

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

PROGRAMA DE DOCTORADO:  
CÁLCULO, CONSTRUCCIÓN Y FABRICACIÓN EN LA INGENIERÍA

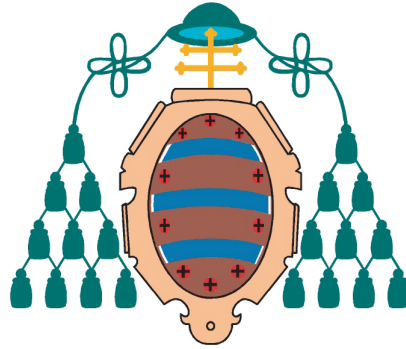
EUROCÓDIGO 3: PREDICIÓN DE DAÑO MEDIANTE UNA  
INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA DE LA REGLA DE MINER

TESIS DOCTORAL

Antonio Sendín Álvarez

Diciembre 2011





UNIVERSIDAD DE OVIEDO

PROGRAMA DE DOCTORADO:  
CÁLCULO, CONSTRUCCIÓN Y FABRICACIÓN EN LA INGENIERÍA

EUROCÓDIGO 3: PREDICCIÓN DE DAÑO MEDIANTE UNA  
INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA DE LA REGLA DE MINER

TESIS DOCTORAL

Antonio Sendín Álvarez

Directores

Dr. Manuel López Aenlle

Dr. Alfonso Fernández Canteli

Diciembre 2011



A mis padres, José Antonio y Maria Teresa

A mi hermano Eduardo



*Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión,  
de dudar de cualquier afirmación, de corregir errores.*

Julius Robert Oppenheimer





# Resumen

Los modelos empleados en el ajuste del campo S-N permiten extrapolar la información obtenida a partir de datos provenientes de ensayos de fatiga a la totalidad del dominio de los datos experimentales, y proporcionan la información básica necesaria para realizar el cálculo a fatiga de un elemento. Por otro lado, los modelos de daño permiten cuantificar el nivel de daño acumulado por un elemento sometido a fatiga. La aplicación de un modelo de daño requiere la información proporcionada por el modelo del campo S-N, así como la utilización de un índice de daño. Se han propuesto un gran número de variantes para el índice de daño en la literatura, siendo el índice más conocido y utilizado el número de Miner.

El comportamiento de elementos sometidos a fatiga tiene una elevada componente de aleatoriedad, por lo que, tanto los modelos de ajuste del campo S-N, como los modelos de acumulación de daño, deberían incorporar consideraciones estadísticas en su formulación. No obstante, un gran número de códigos normativos consideran el cálculo de elementos a fatiga únicamente desde un punto de vista determinista, basados en los aspectos fenomenológico y empírico del fenómeno. La principal razón de este hecho radica en la fácil aplicación de los modelos deterministas, que no requieren el conocimiento de consideraciones estadísticas y permiten cuantificar, de forma rápida, el nivel de daño a fatiga de un elemento. Por otra parte, la limitación de estos modelos radica en su incapacidad para realizar análisis rigurosos, así como para establecer un valor de probabilidad de fallo del elemento a partir del índice de daño utilizado.

El Eurocódigo 3 presenta una única curva S-N para cada una de las categorías de elemento consideradas y el tipo de tensión aplicada. El modelo de daño utilizado por el Eurocódigo 3 es la regla de Miner, que propugna (según la interpretación convencional) un aumento de daño lineal en función del número de ciclos transcurridos sobre el elemento. Basándose en el carácter general de aplicación que tiene la norma y en su intento de facilitar su aplicación, el Eurocódigo 3 acepta ciertas hipótesis, no siempre suficientemente fundamentadas, mientras que otras contradicen la realidad física del fenómeno de la fatiga. Asimismo, la norma se aplica bajo una consideración determinista, eludiendo, casi por completo, cualquier concepto estadístico y omitiendo parámetros estadísticos relevantes, como es el de la desviación típica asociado a cada una de las categorías consideradas.

Con el objetivo de analizar las hipótesis propuestas por el Eurocódigo 3, se ha desarrollado un modelo, llamado Modelo de Basquin Normalizado, que permite obtener un campo S-N aplicando las mismas hipótesis consideradas por la norma. A partir de datos experi-

mentales hallados en la literatura, se ha obtenido el campo S-N para diferentes elementos constructivos. Los ajustes realizados muestran cómo las curvas de cálculo proporcionadas por el Eurocódigo 3 no son siempre conservadoras, en contra de lo esperado de un código de cálculo de aplicación con carácter general. Posteriormente, dichos ajustes se han comparado con los obtenidos mediante el modelo general de fatiga de Castillo y Fernández Canteli. La comparación entre los campos S-N obtenidos por ambos modelos permite establecer que las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3 son admisibles, en aras de una simplificación en la aplicabilidad de la norma, si bien se comprueba la ausencia de rigor para muchas de ellas.

A partir del estudio de una de las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3, como es el descenso del límite de endurancia para elementos sometidos a tensiones normales de amplitud variable, se han propuesto mejoras para el diagrama de Kitagawa-Takahashi, o diagrama de límite de endurancia variable. Por un lado, se comprueba cómo el parámetro real obtenido en dicho diagrama es un límite de fatiga, asociado a un número finito de ciclos, y no un límite de endurancia, que se corresponde con el valor asintótico. Por otro lado, la utilización de un modelo de ajuste del campo S-N probabilista permite establecer un diagrama Kitagawa-Takahashi probabilista, o *campo* Kitagawa-Takahashi, donde cada curva del diagrama está asociada a un valor de número de ciclos correspondiente al límite de fatiga considerado, así como a una determinada probabilidad de fallo.

Asimismo, en la presente tesis doctoral se ha desarrollado una interpretación estadística del Eurocódigo 3, con el objetivo de mantener la simplicidad en la aplicación de la norma pero dotándola de herramientas estadísticas que permitan la obtención de valores de probabilidad de fallo de un elemento. A partir de la consideración estadística del tiempo de vida a fatiga, se ha obtenido una distribución de probabilidad para el rango de tensión. La consideración estadística de ambas variables permite asimilar el efecto de los coeficientes parciales de seguridad  $\gamma_{Mf}$  a la utilización de una curva S-N de referencia asociada a una probabilidad de fallo menor que la original. La compatibilidad existente entre ambas distribuciones, permite la generación de un campo S-N, a partir de la curva de cálculo del elemento y manteniendo las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3.

De forma similar, la consideración estadística del tiempo de vida a fatiga permite deducir distribuciones estadísticas del número de Miner y del rango de tensión equivalente, lo cual permite asociar un determinado valor de número de Miner a una probabilidad de fallo del elemento. El modelo estadístico propuesto para el campo S-N permite utilizar como referencia cualquier curva percentil generada, sin que ello afecte al valor de probabilidad de fallo obtenido. El modelo de daño propuesto se ha validado mediante la consideración de 3 espectros de tensiones aplicados sobre un detalle de categoría 112. Se ha comprobado cómo la utilización de diferentes curvas de referencia y coeficientes parciales de seguridad no afecta a la probabilidad de fallo final obtenida.

# Abstract

The fatigue models considered to analyze the S-N field allow us to extrapolate the information provided by the fatigue tests to the whole range of the field, providing the basic information for the fatigue design. On the other hand, the fatigue damage models allow us to quantify the accumulated damage in an element under fatigue loading. The application of a damage accumulation model requires the information provided by the S-N field model, and the consideration of a damage index. Some damage indexes have been proposed in the literature, whereas the Miner's number is the most well known.

A high level of scatter is expected in elements subject to fatigue loading. For this reason, both the S-N fields and the damage fatigue models should consider statistical aspects in their formulations. Nevertheless, most of the fatigue codes consider the fatigue design from a deterministic point of view, based on the phenomenological and empirical considerations of the phenomenon. The main reason for this is that the deterministic models are easy to use, they don't need any statistical knowledge, and allow quantifying quickly the damage level of an element. On the other hand, an important drawback of these models is that it is not possible to associate any probability of failure to the damage index value.

The Eurocode 3 proposes a unique fatigue strength curve for any constructive detail handled and the fatigue load applied. The damage index considered by the Eurocode 3 is the Miner's rule, which proposes, according to a conventional interpretation, a lineal damage accumulation. Based on the general nature of the code, and in order to facilitate an easier application, the Eurocode 3 assumes some hypothesis that contradict the physics of the fatigue phenomenon, whereas others are not based on statistical considerations. On the other hand, the code is applied considering a deterministic point of view, avoiding any statistical concept and omitting important statistical parameters, such as the standard deviation of the S-N curves associated to the different categories.

In order to analyze the hypothesis accepted in the Eurocode 3, a new statistical fatigue model, called Normalized Basquin Model is developed. This model allows us to get a S-N field, considering the Eurocode 3 assumptions. From experimental data obtained from the literature, the S-N fields for different detail categories have been obtained. The analysis shows that the design curves proposed by the Eurocode 3 are not always conservative for all the categories, contrary to what is expected from a fatigue code. Then, these S-N fields are compared to those obtained from the general fatigue model of Castillo Fernández Canteli. The comparison of the analysis obtained from both S-N models shows that the hypothesis

considered by the Eurocode 3 are acceptable, in the application of the code for simplicity reasons, but again it lacks scientific rigor.

One of the hypothesis assumed by the Eurocode 3 is the decrease of the endurance limit for elements subject to variable amplitude normal stresses. In this doctoral Thesis, some improvements for the Kitagawa-Takahashi diagram are proposed. On one side, it is proved that the parameter obtained in the Kitagawa-Takahashi diagram is a fatigue limit, related to a finite number of cycles, but not the endurance limit, which is related to the asymptotic value. On the other side, the consideration of a statistical fatigue model allows us to consider a probabilistic Kitagawa-Takahashi diagram, or Kitagawa-Takahashi field, where each curve of the diagram are associated to both, a number of cycles of the fatigue limit and a probability of failure.

Moreover, in this doctoral Thesis, a statistical interpretation of the Eurocode 3 is provided, keeping the simplicity in the application of the code, furthermore, allowing the probability of failure of an element to be assessed. From a statistical consideration of the fatigue life time, a probability distribution for the stress range is obtained. The statistical interpretation of both parameters allows us proving the effect of the partial safety factor for fatigue strength  $\gamma_{Mf}$  to be equivalent to different S-N curves associated to a lower reference probability. The compatibility between both distributions facilitates the generation of a S-N field from the design curve, maintaining the hypothesis considered by the Eurocode 3.

In the same way, the statistical consideration of the fatigue life time leads to get statistical distributions for the Miner's number and the equivalent stress range, which permits the association of the Miner's number with a probability of failure. The proposed statistical model has been validated considering a 112 detail category subject to three different design spectra. It has been proved that the use of different reference curves of the S-N field and different partial safety factors for fatigue strength does not influence the final probability of failure.

# Notación

$a$	Tamaño de grieta
$a_0$	Tamaño intrínseco de grieta
$B$	Parámetro del Modelo de Castillo y Fernández Canteli
$C$	Parámetro del Modelo de Castillo y Fernández Canteli
$exp(\cdot)$	Función exponencial
$erf(\cdot)$	Función error de Gauss
$F(\cdot)$	Función de distribución
$K_f$	Factor de concentración de tensiones a fatiga
$m$	Exponente de la Ley de Basquin
$m_i$	Exponente de la Ley de Basquin correspondiente al rango $\Delta\sigma_i$
$m_K$	Exponente de la Ley de Basquin correspondiente a $K$ millones de ciclos
$M$	Número de Miner
$M_{Ref}$	Número de Miner asociado a la probabilidad $P_{Ref}$
$M_{Ref}^*$	Número de Miner asociado a la probabilidad $P_{Ref}$
$N$	Número de ciclos
$N_i$	Número de ciclos correspondientes a rango $\Delta\sigma_i$
$N_0$	Número de ciclos de referencia
$N_{Ref}$	Número de ciclos de referencia
$N_{Ref_i}$	Número de ciclos de referencia correspondientes al rango $\Delta\sigma_i$
$p$	Valor de probabilidad
$P_{adm}$	Probabilidad de fallo máxima admisible
$P_{fallo}$	Probabilidad de fallo
$P_{Ref}$	Probabilidad de referencia
$P_{Ref}^*$	Probabilidad de referencia
$R$	Constante de la Ley de Basquin asociada a un percentil del 50 %
$S$	Constante de la Ley de Basquin asociada a cualquier percentil
$T$	Variable del Modelo de Basquin Normalizado
$V$	Variable del modelo de Castillo y Fernández Canteli
$V^*$	Variable adimensional del modelo de Castillo y Fernández Canteli
$\hat{x}$	Valor estimado de la variable $x$
$X$	Número de ciclos de referencia
$Y$	Número de ciclos de referencia



## Símbolos griegos

$\Gamma(\cdot)$	Función gamma
$\Delta\sigma$	Rango de tensión normal
$\Delta\sigma_C$	Resistencia de un elemento a $2 \cdot 10^6$ ciclos según el EC3
$\Delta\sigma_D$	Límite de fatiga de amplitud constante según el EC3
$\Delta\sigma_{E,K}$	Rango de tensión equivalente considerando $K$ millones de ciclos
$\Delta\sigma_{E,K}^*$	Rango de tensión equivalente considerando $K$ millones de ciclos
$\Delta\sigma_K$	Factor de intensidad de tensiones
$\Delta\sigma_L$	Límite de fatiga de amplitud variable según el EC3
$\Delta\sigma_0$	Límite de fatiga
$\Delta\sigma_{th}$	Límite de fatiga
$\Delta\sigma_{th}$	Valor umbral del factor de intensidad de tensiones
$\Delta\tau$	Rango de tensión tangencial
$\Delta\tau_C$	Resistencia de un elemento a $2 \cdot 10^6$ millones de ciclos
$\Delta\tau_{E,K}$	Rango de tensión equivalente considerando $K$ millones de ciclos
$\Delta\tau_{E,K}^*$	Rango de tensión equivalente considerando $K$ millones de ciclos
$\Delta\tau_L$	Límite de fatiga de amplitud variable según el EC3
$\lambda$	Parámetro de localización de la distribución de Weibull
$\beta$	Parámetro de forma de la distribución de Weibull
$\delta$	Parámetro de escala de la distribución de Weibull
$\varepsilon$	Deformación
$\gamma_{Ff}$	Coficiente parcial de mayoración de cargas en el EC3
$\gamma_{Mf}$	Coficiente parcial de minoración de resistencia en el EC3
$\mu$	Valor medio de una distribución
$\mu_i$	Valor medio de una distribución para el rango $\Delta\sigma_i$
$\sigma$	Desviación típica
$\sigma_{max}$	Tensión máxima
$\sigma_{min}$	Tensión mínima
$\sigma_{med}$	Tensión media
$\sigma_R$	Límite de rotura
$\sigma_{ys}$	Límite elástico





# Abreviaciones

<i>AC</i>	Amplitud Constante
<i>AV</i>	Amplitud Variable
<i>DFF</i>	Factor de cálculo a fatiga en Norsok N-004 y DNV-RP-C203
<i>EC3</i>	Eurocódigo 3
<i>FEM</i>	Método de los Elementos Finitos
<i>K – T</i>	Kitagawa-Takahashi
<i>MFEL</i>	Mecánica de la Fractura Elástica Lineal
<i>MFEP</i>	Mecánica de la Fractura Elasto Plástica
<i>MUS</i>	Materialprüfungsansatlt Universität Stuttgart
<i>VSHS</i>	Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine



# Índice general

<b>1. <i>Introducción y objetivos</i></b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Normativa existente para el cálculo de elementos sometidos a fatiga . . . . .	2
1.2.1. El Eurocódigo 3 (2008) . . . . .	3
1.2.2. La normativa Norsok N-004 (2004) . . . . .	6
1.2.3. La recomendación práctica DNV-RP-C203 (2008) . . . . .	6
1.2.4. Comparación entre los códigos de cálculo considerados . . . . .	7
1.3. Objetivos . . . . .	7
1.4. Organización de la presente tesis doctoral . . . . .	8
<b>2. <i>Estado del arte</i></b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Fatiga bajo carga de amplitud constante . . . . .	11
2.3. Modelos de ajuste de datos experimentales . . . . .	12
2.3.1. Modelos de ajuste deterministas . . . . .	12
2.3.2. Modelos de ajuste probabilistas . . . . .	14
2.4. Fatiga bajo carga de amplitud variable . . . . .	18
2.5. Modelos de acumulación de daño . . . . .	18
2.5.1. El modelo de Miner . . . . .	20
2.5.2. Concepto de acumulación de daño no lineal. Modelo de Marco-Starkey . . . . .	20
2.5.3. Modelo de Smith, Watson y Tooper . . . . .	20
2.5.4. Modelo de Wheeler . . . . .	21
2.5.5. Modelo de Leis . . . . .	21
<b>3. <i>Consideraciones estadísticas del fenómeno de la fatiga</i></b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. El ajuste de los datos experimentales . . . . .	24
3.3. Requisitos ideales de un modelo de ajuste de fatiga . . . . .	25
3.3.1. La normalización estadística . . . . .	26
3.4. Comentarios acerca de la dispersión en el campo S-N . . . . .	31
3.5. Consideraciones acerca de las distribuciones estadísticas de los modelos probabilistas . . . . .	32
3.6. Valoraciones de los métodos deterministas . . . . .	33
3.7. Valoraciones de los modelos probabilísticos . . . . .	34
3.8. Conclusiones . . . . .	35

<b>4. <i>Fatiga bajo carga de amplitud variable</i></b>	<b>37</b>
4.1. Introducción . . . . .	37
4.2. El espectro de tensiones . . . . .	37
4.2.1. Valoraciones acerca del espectro de tensiones . . . . .	39
4.3. Modelos de acumulación de daño . . . . .	40
4.4. Un modelo de acumulación de daño lineal. La regla de Miner . . . . .	42
4.4.1. La regla de Miner y el espectro de tensiones . . . . .	43
4.4.2. Limitaciones de la Regla de Miner . . . . .	45
4.4.3. Modificaciones de la regla de Miner . . . . .	45
4.4.4. Curvas iso-Miner e iso-probabilísticas . . . . .	46
4.4.5. Una formulación estadística para el número de Miner asociado al modelo de Castillo y Fernández Canteli . . . . .	48
4.5. El rango de tensión equivalente . . . . .	55
4.5.1. Definiciones para el rango de tensión equivalente . . . . .	55
4.5.2. Una formulación estadística para el rango de tensión equivalente asociado al modelo de Castillo y Fernández Canteli . . . . .	57
4.5.3. Consideraciones acerca del rango de tensión equivalente . . . . .	57
4.6. Los límites de fatiga y endurancia en fatiga de amplitud variable . . . . .	59
4.6.1. Valoraciones estadísticas de los límites de fatiga y endurancia . . . . .	61
4.7. Fatiga cercana a valores umbrales . . . . .	62
4.8. El descenso del límite de endurancia en amplitud de carga variable . . . . .	64
4.9. Conclusiones . . . . .	65
<b>5. <i>Una interpretación estadística del EC3</i></b>	<b>67</b>
5.1. Introducción . . . . .	67
5.2. El EC3 aplicado a fatiga de amplitud constante . . . . .	67
5.2.1. Curvas S-N . . . . .	67
5.2.2. Comprobación o verificación de un cálculo a fatiga . . . . .	68
5.2.3. Los coeficientes de mayoración de cargas $\gamma_{Ff}$ y minoración de resistencia $\gamma_{Mf}$ . . . . .	69
5.3. El EC3 aplicado a fatiga de amplitud variable . . . . .	70
5.3.1. Curvas S-N . . . . .	70
5.3.2. Comprobación a fatiga en carga de amplitud variable . . . . .	70
5.3.3. Descenso del límite de endurancia para cargas de amplitud variable . . . . .	73
5.3.4. Los coeficientes de mayoración de cargas $\gamma_{Ff}$ y minoración de resistencia $\gamma_{Mf}$ . . . . .	73
5.4. Desarrollo estadístico de las variables $\log(N)$ y $\log(\Delta\sigma)$ . . . . .	73
5.5. Acerca de los valores de dispersión de la variable $\log(N)$ . . . . .	76
5.6. El coeficiente parcial $\gamma_{Mf}$ . . . . .	76
5.6.1. Fatiga de amplitud constante . . . . .	77
5.6.2. Fatiga de amplitud variable . . . . .	80
5.7. El EC3 en fatiga de amplitud constante . . . . .	83
5.7.1. Una consideración estadística del rango de tensión equivalente . . . . .	83
5.7.2. Consecuencias de la aplicación del coeficiente $\gamma_{Mf}$ sobre el rango de tensión equivalente . . . . .	84

5.8.	El EC3 en fatiga en amplitud variable . . . . .	85
5.8.1.	Una interpretación estadística de la Regla de Miner . . . . .	85
5.8.2.	Consecuencias de la aplicación del coeficiente $\gamma_{Mf}$ sobre el número de Miner . . . . .	87
5.9.	Desarrollo estadístico considerando la distribución de Weibull . . . . .	90
5.10.	Consideraciones referentes al tamaño de defecto . . . . .	91
5.11.	Conclusiones . . . . .	94
<b>6.</b>	<b><i>Estudio de las hipótesis consideradas por EC3</i></b> . . . . .	<b>95</b>
6.1.	Introducción . . . . .	95
6.2.	Hipótesis consideradas por el EC3 . . . . .	96
6.3.	Modelo Lineal de Basquin Normalizado . . . . .	96
6.3.1.	La variable normalizada $T$ . . . . .	97
6.3.2.	Obtención de las curvas percentiles del modelo . . . . .	97
6.3.3.	Ejemplos de aplicación del Modelo de Basquin Normalizado . . . . .	99
6.3.4.	Limitaciones del modelo . . . . .	100
6.4.	Ajustes realizados sobre datos experimentales . . . . .	100
6.4.1.	Los datos de Dahle . . . . .	101
6.4.2.	Los datos de Crupi . . . . .	101
6.4.3.	Los datos de Ohwa (1) . . . . .	105
6.4.4.	Los datos del Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine (VSHS) de la Universidad de Karlsruhe . . . . .	106
6.4.5.	Los datos del Materialprüfungsanstalt (MUS) de la Universidad de Stuttgart . . . . .	107
6.4.6.	Los datos de Ohwa (2) . . . . .	108
6.5.	Comentarios acerca de las hipótesis consideradas . . . . .	110
6.5.1.	Modelo de ajuste utilizado . . . . .	110
6.5.2.	Curvas de cálculo propuestas por EC3 . . . . .	112
6.5.3.	Distribución normal . . . . .	113
6.5.4.	Desviación típica constante . . . . .	114
6.5.5.	Valores fijos de exponente $m$ . . . . .	114
6.5.6.	Consideración determinista . . . . .	114
6.5.7.	Modelo de acumulación de daño . . . . .	115
6.5.8.	Efecto de escala . . . . .	116
6.5.9.	Efecto del nivel de tensión . . . . .	116
6.5.10.	Límite de fatiga . . . . .	120
6.5.11.	Consideración de 2 tramos con pendientes diferentes . . . . .	123
6.5.12.	Descenso del límite de endurance . . . . .	124
6.6.	Conclusiones . . . . .	134
<b>7.</b>	<b><i>Desarrollo de un modelo estadístico de daño basado en el EC3</i></b> . . . . .	<b>137</b>
7.1.	Introducción . . . . .	137
7.2.	Hipótesis adoptadas por el modelo de daño propuesto . . . . .	138
7.3.	Modelo estadístico para fatiga de amplitud constante . . . . .	138
7.3.1.	Generación del campo S-N . . . . .	138

7.3.2. Modelo estadístico de daño . . . . .	141
7.4. Modelo estadístico de daño para fatiga de amplitud variable . . . . .	143
7.4.1. Generación del campo S-N . . . . .	143
7.4.2. Modelo estadístico de daño . . . . .	145
7.5. El índice de seguridad $IS$ . . . . .	147
7.6. Validación experimental del modelo . . . . .	148
7.6.1. Espectro de tensiones número 1 . . . . .	148
7.6.2. Espectro de tensiones número 2 . . . . .	149
7.6.3. Espectro de tensiones número 3 . . . . .	149
7.7. Discusión . . . . .	149
7.8. Conclusiones . . . . .	151
<b>8. Conclusiones generales</b>	<b>153</b>
<b>9. Aportaciones originales</b>	<b>155</b>
<b>10. Líneas futuras de investigación</b>	<b>157</b>

# Índice de figuras

1.1. Comparación de curvas de cálculo de las normativas EC3 y Norsok. . . . .	3
1.2. Comparación de curvas S-N pertenecientes a las normativas EC3 y British Standard [43]. . . . .	4
1.3. Curvas de resistencia a fatiga típicas para tensiones normales y tangenciales según el EC3. . . . .	5
2.1. Modelo de Kohout y Vechet. . . . .	14
3.1. Normalización basada en percentiles. . . . .	27
3.2. Normalización basada en rangos de tensión. . . . .	27
3.3. Evolución de la dispersión en ensayos a carga constante y variable [68]. . . . .	32
4.1. Diferentes espectros de cargas obtenidos a partir de diferentes tipos de cargas. . . . .	38
4.2. Ejemplos de diferentes historias de cargas que producen un mismo espectro de tensiones. . . . .	40
4.3. Secuencia de bloques con números de Miner en el momento de la fractura y su evolución con la tensión media considerada [59]. . . . .	44
4.4. Comparación del número de Miner real y teórico para diferentes ensayos de amplitud de carga variable [71]. . . . .	44
4.5. Modificaciones a la regla de Miner. . . . .	46
4.6. Comparación entre desplazamientos iso-Miner = iso-probabilísticos (izda) e iso-Miner $\neq$ iso-probabilísticos (dcha) para un modelo de ajuste general. . . . .	47
4.7. Desplazamientos iso-Miner = iso-probabilísticos para el modelo de ajuste de Basquin. . . . .	47
4.8. Relación entre el número de Miner y el índice de probabilidad de daño total para un $N_{Ref} = 10^5$ de ciclos. . . . .	48
4.9. Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable $\Delta\sigma$ para los resultados experimentales mostrados en [17]. . . . .	51
4.10. Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable $\Delta\sigma$ para los resultados experimentales mostrados en [50]. . . . .	51
4.11. Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable $\Delta\sigma$ para los resultados experimentales mostrados en [50]. . . . .	52
4.12. Diferencias en el rango de tensión equivalente que produce la elección del número de ciclos de referencia. . . . .	58
4.13. Diferencia entre límites de fatiga y el límite de endurancia. . . . .	59
4.14. Evolución del crecimiento de grieta en función del rango de tensión considerado. . . . .	64

5.1. Curvas de cálculo de EC3 para cargas de amplitud constante suponiendo esfuerzos normales (figura izquierda) y tangenciales (figura derecha). . . . .	68
5.2. Desplazamiento descendente de las curvas de resistencia a fatiga debido a la aplicación de $\gamma_{Mf}$ para el caso de carga de amplitud constante. . . . .	70
5.3. Curvas de cálculo de EC3 para cargas de amplitud variable suponiendo esfuerzos normales (figura izquierda) y tangenciales (figura derecha). . . . .	71
5.4. Aplicación del modelo de acumulación de daño lineal a partir de un espectro de cálculo de 3 bloques. . . . .	71
5.5. Evolución del número de Miner según EC3 ( $p=5\%$ ) para un detalle 112 aplicando el espectro de tensiones de la table 5.1 en función de diferentes coeficientes de minoración $\gamma_{Mf}$ . . . . .	72
5.6. Desplazamiento descendente de las curvas de resistencia a fatiga debido a la aplicación de $\gamma_{Mf}$ para el caso de carga de amplitud variable. . . . .	73
5.7. Valores que adopta la variable $\log(N)$ y su pertenencia a diferentes curvas percentiles. . . . .	75
5.8. Pertenencia de un mismo valor a 2 a las distribuciones de $\log(N)$ y $\log(\Delta\sigma)$ . . . . .	75
5.9. Diferentes interpretaciones de la aplicación del coeficiente de minoración $\gamma_{Mf}$ en escala doblemente logarítmica considerando la variable $\log(N)$ . . . . .	77
5.10. Diferentes interpretaciones de la aplicación del coeficiente de minoración $\gamma_{Mf}$ en escala doblemente logarítmica considerando la variable $\log(\Delta\sigma)$ . . . . .	78
5.11. Desplazamiento de las funciones de densidad y distribución de $\log(N)$ de un detalle 160 según el EC3, $\sigma = 0,195$ . . . . .	79
5.12. Desplazamiento de las funciones de densidad y distribución de $N$ de un detalle 160 según el EC3. . . . .	79
5.13. Reducción de probabilidad para detalle 160 ( $\sigma = 0,195$ ). . . . .	80
5.14. Desplazamiento de curvas de ajuste en detalle 160 debido a la aplicación de diferentes coeficientes de minoración $\gamma_{Mf}$ . . . . .	81
5.15. Desplazamiento del campo S-N de un detalle 160 (EC3) debido a la aplicación de diferente coeficientes $\gamma_{Mf}$ . . . . .	82
5.16. Desplazamiento de la curva de referencia en escala doblemente logarítmica debido al coeficiente de minoración $\gamma_{Mf}$ . . . . .	83
5.17. Funciones de densidad y distribución de la variable $\Delta\sigma_{E,K}$ para una categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ). . . . .	84
5.18. Funciones de densidad y distribución de la variable $\Delta\sigma_{E,K}$ para una categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ). . . . .	84
5.19. Definición de una curva percentil cualquiera del modelo y de la curva media del mismo. . . . .	86
5.20. Funciones de densidad y distribución de las variables $M_1\%$ , $M_5\%$ y $M_{50}\%$ para un detalle 112 (EC3) $\sigma = 0,18$ . . . . .	87
5.21. Funciones de densidad y distribución de $\log(M_{ref})$ en función de diferentes coeficientes de minoración. Detalle 112 (EC3) $\sigma = 0,18$ . . . . .	89
5.22. Funciones de densidad y distribución de $M_{ref}$ en función de diferentes coeficientes de minoración. Detalle 112 (EC3) $\sigma = 0,18$ . . . . .	89



5.23. Ejemplo de un mismo tipo de elemento (pletina longitudinal) que puede pertenecer a 3 categorías diferentes en función del proceso de fabricación y del nivel de acabado (categorías 160, 140 ó 125). . . . .	92
5.24. Ejemplo de funciones de densidad para la variable $a_0$ para diferentes categorías de detalle ( <i>categoría 1 &gt; categoría 2 &gt; categoría 3</i> ). . . . .	93
5.25. Correspondencia entre las funciones de densidad de las variables <i>tamaño inicial de grieta</i> y <i>vida a fatiga</i> considerando diferentes categorías para un mismo tipo de elemento ( <i>categoría 1 &gt; categoría 2 &gt; categoría 3</i> ). . . . .	93
6.1. Campo S-N generado mediante el Modelo Lineal de Basquin Normalizado a partir de los datos de Dahle [52]. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 1 %, 5 %, 50 %, 95 % y 99 %. . . . .	99
6.2. Campo S-N generado mediante el Modelo Lineal de Basquin Normalizado a partir de los datos de Crupi [17]. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 1 %, 5 %, 50 %, 95 % y 99 %. . . . .	100
6.3. Detalle constructivo considerado por Dahle. Se muestra la aparición del defecto en la soldadura debido a la acción de esfuerzos tangenciales. . . . .	101
6.4. Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli a partir de los datos de Dahle [52]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	102
6.5. Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % a partir de los datos de Dahle [52] y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	102
6.6. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	103
6.7. Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli y el modelo de Basquin Normalizado a partir de los datos de Crupi [17]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	103
6.8. Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % a partir de los datos de Crupi [17] y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	104
6.9. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	104
6.10. Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión a tope de 2 perfiles tubulares cilíndricos [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	105
6.11. Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	106

6.12. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	106
6.13. Campo S-N generado mediante los modelos estadístico y Castillo-Fernández Canteli para una unión de 2 perfiles tubulares cuadrados con soldadura en ángulo con placa de testa [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	107
6.14. Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	108
6.15. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	108
6.16. Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión de un perfil tubular cilíndrico y pletina mediante ranura [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	109
6.17. Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	110
6.18. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	110
6.19. Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión de 2 perfiles tubulares cuadrados soldados a tope con placa de testa [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	111
6.20. Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %. . . . .	112
6.21. Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull. . . . .	112
6.22. Diferentes consideraciones para N=cte en un diagrama de Goodman. . . . .	117
6.23. Efecto de la tensión media en el cálculo del espectro de tensiones. . . . .	118
6.24. Campo de aplicación de diferentes diagramas de fatiga en el EC3. . . . .	119
6.25. Equivalencia entre la tensión media y el tamaño de defecto máximo existente en 2 categorías diferentes. . . . .	120
6.26. Propuesta alternativa sin considerar el límite de fatiga de amplitud variable. . . . .	121
6.27. Espectro de tensiones número 1. . . . .	122
6.28. Espectro de tensiones número 2. . . . .	122
6.29. Espectro de tensiones número 3. . . . .	122
6.30. Modelo actual de EC3 y modelo alternativo más conservador. . . . .	123
6.31. Gráfica de K-T, con el ajuste de El Haddad et al. . . . .	125
6.32. Modo de obtención de la gráfica de K-T. . . . .	125
6.33. Procedimiento habitual de obtención del diagrama K-T. . . . .	127
6.34. Diferentes aproximaciones de El Haddad para un modelo de ajuste determinista y diferentes valores del límite de fatiga. . . . .	127

6.35. Los datos de Nalla et al. ajustados por Kruzic y Ritchie mediante un modelo de fatiga determinista y el ajuste de la Ley de Paris [39]. . . . .	128
6.36. Probetas utilizadas por Nalla et al. para la realización de los ensayos de fatiga [58]. . . . .	128
6.37. Curva del diagrama K-T con la aproximación de El haddad obtenida por Kruzic y Ritchie [39]. . . . .	129
6.38. Los datos de Nalla et al. [58] ajustados mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli. . . . .	130
6.39. Diferentes curvas del diagrama K-T utilizando la aproximación de El Haddad considerando diferentes límites de fatiga del material. . . . .	130
6.40. Diferentes curvas de El Haddad considerando la distribución probabilística del límite de fatiga proporcionada por el campo S-N. . . . .	131
6.41. Campo K-T obtenido para diferentes probabilidades de referencia y un valor $N = 1 \cdot 10^6$ ciclos. . . . .	131
6.42. Ensayos termográficos realizados a 5 Hz y 10 Hz, junto con los ajustes de los datos realizados. . . . .	133
6.43. Asimilación al modelo de El Haddad del descenso del límite de durabilidad realizado por el EC3. . . . .	134
7.1. Descenso de límite de fatiga asociado a una probabilidad de referencia menor para un mismo valor de número de ciclos. . . . .	139
7.2. Representación de los parámetros $Y$ , $S$ y $R$ para elementos sometidos a esfuerzos normales y tangenciales. . . . .	140
7.3. Campo S-N generado para el caso de esfuerzos normales de amplitud constante sobre un elemento 112 ( $\sigma = 0,18$ ) mediante la aplicación de la ecuación 7.8. . . . .	141
7.4. Campo S-N generado para el caso de esfuerzos tangenciales sobre un elemento 112 ( $\sigma = 0,18$ ) mediante la aplicación de la ecuación 7.9. . . . .	141
7.5. Propuesta de curva de referencia para la aplicación del modelo trilineal estadístico considerando. . . . .	144
7.6. Campo S-N generado mediante la aplicación del modelo estadístico propuesto para un detalle de categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ). . . . .	146
7.7. Diagrama de flujo del proceso general de aplicación del modelo estadístico. . . . .	148



# Índice de tablas

1.1. Tabla de comparación entre diferentes códigos de cálculo . . . . .	7
4.1. Ejemplo de espectro de tensiones. . . . .	54
4.2. Valores adoptados por las diferentes variables y las probabilidades de fallo obtenidas. . . . .	54
5.1. Espectro de rangos de tensión considerado en la figura 5.5. . . . .	72
5.2. Comparación de los valores de desviaciones típicas de la variable $\log(N)$ consultados en [83] y [33]. . . . .	76
5.3. Probabilidad de referencia en función del coeficiente $\gamma_{Mf}$ y exponente $m$ considerados. . . . .	81
5.4. Valores de número de Miner, medias y desviaciones típicas de la distribución $M_{Ref}$ y las probabilidades de fallo obtenidas para el espectro de tensiones de la tabla 5.1. . . . .	87
6.1. Parámetros obtenidos aplicando el modelo de Basquin normalizado a los datos de Dahle y Crupi para un nivel de confianza del 75 %. . . . .	99
6.2. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Dahle. . . . .	103
6.3. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Crupi. . . . .	105
6.4. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Ohwa. . . . .	107
6.5. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos del <i>Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine</i> . . . . .	109
6.6. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos del <i>Materialprüfungsanstalt Universität Stuttgart</i> . . . . .	111
6.7. Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Ohwa (2). . . . .	113
6.8. Exponente $m$ obtenido en los ajustes de los datos experimentales mostrados en el capítulo 6 aplicando el modelo de Basquin Normalizado. . . . .	115
6.9. Espectros de tensiones considerados. . . . .	121
6.10. Comparación de valores de números de Miner y probabilidades de fallo obtenidas para un detalle 112 y considerando los espectros de tensiones de la tabla 6.9. . . . .	123
6.11. Comparación de valores de números de Miner y probabilidades de fallo obtenidas para un detalle 112 y considerando los espectros de tensiones de la tabla 6.9. . . . .	124

7.1. Resultados de la aplicación del número de Miner mediante el modelo trilineal estadístico para el espectro de tensiones número 1. . . . .	148
7.2. Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente mediante el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 1. . . . .	149
7.3. Resultados de la aplicación del número de Miner en el modelo trilineal estadístico mediante el espectro de tensiones número 2. . . . .	149
7.4. Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente mediante el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 2. . . . .	150
7.5. Resultados de la aplicación del número de Miner mediante el modelo trilineal estadístico para el espectro de tensiones número 3. . . . .	150
7.6. Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente en el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 3. . . . .	150

# Capítulo 1

## *Introducción y objetivos*

### 1.1. Introducción

Los fallos por fatiga en estructuras metálicas son un fenómeno bien conocido. Los primeros hechos documentados de fallo de elementos sometidos a cargas cíclicas de baja intensidad fueron observados ya en el siglo XIX mientras que las primeras investigaciones sobre fallos por fatiga fueron llevadas a cabo en aquella época, aunque no se conocían los mecanismos que iniciaban el colapso del elemento. No es hasta el siglo XX cuando se conoce que la presencia de defectos en la superficie de los materiales actúan como elementos concentradores de tensiones. Esto produce la nucleación de dichas grietas, seguido de un crecimiento de las mismas y terminando en el colapso de la estructura. El estudio de los materiales y estructuras sometidas a fatiga es de vital importancia debido que las consecuencias de un fallo estructural pueden ser graves y cuantiosas. Como resultado de una extensa investigación y experimentación práctica, el conocimiento en este campo se ha ido incrementando notablemente. Una característica notable de los fallos estructurales debidos a fatiga es la falta de deformación en las regiones de fractura, incluso en aceros relativamente dúctiles. Éste es uno de los mayores peligros que hace que los mecanismos de rotura por fatiga deban de ser conocidos e investigados, ya que el fallo del elemento estructural puede venir sin ningún tipo de aviso previo. Todo lo comentado anteriormente justifica que el fallo a fatiga sea uno de los factores más importantes a considerar en el cálculo mecánico y estructural.

En la actualidad no es concebible el cálculo de determinados elementos sin haber realizado un estudio previo de las cargas alternadas a las que se prevé estarán sometidos. Elementos de cualquier tipo de máquina rotatoria, bomba hidráulica o motor eléctrico son sometidos a un número determinado de ciclos de carga en el transcurso de su vida útil. Asimismo, un gran número de estructuras tales como plataformas offshore, fustes de aerogeneradores, puentes para tráfico rodado o pasarelas peatonales contienen un elevado número de elementos constructivos susceptibles de sufrir fallos por fatiga.

Para ello, el método común de cálculo de elementos a fatiga suele ser la consulta de códigos técnicos de fácil aplicación, los cuales proporcionan curvas S-N de cálculo (asociadas a diferentes probabilidades de referencia) para un número limitado de detalles constructivos, junto con un modelo de acumulación de daño mediante el cual es posible predecir, de una forma más o menos acertada, la vida de un elemento a partir de un espectro de cálculo a considerar. Algunos códigos técnicos permiten la aplicación de la mecánica de la fractura

elástica lineal (MFEL), siempre y cuando se considere un plan de inspecciones periódicas sobre el elemento para comprobar su grado de deterioro.

No obstante, si bien es cierto que existen diferencias entre los procedimientos de cálculo considerados por los diferentes códigos existentes (diferentes curvas S-N, coeficientes de seguridad empleados, métodos de verificación de daño acumulado por el elemento, verificación o no de elementos sumergidos en agua marina, etc), existe una característica común a la mayoría de ellos y es su visión determinista del problema de la fatiga. Esta condición no sólo es propia de la mayoría de los códigos de cálculo que existen actualmente en vigor, sino que aún hoy se presentan modelos de ajuste para el campo S-N que no consideran en sus planteamientos una visión estadística del fenómeno, lo cual puede considerarse como sorprendente. Asimismo, los diferentes códigos de cálculo para el cálculo de elementos sometidos a fatiga aplican diferentes hipótesis que, si bien en cierto que contribuyen a facilitar la aplicación de los mismos, no siempre están suficientemente justificadas. Por ello se hace necesario evaluar si, en un intento de simplificar la aplicación de los códigos normativos, la consideración cuasidogmática de dichas hipótesis modifican en exceso los fundamentos físicos del fenómeno que se intenta evaluar.

En la presente tesis doctoral se ha realizado un estudio de dichas hipótesis aplicadas por los códigos normativos. Asimismo, se propone un método de obtención del campo S-N (conjunto de curvas percentiles de un determinado elemento) obtenido a partir de la información proporcionada por el propio Eurocódigo 3 (EC3) y un modelo estadístico de acumulación de daño de aplicación conjunta con el campo S-N generado anteriormente. A continuación, se exponen las características de 3 códigos normativos utilizados habitualmente para el cálculo de elementos sometidos a fatiga.

## 1.2. Normativa existente para el cálculo de elementos sometidos a fatiga

Es una realidad que, si bien los diferentes códigos de cálculo a fatiga existentes utilizan modelos de ajuste clásicos, que cuentan con conocidas limitaciones y no pocas incoherencias, su facilidad de uso y aplicación así como su exposición desde un punto de vista enteramente determinista ha propiciado su utilización generalizada por una gran mayoría de ingenieros. Además, es innegable que estos profesionales prefieren un modelo rápido, sencillo y de fácil aplicación a otros existentes que, aunque mucho más consistentes, requieren ciertos conocimientos estadísticos para su comprensión y posterior aplicación.

Es por eso que las principales normativas siguen basando sus métodos de cálculo a fatiga en modelos de ajuste lineales por tramos y considerando hipótesis de acumulación de daño lineal, aunque físicamente sea prácticamente imposible encontrar un material que responda a tal comportamiento.

En función de la normativa aplicada, el campo S-N para un mismo detalle constructivo puede ser diferente. En la figura 1.1 se puede observar la diferencia entre las curvas de cálculo utilizadas por el EC3 y por la norma noruega DNV-RP-C203 para 2 detalles constructivos.

Asimismo, la figura 1.2 [43] muestra las diferencias entre la clase F (British Standard) y la categoría 71 (EC3). En este caso, ambas normativas establecen diferentes valores de número de ciclos para considerar el límite de fatiga de amplitud constante  $\Delta\sigma_D$ .



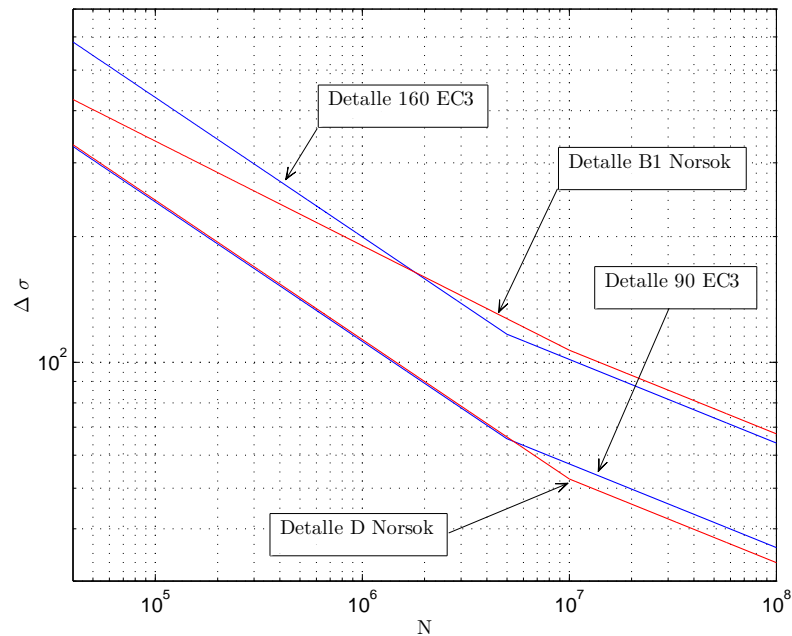


Figura 1.1: Comparación de curvas de cálculo de las normativas EC3 y Norsok.

La probabilidad de fallo asociada a un determinado componente depende también de la normativa utilizada: mientras que EC3 y EAE establecen por defecto un 5 % de probabilidad de fallo con un intervalo de confianza del 75 % en sus curvas de cálculo, las normas DNV-RP-C203 *Fatigue design of offshore steel structures* y BS 7608:1993 basan sus curvas de cálculo en el valor medio menos 2 veces la desviación típica de los datos experimentales obtenidos en laboratorio (probabilidad de fallo nominal del 2.3 %).

No obstante, es necesario reseñar que, aunque los códigos de fatiga proporcionan una escueta información sobre la probabilidad de referencia asociadas a sus curvas de cálculo, no aportan información acerca de la dispersión de los diferentes detalles constructivos considerados, imposibilitando de esta forma cualquier intento de discusión o debate por parte de los investigadores acerca de la idoneidad de los supuestos considerados por parte de la propia norma. Afortunadamente, en algunas publicaciones [83, 33] se aportan datos de dispersión de algunos de los detalles considerados por los códigos de cálculo, lo que permite desarrollar un estudio crítico y constructivo acerca de los fundamentos sobre los que se asientan los propios códigos considerados. Seguidamente se exponen algunos de los principales códigos de cálculo existentes y se explican brevemente sus fundamentos.

### 1.2.1. El Eurocódigo 3 (2008)

Los Eurocódigos estructurales son un conjunto de normas europeas de carácter voluntario, encargadas por la Comisión Europea al Comité Europeo de Normalización (CEN), donde se recogen métodos para el cálculo y dimensionado de estructuras y de productos prefabricados estructurales válidos en todos los Estados Miembros de la Unión Europea.

En particular, para estructuras de acero sometidas a fatiga, la normativa aplicable es el

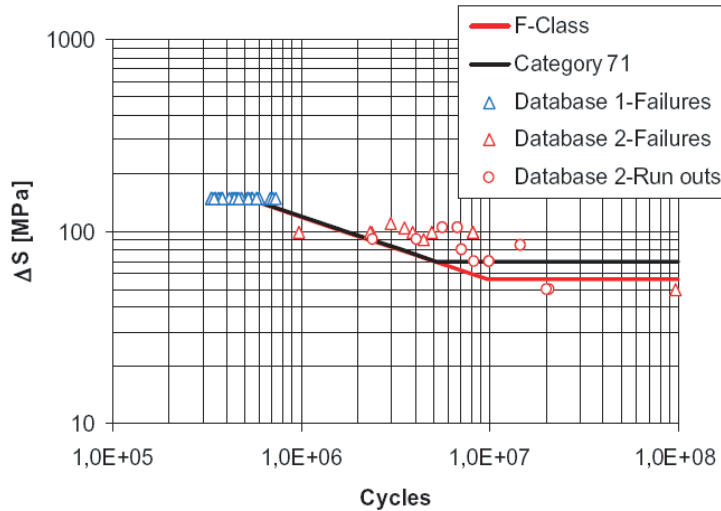


Figura 1.2: Comparación de curvas S-N pertenecientes a las normativas EC3 y British Standard [43].

EC3 en su apartado *1-9. Fatiga* [1], que tiene como objetivo el correcto dimensionamiento de una estructura respecto a su estado límite de fatiga, estableciendo márgenes de seguridad aceptables durante toda la vida del proyecto. A tal efecto, se consideran separadamente coeficientes de seguridad para cargas y resistencias. El código está concebido para el cálculo de estructuras *onshore*, por lo que no contempla vibraciones en estructuras inducidas por fluidos. Es aplicable a cualquier clase de acero estructural (incluyendo aceros inoxidables) expuestos a ambientes corrosivos de tipo medio (condiciones atmosféricas normales) hasta 150°C. No se admiten tratamientos posteriores a la ejecución que no sean de relajación de tensiones residuales. Debido a que el mínimo valor de número de ciclos representado en las gráficas son 10.000 ciclos, se considera que el código no contempla el cálculo de elementos a bajo número de ciclos.

A partir de la ecuación de Basquin, el EC3 aplica un modelo de regresión simple de 2 tramos (para esfuerzos normales de amplitud constante, esfuerzos tangenciales y para vigas trianguladas de perfiles huecos) o 3 tramos (para esfuerzos normales de amplitud variable), estableciendo una única curva de referencia asociada a una probabilidad de referencia del 5 %, con un índice de confianza del 75 %, para cada uno de los diferentes detalles constructivos considerados. En las curvas de cálculo propuestas están incluidos los efectos causados por imperfecciones geométricas y estructurales tanto de producción del material como de ejecución de las uniones soldadas.

Las tensiones consideradas para aplicar los métodos de cálculo establecidos por la norma deben ser [1]:

- Tensiones nominales (sin incluir efectos concentradores de tensiones) para elementos no soldados y soldados de las tablas 8.1 a 8.10, excluyendo los considerados en el anexo B del código.
- Tensiones nominales modificadas (tensiones nominales incluyendo efectos concentrado-

res de tensiones que no estén expresamente considerados en el detalle estructural objeto de cálculo) para elementos no soldados y soldados de las tablas 8.1 a 8.10, excluyendo los considerados en el anexo B del código.

- Tensiones geométricas (tensión principal máxima considerada en el borde de la soldadura del metal base considerando posibles efectos concentradores de tensiones) para las uniones soldadas del anexo B.

Si bien es cierto que la obtención de las curvas de cálculo de EC3 se realiza mediante el procedimiento estadístico de regresión simple, el resultado proporcionado por EC3 es una única curva de cálculo para cada detalle considerado, imposibilitando un tratamiento estadístico posterior al no aportarse datos acerca de la dispersión obtenida, número de ensayos llevados a cabo, información acerca de la validez de las hipótesis del modelo, etc. Un ejemplo puede verse en la figura 1.3:

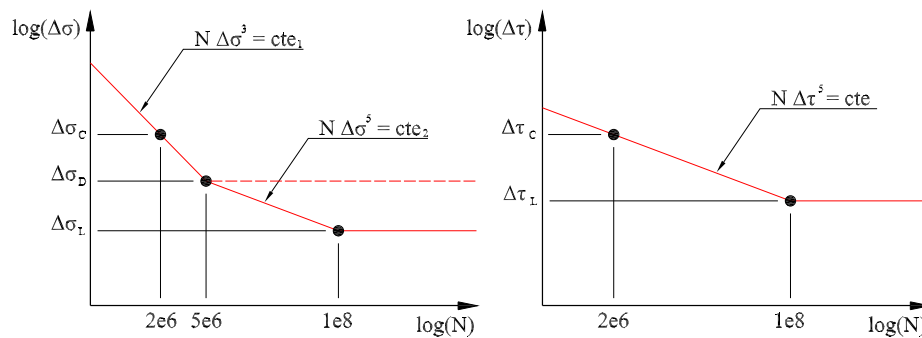


Figura 1.3: Curvas de resistencia a fatiga típicas para tensiones normales y tangenciales según el EC3.

$\Delta\sigma_C$  se define como la resistencia a fatiga del componente (considerado a 2 millones de ciclos),  $\Delta\sigma_D$  es el límite de fatiga a amplitud constante (considerado a 5 millones de ciclos) y  $\Delta\sigma_L$  es el límite de truncamiento o límite de fatiga a amplitud variable (considerado a 8 millones de ciclos).

Un elemento sometido a  $N$  ciclos bajo un determinado rango de tensiones  $\Delta\sigma$  constante, se considera seguro si permanece en la margen inferior-izquierda de la gráfica dividida por la curva.

Si el elemento está sometido a carga de magnitud variable, se procederá a crear el espectro de cálculo mediante alguno de los métodos que establece la norma, aplicando posteriormente la regla de Miner para evaluar el daño acumulado por el mismo. Cuando el rango de tensión máxima sea mayor que el límite de fatiga a amplitud constante del elemento, además de considerar como límite de fatiga el umbral de daño  $\Delta\sigma_L$  que establece EC3 para 100 millones de ciclos, se establecen 2 procedimientos posibles para verificar el estado del elemento, mediante la regla de acumulación de daño de Miner o bien mediante el método de la tensión equivalente.

### 1.2.2. La normativa Norsok N-004 (2004)

La normativa Norsok N-004 [77] es una normativa destinada a establecer consejos y exigencias de cálculo para estructuras de acero en plataformas offshore, siendo válida para aceros con un límite elástico de hasta 500 MPa. Actualmente está en vigor la segunda revisión (Oct. 2004), la cual está compuesta por 12 capítulos y 5 anexos. El capítulo 8 está dedicado al estudio de los estados límites de fatiga, donde se aportan valores de factores de cálculo a fatiga (DFF) en función de las consecuencias de fallo del elemento considerado, así como de la accesibilidad del elemento y si éste permanece, o no, sumergido. Asimismo, en el anexo M.5 se desarrolla más profundamente el método de los estados límites.

La norma establece 2 procedimientos de comprobación a fatiga:

1. Procedimiento simplificado: Se considera idóneo para realizar una evaluación de cálculo preliminar de la estructura, el cual permite identificar puntos críticos a los que se aplicará un posterior análisis más detallado. Para dicho análisis se requiere adoptar parámetros de cálculo que arrojen resultados conservadores.
2. Análisis detallado: Corresponde a un análisis local en zonas críticas de la estructura. Un análisis mediante FEM puede proporcionar información detallada acerca de distribuciones locales de tensiones, elementos concentradores de tensiones, etc.

No se establece una diferenciación entre fatiga de alto o bajo número de ciclos. Tampoco se establecen curvas de cálculo ni una regla de acumulación de daño concreta, para lo cual se remite a la recomendación práctica DNV-RP-C203 [18], normativa que abarca de una manera más amplia diferentes puntos tales como la influencia de la tensión media, factores de concentración de tensiones, cálculo de tensiones geométricas mediante el método de los elementos finitos, análisis a fatiga simplificado, métodos de fabricación que mejoran el comportamiento a fatiga y comentarios acerca de las incertidumbres y dispersión de resultados asociados al fenómeno de la fatiga.

### 1.2.3. La recomendación práctica DNV-RP-C203 (2008)

La citada recomendación práctica [18] es aplicable al cálculo de plataformas offshore construidas con acero cuyo límite elástico sea igual o menor a 960 MPa (estructuras al aire) y hasta 550 MPa para elementos sumergidos en agua marina con protección catódica o aceros sin protección a la corrosión. Se especifica que dicha normativa es aplicable a fatiga de alto número de ciclos (se considera fatiga de alto número de ciclos a partir de 10.000 ciclos).

El método de análisis considerado está basado en curvas S-N junto con una hipótesis de daño lineal. Adicionalmente, se admite un estudio basado en la mecánica de la fractura como complemento al estudio basado en curvas S-N, siempre y cuando se adecúe el tiempo entre revisiones en servicio a una duración menor que el tiempo transcurrido desde que una grieta es detectada hasta el crecimiento inestable de ésta. Se establecen diferentes curvas de cálculo con 1 o 2 tramos lineales en escala doblemente logarítmica en función del grado de exposición del elemento (aire, agua de mar con protección catódica, agua de mar sin protección frente a la corrosión) y curvas para perfiles tubulares, a la vez que se consideran modificaciones sobre dichas curvas derivadas del espesor de los elementos considerados. Las curvas representadas están basadas en la curva media menos 2 veces la desviación típica de los

Tabla 1.1: Tabla de comparación entre diferentes códigos de cálculo

	EC3 (2005)	Norsok N-004 (2004)	DNV-RP-C203 (2008)
Estructuras Offshore	NO	SI	SI
Tipo de acero aplicable	Cualquier acero estructural	$\sigma_{ys} \leq 500MPa$	$\sigma_{ys} \leq 960MPa$ (aire) $\sigma_{ys} \leq 550MPa$ (offshore)
Aplicación MFEL	NO	SI	SI
Limitación de temperatura	150°C	-	A partir de 100°C requiere correcciones
Curva de cálculo proporcionada	5 %	-	2.4 %
Modelo de acumulación de daño	$\sum_{n=1}^n \frac{N_i}{N_{Ref_i}} \leq 1$	-	$\sum_{n=1}^n \frac{N_i}{N_{Ref_i}} \leq \frac{1}{DFF}$

ensayos relevantes, estando asociadas, por lo tanto, a una probabilidad de referencia del 2.4 %. Para las curvas de cálculo en aire y en agua marina con protección catódica, se establece un límite de fatiga a 10 millones de ciclos. Los elementos dimensionados mediante dichas curvas sometidos a rangos de tensión por debajo de su límite de fatiga multiplicado por el factor  $(DFF)^{-0,33}$ , no requieren posteriores comprobaciones a fatiga. Por el contrario, los elementos con al menos un rango de tensión por encima de dicho límite de fatiga (de nuevo multiplicado por el factor  $(DFF)^{-0,33}$ ), exigen el consiguiente análisis de fatiga, adoptándose para ello las curvas originales que proporcionan las gráficas de la norma, sin ninguna modificación. A partir del conocimiento del espectro de tensiones, la aplicación de la regla de acumulación de daño se aplica de la siguiente forma:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{ref_i}} \leq \frac{1}{DFF} \quad (1.1)$$

Para la obtención del factor de cálculo a fatiga ( $DFF$ ) se remite a la Normativa Offshore DNV-OS-C101, en cuya sección 6 se establece una tabla con diferentes factores de cálculo a fatiga en función del grado de accesibilidad del elemento, pudiendo adoptarse los valores 1, 2 ó 3. Es importante reseñar que dicha tabla difiere de la consultada en la normativa Norsok N-004, lo cual aporta ambigüedad acerca de la elección correcta a considerar.

#### 1.2.4. Comparación entre los códigos de cálculo considerados

La tabla 1.1 muestra de forma resumida algunas de las diferencias entre los diferentes códigos de cálculo considerados.

### 1.3. Objetivos

A continuación se enumeran los objetivos de la presente tesis doctoral:

1. Tomar conciencia de la necesidad de superar el tradicional enfoque determinista asociada al fenómeno de la fatiga y de considerar el fenómeno desde un punto de vista estadístico. En particular, parámetros tales como el número de Miner, el rango de tensión equivalente y el límite de fatiga de un determinado material, deben de considerarse como variables aleatorias asociadas a una determinada distribución de probabilidad.
2. Realizar un análisis crítico respecto a las hipótesis consideradas por el EC3, evaluando su idoneidad y aplicabilidad, verificando si dichas hipótesis modelizan de una forma suficientemente realista el comportamiento del material sometido a fatiga.
3. Establecer una nueva consideración estadística para el diagrama de límite de endurancia variable, o diagrama de Kitagawa-Takahashi.
4. Obtener un campo S-N estadístico basado en las hipótesis consideradas por el EC3, a partir de la información proporcionada por el propio código normativo.
5. Proponer un nuevo modelo estadístico de acumulación de daño, de aplicación conjunta con el campo S-N generado anteriormente, con el objetivo de asociar el concepto de *daño* acumulado por un elemento con una determinada probabilidad de fallo.

#### **1.4. Organización de la presente tesis doctoral**

Con el objetivo de ofrecer un mejor entendimiento al lector y debido a que algunos de los objetivos plantados requieren la resolución previa de los precedentes, se ha establecido un orden lógico de aparición de los mismos en los diferentes capítulos que conforman la presente tesis doctoral. De esta forma, en el capítulo 2 se pretende realizar un repaso de las aportaciones relevantes de diferentes autores a conceptos considerados en el presente trabajo, tales como modelos de ajuste del campo S-N y modelos de acumulación de daño, para fatiga de amplitud constante (AC) y amplitud variable (AV).

En el capítulo 3 se razona la necesidad de considerar el fenómeno de la fatiga de una forma integral bajo una concepción estadística, aportando valoraciones acerca de los diferentes modelos de fatiga, tanto deterministas como probabilistas. Asimismo, se proponen comentarios acerca de las distribuciones estadísticas que mejor pueden modelizar de forma más realista el fenómeno.

De forma general, la gran mayoría de los elementos que trabajan en condiciones reales de operación están sometidos a cargas de amplitud variable. En el capítulo 4 se aportan comentarios relacionados con conceptos propios de la fatiga producida por este tipo de cargas, tales como el espectro de tensiones, el rango de tensión equivalente y el número de Miner. Tal y como se expone en el capítulo 3, se propone la necesidad de considerar el número de Miner como una variable aleatoria y se aporta un punto de vista estadístico para los límites de fatiga y endurancia de un material. Asimismo, el capítulo finaliza con una breve introducción a la fatiga cercana a valores umbrales y al descenso del límite de endurancia en fatiga de amplitud variable. Éste último concepto será ampliado en el capítulo 6 con las consideraciones estadísticas realizadas para el diagrama de límite de endurancia variable, o diagrama Kitagawa-Takahashi.

Los capítulos 5, 6 y 7 están dedicados enteramente al análisis del EC3. En el capítulo 5 se propone una consideración probabilística del EC3. A partir de la función de distribución de la variable  $\log(N)$  se obtiene la correspondiente al rango de tensiones  $\Delta\sigma$ , verificando ambas distribuciones una relación de compatibilidad, y permitiendo obtener un campo S-N probabilístico. La consideración estadística propuesta permite asimilar la aplicación de los coeficientes parciales de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf}$  considerados por el EC3 a la utilización de una curva de cálculo asociada a una probabilidad de referencia menor que la original. Asimismo, a partir de las distribuciones estadísticas de las variables  $\log(N)$  y  $\Delta\sigma$  se proponen las correspondientes para el número de Miner y el rango de tensión equivalente.

En el capítulo 6 se exponen las diferentes hipótesis admitidas por el EC3. Algunas de estas hipótesis consideradas (distribución lognormal para el tiempo de vida a fatiga de un elemento, desviación típica constante e independiente del rango de tensión considerado, curvas S-N compuestas por 2 o 3 tramos rectos incluyendo un límite de fatiga, etc) no reflejan el comportamiento de los datos reales obtenidos a partir de la experimentación. Por lo tanto, se han aplicado 2 modelos de ajuste diferentes sobre datos obtenidos en la literatura con intención de analizar dichas hipótesis. El primer modelo de ajuste considerado se ha denominado *Modelo de Basquin Normalizado*, debido a que aplica la misma formulación considerada por Basquin en su modelo lineal, pero considerando una variable de normalización para el tratamiento estadístico de los datos. El modelo supone, al igual que el EC3, que el tiempo de vida sigue una distribución lognormal y que la dispersión es constante para cualquier rango de tensión considerado. Posteriormente, se ha obtenido el campo S-N mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli, el cual ajusta los datos experimentales mediante hipérbolas equiláteras, considerando una normalización de los mismos y su posterior tratamiento mediante una distribución de Weibull, con desviaciones típicas dependientes de cada rango de tensión considerado. La comparación de ambos ajustes permite aportar una serie de conclusiones que se exponen al final del capítulo.

A partir de las consideraciones estadísticas propuestas en el capítulo 5, en el capítulo 7 se propone un modelo estadístico de daño para su aplicación junto con el EC3 y basado en sus mismas hipótesis. La formulación estadística propuesta permite obtener un campo S-N tanto para elementos sometidos a fatiga de amplitud constante como amplitud variable, generando curvas S-N asociadas a una misma probabilidad de referencia en sus diferentes tramos. Asimismo, las distribuciones propuestas para número de Miner y del rango de tensión equivalente permiten obtener una probabilidad de fallo del elemento considerado a partir del valor numérico del índice de daño considerado.

La compatibilidad existente entre las distribuciones estadísticas del número de Miner y del rango de tensión equivalente permite asegurar la unicidad de la probabilidad de fallo obtenida para cualquiera de los 2 índices de daño considerados. El modelo estadístico propuesto se ha validado mediante la aplicación de 3 espectros de tensiones aplicados sobre un mismo detalle de categoría 112, obteniendo resultado satisfactorios.

Finalmente, en los capítulos 8, 9 y 10 se exponen, respectivamente, las conclusiones generales obtenidas de la realización de la presente tesis doctoral, las contribuciones novedosas aportadas y algunas líneas futuras de investigación propuestas.





## Capítulo 2

### *Estado del arte*

#### 2.1. Introducción

El estudio de métodos de predicción de fallo a fatiga, incluyendo la realización de ensayos en laboratorio mediante la rotura de probetas del material considerado, se encuadra en el intento de establecer una metodología que permita determinar cuando un elemento fallará por estar sometido a una carga determinada. Se tiende a realizar procedimientos de cálculo estandarizados para predicciones de resistencia a fatiga, vida del componente y crecimiento de grieta. Estos procedimientos pueden ser útiles, pero sus resultados deben ser considerados con cierta precaución; la razón de esta afirmación es que dichos procedimientos parten de unas condiciones de cálculo, las cuales no tienen porqué ser exactamente iguales a las condiciones reales. Por tanto, se requiere por parte del ingeniero una buena comprensión del problema, experiencia y buen juicio para poder llevar a cabo una evaluación de los cálculos realizados. En resumen, el cálculo a fatiga de cualquier componente o estructura, requiere de un profundo conocimiento del campo objeto de estudio, donde conceptos como campo S-N, modelo de ajuste estadístico, modelo de acumulación de daño a fatiga o descenso de límite de endurencia en cargas de amplitud variable, deben ser inevitablemente considerados cuando el objetivo es realizar un análisis riguroso del fenómeno de la fatiga. En el presente capítulo se exponen algunas de las propuestas realizadas por diversos autores de los conceptos anteriormente expuestos.

#### 2.2. Fatiga bajo carga de amplitud constante

La base para el cálculo o comprobación de un elemento a fatiga parte del conocimiento de algunas propiedades del material, las cuales son obtenidas a partir de ensayos de fatiga a amplitud de carga constante, tales como las curvas S-N o el límite de endurencia de un material. Se considera que los ensayos bajo carga de amplitud constante sobre probetas no entalladas proporcionan la información básica de un determinado material sometido a fatiga [69]. Es importante comentar que el campo S-N y el límite de endurencia dependen del tamaño y la forma de las probetas ensayadas, así como del tipo de sollicitación, rugosidad de las probetas, tensión media de ejecución del ensayo, etc. No obstante, la información obtenida a partir de ensayos de carga constante permite obtener una primera estimación de la resistencia a fatiga del material, comparar entre diferentes tratamientos superficiales sobre

las probetas y escoger el que proporciona un mejor comportamiento a fatiga, etc. Asimismo, la práctica totalidad de los códigos normativos para elementos sometidos a fatiga están basados en el conocimiento de las curvas S-N, por lo que su conocimiento resulta básico y fundamental a la hora de proceder al cálculo de un elemento a fatiga.

Para la obtención del campo S-N se debe de partir de un determinado modelo de ajuste considerado. En apartados posteriores se comentan los requerimientos que debe de cumplir un modelo de ajuste de fatiga para modelizar fielmente el fenómeno, así cómo los fundamentos de algunos de ellos. También se hace referencia a un fenómeno inherente al fenómeno de fatiga, como es la dispersión de sus resultados.

## 2.3. Modelos de ajuste de datos experimentales

Un modelo de ajuste del campo S-N permite el tratamiento de datos experimentales procedentes de ensayos de fatiga, con lo que es posible extraer información del comportamiento del material o elemento para cualquier otro rango de tensión considerado. Por su importancia, suponen el punto de partida para cualquier evaluación o estudio relacionado con el campo de la fatiga de materiales. Los modelos de ajuste pueden dividirse en deterministas o probabilistas: los primeros proporcionan una curva de regresión S-N mientras que los segundos proporcionan el conjunto de curvas percentiles que conforman el campo S-N. En el presente apartado se exponen brevemente algunos modelos de ajuste pertenecientes a las 2 clasificaciones propuestos por diversos autores. Posteriormente, en el capítulo 3 se aportan una serie de comentarios acerca de los diferentes modelos expuestos.

### 2.3.1. Modelos de ajuste deterministas

#### Modelo lineal de Basquin

El modelo de Wöhler [89] fue el primer método de ajuste desarrollado para intentar predecir la resistencia de diferentes materiales cuando estos son sometidos a cargas cíclicas de baja intensidad (fatiga a alto número de ciclos). Se expresa de la siguiente forma:

$$N \cdot \Delta\sigma^m = A, \quad m \geq 0. \quad (2.1)$$

Tomando logaritmos decimales se obtiene el modelo de Basquin [2], basado en una regresión lineal en escala doblemente logarítmica:

$$\log(N) + m \cdot \log(\Delta\sigma) = \log(A), \quad m \geq 0, \quad (2.2)$$

donde  $\log(A)$  representa el punto de corte con el eje  $\log(N)$  de la recta del modelo, y  $m$  es el inverso de la pendiente de dicha recta. El éxito del modelo está fundamentado en la simplicidad de su formulación y su fácil aplicabilidad, basándose en él la mayoría de códigos técnicos de cálculo a fatiga. Por contra, el modelo tiene una serie de inconvenientes, como es la falta de justificación física de la hipótesis de linealidad, así como la inexistencia de un límite de endurancia.

Los modelos de ajuste que se muestran a continuación realizan un ajuste del campo S-N mediante hipérbolas y son evoluciones, más o menos acertadas, del modelo de Basquin. Algunos autores han basado sus aportaciones en la inclusión de asíntotas, logaritmos o han

considerado necesaria la inclusión de un cierto número de constantes. Se muestran a continuación.

### Modelo de Strohmeier

El modelo de ajuste de Basquin expresado en 2.2 puede ser generalizado mediante la adopción de asíntotas. Uno de estas variantes fue propuesta por Strohmeier [78] en 1914, mediante la ecuación 2.3:

$$N \cdot (\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^m = A, \quad \Delta\sigma \geq \Delta\sigma_0, \quad m \geq 0. \quad (2.3)$$

El modelo propuesto por Strohmeier considera la existencia de un valor de límite de endurencia  $\Delta\sigma_0$ , por lo que se puede considerar una evolución mejorada del modelo de Basquin.

### Modelo de Palmgren

Asimismo, Palmgren [61] en 1924 postuló un nuevo modelo de ajuste mediante la incorporación de una nueva constante al modelo de Strohmeier:

$$(N + D) \cdot (\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^m = A, \quad \Delta\sigma \geq \Delta\sigma_0, \quad m \geq 0, \quad D > 0. \quad (2.4)$$

Además de mantener la existencia del límite de endurencia  $\Delta\sigma_0$  aportada por Strohmeier, Palmgren propone una variación del anterior mediante la introducción del término  $D$ , con lo que se obtiene un modelo de ajuste con 2 asíntotas. Ambos métodos no son lineales en escala doblemente logarítmica sino que representan una hipérbola con una ligera concavidad y por lo tanto permiten un mejor ajuste de los datos provenientes de rangos de tensión menores.

### Modelo de Weibull

En 1949, Weibull [86] formula el siguiente modelo de ajuste:

$$(N + N_0) \left( \frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_0}{\Delta\sigma_{st} - \Delta\sigma} \right)^m = A, \quad m \geq 0, \quad (2.5)$$

donde el término  $\Delta\sigma_{st}$  hace referencia a la resistencia a tracción del material.

### Modelo de Stüssi

Posteriormente Stüssi [79] modifica el modelo de Weibull y obtiene un nuevo modelo de ajuste:

$$N \left( \frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_0}{\Delta\sigma_{st} - \Delta\sigma} \right)^m = A. \quad (2.6)$$

Ambas funciones de ajuste se representan en escala doblemente logarítmica.

## Modelo de Kohout y Vechet

El modelo propuesto por los autores [37] viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_\infty} = \left( \frac{N + N_1}{N + N_2} \right)^b. \quad (2.7)$$

Como puede comprobarse en la figura 2.1, la aportación del modelo de kohout-Vechet es extender el modelo de Basquin a la zona de bajo y alto número de ciclos de forma simétrica, incluyendo valores de resistencia a la tracción estática del material.

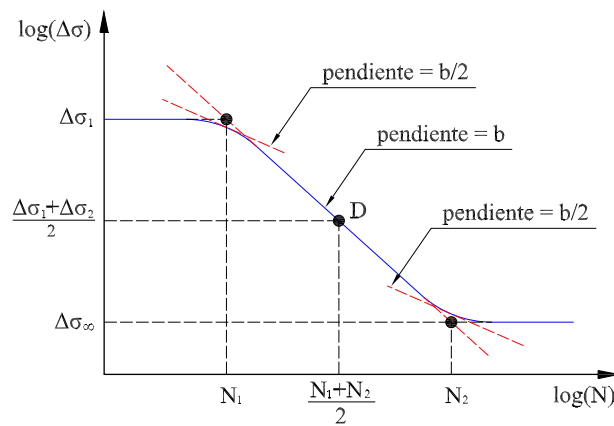


Figura 2.1: Modelo de Kohout y Vechet.

El significado de los valores  $N_1$  y  $N_2$  son los puntos de corte de las asíntotas superior e inferior con la tangente correspondiente al tramo lineal, mientras que el punto  $D$  corresponde al punto central de la recta tangente del modelo.

La ventaja de este modelo es la posibilidad de tratamiento conjunta de los datos de las zonas de alto y bajo número de ciclos. Según los autores, los parámetros del modelo tienen una justificación geométrica clara y pueden ser estimados con una elevada precisión. Además, las curvas de regresión obtenidas mediante el modelo de Kohout y Vechet muestran un mejor ajuste que las obtenidas mediante los modelos de Strohmeyer y Basquin.

Aunque el modelo aporta una forma novedosa de tratamiento conjunto de todo el dominio de número de ciclos, únicamente permite la obtención de una curva media de ajuste, sin considerar ningún tratamiento estadístico, por lo que no es posible hallar curvas para diferentes percentiles.

### 2.3.2. Modelos de ajuste probabilistas

#### Modelo de Spindel y Haibach

El modelo de ajuste propuesto por Spindel y Haibach [76] se formula de la siguiente forma:

$$\log \frac{N}{N_o} = A \cdot \log \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_o} + B \cdot \log \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_o} + B \left\{ \frac{1}{\alpha} \log \left[ 1 + \left( \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_o} \right)^{-2\alpha} \right] \right\}. \quad (2.8)$$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $A$  y  $B$  son constantes adimensionales mientras que  $N_0$  y  $\Delta\sigma_0$  son los valores dimensionales que proporcionan las asíntotas al modelo. Este modelo supone una distribución log-normal del tiempo de vida a fatiga, considerando una desviación típica constante para la variable  $\log(N)$  para todos los rangos de tensiones  $\Delta\sigma_i$ .

### Modelo de Bastenaire

Bastenaire [3] formula el siguiente modelo de ajuste probabilístico, válido para las zonas de alto y bajo número de ciclos, siendo uno de los primeros en incorporar el concepto de probabilidad de fallo al campo S-N (campo P-S-N):

$$(\log N - B)(\Delta\sigma - \Delta\sigma_o) = A \cdot \exp[-C(\Delta\sigma - \Delta\sigma_o)], \quad (2.9)$$

donde  $B$  es un parámetro adimensional y  $A$ ,  $C$  y  $\Delta\sigma_o$  son parámetros dimensionales. El autor postula una serie de supuestos que debe verificar un modelo de fatiga. Para ello parte de una relación general entre probabilidad de fallo, rango de tensión y número de ciclos transcurridos del tipo  $p = F(\Delta\sigma, N)$ , y raíz de esta expresión considera una serie de recomendaciones, tales como:

- Carácter creciente de las curvas S-N mediante las condiciones  $\partial F/\partial\Delta\sigma > 0$  y  $\partial F/\partial N > 0$  en todo el campo S-N.
- la deducción de las relaciones entre  $\Delta\sigma$  y  $N$  para un percentil  $p$  dado, mediante la derivada

$$\frac{d\Delta\sigma_p}{dN} = -\frac{\partial F/\partial N}{\partial F/\partial\Delta\sigma}. \quad (2.10)$$

- $\Delta\sigma > 0$  para todo el campo S-N
- La nulidad del rango de tensión no produce efectos (considerando el problema de fatiga)
- Para un determinado percentil,  $\Delta\sigma_p$  es una función decreciente. Además se considera necesaria la existencia de un límite de fatiga  $\Delta\sigma_0 \geq 0$
- El valor que adopta la variable  $\Delta\sigma$  cuando  $N \rightarrow \infty$  puede dar lugar a diferentes asíntotas en función del percentil considerado.
- Necesidad de utilización de técnicas de normalización.

Mediante su modelo de ajuste se obtiene el campo S-N el cual proporciona límites de endurancia diferentes en función de la probabilidad considerada.

### Modelo de Pascual y Meeker

El modelo propuesto por Pascual y Meeker [63] se basa en el concepto de *límite de fatiga aleatorio* (*Random Fatigue Limit* o *RFL*) formulado en 1984 por Nelson [60] y posteriormente ampliado por Hirose [32], el cual determina el campo S-N basándose en una desviación típica no constante para los diferentes rangos de tensión y la incorporación de datos censurados (*Run Outs*) al modelo, las cuales pueden ser consideradas como hipótesis razonables. La ecuación del modelo es la siguiente:

$$N \cdot (\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^m = A. \quad (2.11)$$

El modelo considera la utilización de distribuciones de extremos mínimos o la distribución normal para las expresiones del límite de endurancia y la vida a fatiga. No obstante, el método se apoya más en consideraciones empíricas que en físicas y considera hipótesis que no han sido total o parcialmente justificadas, por lo que se les puede atribuir un cierto grado de arbitrariedad.

### El Modelo de Castillo y Fernández Canteli

Si bien es cierto que los métodos comentados en apartados anteriores son de fácil comprensión y aplicación, no es menos cierto que su comodidad de uso está basada en hipótesis arbitrarias que difícilmente pueden ser defendidas bajo criterios físicos o estadísticos. El problema de la resistencia de un componente estructural a fatiga, es un problema de valores extremos [7]; si un componente estructural cualquiera se considera compuesto por otros subcomponentes más elementales, la vida a fatiga del elemento será la menor de las vidas de sus subcomponentes. Además, dicha duración mínima estará relacionada con el mayor defecto presente en ella. La presencia de grietas y defectos en un elemento es aleatorio en número, tamaño y forma, lo cual lleva a considerar distribuciones de extremos.

Inicialmente, existen 3 posibles distribuciones que pueden ser utilizadas para formular un modelo de ajuste de valores extremos mínimos: Weibull, Gumbel y Fréchet.

Castillo y Fernández Canteli [8] han desarrollado un modelo de ajuste para describir el campo S-N basándose en consideraciones físicas y estadísticas:

1. Adimensionalidad. Mediante la aplicación del teorema II de Buckingham [6] se establece el número mínimo de variables adimensionales necesarias para abordar el problema.
2. Principio del eslabón más débil. Si se considera que un elemento está compuesto por otros subelementos más pequeños, el tiempo de vida del elemento será el menor de los tiempos de vida de cualquiera de sus subelementos, lo cual justifica la utilización de una distribución de mínimos.
3. Estabilidad. El modelo debe de ser aplicable independiente del tamaño (volumen o longitud) del elemento.
4. Comportamiento límite. El modelo debe de poder considerar longitudes extremas, luego es necesario que la familia de distribuciones sea una familia asintótica.
5. Rango limitado. La experiencia demuestra que las variables del modelo están acotadas inferiormente, el cual debe de coincidir con el de las familias elegidas. Esta condición implica que las distribuciones de Gumbel y Fréchet quedan excluidas del modelo.
6. Compatibilidad. Cualquier punto de una curva percentil del modelo puede ser considerado proveniente de  $E^*(N^*|\Delta\sigma^*)$  (función de densidad de  $N^*$  para un  $\Delta\sigma^*$  fijado) o de  $F^*(\Delta\sigma^*|N^*)$  (función de densidad de  $\Delta\sigma^*$  para un  $N^*$  fijado)

La única distribución que cumple todos los requisitos anteriores es la distribución de Weibull [11, 9, 10], cuya media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$  se exponen a continuación:

$$\mu = \lambda + \delta \cdot \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right], \quad (2.12)$$

$$\sigma = \delta^2 \left( \Gamma \left[ 1 + \frac{2}{\beta} \right] - \Gamma^2 \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right] \right),$$

siendo los parámetros  $\lambda^*$ ,  $\delta^*$  y  $\beta^*$  son los correspondientes de la variable  $V^*$  que normaliza los datos provenientes de diferentes niveles de tensión, esto es:

$$V^* = (N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) \sim W(\lambda^*, \delta^*, \beta^*). \quad (2.13)$$

La condición de compatibilidad permite formular una ecuación funcional dando lugar a la función de distribución definida mediante la ecuación 2.14:

$$Q^*(N^*, \Delta\sigma^*) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \right]^{\beta^*} \right\}, \quad (2.14)$$

$$(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) \geq \lambda^*.$$

Los percentiles del modelo se definen mediante la ecuación 2.15:

$$V^* = (N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) = \lambda^* + \delta^* [-\log(1 - p)]^{1/\beta^*}, \quad (2.15)$$

donde se han definido las variables  $N^* = \log(N/N_0)$  y  $\Delta\sigma^* = g(\Delta\sigma/\Delta\sigma_0)$  y  $N_0$  y  $\Delta\sigma_0$  representan valores de referencia de  $N$  y  $\Delta\sigma$ , respectivamente <sup>1</sup>. El resultado del modelo es una familia de hipérbolas equiláteras en función del valor de la probabilidad.

El significado físico de los parámetros del modelo es el siguiente:

$B^*$ : Valor umbral del tiempo de vida a fatiga  $N^*$ .

$C^*$ : Límite de endurancia de  $\Delta\sigma^*$

$\lambda^*$ : Parámetro de localización de la distribución de Weibull. Define la posición del percentil cero.

$\delta^*$ : Parámetro de escala de la distribución.

$\beta$ : Parámetro de forma de la distribución.

La ecuación 2.15 se puede transformar en su forma dimensional, dando lugar a la ecuación 2.16:

$$V = (\log(N) - B)(g(\Delta\sigma) - C) = \lambda + \delta [-\log(1 - p)]^{1/\beta}. \quad (2.16)$$

La estimación de los 5 parámetros se realiza en 2 fases, una primera en la que se estiman  $B$  y  $C$  y una segunda, en la que se obtienen los parámetros de la distribución. Diversos métodos de estimación pueden ser consultados en [8].

<sup>1</sup>La función  $g(\cdot)$  puede ser la función logaritmo o la función identidad

## 2.4. Fatiga bajo carga de amplitud variable

Aunque los ensayos experimentales en laboratorio suelen realizarse a carga constante, la mayoría de componentes estructurales y elementos de maquinaria están sujetos durante su vida de servicio a cargas cíclicas de amplitud variable [24]. La investigación del fenómeno de fatiga bajo cargas de amplitud variable no deja de ser el estudio de cómo los elementos acumulan daño a diferentes rangos de tensión. Debido a esto, los ensayos de fatiga durante los cuales el rango de tensión varía de alguna forma se suelen denominar *ensayos de acumulación de daño*. El cálculo de elementos sometidos a fatiga de amplitud variable es un proceso complejo, donde conceptos como cierre de grieta, secuencia de cargas, efecto secuencia y retardo o aceleración de crecimiento de grieta debido a sobrecargas, incrementan el número de variables a considerar si se pretende realizar un estudio riguroso del fenómeno.

El primer intento de realizar ensayos de fatiga bajo carga de amplitud variable se debe a Gassner [26], el cual en 1939 introduce la realización de pruebas en laboratorio a partir de espectros de carga variable por bloques, considerando una secuencia de 500.000 ciclos con 8 rangos de tensión diferentes, conservando la misma tensión media. Dicho programa se repite el número de veces necesario hasta la rotura del elemento. Gassner establece dicho programa de ensayos a partir de información de espectros de carga sobre alas de aviones, con intención de generar un programa de ensayos más similar a las cargas de servicio del elemento. A partir de 1970, con la llegada de las máquinas de ensayos electro-hidráulicas, es posible la generación de espectros de carga más complejos mediante computador, así como la generación de espectros aleatorios de carga que permiten avanzar en el estudio de la fatiga bajo carga de amplitud variable. El número de programas de carga existentes en función de las condiciones de servicio del elemento a considerar es amplio, no obstante, se sigue investigando acerca de si dichos programas de carga son capaces de reflejar con suficiente precisión las condiciones reales de servicio de un elemento. Dicha cuestión es mucho más importante en aquellos elementos en los cuales un fallo por fatiga no es admisible, como por ejemplo componentes de la industria aeronáutica.

La evaluación de un elemento sometido a fatiga de amplitud de carga variable requiere del conocimiento del campo S-N y de un modelo de acumulación de daño. En el apartado 2.3 se han expuesto algunos modelos de ajuste del campo S-N propuestos por diversos autores. Asimismo, en el capítulo 2.5 se presentarán diferentes modelos de acumulación de daño.

## 2.5. Modelos de acumulación de daño

El daño a fatiga se incrementa con los ciclos de carga aplicados sobre un elemento, pero además de los ciclos de carga a una determinada amplitud, existen otros muchos factores que afectan a la acumulación de daño por fatiga:

1. Repetidas cargas cíclicas generan plasticidad en el frente de grieta, que puede ser mayor o menor en función de amplitud de la carga.
2. Debido a las deformaciones plásticas generadas en el frente de grieta, algunos materiales experimentan un endurecimiento que afecta a la forma en que se propaga la grieta.



3. Las cargas superiores al límite elástico del material, además de generar las plastificaciones anteriormente comentadas, pueden producir tensiones residuales de tracción o compresión, las cuales pueden aumentar o disminuir la velocidad de crecimiento de grieta. Es bien conocido cómo una sobrecarga de tracción aplicada sobre un elemento entallado, produce plastificación en el frente de grieta y se generan tensiones residuales de compresión, las cuales tienden a reducir la velocidad de crecimiento de grieta en el material. (este fenómeno ya fue percibido por Heyer en 1943 [31]).
4. En el caso de materiales entallados, también se pueden producir macro-plastificaciones en el entorno del frente de grieta, que afectan al comportamiento del material y en la forma en que éste acumula el daño.

Los factores expuestos afectan al modo en que un material acumula daño a fatiga, y es evidente que, difícilmente, pueden ser considerados si sólo se utilizan como magnitudes el número de ciclos transcurridos y la amplitud de las tensiones generadas sobre el elemento. Como consecuencia de lo anterior, el incremento en el daño por fatiga generado por una determinada carga depende de cómo se ha acumulado el daño por las cargas precedentes. A este fenómeno se le conoce como *efecto de interacción de cargas* [69] y es consecuencia directa del *efecto de secuencia de cargas*. El efecto de interacción de cargas puede ser un factor determinante a la hora de evaluar el nivel de daño acumulado por un elemento, en función del tipo de carga soportada por el mismo.

Asimismo, se ha comprobado cómo el nivel de daño acumulado por un elemento para un mismo espectro de carga puede ser totalmente diferente en función de cómo esté configurado el ensayo (mediante programa de bloques de carga o mediante una carga aleatoria). En ambos casos se ha demostrado que los resultados de vida a fatiga pueden ser completamente diferentes [34], obteniéndose resultados del número de Miner de hasta 6 veces mayores para el caso de configuración del ensayo como bloque de cargas. Estos resultados han obligado a reconsiderar la fiabilidad de algunos de los modelos de acumulación de daño que se exponen a continuación.

La forma práctica de evaluar el nivel de daño a fatiga se realiza mediante los llamados *modelos de acumulación de daño*. Existen un alto número de modelos de acumulación de daño, existiendo una división clara entre los que requieren del conocimiento de una curva o campo S-N y los que no precisan de dicha información. Los métodos para medir la acumulación de daño a fatiga han evolucionado desde la introducción de concepto de acumulación de daño introducido por Palmgren en 1924 [61] y la hipótesis de daño lineal concebida por Miner en 1945 [57]. Durante la década de 1930 las hipótesis utilizadas para medir el daño se restringían a los conceptos de suma lineal de Palmgren, cambio del límite de durabilidad [38] y la necesidad de considerar el daño a fatiga en 2 escenarios diferenciados, como son la nucleación de la grieta y el crecimiento de esta [41]. Estos 3 conceptos representan el inicio de los modelos fenomenológicos de daño a fatiga.

Seguidamente se exponen algunos modelos de acumulación de daño propuestos por otros autores.

### 2.5.1. El modelo de Miner

La regla de Miner es el método más extendido y conocido de evaluación de daño acumulado para elementos sometidos a fatiga. Su conocida expresión se muestra en la ecuación 2.17:

$$M_{ref} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{ref_i}}, \quad (2.17)$$

donde  $N_i$  denota un determinado número de ciclos transcurridos y  $N_{ref_i}$  denota la resistencia a fatiga del elemento para el rango de tensión constante considerado. El modelo propuesto por Miner supone una regla de acumulación de daño lineal en función de los ciclos transcurridos. En el apartado 4.4 se exponen una serie de consideraciones relacionadas con este parámetro de acumulación de daño.

### 2.5.2. Concepto de acumulación de daño no lineal. Modelo de Marco-Starkey

Para intentar suplir las deficiencias de los modelos de acumulación de daño lineal, Marco y Starkey [51] propusieron el primer modelo basado en una acumulación de daño no lineal, basándose en el siguiente índice de daño:

$$D = \sum \left( \frac{N_i}{N_{ref_i}} \right)^{x_i}, \quad (2.18)$$

donde el parámetro  $x_i$  es una variable que está relacionada con el rango de tensión de la carga  $i$ -ésima aplicada. La hipótesis de daño lineal no deja de ser un caso particular del modelo de Marco-Starkey donde  $x_i$  toma el valor 1 para cada carga.

El modelo de Marco-Starkey considera el efecto de la secuencia de carga, obteniéndose valores de  $N_i/N_{ref_i}$  menores que la unidad para secuencias de bloques de carga *alto-bajo*, mientras que para secuencias de bloques de carga *bajo-alto* el valor de  $N_i/N_{ref_i}$  sería mayor que la unidad.

No obstante, el modelo no tiene en cuenta el fenómeno de interacción de cargas

### 2.5.3. Modelo de Smith, Watson y Tooper

Smith, Watson y Tooper [72] propusieron en 1970 un nuevo índice de medida de daño, basado en consideraciones de tensiones máximas y deformaciones del material definiendo mediante la definición de un nuevo parámetro:

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma_{max} \cdot \varepsilon_a \cdot E}. \quad (2.19)$$

Según los autores, el daño acumulado es proporcional al producto de la tensión máxima  $\sigma_{max}$  y la amplitud de la deformación  $\varepsilon_a$  ocasionada. El parámetro de Watson, Smith y Tooper puede ser formulado en términos del modelo basado en deformaciones de Coffin-Manson tal y como muestra la ecuación 2.20, donde  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del modelo.

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma'_f{}^2 (2N_i)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f E (2N)^{b+c}}. \quad (2.20)$$

### 2.5.4. Modelo de Wheeler

El modelo propuesto por Wheeler [88] se basa en la identificación del nivel de daño de un elemento a partir del tamaño de grieta. El modelo considera que la velocidad de crecimiento de dicha grieta está influenciada por la existencia de la zona plástica en su frente debido a tensiones residuales de compresión de sobrecargas previas y, por lo tanto, tiene en cuenta los efectos de interacción de cargas. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{da}{dN} = C_i [A(\Delta K)^m], \quad (2.21)$$

donde  $A$  y  $m$  son constantes a determinar y  $C_i$  es un parámetro empírico de disminución de velocidad crecimiento de grieta, que se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$C_i = \left( \frac{r_{pi}}{r_{max}} \right)^p, \quad (2.22)$$

donde  $r_{pi}$  es el radio de la zona plástica generada por el  $i$ -ésimo ciclo,  $r_{max}$  es la distancia máxima entre el frente de grieta con la mayor zona elasto-plástica creada previamente por una sobrecarga, y  $p$  es un parámetro de forma empírico que depende de las propiedades del material y del espectro de cargas.

### 2.5.5. Modelo de Leis

Leis [45] propuso un modelo de daño no lineal cuyo parámetro es muy similar al propuesto por Smith, Watson and Tooper. El parámetro de acumulación de daño se define mediante la ecuación:

$$D = \frac{4\sigma'_f}{E} (2N_f)^{2b_1} + 4\sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b_1+c_1}, \quad (2.23)$$

donde  $\sigma'_f$  y  $\varepsilon'_f$  son los coeficientes de resistencia y ductilidad a fatiga, respectivamente y  $c_1$  y  $b_1$  están relacionados con el coeficiente de endurecimiento por deformación instantáneo  $n_1$ , que se definen de la siguiente forma:

$$c_1 = \frac{-1}{1+5n_1}, \quad b_1 = \frac{-n_1}{1+5n_1}. \quad (2.24)$$

Puede comprobarse cómo la ecuación 2.23 guarda cierta relación con el modelo de ajuste de Morrow. A partir de observaciones experimentales, Leis consideró que el coeficiente  $n_1$  puede estar relacionado con la acumulación de deformación plástica ( $n_1 = n_1(\sum \Delta\varepsilon_p)$ )



## Capítulo 3

# *Consideraciones estadísticas del fenómeno de la fatiga*

### 3.1. Introducción

La dispersión es una característica inherente al fenómeno de la fatiga. Es un hecho que 2 elementos *teóricamente* iguales que son sometidos a un mismo espectro de cargas pueden arrojar resultados de vida a fatiga notablemente diferentes entre sí. Las causas de la dispersión son numerosas (acabado superficial, agresividad del medio ambiente, tipo de sollicitación sobre el elemento, etc). Aparte de esto, los mecanismos que generan dispersión en fatiga son notablemente diferentes en función del periodo de vida a fatiga considerado, es decir, la dispersión generada en el periodo de nucleación de grieta está principalmente relacionada con las condiciones superficiales del elemento (las cuales pueden diferir notablemente incluso entre 2 probeta supuestamente idénticas), mientras que en la etapa de crecimiento, la dispersión está asociada a la estructura del material (más homogénea entre probetas de un mismo material y, por lo tanto, expuesta a una menor variabilidad. Mediante ensayos en laboratorio, se llega a la conclusión de que la dispersión en la etapa de nucleación de grieta es notablemente mayor que en la etapa de crecimiento estable de la misma [69].

Por lo tanto, la consideración de la dispersión como una característica inherente del fenómeno justifica un planteamiento estadístico del problema de fatiga. Para ello, los modelos de ajuste probabilísticos recurren a distribuciones estadísticas, lo que les permite asociar valores de vida a fatiga y rango de tensiones a una probabilidad concreta de fallo, siendo la distribución normal y la distribución de Weibull de 3 parámetros las más utilizadas. No obstante, a continuación se expondrán diferentes argumentos que permiten considerar cuales son las familias de distribuciones que mejor y de forma más realista pueden modelizar el problema de fatiga.

A diferencia de los modelos deterministas, los modelos probabilísticos proporcionan información acerca del campo S-N mediante funciones de densidad tanto de la variable N para un determinado rango de tensión  $\Delta\sigma_i$  como para la variable  $\Delta\sigma$  para un determinado  $N_i$ . Dichas funciones de densidad permiten considerar valores de desviaciones típicas, intervalos de confianza y curvas de ajuste para una determinada probabilidad de referencia. Estos métodos, por lo tanto, aportan información muy relevante de la que carecen los métodos deterministas, por lo que se pueden considerar de más calidad que estos últimos.

Es importante poner de manifiesto que la consideración de una determinada distribución estadística debe basarse en aquella que incorpore los planteamientos físicos del fenómeno de fatiga, y no solamente considerar la elección de la distribución en función de un mejor o peor ajuste de un conjunto de datos determinados.

### 3.2. El ajuste de los datos experimentales

La amplia experimentación llevada a cabo en el campo de la fatiga permite establecer una serie de patrones de comportamiento a partir de los numerosos datos obtenidos, los cuales responden a los fenómenos físicos producidos durante el proceso. Considerando el rango de tensión como el parámetro de control de los ensayos, se establecen una serie de comportamientos comunes a todos ellos, los cuales se enumeran a continuación [8]:

- La vida a fatiga de un elemento aumenta a medida que disminuye el rango de tensión  $\Delta\sigma_i$  considerado.
- La zona de bajo número de ciclos experimenta una curvatura negativa o convexa.
- Las zonas de medio o alto número de ciclos experimentan una curvatura positiva o cóncava.
- La mayoría de materiales experimentan un comportamiento asintótico horizontal en las zonas de alto y bajo número de ciclos. El primero responde a la existencia de un límite de endurancia para ensayos de amplitud constante, mientras que el segundo se refiere a la limitación que establece los mecanismos de rotura estática.
- Los resultados experimentales constatan que la dispersión asociada al tiempo de vida (tanto en escala natural como logarítmica) aumenta cuando decrece el rango de tensión.

Por lo tanto, las realidades anteriormente comentadas deben de tenerse en cuenta a la hora de tratar los datos procedentes de ensayos de fatiga.

Con el objetivo de modelizar el fenómeno de la fatiga de la forma más realista posible, los modelos de ajuste implementan en su formulación diferentes hipótesis, algunas de las cuales son:

- Consideración de las funciones logaritmo o identidad a la hora de considerar las variable  $N$  y  $\Delta\sigma$ .
- Opción de considerar (o no) un modelo asintótico.
- Consideración de un modelo lineal o hiperbólico.
- Consideración de un modelo que permita un cambio de curvatura en la región de bajo número de ciclos.
- Consideración de modelos que reflejen la dispersión existente en el fenómeno.

La consideración de las opciones anteriormente mencionadas da lugar a los diferentes modelos de ajuste existentes. Al final del capítulo se realizará una valoración de los mismos.

### 3.3. Requisitos ideales de un modelo de ajuste de fatiga

Un modelo de ajuste de fatiga es un procedimiento que permite tratar la información obtenida a través de un número limitado de ensayos experimentales, permitiendo su extrapolación a cualquier otro rango de tensión considerado con los debidos niveles de seguridad requeridos.

Debido a que el fenómeno de fatiga se manifiesta en multitud de situaciones con características muy dispares entre ellas, lo ideal es contar con modelos de ajuste que sean aplicables en un entorno lo más general posible. Para ello, un modelo de fatiga ideal debería poseer una serie de características, algunas de las cuales son:

- Aplicable a cualquier problema específico de fatiga (estructural, térmica, por corrosión, etc).
- Aplicable a cualquier tipo de material.
- Modelización del fenómeno de la forma más realista posible, es decir, intentando reproducir las consideraciones enumeradas en el apartado 3.2.
- Consideración de un número de variables y parámetros que permita un ajuste óptimo del modelo, evitando la inclusión de aquellas variables que no aportan información relevante y pueden dificultar la convergencia del mismo.
- Extrapolación fuera del rango de los ensayos.
- No debe de requerir un número excesivo de datos experimentales para realizar la correcta estimación de los parámetros del modelo a partir de una distribución de probabilidad conocida. Además, debe de tener en cuenta la información aportada por los ensayos supervivientes (*run outs*).
- Validez del modelo independientemente del tamaño del elemento considerado.
- Aplicable a cualquier espectro de tensiones (constante, por bloques, aleatoria, etc). Por lo tanto, debe de tener en cuenta la problemática particular del fenómeno, tales como tensiones residuales, plastificaciones generadas en el frente de grieta debido a sobrecargas, etc.
- Por último, debido a que el problema de fatiga tiene un claro componente de aleatoriedad, el modelo de fatiga debe basarse en conceptos estadísticos.

Aparte de los modelos de ajuste del campo S-N expuestos en el capítulo 2, existen otros muchos, cada uno de los cuales está basado en diferentes hipótesis. No obstante, la totalidad de los modelos desarrollados se pueden dividir en 2 grandes grupos:

1. Modelos deterministas: aportan información a partir de una única curva de ajuste.
2. Modelos probabilistas: aportan la totalidad del campo S-N con información acerca de probabilidades de fallo del componente, es decir, proporcionan información completa del campo P-S-N.

En los métodos probabilísticos se hace necesario un proceso de normalización, por el cual valores obtenidos a diferentes rangos de tensión pueden ser tratados de forma conjunta, aumentando la fiabilidad del método debido a que el ajuste de una determinada función de distribución se realiza con la totalidad de los datos experimentales disponibles. Seguidamente se explican diferentes métodos de normalización utilizados por algunos modelos probabilistas

### 3.3.1. La normalización estadística

Debido a que los datos provenientes de un ensayo a fatiga corresponden a diferentes rangos de tensión (en función de la estrategia elegida), es necesario realizar una transformación para reducir todos los datos a un mismo rango y nivel de tensión de referencia. Dichos datos, los cuales provienen de un mismo tipo de distribución pero con parámetros diferentes, son transformados adecuadamente para poder ser tratados de manera conjunta bajo una única función de distribución, realizando una evaluación conjunta de los mismos. A este proceso se le denomina *normalización* y la nueva variable, *variable normalizada*. Existen diferentes variables normalizadas. La elección de la misma dependerá del criterio de normalización seguido y del modelo de ajuste de los datos utilizado.

Las ventajas del proceso de normalización son notables; permite realizar estimaciones y ajustes más fiables de los modelos, debido a que los datos pueden agruparse y se consiguen mayores tamaños de muestra. Además, algunas de las variables de normalización pueden ser consideradas como indicadoras del nivel de acumulación de daño (este punto se abordará con más detalle en capítulos posteriores).

### Métodos de normalización

Existen diferentes estrategias para proceder a una normalización [8]. La elección de un tipo u otro dependerá de la variable de referencia que se quiera utilizar para comparar posteriormente los datos normalizados. Algunas de ellas se exponen a continuación

**Normalización basada en percentiles** Esta normalización está basada en el hecho de que cualquier punto del campo S-N puede suponerse asociado a una determinada probabilidad de fallo. Si se supone definido el modelo de ajuste, es posible realizar desplazamientos isoprobabilísticos adecuados hasta la variable de referencia considerada.

Las curvas percentiles de un modelo de ajuste tendrán una expresión general:

$$p = h^*(N^*, \Delta\sigma^* | \sigma_l^*), \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_l^*$  es el nivel de tensión considerado para la realización del ensayo. Si se considera un cierto rango de tensiones como nivel de referencia (por ejemplo  $\Delta\sigma_2^*$  en la figura 3.1 izquierda), las funciones de distribución de 2 puntos  $A$  y  $B$  se pueden relacionar por medio de la ecuación 3.2:

$$p = h_1^*(N_1^*; \Delta\sigma_1^* | \sigma_l^*) = h_2^*(N_2^*; \Delta\sigma_2^* | \sigma_l^*), \quad (3.2)$$

luego, el valor  $N_2^*$  correspondiente al punto  $B$  será:

$$N_2^* = r^*(N_1^*, \Delta\sigma_1^*, \Delta\sigma_2^* | \sigma_l^*). \quad (3.3)$$



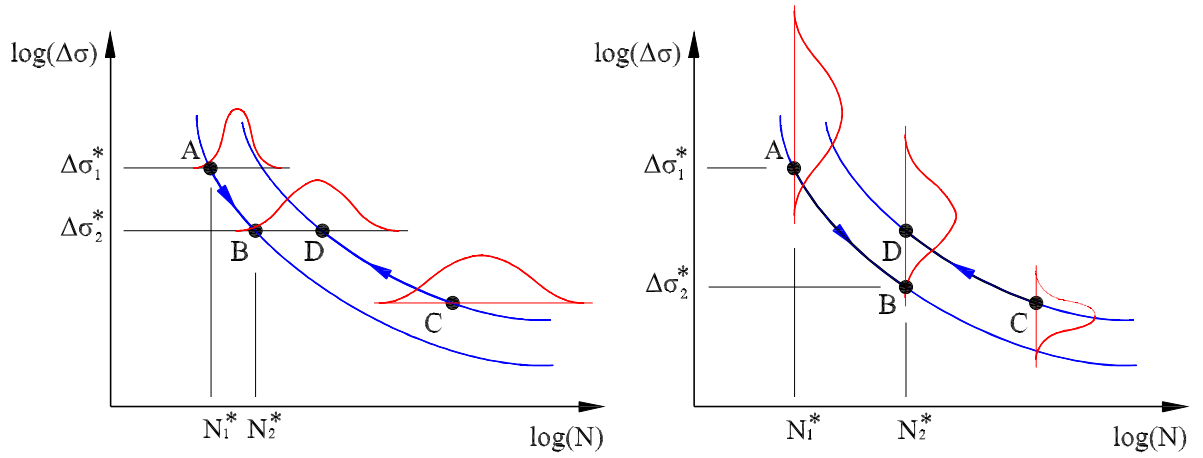


Figura 3.1: Normalización basada en percentiles.

Igualmente, si se considera un cierto valor de número de ciclos como referencia para la normalización (por ejemplo  $N_2^*$  en la figura 3.1 derecha), a partir de la ecuación 3.1 se obtiene:

$$p = h_3^*(\Delta\sigma_1^*; N_1^* | \sigma_l^*) = h_4^*(\Delta\sigma_2^*; N_2^* | \sigma_l^*), \quad (3.4)$$

luego, el valor de  $\Delta\sigma_2^*$  correspondiente al punto B será:

$$\Delta\sigma_2^* = s^*(N_1^*, \Delta\sigma_1^*, N_2^* | \sigma_l^*). \quad (3.5)$$

**Normalización basada en rango de tensiones y vida a fatiga** Mediante esta normalización, 2 puntos son equivalentes si comparten el mismo rango de tensiones o una misma vida a fatiga (dependiendo de cual sea el criterio de normalización elegido). Esto permite considerar la probabilidad de fallo como variable de referencia.

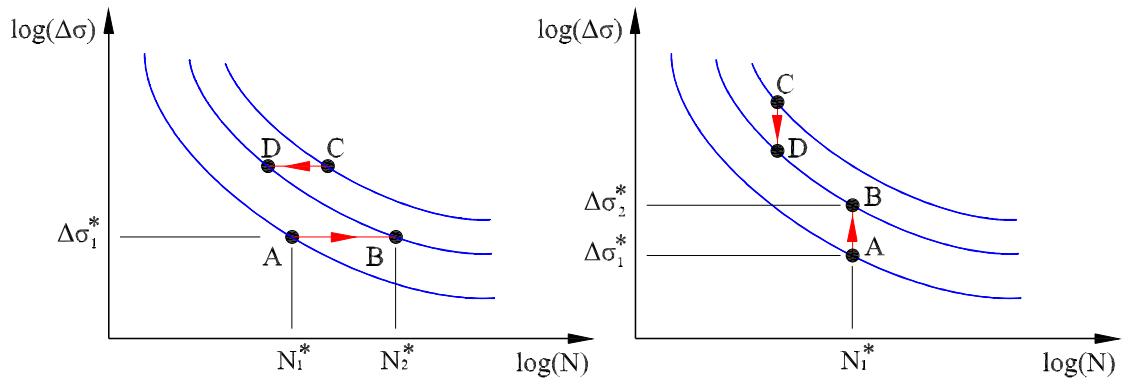


Figura 3.2: Normalización basada en rangos de tensión.

En la figura 3.2 se pretende transformar los puntos A y C en los puntos B y D para considerarlos todos bajo una misma probabilidad de fallo. Esto se puede llevar a cabo mediante una normalización por rango de tensiones (figura izquierda) donde se requiere conocer los

nuevos valores de número de ciclos o, por el contrario se puede realizar mediante una normalización por vida a fatiga, donde las incógnitas son los nuevos valores de rango de tensión correspondientes.

La transformación del punto  $A$  en el punto  $B$  aplicando la normalización por rango de tensiones se realizaría aplicando las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\sigma_1^* = g^*(N_1^*; p_1 | \sigma_l^*) = g^*(N_2^*; p_2 | \sigma_l^*) \Rightarrow N_2^* = t^*(N_1^*, p_1, p_2 | \sigma_l^*). \quad (3.6)$$

Asimismo, si se considera la normalización por vida a fatiga se obtiene:

$$N_1^* = f^*(\Delta\sigma_1^*; p_1 | \sigma_l^*) = f^*(\Delta\sigma_2^*; p_2 | \sigma_l^*) \Rightarrow \Delta\sigma_2^* = u^*(\Delta\sigma_1^*, p_1, p_2 | \sigma_l^*). \quad (3.7)$$

**Normalización extendida basada en percentiles** La normalización basada en percentiles comentada anteriormente no deja de ser un caso particular suponiendo que los datos provienen de ensayos a un mismo nivel de tensión. En caso de no ser así, la ecuación 3.1 se puede expresar de la siguiente forma:

$$p = z^*(N^*, \sigma_M^*, \sigma_m^*), \quad (3.8)$$

siendo  $\sigma_M^*$  y  $\sigma_m^*$  las tensiones máxima y mínima, respectivamente. Aplicando la ecuación 3.8 se pueden relacionar 2 pares de puntos A y B pertenecientes a la misma curva de isoprobabilidad de la siguiente forma:

$$z^*(N_1^*, \sigma_{M1}^*, \sigma_{m1}^*) = z^*(N_2^*, \sigma_{M2}^*, \sigma_{m2}^*). \quad (3.9)$$

La normalización basada en percentiles es la utilizada por algunos modelos expuestos en la presente tesis, como son el Modelo de Castillo y Fernández Canteli (ver apartado 2.3.2) y el Modelo de Basquin Normalizado, el cual se expondrá en el apartado 6.3.

### Variabes normalizadas

Una vez elegido un método de normalización se obtiene las llamadas variables normalizadas. Existen diferentes tipos de variables normalizadas, dependiendo su elección del modelo de ajuste considerado. La experiencia demuestra que la variable  $\log(N)$  sigue una distribución de Weibull [11, 9, 10], si bien es cierto que existen otras distribuciones de probabilidad, como la distribución normal, que son consideradas habitualmente. Una propiedad de la distribución de Weibull es que es estable respecto a transformaciones de localización y escala, es decir:

$$\xi \sim W(\lambda, \delta, \beta) \Leftrightarrow \frac{\xi - a}{b} \sim W\left(\frac{\lambda - a}{b}, \frac{\delta}{b}, \beta\right), \quad (3.10)$$

donde puede comprobarse cómo los parámetros de la nueva distribución quedan expresados en función de los antiguos. Esta es la propiedad en la que está basado el proceso de normalización para distribuciones de Weibull. A continuación, se exponen algunas de las variables de normalización posibles.

**La variable normalizada  $V^*$**  Si se considera el modelo de Castillo y Fernández Canteli expresado en la ecuación 2.14 como modelo de ajuste, es necesario recurrir a una variable que permita normalizar los datos provenientes de diferentes rangos de tensión. Una vez normalizados se tratarán de forma conjunta, lo que permitirá estimar los parámetros  $\lambda^*$ ,  $\delta^*$  y  $\beta^*$  del modelo. En este caso, se define la variable  $V^*$  mediante la ecuación 3.11:

$$V^* = (N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) \sim W(\lambda^*, \delta^*, \beta^*). \quad (3.11)$$

La ecuación 3.11 se puede expresar en su forma dimensional:

$$V = (\log(N) - B)(\log(\Delta\sigma) - C) \sim W(\lambda, \delta, \beta). \quad (3.12)$$

Dicha variable  $V^*$  está basada en la normalización por percentiles, por lo tanto, si 2 puntos cualesquiera del campo S-N se normalizan mediante un mismo valor  $V^*$ , ambos estados están asociados a una misma probabilidad de rotura. Esta es una importante propiedad, debido a que es posible considerar  $V^*$  como un parámetro de daño de un elemento. Nótese que la utilización de la variable  $V^*$  requiere de la estimación previa de los parámetros  $B^*$  y  $C^*$ . Diferentes métodos de estimación pueden ser consultados en [12].

Una vez estimados los parámetros del modelo se puede obtener las distribuciones de probabilidad de la variable  $\log(N)$  para un determinado rango de tensiones,

$$\log(N) \sim W\left(\frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B, \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C}, \beta\right). \quad (3.13)$$

Por lo tanto, la relación entre los parámetros de las distribuciones de Weibull pertenecientes a la variable normalizada  $V$  y a la variable  $\log(N)$  a un determinado rango de tensión son:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= B + \frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma_i) - C} \\ \delta_i &= \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma_i) - C} \\ \beta_i &= \beta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El principal inconveniente de la variable  $V^*$  es que no dispone de un valor de referencia fijo, ni es posible establecer un rango de variación para la misma, por lo que su interpretación no es sencilla. Este inconveniente se soluciona mediante la variable normalizada  $U^*$  que se presenta a continuación.

**La variable normalizada  $U^*$**  La variable  $U^*$  se expresa de la siguiente forma:

$$U^* = \frac{(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \sim W(0, 1, \beta^*). \quad (3.15)$$

De nuevo, esta variable se puede expresar en su forma dimensional:

$$U = \frac{(\log(N) - B)(\log(\Delta\sigma) - C) - \lambda}{\delta} \sim W(0, 1, \beta). \quad (3.16)$$

Como puede verse, la variable  $U^*$  simplemente es una transformación de la variable  $V^*$  a partir de sus parámetros  $\lambda^*$  y  $\delta^*$ , mediante lo cual se consigue establecer una referencia y un rango fijos de la transformación, facilitando considerablemente su comprensión. Asimismo, se puede establecer de forma sencilla una relación entre valores que toma la variable y su probabilidad de fallo asociada.

**La variable normalizada  $Z^*$**  La variable aleatoria  $Z^*$  es la tipificación de la variable  $\log(N)$ , y se expresa de la siguiente forma:

$$Z^* = \frac{\log(N) - \mu_i}{\sigma_i} \sim W(\lambda', \delta', \beta'), \quad (3.17)$$

siendo  $\mu_i$  y  $\sigma_i$  la media y la desviación típica de la variable  $\log(N)$ , respectivamente. La nueva distribución de Weibull tiene de media  $\mu_{Z^*} = 0$  y  $\sigma_{Z^*} = 1$ .

Esta normalización es totalmente general, es decir, no requiere ningún modelo de ajuste en particular para su aplicación. No obstante, si suponemos que  $\log(N)$  sigue una distribución de Weibull y que el modelo de ajuste es el modelo de Castillo y Fernández Canteli, los parámetros  $\mu_i$  y  $\sigma_i$  no son independientes para cada nivel, puesto que este supuesto entraría en conflicto con el método. Las ecuaciones de la distribución normalizada son las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda_i - \mu_i}{\sigma_i} = \frac{-\Gamma(1 + 1/\beta)}{\sqrt{\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)}} \\ \delta' &= \frac{\delta_i}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)}} \\ \beta' &= \beta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como se puede comprobar, al tener las distribuciones de cada rango de tensiones el mismo parámetro de forma  $\beta$ , todas ellas se transforman en la misma distribución. Por lo tanto, se requiere previamente obtener el parámetro  $\beta$  del modelo, además de los parámetros  $B$  y  $C$  de la distribución normalizada. Una vez hallados se obtienen los parámetros de las distribuciones de Weibull correspondientes a cada rango de tensiones mediante la aplicación de las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= B + \frac{\lambda'}{g(\Delta\sigma_i) - C} \\ \delta_i &= \frac{\delta'}{g(\Delta\sigma_i) - C} \\ \beta_i &= \beta'. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, el cálculo de  $\mu_i$  y  $\sigma_i$  es inmediato, lo que permite realizar la normalización.

**La variable normalizada  $R^*$**  Una variación de la variable  $Z^*$  es la variable normalizada  $R^*$ , que se define mediante la siguiente ecuación:

$$R^* = \frac{\log(N) - \lambda_i}{\delta_i} \sim W(0, 1, \beta). \quad (3.20)$$

Al igual que la variable  $U^*$ , la variable  $R^*$  requiere del conocimiento previo de los parámetros del modelo. Presenta la ventaja de tener un rango y dispersión fijos, lo cual es una ventaja notable para establecer la relación entre la variable normalizada y la probabilidad de fallo.

### 3.4. Comentarios acerca de la dispersión en el campo S-N

La experiencia demuestra que la dispersión en los ensayos experimentales aumenta a medida que se reduce el rango de tensión considerado. Incluso representando el campo S-N en escala doblemente logarítmica (transformación realizada con el doble objetivo de ajustar los datos mediante una regresión lineal y obtener una dispersión constante de los datos para cualquier rango de tensión considerado) la desviación típica de los datos muestrales provenientes de ensayos tiende a aumentar considerablemente para valores próximos al límite de endurancia del material <sup>1</sup>. Una explicación se debe al hecho de que a altos rangos de tensión, la etapa de nucleación es superada rápidamente, debido a que las grietas se generan con mayor rapidez, por lo que la dispersión asociada a la etapa de nucleación se reduce considerablemente. No obstante, en ensayos a rangos de tensión menores, la etapa de nucleación es mucho más extensa en la vida del elemento, lo que aumenta la dispersión asociada con los aspectos superficiales.

Un aspecto a destacar acerca del fenómeno de la dispersión se refiere al hecho de que la mayoría de los datos existentes provienen de ensayos realizados en laboratorio, bajo unas condiciones ambientales determinadas, obtenidos generalmente mediante cargas de amplitud constante y con elementos estructurales que suelen presentar mayores estándares de calidad en su fabricación, por lo que la dispersión obtenida a partir de estos ensayos puede no ser extrapolable a elementos estructurales fabricados en serie y sometidos a espectros de cargas reales de amplitud variable. Además, las probetas entalladas utilizadas en laboratorio suelen contener entallas con altos valores de  $K_t$  (*factor de concentración de tensiones*) para acelerar el inicio de la grieta y minimizar los elevados costes de realización que tienen los mismos, lo que conlleva una corta etapa de nucleación de grieta y, por lo tanto, valores de dispersión relativamente menores que los asociados a componentes estructurales.

La figura 3.3 muestra diferentes ensayos realizados a uniones remachadas a amplitud constante (círculos vacíos) y amplitud variable (círculos llenos) [68]. En ella se puede observar la tendencia creciente de la desviación típica de la variable  $\log(N)$  en relación a la vida a fatiga del elemento en los ensayos a amplitud constante, mientras que los ensayos a amplitud variable presentan una dispersión constante de sus datos, independiente del número de ciclos transcurridos.

Los datos ensayados a amplitud constante demuestran la explicación comentada anteriormente; los ensayos con más duración fueron realizados a valores menores de rangos de tensión, lo que aumenta el tiempo de nucleación de la grieta, aumentando la dispersión del ensayo. Al contrario, los ensayos de menor duración fueron realizados a valores de carga mayores, disminuyendo el tiempo de nucleación de grietas y la dispersión asociada en esta etapa.

Para el caso de ensayos realizados bajo espectros de carga de amplitud variable, la figura

---

<sup>1</sup>En la presente tesis doctoral se diferencia entre límite de fatiga y límite de endurancia de un material, considerando que el primero está referido a un número de ciclos determinado, mientras que el segundo se corresponde con el valor asintótico.

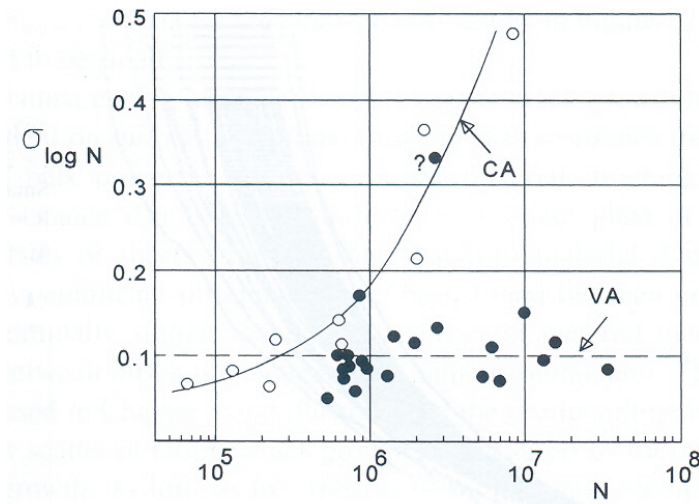


Figura 3.3: Evolución de la dispersión en ensayos a carga constante y variable [68].

muestra una tendencia constante para el valor de la dispersión, independiente de la vida del componente estructural considerado. Además, se observa cómo la dispersión para amplitud variable tiene el mismo orden de magnitud que la correspondiente a altos rangos de tensión en amplitud constante. Esto se debe a que los picos de tensión generados en amplitud variable son los iniciadores de la etapa de nucleación, por lo tanto, dichos ciclos son los reguladores de la dispersión en amplitud variable. No obstante, aunque el gráfico muestre que ambos valores de dispersión (amplitud variable y amplitud constante a bajo número de ciclos) tienen un mismo orden de magnitud, no es posible establecer predicciones fiables de la primera en función de la segunda [69].

Aparte de lo comentado anteriormente, otros factores que contribuyen a aumentar la dispersión del modelo son, entre otros, las incertidumbres y errores en la estimación de las propiedades del material, errores cometidos en la aplicación de los ensayos experimentales, etc.

### 3.5. Consideraciones acerca de las distribuciones estadísticas de los modelos probabilistas

La elección de una distribución estadística idónea para abordar el problema de la fatiga de materiales debe responder a criterios físicos propios del fenómeno. Mientras que existen campos de investigación donde prima el interés sobre los valores medios de las distribuciones, otros fenómenos físicos requieren la aplicación de la teoría estadística de extremos por la propia naturaleza del fenómeno. Como ejemplos se pueden citar el cálculo de plataformas off-shore, construcción de presas y diques, el estudio de la resistencia estática de un material, etc. En todos estos campos se requiere un análisis de valores extremos, ya sea para realizar estimaciones de probabilidad acerca de la altura máxima del oleaje, probabilidad de exceder un nivel máximo de las aguas en el cálculo de un dique o presa o la resistencia mínima de un cierto material. Es evidente que en todas estas situaciones, los valores medios de las variables no tiene especial interés, debido a que los valores susceptibles de causar situaciones

indeseables son los valores máximos de las cargas, viento, oleaje, etc. y los mínimos de la resistencia, tanto estática como dinámica.

En el fenómeno de la resistencia a fatiga de un material, es evidente el componente aleatorio del mismo. Desde un punto de vista práctico interesa el estudio de los valores de resistencia mínima de un componente más que su valor medio, por lo tanto la distribución de probabilidad idónea para modelizar este fenómeno debe de ser una distribución de mínimos [11]. Si se considera  $X = (x_{1:n}, \dots, x_{n:n})$  una población ordenada de tamaño  $n$  con una función de distribución  $F(x)$ , entonces la función de distribución para el menor estadístico de orden es:

$$L_n(x) = 1 - [1 - F(x)]^n. \quad (3.21)$$

A partir de esta consideración se enuncia el *principio del eslabón más débil*, donde el valor  $n$  se asimila al número de subelementos no solapados que forman un elemento completo objeto de estudio. La función de distribución del elemento completo será  $L_n(x)$  mientras que la correspondiente a los subelementos es  $F(x)$ . Esta hipótesis permite aplicar un modelo de fatiga a elementos independientemente de su escala, siempre y cuando  $L_n(x)$  sea válida para cualquier valor de  $n$ , incluyendo cuando  $n$  tiende a infinito, por lo que interesa una distribución límite de mínimos. No obstante, cuando el valor de  $n$  tiende a infinito, la función  $L_n(x)$  adopta los valores 0 o 1, dependiendo del valor de la función  $F(x)$ . Para evitar la degeneración de la función, se recurre a una transformación de la variable  $x$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n + d_n x) = L(x). \quad (3.22)$$

Se demuestra [84, 23, 25] que existe una única familia no degenerada de distribuciones que cumplen la ecuación 3.22. Dicha familia incluye las distribuciones de mínimos de Weibull, Gumbel y Fréchet. No obstante, la distribución de Fréchet queda descartada en fatiga por razones físicas.

Si se consideran aspectos físicos del problema de fatiga, la experiencia demuestra cómo las variables  $\log(N)$  y  $\log(\Delta\sigma)$  están acotadas inferiormente. De las 3 familias de distribuciones comentadas anteriormente, la distribución de Weibull es la única que cumple esta condición. No obstante, también es apropiado considerar la distribución de mínimos de Gumbel, debido a que en la cola izquierda de la distribución de Gumbel (zona de interés) tiende hacia una distribución de Weibull.

Estos planteamientos muestran cómo las distribuciones de mínimos de Weibull de 3 parámetros y de Gumbel son, a priori, las que pueden modelizar de una forma más realista el fenómeno de la fatiga.

### 3.6. Valoraciones de los métodos deterministas

En el presente apartado se establecen una serie de valoraciones aplicables a los modelos deterministas en general y a los expuestos en el apartado 2.3 en particular:

- El modelo de Basquin en escala natural (es decir, el modelo de Wöhler) está compuesto por una hipérbola sin asíntotas. Por lo tanto, el modelo matemático no refleja la realidad física de la existencia de un límite de fatiga o valor de rango de tensión para el

cual la vida a fatiga del componente es infinita. Esta realidad es solventada mediante la incorporación de los valores asintóticos  $\Delta\sigma_0$  y  $N_0$  en algunos de los modelos expuestos en el capítulo 2.3.1. No obstante, la inclusión de los valores asintóticos en el modelo requiere de algoritmos de optimización de funciones para la estimación de los parámetros, los cuales requieren un esfuerzo extra de computación y pueden dar problemas de convergencia, así como de aparición de mínimos locales. No obstante, dichos modelos pueden ser considerados de más calidad que los que no incorporan esas realidades físicas.

- La experiencia en el campo de la fatiga muestra cómo a altos rangos de tensión los datos muestran un zona de curvatura negativa (convexa). Dicha zona no puede ser modelizada correctamente por los modelos de Basquin y Strohmeier.
- El rango de tensión de un componente sometido a fatiga está limitado superiormente por el valor de su valor de resistencia estática. No obstante, los modelos de Basquin, Strohmeier y Palmgren no reflejan esta realidad física al no estar acotados superiormente.
- Ninguno de los métodos expuestos aportan información alguna acerca de la probabilidad de fallo del componente y, puesto que el fenómeno de la vida a fatiga de un elemento estructural es intrínsecamente estocástico, no es aceptable un método que no sea capaz de generar diferentes curvas de ajuste en función de una probabilidad de fallo determinada.
- La mayoría de los modelos existentes presentan limitaciones debido a la dimensionalidad de sus variables, es decir, el hecho de operar con variables dimensionales hace que las constantes de los métodos no sean universales para un mismo material o detalle constructivo considerado, sino que varíen en función de las unidades consideradas en las variables.
- Imposibilidad de utilización de datos censurados provenientes de probetas supervivientes (*run outs*) en la estimación de los parámetros del modelo.

### 3.7. Valoraciones de los modelos probabilísticos

Los modelos probabilísticos pueden ser considerados como más evolucionados que los modelos deterministas, debido a que consideran una realidad física inherente al fenómeno considerado, como es la consideración estocástica del mismo. No obstante, estos métodos no están exentos de algunas debilidades más o menos evidentes, tales como la suposición de que la dispersión es constante en el modelo de Spindel y Haibach para cualquier nivel de tensión, lo cual contradice una realidad física contrastada por los resultados experimentales. Asimismo, todos los modelos comentados anteriormente, a excepción del modelo de Castillo y Fernández Canteli, consideran algún parámetro dimensional, lo cual puede tender a incrementar la complejidad del modelo considerado innecesariamente. Además, los modelos de Pascual-Meeker y Bastenaire consideran diferentes asíntotas, es decir, diferentes límites de fatiga en función de la probabilidad considerada, lo cual parece ser una hipótesis no suficientemente fundamentada. Además, el número de ensayos necesarios para obtener un resultado



fiable hacen que el método sea costoso en su aplicación. Finalmente, los propios autores del modelo de Castillo y Fernández Canteli han establecido una serie de debilidades que tiene el mismo [8], como son que la hipótesis del eslabón más débil requiere la independencia de las vidas de los sub-elementos que componen el elemento total. Esta hipótesis no siempre puede asegurarse para elementos de pequeña longitud o volumen. Por otro lado, el modelo únicamente es aplicable en la región de alto número de ciclos, debido a que no contempla la curvatura negativa que presentan los datos experimentales para bajo número de ciclos. Esta limitación está presente en el resto de modelos considerados.

### 3.8. Conclusiones

A continuación se resumen brevemente las principales conclusiones obtenidas en el presente capítulo.

- La vida de un elemento sometido a fatiga conlleva un alto grado de aleatoriedad, debido a las numerosas variables que afectan al fenómeno. No obstante, independientemente del tipo de material y carga considerados, existen diversos patrones de comportamiento que son implícitos al mismo. La consideración de dichos patrones para la formulación de un modelo de ajuste de los datos experimentales aumenta su consistencia y fiabilidad, permitiendo modelizar de una manera más fiable el comportamiento a fatiga del material.
- Los modelos de ajuste de fatiga se pueden dividir en 2 grupos: deterministas y probabilistas. Los primeros aportan información mediante una única curva S-N, mientras que los segundos proporcionan la totalidad del campo S-N mediante diferentes curvas percentiles.
- Los modelos deterministas presentan la ventaja de la simplicidad en su aplicación. No obstante, la no consideración de realidad estadística del fenómeno limita considerablemente las posibilidades de estos modelos, haciéndolos poco útiles si se pretende realizar un estudio serio y riguroso del fenómeno.
- En los modelos de ajuste probabilistas, el tratamiento conjunto de los datos experimentales se realiza mediante un procedimiento de normalización, consistente en transformar los datos provenientes de diferentes rangos de tensión para su tratamiento estadístico conjunto. El proceso se realiza mediante la utilización de una variable normalizada. La formulación de dicha variable depende del modelo de ajuste estadístico considerado.
- El tratamiento de los datos, una vez normalizados, requiere de su ajuste mediante una distribución de probabilidad. La elección de dicha distribución debe de responder a criterios físicos propios del fenómeno. La aceptación del principio del eslabón más débil sugiere la utilización de distribuciones de extremos mínimos, tales como la distribución de Weibull o Gumbel.



## Capítulo 4

# *Fatiga bajo carga de amplitud variable*

### 4.1. Introducción

La fiabilidad de un elemento estructural sometido a fatiga depende de su resistencia a tales solicitaciones. Las curvas S-N de cualquier material son obtenidas mediante ensayos realizados bajo cargas de amplitud constante. No obstante, las cargas de servicio reales suelen ser cargas de amplitud variable. Es en estas situaciones donde conceptos como espectro de tensiones, índices de daño, rango de tensión equivalente y descenso del límite de endurancia cobran especial importancia, las cuales son objeto de estudio y análisis en el presente capítulo. Finalmente se exponen algunas conclusiones obtenidas.

### 4.2. El espectro de tensiones

En el cálculo de cualquier elemento sometido a fatiga, se requiere una estimación inicial acerca de las cargas a las que estará sometido el elemento durante su vida útil. Si bien es cierto que el ensayo de carga de amplitud variable más sencillo es someter al elemento a programas de carga por bloques, la similitud de este tipo de cargas con las cargas de servicio suele no ser excesivamente alta. Por lo tanto, con intención de obtener un espectro de cargas lo más cercano al de servicio del elemento, es necesario efectuar previamente mediciones en condiciones reales de operación. Esto no siempre es posible, debido a la aleatoriedad de las cargas o bien por la dificultad que conlleva, en algunos casos, realizar ese tipo de mediciones.

Existen 2 tipos de cargas que pueden actuar sobre un elemento a fatiga:

- Cargas deterministas.
- Cargas aleatorias.

Las primeras se definen como cargas que están definidas, tanto en magnitud como en sus tiempos de actuación. Las cargas a las que se somete un depósito a presión o las generadas por ciertos motores son altamente deterministas. Las segundas se refieren a cargas que deben ser estimadas a partir de modelos probabilísticos, debido a su fuerte componente aleatorio. La fuerza del viento sobre una valla publicitaria y la fuerza generada por olas sobre plataformas

offshore son buenos ejemplos de cargas aleatorias. Existen procedimientos para estimar distribuciones de probabilidad de este tipo de cargas (la recomendación práctica DNV-RP-C203 establece una distribución de Weibull de 2 parámetros para obtener la probabilidad de exceder una cierto rango de tensión en plataformas off-shore). En ocasiones, se aplican diferentes procedimientos [22] mediante los cuales, a partir de mediciones *in situ*, se obtiene la evolución del rango de tensiones en los puntos considerados, es decir, se lleva a cabo una *realización* de un proceso aleatorio, lo que permite registrar la historia de carga durante un cierto periodo temporal. La carga registrada se conoce como *pseudo-aleatoria*, debido a que si el tiempo de registro es lo suficientemente elevado, permite extraer los parámetros estadísticos de la carga generada sobre el elemento.

Un *método de conteo de ciclos* es un procedimiento que permite la transformación de una historia de tensiones de amplitud variable mediante su agrupamiento en varios bloques de amplitud constante. Existen diferentes métodos, siendo los más conocidos el método de la gota de lluvia (método rainflow) o método del depósito. No obstante, la forma de obtener y gestionar la información del espectro de tensiones difiere del tipo de carga considerada, tal y como se muestra en la figura 4.1.

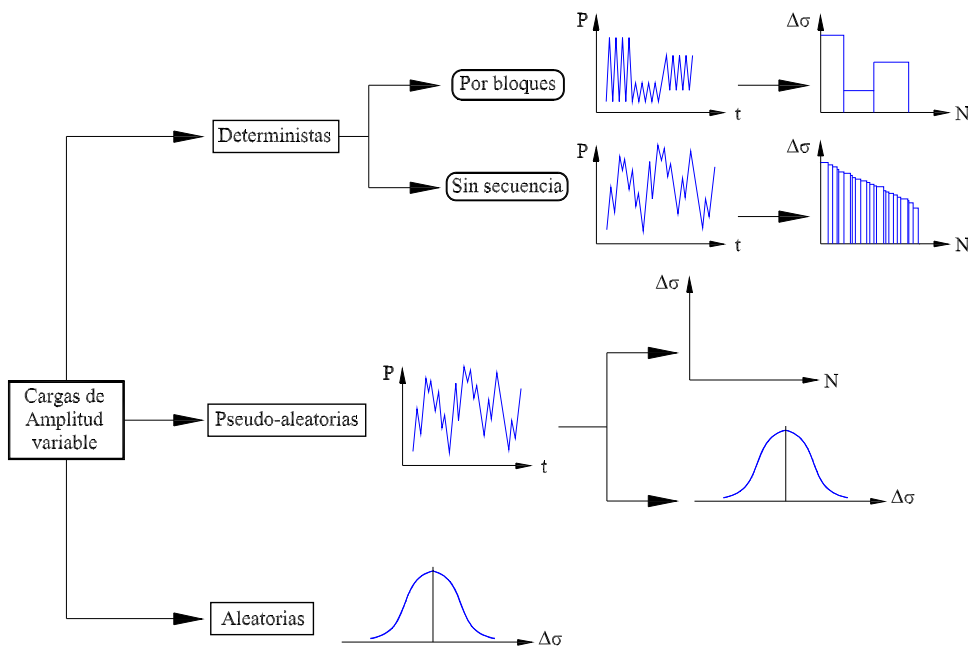


Figura 4.1: Diferentes espectros de cargas obtenidos a partir de diferentes tipos de cargas.

Las cargas de amplitud variable de tipo determinista pueden dividirse en cargas por bloques o cargas sin una secuencia definida. Las primeras son un caso muy particular y permiten obtener un espectro de tensiones discreto que conserva la secuencia de la historia de cargas. Asimismo, en las cargas deterministas sin secuencia definida, la aplicación de métodos de conteo de ciclos permiten la obtención de un espectro de tensiones continuo. Los rangos de tensión en dicho espectro se suelen representar de mayor a menor rango, sin que ello muestre una determinada secuencia de carga en el elemento.

Si se parte de una historia de cargas pseudo-aleatoria, se pueden establecer 2 tipos de

tratamiento de dicha información (figura 4.1). Al igual que en las cargas de amplitud variable de tipo determinista, se obtiene un espectro de tensiones continuo mediante la aplicación de un método de conteo de ciclos. Nuevamente, la ordenación del espectro es una mera representación y no responde a una secuencia real de aplicación de la carga. Otra posibilidad es el tratamiento de los datos desde un punto de vista estadístico, para lo cual se pueden considerar métodos para la obtención de una función de distribución del rango de tensiones, como por ejemplo el método de conteo de cruces de nivel [69].

Finalmente, para las cargas completamente aleatorias se requiere recurrir a métodos estadísticos para la obtención de una función de probabilidad aproximada de la variable  $\Delta\sigma$ .

La diferencia en la obtención del espectro de tensiones y el mantenimiento, o no, en el mismo de la secuencia de carga real, es importante desde el punto de vista del daño acumulado por el elemento.

El espectro de tensiones supone la información básica a partir de la cual se diseña un elemento a fatiga. No obstante, el tratamiento posterior de dicha información depende del tipo de carga generadora del espectro.

#### 4.2.1. Valoraciones acerca del espectro de tensiones

Si bien es cierto que el espectro de tensiones condensa la información proveniente de la historia de carga y facilita su comparación con la información de cálculo existente, como pueden ser las curvas S-N, dicho espectro puede omitir información acerca de la secuencia de las cargas o mantener dicha información. Por lo tanto, la utilidad que se obtenga posteriormente mediante el tratamiento adecuado de dicho espectro, depende del tipo de carga considerada.

Para cargas de amplitud variable de tipo determinista por bloques, el espectro refleja toda la información proveniente de la historia de cargas, siempre y cuando no se proceda en el mismo a reordenar los bloques de cargas de mayor a menor rango de tensión, como se suele hacer habitualmente. Si se lleva a cabo esta acción, se pierde la secuencia de la carga y una información valiosa para proceder posteriormente a una correcta evaluación del elemento.

No obstante, pueden plantearse otros muchos casos; la figura 4.2 muestra, a modo de ejemplo, el caso de 2 historias de cargas que se transforman en un mismo espectro de tensiones. No obstante, los procesos de generación de daño sobre el elemento en ambos casos pueden ser completamente diferentes.

Experimentalmente se han constatado notables diferencias en la vida de los elementos sometidos a diferentes programas de generación de cargas correspondientes un mismo espectro [34]. La transformación de una historia de cargas a un espectro de tensiones se realiza, en algunos casos, con una importante pérdida de información. En estos casos, el cálculo a fatiga del elemento considerado a partir de su espectro de tensiones debe de realizarse con sumo cuidado.

Aparte de lo comentado anteriormente, se debe hacer una reflexión referente a los diferentes métodos de conteo de ciclos existentes, dado que en función del método aplicado, una misma historia de cargas se puede transformar en diferentes espectros de tensiones, lo que se traduce a diferentes análisis del elemento desde el punto de vista de la resistencia del elemento y del daño acumulado por el mismo.

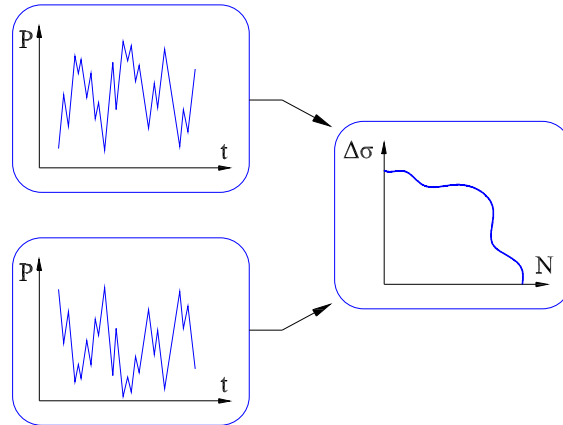


Figura 4.2: Ejemplos de diferentes historias de cargas que producen un mismo espectro de tensiones.

### 4.3. Modelos de acumulación de daño

Un *modelo de acumulación de daño* es un procedimiento que permite cuantificar el grado de deterioro de un elemento sometido a una determinada carga, ya sea de amplitud constante o variable. La aplicación de los modelos de acumulación de daño basados en el conocimiento del campo S-N, requieren previamente el conocimiento de:

1. Un índice de daño, es decir, una variable basada en una determinada formulación que permita cuantificar el grado de deterioro del elemento en función de la carga aplicada sobre el mismo.
2. Una curva S-N, la cual se tomará como referencia de los valores proporcionados por el índice de daño.

Los modelos de daño clásicos basados en los anteriores requerimientos proporcionan un determinado valor de índice de daño, el cual debe reflejar el grado de deterioro acumulado por un elemento bajo un determinado estado tensional. No obstante, el valor proporcionado por el índice de daño no siempre es fácilmente interpretable. Castillo y Fernández Canteli [8] han propuesto una serie de requisitos que debe cumplir un índice de daño a fatiga:

- Debe aumentar proporcionalmente al grado de deterioro existente sobre el elemento.
- Debe aportar información clara sobre el nivel de daño acumulado por el elemento, es decir, debe de ser fácilmente interpretable.
- Una índice adimensional evita confusiones producidas por variación de las unidades de medida y facilita la comparación de daño entre diferentes elementos.
- Debe ceñirse a un rango fijo y conocido, de manera que el extremo inferior del rango se asocie a una situación de daño inexistente del elemento y el extremo superior del rango a la situación de colapso o fractura del mismo.

La consideración de estos requisitos a la hora de formular un índice de daño permite que el valor obtenido sea útil y fácilmente interpretable, facilitando su comprensión. Seguidamente se exponen algunos parámetros indicadores de daño y se analiza su grado de adecuación en función de los requisitos comentados anteriormente:

- **Longitud de grieta:** Debido a que la forma más relevante en que se manifiesta el daño que produce la fatiga a una estructura, una manera inmediata es asociar el nivel de daño con la longitud de la grieta generada.
- **Número de ciclos transcurridos:** Si se considera que el daño por fatiga aumenta con el número de ciclos transcurridos a un determinado nivel, el tiempo de vida a fatiga de un determinado componente se puede considerar como una medida de cuantificación de daño. No obstante, esta forma de cuantificar daño a fatiga plantea serios inconvenientes con los ciclos realizados a rangos de tensión menores que el límite de fatiga del material, los cuales no generan daño sobre el elemento y sin embargo, aumentarían el valor de la medida de daño.
- **Número de ciclos hasta la rotura:** Esta medida de daño presenta serias dificultades, debido a que para definirla se requiere estimar previamente el número de ciclos hasta la fractura del elemento, lo cual puede ser difícil en algunos casos, como por ejemplo en fatiga a alto número de ciclos donde la elevada dispersión dificulta la obtención de dicho valor. Además, presenta problemas de no ser creciente con el daño generado sobre el elemento.
- **Relación entre áreas:** Desde un punto de vista fenomenológico y teniendo en cuenta que una grieta pasante generada por fatiga disminuye la sección útil del elemento considerado, Lemaitre [46] considera la relación entre el área del elemento agrietado y su área original antes de empezar el proceso de fatiga, como un parámetro indicador de daño.
- **Incremento de temperatura generada por el proceso de fatiga sobre el elemento:** Mediante la observación empírica del aumento de temperatura que experimenta cualquier elemento sometido a fatiga, La Rosa y Risitano [40] han desarrollado un modelo termográfico para la obtención del límite de fatiga de un material. Además, la experimentación muestra cómo en la generación de grietas en un elemento (proceso que más claro evidencia la generación de daño a fatiga) se produce simultáneamente un aumento de la temperatura generada por el elemento en dicha grieta. Por lo tanto, dicho aumento de temperatura experimentado puede considerarse como un indicador del daño a fatiga alcanzado en el elemento. No obstante, esta variable presenta serias limitaciones, como es el no disponer de un rango fijo y problemas a la hora de adoptar un punto o zona para efectuar dicha medición. Además, un elemento que temporalmente no se encuentre sometido a fatiga puede permanecer a temperatura ambiente y sin embargo haber acumulado previamente un importante daño que la variable  $\Delta T$  no manifestará.
- **VARIABLES NORMALIZADAS:** En apartados anteriores se ha comentado cómo diferentes modelos probabilísticos para la obtención del campo S-N consideran variables normalizadas para el tratamiento de los datos provenientes a diferentes niveles. Algunas de

esas variables tales como  $V^*$ ,  $U^*$ ,  $Z^*$  y  $R^*$  utilizadas conjuntamente con el Modelo de Castillo y Fernández Canteli pueden ser utilizadas como indicadores de daño.

- **Probabilidad de fallo:** La base de los modelos estadísticos para la determinación del campo S-N o  $\varepsilon$ -N es proporcionar una función de densidad probabilística del tiempo de vida para un determinado rango de tensión, por lo tanto, una forma de cuantificar el daño a fatiga es mediante la probabilidad de fallo que tiene un elemento transcurrido un determinado número de ciclos. Debido a que es el único índice que verifica todas los requerimientos exigibles a un índice de daño comentados anteriormente, puede considerarse como la mejor elección para su utilización por un modelo de acumulación de daño.

Seguidamente se exponen diferentes consideraciones respecto del índice más utilizado en los modelos de acumulación de daño, es decir, el número de Miner.

#### 4.4. Un modelo de acumulación de daño lineal. La regla de Miner

Los modelos de acumulación de daño constituyen el método de evaluación a fatiga más utilizado cuando se consideran cargas de amplitud variable. Estos modelos permiten hacer transferencias de número de ciclos entre diferentes rangos de tensión bajo la hipótesis de que el daño permanezca constante. La base de un modelo de acumulación de daño es el conocimiento de la curva (o campo) S-N, un espectro de tensiones y la aplicación de un índice de daño, siendo los más conocidos el número de Miner [57, 61] y el rango de tensión equivalente. El conocimiento de una curva S-N proporciona una interpretación determinista del índice de daño, mientras que el conocimiento de un campo S-N permite una interpretación estadística del mismo. Miner introduce la idea de que el daño a fatiga es consecuencia del trabajo absorbido por el material, suponiendo que dicho trabajo es proporcional al número de ciclos transcurridos [70]. El número de Miner se expresa como una relación entre 2 valores de número de ciclos, donde el numerador expresa los ciclos transcurridos a un determinado rango de tensiones y el denominador expresa un valor de referencia para ese mismo rango, es decir:

$$M = \frac{N}{N_{ref}}. \quad (4.1)$$

La anterior expresión ha sido ampliamente utilizada como medida de acumulación de daño de elementos sometidos a fatiga debido a su fácil interpretación y utilización, intentando describir cuantitativamente el concepto de acumulación de daño a fatiga mediante un único parámetro. El número de Miner no considera la secuencia del espectro de cargas para el cálculo de la vida del elemento. Además, si el elemento tuviera algún tipo de defecto (interno o externo, microestructural o macroestructural debidos a inclusiones, corrosión, etc) la vida del elemento sería significativamente menor a la esperada en base a la regla de Miner. Su aplicación requiere el conocimiento de la curva o campo S-N para obtener un valor de referencia de número de ciclos asociado a un rango de tensiones determinado.



Si el elemento estructural está sometido a un espectro de cargas de amplitud variable discreto, el número de Miner permite cuantificar el daño acumulado por el elemento para cada rango de tensiones considerado, estableciendo una hipótesis de acumulación de daño lineal, tal y como expresa la ecuación 4.2 <sup>1</sup>:

$$M_{ref} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{ref_i}}. \quad (4.2)$$

En caso de considerar un espectro de cargas de amplitud variable continuo, la regla de Miner adopta la siguiente forma:

$$M_{ref} = \int f(N) dN, \quad (4.3)$$

donde la función  $f(N)$  depende del modelo de ajuste utilizado para el campo S-N.

#### 4.4.1. La regla de Miner y el espectro de tensiones

Aparte del conocimiento del campo S-N, para la aplicación de la regla de Miner se requiere un espectro de tensiones. Tal y como se ha expuesto en el capítulo 4.2, existen diferentes tipos de espectros de tensiones en función de las cargas de las que provienen:

- **Espectros de tensiones provenientes de cargas de amplitud variable por bloques:** estos espectros de tensiones permiten conservar la secuencia de cargas que actúan sobre el elemento. Debido a que la regla de Miner no considera dicha secuencia para el cálculo del daño acumulado, no parece un buen método para aplicar con este tipo de espectros. Un ejemplo de lo anterior se puede visualizar en la figura 4.3 donde se muestran diferentes ensayos de carga por bloques realizados sobre probetas entalladas. Los valores del número de Miner para cada uno de los bloques de carga es el mismo, debido a que se ha procedido a una reordenación de la secuencia de aplicación de las cargas y, por lo tanto, teóricamente el fallo del elemento debería de producirse para un mismo número de ciclos, independientemente de la secuencia de bloques escogida. No obstante, se comprueba cómo la secuencia de cargas *menor*  $\rightarrow$  *mayor* produce la fractura total del elemento para un  $M \simeq 0,55$ , mientras que la secuencia *mayor*  $\rightarrow$  *menor* supera el valor de  $M = 1$ , produciéndose más tarde el fallo del elemento.

La figura 4.3 muestra cómo la regla de Miner no siempre es conservadora y que no tiene en cuenta el efecto secuencia de cargas, por lo que su aplicación en determinados casos debe de realizarse con suma precaución.

- **Espectros de tensiones provenientes de cargas de amplitud variable pseudo-aleatorias:** Al contrario que el caso anterior, estos espectros continuos no conservan información acerca de la secuencia de cargas considerada. En una historia de carga pseudo-aleatoria, las sobrecargas tanto de tracción como de compresión producen retardos y aceleraciones en el crecimiento de la grieta por fatiga y, debido a ello, el efecto de interacción de cargas tenderá a perder influencia a lo largo del proceso [5]. Por lo tanto, la aplicación de un método de acumulación de daño que no tiene en cuenta dicho efecto no debería de contribuir a restar fiabilidad al cálculo del daño acumulado.

<sup>1</sup>el subíndice  $i$  representa un determinado rango de tensiones  $\Delta\sigma_i$

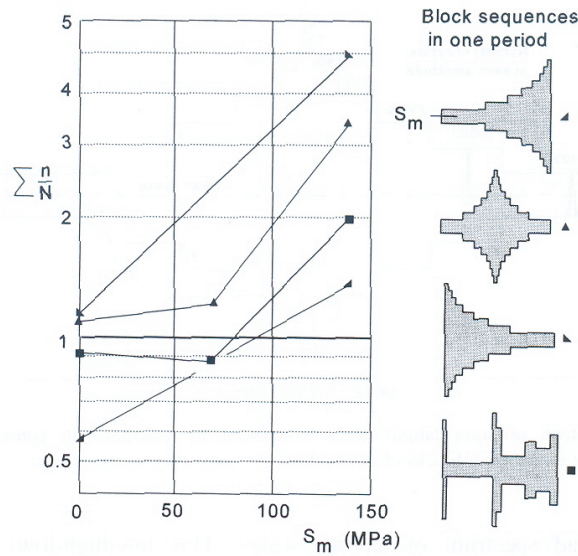


Figura 4.3: Secuencia de bloques con números de Miner en el momento de la fractura y su evolución con la tensión media considerada [59].

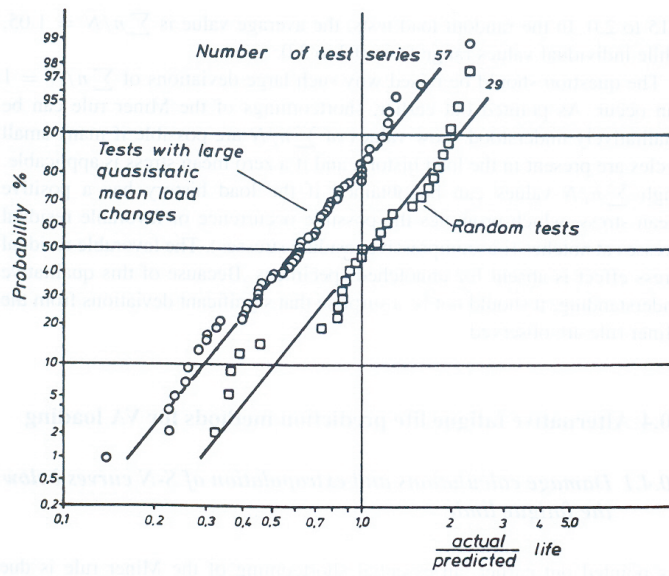


Figura 4.4: Comparación del número de Miner real y teórico para diferentes ensayos de amplitud de carga variable [71].

No obstante, existen afirmaciones que no concuerdan con esta teoría. La figura 4.4 muestra una recopilación realizada por Schütz [71] de diferentes ensayos sometidos a cargas de amplitud variable (57 corresponden a ensayos de amplitud variable con variaciones en la tensión media, mientras que 29 corresponden a ensayos realizados bajo carga de amplitud variable pero manteniendo constante la tensión media). En el eje de abscisas se muestra la relación existente entre los valores reales y estimados del número de Miner, representados en papel probabilístico normal. La figura muestra la alta dispersión existente entre estos valores, además de justificar de manera sólida

la consideración del número de Miner como variable aleatoria y no como un mero indicador determinista del nivel de daño de un elemento, como sucede habitualmente. Como puede comprobarse, los ensayos de amplitud variable que incluyen variaciones en la tensión media tienden a obtener menores valores de número de Miner que los realizados a tensión media constante. De la figura 4.4 se deduce que la aplicación del número de Miner en fatiga de amplitud variable debe de aplicarse con los márgenes de seguridad suficientes.

En cualquiera de los casos anteriores, la aplicación de cualquier modelo de acumulación de daño debe de llevarse a cabo teniendo en cuenta que tanto el campo S-N como el espectro de tensiones tienen que estar referidos a la misma tensión media. En caso de no ser así, debe establecerse las correcciones oportunas en el espectro de tensiones mediante las fórmulas de Goodman [28], Gerber [27] o Soderberg [73].

#### 4.4.2. Limitaciones de la Regla de Miner

El modelo de acumulación de daño propuesto por Miner tiene una serie de limitaciones que se exponen a continuación:

1. Se ha demostrado que la regla de Miner no siempre es conservadora. La figura 4.4 comentada anteriormente muestra cómo el valor medio del número de Miner correspondiente a la recopilación de 57 ensayos con variación tanto de rango de tensiones como de tensión media es de 0.6, con un rango de variación de 0.15 a 2. Para la recopilación de 29 ensayos manteniendo la tensión media del ensayo, se obtiene un valor medio del número de Miner de 1.05 con un rango de variación de 0.3 a 3.
2. No tiene en cuenta el efecto de secuencia de cargas y, como consecuencia, tampoco considera el efecto de interacción de cargas. No obstante, este hecho no tiene por qué considerarse una limitación si se consideran espectros de carga provenientes de cargas pseudo-aleatorias.
3. El número de Miner supone que el daño a fatiga puede definirse mediante un único valor que aglutina todos los mecanismos que producen el daño, tales como micro y macro deformación plástica, tensiones residuales, tamaño y forma del elemento considerado, rasgos fractográficos, fenómeno de cierre de grieta, etc.

#### 4.4.3. Modificaciones de la regla de Miner

Diversos autores han propuesto variaciones a la regla de Miner, con intención de considerar ciclos generados a rangos de tensión menores que el límite de endurancia de amplitud constante del material y que la experiencia demuestra que sí contribuyen a acumular daño sobre el elemento. Dichos modelos de acumulación de daño están basados en la modificación del diagrama S-N [56].

El procedimiento más sencillo consiste en extender el campo S-N por debajo del límite de endurancia de forma lineal y sin variación de la pendiente considerada. Se le conoce como *regla de Miner modificada*.

Haibach [29] ha propuesto una modificación de la regla de Miner mediante la consideración de un segundo tramo lineal por debajo del límite de fatiga en el diagrama S-N, cuya pendiente depende la pendiente del primer tramo ( $m' = 2m - 1$ ).

Otras modificaciones fueron propuestas por Corten y Dolan [15], la cual se basa en rotar la curva S-N con respecto al punto de mayor tensión que aparece en la historia de carga, pasando a considerar una ecuación del tipo  $N(\Delta\sigma)^{\beta m} = cte$ . La constante  $\beta$  toma valores entre 0.7 y 0.95 y se determina experimentalmente.

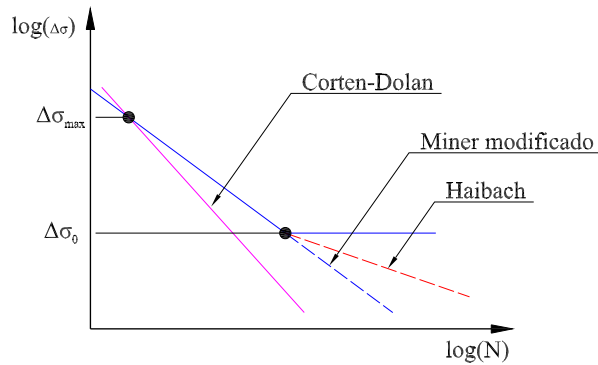


Figura 4.5: Modificaciones a la regla de Miner.

#### 4.4.4. Curvas iso-Miner e iso-probabilísticas

La regla de Miner se puede aplicar tanto a cargas de amplitud constante como variable. No obstante, es en el segundo caso donde resulta más acertada su aplicación. Debido a esto, la aplicación del número de Miner en fatiga de amplitud variable requiere la consideración de *desplazamientos* entre diferentes rangos de tensión, por lo que una propiedad muy deseable es que las curvas iso-Miner del modelo de ajuste sean también curvas de iso-probabilidad. Dicha propiedad resulta muy ventajosa, debido a que permite cuantificar valores de acumulación de daño para diferentes rangos de tensión manteniendo siempre la misma probabilidad de referencia asociada.

En la figura 4.6 se puede observar la diferencia entre variaciones iso-Miner = iso-probabilísticas y cuando no se cumple dicha propiedad. En la gráfica izquierda, las variaciones entre rangos de nivel (de  $\Delta\sigma_1$  a  $\Delta\sigma_3$  y de  $\Delta\sigma_3$  a  $\Delta\sigma_2$ ) dan como resultado que  $M_A = M_B$  y  $M_C = M_D$ , manteniendo en todo momento la misma probabilidad de referencia asociada. Esta propiedad no se cumple en la gráfica derecha, donde se muestra cómo  $M_A = M'_B$  y  $M_C = M'_D$  ( $M_A \neq M_B$  y  $M_C \neq M_D$ ), pero variando la probabilidad de referencia al considerar diferentes rangos de tensión.

Consideremos el modelo de ajuste de Basquin donde 2 curvas percentiles, pertenecientes al mismo campo S-N, se diferencian en su constante (figura 4.7). Si consideramos la curva 2 como la curva de referencia para el cálculo del número de Miner en el punto A, se obtiene:

$$M_A = \frac{N_1}{N_{Ref1}} = \frac{cte_1 \cdot (\Delta\sigma_1)^{-m}}{cte_2 \cdot (\Delta\sigma_1)^{-m}} = \frac{cte_1}{cte_2}. \quad (4.4)$$

Si se pretende pasar del rango de tensiones  $\Delta\sigma_1$  al rango de tensiones  $\Delta\sigma_2$  siguiendo una

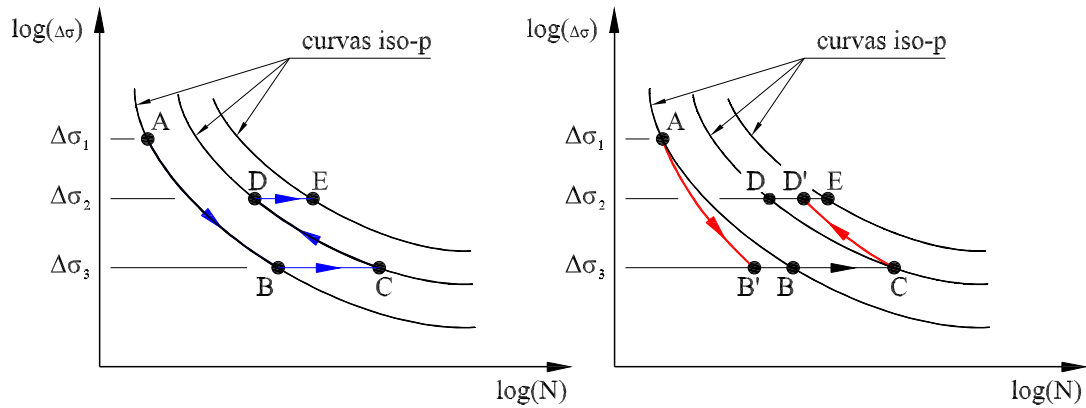


Figura 4.6: Comparación entre desplazamientos iso-Miner = iso-probabilísticos (izda) e iso-Miner  $\neq$  iso-probabilísticos (dcha) para un modelo de ajuste general.

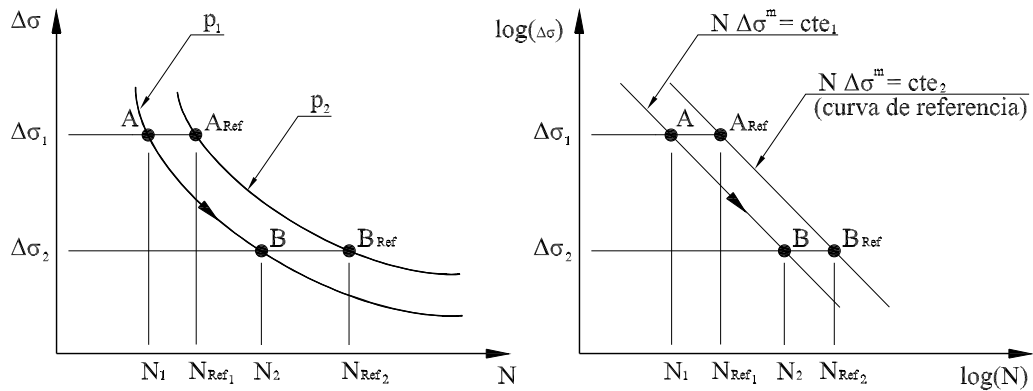


Figura 4.7: Desplazamientos iso-Miner = iso-probabilísticos para el modelo de ajuste de Basquin.

curva de iso-probabilidad del modelo, nos trasladamos al punto B, cuyo número de Miner será:

$$M_B = \frac{N_2}{N_{Ref_2}} = \frac{cte_1 \cdot (\Delta\sigma_2)^{-m}}{cte_2 \cdot (\Delta\sigma_2)^{-m}} = \frac{cte_1}{cte_2} = M_A, \quad (4.5)$$

luego, las curvas percentiles del modelo de Basquin también son curvas iso-Miner. Nótese que si se consideran 2 curvas no pertenecientes al mismo modelo de ajuste (del tipo  $N(\Delta\sigma)^p = cte_1$  y  $N(\Delta\sigma)^q = cte_2$ ) y se repite el desarrollo anterior, la propiedad anterior no se cumple ( $M_A \neq M_B$ ).

Es importante comentar que esta propiedad depende del modelo de ajuste que se esté considerando. Por lo tanto, si se considera un modelo de ajuste diferente al modelo de Basquin, las transformaciones iso-Miner realizadas no serán iso-probabilísticas y, por lo tanto, son de escasa utilidad. En este caso se hace necesario reformular el número de Miner para poder

asegurar la propiedad anteriormente descrita.

Algunos ejemplos para modelos de ajuste comentados anteriormente se exponen a continuación:

$$N = A \cdot (\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^{-m} \Rightarrow M_{ref} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{ref_i}}, \quad (4.6)$$

$$N - N_0 = A \cdot (\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^{-m} \Rightarrow M_{ref} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i - N_0}{N_{ref_i} - N_0}, \quad (4.7)$$

$$\log(N) = A \cdot \log(\Delta\sigma)^{-m} \Rightarrow M_{ref} = \frac{\log(N)}{\log(N_{ref})}, \quad (4.8)$$

$$\log(N) = A \cdot \log(\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^{-m} \Rightarrow M_{ref} = \frac{\log(N)}{\log(N_{ref})}, \quad (4.9)$$

$$\log(N - N_0) = A \cdot \log(\Delta\sigma - \Delta\sigma_0)^{-m} \Rightarrow M_{ref} = \frac{\log(N - N_0)}{\log(N_{ref} - N_0)}, \quad (4.10)$$

La definición del número de Miner expuesta en las ecuaciones 4.8 y 4.9 es similar al *índice de probabilidad de daño total "D"* propuesto por Fernández Canteli [20], donde se hace un estudio general de la variable y se comentan las condiciones requeridas para considerarla como variable de normalización en función del modelo de ajuste (modelo sin asíntota vertical), material considerado, etc.

La relación entre ambas variables se puede visualizar en la figura 4.8.

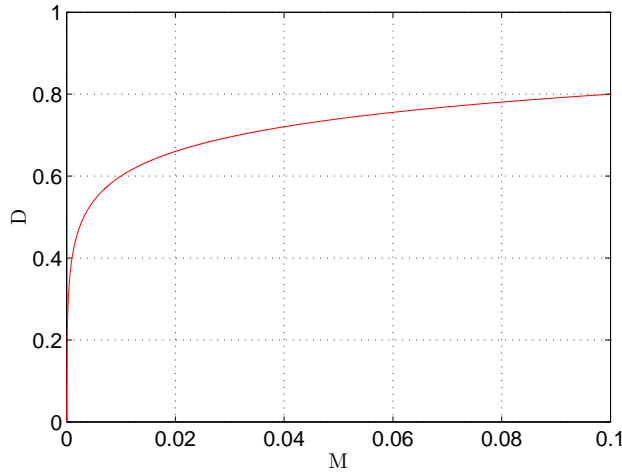


Figura 4.8: Relación entre el número de Miner y el índice de probabilidad de daño total para un  $N_{Ref} = 10^5$  de ciclos.

#### 4.4.5. Una formulación estadística para el número de Miner asociado al modelo de Castillo y Fernández Canteli

El tiempo de vida de cualquier componente estructural sometido a fatiga viene definido por una determinada distribución de probabilidad. Debido a esto, cualquier índice de acumulación

de daño basado en el número de ciclos transcurridos debería reflejar el componente estocástico del fenómeno. Un ejemplo muy clarificador de esta afirmación puede visualizarse en la figura 4.4.

Si para la aplicación del número de Miner se considera un campo S-N, los valores de referencia  $N_{ref_i}$  correspondientes a los denominadores del sumatorio de fracciones del índice de daño dependerán de la curva percentil adoptada, desapareciendo así la consideración de un valor único del número de Miner como referencia para considerar *seguro* un elemento tras un número de ciclos transcurridos. Asimismo, la consideración de un determinado valor de número de Miner por sí solo no aporta excesiva información, siendo necesario conocer la probabilidad de referencia asociada a la curva S-N utilizada para el cálculo del número de Miner. Por ejemplo, a partir de un valor  $M = 0,72$ , se pueden realizar las siguientes apreciaciones:

- Si se ha tomado como referencia las curvas de cálculo proporcionadas por el EC3 (asociadas a una probabilidad de referencia del 5%), un valor menor que la unidad implica que la probabilidad de fallo asociada al elemento es menor del 5%, lo cual no significa que la rotura no pueda producirse.
- Asimismo, si se han tomado como referencia las curvas de cálculo proporcionadas por la normativa noruega DNV-RP-C203 (asociadas a un 2.4% de probabilidad de fallo), un valor  $M = 0,72$  significa que la probabilidad de fallo del elemento es menor que 2.4%, siendo una probabilidad diferente a la del supuesto anterior.

Por lo tanto, debe de desecharse la creencia o aceptación generalizada de que un determinado valor de número de Miner por si solo significa que un elemento *rompe* o *no rompe*. Alternativamente, lo ideal es asociar un valor de número de Miner a una determinada probabilidad de rotura. Se puede afirmar que un número de Miner por si solo no significa nada, si no va asociado a una probabilidad de fallo. Es por tanto necesario recurrir a un enfoque estadístico del número de Miner que supere la tradicional visión determinista asociada al índice de daño.

En el presente apartado se propone una distribución estadística para un modelo de fatiga general como es el modelo de Castillo y Fernández Canteli comentado en el apartado 2.3.2. La formulación estadística propuesta parte de la distribución de probabilidad de la variable de normalización  $V$  utilizada por el modelo, esto es:

$$V = (\log(N) - B)(\log(\Delta\sigma) - C) \sim W(\lambda, \delta, \beta). \quad (4.11)$$

A partir de la ecuación 4.11, se obtiene la expresión de la distribución estadística para la variable  $\log(N)$  en función del rango de tensión  $\Delta\sigma$ :

$$\log(N) \sim W\left(\frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B, \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C}, \beta\right). \quad (4.12)$$

Considerando la expresión 4.12 conjuntamente con la 4.2 se obtiene:

$$\log(M_{ref}) \sim W\left(\frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B - \log(N_{Ref}), \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C}, \beta\right). \quad (4.13)$$

El término  $\log(N_{Ref})$  se refiere al logaritmo del número de ciclos de referencia elegido para obtener el número de Miner. Aplicando la ecuación 2.16 que proporciona las curvas percentiles del modelo en función de los parámetros de la distribución de Weibull de la variable de normalización  $V$  y considerando como referencia la curva media del campo S-N, se obtiene:

$$\log(N_{50\%}) = \frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B + \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C} [-\log(0,5)]^{1/\beta}. \quad (4.14)$$

Las expresiones 4.13 y 4.14 nos proporcionan la distribución de probabilidad del número de Miner para el modelo de ajuste de Castillo y Fernández Canteli, esto es:

$$M_{50\%} \sim \log W \left( \frac{\delta}{C - \log(\Delta\sigma)} [-\log(0,5)]^{1/\beta}, \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C}, \beta \right). \quad (4.15)$$

A partir de la ecuación 4.15 se halla la probabilidad de fallo del elemento considerado:

$$P_{fallo} = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{\log(M_{50\%}) - \frac{\delta}{C - \log(\Delta\sigma)} [-\log(0,5)]^{1/\beta}}{\frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C}} \right]^\beta \right\}, \quad (4.16)$$

$$\log(M_{50\%}) \geq \frac{\delta}{C - \log(\Delta\sigma)} [-\log(0,5)]^{1/\beta}.$$

Las ecuaciones 4.2 y 4.14 proporcionan el valor que adopta la variable aleatoria, esto es:

$$M_{50\%} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\exp \left( \frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B + \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C} [-\log(0,5)]^{1/\beta} \right)}. \quad (4.17)$$

Tal y como se puede comprobar en la expresión 4.15, el número de Miner para el caso del modelo de ajuste considerado sigue una distribución log-Weibull, y depende de los siguientes parámetros:

$$P_{fallo} = f(\lambda, \delta, \beta, B, C, \Delta\sigma). \quad (4.18)$$

Los 5 primeros parámetros son los correspondientes al ajuste del campo S-N mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli. No obstante, el rango de tensión  $\Delta\sigma$  afecta al cálculo de la probabilidad de fallo de un elemento, por lo tanto, la variable  $M_{50\%}$  no es iso-probabilística y no puede considerarse como variable de normalización, a diferencia de la variable  $V$ .

La relación entre ambas variables se expone en la ecuación 4.19.

$$\log(M_{50\%}) = \frac{V - \lambda - \delta [-\log(0,5)]^{1/\beta}}{\log(\Delta\sigma) - C}. \quad (4.19)$$

Para verificar el grado de influencia del rango de tensión  $\Delta\sigma$  en el cálculo de la probabilidad de fallo de un elemento, se ha recurrido a datos experimentales de detalles recogidos en la literatura. La figura 4.9 representa la probabilidad de fallo calculada a partir de la ecuación 4.16 de 2 pletinas de espesor 5 mm soldadas a tope con preparación de bordes en V [17], la



figura 4.10 se refiere a una unión de perfiles tubulares de diámetro 88.9 mm y espesor 5 mm con pletina intermedia de espesor 15 mm [50], y la figura 4.11 está asociada a la unión de 2 perfiles cuadrados de acero de lado 80 mm, espesor de pared 6.5 mm con chapa de testa de 12 mm mediante cordones en ángulo. Todas las figuras representan la probabilidad de fallo de los detalles constructivos considerados en función del rango de tensiones  $\Delta\sigma$  y para diferentes valores de número de Miner, aplicando el modelo de Castillo y Fernández Canteli para la obtención de los parámetros  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $B$  y  $C$  del modelo.

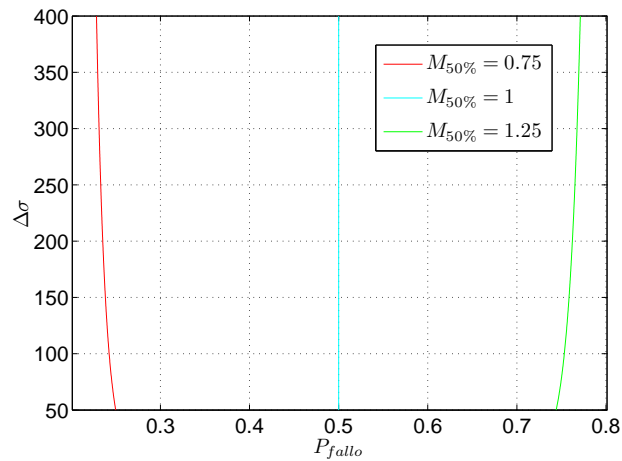


Figura 4.9: Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable  $\Delta\sigma$  para los resultados experimentales mostrados en [17].

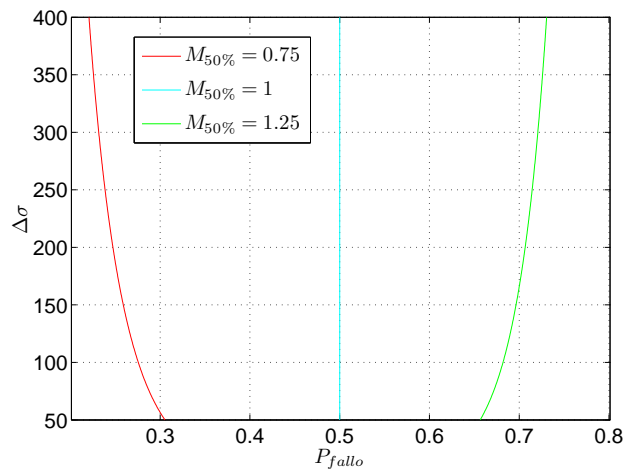


Figura 4.10: Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable  $\Delta\sigma$  para los resultados experimentales mostrados en [50].

Tal y como puede comprobarse para los ejemplos prácticos mostrados en las figuras 4.9, 4.10 y 4.11, la variación de la probabilidad de fallo obtenida en función del rango de tensión depende del valor numérico del número de Miner considerado. Se puede verificar cómo para valores de número de Miner menores que la unidad, resulta conservador adoptar el menor de los rangos de tensión del espectro de tensiones para el cálculo de la probabilidad de fallo

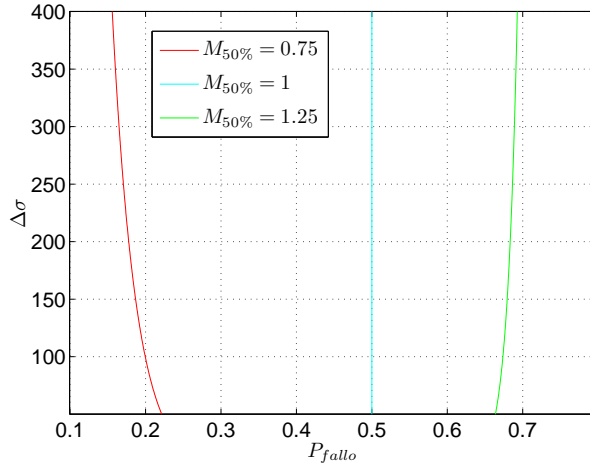


Figura 4.11: Obtención de la probabilidad de fallo para diferentes curvas iso-Miner en función de la variable  $\Delta\sigma$  para los resultados experimentales mostrados en [50].

mediante la ecuación 4.16. De la misma forma, para valores de número de Miner mayores que la unidad resulta conservador elegir el mayor de los valores del rango de tensión para el cálculo de la probabilidad de fallo. Este hecho se verifica para cada uno de los 3 ejemplos considerados y para valores de rangos de tensión entre los 50 MPa y los 400 MPa (rango usual de aplicación para el acero estructural). No obstante, la elección del valor medio de los diferentes rangos de tensión pertenecientes al espectro parece una elección acertada y de compromiso para la mayor parte de los casos.

Asimismo, debe tenerse en cuenta la condición de aplicación de la ecuación 4.16 que establece que el valor que adopta la variable  $\log(M_{50\%})$  debe de ser mayor que el parámetro de localización de la distribución.

### La variable $V^+$ como índice de daño

Además del número de Miner, la probabilidad de fallo asociada a un elemento puede ser calculada a partir de otras variables utilizadas para el ajuste del campo S-N. De esta forma, se define la variable  $V^+$  como la relación entre la variable  $V$  y el valor medio de su distribución asociada, esto es:

$$V^+ = \frac{V}{\lambda + \delta \cdot \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right]}. \quad (4.20)$$

La distribución de probabilidad de la variable  $V^+$  se define mediante la siguiente expresión:

$$V^+ \sim W \left( \frac{\lambda}{\lambda + \delta \cdot \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right]}, \frac{\delta}{\lambda + \delta \cdot \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right]}, \beta \right). \quad (4.21)$$

Tal y como está definida, La variable  $V^+$  sigue una distribución de Weibull y tiene como valor medio la unidad. Asimismo, es una variable de normalización del modelo, por lo que

puede ser utilizada como índice de daño tal y como se muestra en el ejemplo práctico planteado en el apartado 4.4.5.

### El índice de probabilidad de daño total $D$

Al igual que el número de Miner, el índice de probabilidad de daño total  $D_{50\%}$  propuesto por Fernández Canteli [20] y expresado mediante la ecuación 4.8 puede formularse para su aplicación en el modelo de Castillo y Fernández Canteli. A partir de la ecuación 4.14, se obtiene la expresión del índice  $D$  para el modelo de ajuste considerado:

$$D_{50\%} = \frac{\log(N)}{\frac{\lambda}{\log(\Delta\sigma) - C} + B + \frac{\delta}{\log(\Delta\sigma) - C} [-\log(0,5)]^{1/\beta}}. \quad (4.22)$$

La distribución de probabilidad se obtiene a partir de la expresión 4.12 y de la ecuación 4.14. Considerando  $H = \lambda + B(\log(\Delta\sigma) - C) + \delta[-\log(0,5)]^{1/\beta}$ , se tiene la distribución de probabilidad asociada al índice:

$$D_{50\%} \sim W\left(\frac{\lambda + B(\log(\Delta\sigma) - C)}{H}, \frac{\delta}{H}, \beta\right). \quad (4.23)$$

Al igual que lo comentado anteriormente para el número de Miner, la distribución de probabilidad depende del rango de tensión considerado, por lo que dicha variable no puede ser considerada como una variable de normalización. En el siguiente apartado se propone una modificación del número de Miner que permite considerarlo como variable de normalización para el modelo de ajuste de Castillo y Fernández Canteli.

### Una formulación alternativa para el número de Miner: la variable $M^+$

Con intención de establecer una nueva formulación para el número de Miner que permita el tratamiento estadístico de la variable con independencia del rango de tensión considerado para el cálculo de la probabilidad de fallo, López Aenlle [49] ha propuesto la siguiente formulación:

$$M_{50\%}^+ = \frac{\log(N) - B}{\log(N_{50\%}) - B}. \quad (4.24)$$

La ecuación 4.24 puede modificarse adecuadamente dando lugar a la ecuación 4.25:

$$M_{50\%}^+ = \frac{(\log(N) - B)(\log(\Delta\sigma) - C)}{\lambda + \delta[-\log(0,5)]^{1/\beta}}. \quad (4.25)$$

La distribución de probabilidad de la variable  $M_{Ref}^+$  se define mediante la expresión 4.26:

$$M_{50\%}^+ \sim W\left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta[-\log(0,5)]^{1/\beta}}, \frac{\delta}{\lambda + \delta[-\log(0,5)]^{1/\beta}}, \beta\right). \quad (4.26)$$

La distribución de la variable  $M_{50\%}^+$  depende únicamente los parámetros  $\lambda$ ,  $\delta$  y  $\beta$ , y a diferencia de la distribución de la variable  $M_{50\%}$  no depende del rango de tensión  $\Delta\sigma$  considerado. Por lo tanto, los desplazamientos iso-Miner también son iso-probabilísticos (y viceversa), manteniendo la probabilidad de referencia para cualquier espectro de cargas considerado y permitiendo la obtención de una probabilidad de fallo de un elemento.

Tabla 4.1: Ejemplo de espectro de tensiones.

$\Delta\sigma(MPa)$	N
180	17000
110	37000
45	85000
80	90000
65	260000
145	10000

Tabla 4.2: Valores adoptados por las diferentes variables y las probabilidades de fallo obtenidas.

	<i>Valor</i>	<i>P<sub>fallo</sub></i>
$M_{50\%}$	0.2875	8,3 %
$V^+$	0.9825	7,33 %
$M_{50\%}^+$	0.9828	7,33 %
$D_{50\%}$	1.0457	7,55 %

A diferencia de la variable  $M_{50\%}$ , la variable  $M_{50\%}^+$  no es lineal. Por lo tanto, su aplicación a elementos sometidos a fatiga de amplitud variable requiere de un proceso iterativo de obtención del número de ciclos equivalente que iguala el valor de la variable considerada para cada uno de los rangos de tensión de los que consta el espectro.

### Un ejemplo práctico

Con intención de demostrar la validez de las variables  $M_{50\%}$ ,  $V^+$ ,  $M_{50\%}^+$  y  $D_{50\%}$  como método para obtener la probabilidad de fallo de un elemento, se ha considerado el espectro de tensiones mostrado en la tabla 4.1 para su aplicación junto con el ajuste de los datos experimentales de Crupi [17] mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli, dando lugar a un campo S-N con parámetros  $B = -94,38$   $C = -13,81$   $\lambda = 1607,97$   $\delta = 468,29$   $\beta = 80$ .

Los valores numéricos adoptados por las variables y las probabilidades de fallo obtenidas para cada una de ellas se muestran en la tabla 4.2, demostrando la validez de las variables normalizadas  $V^+$  y  $M_{Ref}^+$  para el cálculo de la probabilidad de fallo de un elemento, obteniéndose idénticos valores para cada una de ellas. Asimismo, para los valores obtenidos mediante las variables  $M_{50\%}$  y  $D_{50\%}$  se ha considerado el valor medio de los rangos de tensión del espectro (104 MPa), obteniéndose diferencias muy bajas con respecto a los valores proporcionados mediante las variables normalizadas y validando el cálculo de la probabilidad de fallo de un elemento mediante cualquiera de las 4 variables consideradas.

## 4.5. El rango de tensión equivalente

El rango de tensión equivalente ( $\Delta\sigma_{E,K}$ ) surge como un concepto de unión entre la fatiga de amplitud constante y variable. La base del concepto de rango de tensión equivalente es, partiendo de un espectro de tensiones, obtener un determinado rango de tensión de amplitud constante que describa el mismo fenómeno de fatiga que el originado por la carga de amplitud variable original.

El concepto de rango de tensión equivalente se considera bajo el supuesto de fatiga de amplitud constante, por lo que no puede definirse completamente sin considerar un determinado número de ciclos a los que se refiere dicho rango. Es usual considerar la suma total de los ciclos de los diferentes bloques del espectro ( $N_T = \sum_{i=1}^n n_i$ ) o bien un número determinado número de ciclos considerado  $N_K$ , siendo  $K$  el número de millones de ciclos.

Debido a que cualquier medida del fenómeno de fatiga sobre un elemento finaliza en la consideración de *daño*, parece lógico definir el rango de tensión equivalente de amplitud constante como aquel que produce el mismo nivel de *daño* que el espectro de tensiones considerado. No obstante, existen otras hipótesis de equivalencia sobre las que considerar el concepto de rango de tensión equivalente, las cuales se exponen a continuación.

### 4.5.1. Definiciones para el rango de tensión equivalente

#### Consideración de la energía de deformación

Esta formulación para  $\Delta\sigma_{E,K}$  está basada en la equivalencia de igualdad de la densidad de energía de deformación entre los espectros de tensiones de amplitud variable y amplitud constante. Dicho concepto es aplicado por Li et. al. [47] para realizar evaluaciones a fatiga sobre puentes de acero y se basa en las hipótesis de que la energía plástica de deformación puede ser obviada bajo la consideración de fatiga a alto número de ciclos. Considerando un supuesto de tensión media nula, la densidad de energía elástica de deformación generada a partir del espectro discreto de tensiones de amplitud variable se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^n n_i \left( \frac{\Delta\sigma_i}{2} \right)^2. \quad (4.27)$$

Asimismo, la densidad de energía elástica de deformación de un determinado rango de tensión constante  $\Delta\sigma$  para un número de ciclos  $N_K$  será:

$$\Delta W_2 = \frac{N_K}{2E} \left( \frac{\Delta\sigma}{2} \right)^2. \quad (4.28)$$

Bajo la hipótesis de igualdad entre ambas densidades de energía de deformación, se obtiene la expresión del rango de tensión equivalente para un espectro discreto de tensiones:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_K} (\Delta\sigma_i)^2}. \quad (4.29)$$

Si se considera el caso de un espectro continuo de tensiones, la expresión 4.29 se transforma en:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \sqrt{\frac{1}{N_K} \int (\Delta\sigma(n))^2 dn}. \quad (4.30)$$

### Consideración del nivel de daño generado

La hipótesis más general para definir el rango de tensión equivalente es bajo la hipótesis de igualdad de daño acumulado, estimado mediante la regla de Miner por ambos espectros de tensiones. Debido a que para cuantificar el nivel de daño en función de la regla de Miner se requiere el conocimiento de una curva o campo S-N, la definición del rango de tensión depende del modelo de ajuste considerado. Seguidamente se definen diferentes expresiones para el rango de tensión equivalente.

**Modelo de Basquin sin límite de endurance** Considerando el modelo de ajuste de Basquin, el valor del número de Miner para un espectro discreto de tensiones de amplitud variable se define de la siguiente forma:

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{ref_i}}. \quad (4.31)$$

Asimismo, el índice de daño correspondiente a un espectro de tensión de carga constante  $\Delta\sigma_{E,K}$  para un determinado número de ciclos  $N_K$  es:

$$M_2 = \frac{N_K}{cte_K \cdot \Delta\sigma_{E,K}^{-m_K}}, \quad (4.32)$$

donde la constante  $cte_K$  depende del número de ciclos  $N_K$  para los cuales se está calculando el rango de tensión equivalente. Estableciendo la hipótesis de igualdad entre ambos índices de daño, se obtiene la expresión de  $\Delta\sigma_{E,K}$ :

$$\Delta\sigma_{E,K} = \left( \frac{cte_K \cdot M_1}{N_K} \right)^{\frac{1}{m_K}}. \quad (4.33)$$

Debido a que el presente modelo para el cálculo de  $\Delta\sigma_{E,K}$  está basado en la consideración de daño y se ha supuesto un modelo de ajuste de Basquin sin límite de endurance, todos los rangos de tensión (independientemente de su magnitud) contribuyen a la acumulación de daño en el elemento.

**Modelo de Basquin con límite de endurance** Si el modelo de ajuste del campo S-N incorpora un límite de endurance, como es el caso expuesto, los bloques de ciclos cuyo rango de tensión se encuentren por debajo de dicho valor no se contabilizarán en el cálculo. Por lo tanto, el valor del rango de tensión equivalente no puede, en ningún caso, encontrarse por debajo del valor del límite de endurance considerado por el modelo. La ecuación 4.33 es válida siempre que se consideren únicamente los rangos de tensión por encima del límite de endurance.

### Consideración de la media cuadrática

La expresión mediante este método consiste en considerar como rango de tensión equivalente la media cuadrática de los rangos de tensión del espectro discreto de amplitud variable:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_K} (\Delta\sigma_i)^2}. \quad (4.34)$$

De igual forma, para el caso de un espectro continuo sería:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \sqrt{\frac{1}{N_K} \int (\Delta\sigma(n))^2 dn}. \quad (4.35)$$

Nótese que la ecuación 4.34 es igual a la obtenida considerando la energía elástica de deformación (ecuación 4.29).

### Consideración del área del espectro de tensiones

Mediante la consideración de igualdad de áreas entre los espectros discretos de tensiones de amplitud constante y variable, se obtiene la siguiente formulación para  $\Delta\sigma_{E,K}$ :

$$\Delta\sigma_{E,K} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\sigma_i) \cdot n_i}{N_K}. \quad (4.36)$$

Para el caso de un espectro de tensiones continuo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \frac{1}{N_K} \int \Delta\sigma(n) dn. \quad (4.37)$$

#### 4.5.2. Una formulación estadística para el rango de tensión equivalente asociado al modelo de Castillo y Fernández Canteli

De modo similar a lo expuesto en el apartado 4.4.5 para la obtención de una expresión estadística para el número de Miner, la ecuación 4.11 permite obtener una función de distribución para el rango de tensión equivalente, tal y como se propone a continuación:

$$\log(\Delta\sigma_{E,K}) \sim W\left(\frac{\lambda}{\log(N) - B} + C, \frac{\delta}{\log(N) - B}, \beta\right). \quad (4.38)$$

Asimismo, la ecuación 2.16 permite obtener, en función de los parámetros de la distribución de Weibull de la variable normalizada  $V$  y los parámetros del ajuste del campo S-N, la formulación de la variable  $\Delta\sigma_{E,K}$  considerando como referencia el percentil del 50%, tal y como se muestra en la ecuación 4.39:

$$\log(\Delta\sigma_{E,K}) = \frac{\lambda}{\log(N) - B} + C + \frac{\delta}{\log(N) - B} [-\log(0,5)]^{1/\beta}. \quad (4.39)$$

#### 4.5.3. Consideraciones acerca del rango de tensión equivalente

La transformación de un espectro de tensiones de amplitud variable a otro de amplitud constante merece unas valoraciones que se exponen a continuación.

**Consideración del modelo de ajuste del campo S-N**

Tal y como se ha comentado anteriormente, existen diferentes formas de definir el rango de tensión equivalente. Una diferencia sustancial reside en el hecho de que algunas de ellas requieren el conocimiento del campo S-N y, por lo tanto, se ven afectadas por el mismo, como ocurre al considerar el nivel de daño acumulado.

**Consideración del tipo de carga considerada**

La conveniencia de adoptar el parámetro  $\Delta\sigma_{E,K}$  como representativo para evaluar correctamente el proceso de fatiga sobre un elemento, depende del tipo de carga considerada en el análisis. En el caso de un elemento sometido a una carga de amplitud variable de tipo determinista por bloques, la aplicación del concepto del rango de la tensión equivalente carece de sentido, debido a que la adopción del rango de tensión equivalente implica una pérdida de información referida a la secuencia de cargas, información que puede proporcionar el espectro de tensiones. No obstante, para el caso de un espectro de tensiones obtenido a partir de una historia de carga pseudo-aleatoria, hablar de la existencia de una secuencia de carga carece de sentido, si bien el espectro de cargas presenta una determinada ordenación obtenida a partir de métodos de conteo de ciclos, esta secuencia es una mera representación y agrupación de rangos de tensión, y no representa una secuencia real de generación de cargas sobre el elemento, por lo que el hecho de aplicar el concepto de rango de tensión equivalente no disminuye la información proveniente del espectro de tensiones.

**Consideración del número de ciclos de referencia**

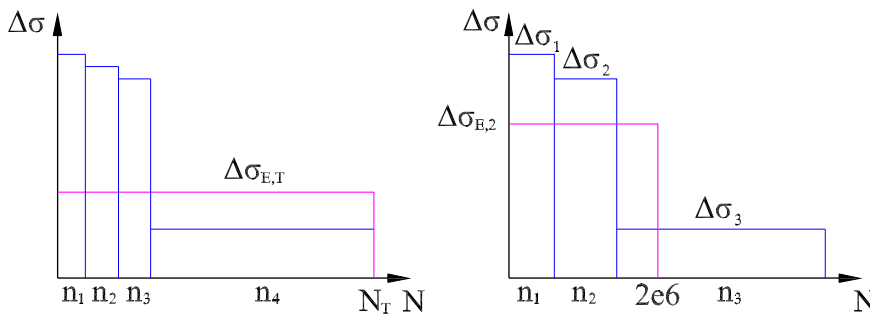


Figura 4.12: Diferencias en el rango de tensión equivalente que produce la elección del número de ciclos de referencia.

Como se comentó anteriormente, la equivalencia entre los espectros de tensiones puede realizarse considerando un nivel de ciclos  $N_T = \sum_{i=1}^n n_i$  o un determinado número de ciclos (generalmente  $2 \cdot 10^6$  ciclos). El primer supuesto se corresponde con la figura 4.12 izquierda, mientras que el segundo se muestra en la figura 4.12 derecha. Se han considerado, a modo de ejemplo, 4 bloques de tensiones: los 3 primeros corresponden a altos rangos de tensión durante un periodo corto de ciclos, mientras que el 4º bloque se corresponde con un rango de tensión muy bajo mantenido durante un elevado número de ciclos. Como se puede ver en la imagen 4.12, ambas transformaciones a un rango de tensión equivalente difieren sustancialmente, por



lo que se concluye que:

- Considerando  $\Delta\sigma_{E,T}$  mediante el número de ciclos  $N_T$ , un bloque de tensión suficientemente prolongado en el tiempo (bloque número 4) puede descender considerablemente el rango de la tensión equivalente. No obstante, si se han utilizado modelos de cálculo de  $\Delta\sigma_{E,T}$  basados en igualdad de daño, dichos modelos tienen en cuenta el campo S-N del modelo, por lo que no se puede obtener un rango de tensión equivalente menor que el límite de endurancia del modelo.
- Los modelos de la energía de deformación, de la media cuadrática y del área del espectro de tensiones no consideran la posible existencia de un límite de endurancia para el cálculo de  $\Delta\sigma_{E,K}$ , por lo que puede darse casos en los que el rango de tensión equivalente obtenido sea menor que el límite de endurancia del modelo del campo S-N aplicado al elemento.

#### 4.6. Los límites de fatiga y endurancia en fatiga de amplitud variable

A diferencia del límite de endurancia de un material ( $\Delta\sigma_L$ ), la definición de límite de fatiga ( $\Delta\sigma_0$ ) necesariamente debe de referirse a un número de ciclos determinado, el cual se considera como un valor suficientemente elevado que permite acotar superiormente la vida útil del elemento estructural considerado.

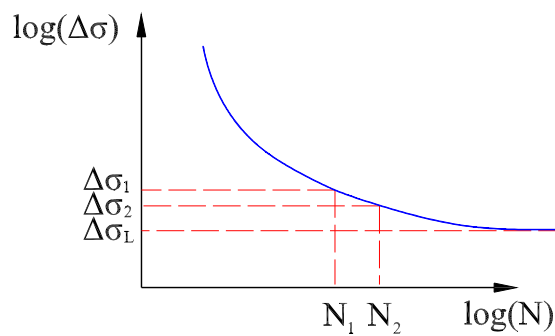


Figura 4.13: Diferencia entre límites de fatiga y el límite de endurancia.

La figura 4.13 muestra, para un modelo de ajuste determinista, el límite de endurancia  $\Delta\sigma_L$  de un determinado material y diferentes límites de fatiga  $\Delta\sigma_1$  y  $\Delta\sigma_2$  para  $N_1$  y  $N_2$  ciclos, respectivamente.

Además, el concepto de límite de fatiga merece una serie de comentarios:

- El modelo de ajuste considerado caracteriza el límite de fatiga; la utilización de un modelo determinista proporciona un único límite de fatiga, mientras que un modelo de ajuste probabilista proporciona una distribución de probabilidad para dicho valor.
- En los modelos de ajuste probabilísticos, la distribución de probabilidad de la variable  $\log(N)$  define la distribución de probabilidad de la variable  $\Delta\sigma_0$ .

- La existencia de un campo S-N no garantiza la existencia de un límite de fatiga válido para cualquier valor de número de ciclos, debido a que el modelo debe de permitir la extrapolación de sus resultados hasta dicho valor, bien porque se hayan realizado ensayos experimentales que alcanzan o sobrepasan el número de ciclos considerado o bien porque el modelo considerado está formulado de forma que admite la extrapolación de su ajuste fuera del rango de los datos experimentales. Un ejemplo del primer supuesto es el modelo de Basquin, el cual no admite una extrapolación de resultados más allá del rango de los datos experimentales. En este caso, se debe de recurrir a métodos específicos para el cálculo del límite de fatiga como el Método Up & Down. En contraposición, el modelo de Castillo y Fernández Canteli permite la extrapolación fuera del rango de los datos experimentales para cualquier valor de número de ciclos considerado.
- Consecuente con la realidad física que muestra el campo S-N, el límite de fatiga decrece según aumenta el número de ciclos considerado (se supone manteniendo una misma probabilidad de rotura en un modelo probabilista o la aplicación de un modelo determinista).

Asimismo, referente al límite de endurancia se pueden realizar una serie de comentarios:

- La existencia de un valor positivo de límite de endurancia para todos los materiales está sujeta a discusión por parte de los investigadores [74, 4, 43]. Mientras en los metales féreos existe un cierto consenso acerca de la existencia de un  $\Delta\sigma_L > 0$ , en los metales no féreos (aluminio, cobre, magnesio, etc.) no está clara su existencia. El ajuste de los datos provenientes de los primeros da lugar a un campo S-N con una fuerte curvatura que evidencia un valor positivo para  $\Delta\sigma_L$ , mientras que en los segundos, dicha curvatura no se manifiesta de forma evidente, dando lugar a diferentes interpretaciones. Algunos autores defienden la idea de que todos los materiales tienen un límite de endurancia, aunque en algunos casos su valor es extremadamente cercano a cero. Por el contrario, otros sugieren que cualquier elemento sometido a una carga cíclica terminará fallando si el número de ciclos a los que se somete el elemento es suficientemente alto. En cualquier caso, debido a que no es posible la realización de ensayos para un número infinito de ciclos, es imposible obtener evidencias empíricas que aporten argumentos a favor o en contra de la existencia de un  $\Delta\sigma_L > 0$ .

Debido a esto, la inclusión de un parámetro  $\Delta\sigma_L > 0$  que permita su estimación dentro de un modelo de ajuste considerado, es una condición necesaria pero no suficiente para poder obtener un determinado valor que, por lo menos, permita establecer una discusión acerca de su existencia. Tal y como se ha comentado en el apartado 3.3, un modelo ideal de ajuste debe de poder ser aplicable a cualquier tipo de material, por lo que no es admisible un modelo que no considera, al menos a priori, la existencia de dicho valor.

- Desde un punto de vista práctico, la no consideración de un límite de endurancia positivo en un modelo de ajuste del campo S-N, desnaturaliza por completo el cálculo a fatiga mediante la consideración del enfoque de la *vida segura*, esto es, obtener el valor máximo del rango de tensión que puede ser aplicado a un elemento sin que éste acumule daño a fatiga, o lo que es lo mismo, intentar obtener el límite de endurancia del material.

- Su definición depende del modelo considerado. De esta forma, se pueden considerar 3 posibles situaciones:
  1. No existencia del límite de durancia: Algunos modelos, como el modelo de Basquin de un solo tramo no tienen límite de durancia. Este hecho puede ser corregido mediante la adición de un tramo horizontal a partir de un determinado número de ciclos.
  2. Existencia de un límite de durancia único: El modelo de Castillo y Fernández Canteli considera la existencia de un único valor para el límite de durancia independiente del valor de probabilidad de fallo considerado.
  3. Existencia de múltiples valores para el límite de durancia: Otros modelos, como el modelo de Bastenaire, contemplan la existencia de diferentes valores de límite de durancia en función de la probabilidad de fallo considerada.
- Existen modelos de ajuste que proporcionan un límite de durancia *verdadero* basado en la consistencia y en la propia formulación del modelo. No obstante, debe de reflexionarse acerca de la conveniencia de considerar este valor para su aplicación en el cálculo práctico de componentes. En este sentido, Fernández Canteli et al. [21] han comparado el límite de durancia obtenido en probetas cilíndricas a partir de un método termográfico desarrollado por los autores con el obtenido experimentalmente mediante un modelo de ajuste del campo  $\varepsilon - N$ . Una de las conclusiones obtenidas es la disparidad existente entre ambos valores (más del 100% de diferencia entre ambos), otorgando el modelo de ajuste del campo  $\varepsilon - N$  un resultado mucho más conservador. Considerando el valor obtenido por el método termográfico en el modelo de ajuste de Castillo y Fernández Canteli, el primero puede considerarse como un límite de fatiga para un valor de número de ciclos del orden de  $10^{12}$ . Por lo tanto, en aplicaciones prácticas de dimensionamiento de elementos sometidos a fatiga, la elección del límite de durancia *verdadero* aportado por los métodos de ajuste experimentales puede conllevar un sobredimensionado innecesario. Como conclusión, la realización de un análisis previo del número de ciclos esperados durante su vida útil y la consideración del un límite de fatiga para el citado número de ciclos, puede proporcionar un importante ahorro económico.

#### 4.6.1. Valoraciones estadísticas de los límites de fatiga y durancia

Una consideración estadística de los límites de fatiga y durancia permite realizar una serie de comentarios:

- La experiencia demuestra que la existencia de una distribución estadística para un determinado límite de fatiga es un hecho evidente. Este concepto no debe confundirse con el hecho de que la utilización de algunos modelos de ajuste del campo S-N pueden no ser adecuados para la obtención de dicha distribución estadística.
- No obstante, y a diferencia del límite de fatiga, considerar la existencia de una distribución estadística para el límite de durancia, depende del modelo de ajuste utilizado y conceptualmente está abierto a mayores interpretaciones.

- La dispersión asociada al límite de fatiga tiende a disminuir al aumentar el número de ciclos considerado. Este hecho se pone de manifiesto mediante la aplicación del modelo de ajuste de Castillo y Fernández Canteli o el modelo Up & Down.
- Algunos modelos de ajuste probabilísticos, como el de Castillo y Fernández Canteli consideran un límite de endurancia único y, por lo tanto, no asociado a ninguna distribución de probabilidad. No obstante, otros modelos, como el de Bastenaire, consideran diferentes asíntotas en su modelo de ajuste y por lo tanto diferentes valores de límite de endurancia dependientes de la probabilidad de fallo considerada.

## 4.7. Fatiga cercana a valores umbrales

El interés en prolongar la vida a fatiga de las estructuras sometidas a un alto número de ciclos de carga ha tenido un gran auge en los últimos años. Debido a que la vida de una estructura sometida a fatiga depende de intentar mantener los valores de las cargas cercanos o menores a un cierto valor umbral que no genere daño sobre la estructura, conocer el comportamiento del material en zonas cercanas a estos valores umbrales de fatiga resulta fundamental.

Tradicionalmente, el estudio del fenómeno de la fatiga se ha abordado desde 2 puntos de vista bien diferenciados:

1. Considerar que la grieta se genera sobre una superficie, ausente de cualquier elemento geométrico que actúe como un factor concentrador de tensiones a nivel macroscópico, en lo que se define como enfoque de *vida segura* del fenómeno de la fatiga.
2. Considerar que la grieta ya está generada en la superficie del elemento (puede ser a un nivel microscópico), por lo que el nivel de daño generado sobre el elemento dependerá de su velocidad de crecimiento. Este enfoque se conoce como *tolerancia al daño*.

Bajo el enfoque de *vida segura*, el parámetro determinante es el límite de endurancia  $\Delta\sigma_L$  proporcionado por el campo S-N. Debido a que este parámetro define el umbral de daño, el cálculo del elemento se realiza con la intención expresa de que las tensiones generadas sobre el mismo no sobrepasen dicho valor. El dimensionamiento mediante el concepto de vida segura debe de aplicarse cuando la formación de grietas sobre el elemento considerado puede provocar *de forma rápida* la fractura del mismo.

Asimismo, la consideración del enfoque de *tolerancia al daño* considera que la grieta ya está formada sobre el elemento, por lo que el parámetro determinante es el valor umbral del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K_{th}$ , el cual define que dicha velocidad de crecimiento sea mayor o igual a cero. El dimensionamiento de estructuras o componentes mediante el *método de tolerancia al daño* requiere de un plan de inspección y mantenimiento que permitirá detectar y corregir posibles deficiencias estructurales que puedan generarse. Para la aplicación de este método se requiere un grado de hiperestaticidad alto que permita la redistribución de esfuerzos en caso de fallo del elemento estructural considerado. En 1961, Paris et al. [62] propusieron la introducción de los parámetros de la MFEL para describir el fenómeno de crecimiento de grieta en modo I. En particular, se consideró el factor de intensidad de tensiones  $\Delta K$  como parámetro conductor del crecimiento de grietas por fatiga. En 1963,

McClintock [53] postuló la existencia de un valor umbral de intensidad de tensiones como valor de referencia para el crecimiento estable de grietas por fatiga (de la misma forma que la tenacidad a fractura  $\Delta K_{IC}$  define el límite del crecimiento de grieta de forma inestable), introduciendo el concepto de  $\Delta K_{th}$ , el cual se mide de forma experimental tomando valores de velocidad crecimiento de grietas extremadamente bajos (habitualmente se toma un valor  $da/dN = 10^{-11}m/ciclo$  [75]).

Por lo tanto, cuando se habla de *valor umbral de fatiga*, es posible referirse tanto al límite de endurancia de un material  $\Delta\sigma_L$  como al valor umbral del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K_{th}$ .

Existe abundante bibliografía sobre los valores umbrales de fatiga de diferentes tipos de material, y de cómo algunas características del mismo y las condiciones de los ensayos pueden influir sobre ellos. Además, en función del criterio de cálculo aplicado se requerirá que uno de ambos parámetros sea lo más elevado posible, es decir, si se aplica el criterio de cálculo de tolerancia al daño, interesará que el material considerado tenga una velocidad de propagación de grieta lo menor posible y un valor  $\Delta K_{th}$  elevado, mientras que si se aplica el criterio de vida segura, se requerirá un límite de endurancia ( $\Delta\sigma_L$ ) lo más alto posible. Por lo tanto, el material *ideal* sería aquel que teniendo una alta resistencia, mantenga elevados valores de  $\Delta\sigma_L$  y  $\Delta K_{th}$  con bajos valores de velocidad de propagación de grieta. Desgraciadamente, los materiales que suelen tener un elevado  $\Delta K_{th}$  con bajas velocidades de propagación de grieta, suelen tener un bajo límite elástico con bajos límites de fatiga. Es, por tanto, necesario conocer los distintos factores que afectan a los valores umbrales de fatiga, para obtener mejores comportamientos con mayores duraciones de vida e índices de seguridad más elevados.

Una de las primeros intentos de obtener de forma sistemática el límite de endurancia de diferentes materiales fue intentar establecer una relación con la resistencia a la tracción del mismo, mediante la fórmula  $\Delta\sigma_L = \alpha \cdot \sigma_U$ , donde  $\alpha$  es un factor que depende del material considerado. Para aceros, hierro fundido y aleaciones de titanio se suele tomar un valor  $\alpha \approx 0,5$ , mientras que para aleaciones de aluminio se puede tomar un valor  $\alpha \approx 0,35$ , aunque algunos autores consideran que un valor de  $\alpha \approx 0,35$  también es aplicable a aceros [44].

No obstante, como se ha comentado anteriormente, no sólo se requieren materiales con un valor alto de límite de fatiga, sino que también es deseable mantener un  $\Delta K_{th}$  alto. Ritchie [66, 65, 64] tras numerosas pruebas experimentales con aceros de diferentes límites elásticos, llega a la conclusión de que los aceros con mayor límite elástico son lo que tienen valores de  $\Delta K_{th}$  más bajos, posiblemente debido a la fragilización por hidrógeno del acero, pero valores de límite de endurancia más altos, debido a que la deformación plástica generada en cada ciclo de carga es más reducida. No obstante, otros autores ponen de manifiesto que esta conclusión no puede extrapolarse a todos los materiales, ya que incluso la tendencia se invierte para las aleaciones no férricas [85, 36].

Creager y Paris [16] asocian la reducción de  $\Delta K_{th}$  en aceros con alto límite elástico con una reducción del CTOD de la grieta, lo que hace que sea la más afilada que provoque mayores tensiones sobre el material. Otros autores [67, 87] han propuesto diferentes alternativas.

El estudio de estos valores umbrales de fatiga ha generado una considerable atención durante varias décadas, si bien es cierto que las aportaciones de Kitagawa- Takahashi [35], así como la de El Haddad [19], fueron revolucionarias a finales de la década de 1970 y marcaron un nuevo enfoque sobre el problema, incluyendo este último el concepto de grieta intrínseca

como valor de referencia para diferenciar grietas de pequeño tamaño o *microgrietas* de las grietas de un mayor tamaño.

#### 4.8. El descenso del límite de endurancia en amplitud de carga variable

El límite de endurancia de un material es un parámetro que depende de multitud de factores, como son el tratamiento superficial del elemento, el tipo de ensayo ejecutado, el nivel de tensión al que se desarrolla, la velocidad a la que se desarrolla dicho ensayo, temperatura, medio ambiente, etc. Aparte de estos factores, el tipo de carga sobre el elemento y el tamaño de defecto máximo sobre el mismo, también influyen decisivamente sobre el límite de endurancia del mismo. Experimentalmente se comprueba cómo espectros de tensiones menores que el límite de endurancia de amplitud constante pueden generar daño sobre el elemento e incluso provocar la rotura del mismo, si han sido precedidos por rangos de tensiones más elevados. Este proceso se refleja de forma esquemática en la figura 4.14; si se parte de un elemento con un tamaño de grieta inicial  $a_{inicial}$  y se aplica sobre el elemento un rango de tensión  $\Delta\sigma_1$ , el tamaño de grieta no crece, debido a que el rango de tensión aplicado permanece por debajo del límite de endurancia de amplitud constante ( $\Delta\sigma_0$ ). Posteriormente el rango de tensión se incrementa hasta el valor  $\Delta\sigma_2$ , elevando el tamaño de grieta del punto A al punto B. Debido a dicho incremento de tamaño de grieta, el nuevo límite de endurancia desciende del valor inicial  $\Delta\sigma_0$  a  $\Delta\sigma'_0$ . Por lo tanto, un nuevo rango de tensión de valor  $\Delta\sigma_3$ , que inicialmente se encontraba por debajo del límite de endurancia de amplitud constante ( $\Delta\sigma_0$ ), es capaz de generar un crecimiento de grieta desde el punto B al punto C debido a que su valor tensional es mayor que el nuevo límite de endurancia del material ( $\Delta\sigma'_0$ ), generando un daño al elemento.

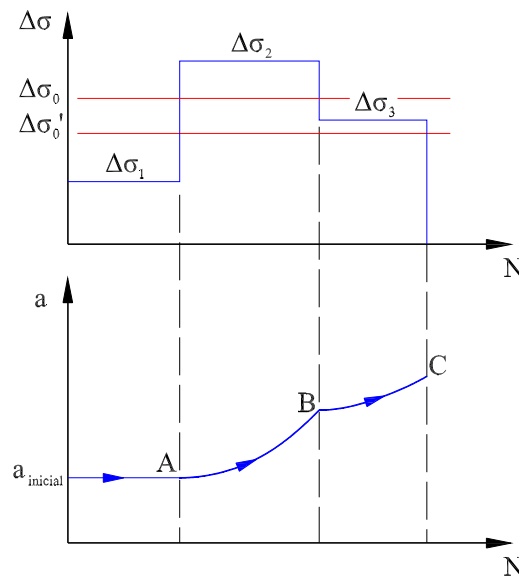


Figura 4.14: Evolución del crecimiento de grieta en función del rango de tensión considerado.

Los fundamentos de esta relación entre límite de endurancia y tamaño de grieta fueron

estudiados por Kitagawa y Takahashi, cuyas aportaciones se recogen en posteriores capítulos.

## 4.9. Conclusiones

Las principales conclusiones del presente capítulo se resumen a continuación.

1. Los métodos de conteo de ciclos permiten transformar una historia de tensiones de amplitud variable en un espectro compuesto por diferentes bloques de amplitud constante. Los bloques de un espectro de tensiones se ordenan en orden descendente, perdiendo de esta forma información acerca de la secuencia de aplicación de la carga. Dicha pérdida de información puede ser relevante o no, en función del tipo de carga generadora del espectro.
2. El número de Miner es el índice de daño más conocido y utilizado. Asimismo, su utilización junto con un campo S-N permite una interpretación estadística del mismo. Se ha demostrado que, en contra de la creencia generalizada, la aplicación de la regla de Miner como indicador del índice de daño no siempre es conservadora y su fiabilidad depende fuertemente del tipo de carga generadora del daño a fatiga.
3. El tratamiento estadístico del número de Miner permite la obtención de la probabilidad de fallo asociada a un elemento. No obstante, en función del modelo considerado para el ajuste del campo S-N, la formulación clásica del número de Miner puede no asegurar el mantenimiento de la probabilidad de referencia para fatiga producida por cargas de amplitud variable, siendo necesaria una nueva formulación del índice de daño.
4. Se han propuesto diferentes formulaciones del número de Miner para el modelo de Castillo y Fernández Canteli, las cuales proporcionan un valor de probabilidad de fallo cuando son tratadas bajo consideraciones estadísticas. Además, dichas variables pueden ser consideradas como variables de normalización del modelo.
5. El rango de tensión equivalente surge como nexo de unión entre la fatiga de amplitud constante y variable. Las diferentes consideraciones que permiten considerar similares 2 espectros de carga ofrecen diferentes tipos de formulaciones posibles para el parámetro.
6. La no consideración por parte de los modelos de ajuste del campo S-N de la existencia de un límite de endurancia puede considerarse como una práctica errónea, debido a que se presupone a priori su no existencia.
7. A diferencia de los modelos deterministas, algunos modelos probabilistas de ajuste del campo S-N permiten obtener una distribución de probabilidad para el límite de fatiga. La validez de la distribución obtenida depende de la validez del ajuste realizado por el modelo para el número de ciclos considerado.





## Capítulo 5

# *Una interpretación estadística del EC3*

### 5.1. Introducción

En el presente capítulo se propone una interpretación estadística del EC3 a partir de las hipótesis consideradas por el código de cálculo. Dichas consideraciones pretenden ser el punto de partida para la obtención de un modelo estadístico de daño para el EC3, el cual se expondrá en el capítulo 7. Considerando que la variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente, se obtiene una distribución estadística para la variable  $\log(\Delta\sigma)$ , estableciendo una compatibilidad entre las distribuciones estadísticas del tiempo de vida a fatiga en función del rango de tensión ( $N(\Delta\sigma)$ ) y del rango de tensión en función del tiempo de vida a fatiga ( $\Delta\sigma(N)$ ). El desarrollo propuesto también permite la obtención de nuevas distribuciones para el rango de tensión equivalente y el número de Miner, superando de esta forma el tradicional enfoque determinista asociado a estos índices de daño y permitiendo la obtención de valores de probabilidad de fallo para un elemento sometido a un determinado espectro de tensiones.

Asimismo, la aplicación de los coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$  considerados por el EC3 se asimilan a modificaciones en las distribuciones estadísticas asociadas a  $\log(N)$  y  $\log(\Delta\sigma)$ , así como establecer la nueva probabilidad de referencia utilizada tras la aplicación de dichos coeficientes. El capítulo finaliza con la aplicación de 2 supuestos prácticos donde se muestra la aplicabilidad de la consideración estadística propuesta.

### 5.2. El EC3 aplicado a fatiga de amplitud constante

#### 5.2.1. Curvas S-N

Las curvas de cálculo proporcionadas por el EC3 para cargas de amplitud constante son diferentes en función del tipo de esfuerzo considerado, como muestra la figura 5.1:

1. Para elementos sometidos a esfuerzos normales, se considera una curva única con pendiente  $-1/3$  hasta el valor de 5 millones de ciclos, valor en el que se define el límite de fatiga a amplitud constante  $\Delta\sigma_D$ . Esta curva está asociada a una probabilidad de referencia del 5%.

2. Para elementos sometidos a esfuerzos tangenciales, se considera una curva única de pendiente  $-1/5$  hasta los 100 millones de ciclos, valor en el que se define el límite de fatiga de amplitud constante  $\Delta\tau_L$ . Al igual que en el caso de tensiones normales, la curva está asociada a una probabilidad de referencia del 5%.

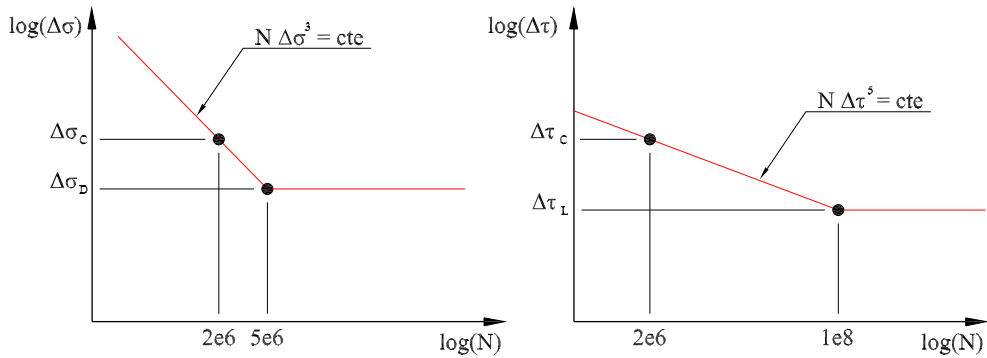


Figura 5.1: Curvas de cálculo de EC3 para cargas de amplitud constante suponiendo esfuerzos normales (figura izquierda) y tangenciales (figura derecha).

### 5.2.2. Comprobación o verificación de un cálculo a fatiga

La verificación de un elemento sometido a esfuerzos normales viene dado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_{E,2}}{\Delta\sigma_C / \gamma_{Mf}} \leq 1, \quad (5.1)$$

donde la expresión para el rango de tensión equivalente es:

$$\Delta\sigma_{E,2} = \left( \frac{N_i}{2 \cdot 10^6} \right)^{1/3} \cdot \Delta\sigma_i. \quad (5.2)$$

El EC3 establece que el cálculo del rango de tensión equivalente  $\Delta\sigma_{E,2}$  se realice a partir de la regla de acumulación de daño lineal de Miner. El valor de  $\Delta\sigma_{E,2}$  es el rango de tensión que a 2 millones de ciclos, confiere un mismo nivel de daño al elemento que el espectro de cálculo considerado.

En caso de estar sometido a tensiones tangenciales, la ecuación se transforma de la siguiente forma:

$$\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\tau_{E,2}}{\Delta\tau_C / \gamma_{Mf}} \leq 1, \quad (5.3)$$

donde la expresión para  $\Delta\tau_{E,2}$  se define como:

$$\Delta\tau_{E,2} = \left( \frac{N_i}{2 \cdot 10^6} \right)^{1/5} \cdot \Delta\tau_i. \quad (5.4)$$

La verificación de un elemento sometido simultáneamente a esfuerzos normales y tangenciales, se realiza aplicando la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_{E,2}}{\Delta\sigma_C/\gamma_{Mf}}\right)^3 + \left(\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\tau_{E,2}}{\Delta\tau_C/\gamma_{Mf}}\right)^5 \leq 1. \quad (5.5)$$

Tanto  $\Delta\sigma_{E,2}$  como  $\Delta\tau_{E,2}$  son los rangos de tensión equivalente a 2 millones de ciclos.

### 5.2.3. Los coeficientes de mayoración de cargas $\gamma_{Ff}$ y minoración de resistencia $\gamma_{Mf}$

Debido las incertidumbres en las cargas aplicadas sobre el elemento y en su resistencia a fatiga (derivadas de su tamaño, forma y proximidad de las discontinuidades, elementos concentradores de tensiones y otras influencias debidas a los procedimientos de soldadura empleados sobre el elemento), EC3 considera los coeficientes  $\gamma_{Ff}$  y  $\gamma_{Mf}$ .

El valor adoptado en anteriores revisiones de EC3 para el coeficiente de mayoración de cargas era  $\gamma_{Ff} = 1$ . No obstante, la versión actual vigente (2005) no considera ningún valor en concreto para el coeficiente  $\gamma_{Ff}$ .

Respecto al valor adoptado para el coeficiente  $\gamma_{Mf}$ , dicho valor varía en función de la importancia del componente considerado y de la posibilidad de realizar inspecciones sobre el elemento en función de que sea o no accesible. Los valores que puede tomar  $\gamma_{Mf}$  son 1, 1.15, y 1.35.

La consecuencia real de la aplicación del coeficiente de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf}$  es un desplazamiento descendente de la curva de referencia considerada comparándola con la original, lo que se traduce en un descenso del límite de fatiga considerado. Debido a dicho descenso, para un determinado rango de tensión, el valor de referencia del número de ciclos ( $N_{ref_i}$ ) es menor que el correspondiente de la curva original ( $N_{ref_i}^0$ ). La ecuación que proporciona el EC3 para su cálculo suponiendo esfuerzos normales es la siguiente:

$$N_{ref}(\Delta\sigma_i) = N_{ref_i} = 5 \cdot 10^6 \left(\frac{\Delta\sigma_D/\gamma_{Mf}}{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_i}\right)^3. \quad (5.6)$$

Considerando esfuerzos tangenciales:

$$N_{ref}(\Delta\tau_i) = N_{ref_i} = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{\Delta\tau_C/\gamma_{Mf}}{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\tau_i}\right)^5. \quad (5.7)$$

Si se considera que  $\gamma_{Ff} = 1$ , la relación entre los valores de referencia de número de ciclos es:

$$N_{ref_i} = N_{ref_i}^0 \cdot \gamma_{Mf}^{-m}, \quad (5.8)$$

donde  $N_{ref_i}^0$  representa el número de ciclos de referencia para un determinado rango de tensiones  $\Delta\sigma_i$  suponiendo que no se aplica ningún coeficiente de seguridad. La ecuación 5.8 permite establecer la contribución del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  al valor de referencia de vida a fatiga de un determinado elemento. Un ejemplo gráfico de la consecuencia de la aplicación del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  se puede visualizar en la figura 5.2

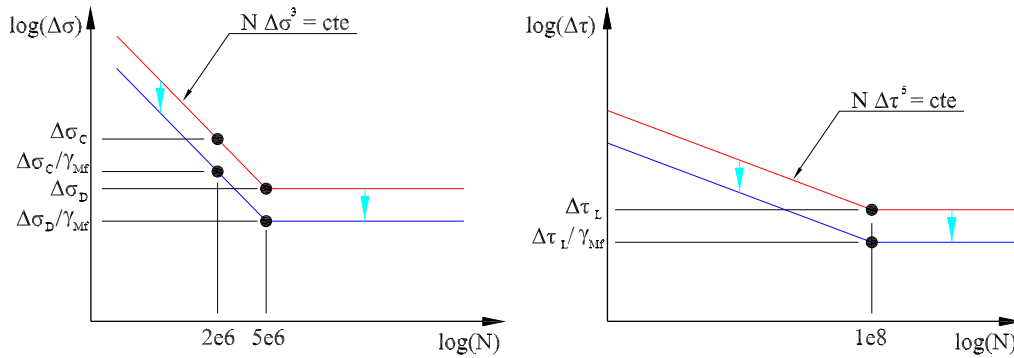


Figura 5.2: Desplazamiento descendente de las curvas de resistencia a fatiga debido a la aplicación de  $\gamma_{Mf}$  para el caso de carga de amplitud constante.

### 5.3. El EC3 aplicado a fatiga de amplitud variable

#### 5.3.1. Curvas S-N

Del mismo modo que en el caso del EC3 aplicado a cargas de fatiga de amplitud constante, al considerar las curvas de cálculo en el caso de cargas de amplitud variable deben diferenciarse 2 tipos de esfuerzos (ver figura 5.3):

1. En el caso de elementos sometidos a esfuerzos normales, se consideran 2 curvas con pendientes  $-1/3$  y  $-1/5$  considerando el cambio de pendiente a los 5 millones de ciclos. El tramo horizontal corresponde al límite de endurance de amplitud variable  $\Delta\sigma_L$ , el cual se define para un valor  $N_L$  de 100 millones de ciclos.
2. Para esfuerzos tangenciales, se considera la misma curva existente para el caso de carga de amplitud constante (curva única de pendiente  $-1/5$ ) hasta el límite de truncamiento  $\Delta\tau_L$  considerado a un valor  $N_L$  de 100 millones de ciclos.

#### 5.3.2. Comprobación a fatiga en carga de amplitud variable

En la etapa de cálculo, la verificación de resistencia de un elemento sometido a fatiga de amplitud variable se realiza mediante la aplicación de la regla de Miner. Mediante la consideración de una historia de cargas y aplicando los procedimientos establecidos por la norma (método de la gota de lluvia o de vaciado de depósito) se obtiene el *espectro de carreras de tensión*, diagrama que incluye todos los bloques de tensión aplicados sobre el elemento. A partir del diagrama de carreras de tensión se obtiene el *espectro de cálculo*, diagrama que solamente incluye aquellos bloques de cargas susceptibles de generar daño, excluyendo aquellos cuyo rango de tensión es menor que el límite de truncamiento del detalle considerado ( $\Delta\sigma_L$ ), así como los bloques de tensiones que generan menos del 1% del daño total de la pieza.

Una vez obtenido el espectro de cálculo se procede al cálculo del número de Miner, tomando como referencia la curva de cálculo que proporciona el EC3, por lo que el valor obtenido

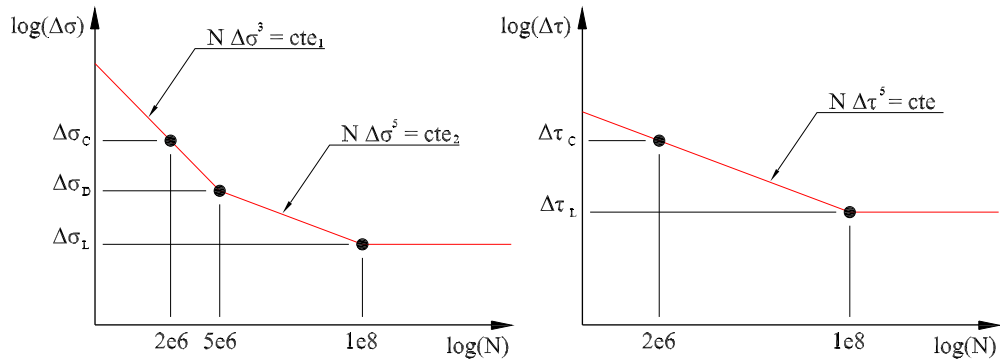


Figura 5.3: Curvas de cálculo de EC3 para cargas de amplitud variable suponiendo esfuerzos normales (figura izquierda) y tangenciales (figura derecha).

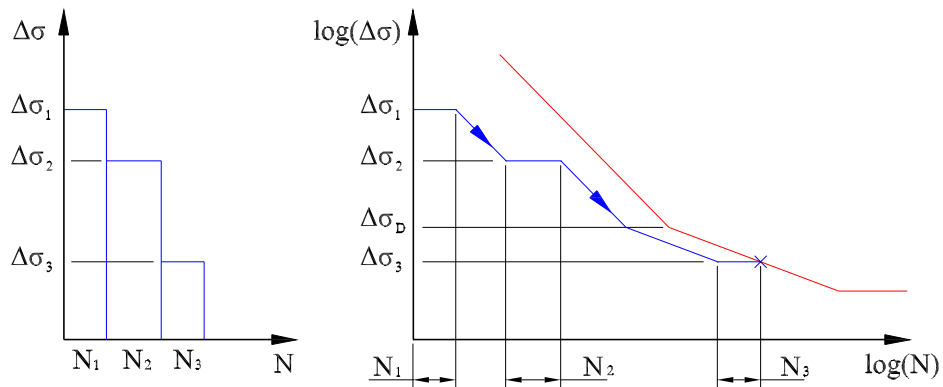


Figura 5.4: Aplicación del modelo de acumulación de daño lineal a partir de un espectro de cálculo de 3 bloques.

estará asociado a una probabilidad de referencia del 5 %. La verificación se establece aplicando la ecuación 5.9.

$$M_{5\%} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{5 \cdot 10^6 \left( \frac{\Delta\sigma_D / \gamma_{Mf}}{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_i} \right)^m} \leq 1, \tag{5.9}$$

donde  $m = 3$  si  $\Delta\sigma > \Delta\sigma_D$ , y  $m = 5$  si  $\Delta\sigma_L < \Delta\sigma < \Delta\sigma_D$ . En la figura 5.5 se representa la evolución del número de Miner mediante la aplicación de la ecuación 5.9 para el espectro de tensiones de la tabla 5.1 y para un detalle 112 (límite de fatiga a amplitud constante = 83 MPa, umbral de daño = 45 MPa).

Puede comprobarse cómo la aplicación de coeficientes de minoración aumenta notablemente el valor del número de Miner, debido a que aporta una seguridad mayor al cálculo. Asimismo, se comprueba cómo los bloques cuyo rango de tensión se encuentra por debajo del

Tabla 5.1: Espectro de rangos de tensión considerado en la figura 5.5.

$\Delta\sigma(MPa)$	N
115	12000
56	230000
162	60000
23	510000
116	36000
78	900000
112	20000
43	223000
146	75000
89	110000
30	4000
180	120000

límite de truncamiento  $\Delta\sigma_L$  del detalle considerado no contribuyen a aumentar el valor del mismo. Los comentarios y valoraciones de ambos modelos se exponen más adelante.

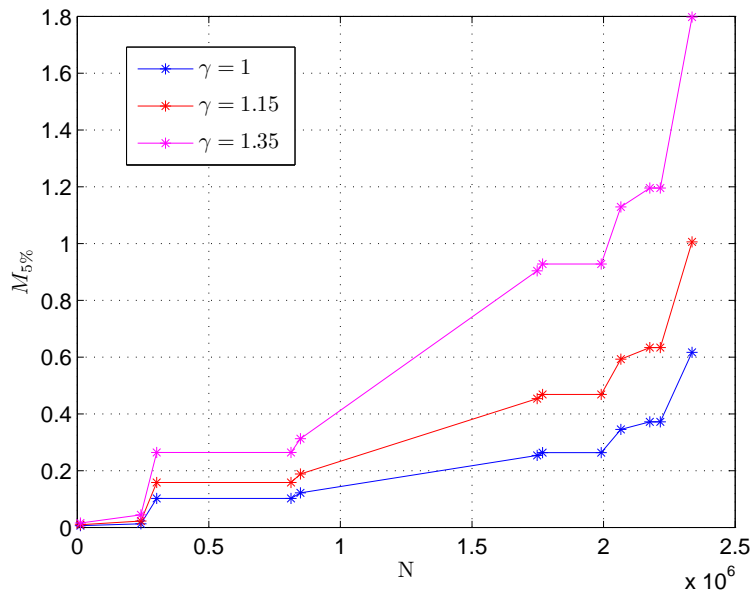


Figura 5.5: Evolución del número de Miner según EC3 ( $p=5\%$ ) para un detalle 112 aplicando el espectro de tensiones de la tabla 5.1 en función de diferentes coeficientes de minoración  $\gamma M_f$ .

### 5.3.3. Descenso del límite de durancia para cargas de amplitud variable

Tal y como se comentó anteriormente, EC3 establece un descenso en el límite de durancia para espectros de cargas de amplitud variable cuando el rango de tensión de al menos uno de los bloques supere el límite de fatiga a amplitud constante. Este procedimiento está fundamentado en el descenso del límite de durancia que experimentan los materiales al aumento del tamaño de grieta, tal y como muestra el diagrama K-T. No obstante, EC3 no aporta información acerca de la forma en que se han obtenido dichos valores.

### 5.3.4. Los coeficientes de mayoración de cargas $\gamma_{Ff}$ y minoración de resistencia $\gamma_{Mf}$

Las consideraciones realizadas para el caso de carga de amplitud constante, referentes a la modificación de las curvas de cálculo del EC3, son igualmente aplicables al caso de carga de amplitud variable, como se puede ver en la figura 5.6. Tal y como sucede en el caso de fatiga a amplitud constante, la aplicación de un coeficiente de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf} \neq 1$  desciende el límite de durancia de la curva de referencia considerada.

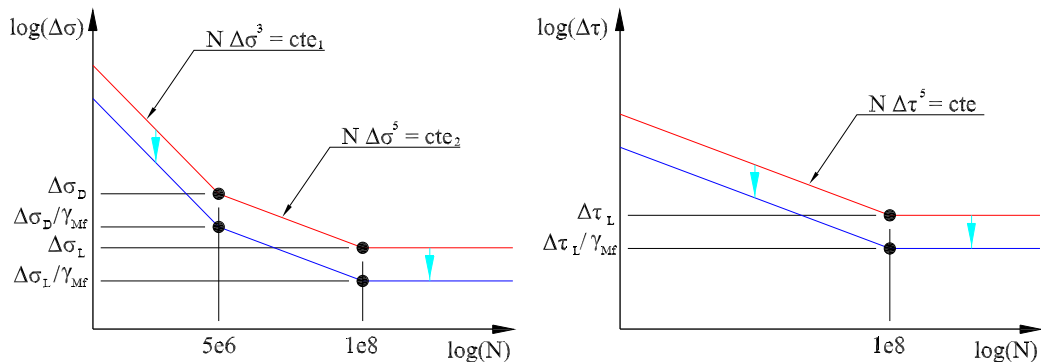


Figura 5.6: Desplazamiento descendente de las curvas de resistencia a fatiga debido a la aplicación de  $\gamma_{Mf}$  para el caso de carga de amplitud variable.

Las ecuaciones 5.6 y 5.7, correspondientes al caso de amplitud constante, son perfectamente válidas para el caso de carga de fatiga de amplitud variable.

## 5.4. Desarrollo estadístico de las variables $\log(N)$ y $\log(\Delta\sigma)$

Las principales hipótesis consideradas por el EC3 son las siguientes:

- El tiempo de vida a fatiga al nivel de tensión  $\Delta\sigma_i$  de los componentes considerados sigue una distribución log-normal, es decir:

$$\log(N) \sim N(\mu_i, \sigma) \tag{5.10}$$

- Se supone que la desviación típica  $\sigma$  de la variable  $\log(N)$  de cada componente considerado es constante e independiente del rango de tensión considerado.
- Las curvas proporcionadas por EC3 están asociadas a una probabilidad de referencia del 5% con un intervalo de confianza del 75%.

Aplicando las anteriores hipótesis y a partir del conocimiento de un valor de desviación típica de la variable  $\log(N)$  del elemento considerado [83, 33], se propone una interpretación estadística del EC3, la cual permite obtener la distribución estadística de la variable  $\log(\Delta\sigma)$ , así como las correspondientes del número de Miner y el rango de tensión equivalente.

Admitiendo que el logaritmo del tiempo de vida de un componente estructural se distribuye normalmente, se tiene la siguiente ecuación:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N) - \mu_i}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (5.11)$$

donde  $\mu_i$  representa el valor medio de la variable  $\log(N)$  para un determinado rango de tensión  $\Delta\sigma_i$ . Dicho valor medio se puede obtener a partir del conocimiento de la curva S-N proporcionada por el EC3 (asociada a una probabilidad de referencia del 5%) y de un valor de desviación típica de la variable  $\log(N)$ . Por otra parte, las curvas de cálculo proporcionadas por el EC3 son obtenidas mediante el modelo de ajuste lineal de Basquin, por lo que verifican la ecuación  $N \cdot \Delta\sigma^m = cte$ . La representación de dicha ecuación en escala doblemente logarítmica da lugar a una recta, donde  $\log(cte)$  es, a su vez, una constante y representa el punto de corte de la recta con el eje de abscisas y  $m$  es la pendiente de dicha recta. Diferentes valores de  $\log(cte)$ , manteniendo el mismo exponente  $m$ , definen una familia de rectas paralelas entre sí. Por lo tanto, considerando que la variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente con una desviación típica constante para cualquier rango de tensión, se pueden asimilar los valores que adopta la variable aleatoria como pertenecientes a distintas curvas percentiles de un campo S-N, compartiendo todas ellas un mismo exponente  $m$  (condición de desviación típica constante e independiente del rango de tensión) y diferenciándose en la constante  $m$ , tal y como se muestra en la figura 5.7.

Los valores pertenecientes a los diferentes percentiles, pueden generarse considerando  $\log(N)$  como variable aleatoria para un determinado  $\log(\Delta\sigma)$ , o considerando  $\log(\Delta\sigma)$  como variable aleatoria para un determinado  $\log(N)$ , tal y como se muestra en la figura 5.8. Aplicando el Modelo Lineal de Basquin considerado por el EC3, se obtiene la media  $\mu_i$  de la variable  $\log(N)$  al nivel  $\Delta\sigma_i$  viene dado por:

$$\mu_i = \log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma), \quad (5.12)$$

siendo  $\log(R)$  el punto de corte de la curva media con el eje de abscisas. Considerando que la curva de cálculo del EC3 está asociada a un 5% de probabilidad de referencia, la obtención del valor de  $\log(R)$  es inmediata, tal y como se muestra en la ecuación 5.13:

$$2 \cdot 0,05 - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(S) - \log(R)}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (5.13)$$

$$\log(S) = \log(5 \cdot 10^6) + m \cdot \log(\Delta\sigma_D).$$



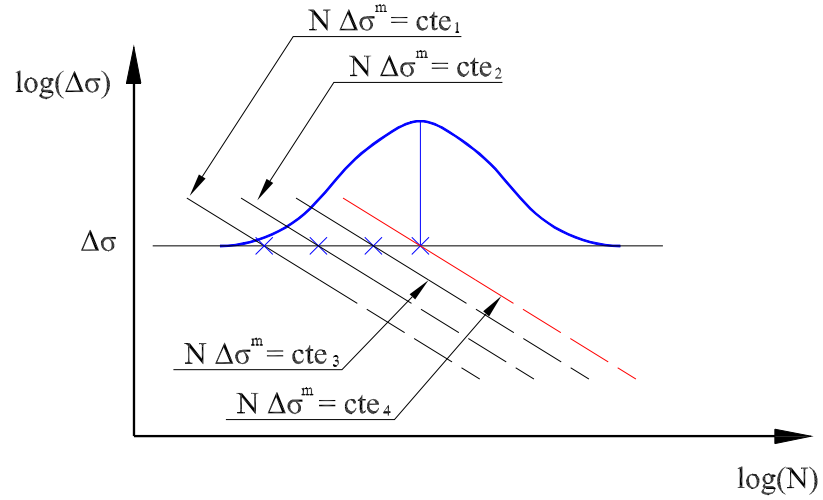


Figura 5.7: Valores que adopta la variable  $\log(N)$  y su pertenencia a diferentes curvas percentiles.

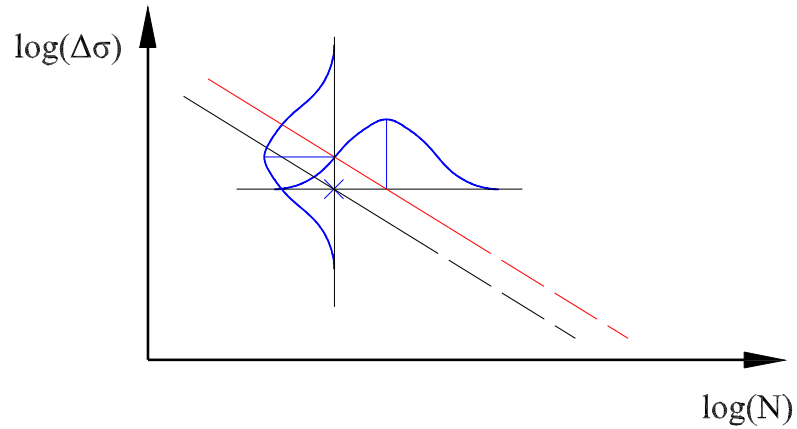


Figura 5.8: Pertenencia de un mismo valor a 2 a las distribuciones de  $\log(N)$  y  $\log(\Delta\sigma)$ .

Por lo tanto, la ecuación 5.11 se puede expresar de la siguiente forma:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N) - (\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma))}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (5.14)$$

Reordenando los términos de la ecuación 5.14 se obtiene la ecuación 5.15:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(\Delta\sigma) - (1/m)(\log(R) - \log(N))}{\sqrt{2}(\sigma/m)} \right). \quad (5.15)$$

La ecuación 5.15 permite también considerar  $\log(\Delta\sigma)$  como una variable aleatoria, tal y como se muestra en la ecuación 5.16:

$$\log(\Delta\sigma) \sim N \left( \frac{1}{m} \cdot \log \frac{R}{N}, \frac{\sigma}{m} \right). \quad (5.16)$$

Tabla 5.2: Comparación de los valores de desviaciones típicas de la variable  $\log(N)$  consultados en [83] y [33].

	Datos provenientes de ITEA [33]	Datos provenientes de ECCS [83]
Viga laminada	0.125-0.315	0.18-0.21
Viga soldada	0.150-0.230	0.15-0.21
Rigidizador	0.115-0.170	0.16-0.25
Unión transversal	0.115-0.19	0.11-0.22
Unión longitudinal	0.110-0.140	0.11-0.22
Platabanda sobre ala	0.070-0.140	0.10-0.18
Unión atornillada a cortante	0.23	no considerada

Debido a que la definición de  $\log(\Delta\sigma)$  como variable aleatoria ha sido obtenida a partir de la correspondiente de  $\log(N)$ , se establece una relación de compatibilidad entre ambas distribuciones.

## 5.5. Acerca de los valores de dispersión de la variable $\log(N)$

El desarrollo estadístico propuesto en el presente capítulo requiere del conocimiento del valor de desviación típica  $\sigma$  de la variable  $\log(N)$  de la categoría considerada. Lamentablemente, el EC3 no proporciona valores de desviación típica de las categorías contenidas en el código. Tampoco aporta información referente a los datos experimentales a partir de los cuales se han generado las curvas contenidas en el código, ni refiere a otra norma donde poder ampliar información al respecto. Afortunadamente, existen al menos 2 publicaciones [83, 33] que aportan estimaciones de desviación típica para algunos detalles constructivos considerados por EC3, las cuales se reproducen a continuación en la tabla 5.2 y permiten la aplicación de los desarrollos estadísticos objeto de la presente tesis doctoral, al menos para las categorías contenidas en dicha tabla.

## 5.6. El coeficiente parcial $\gamma_{Mf}$

Tal y como se puede comprobar en la ecuación 5.8, la consideración de un coeficiente de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf}$  produce un desplazamiento descendente de la curva de referencia, lo que se traduce en una disminución del número de ciclos de referencia para un determinado rango de tensión. Como consecuencia, la ecuación 5.14 se modifica de la siguiente forma:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N) - \left( \log(R) - m \cdot \log \left( \frac{\Delta\sigma}{\gamma_{Mf}} \right) \right)}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (5.17)$$

o lo que es lo mismo:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N) - m \cdot \log(\gamma_{Mf}) - (\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma))}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (5.18)$$

No obstante, debido a que el EC3 considera curvas S-N diferentes en función del tipo de esfuerzo considerado, el estudio debe realizarse de forma separada para los supuestos de fatiga de amplitud constante y variable.

### 5.6.1. Fatiga de amplitud constante

Para el caso de fatiga de amplitud constante, las curvas S-N consideradas por el EC3 constan de un tramo recto más un límite de fatiga. Respecto a la variable  $\log(N)$ , la introducción del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  se puede considerar como:

1. Un desplazamiento del valor medio de la distribución estadística, tal y como se expresa en la ecuación 5.19 (figura 5.9 izquierda):

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N) - ((\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma)) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}))}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (5.19)$$

2. Un desplazamiento de la variable  $\log(N)$ , tal y como se expresa en la ecuación 5.20 (figura 5.9 derecha):

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{(\log(N) - m \cdot \log(\gamma_{Mf}) - (\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma)))}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (5.20)$$

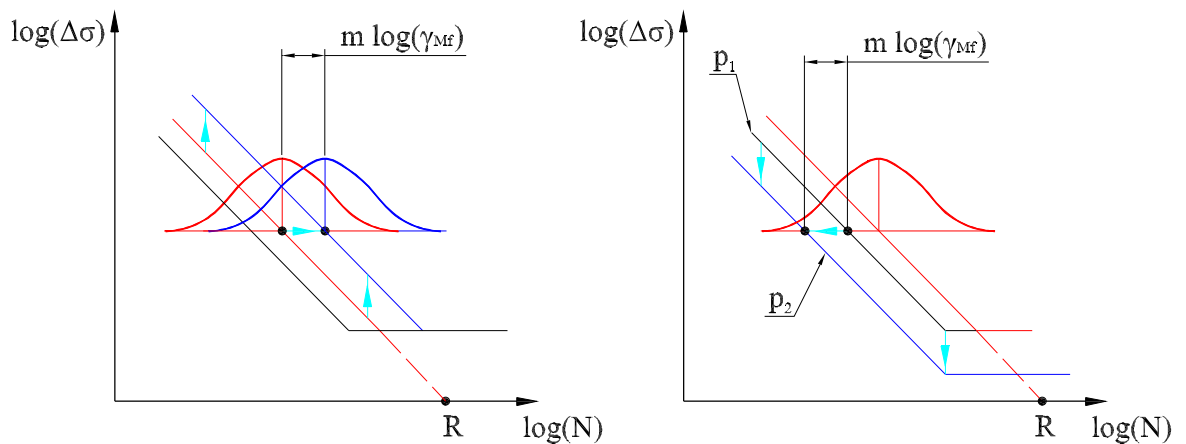


Figura 5.9: Diferentes interpretaciones de la aplicación del coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$  en escala doblemente logarítmica considerando la variable  $\log(N)$ .

Asimismo, para la variable  $\log(\Delta\sigma)$ , la introducción del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  se puede considerar como:

1. Un desplazamiento del valor medio de la distribución estadística tal y como se expresa en la ecuación 5.21 (figura 5.10 izquierda):

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(\Delta\sigma) - [(1/m)((\log(R) - \log(N)) + \log(\gamma_{Mf}))]}{\sqrt{2}(\sigma/m)} \right). \quad (5.21)$$

2. Un desplazamiento de la variable  $\log(\Delta\sigma)$ , tal y como se expresa en la ecuación 5.22 (figura 5.10 derecha):

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{(\log(\Delta\sigma) - \log(\gamma_{Mf})) - (1/m)(\log(R) - \log(N))}{\sqrt{2}(\sigma/m)} \right). \quad (5.22)$$

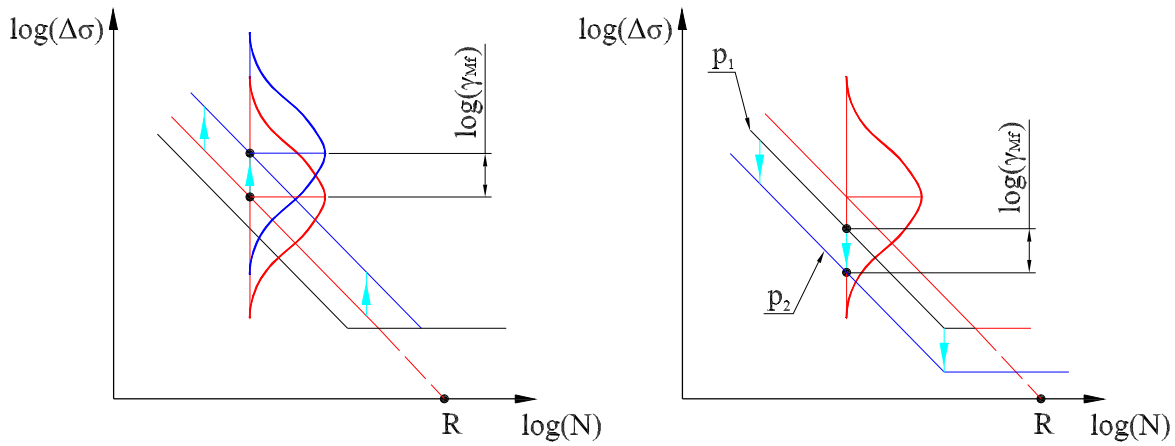


Figura 5.10: Diferentes interpretaciones de la aplicación del coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$  en escala doblemente logarítmica considerando la variable  $\log(\Delta\sigma)$ .

Cualesquiera de las consideraciones anteriormente comentadas se traducen en una disminución de la probabilidad de referencia asociada. Considerando la variable aleatoria  $\log(N)$ , la relación entre dichas probabilidades de referencia debidas a la consideración de un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$  se puede obtener mediante la ecuación 5.23:

$$2p_2 - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2} \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2p_1 - 1) - m \cdot \log(\gamma_{Mf})}{\sqrt{2} \sigma} \right), \quad (5.23)$$

donde  $p_1$  representa la probabilidad sin la aplicación del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  y  $p_2$  es la probabilidad resultante de la aplicación del coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ . A partir de la ecuación 5.23 se puede comprobar cómo el descenso de probabilidad de referencia causado por la aplicación del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  depende del exponente  $m$  y de la desviación típica  $\sigma$  del detalle constructivo considerado.

La misma conclusión se puede obtener a partir de las funciones de distribución de la variable  $\log(N)$ <sup>1</sup>:

$$F(\log(N_{ref_i}^0)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\log(N_{ref_i}^0) - (\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma_i^0))}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] = p_1. \quad (5.24)$$

<sup>1</sup>El superíndice 0 representa las variables en las que no se considera ningún coeficiente  $\gamma_{Mf}$

Aplicando un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ , se obtiene una probabilidad  $p_2$  (menor que  $p_1$ ):

$$F(\log(N_{ref_i})) = \frac{1}{2} \left[ 1 + erf \left( \frac{\log(N_{ref_i}^0) - (\log(R) - m \cdot \log(\Delta\sigma_i^0) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}))}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] = p_2. \quad (5.25)$$

En la figura 5.11 se representan las funciones de densidad y distribución de la variable  $\log(N)$  para un detalle 160 suponiendo un rango de tensión perteneciente al tramo de pendiente -1/3 ( $m=3$ ). Se ha considerado un desplazamiento del valor medio de la distribución estadística de la variable aleatoria  $\log(N)$ .

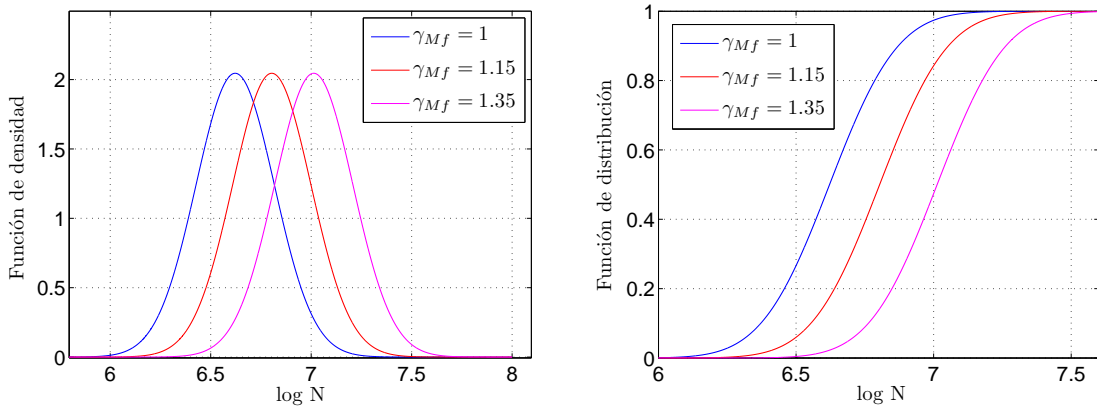


Figura 5.11: Desplazamiento de las funciones de densidad y distribución de  $\log(N)$  de un detalle 160 según el EC3,  $\sigma = 0,195$ .

Aplicando la relación entre las distribuciones normal y log-normal, se obtienen las funciones de densidad y distribución asociadas a la variable aleatoria  $N$  (figura 5.12). Nótese que, a diferencia de la distribución normal, la distribución lognormal no es simétrica.

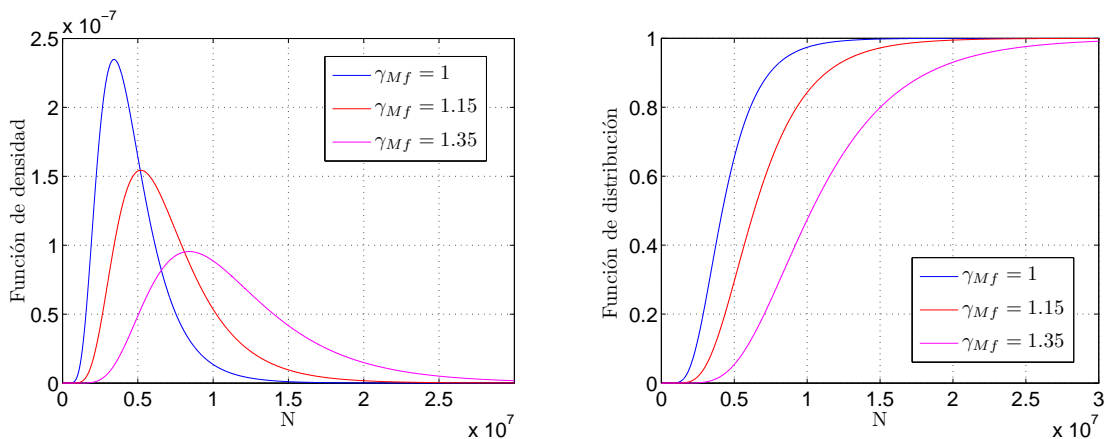


Figura 5.12: Desplazamiento de las funciones de densidad y distribución de  $N$  de un detalle 160 según el EC3.

Una primera conclusión que se obtienen de la figura 5.12 es la alta dispersión de la variable aleatoria  $N$  en comparación con  $\log(N)$ . Además, es notable la variabilidad que produce en la variable aleatoria  $N$  la aplicación de coeficientes de minoración.

Debido a que la distribución normal no está acotada inferiormente, se puede comprobar cómo, para un valor de ciclos igual a cero, existe una probabilidad de rotura del elemento. Una explicación para este supuesto puede ser una rotura prematura del elemento debido a defectos de fabricación. Incluso se comprueba cómo un valor de ciclos negativo tiene asociada un valor de probabilidad de fallo, lo cual carece de sentido físico alguno. La utilización de distribuciones de probabilidad acotadas inferiormente, como la distribución de Weibull, establece un número de ciclos mínimo para adoptar un valor de probabilidad de rotura.

### 5.6.2. Fatiga de amplitud variable

Para el caso de esfuerzos tangenciales de amplitud variable, las curvas S-N adoptadas por el EC3 mantienen la estructura de 1 tramo recto más un límite de fatiga, por lo que el desarrollo propuesto en el apartado 5.6.1 es perfectamente válido. No obstante, para esfuerzos normales de amplitud variable, las curvas S-N consideradas constan de 2 tramos lineales de diferentes pendientes, más un límite de fatiga, por lo que la reducción del valor que adopta la variable  $\log(N)$ , como consecuencia de un desplazamiento de la curva de referencia, varía en función del exponente  $m$ . Como consecuencia, en la zona de exponente  $m = 5$  la reducción de la probabilidad de referencia es mayor que en la zona de exponente  $m = 3$ .

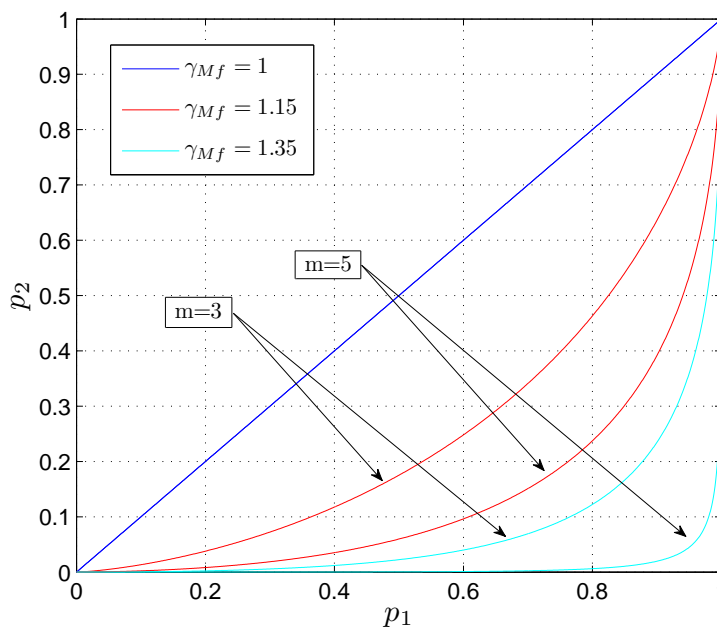


Figura 5.13: Reducción de probabilidad para detalle 160 ( $\sigma = 0,195$ ).

En la figura 5.13 se puede comprobar gráficamente la relación entre las probabilidades por la incorporación del coeficiente  $\gamma_{Mf}$ . Las variables dependiente ( $p_2$ ) e independiente ( $p_1$ ) son las probabilidades relacionadas en la ecuación 5.23. La gráfica permite visualizar la reducción de probabilidad entre las zonas con diferente pendiente ( $m = 3$  y  $m = 5$ ) y cómo la zona con

Tabla 5.3: Probabilidad de referencia en función del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  y exponente  $m$  considerados.

	Componente 160 ( $\sigma = 0,195$ )		Componente 112 ( $\sigma = 0,18$ )		Componente 80 ( $\sigma = 0,205$ )	
	m=3	m=5	m=3	m=5	m=3	m=5
$\gamma = 1$	5 %	5 %	5 %	5 %	5 %	5 %
$\gamma = 1,15$	0.49 %	0.068 %	0.39 %	0.043 %	0.56 %	0.019 %
$\gamma = 1,35$	0.013 %	0.00003 %	0.0067 %	0.000007 %	0.088 %	0.00007 %

exponente  $m = 5$  contribuye más a la reducción de probabilidad de referencia.

Asimismo, en la tabla 5.3 se muestra la diferencia en la reducción de las probabilidades de referencia existente entre las zonas de exponente  $m=3$  y  $m=5$  para diferentes detalles constructivos. Se puede comprobar cómo, a mayor exponente  $m$ , la reducción en la probabilidad de referencia es mayor. Una segunda consecuencia extraída a la vista de los datos es que a mayor dispersión de la variable  $\log(N)$ , menor es la reducción de probabilidad de referencia aplicada.

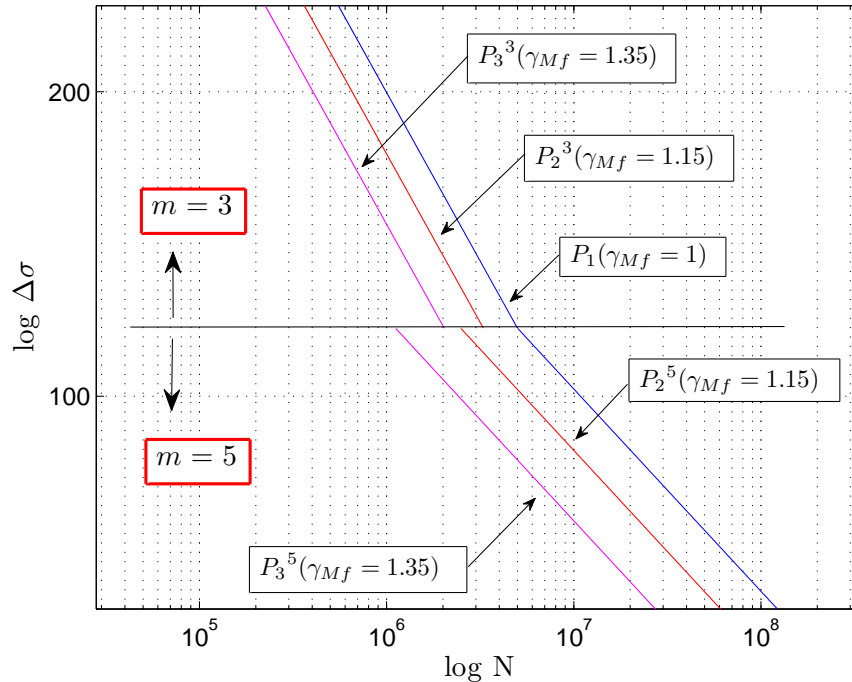


Figura 5.14: Desplazamiento de curvas de ajuste en detalle 160 debido a la aplicación de diferentes coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$ .

Si se considera cada zona de diferente pendiente por separado para la variable  $\log(N)$ , se obtiene la figura 5.14. Puede comprobarse la discontinuidad existente en las curvas percentiles como resultado de la utilización de diferentes coeficientes  $\gamma_{Mf}$ . Además, se comprueba

cómo el desfase existente entre las curvas de un mismo  $\gamma_{Mf}$  es proporcional al coeficiente considerado. La explicación acerca de la discontinuidad de las curvas percentiles es debido a que el desplazamiento de la curva producido por  $\gamma_{Mf}$  es vertical descendente y no horizontal. Las figuras 5.15 muestran el desplazamiento producido sobre la curva de cálculo de un detalle 160 como consecuencia de la aplicación de un coeficiente  $\gamma_{Mf}$ .

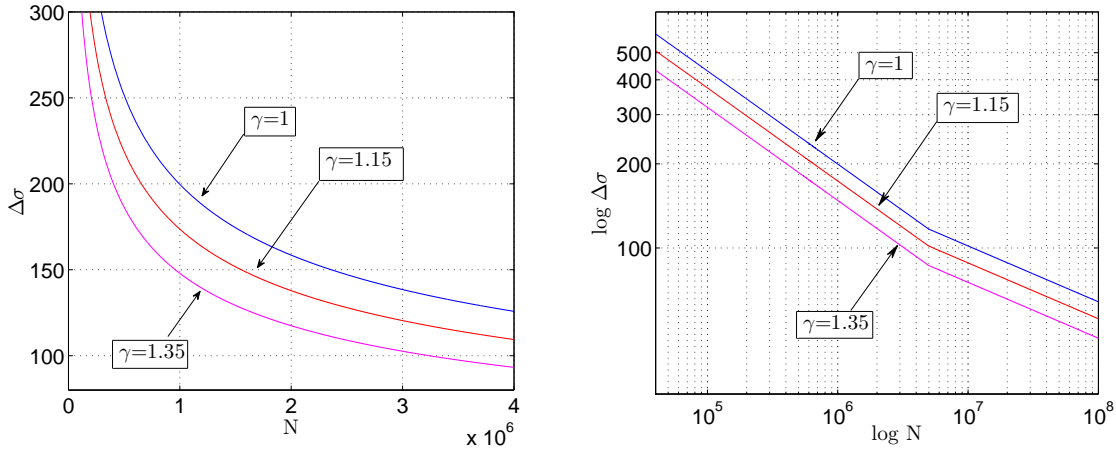


Figura 5.15: Desplazamiento del campo S-N de un detalle 160 (EC3) debido a la aplicación de diferentes coeficientes  $\gamma_{Mf}$ .

Las consecuencias reales de la aplicación de  $\gamma_{Mf}$  sobre una curva de referencia con 3 tramos lineales del EC3 se muestra en la figura 5.16. Asimismo, mediante la ecuación 5.26 se muestra cómo el descenso de probabilidad de referencia es proporcional al aumento del término  $(\log(N_{ref_i}) - \mu_i)$ . En la figura 5.16 se muestra gráficamente cómo el valor de dicho término depende del rango de tensión considerado.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\Delta(\log(N_{ref_i}) - \mu_i)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]. \quad (5.26)$$

En función de dicha situación se pueden considerar 5 situaciones:

1.  $\Delta\sigma_i \geq \Delta\sigma_D$ : la disminución de la probabilidad de referencia es un valor constante.
2.  $\Delta\sigma_D > \Delta\sigma_i \geq \Delta\sigma_D/\gamma_{Mf}$ : La disminución de la probabilidad aumenta de forma proporcional según desciende el rango de tensiones.
3.  $\Delta\sigma_D/\gamma_{Mf} \geq \Delta\sigma_i > \Delta\sigma_L$ : El descenso de la probabilidad de referencia se mantiene constante, pero es mayor que la registrada en el primer caso.
4.  $\Delta\sigma_L \leq \Delta\sigma_i < \Delta\sigma_L/\gamma_{Mf}$ : la probabilidad de referencia es la misma que en el caso anterior.
5.  $\Delta\sigma_i \leq \Delta\sigma_L/\gamma_{Mf}$ : Nuevo umbral de daño después de aplicar el coeficiente  $\gamma_{Mf}$ .

Los inconvenientes de tener diferentes probabilidades de referencia asociadas a una misma curva son notables, tal y como se pondrá de manifiesto en los siguientes apartados.



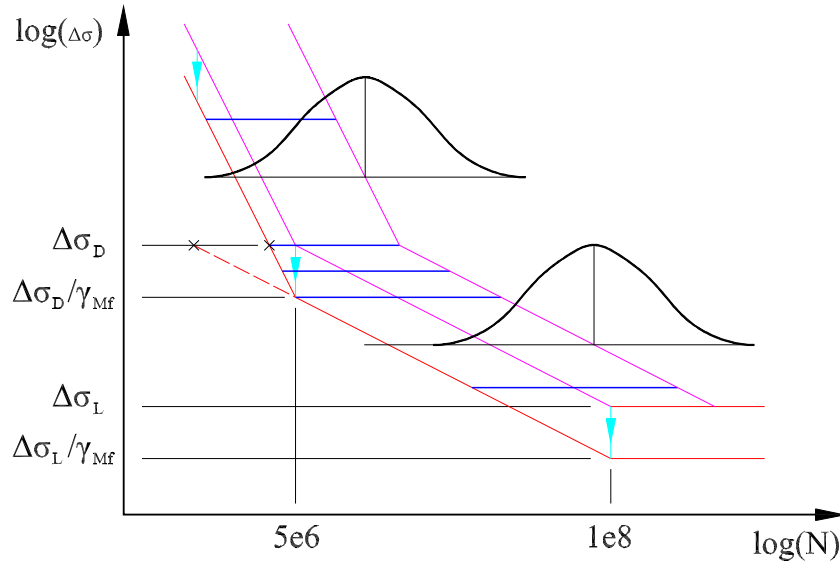


Figura 5.16: Desplazamiento de la curva de referencia en escala doblemente logarítmica debido al coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ .

## 5.7. El EC3 en fatiga de amplitud constante

### 5.7.1. Una consideración estadística del rango de tensión equivalente

A partir de la consideración estadística desarrollada para la variable  $\log(\Delta\sigma)$  en el apartado 5.4, se propone una distribución estadística para el rango de tensión equivalente, la cual se define mediante la expresión 5.27:

$$\Delta\sigma_{E,K} \sim \log N \left( \frac{1}{m_K} \cdot \log \frac{R_K}{N_K}, \frac{\sigma}{m_K} \right). \quad (5.27)$$

La variable  $N_K$  representa el número de ciclos de referencia que se considera para el cálculo de  $\Delta\sigma_{E,K}$ . Asimismo, los valores del exponente  $m_K$  ( $m_K = 3$  para esfuerzos normales y  $m_K = 5$  para esfuerzos tangenciales) y la constante  $R_K$ , vienen determinados por el número de ciclos de referencia  $N_K$  adoptados. El valor numérico que adopta la variable aleatoria se obtiene aplicando la definición considerada por el EC3 para el rango de tensión equivalente (igualdad de daño producido por ambos espectros aplicando la regla de Miner), tal y como se muestra en la ecuación 5.28:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \left( \frac{S_K \cdot M_1}{N_K} \right)^{\frac{1}{m_K}}, \quad (5.28)$$

donde  $M_1$  se refiere al valor adoptado por el número de Miner para el espectro de tensiones original y  $S_K$  es el valor exponencial del punto de corte de la curva percentil del elemento considerado con el eje de abscisas en escala doblemente logarítmica, es decir, la constante de la ecuación de Basquin  $N \cdot \Delta\sigma^m = S_K$ . Las figuras 5.17 y 5.18 representan las funciones de densidad y distribución de la variable  $\Delta\sigma_{E,K}$  para una categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ) y diferentes valores de  $N_K$ .

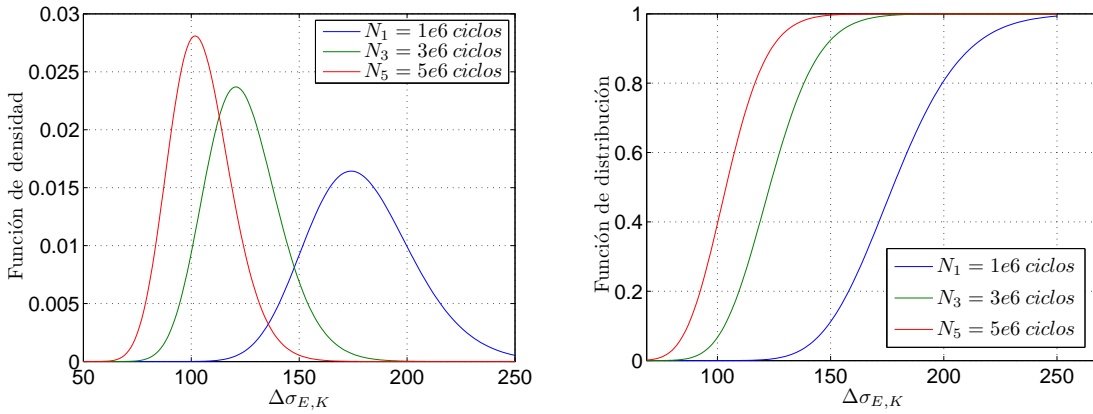


Figura 5.17: Funciones de densidad y distribución de la variable  $\Delta\sigma_{E,K}$  para una categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ).

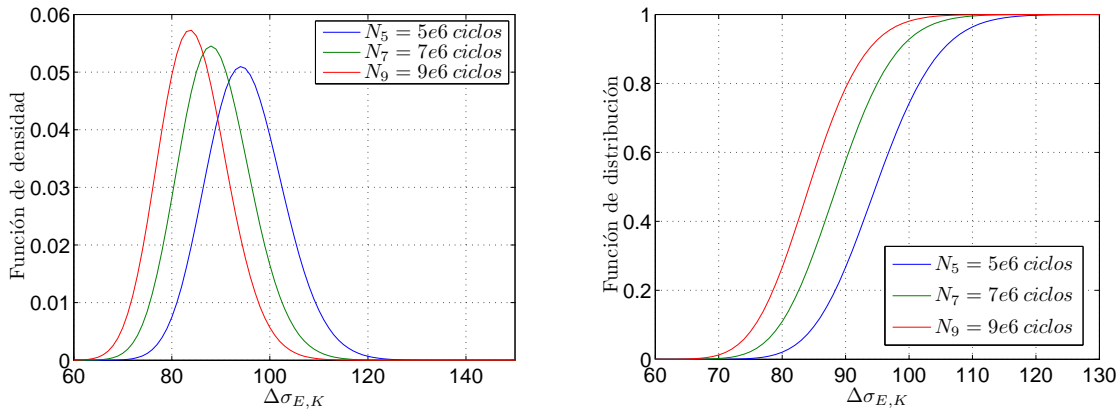


Figura 5.18: Funciones de densidad y distribución de la variable  $\Delta\sigma_{E,K}$  para una categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ).

Las ecuaciones 5.27 y 5.28 permiten obtener la probabilidad de fallo de un elemento sometido a cargas de amplitud constante. No obstante, el desarrollo estadístico expuesto permite también su aplicación para cargas de amplitud variable.

### 5.7.2. Consecuencias de la aplicación del coeficiente $\gamma_{Mf}$ sobre el rango de tensión equivalente

La aplicación de un coeficiente de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf}$  modifica la ecuación 5.27 dando lugar a la ecuación 5.29:

$$\Delta\sigma_{E,K} \sim \log N \left( \frac{1}{m_K} \cdot \log \frac{R}{N_K} + \log(\gamma_{Mf}), \frac{\sigma}{m_K} \right). \quad (5.29)$$

Asimismo, la aplicación de un coeficiente  $\gamma_{Mf}$  también modifica el valor que adopta la variable aleatoria, dando lugar a la ecuación 5.30:

$$\Delta\sigma_{E,K} = \left( \frac{S \cdot \gamma_{Mf}^{m_K} \cdot M_1}{N_K} \right)^{\frac{1}{m_K}}. \quad (5.30)$$

## 5.8. El EC3 en fatiga en amplitud variable

### 5.8.1. Una interpretación estadística de la Regla de Miner

En el presente apartado se propone una consideración estadística para la regla de Miner, lo que permite obtener la probabilidad de fallo de un elemento estructural. Esta nueva visión del parámetro amplía sus posibilidades como estimador de daño y posibilita un estudio del mismo bajo una concepción estadística. A partir de las ecuaciones 5.11 y 4.1 se obtiene la ecuación 5.31:

$$2p - 1 = erf \left( \frac{\log(M_{ref}) - (\mu_i - \log(N_{ref_i}))}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (5.31)$$

El subíndice *ref* se refiere a la probabilidad de referencia asociada a la curva S-N considerada. Por lo tanto, la distribución estadística asociada al número de Miner se define de la siguiente forma:

$$M_{ref} \sim \log N(\mu_i - \log(N_{ref_i}), \sigma). \quad (5.32)$$

El término  $\mu_i - \log(N_{ref_i})$  se puede expresar en forma de la probabilidad de referencia asociada  $p_i$ . De esta forma, la expresión para la variable  $\log(M)$  será:

$$M_{ref} \sim \log N(-\sqrt{2}\sigma \cdot erf^{-1}(2p_i - 1), \sigma). \quad (5.33)$$

Las anteriores ecuaciones también se pueden expresar en función de los puntos de corte de las rectas percentiles con el eje  $\log(N)$  de la siguiente forma:

$$2p - 1 = erf \left( \frac{\log(M_{ref}) - \log(R/S)}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (5.34)$$

donde  $\log(R)$  y  $\log(S)$  representan los puntos de corte de las curvas media y de referencia con el eje de abscisas, respectivamente. De esta forma, las variables aleatorias  $\log(M_{Ref})$  y  $M_{Ref}$  se pueden expresar mediante la siguiente expresión:

$$M_{ref} \sim \log N \left( \log \left( \frac{R}{S} \right), \sigma \right). \quad (5.35)$$

En caso de tomar como curva de referencia la curva media (curva S-N asociada a una probabilidad de referencia del 50 %), las variables aleatorias se convierten en:

$$M_\mu \sim \log N(0, \sigma). \quad (5.36)$$

Es importante comentar que para establecer la relación entre las distribuciones normal y lognormal, debe considerarse que el logaritmo utilizado para referirse tanto a número de ciclos como número de Miner, es el logaritmo decimal (base 10) y no natural o neperiano, por lo que las fórmulas que relacionan ambas distribuciones deben de reflejar este hecho.

Tal y como muestra la ecuación 5.36, la distribución estadística de la variable  $M_\mu$  no depende del rango de tensión de los datos considerados, por lo que  $M_\mu$  puede ser considerada como una variable de normalización.

La misma conclusión se puede obtener para  $M_{Ref}$  a partir de la ecuación 5.35; puesto que los valores de  $R$ ,  $S$  y  $\sigma$  son constantes para cualquier rango de tensiones  $\Delta\sigma_i$ , la variable  $M_{Ref}$  es, por tanto, una variable de normalización. Además, una propiedad interesante es que los cambios iso-probabilísticos también son iso-Miner, tal y como se puede comprobar en la figura 5.19, donde se representa una curva de referencia y la curva media de un elemento para un caso general (2 tramos lineales con límite de endurencia)

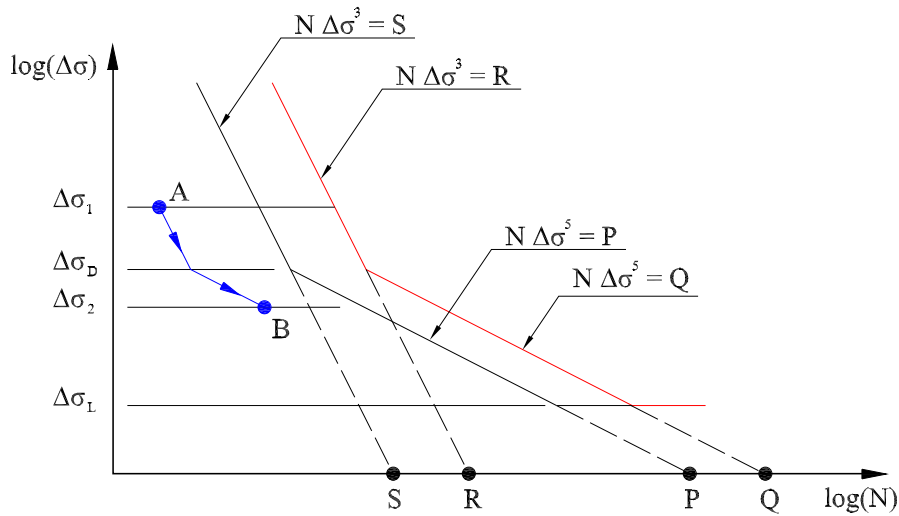


Figura 5.19: Definición de una curva percentil cualquiera del modelo y de la curva media del mismo.

En la figura 5.19 se muestra una translación desde el rango de tensión  $\Delta\sigma_1$  (punto A) hasta el rango  $\Delta\sigma_2$  (punto B). A partir de las ecuaciones de cada tramo lineal, se comprueba cómo la transformación iso-Miner ( $M_A = M_B$ ) también es iso-probabilística y viceversa. La descripción probabilística del número de Miner mostrada en la ecuación 5.35 sigue siendo perfectamente válida, independientemente de que el cambio de rango de tensiones implique tramos lineales de diferente pendiente, puesto que el valor medio de la variable no varía ( $\log(R/S) = \log(Q/P)$ )

### Un ejemplo de aplicación

Supongamos que para una categoría 112, correspondiente a una unión soldada longitudinal (límite de fatiga a amplitud constante  $\Delta\sigma_D = 83$  MPa, umbral de daño  $\Delta\sigma_L = 45$  MPa) se le aplica el espectro de tensiones que se muestra en la tabla 5.1. La consideración de un campo S-N estadístico permite aplicar el número de Miner suponiendo distintas curvas de referencia (en este caso, se han considerado las curvas S-N referidas al 1%, 5% y 50%).

Mediante la ecuación 5.33 se ha generado las distintas distribuciones estadísticas considerando el número de Miner como una variable aleatoria para las probabilidades de referencia mencionadas. Asimismo, se ha adoptado un valor de dispersión para la variable  $\log(N)$  de

Tabla 5.4: Valores de número de Miner, medias y desviaciones típicas de la distribución  $M_{Ref}$  y las probabilidades de fallo obtenidas para el espectro de tensiones de la tabla 5.1.

	$P_{Ref} = 1\%$	$P_{Ref} = 5\%$	$P_{Ref} = 50\%$
$M_{Ref}$	0.8184	0.6170	0.3120
$\mu_{M_{Ref}}$	2.85	2.15	1.09
$\sigma_{M_{Ref}}$	1.23	0.93	0.47
$P_{fallo}$	0.25%	0.25%	0.25%

$\sigma = 0,18$ , tomado de la tabla 5.2. Los resultados obtenidos se exponen en la tabla 5.4.

Las gráficas correspondientes a las distribuciones estadísticas de las variables aleatorias de la tabla 5.4 se muestran en la figura 5.20. Como puede comprobarse, la variable aleatoria  $M_{Ref}$  adopta el valor unitario cuando la probabilidad de fallo del elemento (para un determinado espectro de tensiones) se iguala a la probabilidad de referencia considerada.

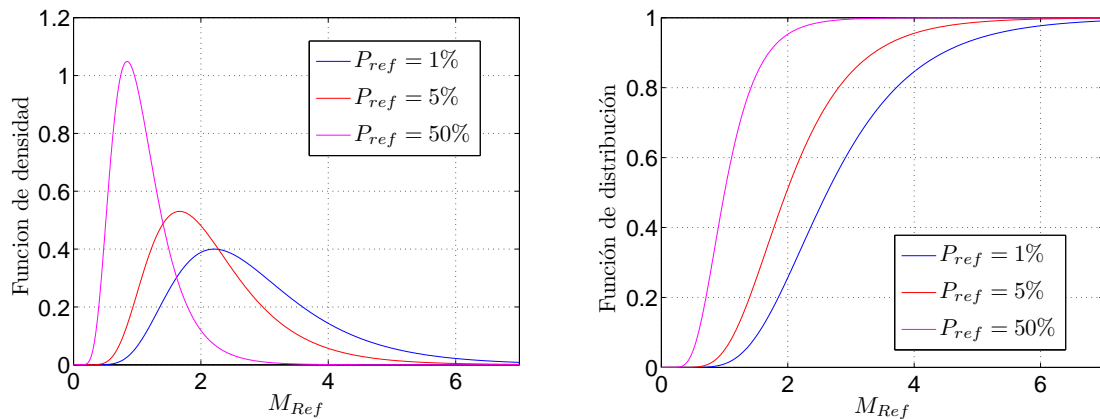


Figura 5.20: Funciones de densidad y distribución de las variables  $M_{1\%}$ ,  $M_{5\%}$  y  $M_{50\%}$  para un detalle 112 (EC3)  $\sigma = 0,18$ .

A la vista de los resultados, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- Las ecuaciones 5.33 permiten generar distribuciones estadísticas para la variable  $M_{Ref}$ , cualquiera que sea la probabilidad de referencia escogida.
- Independientemente de dicha probabilidad de referencia, la probabilidad de fallo del detalle constructivo es siempre la misma, por lo que la consideración estadística propuesta para la variable  $M_{Ref}$  no entra en contradicciones.

### 5.8.2. Consecuencias de la aplicación del coeficiente $\gamma_{Mf}$ sobre el número de Miner

Una vez definido el número de Miner como variable aleatoria, es posible analizar, bajo un punto de vista estadístico, la implicación que tiene la aplicación de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$  sobre dicho parámetro.

De una forma general, la incorporación de un coeficiente  $\gamma_{Mf}$  modifica la ecuación 5.34 de la siguiente forma:

$$2p - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(M_{ref}) - (\log(R/S) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}))}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \operatorname{erf} \left( \frac{\log(M_{ref}) - (\log(R/S'))}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (5.37)$$

donde  $S' = S \cdot \gamma_{Mf}^{-m}$ . La constante  $S$  hace referencia a la curva antes de la aplicación del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  y  $S'$  a la constante de la nueva curva desplazada por la introducción de  $\gamma_{Mf}$ .

Las distribuciones estadísticas de las variables  $\log(M_{Ref})$  y  $M_{Ref}$  se expresan ahora de la siguiente forma:

$$M_{ref} \sim \log N \left( \log \left( \frac{R}{S} \right) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}), \sigma \right) = \log N \left( \log \left( \frac{R}{S'} \right), \sigma \right). \quad (5.38)$$

Como se puede comprobar, la utilización de un coeficiente de seguridad  $\gamma_{Mf}$  aumenta el valor medio de la distribución estadística de la variable  $\log(M_{Ref})$  una cantidad  $m \cdot \log(\gamma_{Mf})$ . En las figuras 5.21 y 5.22 se representan las funciones de densidad y distribución de las variables  $\log(M_{5\%})$  y  $M_{5\%}$  de una categoría 112, suponiendo un rango de tensión perteneciente al tramo de pendiente  $-1/3$  ( $m=3$ ), donde puede visualizarse el desplazamiento comentado anteriormente. La reducción de probabilidad de referencia sigue siendo la descrita por la ecuación 5.23 (el descenso de probabilidad que produce  $\gamma_{Mf}$  en la variable  $\log(M)$  es idéntico al producido en la variable  $\log(N)$ ).

La expresión 5.38 se puede expresar en forma de probabilidades de referencia utilizadas, tal y como muestra la expresión 5.39

$$M_{ref} \sim \log N \left( -\sqrt{2}\sigma \cdot \operatorname{erf}^{-1}(2p_1 - 1) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}), \sigma \right) = \log N \left( -\sqrt{2}\sigma \cdot \operatorname{erf}^{-1}(2p_2 - 1), \sigma \right), \quad (5.39)$$

donde, al igual que en la ecuación 5.23, la probabilidad  $p_1$  hace referencia a la curva sin aplicar el coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ , mientras que  $p_2$  es la probabilidad de referencia resultante de haber aplicado el pertinente coeficiente  $\gamma_{Mf}$ .

La modificación de la variable aleatoria  $M_{Ref}$  se realiza mediante la aplicación de la ecuación 5.40:

$$\log(M_{ref2}) = \log(M_{ref1}) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}) \Leftrightarrow M_{ref2} = M_{ref1} \cdot \gamma_{Mf}^m, \quad (5.40)$$

donde se define  $M_{Ref1}$  como la variable sin considerar la utilización del coeficiente  $\gamma_{Mf}$  y  $M_{Ref2}$  la resultante de haber aplicado un determinado coeficiente  $\gamma_{Mf}$ .

Una conclusión que se puede obtener a partir de la ecuación 5.40 es que el número de Miner aumenta más en la zona de exponente  $m = 5$  que en la zona de exponente  $m = 3$ .

No obstante, la introducción del coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$  conlleva graves inconvenientes a la hora de considerar  $M_{Ref}$  como una variable aleatoria:

- La ecuación 5.40 solamente es válida para el caso de rangos de tensiones con un mismo exponente  $m$ , no cumpliéndose la relación para cualquier otro caso.

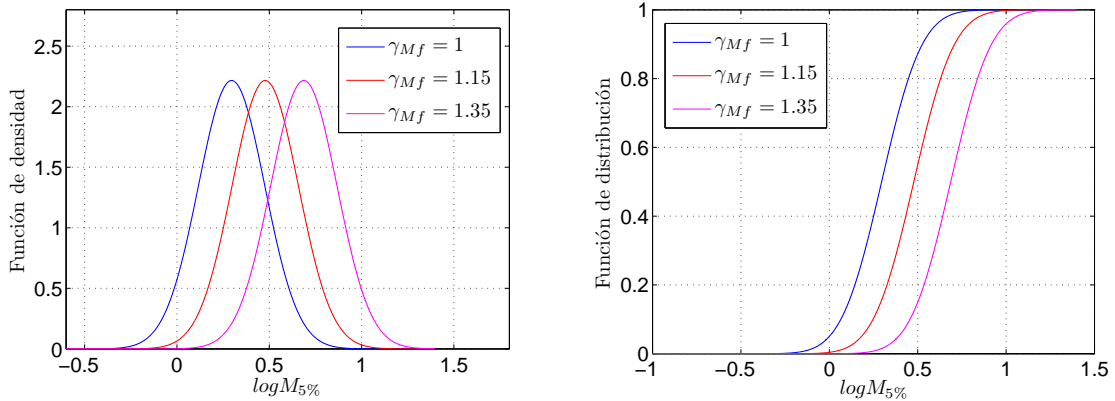


Figura 5.21: Funciones de densidad y distribución de  $\log(M_{ref})$  en función de diferentes coeficientes de minoración. Detalle 112 (EC3)  $\sigma = 0,18$ .

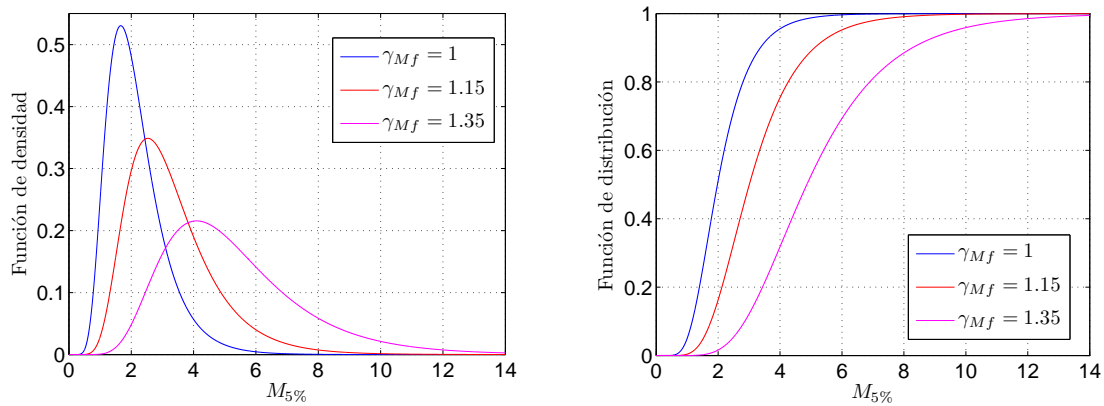


Figura 5.22: Funciones de densidad y distribución de  $M_{ref}$  en función de diferentes coeficientes de minoración. Detalle 112 (EC3)  $\sigma = 0,18$ .

- A partir de la ecuación 5.38 se comprueba cómo la consideración de un coeficiente  $\gamma_{Mf}$  distinto de 1, tiene como resultado la obtención de diferentes distribuciones estadísticas en función del exponente  $m$ .

Las consideraciones anteriores obligan a sopesar una serie de situaciones:

- La consideración estadística del número de Miner con la introducción de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$  distintos de la unidad es válida para el caso de cargas de amplitud constante ( $\Delta\sigma = cte$ ).
- Para el caso de cargas de amplitud variable, sigue siendo válida si para todos los rangos de tensión  $\Delta\sigma_i$  les corresponde un mismo exponente  $m$ .
- La consideración estadística del número de Miner con la introducción de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$  distintos de la unidad no sería aplicable a cualquier otro caso diferente a los anteriores. Esto es debido a la imposibilidad de mantener una única probabilidad

de referencia en todo el recorrido del rango de tensiones, tal y como se comentó en el apartado 5.6.2.

## 5.9. Desarrollo estadístico considerando la distribución de Weibull

Si bien es cierto que las consideraciones estadísticas propuestas en el presente capítulo están basadas en que la variable aleatoria se distribuye normalmente (hipótesis considerada por el EC3), la consideración de otro tipo de distribuciones estadísticas permite obtener diferentes expresiones tanto para el número de Miner como para el rango de tensión equivalente, desarrollando un modelo estadístico diferente, pero igualmente válido.

Considerando que la variable aleatoria  $\log(N)$  sigue, en cada nivel, una distribución de Weibull de 3 parámetros se obtiene:

$$\log N \sim W(\lambda_i, \delta_i, \beta_i). \quad (5.41)$$

Si se mantiene la hipótesis de desviación típica constante para la variable  $\log(N)$ , independientemente del rango de tensión considerado, las diferentes distribuciones para la variable aleatoria mantienen constantes los parámetros  $\delta$  y  $\beta$ . Las siguientes fórmulas permiten relacionar los parámetros de la distribución con su media, desviación típica y valor percentil:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \lambda_i + \delta \cdot \Gamma \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right], \\ \sigma &= \delta^2 \left( \Gamma \left[ 1 + \frac{2}{\beta} \right] - \Gamma^2 \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \right] \right), \\ x_p &= \lambda_i + \delta [-\log(1-p)]^{1/\beta}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Las anteriores ecuaciones permiten la obtención de los parámetros  $\lambda_i$ ,  $\delta$  y  $\beta$  de la variable  $\log(N)$  para un determinado rango de tensión  $\Delta\sigma_i$ . No obstante, para la resolución del sistema 5.42, es necesario el conocimiento de los parámetros  $\mu_i$ ,  $\sigma$  y la curva de cálculo proporcionada por el EC3. Es decir, la consideración de la distribución normal para la variable  $\log(N)$  permite, a partir de la curva de cálculo proporcionada por el EC3 y un valor de desviación típica de la variable  $\log(N)$ , la generación de un campo S-N estadístico. Sin embargo, la consideración de una distribución de Weibull para la generación del campo S-N requiere un dato adicional a los anteriormente comentados, debido a que dicha distribución tiene un parámetro más que la distribución normal. Una forma de obtención del valor medio de la distribución puede ser a partir de la media de la distribución normal.

A partir de la definición de la variable  $\log(N)$ , se obtiene la variable  $\log(\Delta\sigma)$ :

$$\log(\Delta\sigma) \sim W \left( \frac{\log(S) - \lambda_i}{m}, \frac{\delta}{m}, \beta \right), \quad (5.43)$$

siendo el valor  $\log(S)$  el punto de corte de la curva de referencia considerada con el eje de abscisas. A partir de las definiciones estadísticas de las variables  $\log(N)$  y  $\log(\Delta\sigma)$ , se obtiene las distribuciones estadísticas para las variables  $M_{Ref}$  y  $\Delta\sigma_{E,K}$ :



$$M_{Ref} \sim \log W(\lambda_i - \log(N_{Ref}), \delta, \beta), \quad (5.44)$$

$$\Delta\sigma_{E,K} \sim \log W\left(\frac{\log(S) - \lambda_i}{m}, \frac{\delta}{m}, \beta\right). \quad (5.45)$$

Tal y como se ha puesto de manifiesto en el apartado 5.8.1 para la distribución normal, la distribución  $M_{Ref}$  permanece invariante para cualquier rango de tensión considerado por la variable aleatoria, lo que permite considerarla como una variable de normalización. Asimismo, los desplazamientos iso-probabilísticos entre diferentes rangos de tensión también son iso-Miner y viceversa. En caso de considerar la utilización de coeficientes de minoración de resistencia  $\gamma_{Mf} \neq 1$ , las distribuciones estadísticas mostradas en las expresiones 5.44 y 5.45 se modifican de la siguiente forma:

$$M_{Ref} \sim \log W(\lambda_i - \log(N_{Ref}) + m \cdot \log(\gamma_{Mf}), \delta, \beta), \quad (5.46)$$

$$\Delta\sigma_{E,K} \sim \log W\left(\frac{\log(S) - \lambda_i}{m} + \log(\gamma_{Mf}), \frac{\delta}{m}, \beta\right). \quad (5.47)$$

Un desarrollo estadístico similar puede realizarse considerando la variable de normalización  $T = N \cdot \Delta\sigma^m$  propuesta en el apartado 6.3.1. De esta forma, y considerando que la variable  $\log(N)$  sigue una distribución de Weibull (ecuación 5.41), se obtiene la expresión :

$$T \sim \log W(\lambda_i + m \cdot \Delta\sigma_i, \delta, \beta). \quad (5.48)$$

Los inconvenientes de la aplicación de coeficientes  $\gamma_{Mf} \neq 1$  en el caso de tensiones normales de amplitud variable (consideración de 2 tramos lineales asociados a diferentes probabilidades de referencia) que se han expuesto anteriormente para la interpretación estadística utilizando la distribución normal, se mantienen bajo la consideración de una distribución de Weibull, por lo que la elección de una determinada distribución de probabilidad no proporciona una mejora en este aspecto. No obstante, la consideración de una distribución de Weibull para establecer una interpretación estadística del EC3 permite adoptar una curva percentil nula, aspecto que no es posible bajo la consideración de la distribución normal.

## 5.10. Consideraciones referentes al tamaño de defecto

Tal y como se ha comentado con anterioridad, el EC3 define diferentes categorías en función del tipo de detalle estructural y tipo de carga considerada. No obstante, para una misma categoría el código permite considerar diferentes categorías en función de proceso de fabricación y el nivel de acabado. Por ejemplo, el EC3 distingue 3 tipos de categorías diferentes para una pletina o producto plano, tal y como se muestra en la figura 5.23:

En función del nivel de acabado del elemento, se modifica el tamaño de defectos existentes en el mismo. Por lo tanto, la consideración de diferentes categoría para un mismo elemento viene condicionada por el tamaño de los defectos existences. Un elemento con mejor acabado contendrá defectos de menor tamaño, por lo que la concentración de tensiones en los mismos será relativamente baja, mientras que defectos mayores aumentan el efecto concentrador de las tensiones, produciendo fracturas prematuras.




Categoría de detalle	Detalle constructivo	Descripción	Requisitos
160	<p>NOTA La resistencia a fatiga asociada a la categoría 160 es la más alta. Ningún detalle puede tener mayor resistencia a fatiga para ningún número de ciclos.</p> 	<p><u>Productos laminados o extruidos</u></p> <p>1) Chapas y productos planos 2) Perfiles laminados. 3) Perfiles huecos sin soldadura, circulares o rectangulares</p>	<p><u>Detalles 1) a 3):</u></p> <p>Las aristas vivas, los defectos superficiales y los defectos de laminación deberán desbastarse hasta su eliminación, dejando transiciones suaves.</p>
140		<p><u>Chapas oxicrotadas o cizalladas</u></p> <p>4) Material oxicrotado o cizallado con posterior saneamiento de bordes. 5) Material oxicrotado a máquina con estrías de corte regulares y poco profundas, o a mano con posterior saneamiento de bordes para eliminación de aristas.</p>	<p>4) Deberá eliminarse toda traza visible de aristas. Las superficies de corte deberán ser mecanizadas o desbastadas y toda rebaba eliminada.</p>
125		<p>Máquinas de oxicrote que cumplan las especificaciones de calidad de la Norma Europea EN 1090.</p>	<p>Cualquier marca dejada por la maquinaria empleada, por ejemplo en el desbaste, deberá ser paralela a la dirección de las tensiones.</p> <p><u>Detalles 4) y 5)</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Las esquinas entrantes deberán ser mejoradas mediante desbaste (pendiente <math>\leq 1/4</math>) o tenerse en cuenta en los cálculos mediante el factor de concentración de tensiones correspondiente.</li> <li>- No se admiten reparaciones por relleno con soldadura.</li> </ul>

Figura 5.23: Ejemplo de un mismo tipo de elemento (pletina longitudinal) que puede pertenecer a 3 categorías diferentes en función del proceso de fabricación y del nivel de acabado (categorías 160, 140 ó 125).

Asimismo, en el apartado 6.5.12 se ha expuesto un desarrollo teórico para obtener la función de distribución del tamaño de defectos iniciales existentes en un elemento. Si se considera que la vida a fatiga viene determinada por el tamaño *máximo* de defecto, se puede aceptar que las diferentes categorías consideradas por el EC3 vienen definidas por el tamaño de defecto máximo existente en los elementos considerados. Por lo tanto, el *tamaño máximo de defecto* supedita la pertenencia o no de un elemento a una determinada categoría. A partir de este razonamiento se pueden obtener 2 conclusiones inmediatas (figura 5.24):

- Las distribuciones de los tamaños de defectos iniciales deben de estar acotadas superiormente.
- La media y la desviación típica de las distribuciones aumentan a medida que disminuye la categoría del elemento.

La figura 5.24 muestra un ejemplo de 3 funciones de densidad para 3 categorías diferentes de un mismo elemento. Si se considera que la categoría 1 es superior a la categoría 2 y ésta es, a su vez, superior a la categoría 3, la forma que adoptan las diferentes funciones de densidad es la representada en la figura. Asimismo, si se considera un mismo tipo de acero para las 3 categorías, se puede suponer que el estado tensional con el que se inicia la fractura del elemento en la zona próxima al defecto considerado es la misma. De esta forma, se puede relacionar los factores concentradores de tensiones de 2 defectos correspondientes a 2 categorías diferentes con sus valores de resistencia nominal:

$$K_f^{cat1}(a_{max}^{cat1}) \cdot \Delta\sigma_c^{cat1} = K_f^{cat2}(a_{max}^{cat2}) \cdot \Delta\sigma_c^{cat2}. \quad (5.49)$$

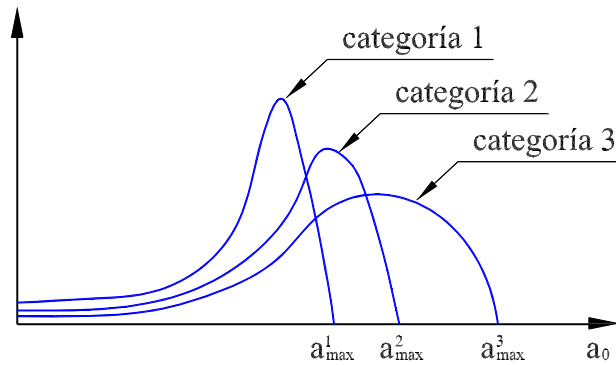


Figura 5.24: Ejemplo de funciones de densidad para la variable  $a_0$  para diferentes categorías de detalle (*categoría 1 > categoría 2 > categoría 3*).

La ecuación 5.49 está basada en el principio de similitud, por el cual diferentes combinaciones de tamaño de defecto y valor de tensión nominal aplicada permiten generar el mismo proceso de fatiga sobre el elemento [69], permitiendo establecer una relación entre los tamaños máximos de defecto correspondientes a diferentes categorías de un mismo elemento.

La particularidad de las distribuciones de la variable  $a_0$  (tamaño inicial de grieta) condicionan las correspondientes distribuciones de la variable  $\log(N)$ :

- La media de la distribución de  $\log(N)$  aumenta en función de la categoría considerada.
- De forma general y para un mismo tipo de elemento, no existe una relación entre la categoría del detalle considerado y la desviación típica de la distribución estadística.

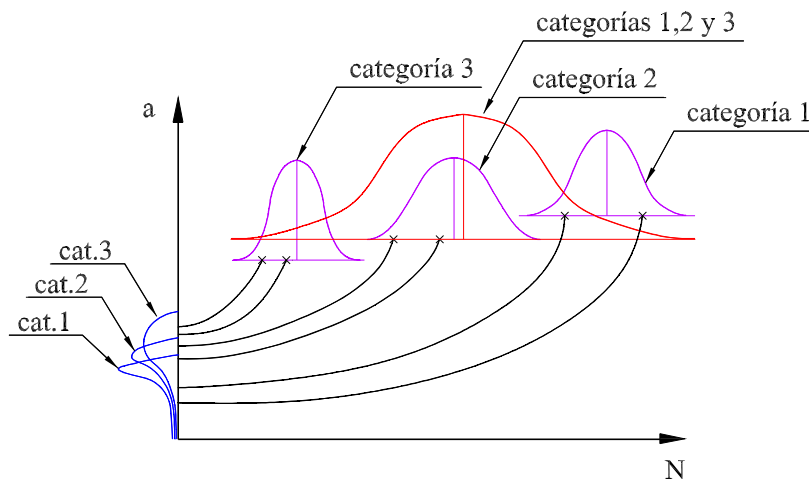


Figura 5.25: Correspondencia entre las funciones de densidad de las variables *tamaño inicial de grieta* y *vida a fatiga* considerando diferentes categorías para un mismo tipo de elemento (*categoría 1 > categoría 2 > categoría 3*).

La figura 5.25 muestra la correspondencia entre distribuciones del tamaño de defecto inicial y vida a fatiga para diferentes categorías, considerando un mismo tipo de elemento.

Así como la desviación típica de la variable  $a_0$  depende de la categoría del elemento considerado, esta relación no tiene porqué darse para la variable  $N$ . Asimismo, se muestra la función de densidad resultante de considerar conjuntamente las 3 categorías. Por el contrario, considerando la variable  $a_0$ , las distribuciones de categorías inferiores (tamaños de defectos grandes y pequeños) contienen automáticamente a las correspondientes a categorías superiores (tamaños de defectos pequeños).

## 5.11. Conclusiones

Se resumen brevemente las diferentes conclusiones obtenidas en el presente capítulo:

- Mediante de una curva de cálculo de EC3, aplicando las hipótesis consideradas por el código de cálculo y partiendo de una estimación para la desviación típica de la variable  $\log(N)$ , se ha generado un campo S-N estadístico que permite la obtención de cualquier curva percentil considerada.
- Mediante el campo estadístico generado, la traslación de la curva de referencia producida por la aplicación de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  se puede cuantificar en términos de reducción de la probabilidad de referencia considerada. Dicha reducción es constante en campos S-N generados por curvas con una única pendiente ( $m=3$  o  $m=5$ ), pero no se cumple para campos S-N compuestos por curvas con tramos de diferentes pendientes ( $m=3$  y  $m=5$ ).
- Considerando que la variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente, se han generado distribuciones estadísticas para el número de Miner y el rango de tensión equivalente, a partir de las cuales se pueden obtener valores de probabilidad de fallo para un elemento sometido a un determinado espectro de tensiones.
- La probabilidad de fallo obtenida a partir de la consideración estadística del número de Miner o el rango de tensión equivalente es idéntica, independientemente de la curva de referencia considerada para su obtención, siempre y cuando no se considere la utilización de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  en un diagrama con 2 tramos lineales de diferente pendiente ( $m=3$  y  $m=5$ ).
- Las consideraciones estadísticas expuestas anteriormente son igualmente válidas si se considera que la variable  $\log(N)$  sigue una distribución de Weibull, tal y como se ha expuesto en el apartado 5.9.

## Capítulo 6

# *Estudio de las hipótesis consideradas por EC3*

### 6.1. Introducción

Los códigos de cálculo a fatiga establecen una serie de procedimientos estandarizados para asegurar que un componente mantiene sus propiedades estructurales cuando es sometido a unas sollicitaciones determinadas con las condiciones de seguridad requeridas. Por la propia naturaleza general que tienen los códigos de cálculo a fatiga, deben de poder ser aplicables a un alto número de detalles constructivos bajo un conjunto infinito de variables propias de cada caso particular (sollicitaciones sobre el elemento, defectos de fabricación del material, soldaduras realizadas de modo incorrecto, distintos tipos de ambientes agresivos sobre el elemento en el transcurso de su vida útil, etc.). Asimismo, debe de tenerse en cuenta que, en ocasiones, los códigos de cálculo pueden ser utilizados por personal con una escasa cualificación, por lo que la aplicación de dichos códigos debe de ser asequible a un alto número de profesionales. Estos condicionantes hacen que las hipótesis admitidas por los códigos de cálculo para el tratamiento de los datos experimentales, en ocasiones, no reflejen de modo totalmente realista el comportamiento del material considerado, lo cual se suele suplir mediante la aplicación coeficientes de seguridad, tanto en las cargas consideradas como en la resistencia de los materiales.

No obstante, se establece la duda acerca de si las simplificaciones adoptadas por los códigos de cálculo como compensación a una mayor aplicabilidad y facilidad de uso son admisibles o, por el contrario, muestran un comportamiento del material excesivamente inexacto.

En el presente capítulo se pretende verificar la bondad de las hipótesis consideradas por el EC3. En los apartados 5.2 y 5.3 se resumen de forma esquemática los aspectos más importantes considerados por el código, tanto para cálculo de elementos sometidos a tensiones normales y tangenciales, como para cargas de amplitud constante y variable. El proceso de validación se llevará a cabo mediante la aplicación de 2 modelos de ajuste: primero se aplicará el Modelo de Basquin Normalizado propuesto en el capítulo 6.3, en el cual se consideran las hipótesis adoptadas por el EC3. Posteriormente se aplicará el modelo de Castillo y Fernández Canteli, lo que permitirá extraer conclusiones acerca de las hipótesis que son objeto de estudio.

Con intención de realizar un ajuste lo más parecido posible al realizado para la obtención de las curvas de cálculo en el EC3, no se han utilizado datos censurados en ninguno de los

modelos utilizados.

Algunas de las hipótesis consideradas por el EC3, como la verificación de la curva asociada a una probabilidad de referencia del 5% y el valor que adopta el exponente  $m$  del modelo utilizado, requieren la aplicación de los modelos de ajuste a resultados experimentales provenientes de detalles constructivos considerados por el código de cálculo. Por el contrario, el resto de hipótesis, como la consideración de la distribución normal para  $\log(N)$ , desviación típica constante independiente del nivel de tensión y la consideración de un modelo bilineal o trilineal con límite de fatiga dependiente de la probabilidad de referencia considerada, no requieren un detalle considerado por el EC3.

Aparte de las valoraciones realizadas teniendo en cuenta los criterios matemáticos y físicos, se han tenido en cuenta la simplificación y la facilidad de uso que pueden aportar las hipótesis consideradas y si su aplicación permite modelizar el comportamiento del material de una forma suficientemente realista.

## 6.2. Hipótesis consideradas por el EC3

A continuación se exponen algunos de los supuestos sobre los que se basa el modelo de ajuste considerado por el EC3:

- El modelo de ajuste utilizado por EC3 es el modelo lineal de Basquin, representado en escala doblemente logarítmica.
- Se considera que los datos de la variable  $\log(N)$  se distribuyen normalmente.
- Se supone una desviación típica constante para la variable  $\log(N)$  independiente del rango de tensión considerado.
- Los valores de las pendientes de las curvas de ajuste <sup>1</sup> se consideran fijas para todos los detalles constructivos considerados. En función del tipo de carga se considera una única pendiente de valor  $-1/3$  ( $m=3$ ) o dos rectas con valores de pendiente  $-1/3$  ( $m=3$ ) y  $-1/5$  ( $m=5$ ).
- EC3 proporciona diferentes curvas de cálculo en función del detalle constructivo considerado. No obstante, para un determinado detalle se proporciona únicamente una curva de cálculo, la cual tiene asignada una probabilidad de referencia del 5%.

## 6.3. Modelo Lineal de Basquin Normalizado

El modelo propuesto es una evolución del modelo lineal de Basquin descrito anteriormente en el apartado 2.3.1. Aplicando una serie de hipótesis y considerando una variable de normalización  $T$ , el modelo proporciona las curvas percentiles del campo S-N. Las hipótesis adoptadas por el modelo se enumeran a continuación:

- La variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente.

---

<sup>1</sup>Si bien el ajuste realizado por el modelo proporciona rectas en escala doblemente logarítmica, es común referirse a las mismas como las *curvas* de cálculo de modelo.

- La desviación típica de la variable  $\log(N)$  se considera constante, independientemente del rango de tensión considerado.

### 6.3.1. La variable normalizada $T$

Como se ha comentado anteriormente, el ajuste estadístico de los datos provenientes de diferentes niveles requiere el uso de una variable de normalización que permita su tratamiento conjunto en un único nivel. Debido a que el modelo de ajuste elegido tiene la expresión  $N \cdot \Delta\sigma^m = cte$ , la variable de normalización  $T$  se define como sigue:

$$T = N \cdot \Delta\sigma^m. \quad (6.1)$$

Si se considera que la variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente, se obtiene la siguiente expresión para la variable normalizada  $T$ :

$$T \sim \log N(\log(R), \sigma), \quad (6.2)$$

donde la constante  $\log(R)$  representa el punto de corte de la curva media con el eje de abscisas. Puesto que la variable  $T$  no depende del rango de tensiones considerado, puede ser considerada como una variable de normalización. La principal ventaja de la utilización de esta variable es su sencillez de uso y su fácil interpretación. El principal inconveniente radica en que para su aplicación es necesario conocer el exponente  $m$  del método de ajuste, que a priori es uno de los parámetros del modelo que se pretenden obtener. Para ello, previamente se procede a realizar una regresión lineal conjunta de los datos experimentales, lo que permite hallar el exponente  $m$  del modelo, así como la constante  $\log(R)$ .

Una vez obtenido el valor de  $m$ , se procede a ajustar los valores de la variable normalizada  $T$  mediante una distribución normal, obteniendo los estimadores de la media  $\log(R)$  y la desviación típica  $\sigma$  de la distribución.

Tal y como se comprueba, la constante  $\log(R)$  se puede obtener mediante la regresión lineal de los datos experimentales o a partir del estimador del valor medio de la distribución. Se ha comprobado cómo los valores obtenidos por ambos procedimientos son bastante similares, por lo que cualquiera de ellos puede ser utilizado.

Mediante la variable  $T$  se consigue una normalización basada en percentiles. Así, cualquier par de puntos  $(N_i, \Delta\sigma_i)$  y  $(N_j, \Delta\sigma_j)$  que al transformarlos conduzcan al mismo valor  $T$ , tendrán asociados la misma probabilidad de referencia, al pertenecer a la misma curva percentil.

### 6.3.2. Obtención de las curvas percentiles del modelo

El tamaño muestral considerado condiciona la precisión de las estimaciones de  $\log(R)$  y de la desviación típica del modelo. Por lo tanto, para la obtención de las curvas percentiles del campo S-N se requiere la consideración de un determinado nivel de confianza.

Debido a que el problema de la vida a fatiga es un problema de valores mínimos, para el cálculo de las curvas percentiles del modelo se considera más acertado establecer un valor *mínimo* que garantice que cuando el tamaño muestral tienda a infinito, al menos un  $(1 - \alpha)\%$  de los valores serán mayores que el límite considerado, en lugar de intervalos de confianza con valores máximo y mínimo alrededor de la media de la estimación.

De forma general, la obtención de un valor mínimo del límite de confianza de un determinado percentil para una distribución estadística se define de la siguiente forma:

$$x_0 = \hat{\mu} - k \cdot \hat{\sigma}, \quad (6.3)$$

donde el parámetro  $k$  depende del percentil considerado, el nivel de confianza  $(1 - \alpha)$  requerido y del tamaño muestral. Para la distribución normal, existen numerosas publicaciones que permiten acceder a valores tabulados del parámetro  $k$ . No obstante, Link [48] aporta una ecuación que permite obtener el parámetro  $k$  de forma automatizada, sin la necesidad de recurrir a valores tabulados para un determinado valor requerido, lo cual lo hace ideal para su implementación en programas informáticos.

El cálculo del parámetro  $k$  propuesto por Link se expone a continuación en 6.4:

$$k = \frac{z_p \cdot (1 - f) + \left( z_p^2 \cdot (1 - f)^2 - \left( (1 - f)^2 - \frac{z_\alpha^2}{2(n-1)} \right) \sqrt{z_p^2 - \frac{z_\alpha^2}{n}} \right)}{(1 - f)^2 - \frac{z_\alpha^2}{2(n-1)}}, \quad (6.4)$$

donde  $t_p$ ,  $t_\alpha$ ,  $f$ ,  $z_p$  y  $z_\alpha$  se definen como sigue:

$$\begin{aligned} t_p &= \sqrt{\ln \left( \frac{1}{p^2} \right)}, \\ t_\alpha &= \sqrt{\ln \left( \frac{1}{\alpha^2} \right)}, \\ f &= \frac{1}{4(n-1)}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$z_p = t_p - \frac{c_0 - c_1 \cdot t_p + c_2 \cdot t_p^2}{1 + d_1 \cdot t_p + d_2 \cdot t_p^2 + d_3 \cdot t_p^3},$$

$$z_\alpha = t_\alpha - \frac{c_0 - c_1 \cdot t_\alpha + c_2 \cdot t_\alpha^2}{1 + d_1 \cdot t_\alpha + d_2 \cdot t_\alpha^2 + d_3 \cdot t_\alpha^3}.$$

Los coeficientes de las ecuaciones 6.5 son los siguientes:

$$\begin{aligned} c_0 &= 2,515517, \\ c_1 &= 0,802853, \\ c_2 &= 0,010328, \\ d_1 &= 1,432788, \\ d_2 &= 0,189269, \\ d_3 &= 0,001308, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $p$  es la probabilidad de referencia considerada,  $\alpha$  el nivel de significación elegido y  $n$  el tamaño muestral. La generación de las curvas percentiles del campo de pendiente  $-1/m$  se realiza aplicando la ecuación 6.7:



Tabla 6.1: Parámetros obtenidos aplicando el modelo de Basquin normalizado a los datos de Dahle y Crupi para un nivel de confianza del 75 %.

	$\widehat{\log(R)}$	$\widehat{m}$	$\widehat{\sigma}$
Dahle	$18.24 \pm 0,0982$	$5.91 \pm 2,426$	$0.389 (0.334, 0.479)$
Crupi	$16.51 \pm 0,75$	$4.546 \pm 2,022$	$0.170 (0.131, 0.243)$

$$N \cdot \Delta\sigma^m = 10^{\left(\widehat{\log(R)} - k \cdot \widehat{\sigma}\right)}. \quad (6.7)$$

### 6.3.3. Ejemplos de aplicación del Modelo de Basquin Normalizado

En la figura 6.1 se representan los ajustes realizados a los datos de Dahle [52], correspondientes a una viga rectangular soldada sometida a esfuerzos cortantes que provocan grietas longitudinales sobre el cordón de soldadura (el detalle estructural se muestra en la figura 6.3). El campo S-N se ha generado considerando el nivel de confianza considerado por el EC3 (75 %). Los resultados del ajuste se exponen en la figura 6.1:

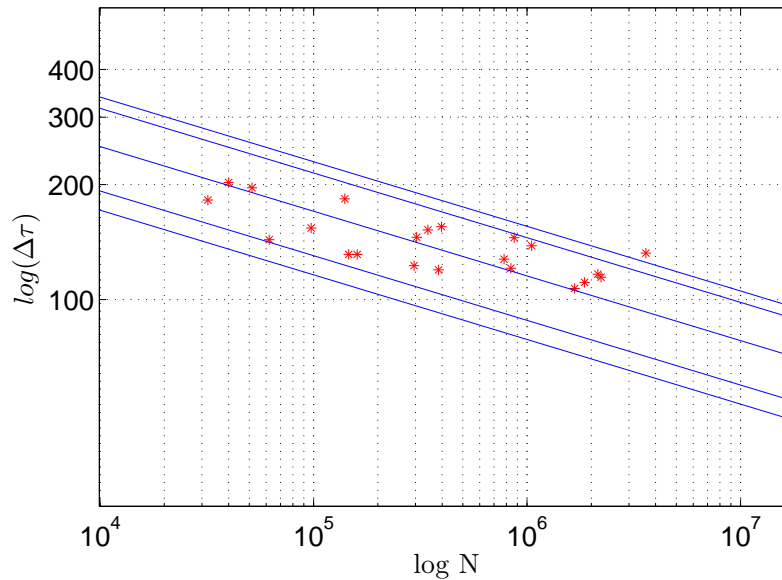


Figura 6.1: Campo S-N generado mediante el Modelo Lineal de Basquin Normalizado a partir de los datos de Dahle [52]. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 1 %, 5 %, 50 %, 95 % y 99 %.

Asimismo, se han ajustado los datos de Crupi [17] correspondientes a una unión soldada a tope de 2 pletinas con preparación de bordes en V sometidas a esfuerzos normales, considerando un nivel de confianza del 75 %. El ajuste se muestra en la figura 6.2:

Los parámetros obtenidos para ambos ajustes se exponen en la tabla 6.1.

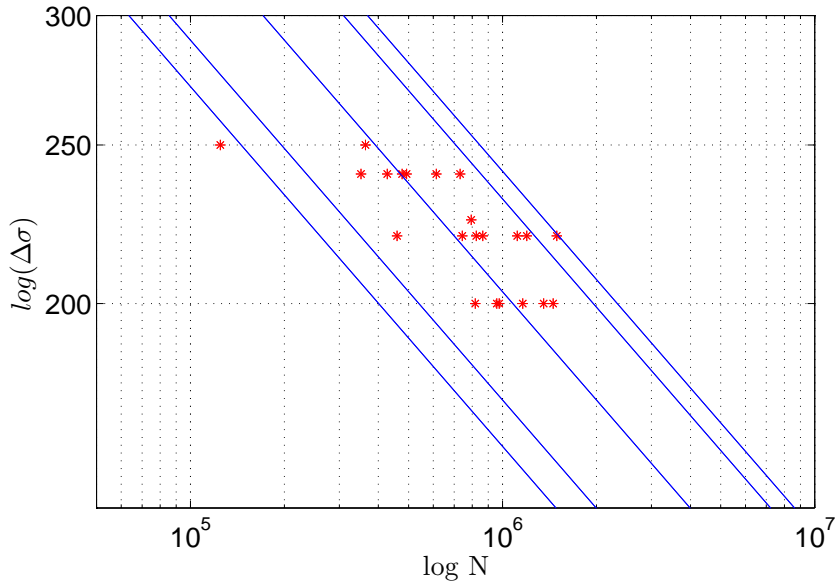


Figura 6.2: Campo S-N generado mediante el Modelo Lineal de Basquin Normalizado a partir de los datos de Crupi [17]. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 1 %, 5 %, 50 %, 95 % y 99 %.

#### 6.3.4. Limitaciones del modelo

Debido que se basa en el Modelo Lineal de Basquin, el modelo normalizado tiene sus mismas limitaciones, como es la falta de justificación física de la hipótesis de linealidad y la ausencia de un límite de endurancia. Además, la hipótesis aplicadas en el modelo normalizado (distribución lognormal del tiempo de vida a fatiga y dispersión constante independiente del rango de tensión considerado) pueden ser altamente cuestionables.

### 6.4. Ajustes realizados sobre datos experimentales

En los apartados siguientes se muestran una serie de ajustes realizados sobre datos experimentales obtenidos de la literatura. Además de mostrar la representación gráfica de los ajustes, se proporcionan valores de desviación típica de las distribuciones estadísticas utilizadas para diferentes rangos de tensión considerados.

En la representación gráfica de los datos utilizados se han diferencia 2 casos:

- Detalle estructural no considerado por EC3: Se muestran los ajustes realizados mediante los modelos de Basquin Normalizado y el modelo de Castillo y Fernández Canteli, sin considerar ningún nivel de confianza para las curvas percentiles.
- Detalle estructural considerado por EC3: Además de la gráfica anterior y con el objetivo de realizar un ajuste los más parecido posible al llevado a cabo para la obtención de las curvas de cálculo proporcionadas por EC3, se incluye el campo generado mediante el modelo de basquin Normalizado considerando un intervalo de confianza del 75 % y la curva de cálculo proporcionada por la norma.

Asimismo y con intención de verificar la consistencia de la hipótesis de dispersión constante, se muestran la variación (en %) de la desviación típica de 3 distribuciones de Weibull para la variable  $\log(N)$ . Dichas distribuciones son las proporcionadas por el modelo de Castillo y Fernández Canteli considerando 3 rangos de tensión diferentes. También se incluye el exponente  $m$  obtenido mediante el Modelo Lineal de Basquin Normalizado.

#### 6.4.1. Los datos de Dahle

Se han ajustado los datos de Dahle [52] correspondientes a una viga soldada en cajón sometida a tensiones tangenciales, las cuales producen sobre el cordón de soldadura grietas longitudinales correspondientes a una categoría 80 en el EC3, tal y como se muestra en la figura 6.3.

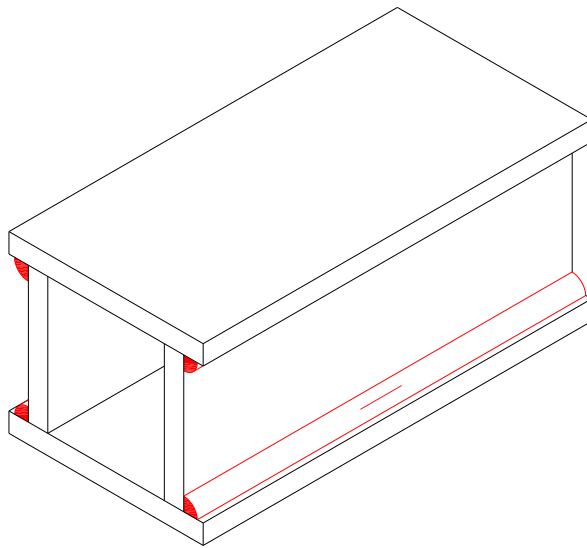


Figura 6.3: Detalle constructivo considerado por Dahle. Se muestra la aparición del defecto en la soldadura debido a la acción de esfuerzos tangenciales.

En la figura 6.4 se muestran los ajustes realizados aplicando el modelo de Basquin Normalizado y el modelo de Castillo y Fernández Canteli, obteniéndose mediante el primero un exponente  $m = 5,91$ . Asimismo, la figura 6.5 muestra el ajuste lineal realizado, considerando un nivel de confianza del 75% y la curva de cálculo para la categoría 80 en el EC3. En la figura 6.6 se muestran las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

Se han obtenido diferentes valores de desviación típica de las distribuciones estadísticas normal y Weibull, considerando diferentes rangos de tensión, cuyos valores se muestran en la tabla 6.2. Asimismo, se muestra el descenso de la desviación típica de la distribución de weibull al considerar los diferentes rangos de tensión.

#### 6.4.2. Los datos de Crupi

Los datos obtenidos por Crupi [17] corresponden a una unión de acero AH36 ( $\sigma_{ys} = 355 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_R = 490 \text{ MPa}$ ) de 2 pletinas de espesor 5 mm, soldadas a tope con preparación

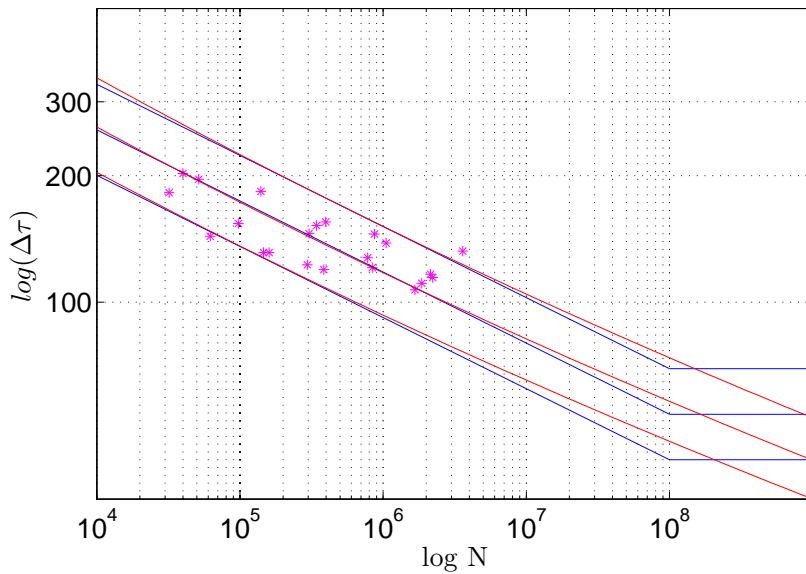


Figura 6.4: Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli a partir de los datos de Dahle [52]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

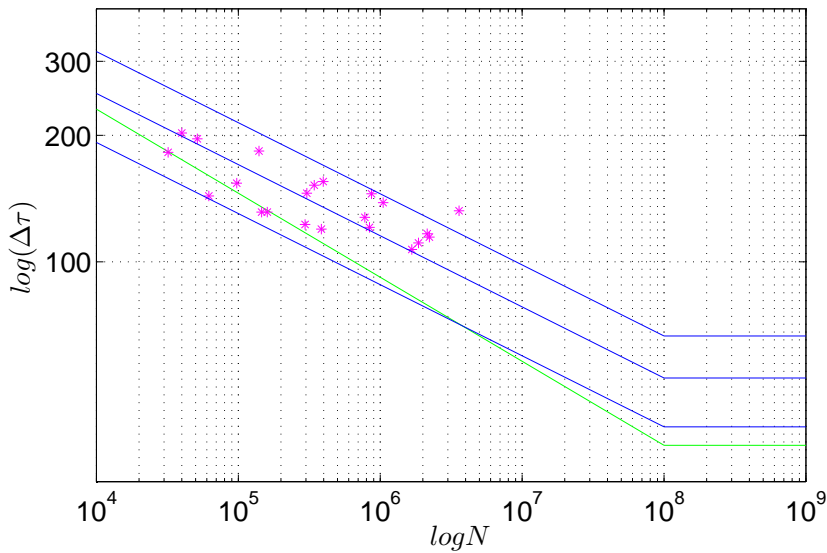


Figura 6.5: Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % a partir de los datos de Dahle [52] y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

de bordes en V, asociados a una categoría 80 en EC3.

Para la realización de los ajustes no se han considerado run-outs, debido a que el Modelo de Basquin Normalizado no permite su utilización, no obstante, se han representado junto con el resto de los datos. Los resultados de los ajustes se muestran en la figura 6.7.

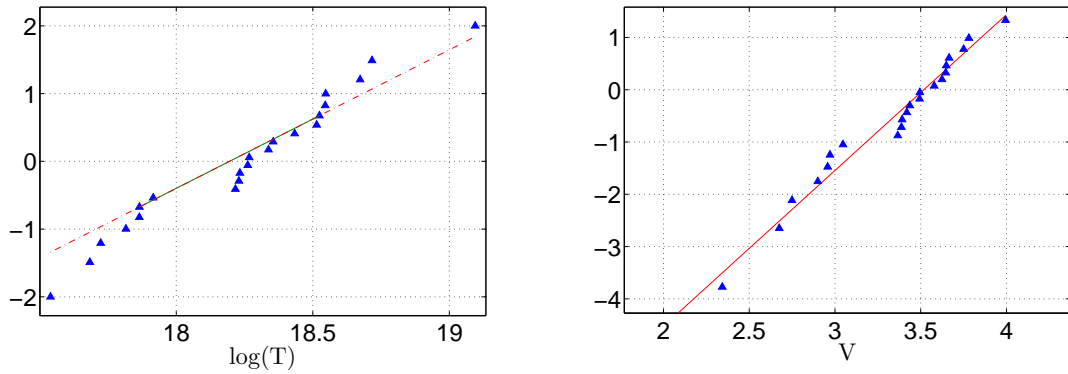


Figura 6.6: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

Tabla 6.2: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Dahle.

	Rangos de tensión considerados		
	100 MPa	200 MPa	300 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.389	0.389	0.389
$\sigma_{WEIBULL}$	0.919	0.868	0.842
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	5.47 %	8.41 %

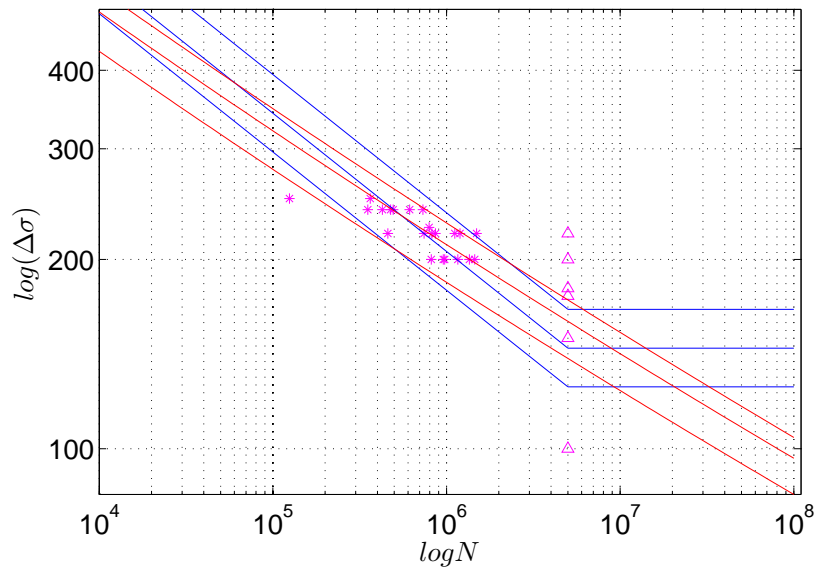


Figura 6.7: Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli y el modelo de Basquin Normalizado a partir de los datos de Crupi [17]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

En la figura 6.8 se muestra el ajuste mediante el Modelo de Basquin Normalizado, con un nivel de confianza del 75 %, y la curva de cálculo proporcionada por el EC3. Mediante el ajuste realizado se ha obtenido un exponente  $m = 4,546$ . Asimismo, la figura 6.9 muestra las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

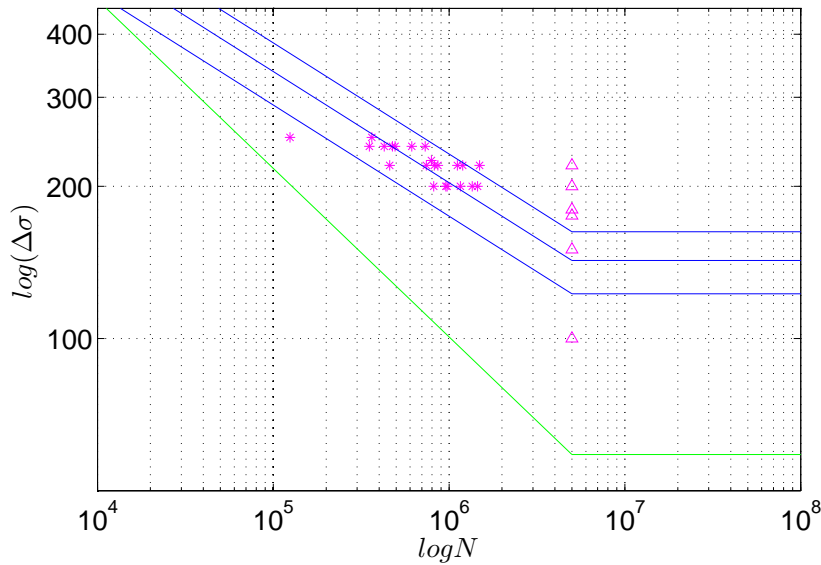


Figura 6.8: Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % a partir de los datos de Crupi [17] y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

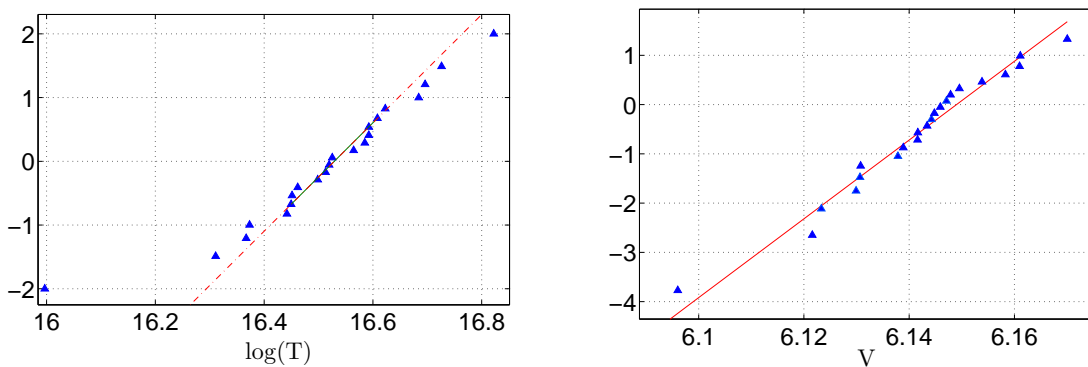


Figura 6.9: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

La tabla 6.3 resume los parámetros relacionados con la dispersión de las distribuciones consideradas:

Tabla 6.3: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Crupi.

	Rangos de tensión considerados		
	200 MPa	300 MPa	400 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.1703	0.1703	0.1703
$\sigma_{WEIBULL}$	0.3865	0.3785	0.3730
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	2.07 %	3.49 %

### 6.4.3. Los datos de Ohwa (1)

Se ha realizado el ajuste de los datos de T. Ohwa contenidos en [50] (series JZ1/1 y JZ1/2, IV-10-1) correspondientes a una unión mediante soldadura a tope de 2 tubos cilíndricos de acero STKM ( $\sigma_{ys} = 310 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_R = 500 \text{ MPa}$ ) de diámetro 52 mm y espesor de pared 2.4 mm, asociado a un detalle 71 de EC3.

En la gráfica 6.10 se muestran los resultados obtenidos mediante los 2 modelos de ajuste considerados. La figura 6.11 muestra el ajuste mediante el Modelo de Basquin Normalizado con un nivel de confianza del 75 %, y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Se ha obtenido un exponente  $m = 4,278$ .

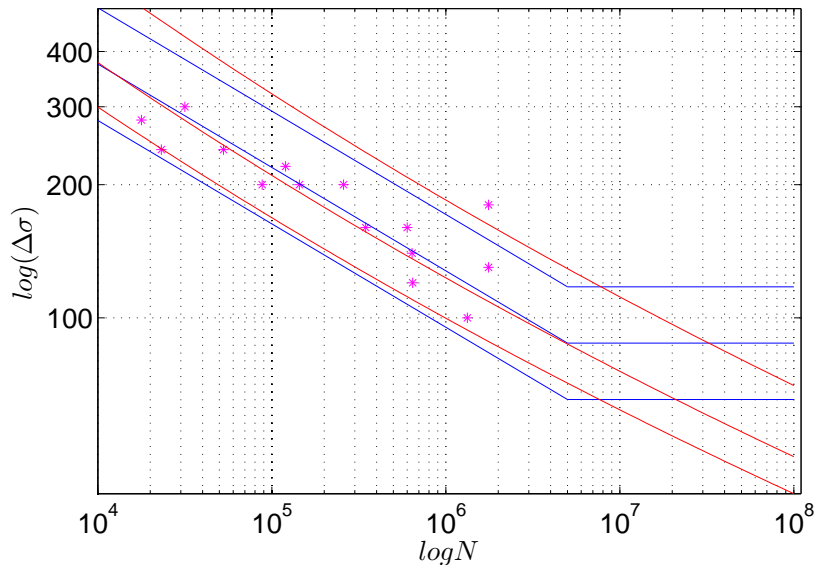


Figura 6.10: Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión a tope de 2 perfiles tubulares cilíndricos [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

En la figura 6.12 se muestran las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

Los parámetros que permiten evaluar la dispersión de las distribuciones se muestran en

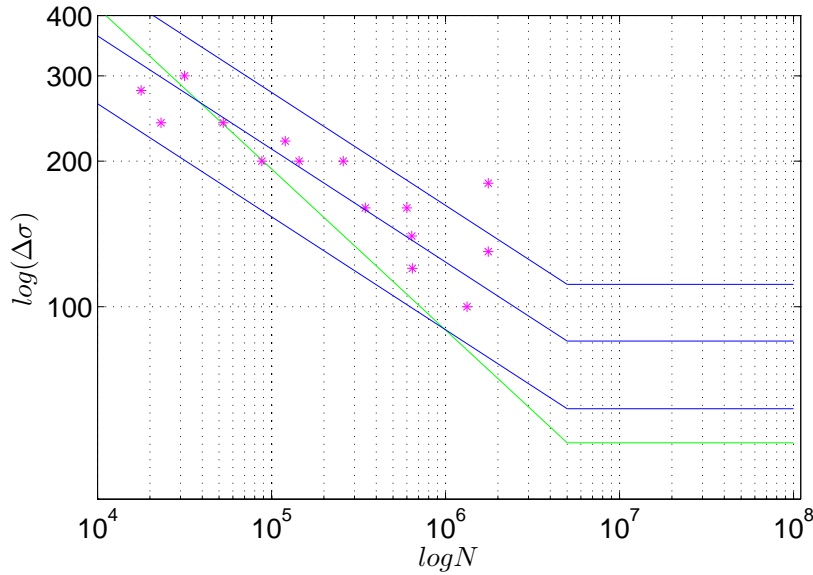


Figura 6.11: Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75% y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

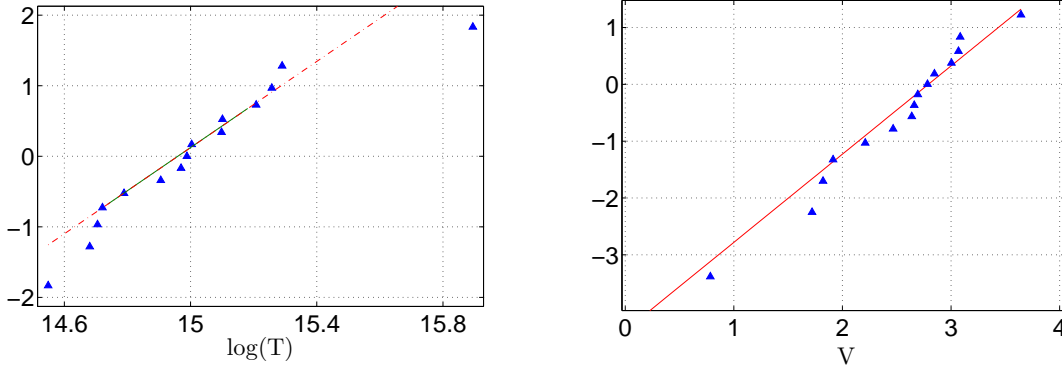


Figura 6.12: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

la tabla 6.4.

#### 6.4.4. Los datos del Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine (VSHS) de la Universidad de Karlsruhe

Se ha realizado el ajuste de los datos del *VSHS* de la Universidad de Karlsruhe, contenidos en [50] (serie EA2/4, III-8b-4), correspondientes a una unión de 2 perfiles tubulares cuadrados de acero STE 460 ( $\sigma_{ys} = 460MPa, \sigma_R = 560MPa$ ) de lado 80 mm y espesor de pared 6.5 mm, con chapa de testa intermedia de espesor 12 mm mediante soldaduras en ángulo, asociado a un detalle 36 de EC3. Los ajustes realizados se muestran en la figura 6.13.

En la figura 6.14 se muestra el ajuste mediante el modelo de basquin Normalizado con



Tabla 6.4: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Ohwa.

	Rangos de tensión considerados		
	150 MPa	250 MPa	350 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.3315	0.3315	0.3315
$\sigma_{WEIBULL}$	0.8611	0.8236	0.8006
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	4.36 %	7.03 %

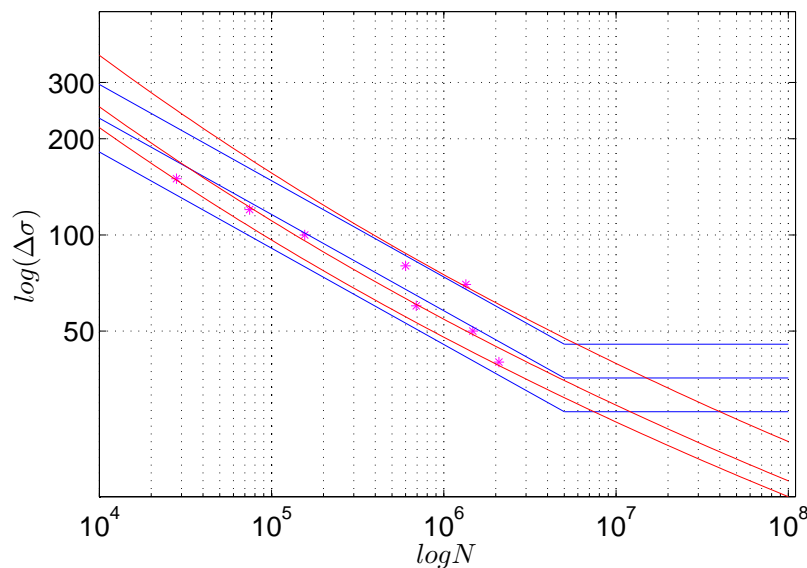


Figura 6.13: Campo S-N generado mediante los modelos estadístico y Castillo-Fernández Canteli para una unión de 2 perfiles tubulares cuadrados con soldadura en ángulo con placa de testa [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

un nivel de confianza del 75 %, así como la curva de cálculo proporcionada por el EC3. Se ha obtenido un exponente  $m = 3,321$ . La figura 6.15 muestra las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

En la tabla 6.5 se muestran parámetros de dispersión de las distribuciones consideradas.

#### 6.4.5. Los datos del Materialprüfungsanstalt (MUS) de la Universidad de Stuttgart

A continuación se muestran los datos del *MUS* de la Universidad de Stuttgart consultados en [50] (series RL2/5 y RL2/10, IV-9-4), correspondientes a una unión de perfil tubular de diámetro 88.9 mm y espesor de pared de 5 mm, con una pletina de 15 mm, mediante encaje con ranura y soldadura en ángulo, correspondiente a una categoría 63 del EC3. Ambos elementos están fabricados en acero HSB 77 V ( $\sigma_{ys} = 690\text{MPa}$ ,  $\sigma_R = 770\text{MPa}$ ). Los ajustes realizados se muestran en la figura 6.16.

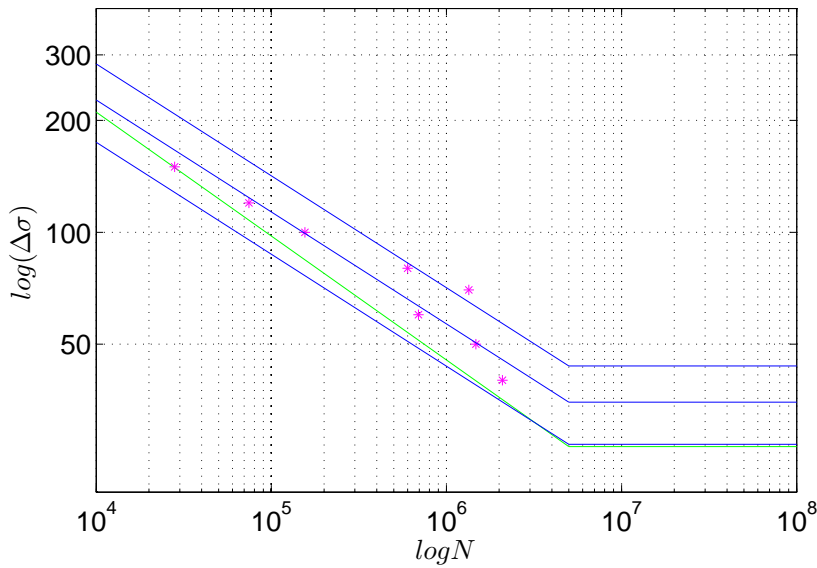


Figura 6.14: Campo S-N generado mediante el modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75 % y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

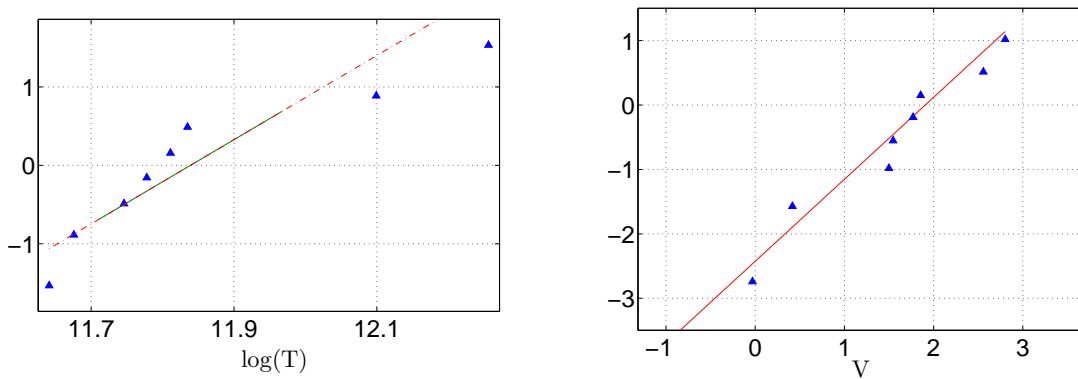


Figura 6.15: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

En la figura 6.17 se muestra el ajuste mediante el Modelo de Basquin Normalizado con un nivel de confianza del 75 %, obteniéndose un exponente  $m = 4,487$ , y la curva de cálculo proporcionada por el EC3. En la figura 6.18 se muestran las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

En la tabla 6.6 se resumen los valores de dispersión obtenidos.

#### 6.4.6. Los datos de Ohwa (2)

Se muestran los datos de Ohwa obtenidos de [50] (series JZ2/1 y JZ2/2, IV-10-2) correspondientes a una unión de acero STKM ( $\sigma_{ys} = 310 MPa$ ,  $\sigma_R = 500 MPa$ ) de 2 tubos de diámetro 52 mm y espesor de pared 2.4 mm, mediante una chapa de testa de espesor 10 mm

Tabla 6.5: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos del *Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine*.

	Rangos de tensión considerados		
	50 MPa	150 MPa	250 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.2134	0.2134	0.2134
$\sigma_{WEIBULL}$	0.5115	0.4592	0.4383
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	10.22 %	14.30 %

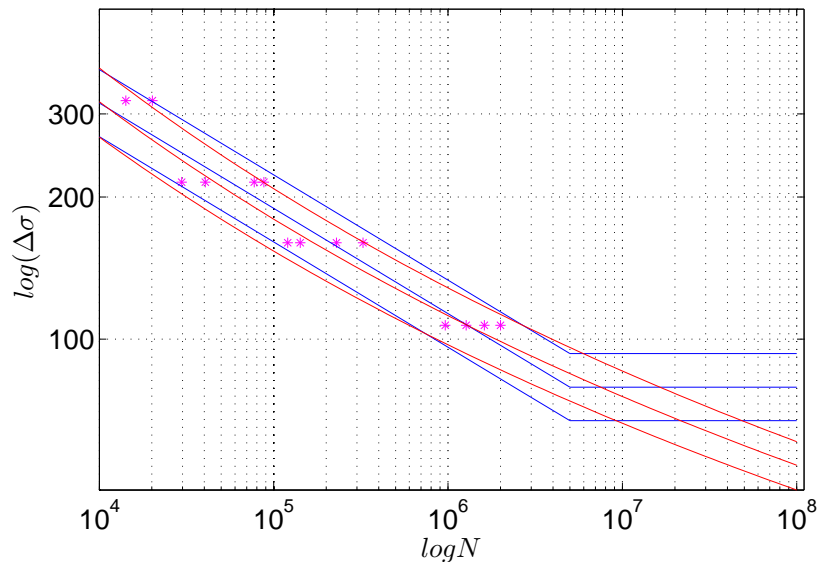


Figura 6.16: Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión de un perfil tubular cilíndrico y pletina mediante ranura [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

y soldadura a tope, correspondientes a una categoría 50 del EC3. Los ajustes realizados se muestran en la figura 6.19.

En la figura 6.20 se muestra el ajuste mediante el modelo de Basquin Normalizado con un nivel de confianza del 75 %, y la curva de cálculo proporcionada por el EC3. Mediante el modelo lineal se ha obtenido un exponente  $m = 7,115$ . La figura 6.21 muestra las variables normalizadas de ambos modelos de ajuste representadas en papel probabilístico.

En la tabla 6.7 se muestran los valores de desviación típica de las distribuciones estadísticas normal y weibull para diferentes rangos de tensión.

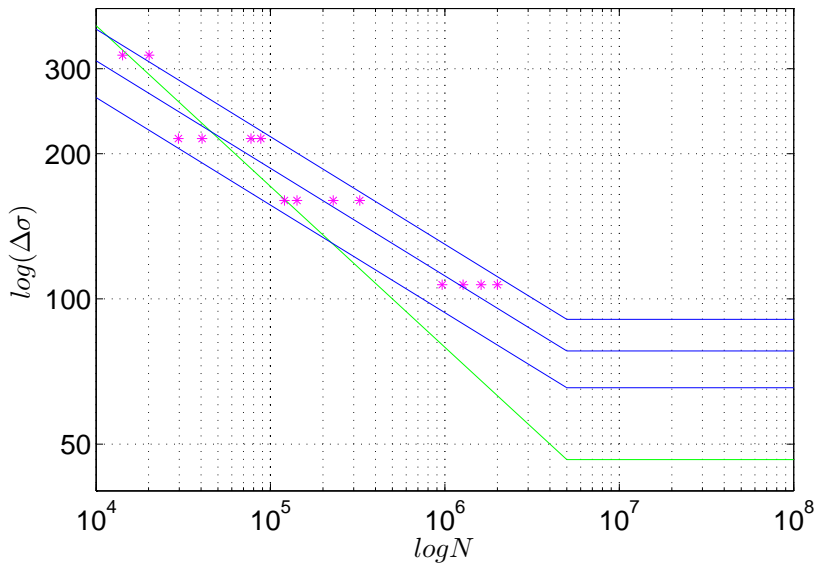


Figura 6.17: Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75% y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

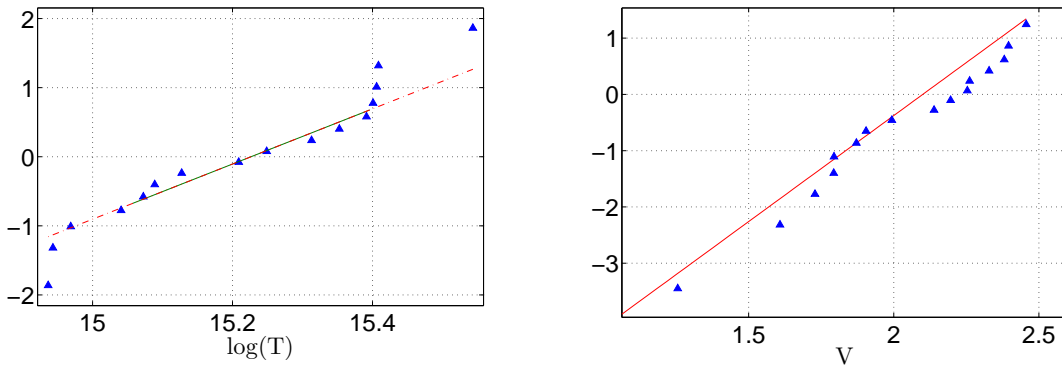


Figura 6.18: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

## 6.5. Comentarios acerca de las hipótesis consideradas

Los ajustes de los datos experimentales realizados en el apartado 6.4 permiten obtener conclusiones acerca de algunas hipótesis consideradas por EC3, las cuales se exponen a continuación.

### 6.5.1. Modelo de ajuste utilizado

Partiendo de la base de que el Modelo Lineal de Basquin no refleja en absoluto el comportamiento de un material sometido a fatiga, la elección de un modelo de ajuste lineal por tramos, en escala doblemente logarítmica, se puede justificar considerando la simplicidad del

Tabla 6.6: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos del *Materialprüfungsanstalt Universität Stuttgart*.

	Rangos de tensión considerados		
	100 MPa	200 MPa	300 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.1938	0.1938	0.1938
$\sigma_{WEIBULL}$	0.4614	0.4025	0.3745
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	12.77 %	18.83 %

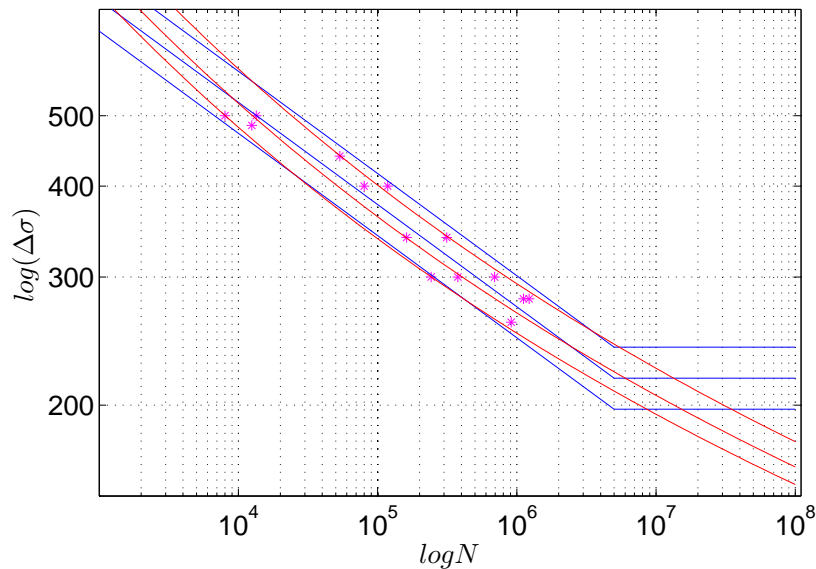


Figura 6.19: Campo S-N generado mediante los modelos de Basquin Normalizado y Castillo-Fernández Canteli para una unión de 2 perfiles tubulares cuadrados soldados a tope con placa de testa [50]. Las curvas representadas en ambos modelos corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

mismo y su fácil aplicación. Si se considera el rango usual de trabajo en los aceros estructurales (que puede considerarse entre 50 MPa y 400 MPa), la desviación entre el modelo considerado y el comportamiento real puede considerarse como baja, tal y como reflejan los ajustes realizados sobre los datos experimentales mostrados en apartados anteriores. No obstante, el Modelo Lineal de Basquin no permite la extrapolación fuera del rango de datos considerados para realizar el ajuste. Este hecho afecta principalmente a rangos de tensión elevados y a rangos de tensión ligeramente superiores al límite de endurecimiento del material. En los primeros, el Modelo Lineal de Basquin no considera el cambio de curvatura que muestra el acero en valores próximos a su resistencia estática a tracción. Para rangos de tensión bajos, el modelo lineal no es capaz de modelizar correctamente el aumento de la dispersión existente, por lo que para espectros de tensiones de amplitud variable se considera una modificación de la pendiente a partir de 5 millones de ciclos, lo que puede ser considerado como una situación

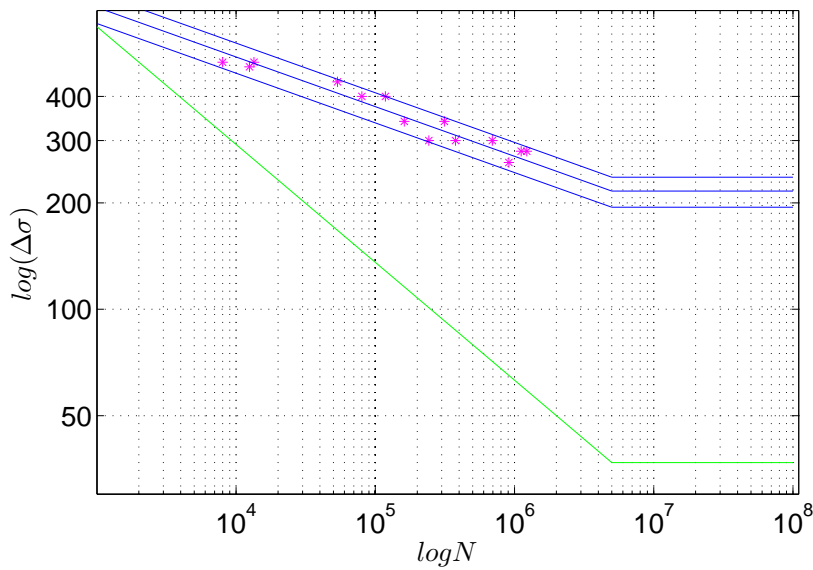


Figura 6.20: Campo S-N generado mediante el Modelo de Basquin Normalizado considerando un IC=75% y la curva de cálculo proporcionada por EC3. Las curvas representadas corresponden a probabilidades de referencia de 5 %, 50 % y 95 %.

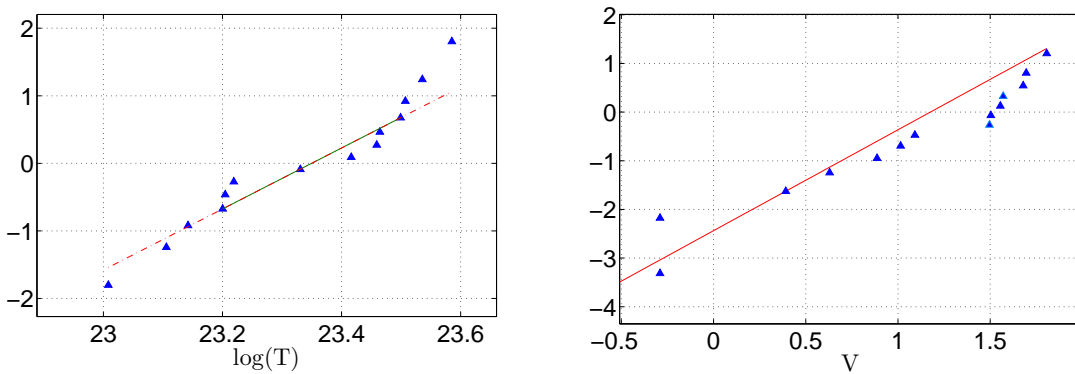


Figura 6.21: Representación de las variables normalizadas en papeles probabilísticos normal y weibull.

de compromiso entre un modelo bilineal, de fácil aplicación pero no excesivamente realista y un modelo hiperbólico, más evolucionado y realista en sus planteamientos, sobre todo cuando se consideran este tipo de esfuerzos aplicados a bajos rangos de tensión. Por lo tanto, el modelo considerado por el EC3, si bien aplica una formulación más sencilla, puede plantear problemas con la extrapolación de resultados fuera del rango de tensiones considerados para la curva de cálculo proporcionada.

### 6.5.2. Curvas de cálculo propuestas por EC3

El EC3 considera un total de 14 categorías (14 curvas de cálculo) diferentes para elementos sometidos a tensiones normales y 2 categorías para elementos sometidos a tensiones tangen-

Tabla 6.7: Parámetros de dispersión correspondientes a los ajustes de los datos de Ohwa (2).

	Rangos de tensión considerados		
	300 MPa	400 MPa	500 MPa
$\sigma_{NORMAL}$	0.1846	0.1846	0.1846
$\sigma_{WEIBULL}$	0.3824	0.3555	0.3371
$\downarrow \sigma_{WEIBULL}(\%)$	-	7.04 %	11.85 %

ciales. Si bien es cierto que el número de curvas consideradas por la norma puede parecer excesivamente alto, el alto número de detalles constructivos considerados por la misma, bajo la consideración de un código de aplicación generalista, permiten considerar dicho número de curvas como razonable.

Asimismo, en el apartado 6.4 se ha aplicado el Modelo Lineal de Basquin Normalizado a datos experimentales pertenecientes a diferentes categorías considerados por el EC3. Dicho ajuste proporciona una curva asociada a un 5 % de probabilidad de referencia con un intervalo de confianza del 75 %, permitiendo su comparación con la curva de cálculo proporcionada por el EC3 (figuras 6.5, 6.8, 6.11, 6.14, 6.17 y 6.20). Debido a que un código de cálculo con carácter general debe de considerar multitud de casos diferentes, se espera que las curvas de cálculo proporcionadas sean conservadoras. No obstante, los ajustes de los datos experimentales muestran que en 3 de los 6 casos analizados (los datos de Dahle, figura 6.5, los datos de Ohwa (1), figura 6.11 y los datos de VSHS, figura 6.14), la curva de cálculo es menos conservadora que la curva obtenida mediante el ajuste de los datos experimentales. El ajuste lineal realizado a partir de los datos de Dahle (figura 6.5), muestra cómo la curva de cálculo proporcionada por el EC3 no es conservadora para rangos de tensión superiores a 70 MPa. Por otro lado, los datos del MUS (figura 6.17) reflejan que la curva de cálculo se puede considerar como conservadora solamente para valores de rangos de tensión menores que 130 MPa. El ajuste realizado sobre los datos de Crupi (figura 6.8) muestran una curva de cálculo más conservadora que la obtenida en el ajuste, mientras que para los datos de Ohwa (2) (figura 6.20), se puede considerar como muy conservadora.

Por lo tanto, la conclusión obtenida es que las curvas de cálculo proporcionadas por EC3 no aportan el grado de seguridad esperado, representando en algunos casos valores de probabilidad de referencia mayores que el 5 % que teóricamente tienen asignado.

### 6.5.3. Distribución normal

Si bien es cierto que la distribución normal ha sido profusamente utilizada en gran cantidad de modelos de ajuste para modelizar el comportamiento de la vida a fatiga en escala logarítmica, el fenómeno de la fatiga es un problema de valores extremos, por lo que para el tratamiento de los datos experimentales deberían considerarse distribuciones de probabilidad de extremos. En el capítulo 3.5 se han realizado comentarios acerca de este supuesto.

No obstante y para verificar si la consideración de la distribución normal para la variable  $\log(N)$  es admisible desde un punto de vista práctico, se ha aplicado el test de normalidad de Shapiro-Wilk a la variable normalizada  $T$  de los casos experimentales considerados en

el capítulo 6. Considerando un nivel de confianza del 95 %, se admite la hipótesis nula de normalidad para todos los datos considerados. Bajo la consideración de un punto de vista práctico, la fácil aplicabilidad de la distribución normal sobre las distribuciones de extremos la hacen más proclive para su consideración por parte de un profesional con nociones estadísticas limitadas.

Por lo tanto, puede concluirse que la consideración de la distribución normal para el tratamiento estadístico de los datos supone una hipótesis aceptable en la práctica, si bien se reconoce que dicha distribución no es la más adecuada para modelizar el problema de la resistencia de un elemento sometido a fatiga.

#### 6.5.4. Desviación típica constante

La adopción de la hipótesis de desviación típica constante para la variable  $\log(N)$ , independientemente del rango de tensión escogido, es una imposición del modelo de ajuste en el que se basa el EC3 (Modelo Lineal de Basquin). Dicho modelo se basa en la obtención de una curva media a partir de un modelo de regresión lineal simple, a partir de la cual se obtiene un estimador de la desviación típica de la variable  $\log(N)$  y se genera un campo S-N. No obstante, la experimentación muestra cómo la desviación típica aumenta según desciende el rango de tensión considerado. Por lo tanto, la hipótesis de  $\sigma = cte$  admitida por el EC3 puede ser considerada como una simplificación ,más o menos acertada, del comportamiento real que experimentan los materiales.

Por ello, para verificar si dicha simplificación es admisible, se han obtenido valores de desviación típica de diferentes distribuciones de weibull para diferentes rangos de tensión, a partir de los ajustes llevados a cabo en el capítulo 6 mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli. Considerando una diferencia entre rangos de tensión de 200 MPa, la máxima variación de la desviación típica obtenida es del 18.83 % (datos del *MUS* tabla 6.6), siendo el resto de datos considerablemente menores.

Por lo tanto, a partir de los resultados obtenidos y considerando la simplificación que aporta al tratamiento de los datos, la consideración de adoptar un valor de desviación típica como constante puede considerarse como admisible.

#### 6.5.5. Valores fijos de exponente $m$

La elección por parte del EC3 de 2 únicos valores de pendiente para sus curvas de ajuste, puede aceptarse bajo la consideración del carácter general de aplicación que tiene la norma y el elevado número de detalles constructivos considerados.

En la tabla 6.8 se muestran los valores del exponente  $m$  obtenidos en los ajustes de los datos experimentales del capítulo 6, aplicando el Modelo Lineal de Basquin Normalizado.

Los valores del parámetro  $m$  obtenidos en los ajustes realizados en el capítulo 6 muestran cómo el valor  $m = 3$  adoptado por el EC3 para valores de carga de amplitud constante, puede considerarse como conservador para rangos de tensión medios y bajos.

#### 6.5.6. Consideración determinista

El EC3 proporciona una única curva de cálculo para una determinada categoría, asociada a una probabilidad de referencia del 5 %. A partir de un valor de desviación típica asociado



Tabla 6.8: Exponente  $m$  obtenido en los ajustes de los datos experimentales mostrados en el capítulo 6 aplicando el modelo de Basquin Normalizado.

	m
Crupi	4.546
Ohwa (1)	4.278
VSHS	3.321
MUS	4.487
Ohwa (2)	7.115

a la variable  $\log(N)$ , es posible generar un campo S-N obteniendo las curvas percentiles del mismo  $y$ , en particular, la curva asociada al 5% de probabilidad de referencia. No obstante, EC3 no proporciona ni el valor de dispersión de sus resultados ni el resto de curvas percentiles del modelo, considerando dicha probabilidad del 5% como una *constante*, imposibilitando la consideración por parte del ingeniero de cualquier otra curva de referencia requerida.

El desconocimiento de un valor de dispersión para una categoría imposibilita la obtención de un valor de probabilidad de fallo alcanzada tras un determinado número de ciclos transcurridos, así como la estimación del aumento de la probabilidad de fallo para un número concreto de ciclos tras el agotamiento de la vida útil del elemento estructural objeto de estudio.

Por lo tanto, la consideración del fenómeno de la fatiga adoptada por el EC3 es inadmisibles, debido a que considera un fenómeno altamente probabilístico desde un punto de vista determinista.

La aportación, en forma de anexo a la norma, de los valores de desviaciones típicas de la variable  $\log(N)$  para las diferentes categorías consideradas, permitiría mantener la simplicidad en la aplicación práctica del código, mientras que se posibilitaría que profesionales con conocimientos estadísticos pudiesen desarrollar estudios más amplios de probabilidad de fallo en función del número de ciclos transcurridos, tanto pasados como futuros.

### 6.5.7. Modelo de acumulación de daño

Tal y como se ha reflejado en apartado 1.2.1, EC3 aplica la regla de acumulación de daño lineal de Miner. Debido a que las curvas de referencia están asociadas a una probabilidad de fallo del 5%, la obtención de un valor de número de Miner igual a la unidad no supone la rotura inminente del elemento, sino que este tiene una probabilidad de rotura del 5%. No obstante, esta apreciación es válida si no se ha aplicado ningún coeficiente de mayoración de cargas  $\gamma_{Ff}$  o minoración de resistencia  $\gamma_{Mf}$ , debido a que la aplicación de alguno de ellos (se sobrentiende en un valor distinto de la unidad) modifica la curva de referencia, lo que produce un descenso en la probabilidad de fallo, el cual inicialmente es desconocido. Por lo tanto, en caso de aplicar un coeficiente de seguridad, la información suministrada por el EC3 no permite conocer la probabilidad de fallo asociada a cada valor del número de Miner.

### 6.5.8. Efecto de escala

Es evidente que el tamaño de un elemento es una variable relevante a la hora de verificar el comportamiento a fatiga de un determinado componente. Estadísticamente, existe más probabilidad de aparición de defectos en un elemento de mayor tamaño que en uno menor, por lo que la vida a fatiga tiende a disminuir según aumenta el tamaño considerado. Partiendo de este supuesto, es obvio que un ensayo a fatiga arrojará resultados más fiables (más conservadores) cuanto más se aproxime el tamaño de la probeta al tamaño real del elemento. No obstante, el equipamiento que habitualmente se encuentra disponible para la realización de ensayos ofrece una limitación física al tamaño de los elementos a ensayar. Si se considera como cierta la hipótesis del eslabón más débil, un elemento de mayor tamaño (volumen, área o longitud) tendrá una probabilidad de rotura mayor que un elemento similar de menor tamaño, debido a que el primero está compuesto por un mayor número de subelementos unitarios, cada uno de los cuales tiene su propia probabilidad de rotura.

El EC3 establece correcciones para algunos componentes considerados mediante la introducción de un coeficiente  $k_s$ , considerando un nuevo valor reducido de resistencia a fatiga a 2 millones de ciclos ( $\Delta\sigma_{C,red} = k_s\Delta\sigma_C$ ). Dicho coeficiente  $k_s$  es función del espesor del elemento considerado (chapas, alas y almas de algunos tipos de vigas), y se considera cuando son mayores de 25 mm.

No obstante, esta consideración del tamaño realizada por el EC3 es claramente insuficiente, por diferentes motivos:

- Solamente se consideran un número reducido de elementos, sin considerar dicha reducción de resistencia para la mayoría restante.
- Se establecen correcciones puntuales mediante la consideración de fórmulas empíricas, las cuales están referidas exclusivamente al espesor del elemento y no a las dimensiones totales del mismo.
- El EC3 no considera elementos tipo cable, los cuales son un claro ejemplo de elementos sometidos a fatiga cuyas propiedades difieren sustancialmente en función de la longitud de los mismos.
- El tratamiento estadístico de los datos por parte del EC3 para la obtención de las curvas de ajuste y la no consideración de una distribución de extremos mínimos no hacen posible la consideración de la hipótesis del eslabón más débil, condición necesaria para establecer un modelo que sea independiente del tamaño del elemento considerado.

### 6.5.9. Efecto del nivel de tensión

Tras el rango de tensión considerado, el efecto del nivel de tensión (usualmente referido como *efecto de la tensión media*) es el factor más influyente en el fenómeno de fatiga [8].

Dependiendo de la estrategia de ensayos elegida, el campo S-N varía sustancialmente en función del nivel de tensión escogido <sup>2</sup>. La consideración de una tensión media mayor a la hora de realizar ensayos experimentales, arroja menores valores de resistencia a fatiga del elemento,

<sup>2</sup>El nivel de tensión se puede referir con  $\sigma_{min}, \sigma_{max}, \sigma_{med}$  o  $R$

descendiendo las curvas del campo S-N. Como consecuencia de este hecho, la tensión media también influye sobre el límite de fatiga del componente considerado.

El nivel de tensión es, por lo tanto, un parámetro relevante a la hora de proporcionar curvas de ajuste de un modelo de fatiga.

Los primeros estudios acerca de la relevancia de la tensión media en el campo S-N se deben a Gerber [27] y Goodman [28] los cuales basándose en la creencia de que debe existir algún tipo de relación entre el rango de tensión y la carga estática desarrollaron, de forma empírica, una relación entre la tensión media y el rango de tensiones equivalente, obteniendo un diagrama que relaciona ambas variables, conocido con el *diagrama de Goodman* (figura 6.22).

Mientras que Gerber y Goodman toman como valor límite de tensión media la resistencia a tracción de material, Soderberg [73] propone una relación lineal basándose en el límite elástico del material. Mediante un diagrama de fatiga aplicado al valor de la endurancia del material, obtenemos 2 regiones diferenciadas, donde el inferior representa pares de puntos  $(\sigma_{med}, \Delta\sigma)$  donde el fallo por fatiga no llega a producirse.

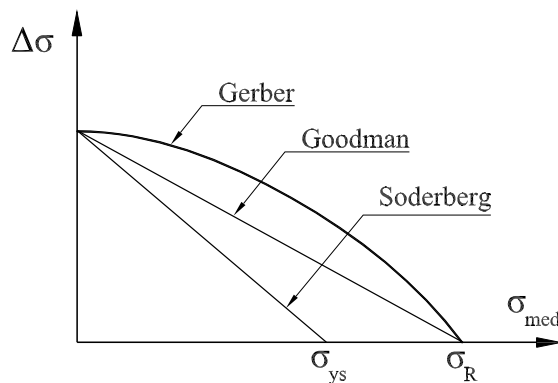


Figura 6.22: Diferentes consideraciones para  $N=cte$  en un diagrama de Goodman.

Los diagramas de fatiga se pueden referir a cualquier valor *constante* de número de ciclos, pero son especialmente útiles para representar la evolución del límite de fatiga en función de la tensión media.

El EC3 no considera el efecto del nivel de tensión (o efecto de la tensión media) para la obtención de un espectro de cálculo. En la figura 6.23 se muestra el proceso de transformación de una historia de tensiones en un espectro de cálculo en función de considerar o no el efecto de la tensión media.

Como puede comprobarse, la consideración de los diagramas de fatiga propuestos por Goodman, Gerber o Soderberg permiten la adecuada transformación del espectro de tensiones para contabilizar el efecto de la tensión media en el cálculo, reflejando así, de una forma más veraz, el estado tensional real considerado sobre el elemento. La no consideración de esta medida por parte del EC3 puede explicarse bajo el supuesto de que las curvas de cálculo que proporciona el código son suficientemente conservadoras como para obviar este efecto. No obstante, la aplicación de los diagramas de fatiga en la construcción de los espectros de cálculo permitirían proporcionar curvas de cálculo más ajustadas.

Debe tenerse en cuenta que la aplicación al EC3 del diagrama de Goodman está limitado a rangos de tensión por debajo del límite elástico y por encima de un determinado límite de

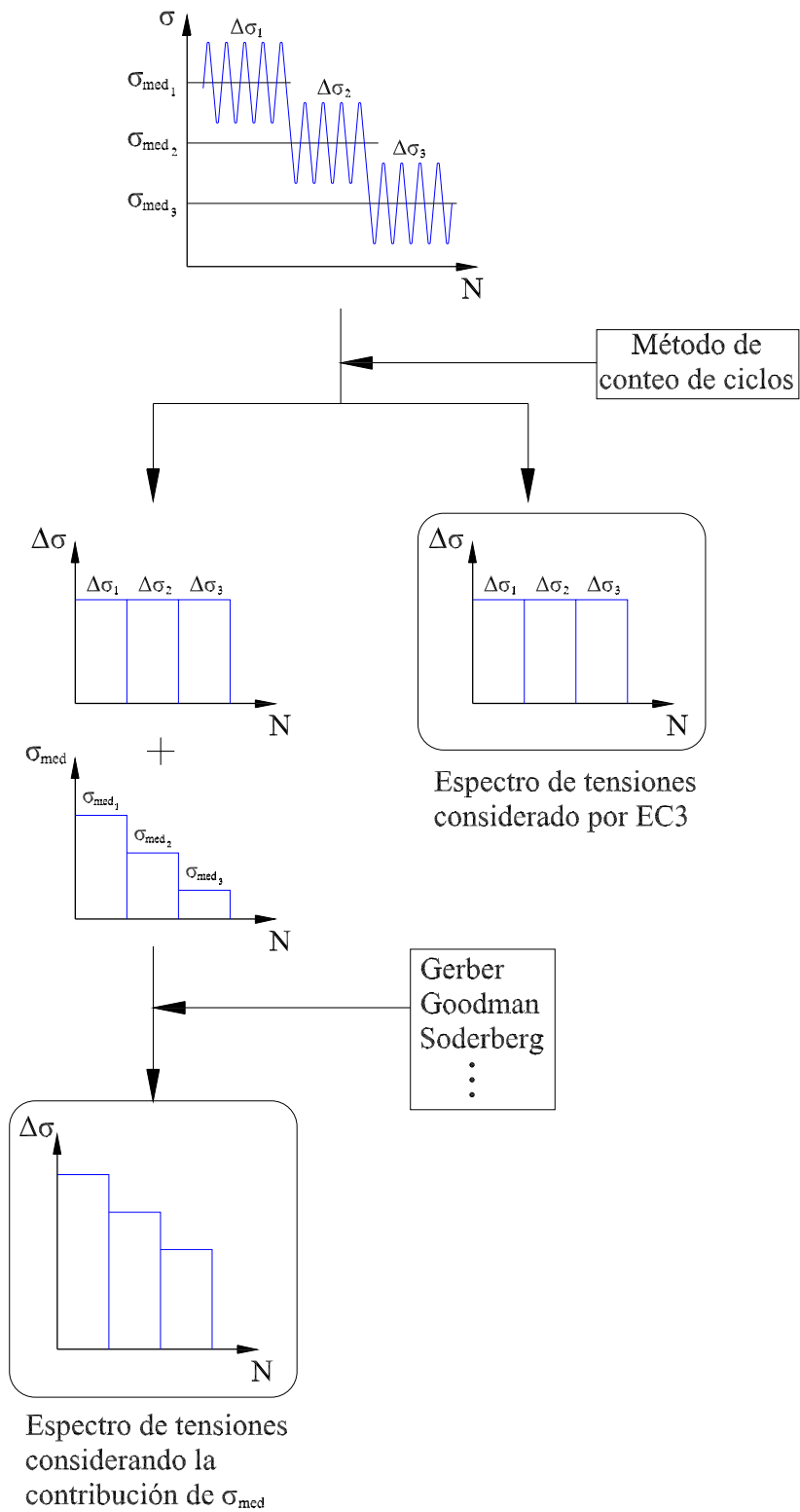


Figura 6.23: Efecto de la tensión media en el cálculo del espectro de tensiones.

fatiga (en función del tipo de carga considerada), por lo que el dominio real de aplicación de dichos diagramas es el mostrado en la figura 6.24.

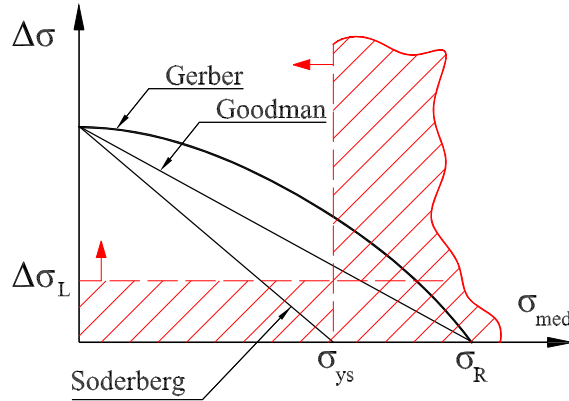


Figura 6.24: Campo de aplicación de diferentes diagramas de fatiga en el EC3.

No obstante, la consideración del efecto de la tensión media en un espectro de cargas, puede considerarse bajo la perspectiva de parámetros físicos, tales como el tamaño máximo de defecto contenido en un elemento. Si se considera el principio de similitud [69], el nivel de tensión con el que se alcanza un crecimiento estable de grieta por fatiga depende tanto de la carga nominal aplicada como del tamaño máximo del defecto existente sobre el elemento considerado. Por lo tanto, los mecanismos de fatiga que se llevan a cabo sobre un elemento perteneciente a una determinada categoría  $cat1$  bajo un espectro de cargas con una tensión media  $\sigma_{med} > 0$  pueden considerarse similares a los generados considerando el elemento como perteneciente a una categoría menor  $cat2$  sin considerar la tensión media en el espectro, es decir:

$$\Delta\sigma_c^{cat1} + (\sigma_{med} > 0) \iff \Delta\sigma_c^{cat2} + (\sigma_{med} = 0),$$

$$\Delta\sigma_c^{cat1} > \Delta\sigma_c^{cat2}, \quad (6.8)$$

$$a_{max}^{cat1} < a_{max}^{cat2}.$$

Tomando el valor de tensión media como la diferencia entre las tensiones nominales pertenecientes a las 2 categorías consideradas ( $\Delta\sigma_c^{cat1}$  y  $\Delta\sigma_c^{cat2}$ ) y considerando que el crecimiento estable de grieta para ambos supuestos se produce para idénticas tensiones en el frente de grieta ( $\Delta\sigma_{fractura}$ ), puede obtenerse una relación entre los tamaños de defecto máximos pertenecientes a ambas categorías consideradas ( $a_{max}^{cat1}$  y  $a_{max}^{cat2}$ ) a partir de los factores de concentración de tensiones a fatiga de cada una de las categorías consideradas ( $K_f^{cat1}$  y  $K_f^{cat2}$ ), tal y como se muestra en la ecuación 6.9.

$$K_f^{cat1}(a_{max}^{cat1}) \cdot \Delta\sigma_c^{cat1} = K_f^{cat2}(a_{max}^{cat2}) \cdot \Delta\sigma_c^{cat2} = \Delta\sigma_{fractura}, \quad (6.9)$$

$$\Delta\sigma_c^{cat1} - \Delta\sigma_c^{cat2} = \sigma_{med}.$$

La analogía entre un valor de tensión media de un espectro de cargas y el tamaño de defecto máximo existente sobre un elemento se muestra en la figura 6.25.

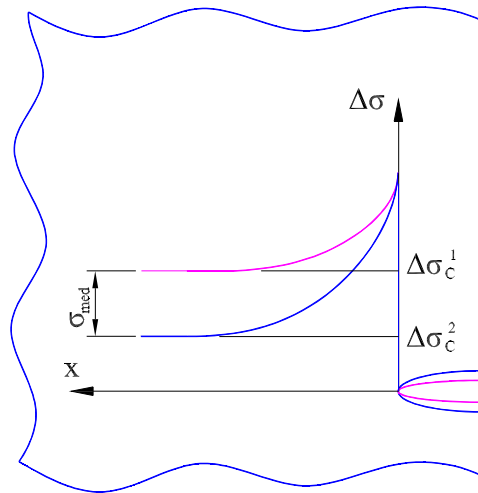


Figura 6.25: Equivalencia entre la tensión media y el tamaño de defecto máximo existente en 2 categorías diferentes.

### Tensiones residuales sobre uniones soldadas

El efecto de las tensiones residuales de tracción generadas por los procedimientos de soldeo sobre las uniones, puede ser asimilado como la contribución de una tensión media a un determinado espectro de tensiones sobre el elemento considerado. Bajo esta consideración, la aplicación de un tratamiento térmico adecuado para la eliminación de dicha tensión residual permite considerar un espectro de tensiones mayor en el cálculo, lo que se traduce en la consideración del elemento como perteneciente a una categoría más exigente.

El EC3 permite la realización de tratamientos térmicos para eliminar dichas tensiones. No obstante, el código no considera ninguna modificación en la categoría del elemento en función de la realización o no de dicho tratamiento térmico. Esta adopción puede ser entendida debido a la dificultad de cuantificar las tensiones residuales existentes.

#### 6.5.10. Límite de fatiga

Las gráficas de cálculo consideradas por el EC3 imponen un límite de fatiga a un determinado número de ciclos, dependiendo de que se esté aplicando el modelo bilineal o trilineal. Dicho límite de fatiga es una consideración suplementaria al Modelo Lineal de Basquin, el cual no está considerado originariamente en su formulación.

En anteriores versiones a la actualmente en vigor (2005), el código proporcionaba la posibilidad de considerar o no el límite de fatiga en su aplicación, tal y como se muestra en la figura 6.26. No obstante, en la versión actual no se ofrece esta posibilidad. Con el objetivo de verificar si la consideración o no de un límite de fatiga a amplitud variable modifica sustancialmente la probabilidad de fallo de un elemento, se han considerado 3 espectros de tensiones diferentes aplicados sobre una categoría 112 ( $\Delta\sigma_L=45$  MPa), y se ha aplicado el modelo estadístico de daño propuesto en el capítulo 7 para cada uno de ellos. La configuración de los espectros de tensiones considerados son los siguientes: el espectro de cargas número 1 predominan niveles altos de tensión, el espectro número 2 los rangos considerados se reparten

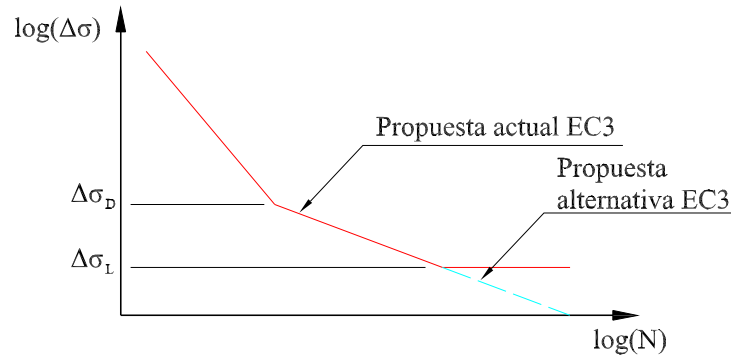


Figura 6.26: Propuesta alternativa sin considerar el límite de fatiga de amplitud variable.

Tabla 6.9: Espectros de tensiones considerados.

Espectro número 1		Espectro número 2		Espectro número 3	
$\Delta\sigma(MPa)$	N	$\Delta\sigma(MPa)$	N	$\Delta\sigma(MPa)$	N
123	500000	50	50000	50	1000000
170	20000	25	2000000	25	2000000
190	12000	58	60000	58	6000000
102	11000	89	110000	53	3100000
110	40000	30	40000	36	4000000
155	12000	180	120000	41	6200000
94	500000	30	5000000	54	5000000
132	90000	78	900000	34	9000000
109	200000	112	20000	67	2000000
126	22300	43	2230000	43	1230000
167	75000	146	75000	25	7500000
91	89000	206	89000	55	1900000

equitativamente entre valores altos y bajos, mientras que en el espectro número 3 predominan los valores bajos. La razón de considerar 3 espectros diferentes es comprobar las distintas hipótesis del modelo cuando se consideran rangos de tensión cercanos o no al límite de fatiga del detalle considerado. Los espectros de tensiones considerados se muestran en la tabla 6.9.

Las figuras 6.27, 6.28 y 6.29 representan los rangos de tensión considerados para cada uno de los espectros.

Como se puede comprobar a partir de los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 6.10, las diferencias entre considerar o no el límite de endurancia de amplitud variable son nulas para el espectro número 1, muy bajas para el espectro número 2 y bajas para el espectro número 3. Nótese que los rangos de tensión de este último espectro se encuentran prácticamente concentrados en el entorno del límite de fatiga considerado, sumando en torno a 50 millones de ciclos; no obstante, la diferencia tanto de número de Miner como de probabilidad de fallo obtenida son considerablemente bajas para el número de ciclos considerado.

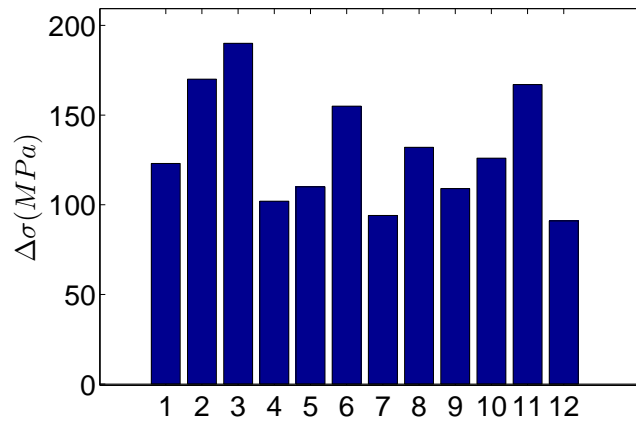


Figura 6.27: Espectro de tensiones número 1.

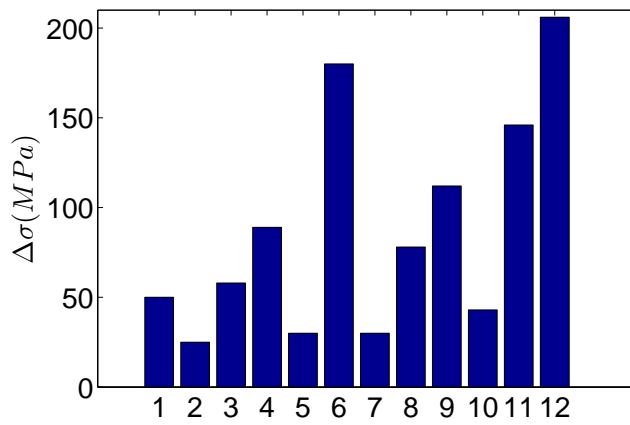


Figura 6.28: Espectro de tensiones número 2.

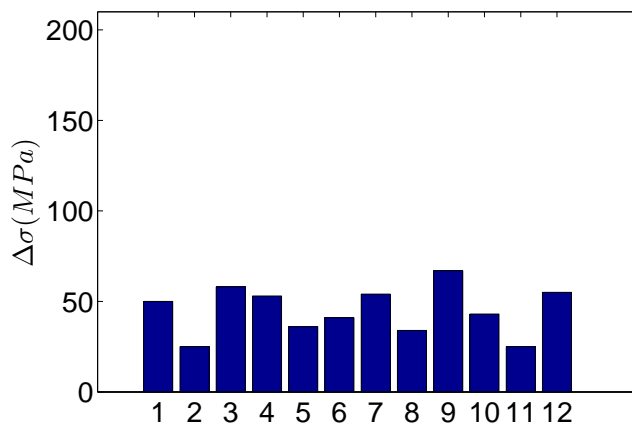


Figura 6.29: Espectro de tensiones número 3.



Tabla 6.10: Comparación de valores de números de Miner y probabilidades de fallo obtenidas para un detalle 112 y considerando los espectros de tensiones de la tabla 6.9.

	Espectro nº 1	Espectro nº 2	Espectro nº 3
Nº Miner (con LF)	0.8964	0.7702	0.5839
Nº Miner (sin LF)	0.8964	0.7941	0.6673
$P_{fallo}$ (con LF)	2.82 %	1.15 %	0.16 %
$P_{fallo}$ (sin LF)	2.82 %	1.39 %	0.44 %

Por lo tanto, puede concluirse que la consideración o no de un límite de fatiga en EC3 no genera cambios sustanciales en la evaluación del daño generado por un elemento.

### 6.5.11. Consideración de 2 tramos con pendientes diferentes

Tal y como se muestra en la figura 6.30, el paso de pendiente  $-1/3$  a  $-1/5$  adoptado por el EC3 se puede entender como una modificación para considerar de una forma más ajustada la curvatura positiva en la región de alto número de ciclos.

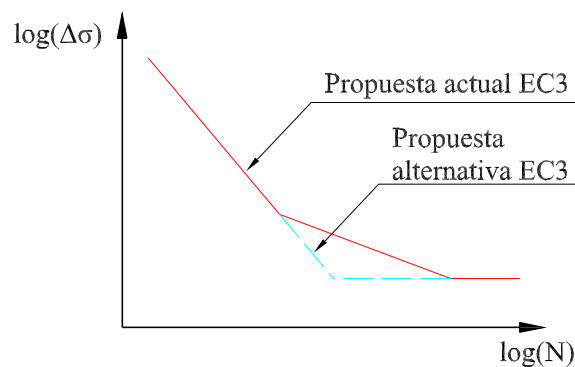


Figura 6.30: Modelo actual de EC3 y modelo alternativo más conservador.

Versiones anteriores a la actualmente en vigor permitían considerar un tramo de pendiente única ( $m = 3$ ) en la comprobación a fatiga de amplitud variable, en lugar de considerar el modelo de 2 tramos lineales ( $m = 3$  y  $m = 5$ ). En el presente apartado se pretende cuantificar este procedimiento y verificar, si el modelo simplificado de un único tramo, penaliza excesivamente el cálculo del daño acumulado. De nuevo, considerado una categoría 112 sometida a los espectros de tensiones expuestos en 6.9. Los resultados se muestran en la tabla 6.11.

Los resultados obtenidos muestran cómo para espectros con rangos de tensión medios y altos, la consideración de 1 o 2 tramos lineales no modifica excesivamente la medida de daño sobre el elemento. No obstante, la consideración del modelo con pendiente única  $-1/3$  proporciona resultados excesivamente conservadores a rangos de tensión bajos (espectro número 3). Por lo tanto, la consideración del modelo con 2 tramos lineales más un límite de fatiga puede considerarse como acertada, a pesar de incrementar la complejidad del modelo.

Tabla 6.11: Comparación de valores de números de Miner y probabilidades de fallo obtenidas para un detalle 112 y considerando los espectros de tensiones de la tabla 6.9.

	Espectro nº 1	Espectro nº 2	Espectro nº 3
Nº Miner (prop. actual)	0.8964	0.7702	0.5839
Nº Miner (m=3)	0.8964	0.7912	1.2110
$P_{fallo}$ (prop. actual)	2.82 %	1.15 %	0.16 %
$P_{fallo}$ (m=3)	2.82 %	1.36 %	11.84 %

### 6.5.12. Descenso del límite de endurencia

El EC3 establece un descenso del límite de endurencia (de  $\Delta\sigma_D$  a  $\Delta\sigma_L$ ) para elementos sometidos a fatiga de amplitud variable y para cualquier tamaño de grieta. Dicho descenso representa, aproximadamente, un 45 % del valor de  $\Delta\sigma_D$  para todos los detalles considerados y está fundamentado en las consideraciones realizadas por Kitagawa y Takahashi que relacionan el límite de endurencia de un material con el tamaño de grieta, las cuales se exponen a continuación.

#### El diagrama de Kitagawa-Takahashi

En 1976, Kitagawa y Takahashi [35] ponen de manifiesto la relación existente entre el tamaño de grieta de un elemento sometido a fatiga de alto número de ciclos y su límite de endurencia. Mediante su conocido diagrama, se establece una determinada longitud de grieta  $a_0$  a partir de la cual el límite de endurencia de amplitud constante del material sin entallar  $\Delta\sigma_0$  decrece según aumenta la longitud de grieta considerada, proporcionando una separación clara entre la zona donde se generará un crecimiento estable de grieta y la zona donde las barreras microestructurales del material contendrán dicho crecimiento (ver figura 6.31). Numerosos estudios han reflejado la estrecha relación entre las barreras microestructurales y el tamaño de grano con la iniciación y crecimiento inicial de las grietas y, por lo tanto, con el límite de fatiga de algunos metales [82, 55, 42, 14, 81, 54]. Cada una de dichas barreras microestructurales tienen asociada una dimensión característica y un rango de tensiones crítico, determinando ambos su resistencia a la propagación de la grieta. Debido a que la barrera microestructural más fuerte se suele encontrar a una determinada distancia  $d$  de la superficie, las microgrietas superficiales de una profundidad menor no deberían de influir en el límite de fatiga del material [13], aunque esta afirmación no está universalmente aceptada. Además, dicha barrera microestructural ejerce una resistencia al avance de la grieta mayor que la resistencia a la nucleación de la misma y, por lo tanto, su valor determina el límite de fatiga del material.

El diagrama K-T condensa en sí mismo la información de valores umbrales provenientes de 2 diagramas diferentes; por un lado, se considera el valor de límite de endurencia a amplitud constante  $\Delta\sigma_0$  proveniente del campo S-N como el parámetro idóneo para modelizar el comportamiento de grietas a un nivel microscópico (microgrietas). Por otro lado y aplicando la MFEL <sup>3</sup>, se considera el valor umbral del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K_{th}$ , prove-

<sup>3</sup>Se supone que, en ausencia de sobrecargas, la plastificación en el frente de grieta es muy limitada para

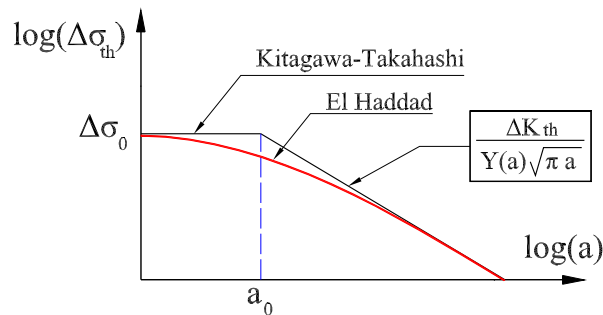


Figura 6.31: Gráfica de K-T, con el ajuste de El Haddad et al.

niente del diagrama de velocidad de crecimiento de grieta  $da/dN - \Delta K$ , como el indicado para representar el crecimiento de grietas *grandes* o de mayor longitud que las consideradas anteriormente, tal y como se muestra en la figura 6.32. Si bien es cierto que la MFEP también ha sido utilizada para estudiar el comportamiento de pequeñas grietas sometidas a valores umbrales de fatiga, la MFEL es la herramienta más eficaz para el estudio del crecimiento de grietas a nivel macroscópico [80].

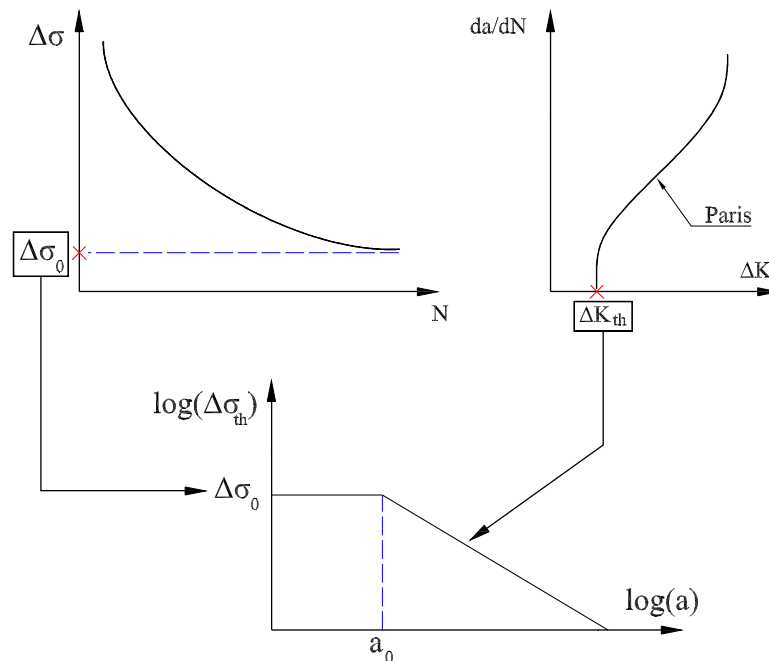


Figura 6.32: Modo de obtención de la gráfica de K-T.

La diferencia de comportamiento entre microgrietas y macrogrietas se suelen atribuir a diferentes mecanismos de cierre de grieta, así como a las tensiones microestructurales y tamaños de zona plástica.

La razón por la cual en el diagrama K-T se recurre al límite de fatiga del campo S-N como valor umbral en microgrietas, se debe a que la MFEL no parece ser el método de valores de carga cercanos al umbral de fatiga

aplicación más eficaz para tamaños de grieta próximos a cero. El estudio de este fenómeno es más complejo que para tamaños de grieta mayores y aún no está plenamente resuelto. No obstante, algunos autores como El Haddad et al. [19] han intentado explicar el comportamiento de cualquier tamaño de grieta bajo una misma expresión matemática:

$$\Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th}}{Y(a)\sqrt{\pi(a+a_0)}}. \quad (6.10)$$

La ecuación de El Haddad et al. puede ser considerada como un ajuste asintótico entre el límite de fatiga y el valor umbral de la propagación de grieta, y establece una corrección al modelo de K-T al considerar que el límite de fatiga si depende del tamaño de la grieta, aunque estas sean próximas a cero.

El valor  $a_0$  es conocido como *tamaño intrínseco de grieta* y se define mediante la siguiente ecuación:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2. \quad (6.11)$$

La existencia de dicho valor mínimo, intrínseco o ficticio de grieta, explicaría la existencia de un determinado valor umbral de intensidad de tensiones, incluso para un tamaño de grieta nulo (lo cual contradice la MFEL). Existe un intenso debate acerca del significado físico del tamaño intrínseco de grieta, no obstante está admitido que su valor depende de la microestructura del material y que está relacionado con el comportamiento de cierre de grieta [30].

### Comentarios acerca del diagrama de Kitagawa-Takahashi

**Método de obtención del diagrama** La obtención directa o experimental del diagrama K-T se realiza mediante un procedimiento de prefatiga de una probeta hasta un tamaño de grieta determinado; posteriormente se aplican rangos de tensiones durante un número considerablemente alto de ciclos, procediendo a verificar para cada rango de tensión si la grieta se ha incrementado. En caso negativo, se aumenta ligeramente el rango de tensión aplicado, manteniéndolo de nuevo un número elevado de ciclos, procediendo a verificar posteriormente el tamaño de grieta. Este proceso se repite las veces necesarias, hasta que se constata que existe un aumento del tamaño de grieta, momento en el que se vuelve a fatigar la probeta un número de ciclos determinado bajo un rango de tensión elevado, con objeto de aumentar el tamaño de grieta y repetir de nuevo el proceso.

El proceso se resume en el diagrama de flujo mostrado en la figura 6.33. Aplicando la metodología clásica, el número de ciclos  $N_2$  al que se somete el elemento debe de ser considerablemente alto, con el objetivo de asegurar que la grieta no va a reanudar su crecimiento bajo el rango de tensión considerado. Asimismo, el valor inicial del rango de tensión considerado para la aplicación de los  $N_2$  ciclos debe de ser bajo, con el objetivo de no sobrepasar el límite de fatiga del material en una primera iteración del proceso, puesto que en caso de darse esa situación, no sería posible asegurar que dicho valor de rango de tensión es el límite de fatiga del material para el tamaño de grieta considerado. Además, los sucesivos aumentos en el rango de tensión aplicado cuando se verifica que el tamaño de grieta no se ha modificado deben de ser los más reducidos posible, para intentar aportar la máxima precisión al método.

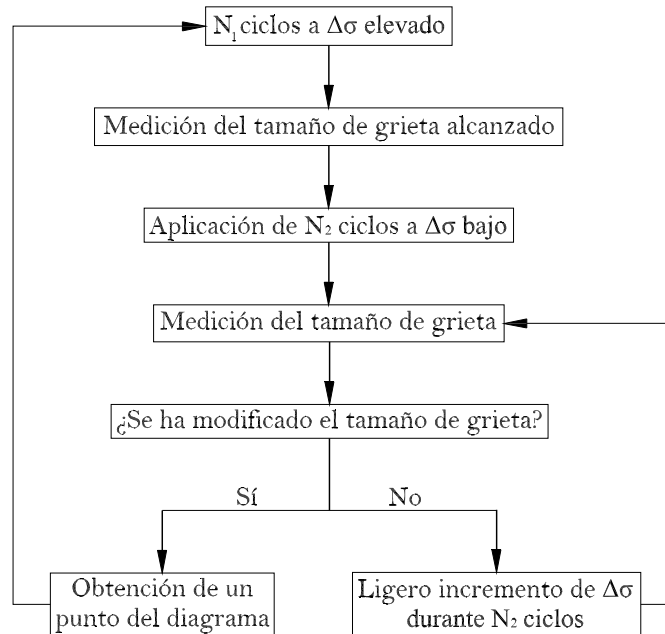


Figura 6.33: Procedimiento habitual de obtención del diagrama K-T.

Como puede comprobarse, este procedimiento de obtención del diagrama K-T es largo y costoso, por lo que la implementación de nuevos métodos de obtención del diagrama resultaría altamente ventajosa.

**Parámetro real obtenido** El diagrama K-T expuesto anteriormente relaciona la evolución del límite de endurencia de un elemento con su avance de grieta. No obstante, por el propio método de construcción del diagrama, es obvio que el parámetro representado en el mismo no es un valor de límite de endurencia, sino un límite de fatiga para un número de ciclos determinado ( $N_2$  en el diagrama de flujo de la figura 6.33). Por lo tanto, la gráfica del diagrama K-T dependerá del número de ciclos considerado para su obtención, tal y como se muestra en la figura 6.34.

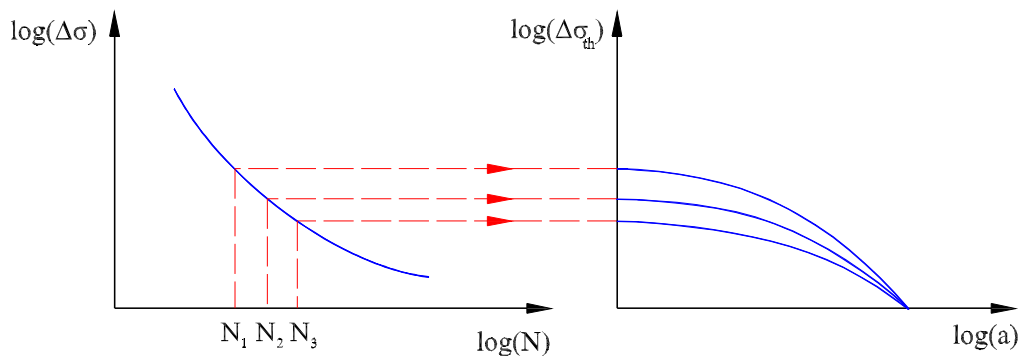


Figura 6.34: Diferentes aproximaciones de El Haddad para un modelo de ajuste determinista y diferentes valores del límite de fatiga.

Asimismo, en la construcción del diagrama el valor del límite de fatiga considerado procedente del campo S-N debe de ser obtenido para el mismo número de ciclos  $N_2$  considerados para el cálculo del resto del diagrama, con el objeto de asociar la totalidad de la curva al mismo número de ciclos. Por otro lado, debe de asegurarse que el modelo de ajuste considerado permite obtener un límite de fatiga válido para el número de ciclos considerado, lo cual no puede asegurarse en todos los casos (el modelo de Basquin está basado en una regresión lineal simple de su curva media, por lo que el ajuste realizado no es válido fuera del rango de los datos experimentales, a diferencia de otros modelos de ajuste generales, como el modelo de Castillo y Fernández Canteli).

La figura 6.35 muestra los datos provenientes de ensayos de fatiga llevados a cabo por Nalla et al. [58] y ajustados por Kruzic y Ritchie [39] tomando como material de ensayo probetas rectangulares de dentina humana (figura 6.36).

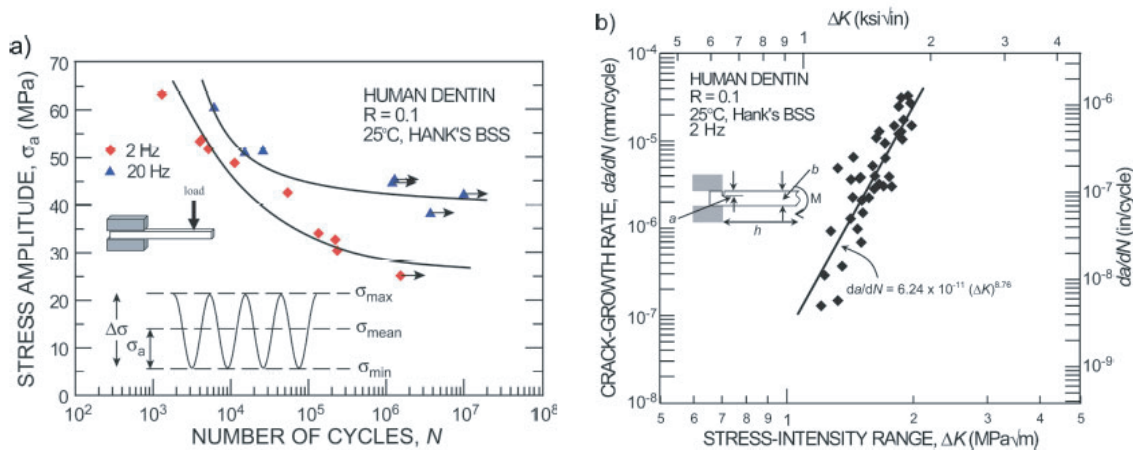


Figura 6.35: Los datos de Nalla et al. ajustados por Kruzic y Ritchie mediante un modelo de fatiga determinista y el ajuste de la Ley de Paris [39].

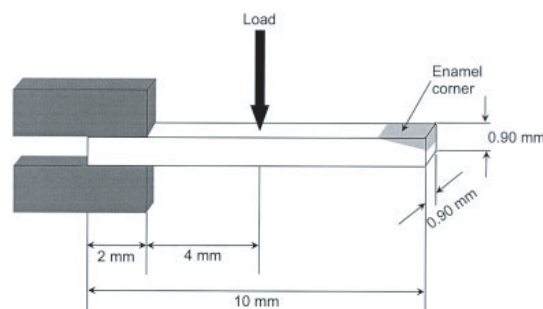


Figura 6.36: Probetas utilizadas por Nalla et al. para la realización de los ensayos de fatiga [58].

A partir de los ajustes de la curva S-N para 2 Hz (límite de fatiga para 1 millón de ciclos  $\Delta\sigma_0 = 50\text{MPa}$ ) y de la gráfica de velocidad de crecimiento de grieta ( $\Delta K_{th} = 1,06\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ) mostrados en la figura 6.35, Kruzic y Ritchie obtienen la curva del diagrama K-T mostrada en la figura 6.37.

Considerando los datos de Nalla et al, se ha procedido a ajustar el campo S-N mediante

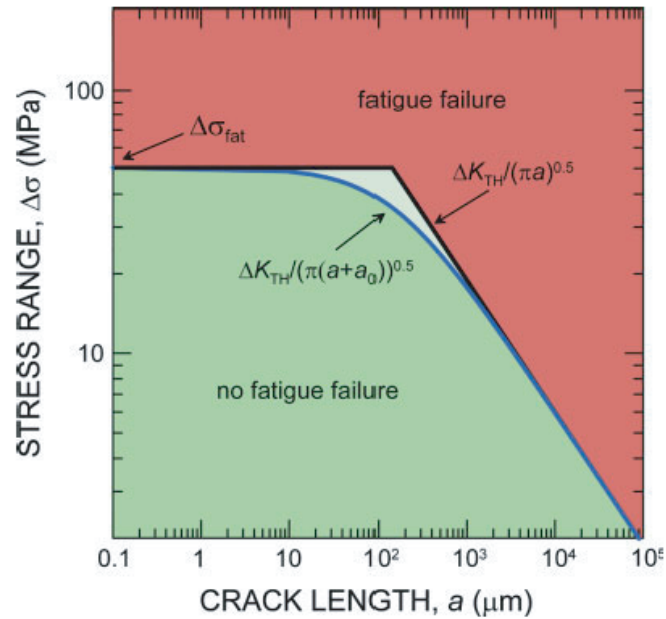


Figura 6.37: Curva del diagrama K-T con la aproximación de El haddad obtenida por Kruzic y Ritchie [39].

el modelo de Castillo y Fernández Canteli obteniendo las curvas percentiles asociadas al 1%, 5% y 50%, tal y como se muestra en la figura 6.38. Para la curva S-N asociada al percentil del 50%, se han obtenido los límites de fatiga para 1, 5, 10 y 100 millones de ciclos, dando lugar a diferentes curvas del diagrama K-T obtenidas mediante la aproximación de El Haddad, las cuales se representan en la figura 6.39. La utilización de un modelo que permite la extrapolación del ajuste fuera del rango de los datos para la obtención del límite de fatiga asegura la validez de las curvas del diagrama K-T propuestas.

**Concepción estadística del diagrama K-T** El diagrama de K-T surge bajo una concepción determinista del problema de la fatiga, sin tener en cuenta la realidad estadística inherente al fenómeno estudiado. Mediante la consideración clásica del diagrama basada en la representación de una única curva para un determinado número de ciclos no se refleja la dispersión asociada a cualquier límite de fatiga, puesta de manifiesto por los modelos de ajuste probabilistas.

Tal y como se muestra en la figura 6.40, la aplicación de un modelo de ajuste probabilista para la obtención del campo S-N permite obtener una distribución de probabilidad para el límite de fatiga considerado. Por lo tanto, la dispersión asociada a dicho parámetro necesariamente debe de reflejarse en el diagrama K-T.

La curva del diagrama de K-T proporcionada por Kruzic y Ritchie representada en la figura 6.37 está asociada al número de ciclos considerado para la obtención del límite de fatiga, pero también a la probabilidad de fallo de la curva S-N utilizada (en el caso de Kruzic y Ritchie, el 50%). El ajuste de los datos mediante un modelo probabilista (figura 6.38) permite la obtención de diferentes percentiles para el campo S-N, los cuales a su vez permiten la obtención de diferentes curvas percentiles del diagrama K-T, obteniendo así un

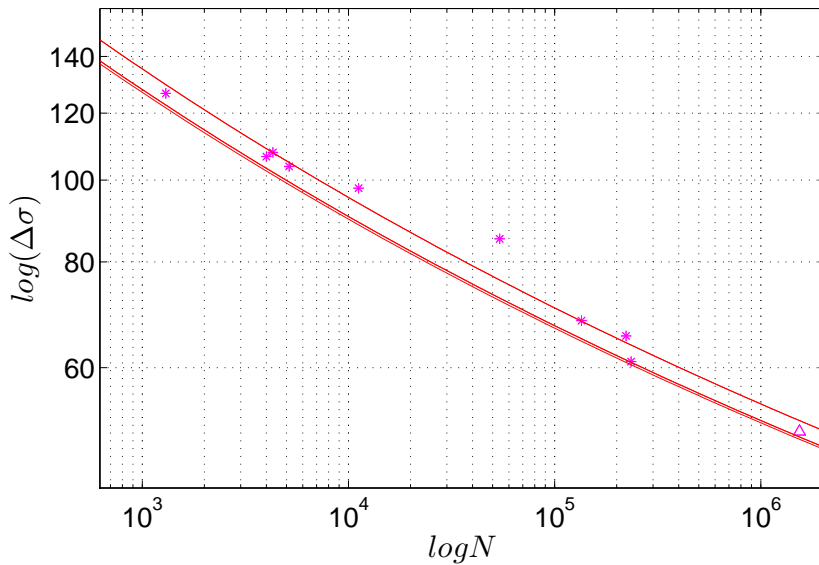


Figura 6.38: Los datos de Nalla et al. [58] ajustados mediante el modelo de Castillo y Fernández Canteli.

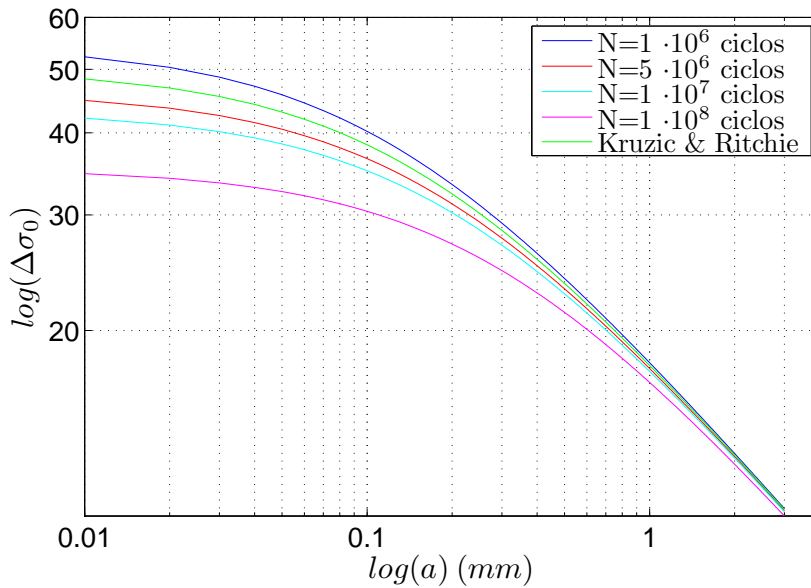


Figura 6.39: Diferentes curvas del diagrama K-T utilizando la aproximación de El Haddad considerando diferentes límites de fatiga del material.

campo K-T, tal y como se muestra en la figura 6.41. Debido a que los datos experimentales de Nalla et al. utilizados para el ajuste del campo S-N tienen un valor de dispersión bajo, las curvas percentiles del campo K-T reflejan el mismo nivel encontrándose muy próximas entre sí. La dispersión del campo K-T es directamente proporcional a la dispersión del campo S-N.

Asimismo, la consideración de un modelo de ajuste probabilista permite realizar una interpretación correcta acerca del significado del área encerrada bajo la curva del diagrama K-



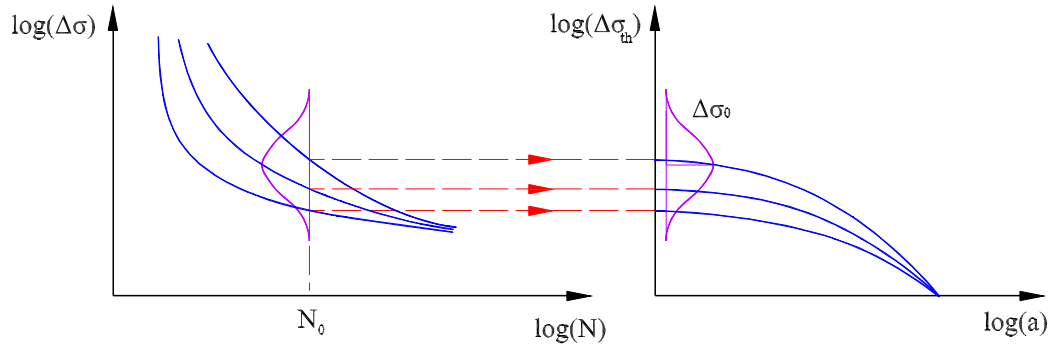


Figura 6.40: Diferentes curvas de El Haddad considerando la distribución probabilística del límite de fatiga proporcionada por el campo S-N.

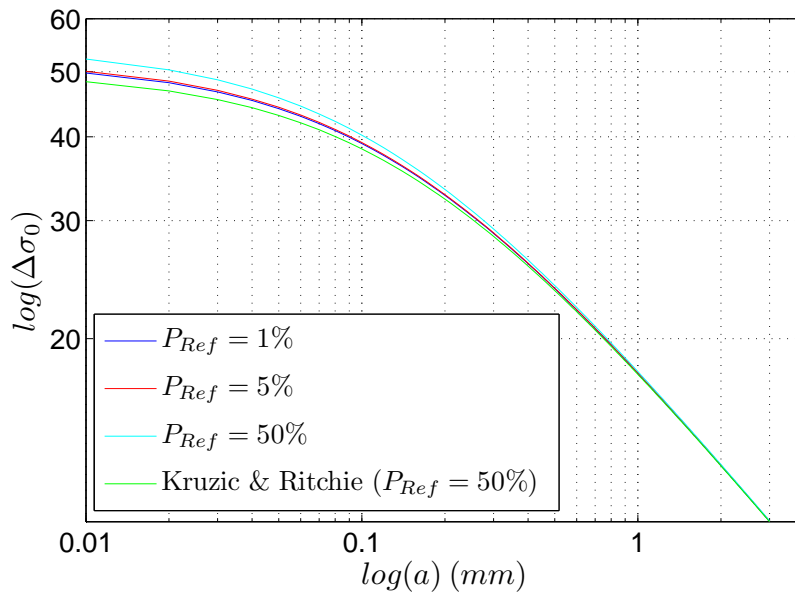


Figura 6.41: Campo K-T obtenido para diferentes probabilidades de referencia y un valor  $N = 1 \cdot 10^6$  ciclos.

T; a diferencia de la creencia generalizada de que dicho área encierra los puntos  $(a-\Delta\sigma)$  donde no se genera fallo por fatiga (como se puede comprobar en la figura 6.37), la interpretación correcta es que dichos puntos tienen una probabilidad de fallo menor que la considerada para la obtención del límite de fatiga a partir del campo S-N. Para el caso de la aproximación de El Haddad propuesta por Kruzic y Ritchie en la figura 6.38, el límite de fatiga es obtenido a partir de la curva media, por lo que los puntos encerrados bajo el área del diagrama K-T tendrán una probabilidad de fallo por fatiga menor de un 50 %, lo que es totalmente diferente a expresar que dichos puntos están libres de fallo por fatiga.

### Un nuevo método para la obtención experimental del diagrama Kitagawa-Takahashi

En el presente apartado se expone un método práctico para la obtención experimental del diagrama K-T basado en la aplicación del método desarrollado por Fernández Canteli et

al. para la obtención del límite de fatiga basado en el método termográfico de Risitano [40]. El método aplica las consideraciones termográficas aportadas por La Rosa y Risitano para la obtención del límite de fatiga, pero difiere en el ajuste de los datos experimentales que lo proporcionan.

En el método de Fernández Canteli et al, se procede mediante la normalización de la variable  $\Delta\sigma$  de la siguiente forma:

$$\Delta\sigma^* = \frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_{th}}{\Delta\sigma_{max} - \Delta\sigma_{th}}. \quad (6.12)$$

Las constante  $\Delta\sigma_{th}$  y  $\Delta\sigma_{max}$  representan los valores donde la emisión térmica aumenta sin control. De esta forma, la nueva variable normalizada  $\Delta\sigma^*$  es monótona creciente y varía entre 0 y 1, permitiendo su tratamiento como función de distribución estadística. Considerando una distribución de Gumbel de mínimos, la ecuación del modelo es la siguiente:

$$\Delta T = \lambda - \delta \cdot \log \left[ -\log \left( \frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_{th}}{\Delta\sigma_{max} - \Delta\sigma_{th}} \right) \right]. \quad (6.13)$$

Los parámetros  $\lambda$  y  $\delta$  son los correspondientes a la distribución de Gumbel, pudiendo considerarse cualquier otro tipo de distribución estadística. Mediante la aplicación del método de mínimos cuadrados, se hallan las constantes de la ecuación 6.13. La representación gráfica se realiza mediante escala natural para la variable  $\Delta\sigma$  y escala logarítmica para la variable  $\Delta T$ .

Algunas de las ventajas del método termográfico mejorado son:

- Posibilidad de localización del punto donde se origina el crecimiento de la grieta.
- El carácter no destructivo del ensayo.
- El método permite la obtención del límite de fatiga con la utilización de una sola probeta.
- La rapidez de ejecución del ensayo, debido que el método permite establecer con un número reducido de ciclos (entre 10.000 y 50.000) valores estables de temperatura para la construcción de la gráfica  $\Delta\sigma - \log(\Delta T)$ .
- A diferencia del método de Risitano, el límite de fatiga obtenido es independiente de la frecuencia utilizada en la realización del ensayo.
- La mejora en el ajuste de la gráfica  $\Delta\sigma - \log(\Delta T)$  permite obtener valores del límite de fatiga más cercanos al valor verdadero (teórico) obtenido mediante la aplicación del modelo de ajuste de Castillo y Fernández Canteli.

En la figura 6.42 se muestran los datos provenientes de 2 ensayos realizados a diferentes frecuencias, junto con sus respectivos ajustes [21]. Se comprueba cómo el método proporciona valores muy similares de  $\Delta\sigma_{th}$  independientemente de la frecuencia utilizada en la realización de los ensayos.

Una de las aplicaciones del método termográfico expuesto con anterioridad es la obtención experimental del diagrama K-T de una forma rápida y con un menor coste. A diferencia del método experimental clásico, donde para la obtención de un único punto del diagrama K-T

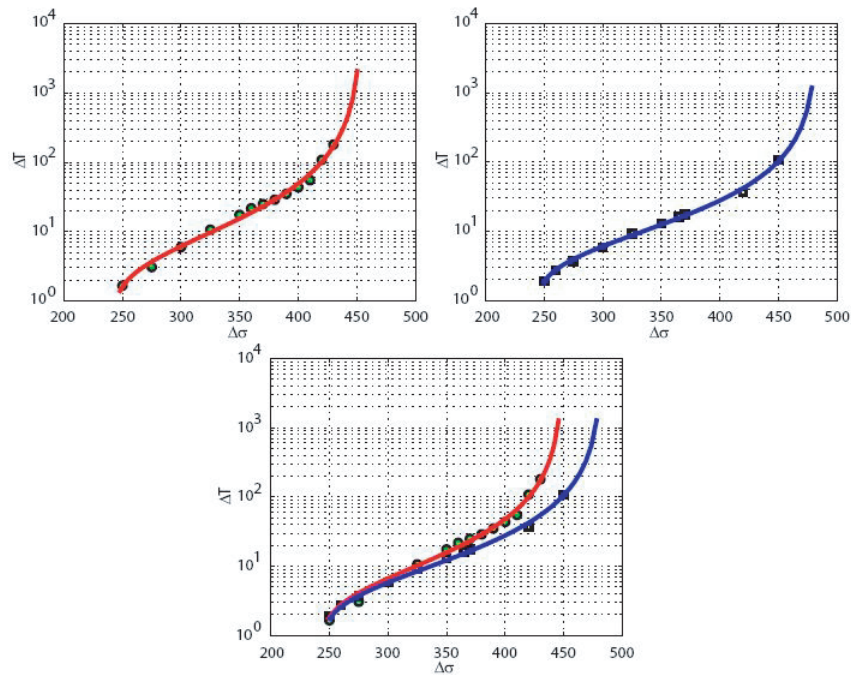


Figura 6.42: Ensayos termográficos realizados a 5 Hz y 10 Hz, junto con los ajustes de los datos realizados.

pueden ser necesarios millones de ciclos, aplicando el método de Fernández Canteli et al. el coste del mismo punto del diagrama puede obtenerse después de 150.000 ciclos, mediante el ajuste de una curva de 10 puntos considerando 15.000 ciclos para estabilizar el valor de  $\Delta T$ .

### El EC3 bajo las consideraciones del diagrama de Kitagawa-Takahashi

Los comentarios expresados anteriormente permiten establecer un paralelismo entre el descenso de límite de fatiga considerado por el EC3 para fatiga de amplitud variable y el diagrama K-T. A partir del conocimiento del valor umbral del factor de intensidad de tensiones ( $\Delta K_{th}$ ) correspondiente al material considerado y la curva S-N proporcionada por el EC3, es posible obtener la aproximación de El Haddad del diagrama K-T para la categoría considerada. Dicha curva estará asociada a una probabilidad de referencia del 5% y a un número de ciclos de 5 o 100 millones, en función de considerar fatiga de amplitud constante o variable, tal y como se muestra en la figura 6.43.

La modificación de la curva S-N considerada por el EC3 para elementos sometidos a fatiga de amplitud variable implica una modificación del límite de fatiga, tanto en el valor del propio parámetro como del número de ciclos considerado para su obtención. La obtención de las curvas del diagrama K-T asociadas a ambos casos bajo las consideraciones expresadas anteriormente permiten cuantificar en forma de área contenida entre ambas curvas la inversión de la probabilidad de fallo asociada a dicho área, es decir, mientras que para fatiga de amplitud constante las combinaciones de puntos  $(a, \Delta\sigma)$  pertenecientes a la zona rayada de la figura 6.43 tienen una probabilidad de fallo menor de un 5%, para el caso de fatiga de amplitud variable la probabilidad de fallo de los puntos contenidos en dicha zona es mayor de un 5%,

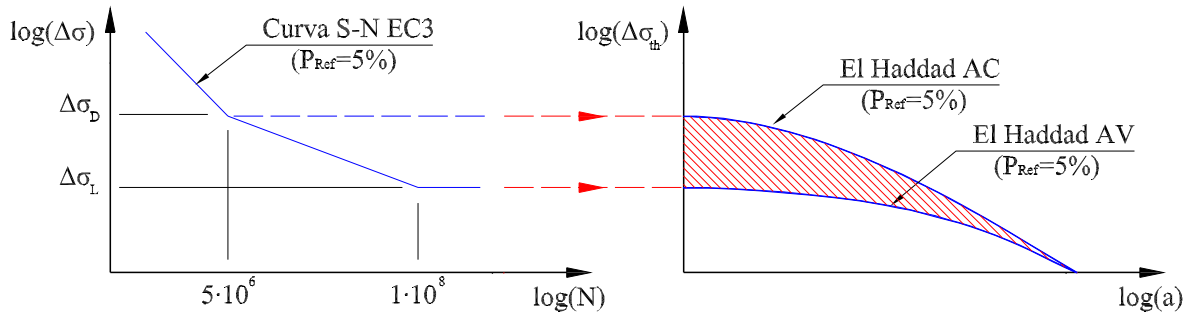


Figura 6.43: Asimilación al modelo de El Haddad del descenso del límite de endurencia realizado por el EC3.

lo cual expresa de forma clara el aumento de probabilidad de sufrir un fallo por fatiga en elementos sometidos a cargas de amplitud variable respecto a cargas de amplitud constante.

## 6.6. Conclusiones

En el presente capítulo se han realizado ajustes sobre datos experimentales obtenidos de la literatura, con el objetivo de realizar un análisis crítico con las hipótesis consideradas por el EC3. Las principales conclusiones obtenidas se resumen a continuación:

- El modelo de ajuste considerado por el EC3 para el tratamiento de los datos experimentales (Modelo Lineal de Basquin) es un modelo de fácil aplicabilidad, pero no permite la extrapolación del ajuste realizado fuera del rango de tensión de los datos experimentales. Por lo tanto, ante el desconocimiento de los datos utilizados por el EC3 para la obtención de las curvas de cálculo, puede expresarse cierta incertidumbre acerca de la fiabilidad de las curvas proporcionadas.
- La consideración de la hipótesis de una distribución normal para el logaritmo del tiempo de vida a fatiga puede ser considerada como admisible desde un punto de vista práctico. No obstante, considerando que el fenómeno de la resistencia a fatiga de un elemento es un problema de extremos, desde un punto de vista teórico la distribución que mejor modeliza el fenómeno es una distribución de extremos.
- La consideración de desviación típica constante para la variable  $\log(N)$  es inherente al modelo utilizado por el EC3 para el ajuste de los datos experimentales. Si bien es cierto que la experiencia dicta que la desviación típica de la variable  $\log(N)$  aumenta según descende el rango de tensión considerado, los resultados obtenidos muestran que la hipótesis de dispersión constante puede ser considerada como admisible considerando los rangos de trabajo usuales de los aceros estructurales.
- La falta de información referente a la desviación típica de los detalles estructurales considerados por parte del EC3 imposibilita un análisis estadístico del fenómeno. Tampoco permite considerar curvas de cálculo asociadas a probabilidades de cálculo diferentes del 5%, ni obtener un valor de probabilidad de fallo para un determinado elemento

sometido a un espectro de tensiones, lo cual es inadmisibile. Se propone la inclusión en forma de anexo a la norma de los diferentes valores de la variable  $\log(N)$  para permitir la realización de análisis estadísticos que proporcionen valores de probabilidad de rotura en función del número de ciclos transcurridos.

- Los ajustes llevados a cabo sobre datos experimentales de diferentes categorías muestran que las curvas de cálculo proporcionadas por el EC3 no son conservadoras en algunos supuestos, estando asociadas en algunos casos a probabilidades de referencia mayores del 5 %.
- La interpretación del descenso del límite de fatiga para elementos sometidos a amplitud variable puede ser analizada mediante el diagrama de límite de fatiga variable de Kitagawa y Takahashi. Asimismo, las consideraciones estadísticas propuestas para dicho diagrama permiten cuantificar el aumento de la probabilidad de fallo del elemento sometido a un determinado rango de tensión en función del avance de grieta.



## Capítulo 7

# *Desarrollo de un modelo estadístico de daño basado en el EC3*

### 7.1. Introducción

En el presente capítulo se propone un nuevo modelo estadístico de daño basado en las hipótesis adoptadas por el EC3 y en las consideraciones estadísticas expuestas en el capítulo 5. Debido a que el código normativo establece diferentes curvas S-N en función del tipo de carga (amplitud constante y variable) y las tensiones generadas sobre el elemento (tensiones normales y tangenciales), se proponen 2 formulaciones diferentes del modelo:

- Modelo bilineal: Aplicable a elementos sometidos a tensiones normales de amplitud constante y tensiones tangenciales de amplitud tanto constante como variable (curvas S-N compuestas por un tramo recto más un límite de fatiga).
- Modelo trilineal: Aplicable a elementos sometidos a esfuerzos normales de amplitud variable (curvas S-N compuestas por 2 tramos rectos de diferentes pendientes más un límite de fatiga)

El modelo propuesto requiere para su aplicación del conocimiento de:

- El campo S-N del elemento considerado, el cual será generado a partir de la curva de cálculo propuesta por el EC3 y las consideraciones estadísticas comentadas en el apartado 5.4.
- Un índice estadístico de daño, ya sea el número de Miner o el rango de tensión equivalente. Para obtener las distribuciones estadísticas de estas variables, se aplicarán las consideraciones expuestas en los apartados 5.8.1 y 5.7.1

El resultado obtenido por el modelo estadístico propuesto es un valor de probabilidad de fallo que tiene un elemento cuando es sometido a un determinado estado tensional, el cual es independiente tanto de la curva S-N considerada como referencia como del índice de daño utilizado para su obtención. Es importante comentar que la utilización de los 2 índices de

daño propuestos (número de Miner y rango de tensión equivalente) es independiente del tipo de carga generada sobre el elemento, ya sea de amplitud constante o variable. El capítulo finaliza con la aplicación del modelo de daño propuesto a un elemento bajo la acción de 3 espectros de tensiones diferentes, la explicación de los resultados obtenidos y la aportación de unas conclusiones finales.

## 7.2. Hipótesis adoptadas por el modelo de daño propuesto

El modelo estadístico de daño propuesto está basado en algunos supuestos considerados por el EC3, por lo que tiene las siguientes características:

- Para la generación del campo S-N se considera que la curva proporcionada por el EC3 está asociada a un 5% de probabilidad de referencia.
- Se requiere el conocimiento de un valor para la desviación típica del detalle considerado.
- La variable  $\log(N)$  se distribuye normalmente.
- Se considera un modelo bilineal con exponente  $m=3$  para esfuerzos normales de amplitud constante, un modelo bilineal con exponente  $m=5$  para esfuerzos tangenciales y un modelo trilineal con exponentes  $m=3$  y  $m=5$  para esfuerzos normales de amplitud variable.
- La desviación típica de la variable  $\log(N)$  se considera constante, independientemente del rango de tensión considerado.
- Se mantienen los valores de  $5 \cdot 10^6$  ciclos (esfuerzos normales de amplitud constante) y  $1 \cdot 10^8$  ciclos (esfuerzos normales de amplitud variable y esfuerzos tangenciales) para la consideración de los límites de fatiga de la totalidad de las curvas S-N del campo generado. Esta hipótesis está fundamentada en el descenso del límite de fatiga que experimentan las curvas de cálculo del EC3 tras la aplicación de un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ . La consideración de esta transformación desde un punto de vista estadístico realizada en el apartado 5.6 permite asociar a la curva resultante una probabilidad de referencia menor que la original, manteniendo el número de ciclos para los que se obtiene el límite de fatiga, tal y como se muestra en la figura 7.1. Este hecho se produce para elementos sometidos a cualquier tipo de esfuerzos (normales y tangenciales) y cargas (amplitud constante y variable).

## 7.3. Modelo estadístico para fatiga de amplitud constante

### 7.3.1. Generación del campo S-N

La generación del campo S-N se basa en las consideraciones estadísticas expuestas en el apartado 5.4, las cuales permiten la obtención de las curvas percentiles del elemento considerado. Si se considera que para esfuerzos normales el punto  $(5 \cdot 10^6, \Delta\sigma_D)$  está contenido en la curva de cálculo (asociada a un 5% de probabilidad de referencia), se obtiene la siguiente expresión:



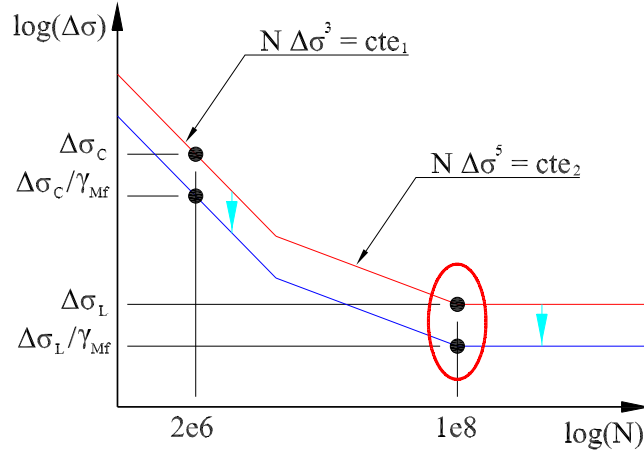


Figura 7.1: Descenso de límite de fatiga asociado a una probabilidad de referencia menor para un mismo valor de número de ciclos.

$$\mu_{\log N} - \log(5 \cdot 10^6) = -\sqrt{2} \cdot \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1). \quad (7.1)$$

Asimismo, considerando que para esfuerzos tangenciales, la curva proporcionada por EC3 asociada al 5% contiene el punto  $(1 \cdot 10^8, \Delta\tau_L)$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\mu_{\log N} - \log(1 \cdot 10^8) = -\sqrt{2} \cdot \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1). \quad (7.2)$$

Para cualquiera de los 2 casos anteriores, la elección de una nueva curva percentil del campo S-N asociada a una probabilidad de referencia  $P_{Ref}^*$  da lugar a un nuevo valor de número de ciclos  $Y$ , modificando las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\mu_{\log N} - \log(Y) = -\sqrt{2} \cdot \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1). \quad (7.3)$$

En caso de aplicar un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  a una determinada curva percentil, las ecuaciones 7.4 y 7.5 permiten el cálculo de la probabilidad de referencia de la nueva curva del modelo obtenida (asociada a  $P_{Ref}^*$ ). Nótese que dichas ecuaciones son una ligera modificación de la ecuación 5.23. Para esfuerzos normales se obtiene:

$$2P_{Ref}^* - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2} \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2P_{Ref} - 1) - 3 \cdot \log(\gamma_{Mf})}{\sqrt{2} \sigma} \right). \quad (7.4)$$

Para esfuerzos tangenciales:

$$2P_{Ref}^* - 1 = \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2} \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2P_{Ref} - 1) - 5 \cdot \log(\gamma_{Mf})}{\sqrt{2} \sigma} \right). \quad (7.5)$$

A partir de las ecuaciones 7.3 y 7.1 para esfuerzos normales y 7.3 y 7.2 para esfuerzos tangenciales, se halla el nuevo número de ciclos  $Y$  que define la curva percentil considerada.  $Y$  define el número de ciclos correspondientes a la nueva probabilidad  $P_{Ref}^*$  para los rangos de tensión  $\Delta\sigma_D$  y  $\Delta\tau_L$ , tal y como se muestra en la figura 7.2.

Para esfuerzos normales se obtiene la ecuación 7.6.

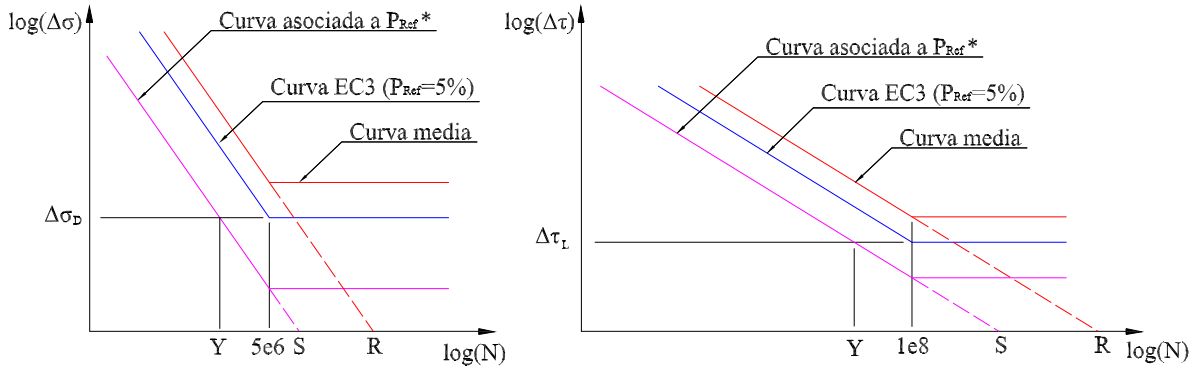


Figura 7.2: Representación de los parámetros  $Y$ ,  $S$  y  $R$  para elementos sometidos a esfuerzos normales y tangenciales.

$$\log(Y) = \log(5 \cdot 10^6) - \sqrt{2} \cdot \sigma \left( \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1) - \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1) \right). \quad (7.6)$$

Para esfuerzos tangenciales, se obtiene la ecuación 7.7.

$$\log(Y) = \log(1 \cdot 10^8) - \sqrt{2} \cdot \sigma \left( \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1) - \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1) \right). \quad (7.7)$$

A partir de los valores del parámetro  $Y$  definidos anteriormente, el campo S-N se genera mediante la aplicación de la ecuación 7.8 para esfuerzos normales:

$$\begin{aligned} N \cdot \Delta\sigma^3 &= \frac{Y \cdot S}{5 \cdot 10^6} & N \leq 5 \cdot 10^6, \\ \Delta\sigma &= \sqrt[3]{\frac{Y \cdot S}{(5 \cdot 10^6)^2}} & N > 5 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Asimismo, la ecuación 7.9 permite generar un campo S-N para esfuerzos tangenciales:

$$\begin{aligned} N \cdot \Delta\tau^5 &= \frac{Y \cdot S}{1 \cdot 10^8} & N \leq 1 \cdot 10^8, \\ \Delta\tau &= \sqrt[5]{\frac{Y \cdot S}{1 \cdot 10^{16}}} & N > 1 \cdot 10^8. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Las ecuaciones 7.8 y 7.9 permiten generar la totalidad del campo S-N en función del tipo de esfuerzo considerado. En las figuras 7.3 y 7.4 se muestra el campo S-N generado mediante la aplicación de las ecuaciones 7.8 y 7.8 para un elemento 112 ( $\sigma = 0,18$ ) sometido a esfuerzos normales y esfuerzos tangenciales, respectivamente. Tal y como se ha comentado anteriormente, se mantiene los valores de 5 millones de ciclos para los esfuerzos normales y 100 millones de ciclos para los esfuerzos tangenciales como número de ciclos a considerar para la determinación del límite de fatiga en cada caso.

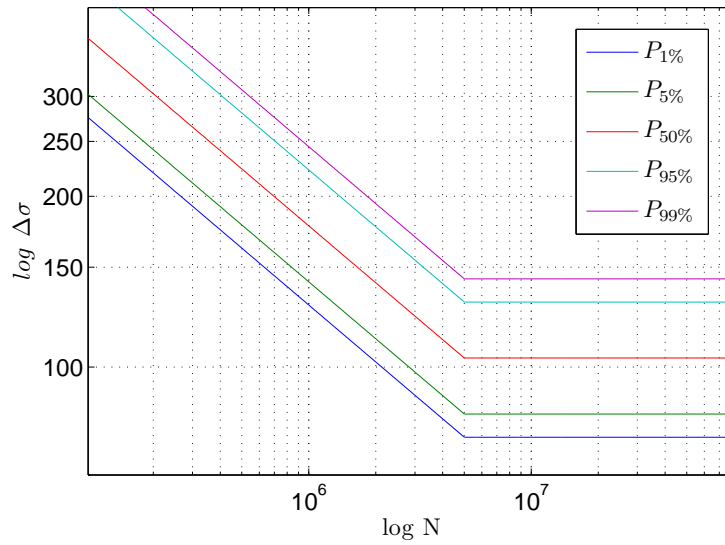


Figura 7.3: Campo S-N generado para el caso de esfuerzos normales de amplitud constante sobre un elemento 112 ( $\sigma = 0,18$ ) mediante la aplicación de la ecuación 7.8.

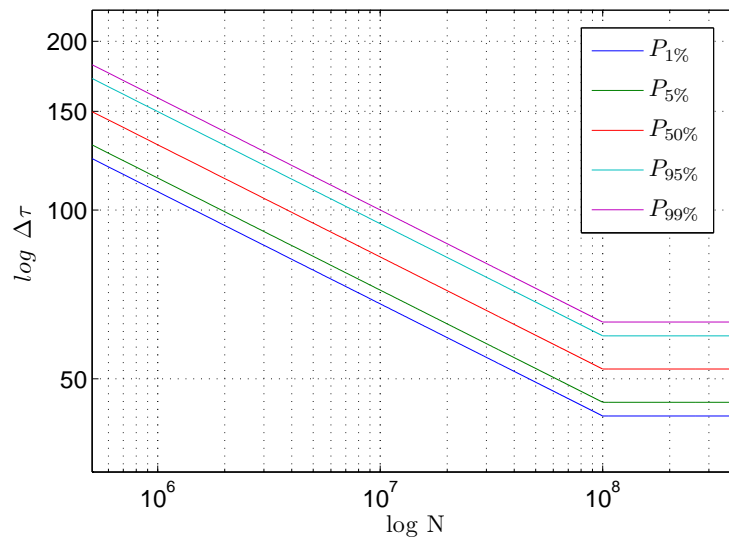


Figura 7.4: Campo S-N generado para el caso de esfuerzos tangenciales sobre un elemento 112 ( $\sigma = 0,18$ ) mediante la aplicación de la ecuación 7.9.

### 7.3.2. Modelo estadístico de daño

Una vez generado el campo S-N, las consideraciones desarrolladas en los apartados 5.8.1 y 5.7.1 permiten, a partir de la información contenida en el EC3, obtener un modelo estadístico de daño en función del tipo de esfuerzo considerado.

### Consideración del número de Miner como índice de daño

A partir del valor  $Y$  se obtiene el número de Miner para la curva de referencia considerada asociada a  $P_{Ref}^*$ . Para esfuerzos normales se obtiene la siguiente expresión:

$$M_{Ref}^* = \frac{N_i}{Y \left( \frac{\Delta\sigma_D}{\Delta\sigma_i} \right)^3}. \quad (7.10)$$

Para esfuerzos tangenciales:

$$M_{Ref}^* = \frac{N_i}{Y \left( \frac{\Delta\tau_C}{\Delta\tau_i} \right)^5}. \quad (7.11)$$

La expresión para la distribución de probabilidad asociada a la variable  $M_{Ref}^*$  tanto para esfuerzos normales como tangenciales se muestra a continuación:

$$M_{ref}^* \sim \log N \left( \log \left( \frac{R}{S} \right), \sigma \right) = \log N \left( -\sqrt{2}\sigma \cdot \text{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1), \sigma \right), \quad (7.12)$$

donde el valor  $S$  hace referencia al punto de corte de una curva percentil cualquiera del modelo asociada a una determinada probabilidad de referencia  $P_{Ref}^*$  con el eje  $\log(N)$ , y la constante  $R$  es el correspondiente de la curva media (ver figura 7.2).

### Consideración del rango de tensión equivalente como índice de daño

El modelo de daño propuesto también permite la aplicación del método del rango de tensión equivalente ( $\Delta\sigma_{E,K}^*$ ). A partir de la definición de  $M_{Ref}^*$  expuesta anteriormente y para esfuerzos normales, se define la variable aleatoria  $\Delta\sigma_{E,K}^*$  como sigue:

$$\Delta\sigma_{E,K}^* = \left( \frac{S \cdot M_{Ref}^*}{N_K} \right)^{1/3}. \quad (7.13)$$

Asimismo, para esfuerzos tangenciales:

$$\Delta\tau_{E,K}^* = \left( \frac{S \cdot M_{Ref}^*}{N_K} \right)^{1/5}. \quad (7.14)$$

Las expresiones de la distribución de probabilidad para esfuerzos normales de amplitud constante se muestra a continuación:

$$\Delta\sigma_{E,K}^* \sim \log N \left( \frac{1}{3} \cdot \log \frac{R}{N_K}, \frac{\sigma}{3} \right). \quad (7.15)$$

Asimismo, para esfuerzos tangenciales se obtienen las ecuaciones

$$\Delta\tau_{E,K}^* \sim \log N \left( \frac{1}{5} \cdot \log \frac{R}{N_K}, \frac{\sigma}{5} \right). \quad (7.16)$$

Las distribuciones de probabilidad para los límites de endurencia  $\Delta\sigma_L$  y  $\Delta\tau_L$  se obtienen particularizando la expresión 5.16 con los valores adecuados en cada caso. De esta forma, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\Delta\sigma_L^* \sim \log N \left( \frac{1}{3} \cdot \log \frac{R}{5 \cdot 10^6}, \frac{\sigma}{3} \right), \quad (7.17)$$

$$\Delta\tau_L^* \sim \log N \left( \frac{1}{5} \cdot \log \frac{R}{1 \cdot 10^8}, \frac{\sigma}{5} \right). \quad (7.18)$$

Una vez hallada la probabilidad de fallo de un componente  $P_{fallo}^*$  utilizando la consideración estadística del número de Miner o el rango de tensión equivalente, será necesario comparar dicho valor con una probabilidad de fallo máxima admisible  $P_{adm}$  considerada. Dicha probabilidad puede hallarse aplicando las ecuaciones 7.4 y 7.5 considerando  $P_{Ref} = 5\%$  junto con el valor adecuado de  $\gamma_{Mf}$  en función del grado de seguridad requerido por el EC3.

## 7.4. Modelo estadístico de daño para fatiga de amplitud variable

El modelo que se desarrolla a continuación es una generalización del expuesto en el apartado 7.3 para el caso de esfuerzos normales y tangenciales de amplitud variable, por lo que parte de los mismo supuestos y consideraciones que el anterior.

### 7.4.1. Generación del campo S-N

El procedimiento para la generación del campo S-N en elementos sometidos a esfuerzos tangenciales de amplitud variable es similar al generado para amplitud constante en el apartado 7.3, debido a que el EC3 considera las mismas curvas S-N para ambos tipos de esfuerzos. Por lo tanto, las ecuaciones 7.9 son válidas para la generación del campo para esfuerzos tangenciales de amplitud variable.

Respecto a elementos sometidos a esfuerzos normales de amplitud variable, en los apartados 5.8.2 y 5.7.2 se ha puesto de manifiesto los inconvenientes generados (bajo una consideración estadística) derivados de la aplicación de coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  a las curvas propuestas por el EC3, debido a que este hecho asocia los diferentes tramos de la curva (tramos para  $m = 3$  y  $m = 5$ ) a probabilidades de referencia diferentes (tal y como se comentó en el apartado 5.6.2, la reducción de la probabilidad de referencia por la consideración de un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  depende del exponente  $m$  del tramo de la curva considerado). Este hecho imposibilita la aplicación de una variable de daño, puesto que el valor de la variable aplicada no se puede asociar a una única distribución de probabilidad.

Debido a esto, para elementos sometidos a esfuerzos normales se propone un modelo estadístico de daño de aplicación para todo el recorrido de la variable  $\Delta\sigma$  y para cualquier consideración de probabilidad de referencia y coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf}$ . Para su obtención se aplica la máxima reducción de probabilidad de referencia a la totalidad de la curva y no solo a la zona que experimenta una mayor reducción (tramo con exponente  $m = 5$ ), tal y como muestra la figura 7.5

Bajo esta consideración, el modelo estadístico de daño propuesto permite generar un campo S-N donde las diferentes curvas percentiles mantienen una probabilidad de referencia  $P_{Ref}^*$  constante en todos sus tramos lineales, lo que permite la aplicación de las variables

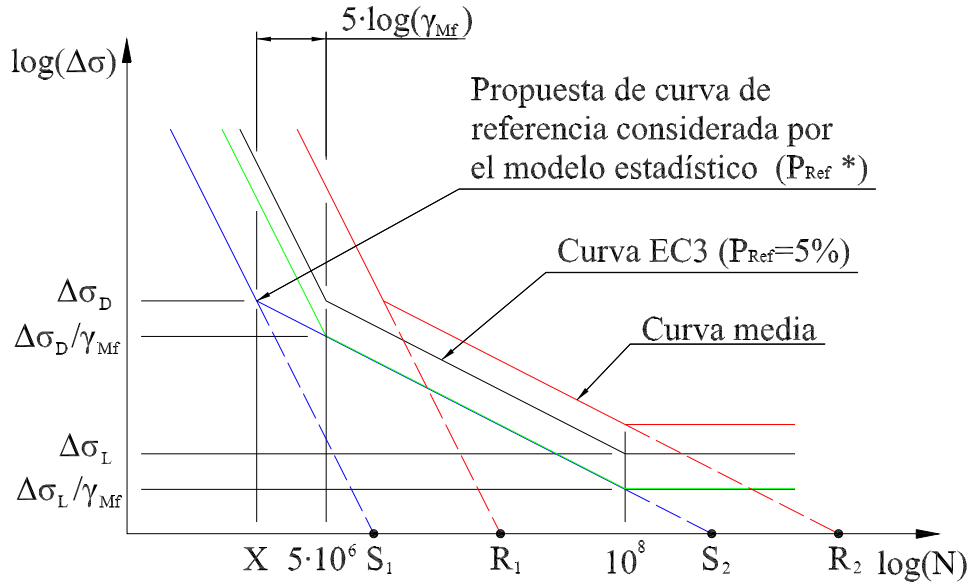


Figura 7.5: Propuesta de curva de referencia para la aplicación del modelo trilineal estadístico considerando.

$M_{Ref}^*$  y  $\Delta\sigma_{E,K}^*$  para cualquier rango de tensión considerado y su posterior valoración a partir de una única distribución de probabilidad.

Es importante reseñar que, si bien el modelo estadístico trilineal propuesto presenta una modificación del tramo correspondiente al exponente  $m = 3$  en caso de considerar coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  (lo que lleva implícito un aumento del valor de la variable  $M_{Ref}^*$ ), dicho aumento en el valor de la variable no modifica el cálculo de la probabilidad de fallo del elemento, de la misma forma que en el modelo bilineal estadístico presentado en el capítulo 7.3, distintas curvas de referencia producen distintos valores de la variable  $M_{Ref}^*$  pero la probabilidad de fallo finalmente obtenida es la misma.

El modelo estadístico propuesto mantiene asimismo el número de ciclos considerado por el EC3 para el que se define el límite de durancia ( $N = 10^8$  ciclos), considerando una distribución estadística constante para  $\Delta\sigma_L$  y para valores iguales o mayores a 100 millones de ciclos, tal y como se muestra en la figura 7.5.

Al igual que en el modelo bilineal estadístico propuesto en 7.3, la generación del campo S-N se basa en la consideración por parte del EC3 de asociar una probabilidad de referencia del 5% a la curva que contiene el punto  $(5 \cdot 10^6, \Delta\sigma_D)$ , obteniendo así la expresión 7.19

$$\mu_{\log N} - \log(5 \cdot 10^6) = -\sqrt{2} \cdot \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1). \quad (7.19)$$

El punto  $X$  que define cualquier otra curva del modelo estadístico asociada a una probabilidad de referencia  $P_{Ref}^*$  (ver figura 7.5), verifica la ecuación 7.20:

$$\mu_{\log N} - \log(X) = -\sqrt{2} \cdot \sigma \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1). \quad (7.20)$$

En caso de aplicar un coeficiente de minoración  $\gamma_{Mf} \neq 1$  a una determinada curva percentil del modelo, la ecuación 7.21 permite el cálculo de la probabilidad de referencia de la

nueva curva del modelo obtenida (asociada a  $P_{Ref}^*$ ). Nótese que la ecuación 7.21 es una ligera modificación de la ecuación 5.23:

$$2P_{Ref}^* - 1 = erf \left( \frac{\sqrt{2} \sigma erf^{-1}(2P_{Ref} - 1) - 5 \cdot \log(\gamma_{Mf})}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (7.21)$$

A partir de las ecuaciones 7.20 y 7.19 se halla el punto  $X$  (número de ciclos correspondientes a la curva percentil de referencia para el rango de tensión  $\Delta\sigma_D$ ) que se muestra en la figura 7.5:

$$\log(X) = \log(5 \cdot 10^6) - \sqrt{2} \cdot \sigma (erf^{-1}(2 \cdot 0,05 - 1) - erf^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1)). \quad (7.22)$$

Las ecuaciones 7.23 permiten generar la totalidad del campo S-N para elementos sometidos a esfuerzos normales de amplitud variable. Junto con las ecuaciones 7.21 y 7.22, es posible hallar el valor  $X$  considerando la curva original asociada a  $P_{Ref} = 5\%$  proporcionada por el EC3 modificada por un coeficiente  $\gamma_{Mf} \neq 1$  o por el contrario considerar directamente una determinada probabilidad de referencia  $P_{Ref}^*$  elegida:

$$\begin{aligned} N \cdot \Delta\sigma^3 &= \frac{X \cdot S_1}{5 \cdot 10^6} & N \leq X, \\ N \cdot \Delta\sigma^5 &= \frac{X \cdot S_2}{5 \cdot 10^6} & X < N \leq 10^8, \\ \Delta\sigma &= \sqrt[5]{\frac{X \cdot S_2}{5 \cdot 10^{14}}} & N > 10^8, \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde las constantes  $S_1$  y  $S_2$  hacen referencia a los puntos de corte de los tramos de la curva S-N elegida con el eje de abscisas, tal y como se muestra en la figura 7.5. La figura 7.6 muestra el campo S-N generado mediante las ecuaciones 7.23, correspondiente a un detalle de categoría 112, considerando un valor de desviación típica para la variable  $\log(N)$  de 0.18 [83].

#### 7.4.2. Modelo estadístico de daño

##### Consideración del número de Miner como índice de daño

Para elementos sometidos a esfuerzos normales, el cálculo del número de Miner para cualquier curva percentil del modelo asociada a  $P_{Ref}^*$  se obtiene a partir del valor  $X$ :

$$M_{Ref}^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{X \left( \frac{\Delta\sigma_D}{\Delta\sigma_i} \right)^{m_i}}, \quad (7.24)$$

siendo  $m_i$  el exponente adecuado en función del rango de tensión considerado.

Para esfuerzos tangenciales, se obtiene la ecuación 7.25, la cual es similar a la ecuación 7.11 pero generalizada para varios valores de carga:

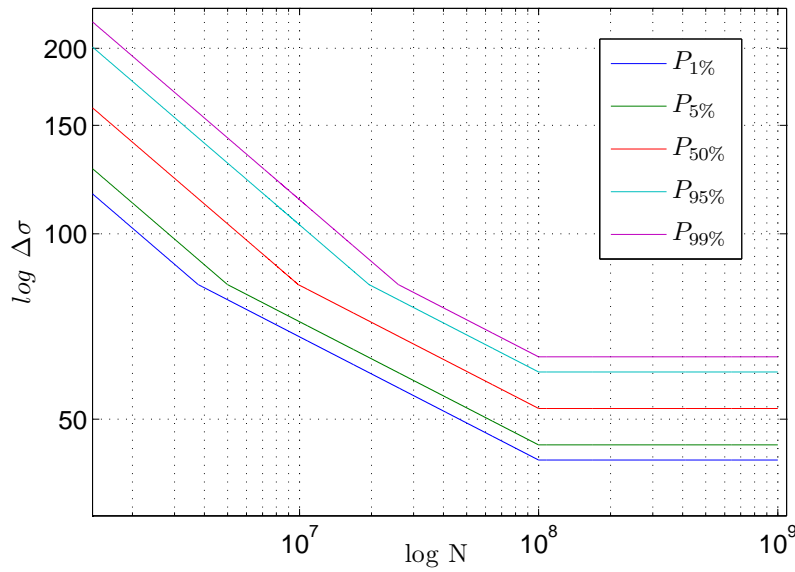


Figura 7.6: Campo S-N generado mediante la aplicación del modelo estadístico propuesto para un detalle de categoría 112 ( $\sigma = 0,18$ ).

$$M_{Ref}^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{Y\left(\frac{\Delta\tau_C}{\Delta\tau_i}\right)^5}. \quad (7.25)$$

La expresión para la distribución de probabilidad asociada a la variable  $M_{Ref}^*$  tanto para esfuerzos normales como tangenciales se muestra a continuación:

$$M_{ref}^* \sim \log N \left( \log \left( \frac{R}{S} \right), \sigma \right) = \log N \left( -\sqrt{2}\sigma \cdot \text{erf}^{-1}(2 \cdot P_{Ref}^* - 1), \sigma \right), \quad (7.26)$$

donde, al igual que en el modelo bilineal estadístico, la constante  $S$  representa el punto de corte de una curva cualquiera del modelo con el eje de abscisas y la constante  $R$  se refiere a la curva media. Nótese que para el modelo trilineal mostrado en la figura 7.5, la relación  $\log(R_1/S_1) = \log(R_2/S_2) = \log(R/S)$ .

### Consideración del rango de tensión equivalente como índice de daño

El modelo estadístico propuesto también permite la aplicación del método del rango de tensión equivalente. A partir de la definición de  $M_{Ref}^*$ , para elementos sometidos a esfuerzos normales se define la variable aleatoria  $\Delta\sigma_{E,K}^*$  como sigue:

$$\Delta\sigma_{E,K}^* = \left( \frac{S' \cdot M_{Ref}^*}{N_K} \right)^{\frac{1}{m_K}}, \quad (7.27)$$

donde el exponente  $m_K$  y  $S_K$  serán los valores correspondientes al valor de número de ciclos  $N_K$  considerado.



Asimismo, para esfuerzos tangenciales:

$$\Delta\tau_{E,K}^* = \left( \frac{S \cdot M_{Ref}^*}{N_K} \right)^{1/5}. \quad (7.28)$$

La expresión para la distribución de probabilidad se muestra a continuación:

$$\Delta\sigma_{E,K}^* \sim \log N \left( \frac{1}{m_K} \cdot \log \frac{R}{N_K}, \frac{\sigma}{m_K} \right). \quad (7.29)$$

Asimismo, para esfuerzos tangenciales se obtienen las ecuaciones

$$\Delta\tau_{E,K}^* \sim \log N \left( \frac{1}{5} \cdot \log \frac{R}{N_K}, \frac{\sigma}{5} \right). \quad (7.30)$$

La distribución de probabilidad del límite de endurencia  $\Delta\sigma_L$  para elementos sometidos a esfuerzos normales se obtiene particularizando la expresión 5.16 para  $N_K = 10^8$  ciclos, tal y como se muestra en la expresión 7.31. Al igual que el método determinista original, se ha considerado que dicha distribución permanece constante a partir de  $10^8$  ciclos.

$$\Delta\sigma_L^* \sim \log N \left( \frac{1}{5} \cdot \log \frac{R}{10^8}, \frac{\sigma}{5} \right). \quad (7.31)$$

Para esfuerzos tangenciales:

$$\Delta\tau_L^* \sim \log N \left( \frac{1}{5} \cdot \log \frac{R}{1 \cdot 10^8}, \frac{\sigma}{5} \right). \quad (7.32)$$

Una vez hallada la probabilidad de fallo de un componente  $P_{fallo}^*$ , será necesario comparar dicho valor con una probabilidad de fallo máxima admisible  $P_{adm}$ . Dicha probabilidad puede hallarse aplicando la ecuación 7.21 considerando  $P_{Ref} = 5\%$  junto con el valor adecuado de  $\gamma_{Mf}$  en función del grado de seguridad requerido por el EC3.

## 7.5. El índice de seguridad $IS$

Se define el índice de seguridad  $IS$  como la relación entre la probabilidad de fallo del componente considerado y la probabilidad de fallo máxima admisible, tal y como se muestra en la ecuación 7.33.

$$IS = \frac{P_{fallo}^*}{P_{adm}} \in [0, \infty). \quad (7.33)$$

El índice de seguridad  $IS$  permite conocer el margen de seguridad real aplicado a un componente. Un elemento que no acumule daño a fatiga tendrá un índice  $IS = 0$ , mientras que un elemento en el que su probabilidad de fallo  $P_{fallo}^*$  se halla igualado a la probabilidad de fallo máxima admisible  $P_{adm}$  le corresponderá un índice  $IS = 1$ .

La metodología de aplicación de ambos modelos estadísticos propuestos se resumen en el siguiente diagrama de flujo de la figura 7.7:

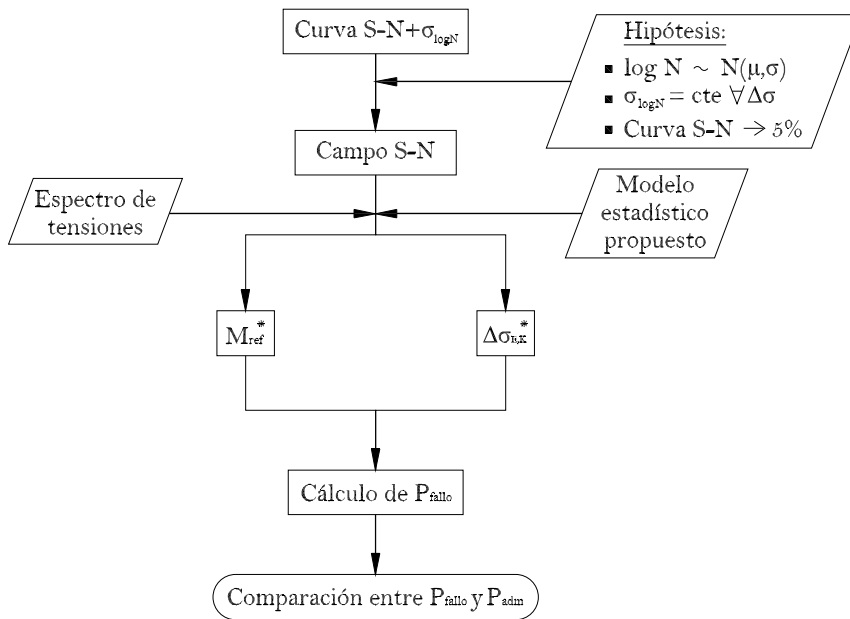


Figura 7.7: Diagrama de flujo del proceso general de aplicación del modelo estadístico.

Tabla 7.1: Resultados de la aplicación del número de Miner mediante el modelo trilineal estadístico para el espectro de tensiones número 1.

	$P_{Ref} = 1\%$			$P_{Ref} = 5\%$			$P_{Ref} = 50\%$		
$\gamma_{Mf}$	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35
$P_{Ref}^*$	1%	0.003%	1.3e-7%	5%	0.04%	0.7e-5%	50%	4.58%	0.0147%
$M^*$	1.1890	2.3916	5.3317	0.8964	1.8031	4.0197	0.4534	0.9119	2.0329
$\mu_{M^*}$	2.8579	5.7482	12.8148	2.1546	4.3338	9.6615	1.0897	2.1918	4.8862
$\sigma_{M^*}$	1.2372	2.4885	5.5478	0.9328	1.8762	4.1826	0.4717	0.9488	2.1153
$P_{FALLO}$	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%	2.82%

## 7.6. Validación experimental del modelo

En esta sección se pretende validar el modelo de daño propuesto. Para ello se utilizarán los 3 espectros de tensiones mostrados en la tabla 6.9 sobre un mismo de detalle de categoría 112 utilizado en apartados anteriores (límite de fatiga a amplitud constante = 83 MPa, umbral de daño = 45 MPa). Los resultados se muestran a continuación.

### 7.6.1. Espectro de tensiones número 1

Se ha aplicado el modelo estadístico de daño para obtener la probabilidad de fallo del elemento considerado al ser sometido al espectro de tensiones número 1. Los resultados, considerando el número de Miner como variable aleatoria, se muestran en la tabla 7.1.

Asimismo, se ha obtenido la probabilidad de fallo del detalle constructivo considerado a partir del rango de tensión equivalente. Al igual que ejemplos anteriores, se han considerado

Tabla 7.2: Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente mediante el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 1.

	$P_{Ref} = 5\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,15$			$P_{Ref} = 1\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,35$		
$P_{Ref}^*$	0.04 %			0.00000013 %		
$N_K$	2e5	3e6	8e6	2e5	3e6	8e6
$\Delta\sigma_{E,K}(MPa)$	223.07	89.59	73.63	223.07	89.59	73.63
$\mu\Delta\sigma_{E,K}$	306.30	105.31	86.55	306.30	105.31	86.55
$\sigma\Delta\sigma_{E,K}$	42.52	8.74	7.18	42.52	8.74	7.18
$P_{FALLO}$	2.82 %	2.82 %	2.82 %	2.82 %	2.82 %	2.82 %

Tabla 7.3: Resultados de la aplicación del número de Miner en el modelo trilineal estadístico mediante el espectro de tensiones número 2.

	$P_{Ref} = 1\%$			$P_{Ref} = 5\%$			$P_{Ref} = 50\%$		
$\gamma_{Mf}$	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35
$P_{Ref}^*$	1 %	0.003 %	1.3e-7 %	5 %	0.04 %	0.7e-5 %	50 %	4.58 %	0.0147 %
$M^*$	1.0216	2.0993	4.6801	0.7702	1.5827	3.5285	0.3891	0.7835	1.7845
$\mu M^*$	2.8579	5.7482	12.8148	2.1546	4.3338	9.6615	1.0897	2.1918	4.8862
$\sigma M^*$	1.0216	2.0993	4.6801	0.7702	1.5827	3.5285	0.3891	0.7835	1.7845
$P_{FALLO}$	1.15 %	1.31 %	1.31 %	1.15 %	1.31 %	1.31 %	1.14 %	1.15 %	1.31 %

diferentes opciones de probabilidades de referencia  $P_{Ref}$ , coeficientes de minoración  $\gamma_{Mf}$  y número de ciclos de referencia  $N_K$ . Los resultados se muestran en la tabla 7.2.

### 7.6.2. Espectro de tensiones número 2

La tabla 7.3 muestra los resultados obtenidos a partir del número de Miner considerando el espectro de tensiones número 2. Asimismo, se ha aplicado el método del rango de tensión equivalente. Los resultados se muestran en la tabla 7.4.

### 7.6.3. Espectro de tensiones número 3

De igual modo, las tablas 7.5 y 7.6 muestran las probabilidades de fallo obtenidas al aplicar el modelo estadístico de daño propuesto al elemento considerado.

## 7.7. Discusión

A la vista de los resultados mostrados en las tablas 7.1 y 7.2, puede comprobarse cómo el modelo estadístico de daño aporta idénticas probabilidades de rotura del elemento (independientemente de utilizar  $M_{Ref}^*$  o  $\Delta\sigma_{E,K}^*$ ) cuando los rangos de tensión considerados son mayores que el límite de fatiga del material (espectro de tensiones número 1). Si se considera

Tabla 7.4: Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente mediante el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 2.

$P_{Ref}^*$	$P_{Ref} = 5\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,15$			$P_{Ref} = 1\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,35$		
	0.04%			0.00000013%		
$N_K$	2e5	3e6	8e6	2e5	3e6	8e6
$\Delta\sigma_{E,K}(MPa)$	223.16	87.28	71.74	223.16	87.28	71.74
$\mu_{\Delta\sigma_{E,K}}$	306.30	105.31	86.55	306.30	105.31	86.55
$\sigma_{\Delta\sigma_{E,K}}$	42.52	8.74	7.18	42.52	8.74	7.18
$P_{FALLO}$	1.31%	1.31%	1.31%	1.31%	1.31%	1.31%

Tabla 7.5: Resultados de la aplicación del número de Miner mediante el modelo trilineal estadístico para el espectro de tensiones número 3.

$\gamma_{Mf}$	$P_{Ref} = 1\%$			$P_{Ref} = 5\%$			$P_{Ref} = 50\%$		
	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35	1	1.15	1.35
$P_{Ref}^*$	1%	0.003%	1.3e-7%	5%	0.04%	0.7e-5%	50%	4.58%	0.0147%
$M^*$	0.7744	1.6794	3.9406	0.5839	1.2662	2.9709	0.2873	0.5939	1.4276
$\mu_{M^*}$	2.8579	5.7482	12.8148	2.1546	4.3338	9.6615	1.0897	2.1918	4.8862
$\sigma_{M^*}$	1.2372	2.4885	5.5478	0.9328	1.8762	4.1826	0.4717	0.9488	2.1153
$P_{FALLO}$	0.16%	0.29%	0.42%	0.16%	0.29%	0.42%	0.13%	0.16%	0.29%

Tabla 7.6: Resultados de la aplicación del rango de tensión equivalente en el modelo trilineal estadístico considerando el espectro de tensiones número 3.

$P_{Ref}^*$	$P_{Ref} = 5\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,15$			$P_{Ref} = 1\% \wedge \gamma_{Mf} = 1,35$		
	0.04%			0.00000013%		
$N_K$	2e5	3e6	8e6	2e5	3e6	8e6
$\Delta\sigma_{E,K}(MPa)$	207.17	83.47	68.60	210.73	84.33	69.31
$\mu_{\Delta\sigma_{E,K}}$	306.30	105.31	86.55	306.30	105.31	86.55
$\sigma_{\Delta\sigma_{E,K}}$	42.52	8.74	7.18	42.52	8.74	7.18
$P_{FALLO}$	0.29%	0.29%	0.29%	0.42%	0.42%	0.42%

el espectro número 2, los límites de fatiga para cada una de las curvas percentiles consideradas pueden hacer que determinados rangos de tensión próximos al límite de fatiga del material no sean contabilizados al aplicar la regla de Miner; ésta razón explica las diferencias en las probabilidades de rotura obtenidas (tablas 7.3 y 7.4). No obstante, pese a considerar rangos de tensión de millones de ciclos en las proximidades del límite de fatiga, se comprueba que la diferencia entre las probabilidades de rotura obtenidas se comprueba que es prácticamente despreciable. El mismo argumento explica los resultados para el espectro de tensiones número 3, donde prácticamente la totalidad de los rangos de tensión considerados son cercanos al límite de fatiga del material. No obstante, los valores de probabilidad de fallo obtenidos para los diferentes percentiles siguen siendo bajos (tablas 7.5 y 7.6).

No obstante, es necesario comentar que la utilización de una probabilidad de referencia del 50 % (la cual lleva asociada un límite de fatiga considerablemente alto) puede considerarse como anecdótica. En los ejemplos anteriores se ha utilizado, junto con el espectro de tensiones número 3, para generar el caso más desfavorable para la aplicación del modelo y poder verificar su comportamiento. No obstante, los percentiles usuales considerados ( $P_{Ref} = 1\%$  y  $P_{Ref} = 5\%$ ), los cuales tienen límites de fatiga menores, proporcionan resultados más que aceptables.

## 7.8. Conclusiones

A continuación, se exponen una serie de comentarios acerca del modelo estadístico de daño propuesto en el presente capítulo:

- A partir de un código de cálculo determinista como el EC3 se ha desarrollado un modelo estadístico de daño para fatiga de amplitud constante y variable. En el modelo propuesto se asocia el nivel de *daño* acumulado por un elemento a la probabilidad de fallo que posee el citado elemento cuando es sometido a un determinado espectro de tensiones.
- La probabilidad de fallo de un elemento se obtiene mediante la consideración estadística del número de Miner o el rango de tensión equivalente.
- El modelo de daño desarrollado siguen manteniendo una fácil aplicabilidad, en contraposición con otros modelos estadísticos más desarrollados.
- Debido a que el modelo estadístico de daño propuesto está basado en los mismos supuestos que el EC3, se sigue considerando que la desviación típica de la variable  $\log(N)$  es constante para cualquier rango de tensión considerado.
- Se ha adoptado la simplificación de considerar la distribución estadística de  $\Delta\sigma_L$  como constante para valores de número de ciclos superiores a 5 millones o 100 millones, en función del caso considerado.
- Debido a que el límite de fatiga  $\Delta\sigma_L^*$  es función de  $P_{ref}^*$ , pueden existir espectros de cálculo en que alguno de sus rangos de tensión no se contabilicen a la hora de realizar una comprobación de daño para una determinada probabilidad de referencia  $P_{ref1}^*$ , por ser menores que el límite de fatiga  $\Delta\sigma_{L1}^*$  y, sin embargo, sí se consideren para otra probabilidad de referencia  $P_{ref2}^* < P_{ref1}^*$  por tener un  $\Delta\sigma_{L2}^* < \Delta\sigma_{L1}^*$ . En

este caso, las probabilidades de fallo obtenidas aplicando ambas curvas de referencia no coincidirían exactamente. No obstante, las pruebas realizadas muestran cómo para que exista una diferencia apreciable entre las probabilidades de fallo consideradas, los rangos de tensiones en cuestión deberían de mantenerse un número considerablemente alto de ciclos.

## Capítulo 8

### *Conclusiones generales*

En este capítulo se exponen las principales conclusiones obtenidas tras la realización de la presente tesis doctoral.

1. La dispersión estadística es una característica inherente al fenómeno de la fatiga. Esta característica es corroborada mediante ensayos experimentales realizados tanto en amplitud constante como variable. Asimismo, la literatura admite que el logaritmo del tiempo de vida a fatiga de un elemento tiene asociada una distribución de probabilidad, siendo habitual la consideración de las distribuciones normal y Weibull. Por tanto, parece obvio que los diferentes parámetros relacionados con la resistencia de un elemento a fatiga incorporen en sus planteamientos la realidad estadística propia del fenómeno. No obstante, se ha constatado que, tanto la mayoría de los códigos normativos existentes como los índices de daño usualmente utilizados, no incorporan una consideración estadística en sus formulaciones.
2. Debido al carácter general de aplicación del Eurocódigo 3, la norma admite diferentes hipótesis simplificadoras con el objetivo de facilitar su aplicación. Se ha llevado a cabo un análisis de dichas hipótesis para comprobar si su aplicación contradice la naturaleza física del fenómeno. La conclusión obtenida es que las hipótesis aplicadas pueden considerarse como admisibles en aras de una mayor simplicidad a la hora de aplicar el código, si bien se ha constatado que algunas de ellas son abiertamente falsas.
3. El Eurocódigo 3 plantea el cálculo de un elemento a fatiga como la aplicación de un índice de daño determinista (ya sea rango de tensión equivalente o número de Miner) tomando como referencia una única curva S-N proporcionada por el código para el elemento considerado. La falta de información estadística proporcionada por el código para las diferentes categorías consideradas impide la realización de estudios rigurosos del comportamiento a fatiga de un elemento. En particular, las herramientas proporcionadas por el Eurocódigo 3 impiden conocer cual es el valor de probabilidad de fallo de un elemento sometido a un espectro de tensiones.
4. A partir de la consideración de que el logaritmo del tiempo de vida a fatiga se distribuye normalmente y considerando otras simplificaciones admitidas por el Eurocódigo 3, se ha propuesto una distribución estadísticas para la variable  $\log(\Delta\sigma)$ . El método de obtención asegura la compatibilidad entre ambas distribuciones estadísticas. Asimismo,

a partir de las distribuciones de las variables  $N$  y  $\Delta\sigma$  se han propuesto distribuciones estadísticas para el número de Miner  $M_{Ref}$  y rango de tensión equivalente  $\Delta\sigma_{E,K}$

5. El Eurocódigo 3 considera en el cálculo la utilización de coeficientes parciales. El análisis estadístico desarrollado realizado muestra cómo la aplicación del coeficiente parcial  $\gamma_{Mf}$  disminuye la probabilidad de referencia asociada a la curva S-N propuesta por el código. Asimismo, se ha comprobado cómo dicha reducción en la probabilidad no es uniforme para el caso de esfuerzos normales de amplitud variable, debido a los 2 tramos con diferentes pendientes de los que consta la curva S-N en este caso.
6. A partir de las distribuciones estadísticas de las variables  $N$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $M_{Ref}$  y  $\Delta\sigma_{E,K}$ , y admitiendo las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3, se ha propuesto un modelo estadístico de daño que permite obtener la probabilidad de fallo asociada a un elemento a partir del valor numérico del índice de daño utilizado. En primer lugar, el modelo estadístico de daño propuesto permite la generación de un campo S-N en función de la categoría del elemento considerado y el tipo de sollicitación generada sobre el mismo. El método de generación del campo S-N asegura la unicidad de la probabilidad de referencia asociada a cada uno de los tramos de una misma curva percentil. Posteriormente, las distribuciones propuestas para el número de Miner o el rango de tensión equivalente permiten obtener, a partir del valor del índice de daño utilizado, la probabilidad de fallo asociada al elemento. La compatibilidad existente entre las distribuciones estadísticas propuestas permite obtener la misma probabilidad de fallo, independientemente del índice de daño considerado y para cualquier curva percentil de referencia considerada. No obstante, la elección de una curva S-N asociada a una probabilidad de referencia alta implica la consideración de un límite de fatiga elevado, posibilitando que algunos rangos de tensión del espectro de cálculo no sean contabilizados, dando lugar a una probabilidad de fallo menor que la obtenida para una curva asociada a un percentil menor. El modelo estadístico propuesto es aplicable a elementos sometidos a esfuerzos normales y tangenciales, tanto de amplitud constante como variable, y requiere del conocimiento de la desviación típica de la variable  $\log(N)$  de la categoría considerada. La validación del modelo se ha realizado a partir de 3 espectros de tensiones aplicados sobre un mismo elemento, considerando diferentes curvas percentiles como referencia, coeficientes parciales de minoración e índices de daño, obteniendo resultados satisfactorios.



## Capítulo 9

# *Aportaciones originales*

La aportaciones originales recogidas en la presente tesis doctoral se exponen a continuación:

1. Considerando el procedimiento de obtención de un diagrama de Kitagawa-Takahashi, se ha expuesto que en este diagrama el parámetro real relacionado con el tamaño de grieta no es un límite de endurancia, correspondiente al valor asintótico, sino un límite de fatiga para un determinado número de ciclos. Asimismo, considerando que los modelos de fatiga probabilistas proporcionan una distribución estadística para un límite de fatiga considerado, se afirma que las curvas pertenecientes al diagrama K-T dependen de 2 variables:
  - Número de ciclos considerados para la obtención del límite de fatiga.
  - Probabilidad de referencia asociada a dicho límite en el campo S-N.

El segundo punto permite la consideración de un *campo* Kitagawa-Takahashi probabilístico similar a la consideración estadística del campo S-N y a considerar el área encerrada bajo una gráfica del diagrama K-T como combinaciones de puntos ( $a-\Delta\sigma$ ) asociados a una determinada probabilidad de fallo menor que un cierto valor, y no como una zona *libre de fallo por fatiga* como tradicionalmente se ha considerado.

2. Se han verificado la idoneidad de las hipótesis adoptadas por Eurocódigo 3 mediante el ajuste de diferentes datos experimentales obtenidos en la literatura. El tratamiento de dichos datos se ha realizado mediante la aplicación de 2 modelos de ajuste: el primero se ha denominado *Modelo de Basquin Normalizado*, el cual está basado en el ajuste de la variable normalizada  $T = N \cdot \Delta\sigma^m$  mediante una distribución normal y permite generar un campo S-N aplicando las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3.
3. El segundo modelo aplicado es el Modelo de Castillo y Fernández Canteli. Se ha concluido que las hipótesis consideradas por el Eurocódigo 3 son admisibles en cuanto a la simplificación que supone su aceptación, si bien se ha constatado que algunas de ellas no son excesivamente realistas.
3. Se ha realizado una interpretación estadística del Eurocódigo 3 a partir de las hipótesis consideradas por el código. A partir de la distribución del tiempo de vida a fatiga de un elemento se han obtenido distribuciones estadísticas para las variables  $\Delta\sigma$ , así como para el número de Miner  $M_{Ref}$  y el rango de tensión equivalente  $\Delta\sigma_{E,K}$ .

4. Se ha interpretado desde un punto de vista estadístico las consecuencias de la aplicación del coeficiente parcial  $\gamma_{Mf}$  sobre las curvas S-N propuestas en el Eurocódigo 3. Se ha constatado cómo la aplicación del coeficiente disminuye la probabilidad de referencia de la nueva curva S-N modificada. Asimismo, se ha comprobado cómo la reducción de probabilidad depende del exponente  $m$  de la curva considerada. Debido a esto, la aplicación de un coeficiente parcial  $\gamma_{Mf}$  a elementos sometidos a esfuerzos normales de amplitud variable da lugar a curvas S-N con tramos rectos asociados a diferentes probabilidades de referencia.
5. Se ha propuesto un modelo estadístico de daño basado en las hipótesis admitidas por el Eurocódigo 3. La formulación estadística del tiempo de vida a fatiga y del rango de tensión permite obtener un campo S-N para cada una de las categorías en función del tipo de tensión generada sobre el elemento. El procedimiento de generación del campo S-N asegura la unicidad de la probabilidad de referencia para la totalidad de los tramos de una misma curva percentil. Asimismo, las distribuciones estadísticas propuestas para el número de Miner y el rango de tensión equivalente permiten obtener un valor de probabilidad de fallo a partir del valor numérico que adopta el índice de daño utilizado. El modelo estadístico propuesto es aplicable a elementos sometidos a esfuerzos normales y tangenciales, tanto de amplitud constante como variable. La compatibilidad entre las variables  $N$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $M_{Ref}$  y  $\Delta\sigma_{E,K}$  permite obtener un valor de probabilidad de fallo, el cual es independientemente de la curva percentil adoptada como referencia y del índice de daño considerado. El modelo probabilístico desarrollado se ha validado con 3 espectros de tensiones sobre un elemento de categoría 112 considerando diferentes curvas de referencia, coeficientes parciales  $\gamma_{Mf}$  e índices de daño, obteniendo resultados satisfactorios.

## Capítulo 10

### *Líneas futuras de investigación*

Finalmente, se sugieren diferentes líneas futuras de investigación, las cuales permitirían profundizar y continuar los desarrollos obtenidos en la presente tesis doctoral:

1. La existencia de un campo Kitagawa-Takahashi probabilístico a partir de las consideraciones estadísticas del campo S-N y, en particular, de la distribución de probabilidad asociada al límite de fatiga considerado, permite considerar probabilidades de fallo a cualquier combinación de puntos  $(a, \Delta\sigma)$  contenido en el diagrama. No obstante, la definición completa del campo Kitagawa-Takahashi precisa del conocimiento de las distribuciones  $F(a; \Delta\sigma_{th})$  y  $G(\Delta\sigma_{th}; a)$ , así como de las ecuaciones de compatibilidad que relacionan ambas distribuciones.
2. El modelo estadístico de daño desarrollado permite la obtención de probabilidades de fallo para las categorías consideradas por el EC3. No obstante y como se ha comentado en el apartado 6.5.8, el código no considera el efecto de escala en el cálculo de la resistencia de un elemento a fatiga. Como consecuencia, el modelo estadístico de daño desarrollado, en el cual se admiten las hipótesis consideradas por el EC3, no considera que la resistencia de un elemento depende del tamaño del mismo. Se propone como línea futura de investigación la implementación en el modelo del efecto de escala, de forma que el modelo estadístico de daño mejorado verifique el principio del eslabón más débil, es decir, a mayor escala del elemento, mayor probabilidad de rotura en algunas de las partes que lo conforman.



# Bibliografía

- [1] AENOR. UNE-EN 1993-1-9. Fatiga. 2008.
- [2] Basquin O. The exponential law of endurance tests. tech. rep. *ASTM*, 1910.
- [3] Bastenaire F.A. New method for the statistical evaluation of constant stress amplitude fatigue-test results. *Tech. Rep. ASTM, Philadelphia, PA*, 1972.
- [4] Bathias C., Drouillac L., Le François P. How and why the fatigue s-n curve does not approach a horizontal asymptote. *Int. J. Fatigue*, 23:S143–S151, 2001.
- [5] Bolotin V.V. *Statistical Methods in Structural Mechanics*. Holden-Day Inc. San Francisco, USA, 1968.
- [6] Buckingham E. The principle of similitude. *Nature*, 96:396–397, 1915.
- [7] Castillo E., Castillo C., Mínguez R. Use of extreme value theory in engineering design. In *17th Annual Meeting of the Society-for-Risk-Analysis-Europe (SRA-Europe)*. European Safety and Reliability Conference (ESREL), 2008.
- [8] Castillo E., Fernández Canteli A. *Una metodología estadística unificada para modelar el daño a fatiga*. 2009.
- [9] Castillo E., Fernández Canteli A., Esslinger V., Thürlimann B. Statistical models for fatigue analysis of wires, strands and cables. *IABSE Proceedings*, 82:1–140, 1985.
- [10] Castillo E., Galambos J. Lifetime regression models based on a functional equation of physical nature. *Journal of Applied Probability*, 24:160–169, 1987.
- [11] Castillo E., Hadi A., S Balakrishnan N., Sarabia J.M. Extreme value and related models with applications in engineering and science. *Wiley series in probability and statistics*, 2004.
- [12] Castillo E., Hadi A.S. Parameter and quantile estimation for the generalized extreme-value distribution. *Environmetrics*, 5:417–432, 1994.
- [13] Chapetti M.D. Fatigue propagation threshold of short cracks under constant amplitude loading. *Int. Journal of Fatigue*, 25:1319–1326, 2003.
- [14] Chapetti M.D., Kitano T., Tagawa T., Miyata T. *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, 21:1525–1536, 1988.

- [15] Corten H.T., Dolan T.J. Cumulative fatigue damage. *Proc. of the International Conference on Fatigue of Metals, Institute of Mechanical Engineers, London*, pages 235–245, 1956.
- [16] Creager M., Paris P. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking. *Int. J. Fract. Mech.*, 3(247-252), 1967.
- [17] Crupi V., Guglielmino E., Maestro M., Marino A. Fatigue analysis of butt welded ah36 steel joints: thermographic method and design s-n curve. *Marine Structures*, 22:373–386, 2009.
- [18] Det Norske Veritas. Recommended practice DNV-RP-C203. Fatigue design of offshore steel structures. April 2008.
- [19] El Haddad M.H., Topper T.H., Smith K.N. Predictions of non propagating cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 11:573–584, 1979.
- [20] Fernández Canteli A. *Criterios para la normalización de ensayos de fatiga en armaduras activas y pasivas de hormión armado y pretensado*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 1981.
- [21] Fernández Canteli A., Castillo E., Argüelles A., Fernández P., Canales M. Checking the fatigue limit from thermographic techniques by means of a probabilistic model of the  $\varepsilon - n$  field. *Int. Journal of Fatigue*, doi :10.1016/j.fatigue.2011.02.008, 2011.
- [22] Fernández P., López Aenlle M., Brincker R., Fernández Canteli A. Stress estimation in structures using operational modal analysis. IOMAC - 3<sup>rd</sup> International Operational Modal Analysis Conference, 2009.
- [23] Fisher R.A., Tippett L.H.C. Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:180–190, 1928.
- [24] Frost N.E., Marsh K.J., Pook L.P. *Metal Fatigue*. Dover Publications, Inc. Mineola, NY, 1999.
- [25] Galambos J. The asymptotic theory of extreme orden statistics (2nd ed.). *Malabar, Florida*, 1987.
- [26] Gassner E. Strength experiments under cyclic loading in aircraft structures (*en alemán*). *Luftwissen*, 6:61–64, 1939.
- [27] Gerber W. Z. Calculation of the allowable stresses in iron structures. *Bayer Archit. Ing. Ver.*, 6(6):101–110, 1874.
- [28] Goodman J. *Journal of Mechanics Applied to Engineering*. Longmans, Green, New York, 1st ed. edition, 1899.
- [29] Haibach E. Betriebsfestigkeit-Verfahren und Daten zur Bauteiberechnung. 1989.

- 
- [30] Hertzberg R.W. *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. Wiley, 1995.
- [31] Heyer K. Multi-step tests on structural elements, 152. *Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Bericht*, 1943.
- [32] Hirose H. Estimation of threshold stress in accelerated life-testing. *IEEE Trans. Reliability*, 42:650–657, 1993.
- [33] Instituto Técnico de Estructuras de acero. Análisis de la confianza y de los factores de seguridad aplicados al cálculo de fatiga. Esdep Tomo 14.
- [34] Jacoby G.H. Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading. *Effects of environmental and complex load history on fatigue life*. ASTM, STP 462:184–202, 1970.
- [35] Kitagawa H., Tagahashi S. Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage. *Proceedings of the Second International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Metals Park, OH. American Society for Metals*, pages 627–631, 1976.
- [36] Knott J., Pickard A. Effects of overloads on fatigue crack propagation: aluminium alloys. *Metals Sci.*, 11(399-404), 1977.
- [37] Kohout J., Vechet S. A new function for fatigue curves characterization and its multiple merits. *Int. J. Fatigue*, 23:175–183, 2001.
- [38] Kommers J.B. The effect of overstressing and understressing in fatigue. *Proceedings, ASTM*, 38, 2:249–268, 1938.
- [39] Kruzic J.J., Ritchie R.O. Kitagawa-takahashi diagrams define the limiting conditions for cyclic fatigue failure in human dentin. *Journal of Biomedical Materials Part A*, 79:747–51, 2006.
- [40] La Rosa G., Risitano A. Thermographic methodology of the fatigue limit of materials mechanical components. *Int. J. Fatigue*, 22:65–73, 2000.
- [41] Langer B.F. Fatigue failure from stress cycles of varying amplitude. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 59:A160–A162, 1937.
- [42] Lankford J. *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, 8(2):161–175, 1985.
- [43] Lassen T., Recho N. Proposal for a more accurate physically based s–n curve for welded steel joints. *Int. J. Fatigue*, 31:70–78, 2009.
- [44] Lawson L., Chen E.Y., Meshii M. Near-threshold fatigue: a review. *Int. Journal of Fatigue*, 21:S15–S34, 1999.
- [45] Leis B.N. A nonlinear history-dependent damage model for low cycle fatigue. *ASTM STP 917*, pages 143–159, 1988.

- [46] Lemaitre J. Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations. continuous damage mechanics: theory and applications. pp: 37-90. *Springer, Viena*, 1987.
- [47] Li Z.X., Chan T.H.T., Ko J.M. Determination of effective stress range and its application on fatigue stress assessment of existing bridges. *Int. J. of Solids and Structures*, 39:2401–2417, 2002.
- [48] Link C.L. An equation for one-sided tolerance limits for normal distributions. *Research paper FPL 458. US Department of Agriculture. Forest Products Laboratory*, 1985.
- [49] López Aenlle M. *Caracterización a fatiga de compuestos bajo carga aleatoria y carga por bloques*. PhD thesis, Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación. Universidad de Oviedo, 2000.
- [50] Mang F., Bucak, Klingler J. Studiengesellschaft für Anwendungstechnik von Eisen und Stahl e. V. Technical report, Universität (TH)Karlsruhe.
- [51] Marco S.M., Starkey W.L. A concept of fatigue damage. *Transactions of the ASME*, 76:627–632, 1954.
- [52] Marquis G., Bäckström M., Siljander A. *Welded High-Strength Steel Structures*. 1997.
- [53] McClintock F.A. *On the plasticity of the growth of fatigue cracks*. Fracture of solids, 20. New York: Wiley, 1963.
- [54] Miller K.J. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 16(9):931–939, 1993.
- [55] Miller K.J., Ibrahim F.E. *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, 5(3):223–232, 1982.
- [56] Milne I., Ritchie R.O., Karihaloo B. *Comprehensive Structural Integrity*, volume 4. Elsevier Science Ltd., 2003.
- [57] Miner M.A. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 68(12):A159–A164, 1945.
- [58] Nalla R.K., Imbeni V., Kinney J.H., Staninec M., Marshall S.J., Ritchie R.O. In vitro fatigue behavior of human dentin with implications for life prediction. *Journal of Biomedical Materials Part A*, 66:10–20, 2003.
- [59] Naumann E.C., Hardrath H.R., Guthrie E.C. Axial load fatigue tests of 2024-t3 and 7075-t6 aluminium alloy sheet specimens under constant and variable amplitude loads. *NASA Report TN D-212*, 1959.
- [60] Nelson W.B. Fitting of fatigue curves with nonconstant standard deviation to data with runouts. *J. Testing Eval.*, 12:69–77, 1984.
- [61] Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Verein Deutscher Ingenieure*, 68(14):339–343, 1924.
- [62] Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.P. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85(528-534), 1961.



- [63] Pascual F.G., Meeker W.Q. Estimating fatigue curves with the random fatigue-limit model. *Technometrics*, 41:89–94, 1999.
- [64] Ritchie R.O. Influence of microstructure on near-threshold fatigue-crack propagation in ultra-high strength steel. *Metals Sci.*, 11:368–381, 1977.
- [65] Ritchie R.O. Near threshold fatigue crack propagation in ultra-high strength steel: influence of load ratio and cyclic strength. *J. Eng. Technol. (Trans ASME, H)*, 1977.
- [66] Ritchie R.O. *Near threshold fatigue crack propagation in steels, review 245*. *Int. Metals Rev.*, 1979.
- [67] Sadananda K., Shahinian P. Prediction of threshold stress intensities for fatigue crack growth using a dislocation model. *J. Fract.*, 13:585–594, 1977.
- [68] Schijve J. The endurance under program-fatigue testing. *Full-scale fatigue testing of aircrafts structures. Pergamon Press*, pages 41–59, 1961.
- [69] Schijve J. *Fatigue of structures and materials*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [70] Schijve J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of art. *Int. J. Fatigue*, 25:679–702, 2003.
- [71] Schütz W. The prediction of fatigue life in the crack initiation and propagation stages. a state of the art survey. *Eng. Frac. Mech.*, 11(405-421), 1979.
- [72] Smith K.N., Watson P., Tooper T.H. A stress-strain function for the fatigue of metals. *Int. J. Mat.*, 5:767–778, 1970.
- [73] Soderberg C.R. Fatigue of safety and working stress. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 52(Part APM-52-2):13–28, 1930.
- [74] Sonsino C.M. Course of s-n curves especially in the high-cycle fatigue regime with regard to component design and safety. *Int. J. Fatigue*, 29:2246–58, 2007.
- [75] Spagnoli A. Fractality in the threshold condition of fatigue crack growth: an interpretation of the kitagawa diagram. *Chaos, Solitons and Fractals*, 22:589–598, 2004.
- [76] Spindel J.E., Haibach E. Some considerations in the statistical determination of the shape of s-n curves. *Tech. Rep. Philadelphia, PA*, 1981.
- [77] Standards Norway. Norsok n-004, rev. 2 oct 2004.
- [78] Strohmeyer C.E. The determination of fatigue limits under alternating stress conditions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 90(620):411–425, 1914.
- [79] Stüssi F. Die theorie der dauerfestigkeit und die versuche von august wöhler. *TKVSB*, 13, 1955.
- [80] Suresh S. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, 1991.
- [81] Tanaka K., Akiniwa Y. *Eng. Fract. Mech.*, 30(6):863–876, 1988.

- [82] Taylor D., Knott J.K. *Eng. Mater. Struct.*, 4(2):147–155, 1981.
- [83] Technical committee 6 - Fatigue. Recommendations for the fatigue design of steel structures. Technical Report 43, European Convention for Constructional Steelwork, 1985.
- [84] Tiago de Oliveira J. Extremal ditributions. *Revista de la Facultade de Ciencias A7*, pages 215–227, 1958.
- [85] Vosikovsky O. the effect of stress ratio on fatigue crack growth rates. *Eng. Fract. Mech.*, 11(595-602), 1979.
- [86] Weibull W. A statistical report of fatigue failure in solids. *Transactions Royal Institute of Technology of Sweden*, 29, 1949.
- [87] Weiss V., Lal D. Threshold condition for fatigue crack propagation. *Metal Trans.*, 5:1946–1949, 1974.
- [88] Wheeler O. E. Spectrum loading and crack growth. *Journal of Basic Eng.*, D94(1):181–186, 1972.
- [89] Wöhler A. Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. *Zeitschrift für Bauwesen*, 20:73–106, 1870.