{\partial x}=\frac{\partial \Delta T}{\partial t}+\gamma u\frac{\partial \Delta T}{\partial x} \tag{3.31a}$$

Análogamente, la Ec.(3.32) conduce a:

$$\frac{\partial T_W}{\partial t}=\frac{\rho c_p}{\rho_r c_r}\frac{\Pi_V}{1-\Pi_V}\frac{N_{st}}{r_{hr}\,\mathrm{sign}(u)}u\,\Delta T \tag{3.32a}$$

Organ[27] resuelve, analíticamente, el problema estudiado por los autores citados empleando un sistema de referencia de Lagrange, lo que proporciona un desarrollo matemático mucho más simple que el empleado por Hausen y Nusselt y facilita las interpretaciones físicas.

La conclusión más relevante de su trabajo quizá sea que los resultados para '*flushing ratios*' típicos del motor Stirling no tienen nada en común con las soluciones de Hausen. En cambio, permiten explicar aproximadamente el aceptable comportamiento, hasta ahora sorprendente, de algunos materiales que han sido empleados en regeneradores de algunos motores Stirling, como lana de algodón y fibra de carbono[28].

3.5 TIPOS DE RÉGIMEN EN INTERCAMBIADORES DE CALOR DE MOTORES STIRLING

En este Capítulo se ha puesto de manifiesto la importancia que tienen ciertos números adimensionales, principalmente el número de Reynolds, en el análisis de los intercambiadores de calor típicos de las máquinas de ciclo Stirling, por lo que se ha considerado oportuno incluir un resumen del interesante estudio comparativo, acerca del régimen de circulación predominante en el calentador, enfriador y regenerador de algunos motores, realizado por Seume y Simon[29]. Entre los motores cinemáticos analizados aparecen el GPU-3 de General Motors, y los P-40 y 4-215 de Philips. La Tabla 3.3 muestra los resultados, obtenidos de forma aproximada a partir de los gráficos originales, empleando como criterios de comparación los siguientes parámetros:

- El número de Valensi, que es una forma de número de Reynolds referido a la pulsación w del movimiento oscilatorio de las partículas de fluido en un conducto tubular de diámetro d, es decir:

$$N_{VA}=\frac{\rho w d^2}{4\mu} \tag{3.39}$$

- El número de Reynolds basado en la máxima velocidad de las partículas de fluido, es decir:

$$N_{RE,max}=\frac{\rho\, u_{max} d}{\mu} \tag{3.40}$$

- La relación de amplitudes o '*flushing ratio*' Λ, definida como el cociente entre el recorrido de una partícula durante un semiperiodo y la longitud l del conducto del correspondiente intercambiador, es decir, si A representa la amplitud de la partícula:

$$\Lambda = \frac{2A}{l} \tag{3.41}$$

Suponiendo que el movimiento oscilatorio es armónico simple, se verifica la siguiente relación:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{d}{l}\frac{N_{RE,max}}{N_{VA}} \tag{3.42}$$

Nótese que la mayoría de los intercambiadores presentan régimen turbulento o en la zona de transición, siendo el motor GPU-3 el más próximo al régimen laminar, y que la relación de amplitudes es en algunos casos menor que la unidad, lo que significa que las partículas correspondientes no salen del intercambiador, comportándose como un volumen muerto parásito.

Tabla 3.3 Tipos de régimen en intercambiadores de motores Stirling

	MOTOR	Λ	N_{VA}	$N_{RE,max}$	RÉGIMEN
CALENTADOR	GPU-3	1.07-1.20	28	7000-10000	TRANSICIÓN O TURBULENTO
	P-40	1.10-1.20	200	70000-100000	TURBULENTO
	4-215	1.04-1.12	370	110000-200000	TURBULENTO
REGENERADOR	GPU-3	1.07-1.20	0.06	60-100	LAMINAR
	P-40	0.40-0.80	0.18	100-210	TRANSICIÓN
	4-215	0.60-1.05	0.20	150-350	TURBULENTO
ENFRIADOR	GPU-3	1.35-1.50	28	10000-15000	TURBULENTO
	P-40	1.10-1.20	110	35000-50000	TURBULENTO
	4-215	1.12-1.25	120	60000-90000	TURBULENTO

3.6 REFERENCIAS

[1] **Finkelstein, T.** Optimization of phase angle and volume ratio of Stirling engines, *Proc. SAE Winter Annual meeting*, paper 118C (1960)

[2] **Organ, A. J.** *Stirling engine thermodynamic design without the computer*, Regenerative Thermal Machines (*mRT*), Cambridge (1993)

[3] **Prieto, J. I.** Discussion on 'Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer', *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206** (C3), pp.219-220 (1992)

[4] **Walker, G.** *Stirling Engines*, Clarendon, Oxford (1980)

[5] **Prieto, J. I.** and **Díaz, R.** Isothermal simulation with decoupled losses for kinematic Stirling engine design, *JSME Int J*, **36**(4), pp.697-710 (1993)

[6] **Isshiki, N., Tsukahara, S., Choi, K. S., Kuwabara, M.** and **Uzuriha, Y.** Study on Stirling engine (1st Report), *Bulletin of the M.E.S.J.*, Vol.6, Nº 2 (1978)

[7] **Schmidt, G.** Theorie der Lehmann'schen calorischen Maschine, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, **XV**(2), Jan., pp.1-12, Feb., pp.98-112 (1871)

[8] **Finkelstein, T.** Generalized thermodynamic analysis of Stirling engines, *Proc. SAE Winter Annual Meeting*, paper 118B (1960)

[9] **Annand, W. J. D.** Heat transfer in the cylinders of reciprocating internal combustion engines, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, **177**(36), pp.973-990 (1963)

[10] **Organ, A. J.** *Thermodynamics and Gas Dynamics of the Stirling Cycle Machine*, Cambridge University Press (1992)

[11] **Kays. W. M.** and **London, A. L.** *Compact Heat Exchangers,* McGraw-Hill, New York (1964)

[12] **Creswick, F. A.** Thermal design of Stirling cycle machines, *Proc. SAE Automotive Engineering Cong.*, paper 949C, Detroit, Michigan (1965)

[13] **Prieto, J. I., Díaz, R.** y **González, M. A.** Perspectiva desde el Análisis Dimensional del modelo de gas ideal con procesos cuasiestáticos como origen del estudio del motor Stirling, *Congreso Julio Palacios y la Física de su tiempo*, Maliaño, Cantabria, España (1991)

[14] **Welty, J. R., Wicks, Ch. E.** y **Wilson, R. E.** *Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa*, Limusa, México (1982)

[15] **Su, C. C.** An enquiry into the mechanism of pressure drop in the regenerator of the Stirling cycle machine, PhD dissertation, University of Cambridge (1986)

[16] **Miyabe, H., Takahashi, S.** and **Hamaguchi, K.** An approach to the design of Stirling engine regenerator matrix using packs of wire gauzes, 829306, *Proc. 17th IECEC*, pp.1839-1844 (1982)

[17] **Masha, B. A., Beavers, G. S.** and **Sparrow, E. M.** Experiments on the resistance law for non-Darcy compressible gas flows in porous media, *J. Fluids Eng. Trans. ASME*, pp.353-357 (1974)

[18] **Green, L.** and **Duwez, P.** Fluid flow through porous metals, *J. Appl. Mech.*, **18**, pp.39-45 (1951)

[19] **Williams, W.** On the relation of the dimensions of physical quantities to directions in space, *Phil. Mag.*, 34234 (1892)

[20] **Huntley, H. E.** *Dimensional Analysis*, R. McDonald and Co., London (1952)

[21] **Palacios, J.** *Análisis Dimensional*, Ed. Espasa-Calpe, Madrid (1964)

[22] **González de Posada, F.** Hacia una nueva fundamentación del Análisis Dimensional, *Rev. Real Acad. de Ciencias Ex. Fis. Nat.*, T. 75, 4°, pp.969-991, Madrid (1981)

[23] **Fano, J., González, C., González, M. A.** y **Prieto, J. I.** Análisis dimensional del coeficiente de fricción en materiales porosos de regeneradores Stirling, *XXXVII Sesiones del GTAD*, Arrecife, Lanzarote (1997)

[24] **Hausen, H.** Ueber die Theorie des Waermeaustausches in Regeneratoren, *Zeit. fuer Angewandte Math und Mech.*, Band 9, Heft 3, pp.173-200 (1929)

[25] **Nusselt, W.** Die Theorie des Winderhitzers, *Zeit. des Vereins Deutscher Ing.*, Band 71, Nr.3, pp.85-91 (1927)

[26] **Heggs, P. J.** and **Carpenter, K. J.** The effect of fluid hold-up on the effectiveness of contra-flow regenerators, *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, 54, pp.232-238 (1976)

[27] **Organ, A. J.** Solution of the classic thermal regenerator problem, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **208**, p.187 (1994)

[28] **Hargreaves, C. M.** *The Philips Stirling Engine*, Elsevier, Amsterdam (1992)

[29] **Seume, J. R.** and **Simon, T. W.** Oscillating flow in Stirling engine heat exchangers, *Proc. 1986 IECEC*, Am. Chem. Soc., paper 869118, pp.533-538 (1986)

4. ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL FUNCIONAMIENTO

4.1 ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL CICLO TEÓRICO

Aunque el objetivo del presente capítulo es la aplicación del Análisis dimensional al funcionamiento del motor Stirling en un régimen de revoluciones adecuado a las aplicaciones actuales, se seguirá un método inductivo, comenzando con el estudio de los casos más sencillos, como son el ciclo teórico y la simulación cuasiestática, que nos permitirán contrastar los resultados de este método con los obtenidos de manera analítica.

Como ya se adelantó en la sección 1.3, el ciclo Stirling *teórico* consta de dos procesos isotermos (una expansión a temperatura T_E, que se produce merced a la energía aportada por una fuente externa, y una compresión a temperatura T_C, durante la cual el gas cede calor al foco frío) y dos transformaciones a volumen constante. Se hicieron las hipótesis de ausencia de irreversibilidades térmicas y mecánicas, regenerador totalmente eficaz y sin pérdidas de calor por conducción, ausencia de fugas y de volúmenes muertos y accionamiento discontinuo.

En la Fig. 1.11 se muestra el diagrama indicador *p-v* para un motor tipo *beta*. Para el *trabajo indicado por ciclo* se puede establecer la siguiente dependencia funcional:

$$W_0 = \mathrm{f}(M, R, T_E, T_C, V_{max}, V_{min}) \tag{4.1}$$

La matriz de exponentes dimensionales de las variables en la base dimensional estricta $\{L, M, T, \theta\}$ es:

	M	R	T_E	T_C	V_{max}	V_{min}	W_0
L	0	2	0	0	3	3	2
M	1	0	0	0	0	0	1
T	0	-2	0	0	0	0	-2
θ	0	-1	1	1	0	0	0

El rango de esta matriz es igual a 4, por lo que conduce a 7 – 4 = 3 monomios adimensionales. Tomando como variables de referencia M, R, T_C y V_{min}, los monomios asociados a las restantes variables son:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_{max}}{V_{min}} \qquad \Pi_3 = \frac{W_0}{MRT_C}$$

De la aplicación del teorema Pi se deduce:

$$\frac{W_0}{MRT_C} = \mathrm{F}\left(\frac{T_E}{T_C}, \frac{V_{max}}{V_{min}}\right) \tag{4.2}$$

Este resultado concuerda con el obtenido de forma analítica en el capítulo 1, puesto que, a partir de la Ec. (1.6), puede escribirse:

$$\frac{W_0}{MRT_C} = \left(\frac{T_E}{T_C} - 1\right) \ln \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

No obstante, por razones de tipo práctico, las variables M y R suelen ser sustituidas por la presión media del ciclo (según se justificó en el Capítulo 3), que es más fácil de medir que la masa del gas y nos da una idea del nivel de presiones en el motor. Por el mismo motivo, en lugar de los volúmenes máximo y mínimo del sistema total, suelen emplearse las cilindradas de los espacios de expansión y de compresión, debiendo añadirse, en este caso de accionamiento discontinuo, para que el trabajo esté perfectamente definido, el *ángulo de desfase* α entre los máximos de los volúmenes de los espacios de compresión y de expansión.

Entonces, la Ec. (4.1) conduce a:

$$W_0 = \mathrm{f}(p_m, T_E, T_C, V_E, V_C, \alpha) \tag{4.3}$$

La matriz de exponentes dimensionales de las variables que intervienen en esta ecuación es:

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α	W_0
L	-1	0	0	3	3	0	2
M	1	0	0	0	0	0	1
T	-2	0	0	0	0	0	-2
θ	0	1	1	0	0	0	0

cuyo rango es 3, por lo que dará lugar a 4 monomios adimensionales. Si se eligen como variables de referencia p_m, T_C y V_E, resultan:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_C}{V_E} = \kappa \qquad \Pi_3 = \alpha \qquad \Pi_4 = \frac{W_0}{p_m V_E} = \zeta_0$$

Por tanto, puede escribirse para el *trabajo indicado adimensional por ciclo:*

$$\zeta_0 = \frac{W_0}{p_m V_E} = \mathrm{F}(\tau, \kappa, \alpha) \tag{4.4}$$

4.2 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LOS MODELOS CUASIESTÁTICOS

Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas en la Sección 1.6 para la simulación cuasiestática, las variables que se deberán considerar para el estudio del funcionamiento del motor en estos modelos serán las temperaturas de las fuentes térmicas, las variaciones de volumen causadas por el mecanismo de accionamiento, los volúmenes muertos existentes, la masa del gas de trabajo y, en algunos casos, el instante del ciclo considerado.

Así, para la *presión instantánea*, suponiendo accionamiento rómbico simétrico, se puede escribir:

$$p = \mathrm{f}\left(p_m, T_E, T_C, V_E, V_C, \alpha_e, l, e, r, V_{dE}, V_{dr}, V_{dC}, \theta\right) \tag{4.5}$$

habiendo reemplazado ya la masa M y la constante específica R del gas por la presión media p_m, al igual que en el ciclo teórico, y donde V_{dE} y V_{dC} representan los volúmenes muertos del espacio de expansión y del espacio de compresión, respectivamente (incluyendo el cilindro y el intercambiador correspondiente). Es decir:

$$V_{dE} = V_{dce} + V_{dxe}$$

$$V_{dC} = V_{dcc} + V_{dxc}$$

El accionamiento se caracteriza por la longitud de biela l, el radio de manivela r y la excentricidad e, iguales para ambos pistones, y el ángulo de desfase extrínseco α_e.

De acuerdo con las hipótesis mencionadas, las teorías físicas implicadas son la Cinemática y la Termodinámica de Procesos Reversibles, por lo que la base dimensional que se utilizará para la aplicación del método clásico del Análisis Dimensional será $\{L, M, T, \theta\}$. Expresando la matriz de exponentes dimensionales de las variables incluidas en la Ec. (4.5) en dicha base, se obtiene:

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α_e	l	e	r	V_{dE}	V_{dr}	V_{dC}	θ	p
L	-1	0	0	3	3	0	1	1	1	3	3	3	0	-1
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2
θ	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

cuyo rango es 3. Por tanto, según el teorema Pi de Buckingham, resultan 14 – 3 = 11 monomios adimensionales, que, eligiendo como variables de referencia p_m, T_C y V_E, son:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_C}{V_E} = \kappa \qquad \Pi_3 = \alpha_e \qquad \Pi_4 = \frac{l}{V_E^{1/3}}$$

$$\Pi_5 = \frac{e}{V_E^{1/3}} \qquad \Pi_6 = \frac{r}{V_E^{1/3}} \qquad \Pi_7 = \frac{V_{dE}}{V_E} = \mu_{dE} \qquad \Pi_8 = \frac{V_{dr}}{V_E} = \mu_{dr}$$

$$\Pi_9 = \frac{V_{dC}}{V_E} = \mu_{dC} \qquad \Pi_{10} = \theta \qquad \Pi_{11} = \frac{p}{p_m}$$

Esto nos conduce a la siguiente expresión para la presión instantánea adimensional:

$$\frac{p}{p_m} = \mathrm{F}\left(\tau, \kappa, \alpha_e, \frac{l}{V_E^{1/3}}, \frac{e}{V_E^{1/3}}, \frac{r}{V_E^{1/3}}, \mu_{dE}, \mu_{dr}, \mu_{dC}, \theta\right) \tag{4.6}$$

Sin embargo, los monomios Π_4 y Π_5 pueden también escribirse en la forma:

$$\Pi_4 = \frac{l}{V_E^{1/3}} = \frac{l}{r}\frac{r}{V_E^{1/3}} = \lambda\,\Pi_6 \qquad\qquad \Pi_5 = \frac{e}{V_E^{1/3}} = \frac{e}{r}\frac{r}{V_E^{1/3}} = \varepsilon\,\Pi_6$$

por lo que la Ec. (4.6) se convierte en:

$$\frac{p}{p_m} = \mathrm{F}\left(\tau, \kappa, \alpha_e, \lambda, \varepsilon, \frac{r}{V_E^{1/3}}, \mu_{dE}, \mu_{dr}, \mu_{dC}, \theta\right) \tag{4.7}$$

que será aplicable a los modelos cuasiestáticos, particularmente al de Schmidt[1]. En el apartado 1.4.2 se obtuvo[2,3,4] para la presión adimensional la Ec. (1.12), válida para todos los tipos de motores, en función de los parámetros adimensionales δ y Θ, que toman distintos valores para cada tipo de máquina. Para un motor *beta* sin solape, o para un motor *gamma*, en los que se repartiera por igual el espacio muerto del regenerador entre los espacios frío y caliente, δ y Θ vienen dados[4] por las ecuaciones (1.13) y (1.14). Comparando los resultados correspondientes a este último caso con la Ec. (4.7), se observa que los parámetros adimensionales que intervienen son comunes a ambas expresiones, a excepción de λ, ε y $r/V_E^{1/3}$, propios del accionamiento. No obstante, dado que el accionamiento armónico, propio del modelo de Schmidt, puede considerarse como un caso particular del mecanismo de biela-manivela con $l >> r$ ($\lambda \to \infty$), y éste, a su vez, como una variante del rómbico, para $e = 0$ ($\varepsilon = 0$), el accionamiento armónico no incorporaría l y e como variables influyentes, lo que justifica la desaparición de los parámetros adimensionales λ y ε de la Ec. (1.12). En cambio, no ocurre lo mismo con el tercer monomio ($r/V_E^{1/3}$), pues parece que, por estar asociado a la variable r y ser ésta también característica del accionamiento armónico, debería figurar en el resultado teórico del modelo de Schmidt. La ausencia de este monomio en la Ec. (1.12) hace suponer que pueda tratarse de un parámetro innecesario, lo que podría ponerse de manifiesto mediante la aplicación del Análisis Dimensional con discriminación espacial.

En efecto, expresando la matriz de exponentes dimensionales de las magnitudes que intervienen en la Ec. (4.5) en la base dimensional discriminada $\{L_x, L_y, L_z, M, T, \theta\}$, se tiene:

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α_e	l	e	r	V_{dE}	V_{dr}	V_{dC}	θ	p
L_x	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	-1/3
L_y	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	-1/3
L_z	-1/3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	-1/3
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2
θ	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

donde debe advertirse que la presión se caracteriza como variable escalar, como corresponde a una variable termodinámica de un proceso cuasiestático, esto es, se trata de la presión hidrostática. Respecto a los parámetros r, l y e del accionamiento, se consideran homogéneos con la dirección z longitudinal del motor, pues entre ellos existirá una relación para cualquier tipo de mecanismo de accionamiento, es decir:

$$\mathrm{f}(r,l,e,\theta,z)=0 \quad \rightarrow \quad [r]=[l]=[e]=[z]=L_z$$

La matriz anterior tiene rango 4, por lo que, conforme al Teorema Pi, dará lugar a 14 – 4 = 10 monomios adimensionales, que, tomando como variables de referencia p_m, T_C, V_E y r, son los siguientes:

$$\Pi_1=\frac{T_E}{T_C}=\frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2=\frac{V_C}{V_E}=\kappa \qquad \Pi_3=\alpha_e \qquad \Pi_4=\frac{l}{r}=\lambda$$

$$\Pi_5=\frac{e}{r}=\varepsilon \qquad \Pi_6=\frac{V_{dE}}{V_E}=\mu_{dE} \qquad \Pi_7=\frac{V_{dr}}{V_E}=\mu_{dr} \qquad \Pi_8=\frac{V_{dC}}{V_E}=\mu_{dC}$$

$$\Pi_9=\theta \qquad \Pi_{10}=\frac{p}{p_m}$$

Se comprueba, por tanto, que no aparece el monomio $r/V_E^{1/3}$, por lo que la expresión de la presión adimensional para un modelo cuasiestático con accionamiento rómbico simétrico será:

$$\frac{p}{p_m}=\mathrm{F}(\tau,\kappa,\alpha_e,\lambda,\varepsilon,\mu_{dE},\mu_{dr},\mu_{dC},\theta) \tag{4.8}$$

De forma análoga se procede para la *masa instantánea* del gas de trabajo en cada uno de los espacios del motor. Es esencial en este caso añadir R a las variables de influencia incluidas en la Ec. (4.5). Así, por ejemplo, para el espacio de compresión, la ecuación de partida para la aplicación del Análisis Dimensional sería:

$$m_C=\mathrm{f}\left(p_m,R,T_E,T_C,V_E,V_C,\alpha_e,l,e,r,V_{dE},V_{dr},V_{dC},\theta\right) \tag{4.9}$$

Para la aplicación del método discriminado se tiene una matriz de rango 5, lo que conduce a la obtención de 15 – 5 = 10 parámetros adimensionales. El resultado es la expresión:

$$\frac{m_C R T_C}{p_m V_E}=\mathrm{F}\left(\tau,\kappa,\alpha_e,\lambda,\varepsilon,\mu_{dE},\mu_{dr},\mu_{dC},\theta\right) \tag{4.10}$$

Por lo que se refiere al *trabajo indicado por ciclo*, verifica una ecuación del tipo:

$$W_0=\mathrm{f}\left(p_m,T_E,T_C,V_E,V_C,\alpha_e,l,e,r,V_{dE},V_{dr},V_{dC}\right) \tag{4.11}$$

La aplicación del Análisis Dimensional con discriminación espacial, en la base ya mencionada, permite obtener la siguiente expresión para el *trabajo indicado adimensional por ciclo*:

$$\zeta_0=\frac{W_0}{p_m V_E}=\mathrm{F}\left(\tau,\kappa,\alpha_e,\lambda,\varepsilon,\mu_{dE},\mu_{dr},\mu_{dC}\right) \tag{4.12}$$

Por lo tanto, para cada tipo de máquina, los modelos cuasiestáticos dependen de los parámetros adimensionales de temperatura τ, de volumen barrido κ, de accionamiento α_e, λ, ε, y de volumen muerto μ_{dE}, μ_{dr}, μ_{dC}.

Las ecuaciones (4.8), (4.10) y (4.12) expresan, respectivamente, la presión, la masa instantánea del espacio de compresión y el trabajo indicado por ciclo, todos ellos adimensionales, para la simulación cuasiestática en máquinas Stirling cinemáticas con accionamiento rómbico, incluyendo como casos particulares el accionamiento biela-manivela y el armónico. Se pueden generalizar estas ecuaciones para el llamado *accionamiento rómbico generalizado*, descrito en el Capítulo 2, añadiendo a los parámetros ya considerados del mecanismo de accionamiento (α_e, r, l y e) el ángulo de desfase entre ejes de pistones β. Por ejemplo, el *trabajo indicado adimensional por ciclo* (Ec. (4.12)) sería entonces:

$$\zeta_0 = \frac{W_0}{p_m V_E} = \mathrm{F}\left(\tau, \kappa, \alpha_e, \beta, \lambda, \varepsilon, \mu_{dE}, \mu_{dr}, \mu_{dC}\right) \tag{4.13}$$

4.3 ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL FUNCIONAMIENTO A ALTAS REVOLUCIONES

Dado que a efectos de anteproyecto la potencia indicada es la variable más significativa, a partir de ahora se centrará el estudio en esta variable. Como se desprende del análisis realizado en los Capítulos 2 y 3, la potencia indicada de una máquina de ciclo Stirling y accionamiento cinemático depende de una serie de variables que pueden clasificarse del siguiente modo:

- Parámetros característicos del punto de funcionamiento (p_m, T_E, T_C, n_s).

- Parámetros característicos del volumen activo instantáneo, determinado por el tipo de accionamiento mecánico y por la configuración de la máquina (V_E, V_C, α_e, β, l, e, r). En general, l, e y r podrían ser diferentes para cada pistón, aunque en esta sección, por razones de comodidad, se considerarán iguales.

- Parámetros característicos del volumen muerto y de la geometría de los cilindros y de los intercambiadores de calor (V_{dce}, V_{dxe}, V_{dr}, V_{dxc}, V_{dcc}, A_{xe}, A_{xr}, A_{xc}, r_{he}, r_{hr}, r_{hc}, Π_V). Aunque en la simulación cuasiestática no se hizo ninguna distinción entre los volúmenes muertos del cilindro y del intercambiador en cada espacio del motor, dado que, desde un punto de vista conceptual, no hay diferencias entre ellos, en el presente estudio se consideran por separado por razones prácticas de proyecto. Por lo que se refiere al regenerador, se le supone formado por mallas de alambre prensadas.

- Parámetros característicos del fluido de trabajo (γ, R, k, μ). No obstante, la conductividad térmica k del gas de trabajo no suele incluirse entre las variables influyentes, ya que puede sustituirse por el *número de Prandtl* local instantáneo, y éste varía poco para los gases usualmente empleados, es decir:

$$N_{pr} = \frac{\mu c_p}{k} \approx \text{cte}$$

- Parámetros característicos del comportamiento térmico del material del regenerador (α_r, $\rho_r \cdot c_r$).

Puede decirse entonces que los tipos básicos de máquinas Stirling cinemáticas mencionados en el presente trabajo (*alpha*, *beta* y *gamma*) responden al esquema de la *máquina equivalente de ciclo Stirling* de la Fig. 4.1, donde se muestran las variables ordinarias de cada parte del motor que deben tenerse en cuenta en el estudio de su funcionamiento.

Organ[5] realiza un planteamiento parecido, al objeto de definir un 'motor Stirling virtual', con la diferencia de que emplea un 'accionamiento armónico equivalente' al que se aproximarán en mayor o menor grado los accionamientos reales de cada motor con su particular configuración. Ambos procedimientos presentan aspectos comunes, pero en este trabajo se mantienen todas las variables, de modo que se consideran equivalentes sólo máquinas con igual configuración y accionamiento.

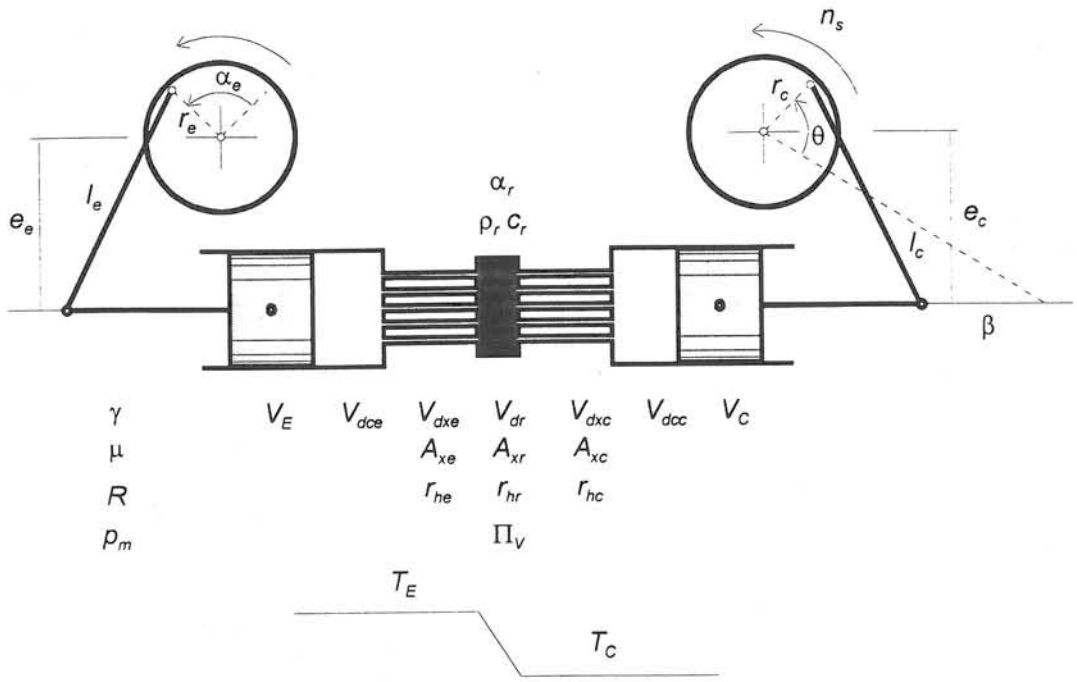


Fig. 4.1 Máquina Stirling equivalente

En resumen, la potencia indicada puede ser expresada como función de 28 variables:

$$P_{ind} = \mathrm{f}\,(p_m, T_E, T_C, V_E, V_C, \alpha_e, \beta, l, e, r,$$

$$V_{dce}, V_{dxe}, V_{dr}, V_{dxc}, V_{dcc}, A_{xe}, A_{xr}, A_{xc},$$

$$r_{he}, r_{hr}, r_{hc}, \Pi_V, \gamma, R, \mu, \alpha_r, \rho_r \cdot c_r, n_s) \qquad (4.14)$$

A continuación, para convertir la función (4.14) en otra en que intervengan únicamente parámetros adimensionales, se aplicará a dicha función el teorema Pi de Buckingham.

4.3.1 MÉTODO CLÁSICO

La función (4.14), que representa el funcionamiento de una máquina genérica de ciclo Stirling, incluye variables caracterizadas en el ámbito de la Mecánica de Fluidos, la

Termodinámica y la Transmisión de Calor, por lo que se empleará la base dimensional $\{L, M, T, \theta\}$. Se obtiene la siguiente matriz de exponentes dimensionales[6]:

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α_e	β	l	e	r	V_{dce}	V_{dxe}	V_{dr}	V_{dxc}	V_{dcc}	A_{xe}	A_{xr}	A_{xc}	r_{he}	r_{hr}	r_{hc}	Π_V	γ	R	μ	α_r	$\rho_r c_r$	n_s	P_{ind}
L	-1	0	0	3	3	0	0	1	1	1	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	2	-1	2	-1	0	2
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
T	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-1	-2	-1	-3
θ	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0

que tiene de rango 4. Eligiendo como variables de referencia p_m, T_C, V_E y n_s, resultan los siguientes 25 monomios adimensionales, asociados a las restantes variables y en el orden en que figuran en la matriz:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_C}{V_E} = \kappa \qquad \Pi_3 = \alpha_e \qquad \Pi_4 = \beta$$

$$\Pi_5 = \frac{l}{V_E^{1/3}} = \lambda \Pi_7 \qquad \Pi_6 = \frac{e}{V_E^{1/3}} = \varepsilon \Pi_7 \qquad \Pi_7 = \frac{r}{V_E^{1/3}} \qquad \Pi_8 = \frac{V_{dce}}{V_E} = \mu_{dce}$$

$$\Pi_9 = \frac{V_{dxe}}{V_E} = \mu_{dxe} \qquad \Pi_{10} = \frac{V_{dr}}{V_E} = \mu_{dr} \qquad \Pi_{11} = \frac{V_{dxc}}{V_E} = \mu_{dxc} \qquad \Pi_{12} = \frac{V_{dcc}}{V_E} = \mu_{dcc}$$

$$\Pi_{13} = \frac{A_{xe}}{V_E^{2/3}} \qquad \Pi_{14} = \frac{A_{xr}}{V_E^{2/3}} \qquad \Pi_{15} = \frac{A_{xc}}{V_E^{2/3}} \qquad \Pi_{16} = \frac{r_{he}}{V_E^{1/3}}$$

$$\Pi_{17} = \frac{r_{hr}}{V_E^{1/3}} \qquad \Pi_{18} = \frac{r_{hc}}{V_E^{1/3}} \qquad \Pi_{19} = \Pi_V \qquad \Pi_{20} = \gamma$$

$$\Pi_{21} = \frac{RT_C}{V_E^{2/3} n_s^2} = \frac{1}{N_{MA}^2} \qquad \Pi_{22} = \frac{\mu n_s}{p_m} = \frac{1}{N_{SG}} \qquad \Pi_{23} = \frac{\alpha_r}{V_E^{2/3} n_s} = N_F$$

$$\Pi_{24} = \frac{\rho_r c_r T_C}{p_m} = \frac{1}{N_{TCR}} \qquad \Pi_{25} = \frac{P_{ind}}{p_m V_E n_s} = \frac{W}{p_m V_E} = \zeta$$

Como consecuencia, la *potencia indicada adimensional* (coincidente con el *trabajo indicado por ciclo*) puede expresarse en función de parámetros adimensionales en la forma:

$$\zeta = \mathrm{F}\begin{bmatrix} & \kappa & & & & & & & \\ & \alpha_e & \mu_{dce} & & r_{he}/V_E^{1/3} & & & & \\ \tau & \beta & \mu_{dxe} & A_{xe}/V_E^{2/3} & r_{hr}/V_E^{1/3} & \gamma & N_{MA} & N_{SG} & N_F & N_{TCR} \\ & \lambda & \mu_{dr} & A_{xr}/V_E^{2/3} & r_{hc}/V_E^{1/3} & & & & \\ & \varepsilon & \mu_{dxc} & A_{xc}/V_E^{2/3} & \Pi_V & & & & \\ & r/V_E^{1/3} & \mu_{dcc} & & & & & & \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Este resultado tiene algunas diferencias con la propuesta de Organ[5], en la que presenta un sistema completo de monomios adimensionales correspondiente al funcionamiento del motor Stirling, partiendo del modelo más sencillo, que podría denominarse *cuasiestático sin volumen muerto y con accionamiento armónico*, y lo generaliza añadiendo parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales que satisfacen los procesos reales en la máquina.

Organ utiliza para normalizar los volúmenes muertos, en lugar de V_E, el parámetro V_{ref}, que define como el volumen del fluido de trabajo en unas condiciones especificadas $p = p_{ref}$, y para las áreas de secciones transversales y radios hidráulicos, emplea, respectivamente, los parámetros A_{ref} (área de la superficie total mojada por el fluido) y R_H (que denomina *radio hidráulico característico*, y define como $R_H = V_{ref} / A_{ref}$). No obstante, el uso de V_{ref} como parámetro de normalización hace que en la función de parámetros adimensionales propuesta por Organ aparezca el monomio $\mu_V = V_E / V_{ref}$, que no figura en la Ec. (5.15). Prieto[7,8] considera que este monomio es innecesario, ya que exigiría la inclusión de V_{ref} (además de V_E y V_C) entre las variables de que depende la potencia indicada, lo cual no está justificado.

4.3.2 MÉTODO DISCRIMINADO

En esta variante del método, algunos exponentes dimensionales no son obvios. Así, por ejemplo, empleando la base dimensional discriminada $\{L_r, L_\phi, L_z, M, T, \theta,\}$, al radio de manivela r se le atribuyó anteriormente dimensión de $\{L_z\}$ porque se relaciona con el desplazamiento axial del pistón por medio de una ecuación cinemática unidimensional. Lo mismo se hizo con l y e. A las magnitudes escalares, como volúmenes o presión hidrostática, se les asigna dimensiones espaciales igualmente distribuidas en cada eje. Si la discriminación espacial se aplicase a problemas locales, la viscosidad y la difusividad deberían considerarse generalmente como magnitudes tensoriales, y cada componente tendría exponentes dimensionales espaciales diferentes. No obstante, la función (4.14) representa un balance energético del funcionamiento global del motor, suponiendo que el gas de trabajo y el material del alambre del regenerador son isótropos y que el flujo tiene simetría cilíndrica, por lo que, desde el punto de vista del análisis dimensional, parece correcto incluir μ y α_r como parámetros escalares[9,10]. Puesto que no todas las áreas ni longitudes tienen la misma dimensión en el método discriminado, se obtendrán parámetros adimensionales más significativos.

La matriz de exponentes dimensionales en la base mencionada será entonces:

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α_e	β	l	e	r	V_{dce}	V_{dxe}	V_{dr}	V_{dxc}	V_{dcc}	A_{xe}	A_{xr}	A_{xc}	r_{he}	r_{hr}	r_{hc}	Π_V	γ	R	μ	α_r	$\rho_r c_r$	n_s	P_{ind}
L_r	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0	2/3
L_ϕ	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0	2/3
L_z	-1/3	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0	2/3
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
T	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-1	-2	-1	-3
θ	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0

El rango de esta matriz es 6, por lo que el teorema Pi proporciona un conjunto completo de 23 monomios adimensionales (en lugar de los 25 que se obtenían mediante el

método clásico). Aunque en la selección de las magnitudes de referencia para la formación de estos monomios no existen razones científicas de preferencia, con tal de que sean dimensionalmente independientes y su número igual al rango de la matriz, por criterios técnicos de utilidad se tomarán como referencia p_m, T_C, V_E, r, r_{he} y n_s. Resultan los siguientes monomios:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_C}{V_E} = \kappa \qquad \Pi_3 = \alpha_e \qquad \Pi_4 = \beta$$

$$\Pi_5 = \frac{l}{r} = \lambda \qquad \Pi_6 = \frac{e}{r} = \varepsilon \qquad \Pi_7 = \frac{V_{dce}}{V_E} = \mu_{dce} \qquad \Pi_8 = \frac{V_{dxe}}{V_E} = \mu_{dxe}$$

$$\Pi_9 = \frac{V_{dr}}{V_E} = \mu_{dr} \qquad \Pi_{10} = \frac{V_{dxc}}{V_E} = \mu_{dxc} \qquad \Pi_{11} = \frac{V_{dcc}}{V_E} = \mu_{dcc} \qquad \Pi_{12} = \frac{A_{xe} r}{V_E} = \alpha_{xe}$$

$$\Pi_{13} = \frac{A_{xr} r}{V_E} = \alpha_{xr} \qquad \Pi_{14} = \frac{A_{xc} r}{V_E} = \alpha_{xc} \qquad \Pi_{15} = \frac{r_{hr}}{r_{he}} = \lambda_{hr} \qquad \Pi_{16} = \frac{r_{hc}}{r_{he}} = \lambda_{hc}$$

$$\Pi_{17} = \Pi_V \qquad \Pi_{18} = \gamma \qquad \Pi_{19} = \frac{RT_C}{V_E^{2/3} n_s^2} = \frac{1}{N_{MA}^2} \qquad \Pi_{20} = \frac{\mu n_s}{p_m} = \frac{1}{N_{SG}}$$

$$\Pi_{21} = \frac{\alpha_r}{V_E^{2/3} n_s} = N_F \qquad \Pi_{22} = \frac{\rho_r c_r T_C}{p_m} = \frac{1}{N_{TCR}} \qquad \Pi_{23} = \frac{P_{ind}}{p_m V_E n_s} = \frac{W}{p_m V_E} = \zeta$$

Por tanto, la *potencia indicada adimensional* tendrá la forma:

$$\zeta = \mathrm{F}\left[\begin{array}{cccccccccc} & \kappa & \mu_{dce} & & & & & & & \\ & \alpha_e & \mu_{dxe} & \alpha_{xe} & \lambda_{hr} & & & & & \\ \tau & \beta & \mu_{dr} & \alpha_{xr} & \lambda_{hc} & \gamma & N_{MA} & N_{SG} & N_F & N_{TCR} \\ & \lambda & \mu_{dxc} & \alpha_{xc} & \Pi_V & & & & & \\ & \varepsilon & \mu_{dcc} & & & & & & & \end{array}\right] \tag{4.16}$$

En resumen, el análisis dimensional con discriminación espacial conduce a dos parámetros adimensionales menos que el método clásico, tal como ya se ha indicado, eliminando, por lo tanto, dos monomios innecesarios. Esta ventaja ya había sido puesta de manifiesto incluso en modelos más simples, como en el caso de la simulación cuasiestática, puesto que uno de estos parámetros, $r/V_E^{1/3}$, ya había desaparecido de la lista obtenida mediante el método no discriminado en dichos modelos (Sección 4.2). El segundo monomio que desaparece es el correspondiente al radio hidráulico del calentador, $r_{he}/V_E^{1/3}$.

Por tanto, respecto del procedimiento empleado por Organ, se reduce en tres el número de monomios (μ_V, $r/V_E^{1/3}$ y $r_{he}/V_E^{1/3}$), lo cual tiene importancia apreciable desde el punto de vista de la simulación y el proyecto.

4.4 REFERENCIAS

[1] **Schmidt, G.** Theorie der Lehmann'schen calorischen Maschine, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, **XV**(2), Jan., pp.1-12, Feb., pp.98-112 (1871)

[2] **Prieto, J. I.** y **Díaz, R.** Relaciones adimensionales para el estudio analítico y experimental del motor Stirling, *Anuario Científico del GTAD*, Madrid, pp.95-107 (1990)

[3] **Prieto, J. I.** *Funcionamiento del motor Stirling y aplicaciones navales*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo (1990)

[4] **Prieto, J. I.** and **Díaz, R.** Isothermal simulation with decoupled losses for kinematic Stirling engine design, *JSME Int. J.* **36**(4), pp.697-710 (1993)

[5] **Organ, A. J.** Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **205**(C6), pp.421-430 (1991)

[6] **Fano, J.** *Ecuaciones homogéneas de potencia indicada para el proyecto y análisis de máquinas de ciclo Stirling y accionamiento cinemático*, Trabajo de Investigación, Universidad de Oviedo (1993)

[7] **Prieto, J. I.** Comentarios al artículo de A. J. Organ titulado 'Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer', *Anuario Científico del GTAD*, Madrid, pp.11-14 (1992)

[8] **Prieto, J. I.** Discussion on Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206**(C3), pp.219-220 (1992)

[9] **Prieto, J. I.**, **González, M. A.**, **Díaz, R.** y **Fano, J.** Sistema completo de monomios adimensionales para el análisis práctico de máquinas de ciclo Stirling y accionamiento cinemático, *XXV Sesiones del GTAD*, Madrid (1993)

[10] **Prieto, J. I.**, **Fano, J.**, **Díaz, R.** and **González, M. A.** Application of discriminated dimensional analysis to the kimematic Stirling engine, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **208**, pp.347-353 (1994)

5. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE SEMEJANZA AL ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO

5.1 MOTOR GPU-3: RESULTADOS EXPERIMENTALES DE POTENCIA INDICADA

De las pruebas experimentales del motor GPU-3 de General Motors, realizadas en Nasa Lewis Research Center[1], se obtienen las curvas de potencia indicada mostradas en la Fig. 5.1, correspondientes a los valores p_m = 2.76 MPa, T_E = 977 K y T_C = 288 K, con hidrógeno y helio como fluidos de trabajo. Los datos fueron tomados a intervalos de 500 rpm, midiendo a escala sobre fotocopias ampliadas de los gráficos originales.

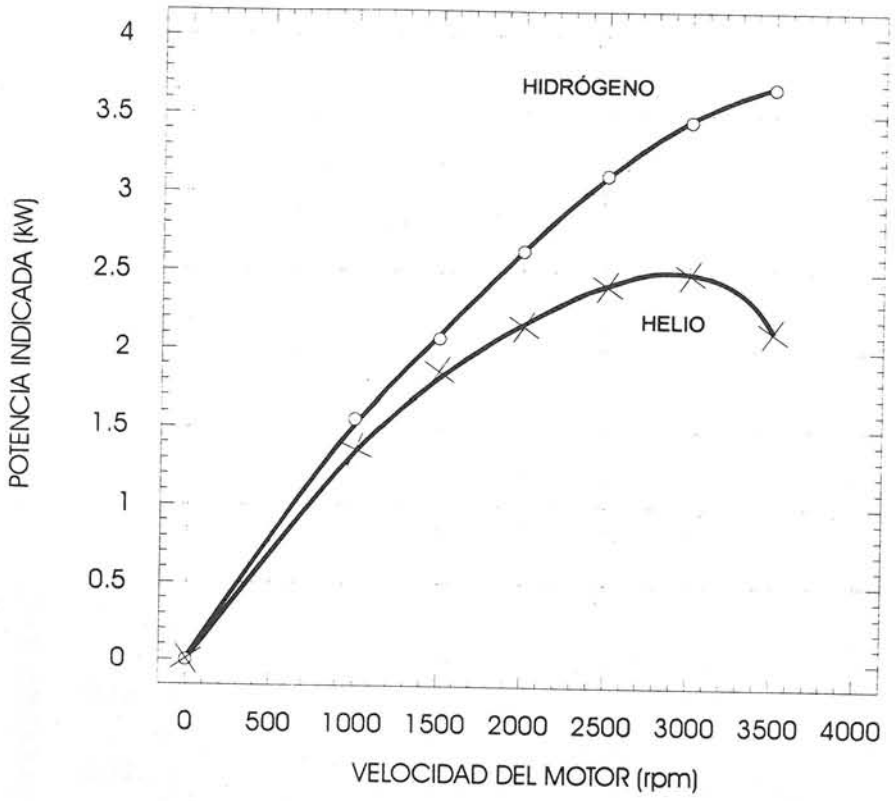


Fig. 5.1 Motor GPU-3: Potencia indicada en función de la velocidad del motor

A continuación se exponen los valores correspondientes al punto de funcionamiento de máxima de potencia, habiendo tenido en cuenta para el cálculo de la potencia indicada adimensional el valor de la cilindrada del espacio de expansión, V_E = 120 cm^3:

- <u>Hidrógeno (extrapolado):</u>

$$P_{ind,max} \approx 3800 \text{ W}$$

$$n_{s,max} \approx 4500 \text{ rpm}$$

$$\zeta_{max} \approx 0.153$$

- Helio:

$$P_{ind,max} \approx 2500 \text{ W}$$

$$n_{s,max} \approx 2900 \text{ rpm}$$

$$\zeta_{max} \approx 0.156$$

5.2 REGRESIÓN LINEAL DE LOS VALORES EXPERIMENTALES DE ζ

En la Fig. 5.2 se representan los valores adimensionales que se obtienen a partir de los datos experimentales de potencia indicada. En trabajos anteriores se puso de manifiesto[2,3] que la potencia indicada adimensional ζ podría variar linealmente con la velocidad del motor n_s, siguiendo una ecuación del tipo:

$$\zeta = \zeta_0 - mn_s \tag{5.1}$$

donde ζ_0 sería la *potencia indicada adimensional cuasiestática*. Para un motor en el que se consideren siete espacios geométricos y tres térmicos característicos, es decir, cilindros de expansión y compresión, calentador, enfriador y regenerador, se puede escribir[3]:

$$\zeta_0 = \mathrm{F}(\tau, \kappa, \alpha_e, \beta, \lambda, \varepsilon, \mu_{dce}, \mu_{dxe}, \mu_{dr}, \mu_{dxc}, \mu_{dcc}) \tag{5.2}$$

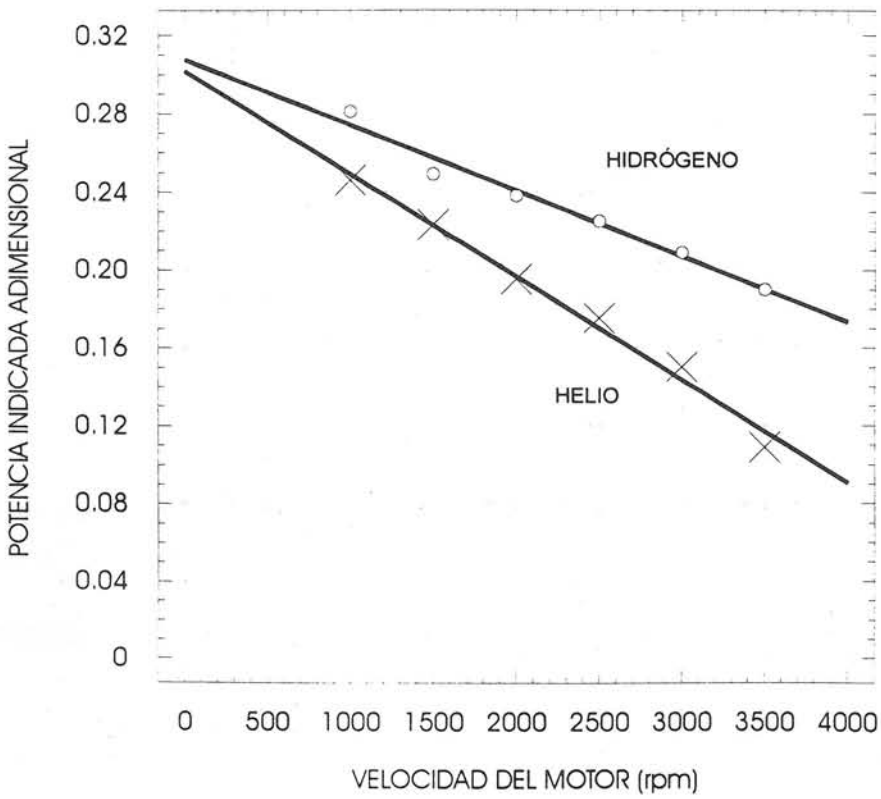


Fig. 5.2 Motor GPU-3: Potencia indicada adimensional en función de la velocidad del motor

De la Ec. (5.2) se deduce que, para un motor dado, ζ_0 sería independiente del fluido de trabajo y de su velocidad. Para el punto de funcionamiento analizado ($p_m = 2.76$ MPa, $T_E = 977$ K, $T_C = 288$ K), de la simulación cuasiestática se obtiene $\zeta_0 \approx 0.310$.

Por otra parte, el factor m, que estaría relacionado con las pérdidas de potencia indicada, por lo que se denominará *coeficiente de pérdidas*, dependería del gas de trabajo pero no de la velocidad.

Aplicando el método de regresión lineal de mínimos cuadrados, se obtienen las ecuaciones siguientes, en las que n_s debe expresarse en rpm[4,5]:

- Hidrógeno:

$$\zeta = 0.308 - 3.36 \cdot 10^{-5} n_s \tag{5.3}$$

- Helio:

$$\zeta = 0.302 - 5.28 \cdot 10^{-5} n_s \tag{5.4}$$

Alternativamente se han ensayado correlaciones basadas en la ecuación:

$$\zeta = \zeta_0 - q n_s^2 \tag{5.5}$$

La correspondiente regresión lineal de ζ en función de n_s^2 conduce a los siguientes resultados:

- Hidrógeno:

$$\zeta = 0.274 - 7.19 \cdot 10^{-9} n_s^2 \tag{5.6}$$

- Helio:

$$\zeta = 0.250 - 11.58 \cdot 10^{-9} n_s^2 \tag{5.7}$$

Finalmente, también fueron ensayadas correlaciones basadas en la ecuación:

$$\zeta = \zeta_0 - m n_s - q n_s^2 \tag{5.8}$$

obteniéndose los siguientes resultados de la regresión múltiple de mínimos cuadrados de ζ en función de n_s y n_s^2:

- Hidrógeno:

$$\zeta = 0.322 - 4.80 \cdot 10^{-5} n_s + 3.21 \cdot 10^{-9} n_s^2 \tag{5.9}$$

- Helio:

$$\zeta = 0.278 - 2.80 \cdot 10^{-5} n_s - 5.57 \cdot 10^{-9} n_s^2 \tag{5.10}$$

En la Tabla 5.1 se comparan los valores experimentales de la potencia indicada adimensional ζ con las predicciones basadas en las ecuaciones (5.3), (5.6) y (5.9) para el hidrógeno, y (5.4), (5.7) y (5.10) para el helio, mostrando los correspondientes coeficientes de correlación. La velocidad se expresa en rpm.

Tabla 5.1 Motor GPU-3: comparación de los valores experimentales con las predicciones de las ecuaciones

	Valores de ζ para el hidrógeno				Valores de ζ para el helio			
n_s	Resultados	Ec. (5.1)	Ec. (5.5)	Ec. (5.8)	Resultados	Ec. (5.1)	Ec. (5.5)	Ec. (5.8)
0	—	0.308	0.274	0.322	—	0.302	0.250	0.278
1000	0.281	0.274	0.267	0.277	0.246	0.249	0.238	0.244
1500	0.249	0.257	0.258	0.257	0.223	0.223	0.224	0.223
2000	0.238	0.241	0.245	0.239	0.195	0.196	0.204	0.200
2500	0.225	0.224	0.229	0.222	0.175	0.170	0.178	0.173
3000	0.209	0.207	0.209	0.207	0.150	0.143	0.146	0.144
3500	0.190	0.190	0.186	0.193	0.109	0.117	0.108	0.112
CC	—	- 0.9872	- 0.9634	- 0.9828	—	- 0.9941	- 0.9935	- 0.9949

De la tabla se deduce que, para el hidrógeno, la mayor precisión se obtiene de la predicción basada en la Ec. (5.1). Sin embargo, para el helio, parece que las variaciones de ζ podrían ser igualmente explicadas por regresiones con base en la Ec. (5.1) o en la Ec. (5.8). No obstante, los valores de ζ_0 obtenidos de las regresiones basadas en la Ec. (5.1) son los únicos sustancialmente próximos a los resultados de la simulación cuasiestática.

De este modo, para el mencionado punto de trabajo del motor GPU-3, parece que el funcionamiento se explica mejor mediante las ecuaciones (5.3) para el hidrógeno y (5.4) para el helio, que se muestran en la Fig. (5.2), y cuyos coeficientes de correlación son, respectivamente, – 0.9872 y – 0.9941.

5.3 PREDICCIONES PARA EL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO DE MÁXIMA POTENCIA INDICADA

De la Ec. (5.1) se deduce que:

$$P_{ind} = p_m V_E n_s (\zeta_0 - m n_s) \tag{5.11}$$

Luego, a partir de la condición de potencia máxima ($\mathrm{d}P_{ind}/\mathrm{d}n_s = 0$), se obtiene:

$$n_{s,max} = \frac{\zeta_0}{2m} \tag{5.12}$$

cuyo valor, sustituido en la Ec. (5.11), permite expresar la máxima potencia indicada mediante la ecuación:

$$P_{ind,max} = \frac{p_m V_E \zeta_0^2}{4m} \tag{5.13}$$

De las Ec. (5.12) y (5.13) se obtiene una interesante expresión de la potencia indicada adimensional en el punto de potencia máxima:

$$\zeta_{max} = \frac{1}{2}\zeta_0 \tag{5.14}$$

según la cual, en el punto de máxima potencia indicada, la potencia indicada adimensional es la misma para todos los fluidos de trabajo y equivale a la mitad del valor obtenido mediante la simulación cuasiestática.

Por tanto, si se considera la Ec. (5.1) como una aproximación aplicable a las diferentes configuraciones de máquinas Stirling cinemáticas, todos los motores con idénticos parámetros adimensionales del mecanismo de accionamiento y de volumen muerto, lo que satisfacen no sólo los geométricamente semejantes, habrán de tener el mismo valor de potencia indicada adimensional en el punto de máxima potencia si funcionan con igual relación de temperaturas, independientemente del fluido de trabajo y del material del regenerador.

La Tabla 5.2 muestra las predicciones de $P_{ind,max}$, $n_{s,max}$ y ζ_{max} que resultan de las ecuaciones (5.12), (5.13) y (5.14), y sus correspondientes porcentajes de error con respecto a los datos experimentales expuestos en la Sección 5.1:

Tabla 5.2 Motor GPU-3: comparación de los valores experimentales de $P_{ind,max}$, $n_{s,max}$ y ζ_{max} con las predicciones

	$P_{ind,max}$ (W)	Error (%)	$n_{s,max}$ (rpm)	Error (%)	ζ_{max}	Error (%)
Hidrógeno	3886	2.3	4577	1.7	0.154	0.7
Helio	2381	4.8	2858	1.4	0.151	3.2

Del procedimiento anterior se desprende que la potencia indicada adimensional de la simulación cuasiestática ζ_0 y el coeficiente de pérdidas m adquieren un interesante significado. Particularmente, parece que la Ec. (5.14) podría mejorar otros criterios de anteproyecto, como los basados en el número de Beale, que predice una potencia máxima al freno de $\zeta_{B,max} \approx 0.150$ para todas las máquinas en las que $\tau = 0.33$. De hecho, West[6] advierte que la correlación del número de Beale podría ser más correcta si se considerase potencia indicada en lugar de potencia al freno, y Senft define el número de West generalizando el número de Beale para incluir los efectos de la temperatura.

5.4 ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL COEFICIENTE DE PÉRDIDAS *m*

La Ec. (5.1) adquiere un significado más interesante si se expresa en variables adimensionales, para lo que se aplicará el análisis dimensional al coeficiente de pérdidas m. Puesto que, como ya se ha dicho, m no depende de la velocidad n_s del motor, se puede escribir la siguiente función:

$$\begin{aligned} m = \mathrm{f}\,(&p_m, T_E, T_C, V_E, V_C, \alpha_e, \beta, l, e, r, \\ &V_{dce}, V_{dxe}, V_{dr}, V_{dxc}, V_{dcc}, A_{xe}, A_{xr}, A_{xc}, \\ &r_{he}, r_{hr}, r_{hc}, \Pi_V, \gamma, R, \mu, \alpha_r, \rho_r \cdot c_r) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Siguiendo el método de análisis dimensional con discriminación espacial ya empleado en el Apartado 4.3.2, la matriz de exponentes dimensionales de las magnitudes de (5.15) en la

base $\{L_r, L_\phi, L_z, M, T, \theta\}$, que se muestra a continuación, tiene rango 6, por lo que del teorema Pi de Buckingham resultan 28 – 6 = 22 monomios adimensionales.

	p_m	T_E	T_C	V_E	V_C	α_e	β	l	e	r	V_{dce}	V_{dxe}	V_{dr}	V_{dxc}	V_{dcc}	A_{xe}	A_{xr}	A_{xc}	r_{he}	r_{hr}	r_{hc}	Π_V	γ	R	μ	α_r	$\rho_r c_r$	m
L_r	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0
L_ϕ	-1/3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0
L_z	-1/3	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
T	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-1	-2	1
θ	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0

Tomando como parámetros de referencia p_m, T_C, V_E, r, r_{he} y R, los monomios asociados a las restantes magnitudes serán los siguientes:

$$\Pi_1 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_2 = \frac{V_C}{V_E} = \kappa \qquad \Pi_3 = \alpha_e \qquad \Pi_4 = \beta$$

$$\Pi_5 = \frac{l}{r} = \lambda \qquad \Pi_6 = \frac{e}{r} = \varepsilon \qquad \Pi_7 = \frac{V_{dce}}{V_E} = \mu_{dce} \qquad \Pi_8 = \frac{V_{dxe}}{V_E} = \mu_{dxe}$$

$$\Pi_9 = \frac{V_{dr}}{V_E} = \mu_{dr} \qquad \Pi_{10} = \frac{V_{dxc}}{V_E} = \mu_{dxc} \qquad \Pi_{11} = \frac{V_{dcc}}{V_E} = \mu_{dcc} \qquad \Pi_{12} = \frac{A_{xe} r}{V_E} = \alpha_{xe}$$

$$\Pi_{13} = \frac{A_{xr} r}{V_E} = \alpha_{xr} \qquad \Pi_{14} = \frac{A_{xc} r}{V_E} = \alpha_{xc} \qquad \Pi_{15} = \frac{r_{hr}}{r_{he}} = \lambda_{hr} \qquad \Pi_{16} = \frac{r_{hc}}{r_{he}} = \lambda_{hc}$$

$$\Pi_{17} = \Pi_V \qquad \Pi_{18} = \gamma \qquad \Pi_{19} = \frac{\mu\sqrt{RT_C}}{p_m V_E^{1/3}} = \frac{1}{N_1} = \frac{1}{N_{SG} N_{MA}}$$

$$\Pi_{20} = \frac{\alpha_r}{V_E^{1/3}\sqrt{RT_C}} = N_2 = N_F N_{MA} \qquad \Pi_{21} = \frac{\rho_r c_r T_C}{p_m} = \frac{1}{N_{TCR}} \qquad \Pi_{22} = \frac{m\sqrt{RT_C}}{V_E^{1/3}}$$

Como consecuencia, resulta la siguiente función en parámetros adimensionales:

$$\frac{m\sqrt{RT_C}}{V_E^{1/3}} = \mathrm{F}\left[\begin{array}{cccccccc} & \kappa & \mu_{dce} & & & & & \\ & \alpha_e & \mu_{dxe} & \alpha_{xe} & \lambda_{hr} & & & \\ \tau & \beta & \mu_{dr} & \alpha_{xr} & \lambda_{hc} & \gamma & N_1 & N_2 \quad N_{TCR} \\ & \lambda & \mu_{dxc} & \alpha_{xc} & \Pi_V & & & \\ & \varepsilon & \mu_{dcc} & & & & & \end{array}\right] \tag{5.16}$$

El número adimensional N_1 es utilizado por Organ como un parámetro adimensional de presión. Sin embargo, p_m se incluye en la Ec. (5.15) (y en otras del Capítulo 4) como un parámetro característico de la masa del fluido de trabajo, y N_1 es el monomio que el teorema Pi asocia a la viscosidad μ, por lo que parece más apropiado considerarlo como un parámetro adimensional de viscosidad.

El monomio asociado al coeficiente de pérdidas m recibirá el nombre de *factor adimensional de pérdidas de potencia indicada*, y se le representará por Φ. Es decir:

$$\Phi = \frac{m\sqrt{RT_C}}{V_E^{1/3}} \tag{5.17}$$

Sustituyendo m en función de Φ en la Ec. (5.1) se obtiene la ecuación:

$$\zeta = \zeta_0 - \Phi \frac{V_E^{1/3} n_s}{\sqrt{RT_C}}$$

es decir:

$$\zeta = \zeta_0 - \Phi N_{MA} \tag{5.18}$$

que es una ecuación homogénea, y donde N_{MA} puede considerarse como una velocidad adimensional.

Además, de la Ec. (5.12), que nos da la velocidad del motor en el punto de máxima potencia indicada, se deduce:

$$N_{MA,max} = \frac{\zeta_0}{2\Phi} \tag{5.19}$$

que indica que el valor máximo de potencia indicada tiene lugar para el mismo valor de N_{MA} sólo en condiciones de semejanza dinámica estricta, y justifica que los máximos de potencia indicada correspondan a diferentes velocidades cuando en un motor determinado se cambia el fluido de trabajo.

La ecuación (5.18) contiene mucha más información que la ecuación (4.16). Por ejemplo, con respecto a la dificultad que el fluido de trabajo y el material del alambre del regenerador presentan para conseguir la semejanza dinámica estricta, la potencia adimensional cuasiestática ζ_0 será la misma para el modelo y el prototipo si el modelo se deriva del prototipo manteniendo la semejanza geométrica (o incluso, sin ser geométricamente semejantes, teniendo idénticos los parámetros adimensionales de volumen muerto y del accionamiento) y la misma relación de temperaturas (Ec. (5.2)). No obstante, para obtener iguales valores de potencia indicada en ambos, según la Ec. (5.18) se requiere además que tengan el mismo N_{MA} e igual factor adimensional de pérdidas de potencia indicada Φ, que es lo mismo que decir iguales γ, N_1, N_2 y N_{TCR}, puesto que, con semejanza geométrica e igual τ, de la ecuación (5.16) se deduce:

$$\Phi = \mathrm{F}(\gamma, N_1, N_2, N_{TCR})$$

Por otra parte, para un motor dado trabajando con diferentes gases, se obtendrán valores iguales de potencia indicada para el modelo y el prototipo solamente si γ, N_1, N_2 y N_{MA} no cambian, ya que, en este caso:

$$\Phi = \mathrm{F}(\gamma, N_1, N_2)$$

Los valores de γ, N_1 y N_2 para el motor GPU-3 analizado son $\gamma = 1.41$, $N_1 = 13.9 \cdot 10^6$ y $N_2 = 7.6 \cdot 10^{-8}$ para el hidrógeno, y $\gamma = 1.67$, $N_1 = 9.9 \cdot 10^6$ y $N_2 = 10.7 \cdot 10^{-8}$ para el helio, por lo que no puede esperarse un comportamiento similar en ambos casos. A pesar de ello, parece que, siendo iguales todos los demás números adimensionales, la influencia de γ, N_1 y N_2, es decir, el fluido de trabajo, conduce a pequeñas diferencias, tal como muestra la Fig. 5.3, que se ha deducido de la Fig. 5.2.

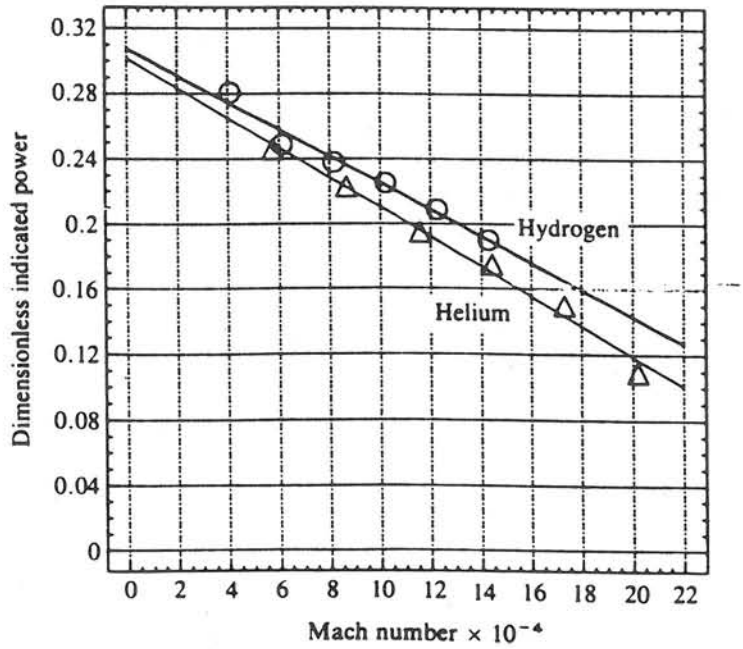


Fig. 5.3 Motor GPU-3: Potencia indicada adimensional en función del número de Mach

La Fig. 5.3 muestra también que los puntos de funcionamiento del helio correspondientes a 3000 y 3500 rpm no pueden compararse con puntos del hidrógeno a causa de los diferentes valores del número de Mach. Esto explica por qué las mayores diferencias entre los valores experimentales de ζ y las predicciones de la Ec. (5.1) tienen lugar para el helio en los puntos que están a la derecha del de potencia máxima, como se ve en la Tabla 5.1. Por tanto, parece que la Ec. (5.18) tiene bastante precisión hasta las proximidades del punto de máxima potencia indicada, que es el rango más interesante.

5.5 CORRELACIÓN DE MÁXIMA POTENCIA INDICADA ADIMENSIONAL

La Ec. (5.18) ha sido propuesta a partir de los resultados experimentales de potencia indicada del motor GPU-3 en las condiciones de $p_m = 2.76$ MPa, $T_E = 977$ K y $T_C = 288$ K, con hidrógeno y helio como fluidos de trabajo. Pero las pruebas[1] también proporcionan resultados de potencia al freno y de pérdidas mecánicas de potencia indicada en siete condiciones más de funcionamiento con helio y en dos condiciones más de funcionamiento con hidrógeno. De estos resultados se deduce la potencia indicada máxima en otras nueve condiciones de funcionamiento[7,8].

Estos datos no fueron considerados cuando se propuso por primera vez la Ec. (5.1) debido a que no corresponden a todo el intervalo de velocidades de las curvas de potencia indicada, lo que parecía imprescindible para justificar un tipo de ecuación mediante técnicas de regresión. Sin embargo, puesto que el máximo de potencia indicada está definido, proporcionan ahora una nueva e interesante información acerca del grado de cumplimiento de la Ec. (5.14).

En la Tabla 5.3 se muestran los valores correspondientes a los máximos de potencia indicada para las once condiciones de funcionamiento disponibles. En la Fig. 5.4 se comparan los resultados experimentales con las predicciones basadas en la Ec. (5.14), presentando un alto grado de correlación. De todo el intervalo de presiones y temperaturas consideradas en las pruebas (p_m = 1.38, 2.76, 4.14, 5.52 y 6.90 MPa, T_E = 866, 922 y 977 K), no está representado el máximo de potencia correspondiente a 6.90 MPa, único valor que no está bien definido. No obstante, para esta presión media, con helio como fluido de trabajo y T_E = 922 K, de los resultados de las pruebas pueden estimarse unos valores de potencia indicada de 5590 y 5240 W para las velocidades de 3000 y 3500 rpm, respectivamente.

Tabla 5.3 Resultados experimentales del motor GPU-3

		N_1	N_{TCR}	$\tau = 0.295$	$\tau = 0.312$	$\tau = 0.333$
ζ_{max}	He (γ= 1.67, $N_2 = 10.7 \cdot 10^{-8}$)	$4.9 \cdot 10^6$	814	0.154		
"	"	$9.9 \cdot 10^6$	407	0.156	0.141	0.132
"	"	$14.8 \cdot 10^6$	271	0.158	0.153	
"	"	$19.7 \cdot 10^6$	203		0.147	0.142
"	H_2 (γ= 1.41, $N_2 = 7.6 \cdot 10^{-8}$)	$13.9 \cdot 10^6$	407	0.153	0.149	0.143
$N_{MA,max}$	He (γ= 1.67, $N_2 = 10.7 \cdot 10^{-8}$)	$4.9 \cdot 10^6$	814	0.0021		
"	"	$9.9 \cdot 10^6$	407	0.0031	0.0029	0.0027
"	"	$14.8 \cdot 10^6$	271	0.0031	0.0030	
"	"	$19.7 \cdot 10^6$	203		0.0031	0.0028
"	H_2 (γ= 1.41, $N_2 = 7.6 \cdot 10^{-8}$)	$13.9 \cdot 10^6$	407	0.0034	0.0032	0.0030
Φ	He (γ= 1.67, $N_2 = 10.7 \cdot 10^{-8}$)	$4.9 \cdot 10^6$	814	72.471		
"	"	$9.9 \cdot 10^6$	407	50.469	49.129	49.699
"	"	$14.8 \cdot 10^6$	271	51.282	51.429	
"	"	$19.7 \cdot 10^6$	203		47.712	49.851
"	H_2 (γ= 1.41, $N_2 = 7.6 \cdot 10^{-8}$)	$13.9 \cdot 10^6$	407	45.053	46.461	47.382

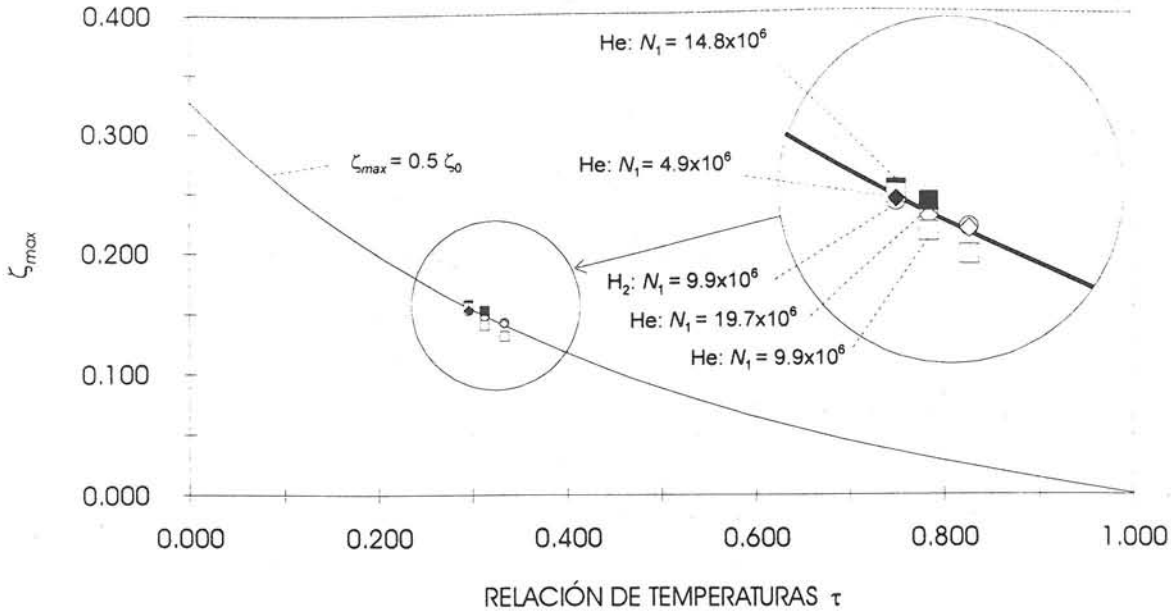


Fig. 5.4 Comparación de los resultados experimentales de máxima potencia indicada adimensional con las predicciones de la simulación cuasiestática

5.6 CORRELACIÓN DEL NÚMERO DE MACH CORRESPONDIENTE AL MÁXIMO DE POTENCIA INDICADA

En la Tabla 5.3 se presentan también los valores del número de Mach correspondientes al máximo de potencia indicada para las once condiciones de funcionamiento mencionadas. La Fig. 5.5 muestra los resultados experimentales para las ocho condiciones disponibles de funcionamiento con helio. Se observa que, en el intervalo que puede ser considerado como de presiones medias y altas ($10 \cdot 10^6 < N_1 < 20 \cdot 10^6$) para el motor GPU-3, el número de Mach que corresponde al máximo de potencia indicada decrece ligeramente con la relación de temperaturas τ, y crece muy poco con N_1. Se aparta de los restantes valores el asociado a $N_1 \approx 5 \cdot 10^6$, que puede considerarse correspondiente al nivel de presiones bajas del motor. Si se ajustan los resultados del helio por regresión lineal, excluyendo este valor, se obtiene la siguiente ecuación, válida para $10^7 < N_1 < 2 \cdot 10^7$, $200 < N_{TCR} < 400$, $N_2 \approx 10^{-7}$, $\gamma = 1.67$:

$$N_{MA,max} = 0.0059 - 0.0093\tau \tag{5.20}$$

con un coeficiente de correlación de – 0.8979.

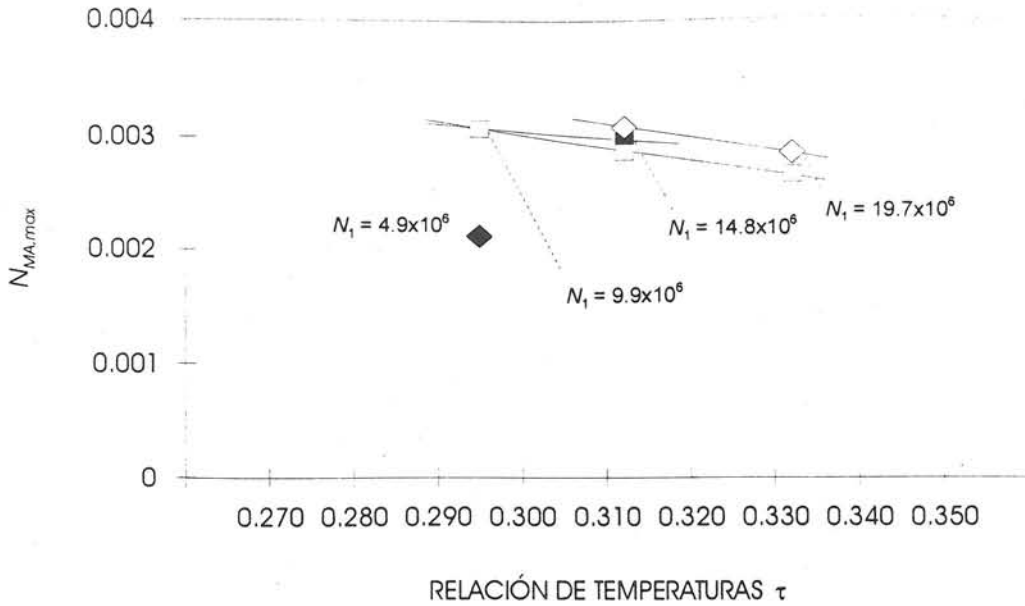


Fig. 5.5 Número de Mach correspondiente al máximo de potencia indicada para el helio

La Fig. 5.6 muestra los resultados experimentales para las tres condiciones de funcionamiento con hidrógeno. Se observa de nuevo que el número de Mach que corresponde a la potencia indicada máxima decrece ligeramente con τ para el único valor disponible $N_1 \approx 14 \cdot 10^6$, que puede considerarse perteneciente al nivel de presiones medias del motor. Lamentablemente no se dispone de resultados experimentales a otras presiones. Por regresión lineal se deduce, para el hidrógeno, la ecuación siguiente, válida para $N_1 \approx 1.4 \cdot 10^7$, $N_{TCR} \approx 400$, $N_2 \approx 10^{-7}$, $\gamma = 1.41$:

$$N_{MA,max} = 0.0065 - 0.0105\tau \tag{5.21}$$

con un coeficiente de correlación de – 0.9982.

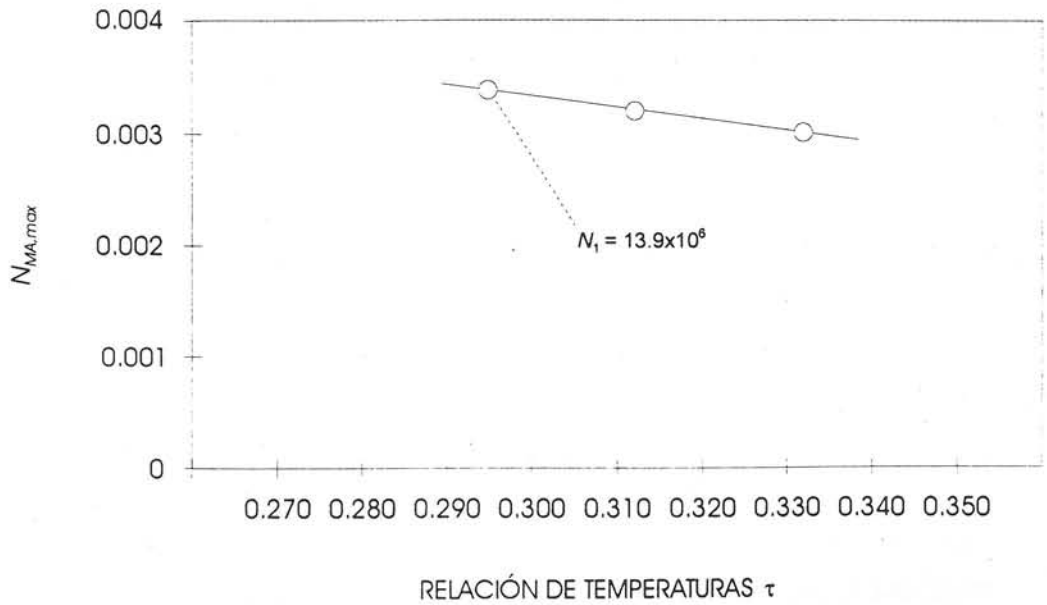


Fig. 5.6 Número de Mach correspondiente al máximo de potencia indicada para el hidrógeno

5.7 FACTOR ADIMENSIONAL DE PÉRDIDAS DE POTENCIA INDICADA

El factor adimensional de pérdidas de potencia indicada Φ puede obtenerse a partir de los resultados experimentales de ζ_{max} y $N_{MA,max}$, pues de las ecuaciones (5.14) y (5.19) resulta:

$$\Phi = \frac{\zeta_{max}}{N_{MA,max}} \tag{5.24}$$

Los resultados numéricos figuran en la Tabla 5.3, y están representados en la Fig. 5.7 los correspondientes al helio, y en la Fig. 5.8 los del hidrógeno. Se observa para ambos gases que las disminuciones de ζ_{max} y $N_{MA,max}$ con la relación de temperaturas τ se compensan en alguna medida, de modo que, al menos para las más frecuentes temperaturas de funcionamiento ($0.29 < \tau < 0.33$), el factor Φ es prácticamente independiente de τ.

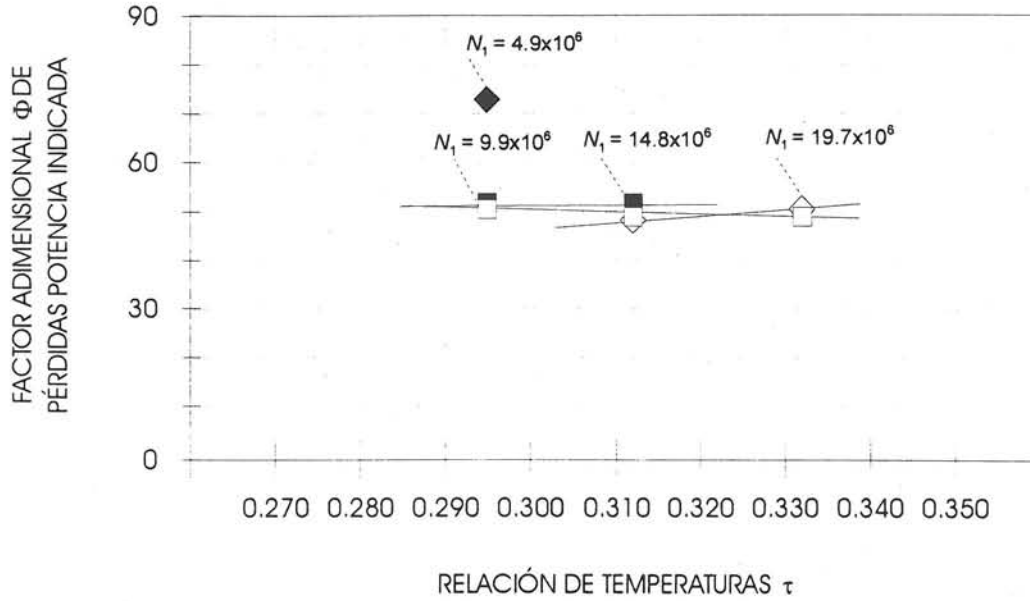


Fig. 5.7 Factor adimensional de pérdidas de potencia indicada para el helio

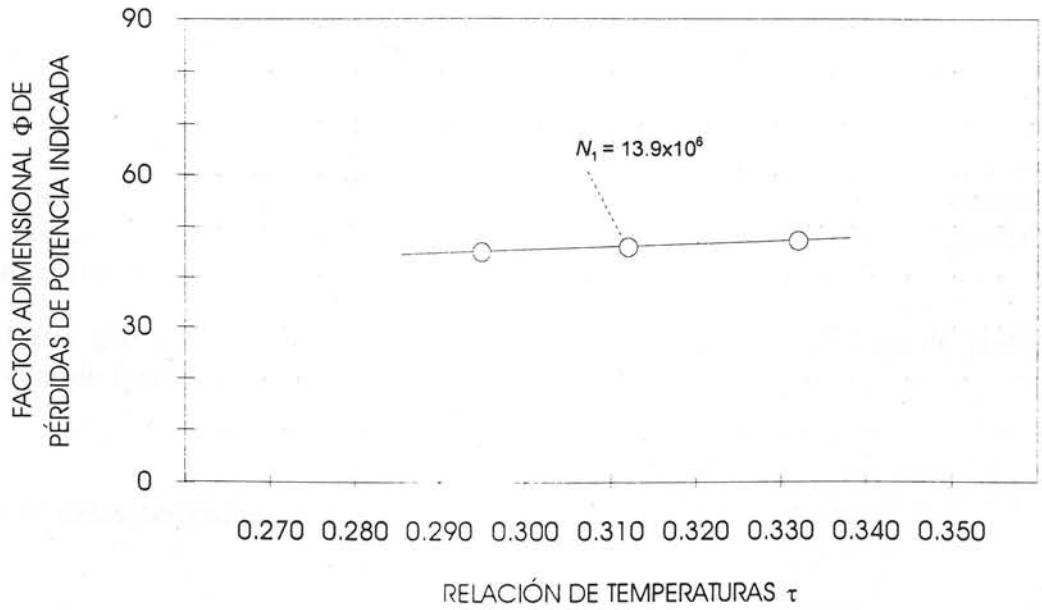


Fig. 5.8 Factor adimensional de pérdidas de potencia indicada para el hidrógeno

Para el helio (γ = 1.67), a medias y altas presiones, se observa que Φ es también prácticamente independiente de N_1 y de N_{TCR}. Es decir, la potencia indicada es aproximadamente proporcional a la presión media. El hecho de que Φ aumente mucho en el nivel de bajas presiones ($N_1 \approx 5 \cdot 10^6$) es una característica general observada del funcionamiento de las máquinas Stirling cinemáticas, pero irrelevante desde el punto de vista del anteproyecto. Por tanto, en el intervalo $10 \cdot 10^6 < N_1 < 20 \cdot 10^6$, $N_2 = 10.7 \cdot 10^{-8}$, $203 < N_{TCR} < 407$, puede asumirse, con un grado de error del 5%, que

$$\Phi \approx 50.0$$

Para el hidrógeno ($\gamma = 1.41$, $N_1 \approx 14 \cdot 10^6$, $N_2 = 7.6 \cdot 10^{-8}$, $N_{TCR} = 407$), puede considerarse, con un nivel de error del 3%, que

$$\Phi \approx 46.0$$

De acuerdo con la semejanza dinámica, las tendencias funcionales de un cierto fluido de trabajo pueden aplicarse a otros fluidos con los mismos parámetros adimensionales. De este modo, parece deducirse, para el motor GPU-3, que la diferencia entre los valores de Φ para el helio y el hidrógeno se debe, probablemente, a la influencia de γ o N_2, ya que se ha visto para ambos gases que τ influye poco en Φ, y para el helio que el factor adimensional de pérdidas de potencia indicada es prácticamente independiente de N_1 y N_{TCR}. Aunque se sabe que para un motor trabajando con igual presión media y las mismas temperaturas, pero distinto fluido de trabajo, las velocidades correspondientes al máximo de potencia indicada satisfacen

$$n_{s,max}\,(\text{aire}) < n_{s,max}\,(\text{He}) < n_{s,max}\,(\text{H}_2)$$

las diferencias entre los correspondientes números de Mach y, en consecuencia, entre los valores de Φ, son modificadas por los distintos valores de la constante característica R de cada gas. Por lo tanto, se necesitan datos experimentales para sacar conclusiones definitivas sobre los valores de Φ de un prototipo operando con los tres gases de trabajo típicos.

Para el motor GPU-3 funcionando con aire ($\gamma = 1.40$) a 2.76 MPa, se obtienen unos parámetros adimensionales $N_1 \approx 26 \cdot 10^6$, $N_2 \approx 29 \cdot 10^{-8}$ y $N_{TCR} = 407$. Considerando los resultados correspondientes al helio, si se supone que Φ es aproximadamente independiente de N_1, los diferentes valores de Φ para el aire y el hidrógeno pudieran ser debidos a los distintos valores de N_2. El problema debería quedar resuelto con los resultados experimentales del motor con aire como gas de trabajo, pero, desafortunadamente, no se dispone de ellos. Además, tampoco parece que puedan extrapolarse siempre resultados de un prototipo a otro porque, aunque algunos monomios adimensionales sean muy similares, es muy probable que en los geométricos existan diferencias importantes.

Hasta que sean obtenidos datos corroborados para un amplio rango de prototipos y condiciones de funcionamiento, se propone el valor de

$$\Phi \approx 50.0$$

para los modelos derivados del GPU-3 funcionando con aire.

5.8 POTENCIA INDICADA DEL MOTOR GPU-3 A 6.90 MPa

Cuando el motor GPU-3 funciona con helio o con aire a 6.90 MPa y $T_E = 922$ K, a partir de la Ec. (5.18) puede escribirse

$$\zeta = 0.296 - 50 N_{MA} \tag{5.23}$$

Como muestra la Fig. 5.9, las predicciones para el helio concuerdan con los dos datos disponibles de potencia indicada, ya mencionados, correspondientes a las velocidades de 3000 y 3500 rpm. A partir de la curva se estima un máximo de potencia indicada de 5700 W a una velocidad aproximada de 2800 rpm.

Dicha figura también muestra las predicciones para el aire. En este caso, puede estimarse un máximo de potencia indicada de unos 2100 W a 1000 rpm. Este resultado concuerda con la predicción del número de Beale, mientras que *MarWeiss*[9] computa unos 2250 W a 1350 rpm.

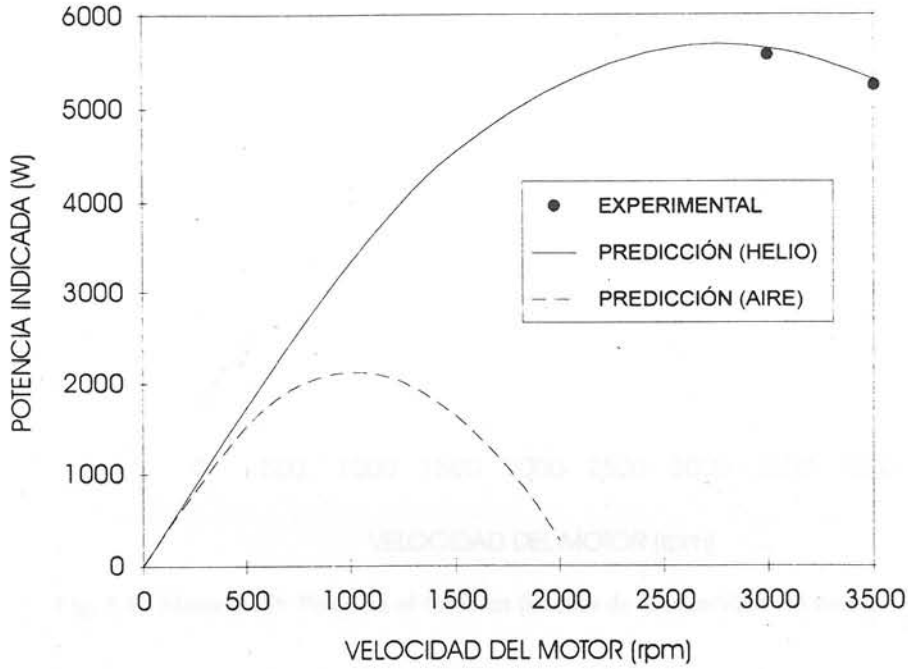


Fig. 5.9 Curvas de potencia indicada con helio y aire a p_m = 6.90 MPa y T_E = 922 K

5.9 DATOS EXPERIMENTALES DE OTROS MOTORES

Si bien no se dispone de más datos experimentales de potencia indicada que los ya considerados del motor GPU-3, se han podido analizar resultados de pruebas de potencia al freno en los motores P-40 de United Stirling, M102C de Philips y V4-275R MARK II de Kockums, con suficientes puntos de funcionamiento para extraer conclusiones.

A continuación se comentará cronológicamente el trabajo realizado, cuyo objetivo fue contrastar hasta qué punto puede extenderse a otros motores el modelo de funcionamiento verificado en el GPU-3.

5.9.1 MOTOR P-40 DE UNITED STIRLING

A partir de las pruebas experimentales del motor P-40 con hidrógeno, helio y nitrógeno como fluidos de trabajo[10], se obtienen las curvas de potencia representadas en la Fig. 5.10, habiéndose tomado los datos por el mismo procedimiento que en el motor GPU-3, es decir, midiendo a escala, a intervalos de 500 rpm, sobre fotocopias ampliadas de los gráficos originales. Aunque Bratt no lo indica explícitamente, se ha interpretado que las mediciones son de potencia al freno.

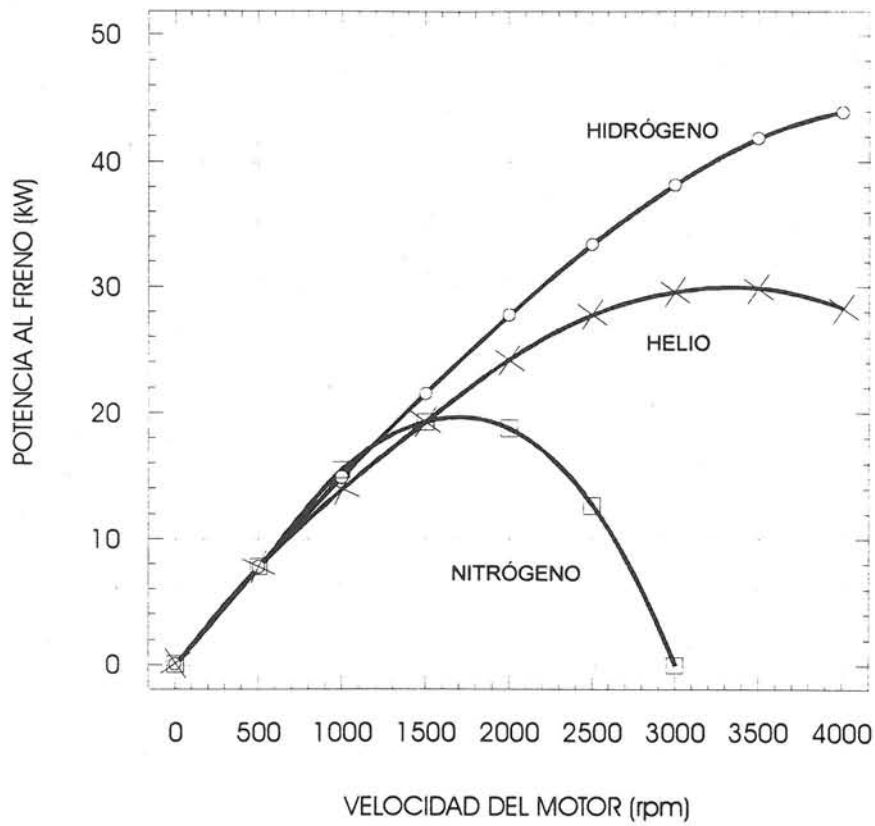


Fig. 5.10 Motor P-40: Potencia al freno en función de la velocidad del motor

Los valores correspondientes al punto de funcionamiento de máxima potencia (se desconocen los valores de p_m y V_E) son los siguientes:

- <u>Hidrógeno (extrapolado)</u>:

$$P_{B,max} \approx 44300 \text{ W}$$

$$n_{s,max} \approx 4400 \text{ rpm}$$

$$\zeta_{B,max}\, p_m V_E \approx 604.8 \text{ J/rev}$$

- <u>Helio</u>:

$$P_{B,max} \approx 30000 \text{ W}$$

$$n_{s,max} \approx 3250 \text{ rpm}$$

$$\zeta_{B,max}\, p_m V_E \approx 553.8 \text{ J/rev}$$

- Nitrógeno:

$$P_{B,max} \approx 20000 \text{ W}$$

$$n_{s,max} \approx 1750 \text{ rpm}$$

$$\zeta_{B,max}\, p_m V_E \approx 685.8 \text{ J/rev}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al llevado a cabo para el motor GPU-3, pero con potencia al freno en lugar de potencia indicada, se ensayan correlaciones basadas en una ecuación similar a la Ec. (5.1), que supondría dependencia lineal de la potencia al freno adimensional con la velocidad, en la forma:

$$\zeta_B = \zeta_{B0} - m n_s \tag{5.24}$$

Aplicando el método de regresión lineal de mínimos cuadrados, se obtienen las ecuaciones siguientes:

- Hidrógeno:

$$\zeta_B p_m V_E = 974.36 - 7.41 \cdot 10^{-2} n_s \tag{5.25}$$

- Helio:

$$\zeta_B p_m V_E = 990.90 - 13.71 \cdot 10^{-2} n_s \tag{5.26}$$

- Nitrógeno:

$$\zeta_B p_m V_E = 1113.40 - 25.21 \cdot 10^{-2} n_s \tag{5.27}$$

En la obtención de la Ec. (5.27) para el nitrógeno no se han considerado los dos puntos correspondientes a 2500 y 3000 rpm, por estar situados bastante a la derecha del máximo de potencia al freno, es decir, fuera del rango de funcionamiento interesante.

La Tabla 5.4 muestra las predicciones de $P_{B,max}$, $n_{s,max}$ y $\zeta_{B,max}$ (multiplicadas por $p_m V_E$) que resultan de las ecuaciones (5.25), (5.26) y (5.27), y sus correspondientes porcentajes de error con respecto a los datos experimentales, así como los valores de ζ_{B0} y del coeficiente de pérdidas m (igualmente multiplicados por $p_m V_E$), y los coeficientes de correlación en cada caso. Se observa que los porcentajes de error son importantes suponiendo la dependencia lineal de la potencia al freno con la velocidad del motor. En la tabla, $\zeta_{B0} p_m V_E$ y $\zeta_{B,max} p_m V_E$ se expresan en J, $P_{B,max}$ en W, $n_{s,max}$ en rpm y $m p_m V_E$ en J·min.

Tabla 5.4 Motor P-40: predicciones de $P_{B,max}$, $n_{s,max}$ y $\zeta_{B,max}$ basadas en la Ec. (5.24)

	$\zeta_{B0} p_m V_E$	$m p_m V_E$	CC	$P_{B,max}$	Error (%)	$n_{s,max}$	Error (%)	$\zeta_{B,max} p_m V_E$	Error (%)
Hidrógeno	974.36	$7.41 \cdot 10^{-2}$	-0.9936	53362	20.4	6572	46	487.2	19.4
Helio	990.90	$13.71 \cdot 10^{-2}$	-0.9964	29830	0.6	3613	11.2	495.6	10.5
Nitrógeno	1113.40	$25.21 \cdot 10^{-2}$	-0.9343	20487	2.4	2208	26.2	556.8	18.8

A continuación se ensayan correlaciones basadas en la ecuación:

$$\zeta_B = \zeta_{B0} - q n_s^2 \tag{5.28}$$

que conducen a los siguientes resultados:

- Hidrógeno:

$$\zeta_B p_m V_E = 909.86 - 1.60 \cdot 10^{-5} n_s^2 \tag{5.29}$$

- Helio:

$$\zeta_B p_m V_E = 869.09 - 2.93 \cdot 10^{-5} n_s^2 \tag{5.30}$$

- Nitrógeno:

$$\zeta_B p_m V_E = 993.67 - 10.42 \cdot 10^{-5} n_s^2 \tag{5.31}$$

Al igual que en el caso de la Ec. (5.27), para la obtención de la Ec. (5.31) no se han tenido en cuenta los puntos correspondientes a 2500 y 3000 rpm.

Las predicciones basadas en estas ecuaciones y los correspondientes porcentajes de error respecto a los resultados experimentales se muestran en la Tabla 5.5, así como los valores de ζ_{B0} y de q (multiplicados por $p_m V_E$), y del coeficiente de correlación. Las unidades son las mismas que en la Tabla 5.4, salvo para $q p_m V_E$, que se expresa en J·min^2. En la Fig. 5.11 se muestran los valores experimentales de la potencia al freno adimensional, multiplicados por $p_m V_E$, y se contrastan con las predicciones basadas en la Ec. (5.28), representadas por las Ec. (5.29) para el hidrógeno, (5.30) para el helio y (5.31) para el nitrógeno.

Tabla 5.5 Motor P-40: predicciones de $P_{B,max}$, $n_{s,max}$ y $\zeta_{B,max}$ basadas en la Ec. (5.28)

	$\zeta_{B0} p_m V_E$	$q p_m V_E$	CC	$P_{B,max}$	Error (%)	$n_{s,max}$	Error (%)	$\zeta_{B,max} p_m V_E$	Error (%)
Hidrógeno	909.86	$1.60 \cdot 10^{-5}$	-0.9913	43957	0.8	4348	1.2	606.6	0.3
Helio	869.09	$2.93 \cdot 10^{-5}$	-0.9812	30369	1.2	3145	3.2	579.0	4.6
Nitrógeno	993.67	$10.42 \cdot 10^{-5}$	-0.9810	19682	1.6	1783	1.9	662.4	3.4

Las conclusiones iniciales que se deducen de la observación de estos resultados son las siguientes:

- Los porcentajes de error de la Tabla 5.5 son aceptables, lo que indica que, para el motor P-40, las predicciones de potencia al freno basadas en la Ec. (5.28), es decir con dependencia lineal del cuadrado de la velocidad, son más precisas que las basadas en la Ec. (5.24).

- Mientras que las rectas de regresión relativas al hidrógeno y al helio tienden sensiblemente al mismo valor en el origen de velocidades, la recta obtenida para el nitrógeno difiere de las otras dos. Pendientes de análisis posteriores, se considera que el comportamiento aparentemente diferente del nitrógeno podría ser explicado por el hecho de haber utilizado pocos puntos en el análisis de la regresión.

- No se puede extraer conclusiones definitivas acerca de la idoneidad del modelo de potencia indicada contrastado en el motor GPU-3, debido a la falta de resultados experimentales de potencia indicada o de pérdidas mecánicas de potencia.

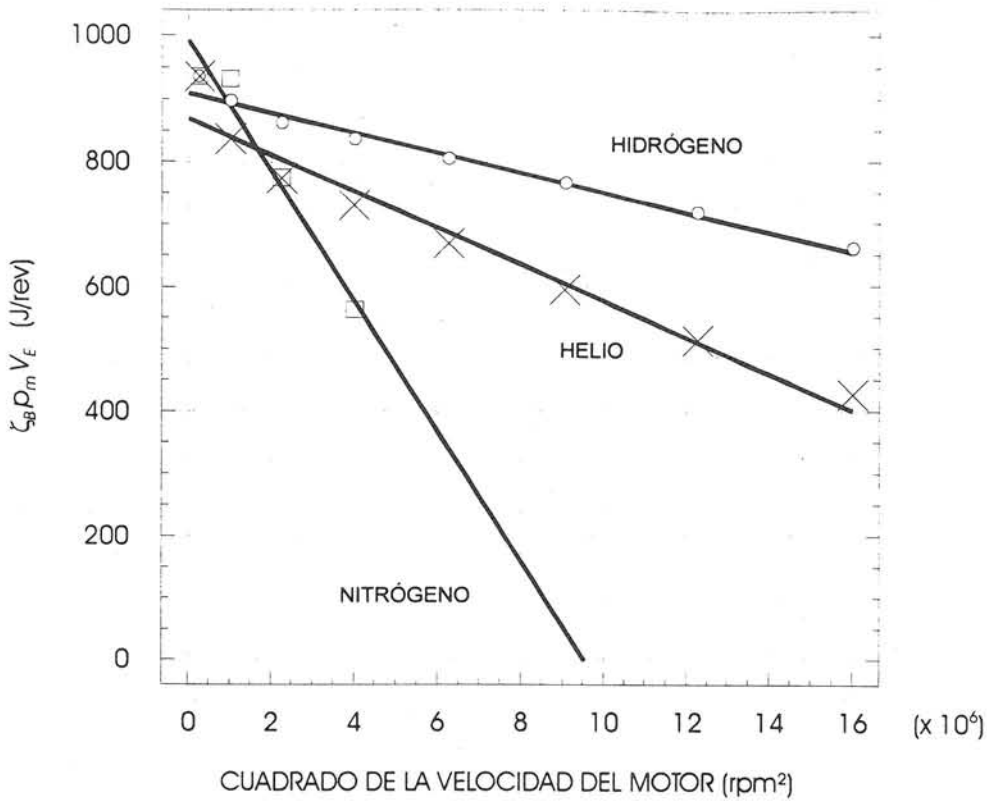


Fig. 5.11 Motor P-40: Potencia al freno adimensional en función del cuadrado de la velocidad del motor

5.9.2 MOTOR M102C DE PHILIPS

Probablemente las pruebas experimentales más extensas de un motor de ciclo Stirling que hayan sido publicadas, corresponden al trabajo realizado por Ward[11] empleando un motor M102C de Philips, funcionando con aire y modificado para ser refrigerado por agua.

La Tabla 5.6 fue realizada a partir de la presentada por Walker[12] con los valores de potencia al freno obtenidos por Ward. Se añadieron los valores correspondientes de potencia al freno adimensional ζ_B, para cuya obtención se tuvo en cuenta la cilindrada de expansión del motor, de valor $V_E = 63.8$ cm^3. Los valores corresponden a 4 temperaturas diferentes del foco caliente, 7 niveles de presión media y 4 velocidades del motor, es decir, 112 puntos de funcionamiento.

Al igual que en el motor P-40, se realizó un estudio de los resultados experimentales analizando la dependencia de la potencia al freno adimensional ζ_B con la velocidad. En primer lugar se supuso una dependencia lineal, partiendo de correlaciones basadas en la Ec. (5.24), y a continuación, una dependencia lineal del cuadrado de la velocidad, ensayando correlaciones basadas en la Ec. (5.28).

Se aplicó el método de regresión de mínimos cuadrados a cada una de las series que corresponden a cada valor de presión y de temperatura del foco caliente. Para cada presión

existen cuatro series de temperaturas, y cada serie consta de cuatro puntos de funcionamiento que corresponden a cuatro velocidades del motor.

Tabla 5.6 Motor M102C de Philips: resultados experimentales

n_s (rpm)	T_E (°C)	p_m (bar)	P_B (W)	ζ_B
1800	900	12.41	465.5	0.195
		11.03	442.9	0.209
		9.66	442.9	0.239
		8.28	388.2	0.244
		6.90	324.2	0.245
		5.52	265.7	0.251
		4.14	171.5	0.216
	800	12.41	365.6	0.153
		11.03	376.9	0.178
		9.66	350.5	0.189
		8.28	318.5	0.200
		6.90	269.5	0.204
		5.52	214.8	0.203
		4.14	137.6	0.173
	700	12.41	229.9	0.096
		11.03	248.8	0.117
		9.66	235.6	0.127
		8.28	222.4	0.140
		6.90	292.2	0.221
		5.52	148.9	0.140
		4.14	92.3	0.116
	600	12.41	37.7	0.015
		11.03	143.2	0.067
		9.66	154.5	0.084
		8.28	107.4	0.067
		6.90	101.8	0.077
		5.52	73.5	0.069
		4.14	35.8	0.045
1400	900	12.41	467.6	0.253
		11.03	463.2	0.282
		9.66	406.0	0.282
		8.28	367.9	0.298
		6.90	328.3	0.319
		5.52	247.7	0.301
		4.14	190.6	0.309
	800	12.41	420.7	0.227
		11.03	365.0	0.222
		9.66	348.9	0.242
		8.28	331.3	0.268
		6.90	285.0	0.277
		5.52	228.7	0.278
		4.14	149.5	0.242
	700	12.41	284.4	0.153
		11.03	288.8	0.175
		9.66	278.5	0.193
		8.28	247.7	0.200
		6.90	215.5	0.209
		5.52	167.1	0.203
		4.14	115.8	0.187
	600	12.41	165.6	0.089
		11.03	199.3	0.121
		9.66	189.1	0.131
		8.28	165.6	0.134
		6.90	149.5	0.145
		5.52	117.3	0.142
		4.14	77.7	0.126
1600	900	12.41	479.1	0.226
		11.03	443.9	0.236
		9.66	455.7	0.277
		8.28	388.6	0.275
		6.90	350.1	0.298
		5.52	271.4	0.289
		4.14	191.0	0.271
	800	12.41	392.0	0.185
		11.03	393.7	0.209
		9.66	356.8	0.217
		8.28	330.0	0.234
		6.90	276.4	0.236
		5.52	216.1	0.230
		4.14	152.4	0.216
	700	12.41	251.3	0.119
		11.03	279.8	0.149
		9.66	254.6	0.154
		8.28	251.3	0.178
		6.90	182.6	0.155
		5.52	160.8	0.171
		4.14	95.5	0.135
	600	12.41	142.4	0.067
		11.03	130.7	0.069
		9.66	142.4	0.087
		8.28	149.1	0.105
		6.90	124.0	0.105
		5.52	103.9	0.110
		4.14	50.3	0.071
1200	900	12.41	457.3	0.288
		11.03	447.3	0.317
		9.66	403.3	0.327
		8.28	344.3	0.325
		6.90	299.0	0.339
		5.52	240.0	0.340
		4.14	170.9	0.323
	800	12.41	390.7	0.246
		11.03	363.1	0.258
		9.66	336.7	0.273
		8.28	304.0	0.287
		6.90	255.0	0.289
		5.52	199.8	0.283
		4.14	148.5	0.281
	700	12.41	291.5	0.184
		11.03	281.4	0.199
		9.66	281.4	0.228
		8.28	255.0	0.241
		6.90	216.0	0.245
		5.52	174.6	0.247
		4.14	125.6	0.237
	600	12.41	191.0	0.120
		11.03	190.0	0.134
		9.66	179.7	0.145
		8.28	163.3	0.154
		6.90	138.2	0.156
		5.52	103.0	0.146
		4.14	71.6	0.135

En la Tabla 5.7 se muestran los valores de ζ_{B0} y m, para el primer caso, y de ζ_{B0} y q para el segundo, así como los coeficientes de correlación, correspondientes a las distintas rectas de regresión obtenidas para las 28 series.

Tabla 5.7 Motor M102C de Philips: resultados de las regresiones

		Regresiones basadas en Ec. (5.24)			Regresiones basadas en Ec. (5.28)		
p_m (MPa)	T_E (°C)	ζ_{B0}	m (min)	CC	ζ_{B0}	q (min^2)	CC
0.414	600	0.3370	0.0001620	- 0.970565	0.218575	$5.41630 \cdot 10^{-8}$	- 0.975223
	700	0.4800	0.0002075	- 0.982913	0.325691	$6.82352 \cdot 10^{-8}$	- 0.971425
	800	0.4905	0.0001750	- 0.996024	0.361895	$5.82152 \cdot 10^{-8}$	- 0.995773
	900	0.5490	0.0001795	- 0.968733	0.418967	$6.05292 \cdot 10^{-8}$	- 0.981740
0.552	600	0.3140	0.0001315	- 0.951656	0.219094	$4.44973 \cdot 10^{-8}$	- 0.967788
	700	0.4550	0.0001765	- 0.996146	0.324425	$5.83370 \cdot 10^{-8}$	- 0.989497
	800	0.4645	0.0001440	- 0.962893	0.359629	$4.83171 \cdot 10^{-8}$	- 0.970976
	900	0.5045	0.0001395	- 0.982401	0.401770	$4.63131 \cdot 10^{-8}$	- 0.980190
0.690	600	0.3285	0.0001385	- 0.980232	0.227423	$4 \cdot 6379510^{-8}$	- 0.986500
	700	0.3015	0.0000625	- 0.429113	0.250353	$1.85230 \cdot 10^{-8}$	- 0.382204
	800	0.4740	0.0001485	- 0.980807	0.365664	$4.97454 \cdot 10^{-8}$	- 0.987419
	900	0.5275	0.0001515	- 0.966838	0.417669	$5.10518 \cdot 10^{-8}$	- 0.979139
0.828	600	0.3325	0.0001450	- 0.990505	0.226690	$4.85607 \cdot 10^{-8}$	- 0.996932
	700	0.4335	0.0001625	- 0.994038	0.313739	$5.39083 \cdot 10^{-8}$	- 0.991058
	800	0.4685	0.0001475	- 0.992333	0.360697	$4.93246 \cdot 10^{-8}$	- 0.997289
	900	0.4850	0.0001330	- 0.998421	0.387309	$4.42648 \cdot 10^{-8}$	- 0.998649
0.966	600	0.2820	0.0001135	- 0.949342	0.197898	$3.74557 \cdot 10^{-8}$	- 0.941536
	700	0.4320	0.0001710	- 0.997547	0.305728	$5.66209 \cdot 10^{-8}$	- 0.992672
	800	0.4380	0.0001385	- 0.999180	0.335904	$4.59367 \cdot 10^{-8}$	- 0.995968
	900	0.4830	0.0001345	- 0.963576	0.383645	$4.45195 \cdot 10^{-8}$	- 0.958530
1.103	600	0.2875	0.0001265	- 0.939392	0.193829	$4.17737 \cdot 10^{-8}$	- 0.932290
	700	0.3640	0.0001360	- 0.997737	0.264305	$4.53499 \cdot 10^{-8}$	- 0.999873
	800	0.4040	0.0001250	- 0.986825	0.311790	$4.14305 \cdot 10^{-8}$	- 0.982974
	900	0.5385	0.0001850	- 0.995574	0.401923	$6.12710 \cdot 10^{-8}$	- 0.990943
1.241	600	0.3255	0.0001685	- 0.983989	0.202545	$5.64327 \cdot 10^{-8}$	- 0.990405
	700	0.3615	0.0001490	- 0.997107	0.251421	$4.93136 \cdot 10^{-8}$	- 0.991777
	800	0.4435	0.0001605	- 0.990746	0.326026	$5.35983 \cdot 10^{-8}$	- 0.994329
	900	0.4700	0.0001530	- 0.998806	0.357181	$5.07307 \cdot 10^{-8}$	- 0.995297

Los valores experimentales de ζ_B y las rectas de regresión obtenidas se representan en las Fig. 5.12 y 5.13, que constan, cada una, de siete gráficos clasificados mediante los distintos valores de presión media, de forma que la temperatura figura en cada gráfico como parámetro. Se observa que la recta correspondiente a los valores $p_m = 0.690$ MPa, $T_E = 700$°C, se aparta del comportamiento de las restantes, lo cual no parece justificable si se acepta que el motor ha de tener un funcionamiento continuo, por lo que, probablemente sea erróneo el valor de la potencia al freno que figura en la Tabla 5.6 para una velocidad del motor $n_s = 1800$ rpm en la mencionada serie.

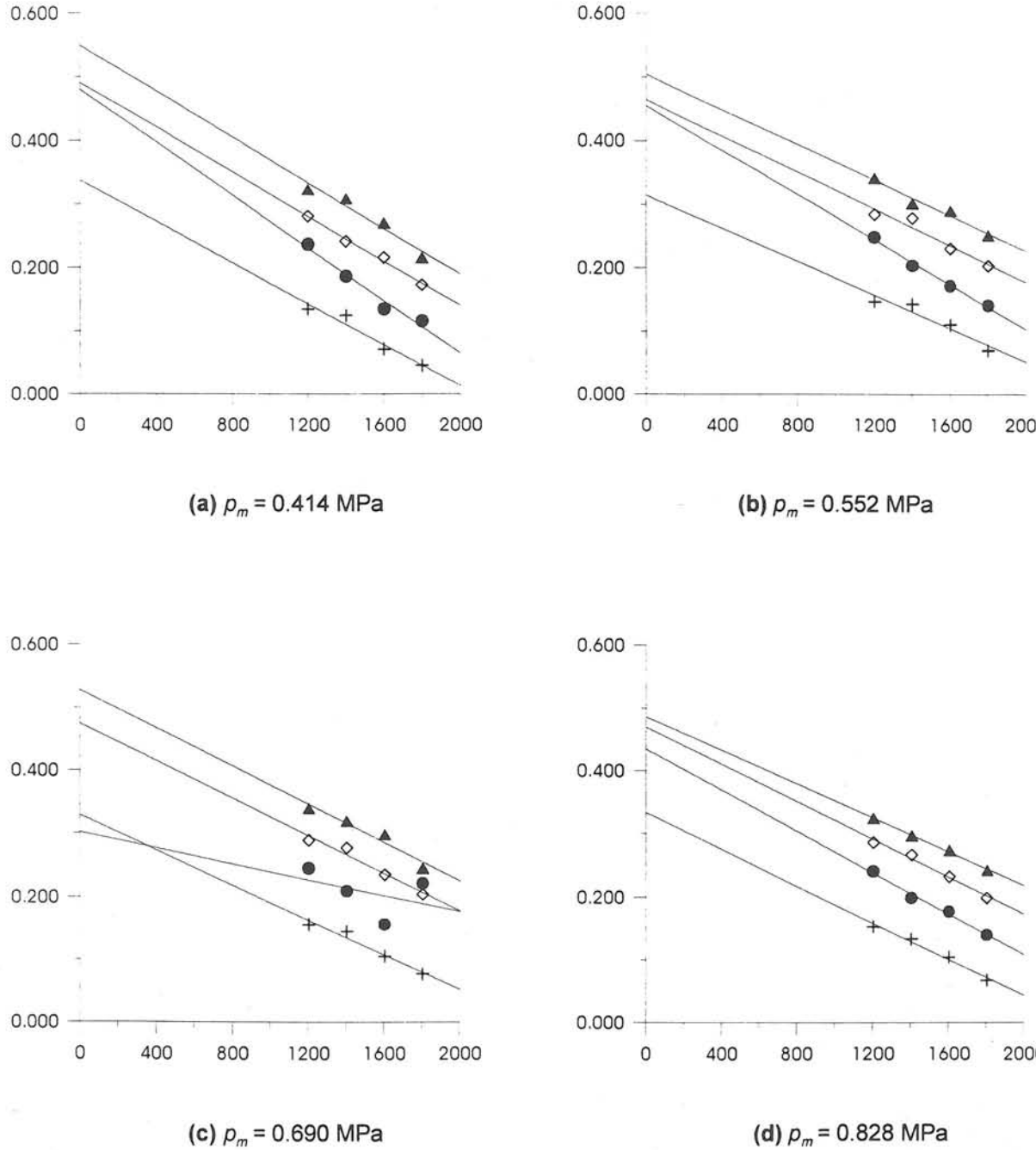
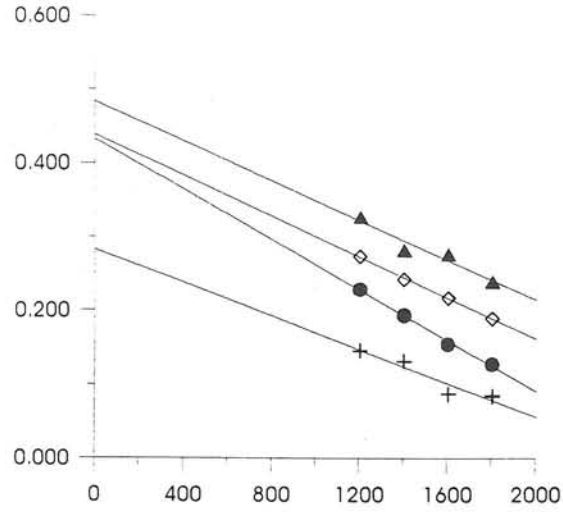
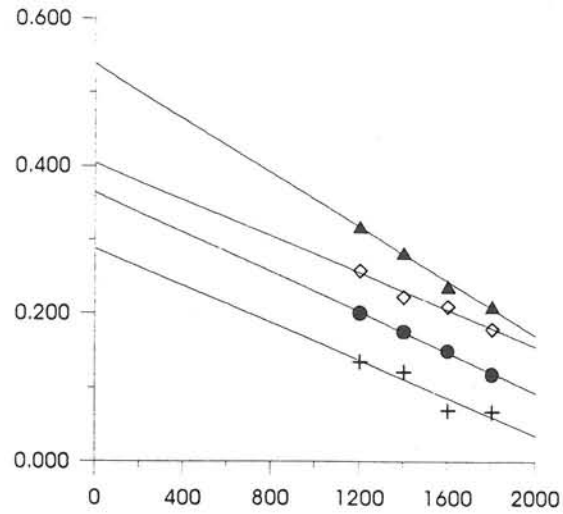


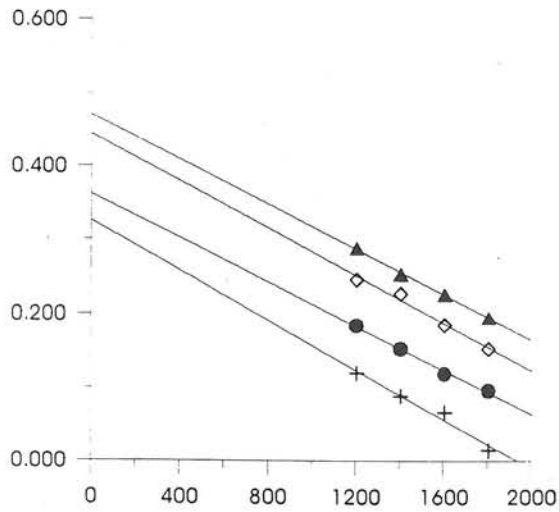
Fig. 5.12 Motor M102C de Philips: Potencia al freno adimensional en función de la velocidad del motor



(e) p_m = 0.966 MPa



(f) p_m = 1.103 MPa



(g) p_m = 1.241 MPa

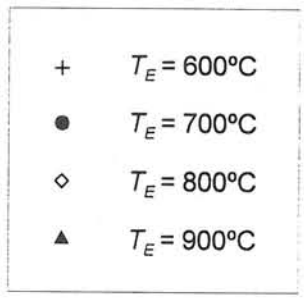


Fig. 5.12 (Cont.) Motor M102C de Philips: Potencia al freno adimensional en función de la velocidad del motor

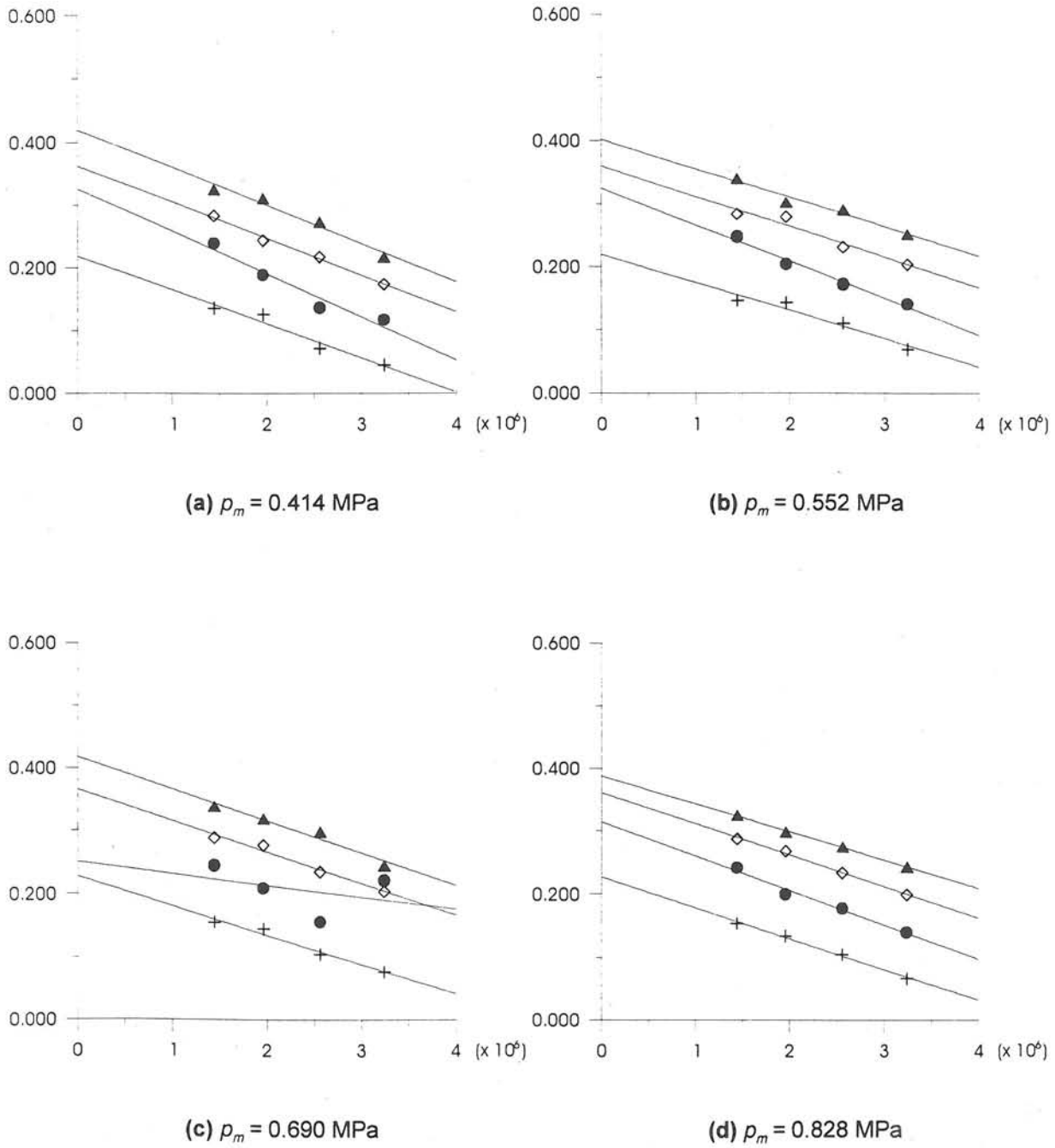
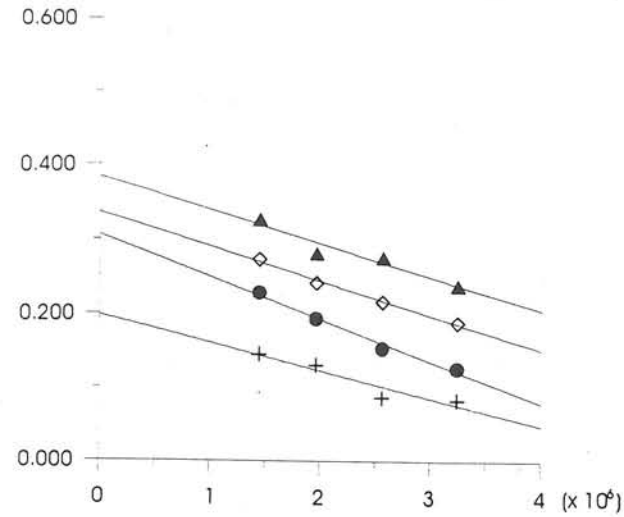
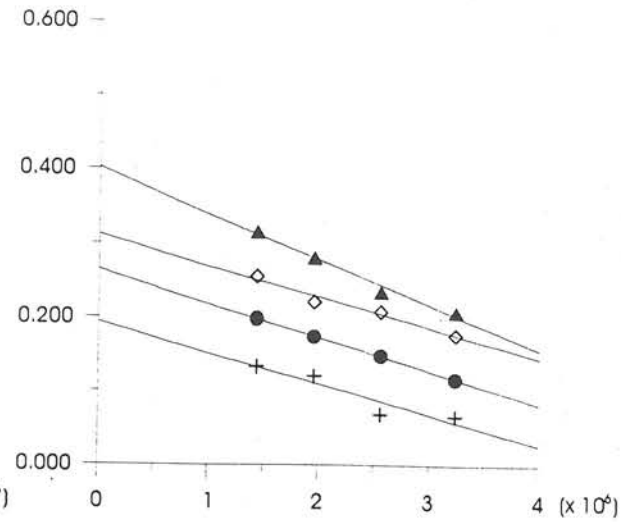


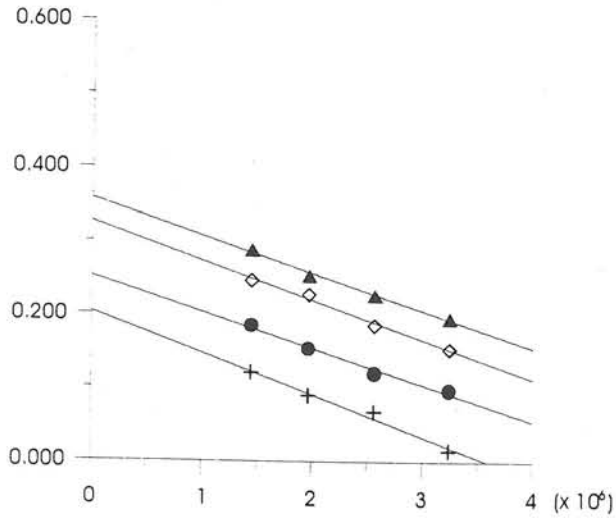
Fig. 5.13 Motor M102C: Potencia al freno adimensional en función del cuadrado de la velocidad



(e) p_m = 0.966 MPa



(f) p_m = 1.103 MPa



(g) p_m = 1.241 MPa

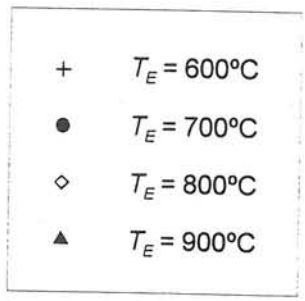


Fig. 5.13 (Cont.) Motor M102C: Potencia al freno adimensional en función del cuadrado de la velocidad

Las conclusiones iniciales que se deducen de la observación de estos resultados son las siguientes:

- Desde el punto de vista de los coeficientes de correlación, la potencia al freno adimensional sigue una ley aceptable de dependencia lineal, tanto en función de la velocidad como en función del cuadrado de la misma.

- Las ordenadas en el origen de las rectas de potencia adimensional son sensiblemente mayores que las predicciones de potencia indicada adimensional ζ_0 que se pueden

obtener mediante un modelo isotermo y armónico como el de Schmidt, en el caso de emplear como variable la velocidad, lo cual contradice la hipótesis planteada para el motor GPU-3 mediante la Ec. (5.1). Si se utiliza como variable el cuadrado de la velocidad, las correspondientes ordenadas en el origen resultan del orden de los valores alcanzables en simulaciones cuasiestáticas, particularmente si se consideran mecanismos de accionamiento que superen las características del armónico. El motor M102C tiene un mecanismo 'bell-crank'[13] en uno de los pistones, por lo que una simulación cuasiestática que considere este mecanismo proporcionará valores de ζ_0 más altos que los del modelo de Schmidt, atenuando las discrepancias con las correspondientes ordenadas en el origen.

- Aunque todas las series tienen un aspecto semejante, lo que hace suponer que de las mismas se pueden deducir resultados característicos del funcionamiento del motor, sólo se ha dispuesto de cuatro puntos para realizar las regresiones de cada serie, por lo que las conclusiones de los dos apartados anteriores no pueden considerarse definitivas.

5.9.3 MOTOR V4-275R MARK II DE KOCKUMS

A raíz de un artículo[14] presentado en la 6th International Conference on Stirling Cycle Machines, que tuvo lugar en noviembre de 1995 en Tokyo, se desarrollaron una serie de contactos e intercambios de documentación entre el grupo investigador de motores Stirling de la Universidad de Oviedo y Kawasaki Heavy Industries, Ltd. que culminaron con la visita a Oviedo, en julio de 1996, de Hajime Yamamoto, Assistant Director, Deputy General Manager de la División de Motores Principales.

El interés fundamental de Kawasaki era la interpretación de los resultados experimentales que habían obtenido en el motor V4-275R Mark II, suministrado por la empresa sueca Kockums, antigua licenciataria de Philips, a la marina japonesa.

Se trata de un motor con las siguientes características generales:

Tipo	alpha, 4 cilindros, doble acción
Potencia nominal al freno	65 kW
Cilindrada	275 cm^3
Presión media nominal	12.7 MPa
Velocidad nominal	2000 rpm
Fluido de trabajo	Helio
Temperatura media de tubos del calentador	720°C
Temperatura del agua de refrigeración	35°C
Material del regenerador	AISI
Volumen muerto adimensional del espacio de expansión	0.68
Volumen muerto adimensional del regenerador	1.38
Volumen muerto adimensional del espacio de compresión	0.72
Rendimiento térmico	0.37
Peso	~700 kg

Como consecuencia de los contactos, Kawasaki modificó la presentación inicial[15] de los resultados experimentales, elaborando un informe posterior. En el estudio realizado fueron utilizados los ocho monomios siguientes, algunos de los cuales no son adimensionales (Q_f representa la potencia térmica de la fuente):

$$\Pi_1 = \frac{P_B}{Q_f} \qquad \Pi_2 = \frac{T_E}{T_C} = \frac{1}{\tau} \qquad \Pi_3 = \frac{P_B}{p_m n_s} = \zeta_B V_E \qquad \Pi_4 = \frac{n_s}{\sqrt{T_C}} = N_{MA} \frac{\sqrt{R}}{V_E^{1/3}}$$

$$\Pi_5 = \frac{n_s}{p_m} = \frac{1}{\mu N_{SG}} \qquad \Pi_6 = \frac{1}{n_s} = N_F \frac{V_E^{2/3}}{\alpha_r} \qquad \Pi_7 = \frac{T_C}{p_m} = \frac{N_{TCR}}{\rho_r c_r} \qquad \Pi_8 = \gamma$$

A partir de los datos extraídos de la documentación proporcionada por Kawasaki, se construyó la Tabla 5.8, y, basándose en ella, fue realizada la Fig. 5.14, en las que intervienen algunos de los monomios mencionados.

En la Tabla 5.8 se muestran valores de la variable Π_3, proporcional a la potencia al freno adimensional ζ_B. Como puede verse, para cada valor del parámetro de presiones Π_5, se han obtenido 9 series de valores de dicha variable en función de Π_4 (o lo que es lo mismo, de la velocidad del motor), correspondiendo cada serie a un valor diferente del parámetro de temperaturas Π_2. En la Fig. 5.14 se representan estos valores de Π_3. Las Fig. 5.14(a) y (b), que corresponden al valor $\Pi_5 = 0.3$, constan de 57 puntos de funcionamiento, mientras que las Fig. 5.14(c) y (d), correspondientes al valor $\Pi_5 = 0.2$, han sido realizadas a partir de 75 mediciones. Todas representan en ordenadas la variable Π_3; en las Fig. 5.14(a) y (c), como función de la variable Π_4 en abscisas, que es proporcional a la velocidad del motor, y en las Fig. 5.14(b) y (d), en función del cuadrado de dicha variable.

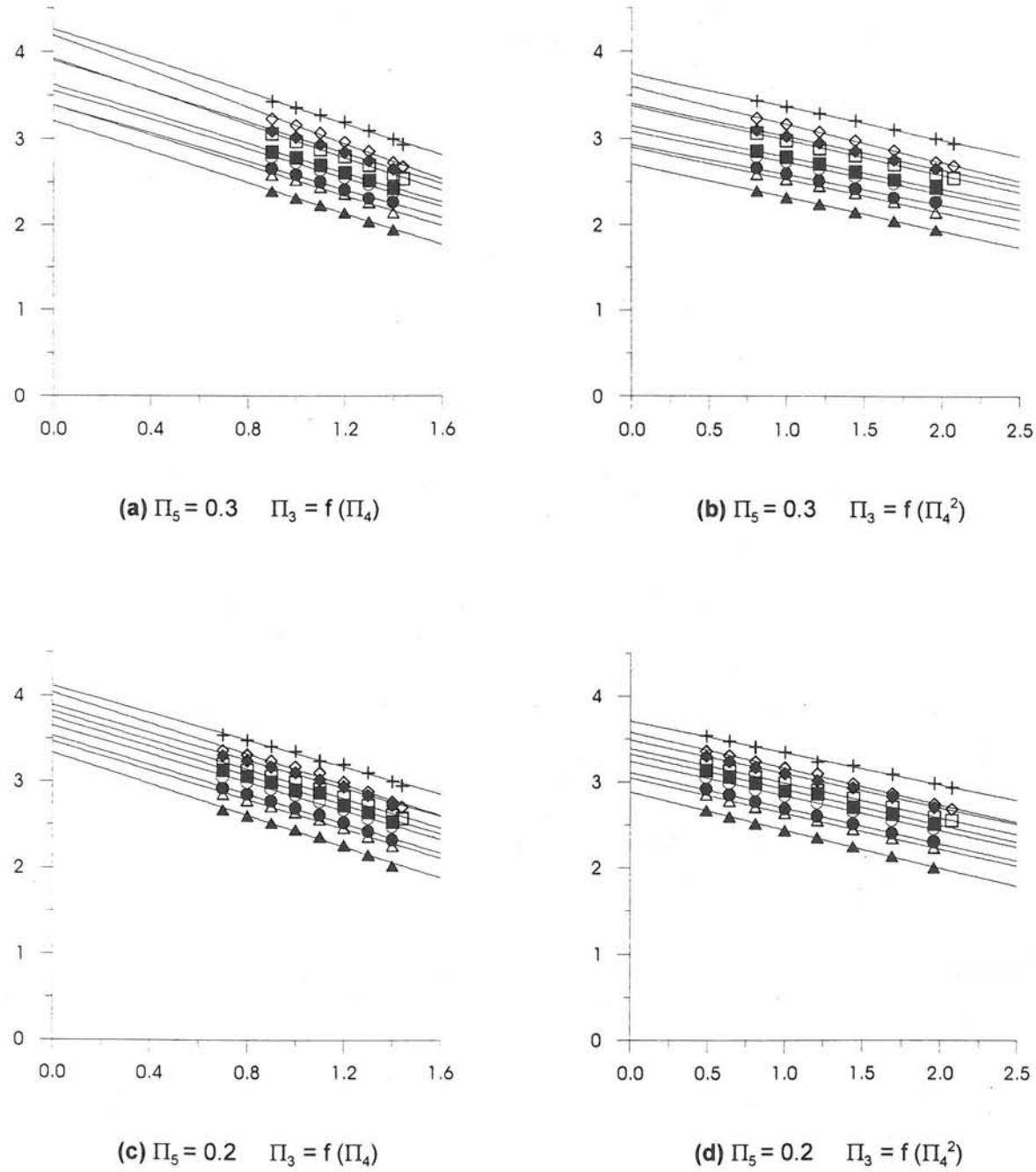
Tabla 5.8 Motor V4-275R MARK II: Resultados experimentales de potencia al freno adimensional

$\Pi_5 = 0.3$	Π_2	3.82	3.64	3.56	3.45	3.39	3.33	3.22	3.17	3.01
Π_4										
0.9		3.43	3.23	3.09	3.06	2.85	2.79	2.65	2.58	2.39
1		3.36	3.16	3.02	2.97	2.78	2.72	2.58	2.52	2.31
1.1		3.28	3.07	2.94	2.88	2.7	2.64	2.5	2.44	2.23
1.2		3.2	2.97	2.85	2.8	2.61	2.55	2.41	2.36	2.14
1.3		3.1	2.86	2.75	2.7	2.52	2.47	2.31	2.26	2.04
1.4		3	2.73	2.65	2.59	2.43	2.37	2.26	2.14	1.94
1.44		2.94	2.68		2.54					

$\Pi_5 = 0.2$	Π_2	3.82	3.64	3.56	3.45	3.39	3.33	3.22	3.17	3.01
Π_4										
0.7		3.54	3.36	3.3	3.2	3.13	3.05	2.92	2.85	2.67
0.8		3.48	3.31	3.24	3.13	3.06	2.99	2.85	2.78	2.6
0.9		3.41	3.24	3.17	3.06	2.99	2.91	2.77	2.71	2.52
1		3.35	3.17	3.1	2.99	2.9	2.84	2.69	2.64	2.44
1.1		3.24	3.1	3.02	2.91	2.87	2.76	2.61	2.56	2.36
1.2		3.2	2.99	2.94	2.82	2.72	2.67	2.52	2.46	2.26
1.3		3.1	2.88	2.84	2.72	2.64	2.57	2.42	2.36	2.15
1.4		3	2.76	2.72	2.61	2.53	2.47	2.32	2.25	2.02
1.44		2.95	2.7		2.57					

Las líneas que se representan en cada serie, corresponden a los resultados de las regresiones lineales realizadas en función de la abscisa correspondiente a cada figura.

Kawasaki también representa la variable Π_7 en función de Π_4, con Π_5 como parámetro (Fig. 5.15).



(a) $\Pi_5 = 0.3$ $\Pi_3 = f(\Pi_4)$ **(b)** $\Pi_5 = 0.3$ $\Pi_3 = f(\Pi_4^2)$

(c) $\Pi_5 = 0.2$ $\Pi_3 = f(\Pi_4)$ **(d)** $\Pi_5 = 0.2$ $\Pi_3 = f(\Pi_4^2)$

Fig. 5.14 Motor V4-275R MARK II: Resultados experimentales de potencia al freno adimensional

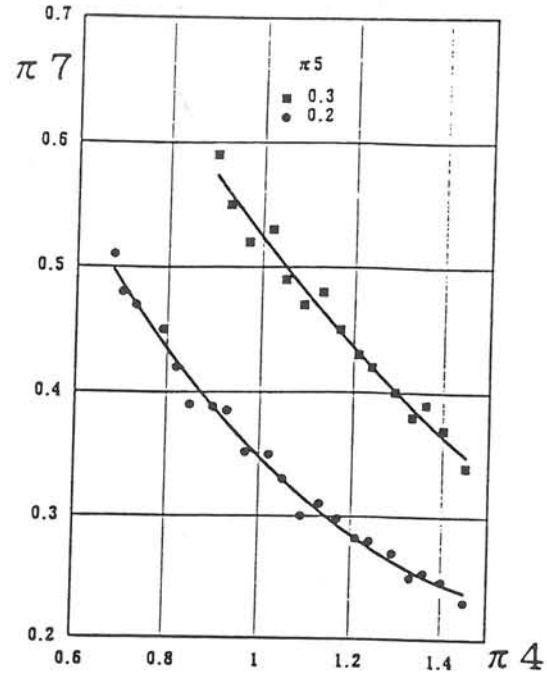


Fig. 5.15 Motor V4-275R MARK II: Correspondencia entre parámetros de funcionamiento

Las conclusiones iniciales que se deducen de la observación de estos resultados son las siguientes:

- Las series no están igualmente espaciadas porque el parámetro de temperaturas no fue variado linealmente.

- A primera vista, la potencia al freno adimensional se puede aproximar con aceptable precisión tanto mediante una recta decreciente con la velocidad como mediante una decreciente con el cuadrado de la misma. Realizados los cálculos, los coeficientes de correlación resultan ser mejores en el segundo caso, para los dos valores del parámetro Π_5, y los errores menores, por lo que se considera más ajustado el modelo dependiente del cuadrado de la velocidad, debiendo resaltar que la conclusión está basada en este caso en un número de mediciones que se considera suficiente. Este resultado es coherente con los obtenidos en los motores P-40 y M102C.

- La Fig. 5.15 no tiene especial interés, pues tan sólo refleja la relación entre parámetros independientes. En efecto, se cumple:

$$\Pi_7 \cdot \Pi_4 = \Pi_5 \sqrt{T_C} \quad \rightarrow \quad N_{TCR}\, N_1 = \frac{\rho_r c_r V_E^{1/3}}{\mu} \sqrt{\frac{T_C}{R}}$$

que sólo depende de T_C para un motor con regenerador y fluido de trabajo fijos.

- La presentación de los resultados hubiera sido más correcta empleando variables adimensionales, pues entonces representarían el comportamiento de todos los motores de funcionamiento semejante al V4-275 MARK II.

- La curva de potencia indicada a la presión media de 12.7 MPa que se obtiene[16] suponiendo un comportamiento semejante al del motor GPU-3 con helio, es decir, mediante una ecuación del tipo:

$$\zeta = 0.300 - 50N_{MA}$$

conduce a una potencia indicada máxima de 19.1 kW por cilindro (76.5 kW en total), lo que implicaría un rendimiento mecánico del 85.0%, que parece razonable para este nivel de potencias. La diferencia entre la velocidad de máxima potencia indicada y el valor nominal para la máxima potencia al freno también parece de acuerdo con los resultados de otros motores (Fig. 5.16).

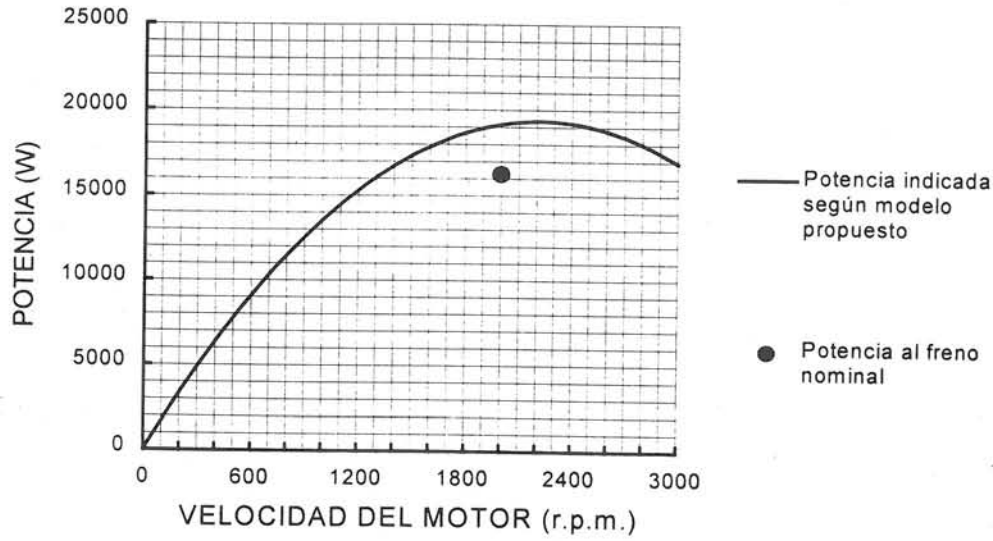


Fig. 5.16 Motor V4-275R MARK II: Predicción de potencia indicada en condiciones nominales de funcionamiento

5.10 GPU-3: PREDICCIONES DE POTENCIA AL FRENO

Las pruebas experimentales del motor GPU-3 proporcionan también datos de potencia al freno y de pérdidas mecánicas de potencia indicada en siete condiciones de funcionamiento con helio y en dos condiciones de funcionamiento con hidrógeno, tal como se ha comentado en la sección 5.5. La representación de las pérdidas mecánicas P_{mec} en función de la velocidad n_s del motor[1] sugiere una dependencia lineal en el rango de velocidades próximas al punto de máxima potencia, pero tal hipótesis no tendría significado físico en el origen de velocidades. Pendientes de un análisis más riguroso de la función de dependencia, se ha considerado suficiente, para los objetivos de este trabajo, aproximar las pérdidas mecánicas de potencia indicada mediante una ecuación del tipo:

$$P_{mec} \approx p_m V_E n_s \left(a + bn_s + cn_s^2\right) \tag{5.32}$$

donde los coeficientes a, b y c se pueden determinar a partir de los resultados experimentales. Normalizando mediante p_m, V_E y n_s, se obtiene:

$$\zeta_{mec} \approx a + bn_s + cn_s^2 \tag{5.33}$$

Entonces, para el motor GPU-3 (y para otros motores en los que sean válidas las hipótesis formuladas mediante las Ec. (5.1) y (5.32), la potencia al freno podría expresarse en la forma:

$$P_B = P_{ind} - P_{mec} = p_m V_E n_s \left((\zeta_0 - a) - (m+b) n_s - c n_s^2 \right) \tag{5.34}$$

que equivale a la siguiente ecuación adimensional:

$$\zeta_B = (\zeta_0 - a) - (m+b) n_s - c n_s^2 \tag{5.35}$$

La velocidad correspondiente a la máxima potencia al freno puede obtenerse a partir de la Ec. (5.34), aplicando la condición $dP_B/dn_s = 0$, con lo que resulta:

$$n_{sB,max} = \frac{m+b}{3c} \left(\sqrt{1 + \frac{3(\zeta_0 - a)c}{m+b}} - 1 \right) \tag{5.36}$$

lo que permite obtener predicciones de máxima potencia al freno mediante la Ec. (5.34).

La precisión del modelo de potencia al freno derivado de la Ec. (5.35) depende obviamente del grado de precisión del modelo de potencia indicada basado en la Ec. (5.1) y del grado de precisión del modelo de pérdidas mecánicas basado en la Ec. (5.33).

Como se ha visto anteriormente, la Ec. (5.1) se propuso como resultado de la observación de las series de medidas correspondientes al funcionamiento con hidrógeno y helio a p_m = 2.76 MPa, T_E = 977 K y T_C = 288 K, para cada una de las cuales se dispuso de 6 puntos de funcionamiento que permitieron realizar análisis de regresión con aceptable grado de fiabilidad. Una corroboración posterior del modelo consistió en verificar que las medidas correspondientes a los valores máximos de potencia indicada satisfacen las Ec. (5.14) y (5.19), que son consecuencia de la Ec. (5.1).

No parece que pueda esperarse menor grado de precisión de la Ec. (5.33), ya que en definitiva equivale a considerar la función de pérdidas mecánicas de potencia como el desarrollo de un polinomio de tercer grado que pasa por el origen de velocidades. Los resultados experimentales permiten determinar los 3 coeficientes del polinomio en las series correspondientes al funcionamiento con helio a las presiones medias de 1.38, 2.76, 4.14 y 5.52 MPa, y con hidrógeno a 1.38 y 2.76 MPa. Con helio a 6.90 MPa sólo se dispone de 2 puntos de medida, y con hidrógeno a 4.14 MPa se dispone de un único punto. Las mediciones muestran una evidente influencia de la presión y la velocidad en las pérdidas mecánicas de potencia, así como una influencia del tipo de gas de trabajo, aunque en menor medida.

Las Fig. 5.17 y 5.18 muestran las representaciones gráficas del modelo matemático basado en las Ec. (5.1) y (5.33), para una de las series analizadas anteriormente, a saber, helio en las condiciones p_m = 2.76 MPa y T_E = 922 K Las ecuaciones del modelo tienen los siguientes coeficientes, deducidos de los resultados experimentales:

$\zeta_0 = 0.282$ $m = 0.0031337$ s $a = 0.096$ $b = -0.0013500$ s $c = 0.0000135$ s^2

Es preciso observar que los valores de ζ_0 y m son los que corresponden a la Tabla 5.3, es decir, los obtenidos con el ajuste del modelo en el punto de máxima potencia indicada, por

lo que cabe esperar alguna desviación en otros puntos de funcionamiento. Obviamente, las desviaciones ocurrirían en todos los puntos y serían menores si se hubieran empleado valores obtenidos por análisis de regresión.

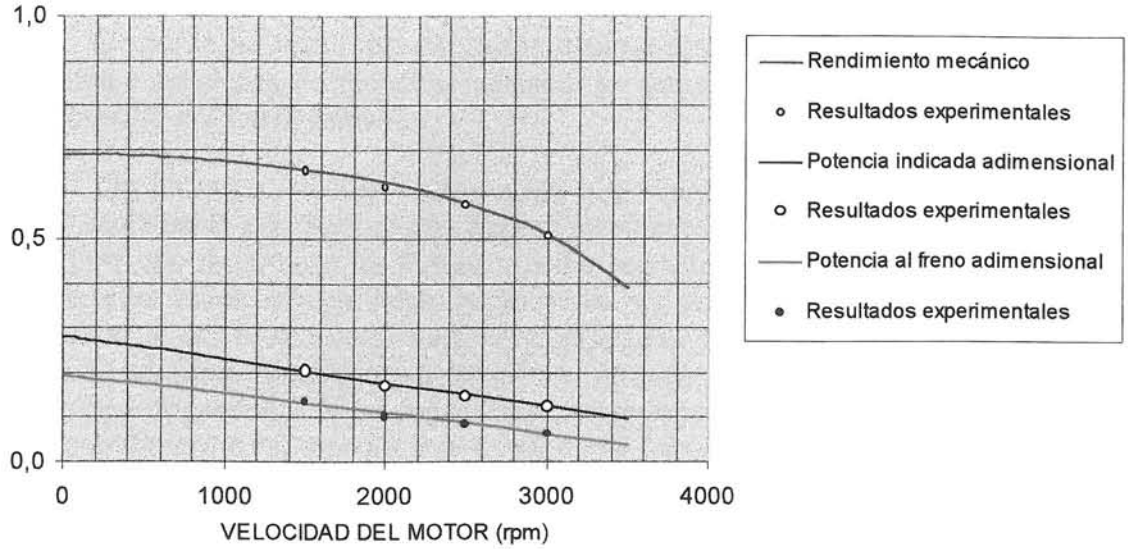


Fig. 5.17 Motor GPU3: Comparación entre simulaciones y resultados experimentales adimensionales con helio para los valores p_m = 2.76 MPa, T_E = 922 K

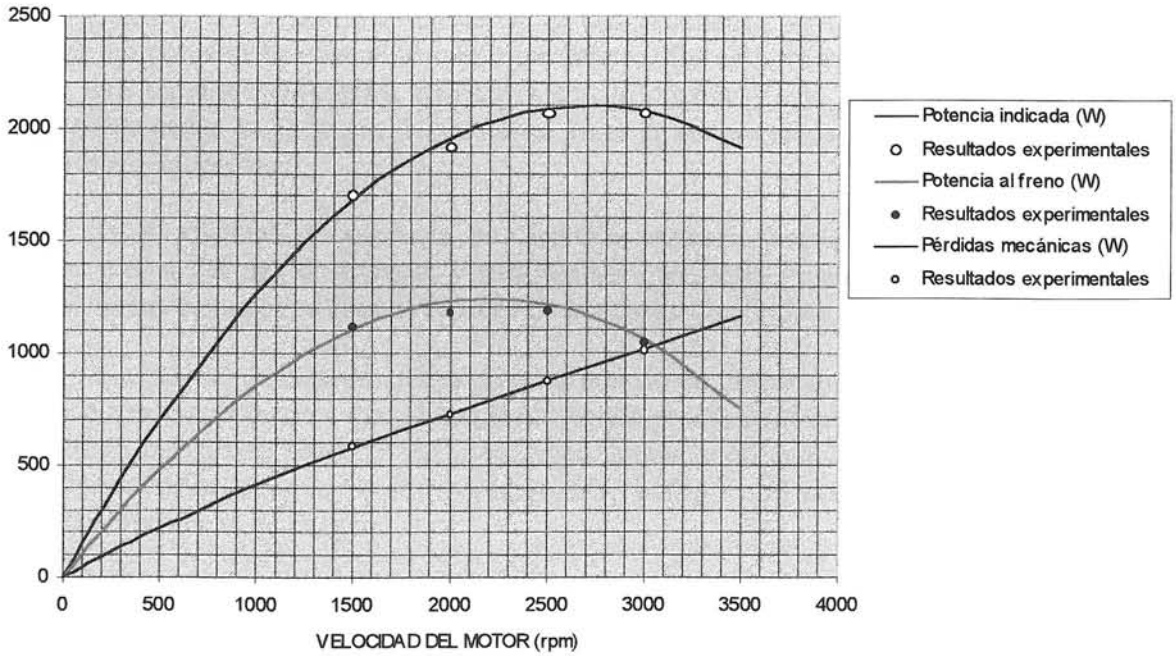


Fig. 5.18 Motor GPU3: Simulaciones de potencia indicada y al freno con helio para los valores p_m = 2.76 MPa, T_E = 922 K

Nótese que, en el intervalo de velocidades interesante a efectos de proyecto, las gráficas adimensionales de potencia indicada y al freno tienen el aspecto de dos rectas casi paralelas.

Este resultado prueba que, al menos para los parámetros de funcionamiento de algunos motores, la gráfica de potencia al freno adimensional en función de la velocidad o del número

de Mach puede tener el aspecto de una recta en el rango de velocidades altas, a pesar de no ser una función tan simple.

5.11 PREDICCIONES DE POTENCIA INDICADA PARA EL MOTOR M102C

Como se ha visto, los resultados experimentales disponibles del motor M102C no muestran mediciones de potencia indicada, lo que dificulta el análisis de esta importante característica del funcionamiento.

Sin embargo, Walker[12] informa de que Ward realizó series de pruebas ('motoring tests') accionando el motor con una dinamo tacométrica y midiendo la potencia necesaria para ello. Este tipo de pruebas es llevado a cabo normalmente en las máquinas de combustión interna para medir las pérdidas de potencia por fricción, pero, si un motor Stirling es accionado de este modo, actúa como un refrigerador, y el trabajo a la entrada se compone, en parte, de pérdidas mecánicas por fricción y, en parte, del trabajo del ciclo para producir el efecto de refrigeración. Ward superó este problema incluyendo un gran volumen (botella de gas comprimido) en el espacio muerto del motor, lo que garantiza que no haya una variación significativa de presión en el ciclo durante la operación, y, por lo tanto, no se cree el efecto de refrigeración. No obstante, las medidas todavía incluyen, además de las pérdidas mecánicas por fricción, las pérdidas debidas a la viscosidad y a las turbulencias por el movimiento del gas.

Las pruebas fueron realizadas a diferentes velocidades y presiones medias, con el motor siempre a temperatura ambiente, y sus resultados representados en función de la presión, empleando la velocidad como parámetro. De esta forma, se obtiene una familia de rectas sensiblemente paralelas, crecientes con la presión y con la velocidad, y se considera que las ordenadas en el origen de presiones de estas rectas representan las pérdidas mecánicas por fricción del motor.

Estas pérdidas de potencia por fricción mecánica serían así independientes de la presión media del gas de trabajo, y resultan ser crecientes con la velocidad del motor, con sensible proporcionalidad lineal respecto de la misma en el rango de 800 a 1400 rpm.

Al respecto de este procedimiento, es preciso comentar que Tew *et al.*[1] consideran que conduce a errores mayores que el empleado en las pruebas del motor GPU-3, donde se utilizó un método basado en balances calorimétricos, suponiendo que la suma de las cantidades de calor transferidas al agua de refrigeración del 'buffer' y al aceite es igual al valor de las pérdidas mecánicas de energía.

El número de mediciones de que consta cada serie no permite realizar análisis de regresión fiables, por lo que sólo ha parecido razonable realizar una interpretación de los resultados basada en las Ec. (5.8) y (5.33), mediante el siguiente procedimiento:

1. Obtener, para cada serie, los valores de potencia indicada correspondientes a 3 puntos, sumando los valores experimentales de potencia al freno y pérdidas mecánicas.

2. Deducir los coeficientes a, b y c del sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar la Ec. (5.33) a los 3 valores de pérdidas mecánicas de potencia.

3. Calcular los coeficientes ζ_0, m y q resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar la Ec. (5.8) a los 3 valores de potencia indicada.

4. Hallar los coeficientes ζ_0 y m a partir del sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar la Ec. (5.1) a 2 de los 3 valores de potencia indicada.

5. Deducir los coeficientes ζ_0 y q del sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar la Ec. (5.5) a 2 de los 3 valores de potencia indicada.

6. Comparar las curvas de potencia obtenidas en los puntos 3, 4 y 5, analizando el significado físico de las mismas.

Así, por ejemplo, aplicando el procedimiento citado al funcionamiento con aire a $p_m = 0.966$ MPa y $T_E = 1073$ K, se obtienen los siguientes coeficientes:

ζ_0	m (s)	q (s^2)	a	b (s)	c (s^2)
0.440	0.0005563	0.0001208	0.072243	0.0027815	- 0.0000348
0.515	0.0065975	0	0.072243	0.0027815	- 0.0000348
0.433	0	0.0001323	0.072243	0.0027815	- 0.0000348

Para las mismas condiciones de funcionamiento, el modelo cuasiestático con accionamiento armónico predice el valor $\zeta_0 = 0.361$, que sería aún mayor si se considerase que el motor M102C tiene un mecanismo del tipo 'bell-crank' en uno de los pistones y biela-manivela en el otro. Por tanto, parece que es físicamente más significativa la tercera solución, esto es, la que considera la potencia indicada adimensional como función del cuadrado de la velocidad.

Para otros puntos de funcionamiento se observan las mismas tendencias, siempre con menores diferencias entre el valor ζ_0 cuasiestático y el correspondiente a la Ec. (5.5).

Las Fig. 5.19 y 5.20 muestran las representaciones gráficas del modelo matemático basado en las Ec. (5.5) y (5.33). Nótese de nuevo que el aspecto de las líneas que unirían los valores experimentales de potencia indicada y al freno adimensionales no difiere mucho de sendas rectas paralelas. La ordenada en el origen de la hipotética recta de potencia al freno adimensional sería del orden de la potencia indicada adimensional cuasiestática o incluso mayor.

Por tanto, parece que el modelo de funcionamiento de potencia indicada de este motor podría explicarse mediante la Ec. (5.5), es decir:

$$\zeta = \zeta_0 - q n_s^2$$

Esta ecuación puede expresarse con variables adimensionales introduciendo el número de Mach, convirtiéndose en:

$$\zeta = \zeta_0 - \Psi N_{MA}^2 \tag{5.37}$$

donde Ψ tiene significado de *factor adimensional de pérdidas de potencia indicada* y es:

$$\Psi = \frac{qRT_C}{V_E^{2/3}} \tag{5.38}$$

De las Ec. (5.5) y (5.37) se obtienen los valores de la potencia indicada adimensional, velocidad del motor y número de Mach, correspondientes al máximo de potencia indicada:

$$\zeta_{max} = \frac{2}{3}\zeta_0 \tag{5.39}$$

$$n_{s,max} = \sqrt{\frac{\zeta_0}{3q}} \tag{5.40}$$

$$N_{MA,max} = \sqrt{\frac{\zeta_0}{3\Psi}} \tag{5.41}$$

Por lo que se refiere a la potencia al freno, se podría expresar mediante una ecuación del tipo:

$$P_B = p_m V_E n_s \left((\zeta_0 - a) - b n_s - (q+c) n_s^2\right) \tag{5.42}$$

que equivale a la siguiente ecuación adimensional:

$$\zeta_B = (\zeta_0 - a) - b n_s - (q+c) n_s^2 \tag{5.43}$$

A partir de la Ec. (5.42) se obtiene la velocidad correspondiente a la máxima potencia al freno, resultando:

$$n_{sB,max} = \frac{b}{3(q+c)}\left(\sqrt{1 + \frac{3(\zeta_0 - a)(q+c)}{b^2}} - 1\right) \tag{5.44}$$

lo que permite obtener predicciones de máxima potencia al freno mediante la Ec. (5.42).

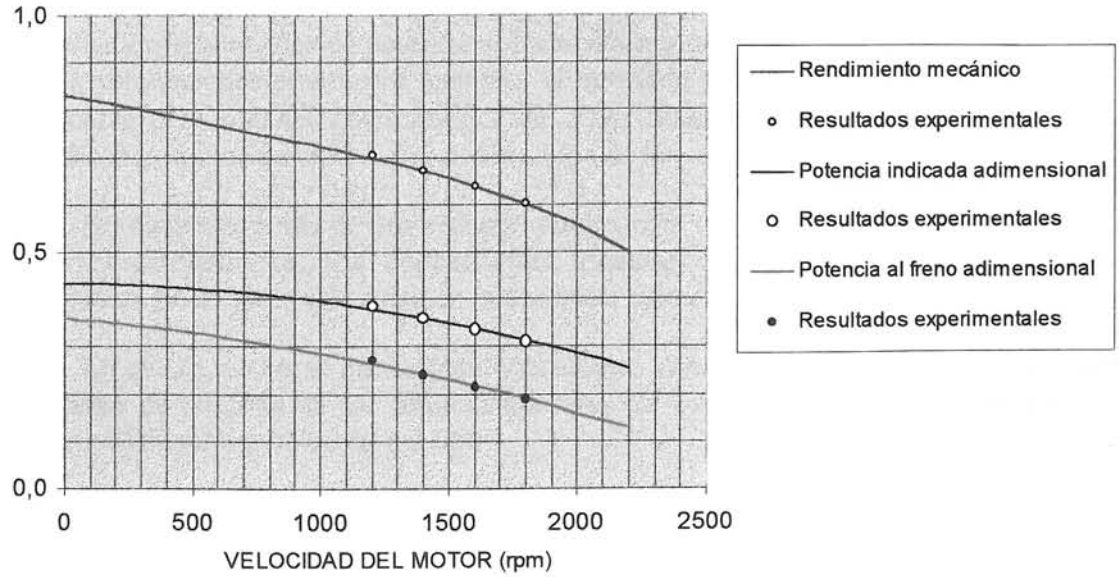


Fig. 5.19 Motor M102C: Comparación entre simulaciones y resultados experimentales adimensionales con aire para los valores p_m = 0.966 MPa, T_E = 1073 K

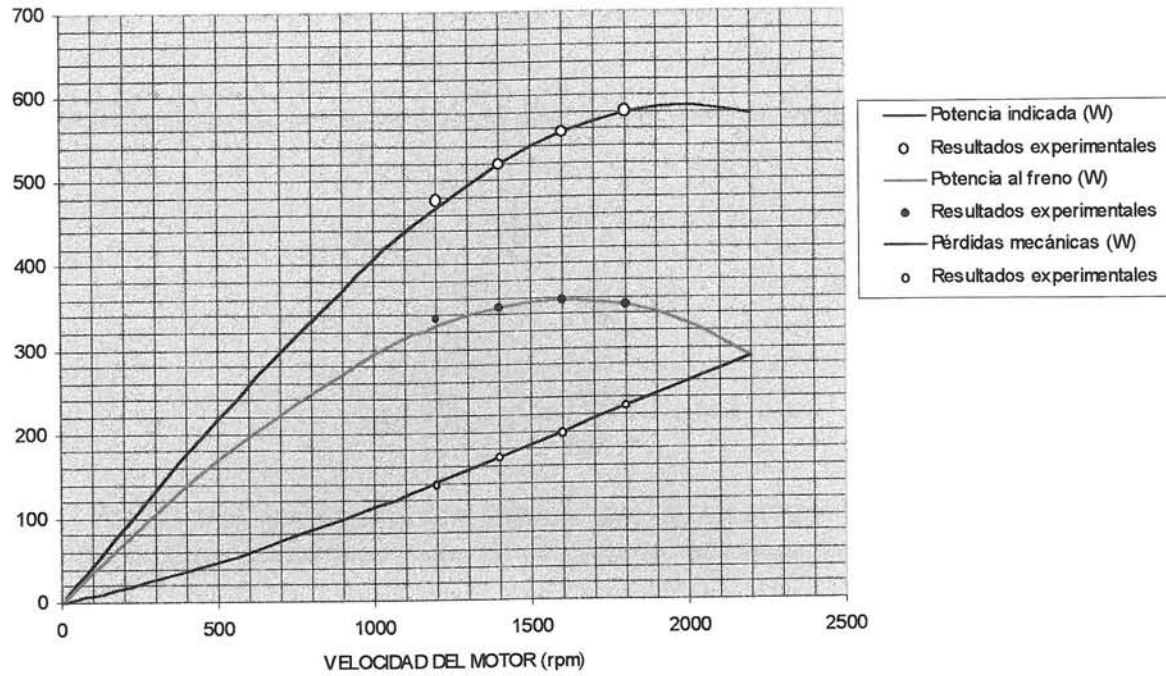


Fig. 5.20 Motor M102C: Simulaciones de potencia indicada y al freno con aire para los valores p_m = 0.966 MPa, T_E = 1073K.

5.12 INTERPRETACIÓN FINAL DE LOS RESULTADOS

La notable influencia del número de Mach en la potencia indicada adimensional ζ concuerda con las conclusiones deducidas por Organ[13,17], si bien parece que éste defiende hasta el momento una dependencia del cuadrado del número de Mach.

Aunque advierte que su método de semejanza dinámica sólo está justificado para el análisis de potencia indicada, Organ llega a la conclusión anterior apoyándose no sólo en las ecuaciones fundamentales de los fenómenos físicos sino también en la observación de resultados experimentales de potencia al freno del motor P-40 de United Stirling[10], analizando además simulaciones como, por ejemplo, la aportada por Berchowitz *et al.*[18], que han sido descartadas para obtener correlaciones de ζ en función de N_{MA} porque las simulaciones podrían tener rangos de error comparables a los de las regresiones de mínimos cuadrados.

No obstante, a raíz de una reciente publicación de Prieto *et al.*[8], Organ ha modificado, al menos parcialmente, sus conclusiones iniciales, expresando[19] que cabe esperar una dependencia lineal de la velocidad en la ecuación adimensional de potencia indicada.

En efecto, como se ha visto anteriormente, parece que las regresiones más fiables del coeficiente de fricción en los intercambiadores de calor de las máquinas de ciclo Stirling podrían satisfacer una relación del tipo:

$$C_f = a + \frac{b}{N_{re}}$$

y como:

$$\Delta p = \rho u^2 C_f \frac{L}{D} \propto n_s^2 \left[k' + \frac{k''}{n_s} \right]$$

se obtiene la siguiente proporcionalidad para las pérdidas de potencia indicada:

$$\Delta P_{ind} = \left(\oint \Delta p \, \mathrm{d}v \right) n_s \propto n_s^3 \left(k' + \frac{k''}{n_s} \right)$$

luego:

$$\Delta \zeta = \zeta_0 - \zeta = \frac{\Delta P_{ind}}{p_m V_E n_s} \propto k'' n_s + k' n_s^2$$

Por lo tanto, parece prudente suponer que el comportamiento general indicado de las máquinas Stirling cinemáticas puede ser descrito por una ecuación del tipo:

$$\zeta = \zeta_0 - \Phi N_{MA} - \Psi N_{MA}^2 \tag{5.45}$$

donde $\Psi \approx 0$ para el motor GPU-3 y probablemente $\Phi \approx 0$ para los motores P-40, M102C y V4-275R MARK II. El hecho de que uno u otro de los dos factores de pérdidas Φ ó Ψ sea aproximadamente despreciable mostraría, en definitiva, que, para la geometría y condiciones de funcionamiento de un determinado motor, predominan las pérdidas por fricción viscosa o turbulenta en sus intercambiadores, lo que estaría de acuerdo con las diferencias mostradas en la Tabla 3.3.

5.13 REFERENCIAS

[1] **Tew, R. C., Thieme, L. G.** and **Miao, D.** Initial comparison of single cylinder Stirling engine computer model predictions with test results, *DOE NASA*/1040-78/30, NASA TM-79044, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio (1979)

[2] **Prieto, J. I.** *Funcionamiento del motor Stirling y aplicaciones navales*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo (1990)

[3] **Prieto, J. I.** and **Díaz, R.** Isothermal simulation with decoupled losses for kinematic Stirling engine design, *JSME Int. J.* **36**(4), pp.697-710 (1993)

[4] **Prieto, J. I., González, M. A., Díaz, R.** y **Fano, J.** Sistema completo de monomios adimensionales para el análisis práctico de máquinas de ciclo Stirling y accionamiento cinemático, *XXV Sesiones del GTAD*, Madrid (1993)

[5] **Prieto, J. I., Fano, J., Díaz, R.** and **González, M. A.** Application of discriminated dimensional analysis to the kimematic Stirling engine, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **208**, pp.347-353 (1994)

[6] **West, C. D.** *Principles and applications of Stirling engines*, Van Nostrand Reinhold, New York (1986)

[7] **Prieto, J. I., Fano, J., González, C., González, M. A.** y **Díaz, R.** Anteproyecto de motores Stirling mediante la teoría de semejanza, *XXXII Sesiones del GTAD*, Paniza, Zaragoza (1995)

[8] **Prieto, J. I., Fano, J., González, C., González, M. A.** and **Díaz, R.** Preliminary design of the kinematic Stirling engine using dynamic similarity and quasi-static simulation, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **211**, pp.229-238 (1997)

[9] **Weiss, M. H., Walker, G.** and **Fauvel, O. R.** *MarWeiss, a microcomputer design aid for Stirling engines*, Department oh Mechanical Engineering, Univ. of Calgary, Canadá (1988)

[10] **Bratt, C.** Design characteristics and test results of the US P-40 engine, *Proc. 15th IECEC*, paper 809397, pp.1964-1966, Seattle, Washington (1980)

[11] **Ward, G. L.** *Performance characteristics of the Stirling engine*, M. Sc. Thesis, Univ. of Bath, U. K. (1972)

[12] **Waker, G.** *Stirling engines*, Clarendon Press, Oxford (1980)

[13] **Organ, A. J.** *Thermodynamics and Gas Dynamics of the Stirling Cycle Machine*, Cambridge University Press (1992)

[14] **Prieto, J. I., González, M. A., González, C.** and **Fano, J.** Notes on the scaling process of Stirling cycle machines, *Proc. 7th ICSC*, 95039, pp.259-264, Tokyo (1995)

[15] **Yamamoto, H., Takahashi, S., Ebina, S.** and **Enokida, M.** Performance analysis of the Stirling engine. Application of a law of similarity, *Proc. 7th ICSC*, 95040, pp.265-270, Tokyo (1995)

[16] **Prieto, J. I., Fano, J.** y **Rey, M. A.** Análisis y proyecto de motores Stirling cinemáticos mediante teoría de semejanza y simulación cuasiestática: recientes corroboraciones experimentales, *XXXIV Sesiones del GTAD*, Oviedo (1996)

[17] **Organ, A. J.** *Stirling engine thermodynamic design without the computer*, Regenerative Thermal Machines (*mRT*), Cambridge (1993)

[18] **Berchowitz, D. M., Urieli, I.** and **Rallis, C. J.** A numerical model for Stirling cycle machines, *Trans. ASME, J. Engng. Power*, **102** (1980)

[19] **Organ, A. J.** Comunicación privada del Dr. Organ al Dr. Prieto de fecha 25/04/1996.

6. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE SEMEJANZA AL PROYECTO

6.1 PROGRAMA PARA EL ANTEPROYECTO DE MOTORES STIRLING

A partir de los resultados obtenidos en capítulos anteriores, se ha elaborado un programa de simulación y análisis de motores Stirling cinemáticos, que se ha denominado *SIMILAR*[1], basado en la teoría de semejanza dinámica y en la simulación cuasiestática. Sus principales aplicaciones son el *análisis del funcionamiento de prototipos* y el *diseño preliminar de modelos*, proporcionando además una librería de prototipos seleccionados.

6.1.1 ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DE PROTOTIPOS

El análisis del funcionamiento de prototipos es la primera utilidad proporcionada por el programa. Para ello, deberán especificarse las características generales del motor correspondientes a las variables incluidas en la Ec. (4.14), es decir:

- Geometría de los cilindros, intercambiadores de calor y mecanismo de accionamiento.
- Fluido de trabajo.
- Material del regenerador.
- Condiciones del punto de funcionamiento, es decir, temperaturas de las fuentes, presión media, potencia indicada y velocidad correspondiente.

El programa permite al usuario cambiar los parámetros de diseño durante su ejecución, de modo que pueden ser optimizadas las especificaciones, o pueden analizarse nuevas configuraciones. La Fig. 6.1 muestra el aspecto de una pantalla de entrada de datos.

La primera simulación que realiza el programa es la del accionamiento mecánico. Para las tres configuraciones básicas de motores se pueden combinar los siguientes tipos de mecanismos, independientemente en cada pistón: armónico, biela-manivela, rómbico, yugo Ross[2] y 'bell-crank'.

Una vez finalizada la simulación del mecanismo, pueden ser calculados los valores de la potencia indicada adimensional cuasiestática ζ_0 y de los factores adimensionales de pérdidas Φ o Ψ, pudiendo compararse estos valores con los correspondientes a prototipos de funcionamiento conocido y satisfactorio. Puesto que las diferencias entre ellos deberán ser causadas por los distintos valores de los monomios adimensionales, podrán deducirse criterios de diseño para seleccionar puntos de funcionamiento más interesantes o para proyectar modelos mejorados. La simulación cuasiestática se realiza considerando siete espacios característicos geométricos (cilindros de expansión y de compresión, volúmenes muertos de los dos cilindros, calentador, regenerador y enfriador), distribuidos en tres espacios característicos térmicos (temperatura alta, temperatura baja y regenerador). Los fluidos de trabajo considerados son hidrógeno, helio y aire.

El programa también facilita el análisis de las trayectorias de las partículas del fluido, que, como se justifica más adelante, pueden obtenerse aproximadamente mediante la simulación cuasiestática.

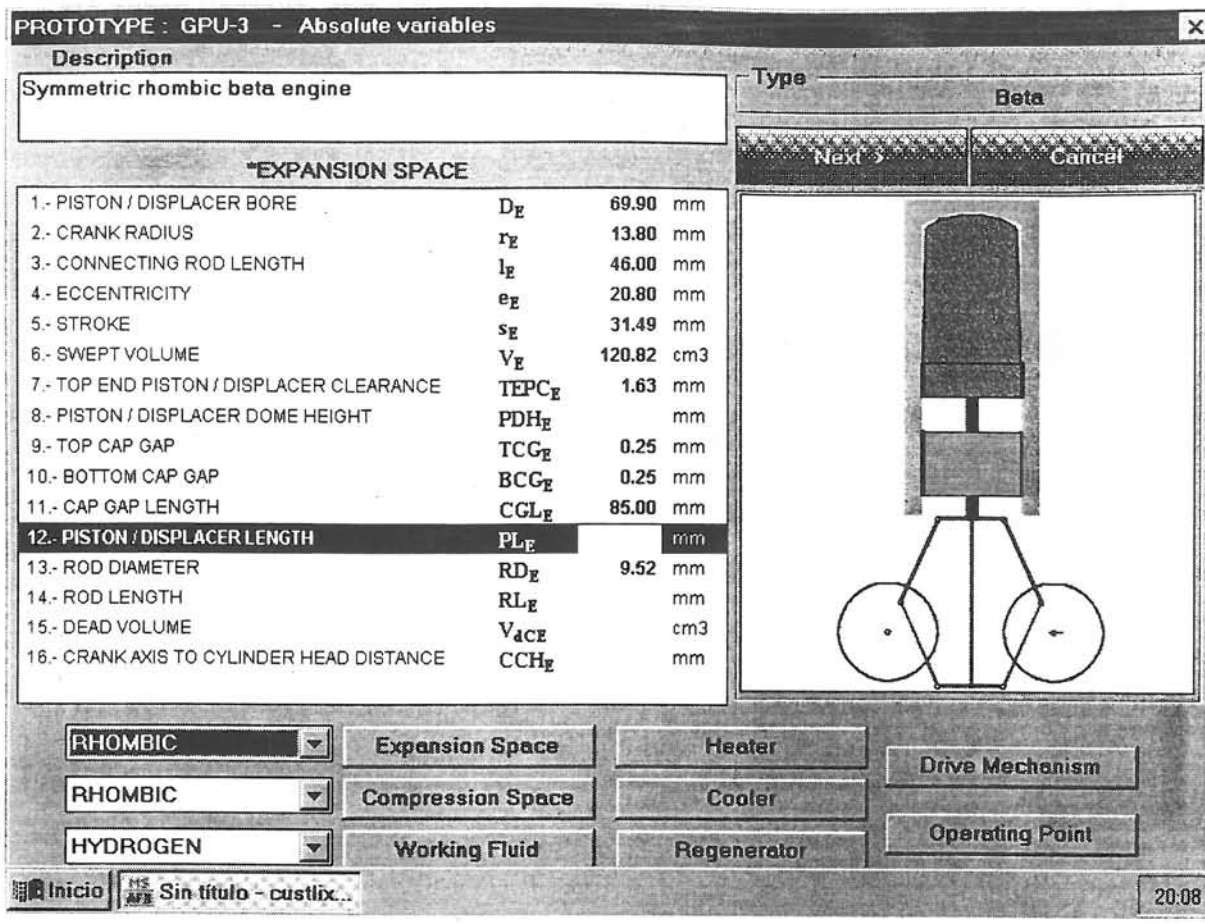


Fig. 6.1 Pantalla de entrada de datos

6.1.2 ANTEPROYECTO DE MODELOS

Esta utilidad se basa en la aplicación de la semejanza dinámica para obtener modelos a escala a partir de determinados prototipos seleccionados.

Debe tenerse en cuenta que la semejanza dinámica estricta requiere la igualdad de los monomios adimensionales del prototipo y del modelo. Sin embargo, en algunos casos tal condición no puede cumplirse a causa de las características geométricas, del fluido de trabajo o del material del regenerador[3,4]. Para especificaciones de diseño que conducen a parámetros adimensionales de funcionamiento claramente diferentes de los correspondientes a los prototipos, el programa proporciona información acerca de puntos de trabajo de motores existentes, lo que permite analizar la viabilidad del proyecto. En esos casos, se sugiere que se seleccione otro prototipo o que los requisitos de la semejanza sean flexibilizados, por lo que los criterios de semejanza son útiles en general.

Con respecto al programa *Scalit*[5], también basado en la semejanza dinámica, *SIMILAR* presenta la ventaja de facilitar curvas de potencia, incluso con focos térmicos a temperaturas diferentes de las existentes en los motores que aparecen en la correlación de Beale o la de West. En futuros trabajos se aplicará el método al diseño de motores de bajo salto térmico ('low ΔT'), que actualmente presentan interesantes perspectivas de desarrollo[6].

6.1.3 LIBRERÍA DE PROTOTIPOS

La falta de prototipos de funcionamiento bien conocido y satisfactorio es todavía hoy la principal dificultad que se presenta para el desarrollo de métodos basados en la teoría de semejanza. Debido a ello, el programa ha sido concebido para permitir posteriores incorporaciones a la librería de prototipos, de acuerdo con la experiencia del usuario o con la disponibilidad de pruebas de motores que se publiquen en un determinado momento. La Fig. 6.2 muestra el diagrama lógico del procedimiento.

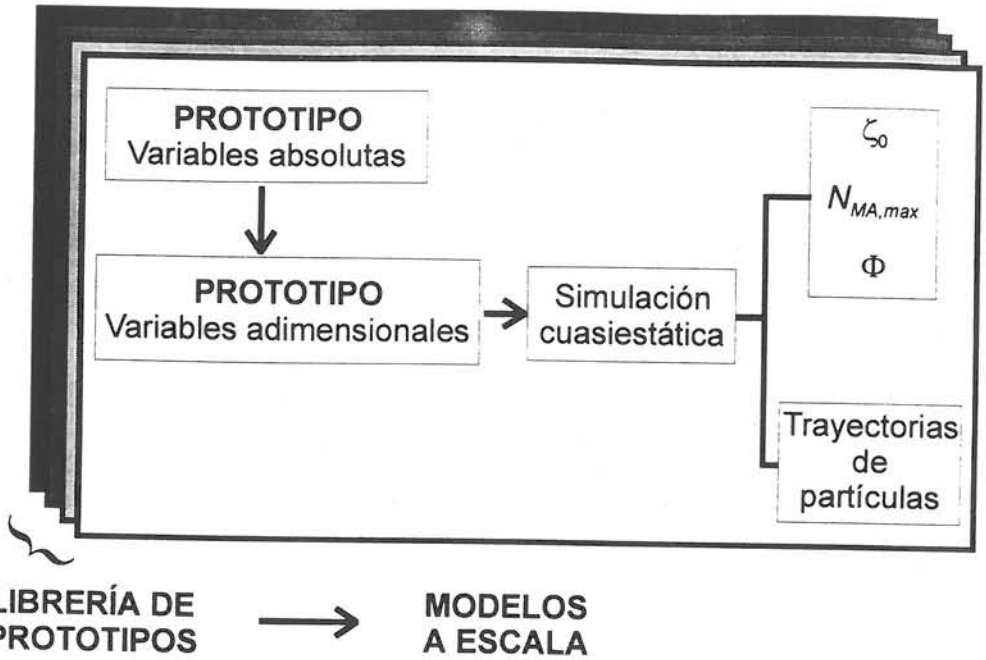


Fig. 6.2 Esquema de utilidades del programa

6.1.4 ESPECIFICACIONES DEL PROGRAMA

El programa se ejecuta bajo los sistemas operativos Windows 95® o Windows NT®. Es una aplicación desarrollada con la última tecnología de diseño orientada al objeto que contiene Microsoft® Foundation Class Library. Proporciona intercambio dinámico de datos (DDE) con Microsoft® Excel para cálculos posteriores y con Microsoft® Word para escritura de informes personalizados.

6.2 CRITERIOS PARA LA RELAJACIÓN DE LA SEMEJANZA DINÁMICA

La semejanza dinámica ha sido siempre uno de los criterios de diseño usados por los ingenieros en los distintos campos. Sin embargo, como ya se mencionó en el Capítulo 1, no hay referencia explícita en cuanto a su aplicación al proyecto de máquinas Stirling con anterioridad a las recientes publicaciones de Organ[2,7,8], corroboradas más tarde de forma independiente por Prieto[9] y Olson y Swift[10], y a consecuencia de las cuales el empleo de las técnicas de semejanza en el diseño ha merecido últimamente alguna atención.

La semejanza dinámica estricta supone la igualdad de todos los monomios adimensionales característicos del funcionamiento del motor. Para que el prototipo y el modelo tengan la misma potencia indicada adimensional, de la Ec. (4.16) se deduce que además de la semejanza geométrica, incluyendo la relativa al accionamiento mecánico, la

semejanza dinámica completa requiere la igualdad de los parámetros adimensionales τ, γ, N_{SG}, N_F, N_{TCR} y N_{MA}, es decir:

$$\begin{aligned} \tau^d &= \tau^p \\ \gamma^d &= \gamma^p \\ N_{SG}^d &= N_{SG}^p \\ N_F^d &= N_F^p \\ N_{TCR}^d &= N_{TCR}^p \\ N_{MA}^d &= N_{MA}^p \end{aligned} \tag{6.1}$$

Esto hace que la semejanza dinámica estricta limite la aplicación de este método de anteproyecto cuando las características que resultan para el modelo conducen a fluidos de trabajo o materiales del regenerador inexistentes, o a dimensiones geométricas irrealizables.

Por tanto, si se pretende ampliar la utilidad de este método de anteproyecto, es necesario el establecimiento de *criterios de relajación* de la semejanza dinámica que, sin renunciar a las líneas maestras de la misma, permitan obtener en el mayor número posible de configuraciones un modelo con funcionamiento satisfactorio. En general, el objetivo a conseguir es:

$$P_{ind,max}^d > P_{ind,max}^p \tag{6.2}$$

Organ[8] propone los siguientes criterios de relajación:

- *Relativos a la relajación de la semejanza geométrica*, con objeto de reducir las pérdidas de presión en el modelo:

$$\left[\frac{r_{hx}}{L_{ref}}\right]^d \geq \left[\frac{r_{hx}}{L_{ref}}\right]^p \tag{6.3}$$

- *Relativos al material del regenerador*, para mejorar su respuesta térmica en el modelo:

$$N_F^d \geq N_F^p \tag{6.4}$$

$$N_{TCR}^d \geq N_{TCR}^p \tag{6.5}$$

Por otra parte, de las condiciones de semejanza dinámica se deducen los factores de escala correspondientes a las variables que definen el funcionamiento del motor, es decir, las que figuran en la Ec. (4.14). Recientemente, Prieto *et al.*[4] obtuvieron interesantes conclusiones al analizar tres casos típicos de cambio de escala, considerando los factores de escala de longitud s_L y de temperatura s_T como parámetros en las expresiones del resto de los factores de escala. La Tabla 6.1[5] muestra los factores de escala obtenidos para los tres casos mencionados, así como los correspondientes a un caso más general en el que se consideran también como parámetros los factores de escala del fluido de trabajo s_μ y s_R.

Tabla 6.1 Factores de escala correspondientes a la semejanza dinámica estricta

Magnitud	Caso general	Caso 1: igual gas y material del regenerador	Caso 2: igual gas y temperaturas de los focos	Caso 3: distintos gases pero con igual γ (H_2/aire)
Longitud: l, e, r, r_{hx}	s_L	s_L	s_L	s_L
Area: A_{xx}	s_L^2	s_L^2	s_L^2	s_L^2
Volumen: V_E, V_C, V_{dcx}, V_{dcx}, V_{dr}	s_L^3	s_L^3	s_L^3	s_L^3
Angulo: α_e, β	1	1	1	1
Presión: p_m	$s_\mu s_R^{1/2} s_T^{1/2} s_L^{-1}$	s_L^{-2}	s_L^{-1}	$0.567\, s_T^{1/2} s_L^{-1}$
Temperatura: T_E, T_C	s_T	s_L^{-2}	1	s_T
Porosidad volumétrica: Π_V	1	1	1	1
Coeficiente adiabático: γ	1	1	1	1
Constante específica del gas: R	s_R	1	1	0.070
Viscosidad: μ	s_μ	1	1	2.143
Difusividad térmica: α_r	$s_R^{1/2} s_T^{1/2} s_L$	1	s_L	$0.265\, s_T^{1/2} s_L$
Capacidad calorífica volumétrica: $\rho_r \cdot c_r$	$s_\mu s_R^{1/2} s_T^{-1/2} s_L^{-1}$	1	s_L^{-1}	$0.567\, s_T^{-1/2} s_L^{-1}$
Velocidad del motor: n_s	$s_R^{1/2} s_T^{1/2} s_L^{-1}$	s_L^{-2}	s_L^{-1}	$0.265\, s_T^{1/2} s_L^{-1}$
Potencia indicada: P_{ind}	$s_\mu s_R s_T s_L$	s_L^{-1}	s_L	$0.149\, s_T s_L$

Los casos estudiados fueron los siguientes:

- Caso 1: *El mismo fluido de trabajo e idéntico material del regenerador*

Si el proceso de escala se realiza suponiendo el mismo gas de trabajo e idéntico material del regenerador en prototipo y modelo, la Tabla 6.1 permite escribir:

$$\begin{gathered} s_T = s_{p_m} = s_{n_s} = s_L^{-2} \\ s_{P_{ind}} = s_L^{-1} \end{gathered} \tag{6.6}$$

Entonces, la potencia indicada decrece cuando aumenta la cilindrada, tal como muestra la Fig. 6.3, de manera que, si el objetivo viene dado por la condición (6.2), o lo que es lo mismo $s_{P_{ind}} > 1$, sólo serían interesantes modelos a escala reducida ($s_L < 1$). La semejanza dinámica estricta conduce a modelos más pequeños, más rápidos ($s_{n_s} > 1$) y más potentes ($s_{P_{ind}} > 1$), trabajando a niveles más altos de presión ($s_{p_m} > 1$) y temperatura ($s_T > 1$). Podría decirse que este caso representa la evolución tecnológica de las máquinas Stirling, y que la falta de capacidad de fabricación constituye la principal dificultad para el desarrollo de estos modelos reducidos.

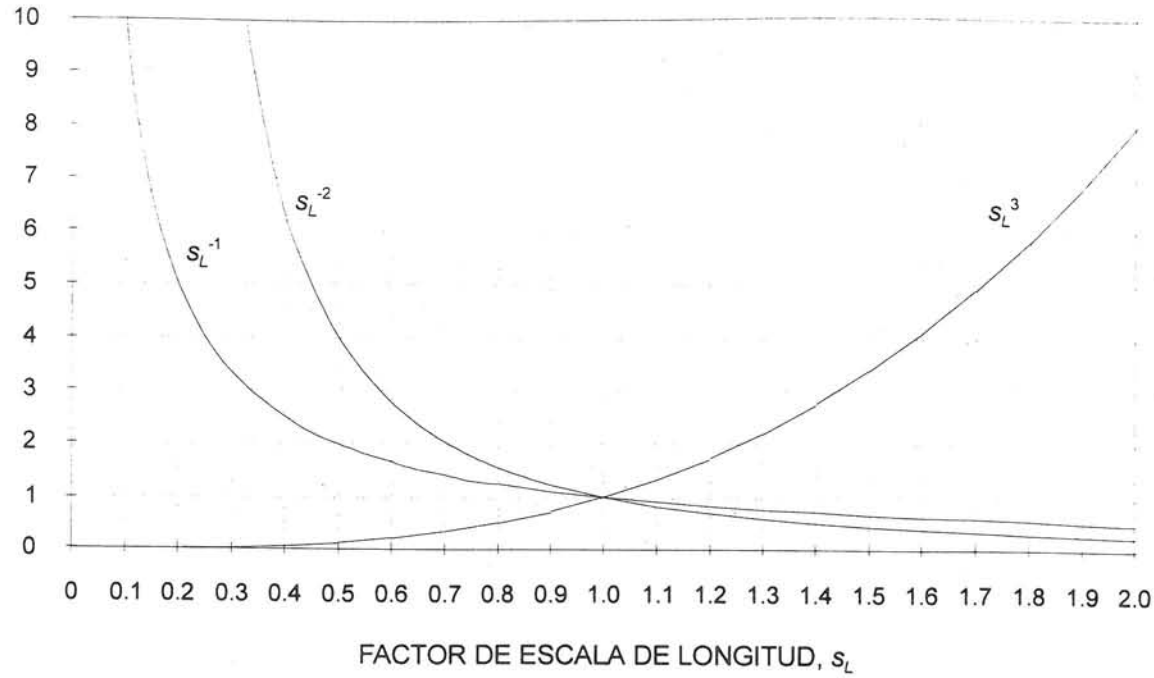


Fig. 6.3 Funciones de los factores de escala para igual fluido de trabajo y material del regenerador

- Caso 2: *El mismo fluido de trabajo e idénticas temperaturas*

Un modelo, que satisfaga $s_T = 1$ y que use el mismo gas pero diferente material del regenerador que el prototipo, tendrá que ser mayor ($s_L > 1$) para que cumpla el objetivo (6.2), tal como muestran las condiciones (6.7), deducidas de la Tabla 6.1:

$$\begin{gathered} s_{p_m} = s_{n_s} = s_{\rho_r c_r} = s_L^{-1} \\ s_{P_{ind}} = s_{\alpha_r} = s_L \end{gathered} \tag{6.7}$$

La semejanza dinámica estricta conduce en este caso a modelos más grandes, más lentos ($s_{n_s} < 1$) y menos presurizados ($s_{p_m} < 1$) que el prototipo, con un material del regenerador de más baja capacidad calorífica volumétrica ($s_{\rho_r c_r} < 1$) pero con mayor difusividad térmica ($s_{\alpha_r} > 1$).

No obstante, no debe esperarse un aumento espectacular en la potencia de estos modelos ampliados. Por ejemplo, un factor de escala de potencia indicada de valor 3 sólo puede obtenerse con un factor de escala de volumen igual a 27, y son previsibles dificultades para conseguir un material adecuado para el regenerador del modelo. Por tanto, los modelos ampliados tienen generalmente que ser modificados para lograr características de funcionamiento interesantes, relajando alguna de las condiciones de semejanza.

- Caso 3: *Distintos fluidos de trabajo pero con igual coeficiente adiabático*

Si el modelo tiene un gas de trabajo diferente que el prototipo, la semejanza dinámica estricta no es posible ni siquiera cuando ambos gases tienen el mismo coeficiente adiabático, puesto que la igualdad de los números de Fourier N_F y de los números característicos de la capacidad térmica del regenerador N_{TCR} correspondientes al prototipo y al modelo conducen, generalmente, a unas características del material del regenerador imposibles de conseguir.

Por ejemplo, para $s_T = 1$, si el fluido de trabajo del prototipo es hidrógeno y el del modelo aire, se requiere un factor de escala de longitud de $s_L > 6.7$ para obtener un modelo interesante ($s_{P_{ind}} > 1$). El correspondiente regenerador del modelo debería satisfacer simultáneamente las condiciones $s_{\alpha_r} > 1.8$ y $s_{\rho_r c_r} < 0.1$, que son probablemente incompatibles.

Aunque, como es lógico, será necesario utilizar criterios de relajación siempre que algunas de las características del modelo no coincidan con las deseadas, a la vista de los resultados anteriores parece que, de los casos estudiados, es en los dos últimos donde los criterios (6.4) y (6.5) serían más necesarios.

No obstante, si se tienen en cuenta las relaciones existentes entre los números adimensionales N_1 y N_2, y los números de Stirling, de Fourier y de Mach, las igualdades de N_{SG} y N_F para el modelo y el prototipo, impuestas por la semejanza dinámica, podrían ser sustituidas por las correspondientes a N_1 y N_2, con lo que las ecuaciones (6.1) pueden remplazarse por las siguientes:

$$\begin{aligned} \tau^d &= \tau^p \\ \gamma^d &= \gamma^p \\ N_1^d &= N_1^p \\ N_2^d &= N_2^p \\ N_{TCR}^d &= N_{TCR}^p \\ N_{MA}^d &= N_{MA}^p \end{aligned} \tag{6.8}$$

Como consecuencia, si se pueden generalizar a otros motores las características de funcionamiento del motor GPU-3, expuestas en el Capítulo anterior, los criterios de anteproyecto mediante semejanza dinámica podrían resumirse en la conveniencia de respetar al máximo la semejanza geométrica y emplear los siguientes criterios de relajación:

$$\begin{aligned} \left[\frac{r_{hx}}{L_{ref}}\right]^d &\geq \left[\frac{r_{hx}}{L_{ref}}\right]^p \\ \tau^d &\leq \tau^p \\ \gamma^d &= \gamma^p \\ N_1^d &\approx N_1^p \\ N_2^d &\approx N_2^p \\ N_{TCR}^d &\approx N_{TCR}^p \\ N_{MA}^d &= N_{MA}^p \end{aligned} \tag{6.9}$$

Nótese también el interés que presenta razonar con la Ec. (5.45):

$$\zeta = \zeta_0 - \Phi N_{MA} - \Psi N_{MA}^2$$

pues, como se vió en el motor GPU-3, parece que τ no influye mucho en Φ y probablemente tampoco en Ψ, luego a través del cálculo de ζ_0 se puede predecir el funcionamiento de un

motor a diversas temperaturas. En cambio, el programa *Scalit* sólo está concebido para el salto térmico en que el número de Beale es aplicable, esto es, $\tau \approx 0.3$.

6.3 MAPA DE TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS

Como ya se ha adelantado en la sección 6.1, una de las utilidades del programa *SIMILAR* consiste en facilitar la obtención de las trayectorias aproximadas de las partículas del fluido de trabajo para un motor Stirling. Los fundamentos del método que se expone a continuación han sido introducidos por Organ[8,11] y Finkelstein[12]. Prieto *et al.*[13], tras observar que la semejanza es extensible a los mapas de trayectorias, han incorporado esta utilidad al programa *SIMILAR*, suponiendo condiciones cuasiestáticas de funcionamiento y un motor con siete espacios geométricos y tres espacios térmicos característicos, como ya se ha dicho.

6.3.1 VOLUMEN REDUCIDO

Suponiendo un motor con n espacios isotermos, a partir de la ecuación de estado de los gases ideales la masa del fluido de trabajo puede expresarse como:

$$M = p(\theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i(\theta)}{RT_i} \tag{6.10}$$

Luego, puede escribirse:

$$MR = p(\theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i(\theta)}{T_i} = p(\theta)\,v_R(\theta) \tag{6.11}$$

donde $v_R(\theta)$ representa el denominado *volumen reducido*, que es inversamente proporcional a la presión instantánea, puesto que el primer miembro de la Ec. (6.11) es constante. Es decir:

$$v_R(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{v_i(\theta)}{T_i} = \frac{MR}{p(\theta)} \tag{6.12}$$

Considerando un motor Stirling con los espacios mencionados, es decir, cilindros de expansión y compresión, calentador, enfriador y regenerador, el volumen reducido sería:

$$v_R(\theta) = \frac{v_E(\theta)}{T_E} + \frac{V_{dce}}{T_E} + \frac{V_{dxe}}{T_E} + \frac{V_{dr}}{T_r} + \frac{V_{dxc}}{T_C} + \frac{V_{dcc}}{T_C} + \frac{v_C(\theta)}{T_C} \tag{6.13}$$

donde T_r representa la temperatura media del regenerador, intermedia entre T_C y T_E.

En esta ecuación son constantes todos los sumandos del segundo miembro salvo el primero y el último. Luego, introduciendo el concepto de *volumen muerto reducido* v_{dR}, que representa la suma de dichos sumandos, se puede escribir:

$$v_R(\theta) = \frac{v_E(\theta)}{T_E} + v_{dR} + \frac{v_C(\theta)}{T_C} \tag{6.14}$$

6.3.2 VOLUMEN REDUCIDO ADIMENSIONAL

El *volumen reducido adimensional* $\upsilon(\theta)$ puede definirse del siguiente modo:

$$\upsilon(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i(\theta)\, T_C}{V_E\, T_i} \tag{6.15}$$

Entonces, se cumple:

$$\upsilon(\theta) = \frac{T_C}{V_E} v_R(\theta) = \frac{M\, R\, T_C}{p(\theta) V_E} \tag{6.16}$$

Para los espacios característicos supuestos anteriormente, el volúmen reducido adimensional sería:

$$\upsilon(\theta) = \frac{v_E(\theta)}{V_E}\frac{T_C}{T_E} + \frac{V_{dce}}{V_E}\frac{T_C}{T_E} + \frac{V_{dxe}}{V_E}\frac{T_C}{T_E} + \frac{V_{dr}}{V_E}\frac{T_C}{T_r} + \frac{V_{dxc}}{V_E} + \frac{V_{dcc}}{V_E} + \frac{v_C(\theta)}{V_E} \tag{6.17}$$

La temperatura media del regenerador T_r puede hallarse a partir de la expresión:

$$\frac{V_{dr}}{T_r} = \int_0^{V_{dr}} \frac{\mathrm{d}\, v_{dr}}{T(x)}$$

Si se supone una variación lineal de la temperatura en el regenerador con la coordenada longitudinal x, se deduce:

$$\frac{V_{dr}}{T_r} = A_{xr} \int_0^{L_r} \frac{\mathrm{d}\, x}{T_E - \dfrac{T_E - T_C}{L_r} x} \quad \rightarrow \quad T_r = \frac{T_E - T_C}{\ln(T_E/T_C)} \tag{6.18}$$

es decir, que T_r sería la temperatura media logarítmica. Luego, la Ec. (6.17) puede escribirse en términos adimensionales como sigue:

$$\upsilon(\theta) = \mu_E(\theta)\,\tau + \mu_{dce}\,\tau + \mu_{dxe}\,\tau + \mu_{dr}\,\frac{\tau \ln \tau}{\tau - 1} + \mu_{dxc} + \mu_{dcc} + \mu_C(\theta) \tag{6.19}$$

En esta ecuación, todos los sumandos del segundo miembro, excepto el primero y el último, son constantes, lo que permite introducir el concepto de *volumen muerto reducido adimensional* υ_d, que los agrupa, y que además se relaciona con el volumen muerto reducido a través de la expresión:

$$\upsilon_d = v_{dR}\,\frac{T_C}{V_E} \tag{6.20}$$

Entonces, la Ec. (6.19) adopta la forma:

$$\upsilon(\theta) = \mu_E(\theta)\,\tau + \upsilon_d + \mu_C(\theta) \tag{6.21}$$

En esta expresión debe tenerse en cuenta que:

- $0 \leq \mu_E(\theta)\ \tau \leq \tau$

- $\upsilon_d =$ constante

- $0 \leq \mu_C(\theta) \leq \kappa$

6.3.3 MAPA DE TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS

El concepto de volumen reducido adimensional proporciona una descripción gráfica del ciclo Stirling, basada en la representación de υ en función de θ. El interés del procedimiento ha merecido que estas variables fueran denominadas por Organ[11] coordenadas 'naturales' del ciclo Stirling, en contraposición a la posibilidad de utilizar coordenadas adimensionales convencionales λ-θ, donde λ representaría la coordenada longitudinal x dividida por una longitud de referencia. Para dicha representación gráfica deben seguirse los dos pasos siguientes:

- Dividir el volumen reducido adimensional correspondiente a cada ángulo de volante θ (comprendido entre las curvas que representan el movimiento de ambos pistones) en un número arbitrario n de partes iguales, con lo que la masa M del gas trabajo se divide en el mismo número n de partes iguales, según se deduce de la Ec. (6.16).

- Unir las divisiones correspondientes, para los distintos valores de θ, con lo que se obtienen n líneas que representan las evoluciones de distintas partículas a lo largo del ciclo.

El resultado tiene el aspecto de la Fig. (6.4). En la Sección siguiente se incluyen, como ejemplo, figuras generadas por el programa *SIMILAR*, que muestran las trayectorias de partículas en coordenadas 'naturales' y convencionales, apareciendo en el segundo caso las discontinuidades típicas entre los diferentes espacios del motor.

Las principales ventajas del diagrama de trayectorias de partículas son las siguientes:

- Dado que $\upsilon(\theta)$ está limitado por las dos líneas que representan el movimiento de los pistones, la construcción del mapa requiere poco tiempo incluso sin recurrir a computadoras, como destaca Organ.

- Proporciona una idea aproximada de la presión instantánea, inversamente proporcional al volumen reducido adimensional como se deduce de la Ec. (6.16).

- Pone en evidencia la amplitud del recorrido de las partículas, detectando la posible existencia de algunas que se desplacen desde el calentador hasta el enfriador, comportándose como *puentes térmicos*, y facilitando el cálculo del '*flushing ratio*'.

- Permite estimar los sentidos de flujo, en ocasiones bidireccional, en cada zona del motor, y los intervalos angulares correspondientes a cada sentido de flujo.

- Permite estimar valores medios del caudal másico $\dot{m}$ y de su variación $\mathrm{d}\dot{m}/\mathrm{d}\theta$.

El mapa de trayectorias es particularmente interesante si se completa con la obtención del *plano medio termodinámico*, definido como la sección que, en el promedio del ciclo, divide la masa del gas en dos partes iguales. Según Finkelstein[12], en un motor bien

dimensionado tal sección correspondería a la mitad del regenerador, lo que, por cierto, no cumplen la mayoría de los motores conocidos.

Por otro lado, el procedimiento constituye un eslabón entre la Termodinámica Clásica y las formulaciones físico-matemáticas de la Termodinámica de Procesos Irreversibles, Mecánica de Fluidos y Transmisión de Calor, ya que:

- A partir del caudal másico es inmediato deducir el valor de la velocidad local e instantánea del fluido $u\ (x,\ \theta)$.

- A partir de la ecuación de estado es inmediata la obtención de la densidad local e instantánea del fluido:

$$\rho(x,\theta) = \frac{p(\theta)}{RT(x)}$$

Por tanto, puede decirse que el mapa de trayectorias de partículas es una fuente de información interesante para el análisis y el anteproyecto de motores Stirling. Además, facilita la obtención de variables intensivas térmicas y mecánicas, lo que, si se conocen correlaciones experimentales de los coeficientes locales e instantáneos de fricción y de transferencia convectiva de calor, posibilita la estimación de las pérdidas de presión por irreversibilidades y de las pérdidas por transmisión de calor entre las diversas zonas del motor, así como el rendimiento y la potencia indicada del ciclo.

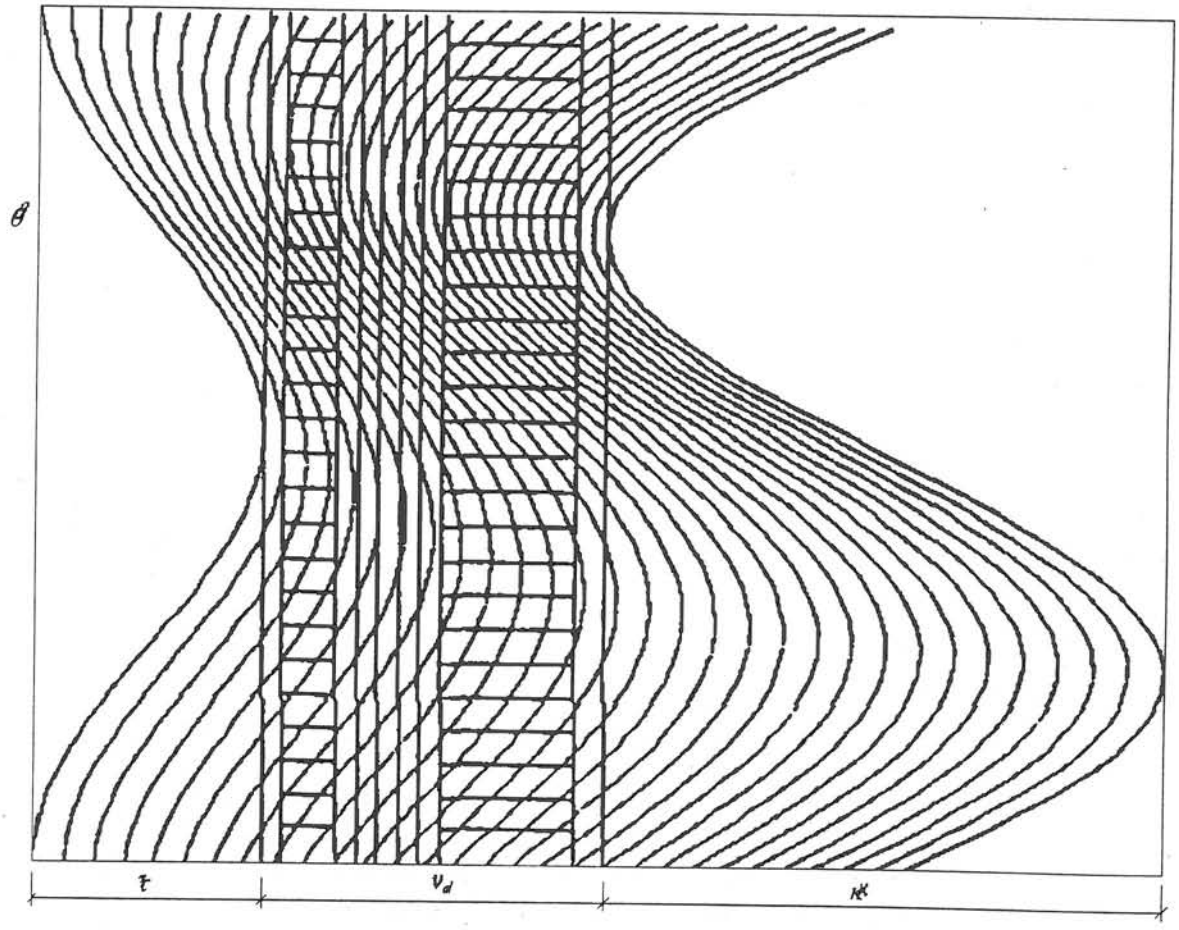


Fig. 6.4 Mapa típico de trayectorias de partículas en coordenadas 'naturales'

6.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

6.4.1 GRANDES MOTORES STIRLING FUNCIONANDO CON AIRE

Walker[14] ha propuesto recientemente la aplicación de grandes motores Stirling funcionando con aire para la propulsión de ferrocarriles y buques, con unas características típicas de 11 litros por cilindro, 140 kW por circuito de gas a 1000 rpm y una presión media de 4.4 MPa. La viabilidad de este proyecto puede analizarse mediante la teoría de semejanza a partir de prototipos conocidos.

Si se utiliza el motor GPU-3 como prototipo, operando con hidrógeno, puede considerarse válida la siguiente ecuación, obtenida de la Tabla 5.3 a partir de la Ec. (5.18):

$$\zeta = 0.306 - 46.0 N_{MA}$$

Entonces, este prototipo desarrollaría una potencia indicada máxima de unos 9290 W a una velocidad aproximada de 4400 rpm, con una presión media de 6.90 MPa. Aplicando el método de semejanza a partir de este punto de funcionamiento, se obtiene el siguiente factor de escala de potencia indicada:

$$s_{P_{ind}} = \frac{140000}{9290} \approx 15$$

Si se considera la semejanza dinámica estricta, las características obtenidas para el modelo divergen claramente del objetivo, incluso con hidrógeno como gas de trabajo, puesto que el caso 2 incluido en la Tabla 6.1 conduce a $V_E \approx 405$ litros, $n_s \approx 293$ rpm y $p_m \approx 0.46$ MPa. Las diferencias son todavía más espectaculares con aire como gas de trabajo, porque del caso 3 de la Tabla 6.1 se deduce un factor de escala de longitud de valor $s_L \approx 101$, por lo que se obtendrían unas características aún más irreales.

Como consecuencia, se cuestiona si el fallo en el método de diseño pudiera ser causado por considerar el motor GPU-3 como prototipo para obtener un modelo de mucha más potencia indicada, o por las limitaciones del procedimiento al basarse en la semejanza dinámica estricta, o por partir de unas especificaciones utópicas para el modelo.

El programa *Scalit* es menos estricto con los requisitos de la semejanza dinámica y, en general, conduce a valores de Φ menores que los resultantes de la semejanza estricta, por lo que podría decirse que su campo de aplicación es más amplio. No obstante, los valores $\Phi \approx 14$ y $N_{MA} \approx 0.0126$ que se deducen de las características especificadas para el punto de funcionamiento del modelo no son conocidos en otros motores, por lo que parecen bastante inalcanzables.

Organ y Finkelstein[15] aplican *Scalit* a este caso, a pesar del hecho de que el objetivo excede el requisito del número de Beale en un 16%, lo cual no parece cuestionable ya que existen motores que lo exceden en porcentajes similares. Tras la simulación, predicen problemas prácticos para el modelo resultante, a causa del elevado número de tubos requerido para los intercambiadores de calor (alrededor de 5000 en el calentador y más de 40000 en el enfriador), así como por la pequeña relación diámetro-longitud en el regenerador. Tales conclusiones están de acuerdo con los resultados del presente trabajo, empleando la semejanza estricta. La solución proporcionada por *Scalit* corresponde a $\Phi \approx 11$ y $N_{MA} \approx 0.0132$, valores que parecen incluso más utópicos que los especificados para el modelo.

Para obtener 140 kW por circuito de gas, quizá sería más adecuado usar un prototipo como el Thermomotor 360-15[16]. La Tabla 6.2 muestra los resultados obtenidos al aplicar el método de semejanza dinámica en forma estricta a partir de dicho prototipo, con hidrógeno y aire como fluidos de trabajo, así como los resultados correspondientes a la aplicación de *Scalit* en ambos casos.

Tabla 6.2 Resultados de la semejanza a partir del Thermomotor 360-15 como prototipo

	Prototipo 360-15	Modelo estricto	Modelo de *Scalit*	Modelo estricto	Modelo de *Scalit*	Stirling 1843
Fluido de trabajo	H_2	H_2	H_2	aire	aire	aire
T_E (K)	1000	1000	1000	1000	1000	613
T_C (K)	300	300	300	300	300	338
V_E (cm^3)	1222	11663	12727	3526000	4666667	316000
p_m (Mpa)	10.5	4.95	4.4	0.2	0.2	1.3
$n_{s,max}$ (rpm)	1500	707	1000	60	60	28
$P_{ind,max}$ (W)	~ 66000	140000	140000	140000	140000	~ 18800
N_1	$112.2 \cdot 10^6$	$112.2 \cdot 10^6$	$102.7 \cdot 10^6$	$112.2 \cdot 10^6$	$61.9 \cdot 10^6$	$166.5 \cdot 10^6$
N_2	$3.37 \cdot 10^{-8}$	$3.37 \cdot 10^{-8}$	$1.54 \cdot 10^{-8}$	$3.37 \cdot 10^{-8}$	$0.82 \cdot 10^{-8}$	
N_{TCR}	112.1	112.1	269.3	112.1	5925	
$N_{MA,max}$	0.0024	0.0024	0.0035	0.0024	0.0057	0.0011
Φ	85.7	85.7	42.8	85.7	26.3	90.5
ζ_{max}	~ 0.206	~ 0.206	0.150	~ 0.206	0.150	~ 0.098
ζ_0	~ 0.405	~ 0.405		~ 0.405		~ 0.190
n_e	48	48	112	48	341	
d_e (mm)	5	10.6	7.8	71	41	
L_e (mm)	550	1167	663	7830	2915	
n_c	1020	1020	1011	1020	3079	
d_c (mm)	1.2	2.5	3	17	15.6	
L_c (mm)	130	276	232	1850	1022	
n			355		251	
d_w (μm)	50	106	140	712	873	
r_{hr} (mm)			0.082		0.509	
A_{xr} (cm^2)			7.34		611.69	

A la vista de esta tabla, para un modelo operando con hidrógeno, el objetivo especificado es probablemente alcanzable. En este caso, ambos métodos conducen a resultados bastante parecidos, aunque el modelo obtenido a partir de *Scalit* tendría un valor de Φ más favorable que los correspondientes a motores existentes.

Con aire como gas de trabajo, las características de los modelos obtenidos por ambos métodos se alejan de las especificaciones de partida y podrían no ser tecnológicamente atrayentes, si bien es interesante hacer notar que el programa *Scalit* conduce a un valor de Φ

todavía más bajo. En cierto modo, estos resultados recuerdan al motor Stirling original de 1843[17].

6.4.2 MOTOR STIRLING PARA COGENERACIÓN DOMÉSTICA CON GAS NATURAL

El objetivo del proyecto DF96-514-4[18] de la Universidad de Oviedo es diseñar, construir y probar un prototipo de motor Stirling con quemador de gas natural para cogeneración a escala doméstica, agrícola o industrial de baja potencia, del que puedan derivarse modelos eventualmente comercializables capaces de satisfacer las siguientes especificaciones:

- Larga vida útil, del orden de 10 años o unas 30000 horas de funcionamiento.
- Alta fiabilidad y bajo mantenimiento.
- Bajo nivel de ruidos.
- Bajo nivel de emisiones de CO y NO_x, por debajo de 50 ppm.
- Bajo coste de adquisición y funcionamiento, para lograr la amortización más rápida posible.

Los pequeños motores Stirling, de menos de 1 kW, no han sido objeto de especial atención hasta el presente, quizá por no percibirse aplicaciones claramente interesantes. Pero parece que la situación ha cambiado recientemente, al detectarse un mercado potencial para motores Stirling alimentados por gas que puedan producir energía térmica y electromecánica a escala doméstica[19]. Aceptando una demanda del mercado en el intervalo de 0.3 a 1 kW, se considera que el prototipo objeto del proyecto habrá de tener una potencia indicada del orden de 500 W. Estimando un rendimiento indicado del 25%, un rendimiento del sistema de combustión del 80%, un rendimiento mecánico del 70% y un rendimiento del alternador del 85%, el prototipo produciría, con un quemador de unos 2500 W, unos 300 W de energía eléctrica, unos 500 W de energía térmica en los humos (con temperatura de 300 a 500°C) y unos 1500 W de energía térmica en el agua de refrigeración (a unos 60°C).

La adopción a gran escala de instalaciones basadas en este prototipo tendría las siguientes ventajas:

- Conservación de energía
- Reducción de la contaminación ambiental
- Reducción de la carga del sistema de distribución eléctrica, a veces cargado críticamente
- Capacidad del usuario para hacer frente a eventuales fallos del suministro principal eléctrico

El anteproyecto se inicia seleccionando las siguientes especificaciones:

- Configuración: A priori, parece que entre las configuraciones posibles podría ser más idónea la de dos cilindros (tipo α) o bien la de un cilindro (tipo β) con solape máximo.

- Accionamiento: La selección del tipo de accionamiento está relacionada con la configuración seleccionada y con el tipo de alternador que vaya a ser acoplado al modelo. El mecanismo de yugo Ross parece el más interesante para una configuración tipo α. El alternador rotativo es más barato que el alternador lineal, más voluminoso a igualdad de potencia y necesitado de un accionamiento mecánico algo más caro, aunque con menos problemas de fugas. El motor tipo β emplearía, en principio, un mecanismo rómbico, que es más caro.

- Gas de trabajo: Existen informes de fabricantes de motores que desaconsejan a corto plazo cualquier gas de trabajo que no sea aire, si bien se considera que gases más ligeros y de mayor potencia, como el hidrógeno y el helio, podrían generalizarse cuando la tecnología esté suficientemente implantada.

- Presión media: Aunque la tendencia en motores Stirling de alta potencia es emplear presiones medias incluso de 25 MPa, parece aconsejable limitar la presión del modelo objeto de este proyecto al objeto de reducir espesores de materiales, permitir el empleo de cierres convencionales, aumentar su vida útil y facilitar la recarga del gas de trabajo. Una presión de llenado fácilmente disponible sería del orden de 0.7 MPa.

- Velocidad: Está relacionada con el diseño del sistema eléctrico, pero sobre todo con el tipo de gas de trabajo. A las presiones y temperaturas consideradas en el proyecto, la velocidad de máxima potencia que podría alcanzarse con aire resulta del orden de 1000 rpm.

- Temperatura superficial del espacio de expansión: A priori parece que debe buscarse siempre la máxima temperatura posible, pero la resistencia mecánica del acero inoxidable austenítico 18-8 ó de los aceros al níquel de alta aleación disminuye con la temperatura. Luego altas temperaturas requieren mayores espesores, que dan lugar a pérdidas por conducción en las paredes metálicas y en el huelgo entre cilindro y pistón calientes, compensando en buena medida las ventajas presumibles. Se estima que puede ser razonable una temperatura del orden de 600 a 700°C, empleando acero inoxidable, bastante más barato que los aceros de alta aleación.

- Temperatura superficial del espacio de compresión: Para aplicaciones de cogeneración, es aconsejable que la refrigeración del motor sea por agua y que ésta tenga una temperatura no inferior a unos 60°C, luego la temperatura de las paredes del enfriador habrá de ser de unos 70°C.

- Sistema de combustión: El sistema de combustión de un motor Stirling debe proporcionar la máxima temperatura de humos compatible con la resistencia mecánica del material del calentador y con los niveles de emisiones contaminantes especificados.

En Alemania, la empresa SOLO Kleinmotoren GmbH lleva unos 7 años dedicada a la investigación y el desarrollo del motor Stirling. Inicialmente, fabricó para Bergmann, Schlaich & Partner (BSP), de Stuttgart, motores para el proyecto DISTAL, para conversión de energía solar en la Plataforma Solar de Almería, adaptando motores V160F fabricados por Stirling Power Systems (SPS), empresa sueca, licenciataria de Philips, que desarrolló diversos modelos fundamentalmente destinados a aplicaciones subacuáticas. El sistema basado en el motor SPS V160F ha producido unos 9 kW de potencia eléctrica con un concentrador paraboloide de 7.5 m de diámetro, logrando rendimientos totales superiores al 20% y

acumulando unas 25000 h de funcionamiento a la fecha de agosto de 1996. SOLO ha rediseñado el sistema en colaboración con L&C Steinmüller GmbH of Gummersbach (LCS), de cara a la comercialización de una serie de unidades de 10 kW de potencia eléctrica. Los primeros resultados del funcionamiento de este nuevo modelo, denominado SOLO 161, eran esperados a finales de 1997[20].

Un motor Stirling V160F también fue adaptado por SOLO para la combustión de biomasa en lecho fluidificado, en un proyecto donde participó el CIEMAT/CEDER, en Soria, en el marco del programa Joule 2 europeo. El motor produjo 4 kW de potencia eléctrica y 30 kW de potencia térmica quemando astillas de pino. Parece ser que estos resultados no se consideraron satisfactorios, principalmente debido a la costosa tecnología requerida en el calentador y a problemas para su limpieza. Otras dos unidades V160F estuvieron funcionando en el Johanneum Research de Graz, Austria. En este mismo instituto se han obtenido 3.2 kW de potencia al freno a 600 rpm con 25% de rendimiento, integrando un motor Stirling, realizado con algunos elementos de un motor Ducati de 500 cm^3, en un horno convencional para incinerar biomasa[21]. El fluido empleado fue aire a 33 bar. Parece ser que, en Austria, las aplicaciones que parecen presentar mejores perspectivas en este tipo de aplicación corresponden al rango de 30 a 120 kW de potencia eléctrica. Stirling Thermal Motors (STM) de Ann Arbor, Michigan, está desarrollando el motor denominado "BioStirling", que produciría una potencia eléctrica de unos 25 kW con biomasa previamente gasificada. Los humos ya filtrados tienen una temperatura del orden de 1600°C, pero se desconoce aún la viabilidad económica del procedimiento.

El motor SPS-V160F de Solar Power Systems obtuvo una temperatura de humos de 860°C quemando en Soria astillas de pino en lecho fluidificado, alcanzando el gas de trabajo unos 530°C. Los niveles de emisión correspondientes resultaron inaceptables, del orden de 500 a 1000 ppm de CO y NO_x, valores superados por motores actuales de combustión interna. El mismo motor logró con energía solar en la Plataforma Solar de Almería una temperatura de tubos del calentador de 740°C, y el fluido de trabajo alcanzó 650°C. Es preciso lograr en la combustión con gas natural una distribución uniforme de la temperatura de tubos, del orden de 600 a 700°C, favoreciendo la radiación térmica, reduciendo las pérdidas de carga en los humos y moderando la temperatura de los humos para limitar las emisiones contaminantes. El anteproyecto debe contemplar al menos las siguientes soluciones, que podrían combinarse:

- La *recirculación de humos* con/sin premezcla: La recirculación de humos permite controlar la temperatura adiabática de la combustión, pero debe garantizarse la estabilidad de la llama, por lo que el porcentaje de recirculación no excede típicamente del 30%. Mitsubishi Electric Corp.[22] ha realizado interesantes investigaciones con gas natural en el rango de potencias de 7 a 20 kW de potencia consumida en el sistema de combustión, con niveles de CO y NO_x muy bajos. WS Wärmeprozesstechnik GmbH, Renningen[23], ha registrado recientemente un modo de combustión que se produce con porcentajes de recirculación extremadamente altos, estable y sin llama, denominado FLOX (*flameless oxidation*). Los niveles de NO_x son menores que con otros tipos de quemadores en el rango de temperaturas del aire precalentado entre 600 y 800°C y temperaturas de la cámara de combustión entre 800 y 1200°C, típicas de los motores Stirling.

- La *combustión catalítica*: La temperatura superficial de los tubos del calentador de un motor Stirling está típicamente en el rango de 700 a 850°C, adecuado para una combustión catalítica[24]. El catalizador podría aplicarse mediante recubrimientos, por ejemplo, a base de paladio, y habría que prever suficiente superficie de contacto. La combustión podría iniciarse empleando energía eléctrica en resistencias de

calentamiento o para accionar el motor en sentido inverso, es decir como bomba de calor, hasta que los tubos del calentador adquieran temperatura suficiente para la combustión catalítica.

- El empleo de *tubos de calor*: Los tubos de calor con Na/K se vienen considerando como la mejor solución para transferir energía solar a los calentadores de los motores Stirling destinados a aplicaciones aerospaciales[25], donde sustituyen ventajosamente a la conversión fotovoltáica, pues minimizan las baterías de acumulación. La transmisión de calor presentaría con esta solución una distribución uniforme de temperaturas y satisfactorios rendimientos. Otra ventaja adicional sería la facilidad de emplear el sistema con diversas fuentes de energía (solar, biomasa,...)[26].

- Cilindrada: Entre los prototipos con un valor de $\tau \approx 0.33$ próximo al objetivo del proyecto se encuentran el GPU-3 y el M102C, analizados en el Capítulo 5. Si se supone que el primero, empleando hidrógeno a $p_m = 2.76$ MPa, satisface la ecuación:

$$\zeta \approx 0.286 - 47.4\, N_{MA}$$

entonces desarrollaría una potencia indicada máxima de unos 3135 W a 3970 rpm. Un modelo estrictamente semejante, con aire a la presión de 0.7 MPa, habría de tener una cilindrada de unos 1340 cm^3 y desarrollaría una potencia indicada máxima de unos 1045 W a 470 rpm (Tabla 6.1, Caso 3). Aunque pueden realizarse tanteos a otras presiones, parece que el tamaño del motor y la velocidad de funcionamiento pueden ser más interesantes empleando el otro prototipo, como se verá a continuación.

En primer lugar, con las temperaturas supuestas y con volúmenes muertos iguales a los del motor M102C, el modelo cuasiestático de Schmidt proporciona para un motor monocilíndrico con solape máximo y accionamiento armónico una potencia cuasiestática adimensional de valor $\zeta_0 = 0.317$. Este valor es independiente de la presión media, lo que está aceptablemente de acuerdo con el análisis de los resultados experimentales.

Por otro lado, para lograr un motor más potente que el prototipo es preciso que el factor de escala de presiones sea menor que la unidad (Tabla 6.1, Caso 2). Considerando los resultados experimentales del prototipo funcionando a $p_m = 1.103$ MPa, se observa que satisfacen aceptablemente (Fig. 6.5) la siguiente ecuación:

$$\zeta \approx 0.325 - 7063\, N_{MA}^2$$

de modo que el prototipo desarrolla una potencia indicada máxima de unos 376 W a 1690 rpm, y una potencia al freno máxima de unos 193 W a 1260 rpm.

Considerando la relación entre los factores de escala de presiones y de longitudes, se deduce:

$$s_L = \frac{1.103}{0.7} = 1.576$$

Luego el modelo habría de tener una cilindrada de 249.6 cm^3 y desarrollaría una potencia indicada máxima de unos 590 W a 1070 rpm.

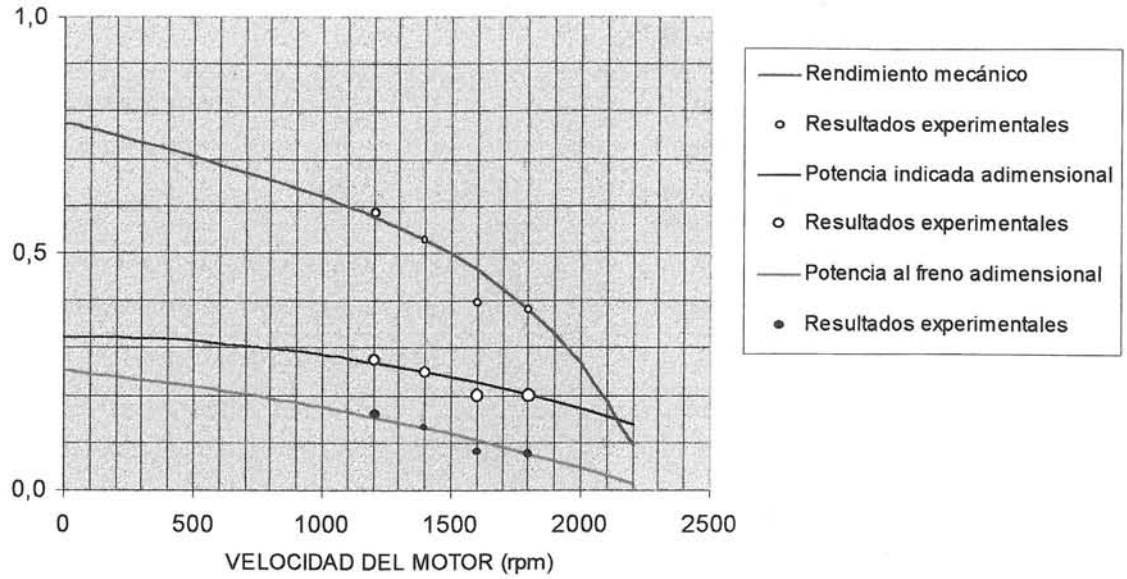


Fig. 6.5 Resultados experimentales del prototipo M102C a T_E = 600°C, T_C = 288°C y p_m = 1.103 MPa

A la vista de los resultados, se decide emplear como prototipo el motor MP1002CA de Philips, que es una evolución del M102C, y del cual se dispone de una descripción geométrica más completa[2] que la del primero. La Tabla 6.3 muestra las características del prototipo, del modelo estrictamente semejante y del modelo definitivamente adoptado, en el que se han realizado las siguientes relajaciones de los criterios de semejanza estricta:

- Como la cilindrada del desplazador del motor MP1002CA es igual a 59.4 cm^3, en lugar de los 63.8 cm^3 del M102C, se decide redondear por exceso el factor de escala geométrico adoptando s_L = 1.6, por lo que la cilindrada del modelo será igual a 243 cm^3.

- Se supone que el modelo tendrá configuración tipo α y mecanismo de yugo Ross, en lugar de la configuración β y mecanismo mixto biela-manivela/'bell-crank' del prototipo. El mecanismo del modelo mejorará el valor cuasiestático ζ_0 y el rendimiento mecánico del prototipo, proporcionando un margen adicional de potencia que es conveniente en la fase de anteproyecto.

- Se reduce el diámetro de los cilindros al objeto de que el desplazador y el cilindro de expansión puedan construirse a partir de tubos de 3" de acero inoxidable. En consecuencia, se aumenta la carrera para mantener la cilindrada.

- Se adopta un material del regenerador formado por una malla trenzada de acero inoxidable AISI-316L, con diámetro de alambre de 0.063 mm y número de malla igual a 125 por pulgada, lo que corresponde a un radio hidráulico de 0.0489 mm y una porosidad del 75%, aproximadamente.

- Tras analizar las trayectorias de partículas y detectar la situación del plano medio termodinámico en el enfriador (Fig. 6.6), se prevé un aumento del número de ranuras del calentador para desplazar dicho plano hacia el regenerador, lo que aumentará el rendimiento.

Tabla 6.3 Resultados del anteproyecto a partir del prototipo MP1002CA

	Prototipo	Modelo estricto	Modelo relajado
Tipo de configuración	beta	beta	alpha
Fluido de trabajo	aire	aire	aire
Tipo de mecanismo de accionamiento	biela-manivela / 'bell-crank'	biela-manivela / 'bell-crank'	yugo Ross
Diámetro del cilindro de expansión: D_E (mm)	55	88	80
Radio de manivela de expansión: r_E (mm)	13.5	21.6	17
Carrera del pistón de expansión: S_E (mm)	25	40	~48
Cilindrada de expansión: V_E (cm^3)	59.4	243.28	~243
Diámetro del cilindro de compresión: D_C (mm)	55	88	88
Radio de manivela de compresión: r_C (mm)	13.5	21.6	17
Carrera del pistón de compresión: S_C (mm)	27	43.2	~48
Cilindrada de compresión: V_C (cm^3)	64.15	262.75	~243
Volumen muerto del cilindro de expansión: V_{dce} (cm^3)	7.73	31.66	25.9
Volumen muerto del cilindro de compresión: V_{dcc} (cm^3)	9.14	37.43	15.27
Número de ranuras del calentador: n_e	160	160	200
Longitud de las ranuras del calentador: L_e (mm)	37.25	59.6	59.6
Dimensiones de las ranuras del calentador: d_e / h_e (mm)	2.38/0.40	3.81/0.64	3.81/0.64
Radio hidráulico del calentador: r_{he} (mm)	0.171	0.274	0.274
Area de sección transversal del calentador: A_{xe} (cm^2)	1.52	3.90	4.88
Area de la pared lateral del calentador: A_{Wxe} (cm^2)	331.38	848.70	1060.88
Volumen muerto del calentador: V_{dxe} (cm^3)	5.67	23.25	91.19
Número de ranuras del enfriador: n_c	160	160	120
Longitud de las ranuras del enfriador: L_c (mm)	37.25	59.6	59.6
Dimensiones de las ranuras del enfriador: d_c / h_c (mm)	2.38/0.40	3.81/0.64	3.81/0.64
Radio hidráulico del enfriador: r_{hc} (mm)	0.171	0.274	0.274
Area de sección transversal del enfriador: A_{xc} (cm^2)	1.52	3.90	2.93
Area de la pared lateral del enfriador: A_{Wxc} (cm^2)	331.38	848.70	636.53
Volumen muerto del enfriador: V_{dxc} (cm^3)	5.67	23.25	24.06
Material del regenerador	AISI	AISI	AISI
Longitud del regenerador: L_r (mm)	28	44.8	44.8
Diámetro del alambre del regenerador: d_w (mm)	0.040	0.064	0.063
Porosidad volumétrica: Π_V	~0.75	~0.75	0.76
Difusividad térmica del alambre: α_r (m^2/s)	$4\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$
Capacidad caloríffica volumétrica: $\rho_r\cdot c_r$ (J/m^3·K)	$4.32\cdot10^6$	$4.32\cdot10^6$	$4.32\cdot10^6$
Radio hidráulico del regenerador: r_{hr} (mm)	~0.040	~0.064	0.0489
Area de sección transversal del regenerador: A_{xr} (cm^2)	~7.28	~18.63	18.06
Area de la pared lateral del regenerador: A_{Wr} (cm^2)	~4820	~12339	16542
Volumen muerto del regenerador: V_{dr} (cm^3)	~19.31	~79.09	80.89

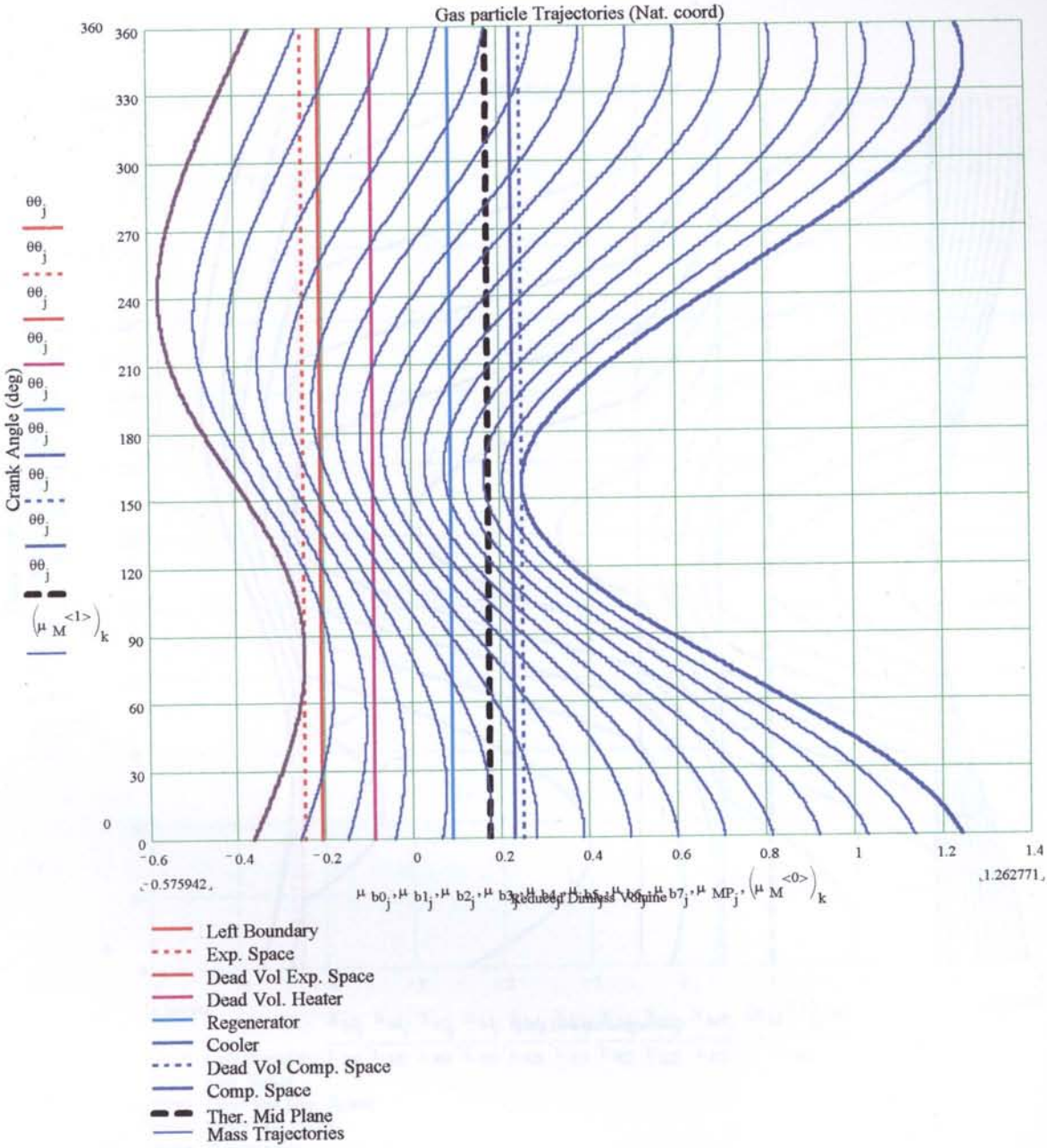


Fig. 6.6(a) Mapa de trayectorias en coordenadas 'naturales'

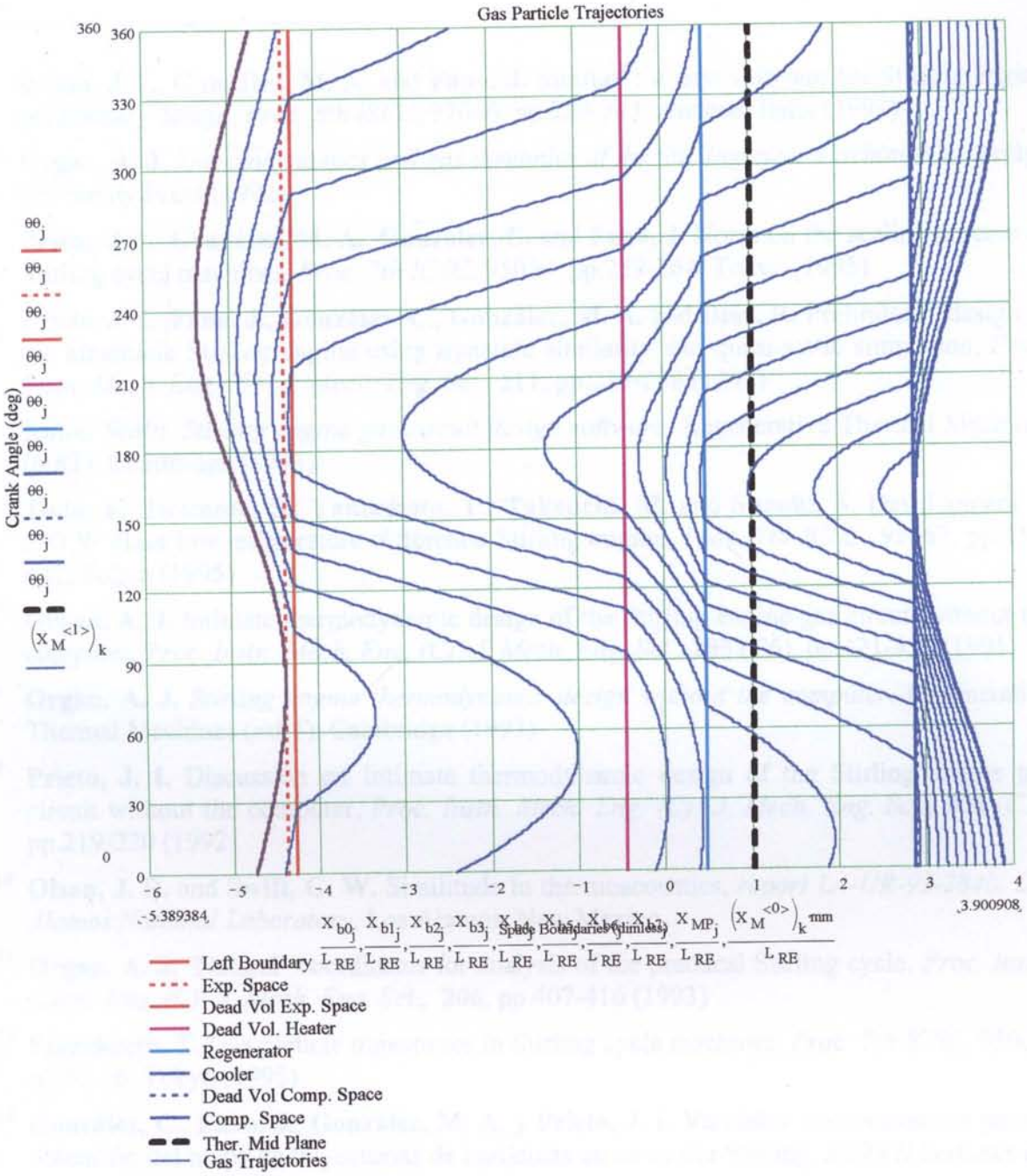


Fig. 6.6(b) Mapa de trayectorias en coordenadas adimensionales convencionales

6.5 REFERENCIAS

[1] **Prieto, J. I., González, M. A.** and **Fano, J.** Similar®: a new software for Stirling engine preliminary design, *Proc. 8th ISEC*, 97046, pp.339-343, Ancona, Italia (1997)

[2] **Organ, A. J.** *Thermodynamics and gas dynamics of the Stirling cycle machine*, Cambridge University Press (1992)

[3] **Prieto, J. I., González, M. A., González, C.** and **Fano, J.** Notes on the scaling process of Stirling cycle machines, *Proc. 7th ICSC*, 95039, pp.259-264, Tokyo (1995)

[4] **Prieto, J. I., Fano, J., González, C., González, M. A.** and **Díaz, R.** Preliminary design of the kinematic Stirling engine using dynamic similarity and quasi-static simulation, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **211**, pp.229-238 (1997)

[5] **Anon.** *Scalit, Stirling engine gas circuit design software*, Regenerative Thermal Machines (*mRT*), Cambridge (1993)

[6] **Toda, F., Iwamoto, S., Yamamoto, T., Takeuchi, M.** and **Suzuki, S.** Development of 300 W class low temperature difference Stirling engine, *Proc. 7th ICSC,* 95067, pp.437-442, Tokyo (1995)

[7] **Organ, A. J.** Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **205** (C6), pp.421-430 (1991)

[8] **Organ, A. J.** *Stirling engine thermodynamic design without the computer*, Regenerative Thermal Machines (*mRT*), Cambridge (1993)

[9] **Prieto, J. I.** Discussion on Intimate thermodynamic design of the Stirling engine gas circuit without the computer, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206** (C3), pp.219-220 (1992)

[10] **Olson, J. R.** and **Swift, G. W.** Similitude in thermoacoustics, *report LA-UR-93-2840, Los Alamos National Laboratory*, Los Alamos, New Mexico

[11] **Organ, A. J.** 'Natural' coordinates for analysis of the practical Stirling cycle, *Proc. Instn. Mech. Eng. (C): J. Mech. Eng. Sci.*, **206**, pp.407-416 (1993)

[12] **Finkelstein, T.** Gas particle trajectories in Stirling cycle machines, *Proc. 7th ICSC*, 95008, pp.71-76, Tokyo (1995)

[13] **González, C., Fano, J., González, M. A.** y **Prieto, J. I.** Variables adimensionales para la obtención del mapa de trayectorias de partículas en un motor Stirling, *XXXVII Sesiones del GTAD*, Arrecife, Lanzarote (1997)

[14] **Walker, G.** The Stirling engine for railway locomotive application, *report TP 2930E prepared under Contract 4270 for Transport Canada*, Transportation Development Centre, Montreal (1981)

[15] **Organ, A. J.** and **Finkelstein, T.** So you want to design a Stirling engine, *Proc. 30th IECEC* (1995)

[16] **Hargreaves, C. M.** *The Philips Stirling engine*, p. 156, Elsevier, Amsterdam (1991)

[17] **West, C. D.** *Principles and applications of Stirling engines*, Van Nostrand Reinhold, New York (1986)

[18] *Motor Stirling de 500 W para cogeneración doméstica*, DF96-514-4, Universidad de Oviedo (1996)

[19] **Rix, D. H.**, Some aspects of the outline design specification of a 0.5 kW Stirling engine for domestic scale co-generation, *J Power and Energy*, Vol 210, pp 25-33 (1996)

[20] **Baumüller, A., Schiel, W.** Single acting 10 kW_e Stirling engine applications and results, paper 97077, *Proc 8th ISEC*, pp.559-569, Ancona, Italia (1997)

[21] **Podesser, E.** Small scale cogeneration in biomass furnaces with a Stirling engine, paper 97084, *Proc 8th ISEC,* pp.613-631, Ancona, Italia (1997)

[22] **Koseki, H.** An experimental approach to further NO_x reduction in Stirling engine combustor, paper 95014, *Proc 7th ISEC*, pp.107-112, Tokyo (1995)

[23] **Wünning, J. A., Wünning, J. G.**, Flameless oxidation as a combustion method for Stirling engines, paper 97043, *Proc 8th ISEC*, pp.309-317, Ancona, Italia (1997)

[24] **Lundholm, G., Lundqvist, P.** A Stirling-electric parallell hybrid engine system with catalytic combustion and integrated air conditioning, paper 97002, *Proc 8th ISEC*, pp.11-17, Ancona, Italia (1997)

[25] **Fujihara, T., Eguchi, K., Nakamura, Y.** Experiments on a two-staged heat pipe model for NALSEM-500 operations, paper 95020, *Proc 7th ISEC*, pp.143-148, Tokyo (1995)

[26] **Loginov, N. I., Ivanovski, M. N., Chulkov, B. A., Ivanchicov, M. G., Dobrosotski, A. V., Ryzkov-Dudonov, M. A.** Universal heat transfer system for Stirling engine, paper 95021, *Proc 7th ISEC*, pp.149-154, Tokyo (1995)

7. CONCLUSIONES

De la presente memoria de Tesis Doctoral se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Los mecanismos de accionamiento más empleados en motores Stirling cinemáticos se han generalizado introduciendo los conceptos de *ángulo canónico de volante*, *ángulos de desfase extrínseco* (α_e) e *intrínseco* (α_i), y *ángulo entre ejes de pistones* (β).

- En el mecanismo generalizado, las posiciones x_i de los pistones están determinadas mediante los parámetros r_i, λ_i, ε_i, α_e, β y θ. Dichos parámetros y la configuración del motor determinan las funciones s_C y s_E de desplazamiento de los pistones, de las cuales se deducen las funciones de volumen de los espacios frío y caliente.

- Para cada configuración de un motor, el ángulo de desfase intrínseco α_i depende de los parámetros adimensionales λ_i y ε_i. En general, los ángulos de desfase total entre valores máximos de s_C y s_E (α') y entre mínimos (α'') son diferentes y dependen de α_e, α_i y β.

- La configuración de la máquina puede ser caracterizada mediante un conjunto de parámetros f, g, h, j y k, lo que permite unificar las ecuaciones características del accionamiento mecánico. El uso de las ecuaciones unificadas facilita el anteproyecto y la optimización paramétrica de cada tipo de motor y mecanismo de accionamiento, reduciendo el tiempo de programación.

- Las funciones de volumen instantáneo en los cilindros se caracterizan añadiendo las cilindradas V_E y V_C, y los correspondientes volúmenes muertos V_{dce} y V_{dcc}, a las características geométricas del accionamiento.

- Para caracterizar geométricamente el calentador y el enfriador se deben añadir los parámetros V_{dxe}, A_{xe}, r_{he}, V_{dxc}, A_{xc} y r_{hc}. Para caracterizar geométricamente un regenerador con mallas de alambre trenzado se deben añadir los parámetros V_{dr}, A_{xr}, r_{hr} y Π_V. Para matrices de materiales porosos con estructura arbitraria habría que incorporar los coeficientes de permeabilidad k_α y k_β, en lugar de r_{hr}.

- No existen actualmente correlaciones experimentales ni simulaciones numéricas suficientemente contrastadas del coeficiente de fricción y de los números de Stanton o de Nusselt en regeneradores de motores Stirling. Tales correlaciones habrán de tener presumiblemente la forma de la Ec. (3.30).

- Para caracterizar el punto de funcionamiento de un motor Stirling se deben añadir los parámetros T_E, T_C, p_m y n_s.

- Para caracterizar las propiedades físicas del fluido de trabajo se deben añadir los parámetros R, γ y μ. No es preciso añadir k, pues podría ser sustituido por N_{pr}, que varía poco de unos gases a otros. Para caracterizar las propiedades físicas del material del regenerador se deben añadir los parámetros α_r y $\rho_r \cdot c_r$.

- Se sugiere que todas las propiedades del fluido y del material del regenerador se refieran a la temperatura T_C, que varía poco de unos motores a otros.

- La potencia indicada adimensional cuasiestática puede expresarse como solución analítica o numérica de la Ec. (4.13).

- La potencia indicada adimensional de un motor Stirling cinemático puede expresarse mediante la Ec. (4.16), en función de 22 variables adimensionales independientes.

- El método de Análisis Dimensional con discriminación espacial permite eliminar monomios espurios en las Ec. (4.13) y (4.16) citadas, entre otras, lo que constituye un avance respecto de trabajos anteriores debidos a Organ.

- La Ec. (4.16) ha sido corroborada mediante análisis de regresión por mínimos cuadrados, empleando resultados experimentales de diversos motores.

- El motor GPU-3 de General Motors satisface la Ec. (5.18) de potencia indicada adimensional, que se complementa con las Ec. (5.14) y (5.19). Los motores P-40 de United Stirling, M102C de Philips y V4-275 de Kockums probablemente cumplen la Ec. (5.37) de potencia indicada adimensional, que se complementa con las Ec. (5.39) y (5.41). Estos resultados son coherentes con el análisis de los regímenes de flujo realizados por Seume y Simon en intercambiadores de varios motores Stirling y sugieren una ecuación general de potencia indicada adimensional como la Ec. (5.45).

- Las predicciones de los modelos isotermos o cuasiestáticos adquieren interés para el análisis y el proyecto de motores actuales.

- Se ha desarrollado un programa de simulación basado en la Teoría de Semejanza que permite el análisis del funcionamiento de prototipos y el diseño preliminar de modelos. Además proporciona mapas de trayectorias de partículas basados en el modelo cuasiestático, lo que permite detectar anomalías en el funcionamiento de los motores. Respecto de otros programas existentes basados en la semejanza dinámica, presenta la ventaja de facilitar curvas de potencia y simulaciones a niveles térmicos diferentes de los contemplados en la clásica correlación basada en el número de Beale.

- Se han analizado las especificaciones recientemente propuestas para grandes motores Stirling con aire destinados a locomotoras y propulsión marina, observando que serán difícilmente realizables.

- También como ejemplo, se ha aplicado el método de anteproyecto al dimensionamiento de un motor Stirling para cogeneración a escala doméstica mediante gas natural.

Por otro lado, se sugiere la realización de los siguientes trabajos futuros dentro de la misma línea de investigación:

- Corroboración experimental del diseño de un motor Stirling para cogeneración a escala doméstica mediante gas natural.

- Simulación, diseño, fabricación y pruebas de motores Stirling de bajo salto térmico ('*low* ΔT').

- Aplicación del Análisis Dimensional y la Teoría de Semejanza a los motores Stirling de accionamiento híbrido y de pistón libre.

- Aplicación del Análisis Dimensional y la Teoría de Semejanza a los refrigeradores de ciclo Stirling y accionamiento cinemático.

- Aplicación del Análisis Dimensional y la Teoría de Semejanza a los refrigeradores de ciclo Stirling y accionamiento híbrido y de pistón libre.

APÉNDICE: CONCEPTOS BÁSICOS DE ANÁLISIS DIMENSIONAL

El Análisis Dimensional es una *disciplina auxiliar científico-matemática* cuyo objeto de estudio son las teorías físicas, a las que está subordinado. No es, pues, una ciencia física porque su objeto no es el estudio directo de la naturaleza, ni es una ciencia matemática, porque no produce teoremas o consecuencias abstractos a partir de axiomas o postulados.

Se fundamenta en el *principio de homogeneidad* de las igualdades físicas y consta de cuatro teorías:

- *teoría de las magnitudes físicas* (que intervienen en las leyes físicas)

- *teoría de las leyes físicas* (propias de una teoría física)

- *teoría de los problemas físicos* (relativos a un fenómeno que estudia una teoría)

- *teoría de la semejanza* (entre problemas que se resuelven en la misma teoría) y de la analogía (entre problemas que se resuelven en teorías diferentes)

La *validez* del Análisis Dimensional se extiende a las teorías que cumplan los principios o postulados en que se basa. Puede decirse que aún está sin desarrollar el Análisis Dimensional aplicable a teorías *no clásicas*, caso de la Mecánica Cuántica, que sustituye el determinismo derivado del *principio de causalidad* por el *principio de indeterminación* de Heisenberg.

Fourier introduce en su *Théorie Analytique de la Chaleur*[1] (1822) los conceptos de *dimensión* y *exponentes dimensionales.* Vaschy[2] (1892) y Buckingham[3] (1914) realizan los primeros trabajos de aplicación del *teorema Pi.* Bridgman[4] (1922) publica el primer texto monográfico sobre Análisis Dimensional, que adquiere nivel de *obra cumbre* e incrementa el prestigio del autor, premio Nobel en 1946, publicándose la séptima edición inglesa en 1951. Las aportaciones de Palacios (1956) pueden considerarse excepcionales, al sentar las bases de una *teoría dimensional* que proporciona un método unívoco para la resolución de problemas en el marco de cada teoría, lejos de la arbitrariedad reconocida y preconizada por los tratadistas clásicos, como Bridgman. El texto de Palacios paraliza las ediciones de Bridgman y Langhaar, es traducido al francés y al inglés y reeditado en 1964.

Los avatares personales de Palacios y probablemente su enfrentamiento con la *relatividad* de Einstein han originado que el Análisis Dimensional se haya anclado hasta nuestros días, sin nuevas aportaciones y con la reedición en los últimos años de los textos de Bridgman y Langhaar, como si se ignorara el desarrollo histórico de esta disciplina.

La *teoría dimensional* aludida se basa en los dos postulados de Palacios[5] que se enuncian a continuación, con las correcciones y ampliaciones debidas a González de Posada[6], que aparecen en cursiva.

PRIMER POSTULADO DE PALACIOS (sobre las leyes físicas):

«Las leyes *dimensionalmente* fundamentales de una teoría física (*conjunto de leyes independientes de orden dimensional máximo*) *son leyes relacionales de la teoría (expresas, por tanto, en la axiomática de la teoría física)* y pueden escogerse de modo que consistan en relaciones de proporcionalidad entre potencias determinadas de cantidades *de las magnitudes (primarias o secundarias) consideradas en la teoría.*»

SEGUNDO POSTULADO DE PALACIOS (sobre las constantes físicas):

«Son ineludibles las constantes universales que relacionan dos magnitudes inseparables, y superfluas todas las demás.»

A la vista del apartado anterior, puede afirmarse:

Toda ecuación fundamental en la que se ha suprimido la respectiva constante universal superflua define una unidad en función de las restantes.

De otro modo, aparece la necesidad de emplear *coeficientes parásitos* de conversión de unidades, que son constantes universales superfluas.

Se denomina *sistema coherente de unidades* al que no tiene tales coeficientes parásitos, de modo que las ecuaciones fundamentales son satisfechas al sustituir cada símbolo por las medidas correspondientes a las unidades.

Dada una teoría física con m leyes fundamentales, se obtienen otras tantas ecuaciones fundamentales que se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccc} X_1^{\varepsilon_{11}} & X_2^{\varepsilon_{12}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{1s}} & = & C_1^{\varepsilon_1} \\ X_1^{\varepsilon_{21}} & X_2^{\varepsilon_{22}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{2s}} & = & C_2^{\varepsilon_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{\varepsilon_{m1}} & X_2^{\varepsilon_{m2}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{ms}} & = & C_m^{\varepsilon_m} \end{array}$$

donde $\varepsilon_i = 0$ si C_i es una constante universal superflua, y $\varepsilon_i = 1$ si es una constante universal ineludible o característica.

Al representar los símbolos correspondientes a las constantes C_i de manera análoga a las medidas X_i, el número de las medidas que intervienen en las ecuaciones aumenta desde s hasta $n = s + m$, pudiendo escribirse:

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1^{\varepsilon_{11}} & X_2^{\varepsilon_{12}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{1s}} & X_{s+1}^{\varepsilon_{1(s+1)}} & \cdots & X_n^{\varepsilon_{1n}} & = & 1 \\ X_1^{\varepsilon_{21}} & X_2^{\varepsilon_{22}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{2s}} & X_{s+1}^{\varepsilon_{2(s+1)}} & \cdots & X_n^{\varepsilon_{2n}} & = & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{\varepsilon_{m1}} & X_2^{\varepsilon_{m2}} & \cdots & X_s^{\varepsilon_{ms}} & X_{s+1}^{\varepsilon_{m(s+1)}} & \cdots & X_n^{\varepsilon_{mn}} & = & 1 \end{array}$$

donde, para un valor de $j > s$, el correspondiente a la constante C_i universal ineludible o característica, en cada ecuación que la posea, se cumple $\varepsilon_{ij} = -1$, y para los restantes valores de $j > s$ se cumple $\varepsilon_{ij} = 0$.

Si c es el *rango* o *característica* de la matriz de exponentes $[\varepsilon_{ij}]$:

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1s} & \varepsilon_{1(s+1)} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2s} & \varepsilon_{2(s+1)} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & \cdots & \varepsilon_{ms} & \varepsilon_{m(s+1)} & \cdots & \varepsilon_{mn} \end{bmatrix}$$

podrán elegirse *arbitrariamente* $p = n - c$ unidades de las correspondientes magnitudes para formar un sistema de unidades coherentes. Las magnitudes a las que corresponden dichas unidades constituyen una *base dimensional de la teoría física* y se denominan *magnitudes fundamentales*, o mejor, *magnitudes básicas*. Asimismo, se dice que el *orden de multiplicidad* de la teoría es p.

Si $\{"X_1", ..., "X_p"\}$, son las magnitudes adoptadas como básicas, puede obtenerse unívocamente la *fórmula dimensional* de cualquier magnitud:

$$[X_k]=[X_1]^{\alpha_{k1}}\cdots[X_p]^{\alpha_{kp}}$$

siendo $\{\alpha_{k1}, ..., \alpha_{kp}\}$ los *exponentes dimensionales* unívocamente asociados a la magnitud "X_k"por la base dimensional.

La aplicación del Análisis Dimensional a cada teoría conduce a consecuencias específicas de la misma, porque no hay libertad en la elección de las magnitudes primarias y las leyes fundamentales, y ello determina unívocamente el orden de multiplicidad de la teoría. Por tanto, hay cierta libertad de elección de las magnitudes básicas, pero no de su número, que es unívoco y característico de cada teoría física. El Análisis Dimensional está subordinado a las teorías físicas, no teniendo existencia independiente de las mismas. Con los postulados de Palacios se descarta la posibilidad de emplear bases dimensionales cuyo orden de multiplicidad sea arbitrario, procedimiento seguido por los tratadistas clásicos, que lo justificaban por ventajas de tipo operativo.

Conviene diferenciar entre el concepto de *fenómeno físico*, que se describe cualitativamente, es, en general, complejo y presenta múltiples aspectos, y el concepto de *problema físico* relativo a un fenómeno, que es objeto de descripción matemática mediante una ecuación o un resultado cuantitativo. Así se habla, por ejemplo, del cálculo de la *presión instantánea* como problema relativo al fenómeno del *funcionamiento de un motor térmico*, o del cálculo del *alcance* como problema del fenómeno de *lanzamiento de proyectiles*.

Aunque en cada teoría física el orden de la base queda determinado unívocamente por el sistema de ecuaciones fundamentales, no todos los problemas relativos a fenómenos enmarcados en dicha teoría requieren necesariamente el empleo de igual número de magnitudes. Así, en el espacio geométrico ordinario se presentan problemas bi o unidimensionales.

Expresando las fórmulas dimensionales de las q magnitudes que intervienen en un fenómeno, se denomina *base estricta* o *completa* a cualquier subconjunto de r magnitudes independientes, siendo r el rango o característica de la matriz de exponentes dimensionales:

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2p} \\ & & \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \alpha_{qp} \end{bmatrix}$$

El *teorema Pi de Buckingham* proporciona al Análisis Dimensional la herramienta para resolver problemas:

La expresión más general de la ecuación de un problema físico determinado:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_q) = 0$$

integrado en una teoría cuyas leyes fundamentales sean relaciones de proporcionalidad entre potencias con exponentes fijos es:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k) = 0$$

donde los Π_i *son monomios independientes de dimensión nula que pueden formarse con las magnitudes consideradas.*

El número de estos monomios independientes es $k = q - r$, *siendo* q *el número de variables consideradas en el problema y* r *la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales de dichas variables con relación a una base completa cualquiera de la teoría.*

Entre los k monomios pueden aparecer cocientes entre pares de magnitudes que tienen la misma dimensión, denominados *factores de forma* ϖ_i entre los que se encontrarán los geométricos.

La dificultad y la esencia de cada problema consiste en determinar las magnitudes que intervienen en el fenómeno, para lo que se requiere un profundo conocimiento de los fundamentos físicos del mismo y de la teoría en que se enmarca. A partir de ese punto, el método del Análisis Dimensional es unívoco.

Conocida la base estricta, si se emplean más de las q magnitudes de las que depende un problema, el Análisis Dimensional expulsará las que no son influyentes. Si, por el contrario, faltan magnitudes, informará de la deficiencia.

Sorprende que los textos de Análisis Dimensional olviden la *naturaleza algebraica* de las magnitudes físicas, al considerarlas todas escalares, con lo que se despoja a las leyes de parte de su significado. Por ello en general será ventajoso emplear bases con *discriminación espacial*, donde en lugar de la magnitud espacial L aparecerán L_x, L_y y L_z (o las correspondientes a otro sistema de coordenadas), obteniéndose menos monomios y más significativos.

Es difícil encontrar problemas que puedan ser enmarcados exclusivamente en el ámbito de una única teoría física. Puede demostrarse que el orden de multiplicidad de la Mecánica Newtoniana es 3, siendo usual emplear la base $\{L, M, T\}$. Esta base sigue siendo estricta cuando se consideran problemas de Mecánica de Fluidos, Elasticidad o Gravitación

clásica, pues las leyes y magnitudes de las teorías "ampliadas" que se obtienen conservan el orden de multiplicidad igual a 3.

La Termodinámica, teoría de lo macroscópico y del equilibrio (o a lo sumo de los procesos cuasiestáticos), tiene un orden de multiplicidad igual a 2, pudiendo emplearse como base, por ejemplo, $\{V, \theta\}$.

La teoría analítica de la Conducción del Calor, en cambio, tiene un orden de multiplicidad igual a 5, y su base estricta podría ser $\{L, M, T, \theta, Q\}$.

El fenómeno del funcionamiento de las máquinas de ciclo Stirling se estudia en el ámbito de la Mecánica de Fluidos, de la Termodinámica y de la Transmisión de Calor (conducción y convección), por lo que podría ser considerado como un problema *termomecánico*, es decir, propio de la teoría ampliada resultante de las citadas. Una base estricta de tal teoría ampliada puede ser $\{L, M, T, \theta\}$[6], ya que el orden de multiplicidad es 4, o su correspondiente en el método discriminado $\{L_x, L_y, L_z, M, T, \theta\}$.

REFERENCIAS

[1] **Fourier, J. B.** *Thèorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot, Paris (1882). Ed. cast.: *Teoría Analítica del Calor*, Pretextos de Física, GTAD, Univ. Politécnica de Madrid. Traducción de M. D. Redondo Alvarado y M. González Redondo (1992)

[2] **Vaschy, M. A.** Comptes Rendus de l'Academie, **114**, p.1416, y **115**, p.597 (1892)

[3] **Buckingham, E.** On Physically Similar Systems. Illustrations of the Use of Dimensional Equations, *Phys. Rev.*, **4**, pp.345-376 (1914)

[4] **Bridgman, P. W.** *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New York (1922). Ed. cast.: *Análisis Dimensional*, GTAD, Univ. Politécnica de Madrid. Traducción de F. A. González Redondo (1990)

[5] **Palacios, J.** *Análisis Dimensional*, Ed. Espasa-Calpe, Madrid (1964)

[6] **González de Posada, F.** *Guía de estudio del curso de Teoría Dimensional*, Univ. Politécnica de Madrid (1992)