

Universidad de Oviedo
Departamento de Estadística
e I.O. y D.M.

Contrastes de hipótesis: tratamiento de la variabilidad y la imprecisión

Tesis doctoral

Ana Belén Ramos Guajardo



UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Estadística e I.O.
y Didáctica de la Matemática

*Contrastes de hipótesis: tratamiento de la
variabilidad y la imprecisión*

Ana Belén Ramos Guajardo

Don Manuel Montenegro Hermida, Director del Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Oviedo, autoriza la presentación de la Tesis Doctoral realizada por Dña. Ana Belén Ramos Guajardo, bajo la dirección de los Doctores Dña. Ana Colubi Cervero, D. Gil González Rodríguez y Dña. María Ángeles Gil Álvarez, con el título “Contrastes de hipótesis: tratamiento de la variabilidad y la imprecisión”.

Oviedo, Diciembre 2010

Fdo.: Manuel Montenegro Hermida

Dña. Ana Colubi Cervero, D. Gil González Rodríguez y
Dña. María Ángeles Gil Álvarez, Profesores del Departamento de
Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática,

CERTIFICAN:

que la memoria titulada “*Contrastes de hipótesis: tratamiento de la variabilidad y la imprecisión*” para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Oviedo ha sido realizada por Dña. Ana Belén Ramos Guajardo bajo su dirección, dando su conformidad para que sea presentada para su defensa en la Universidad de Oviedo.

Oviedo, Diciembre 2010

Ana Colubi Cervero

Gil González Rodríguez

María Ángeles Gil Álvarez

*A mis padres
y a Alex*

*``Cuando quieres realmente una cosa, todo el Universo
conspira para ayudarte a conseguirla.''*

Paulo Coelho

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que me han acompañado en este camino arduo y lleno de dificultades, pero también de satisfacciones. Ahora que ese camino llega a su fin, quisiera expresar mi agradecimiento a cada una de ellas por su apoyo y confianza demostrados en cada momento.

En primer lugar, quiero dar las gracias a mis tres directores de tesis, Ana, Gil y Ángeles, por haber sido unos padres y abuela científicos inmejorables. Gracias por haber confiado en mí desde el primer momento, por ayudarme a seguir adelante con vuestro eterno optimismo, cariño, comprensión y ayuda, y también por vuestra amistad. Me siento muy afortunada de haberos tenido como directores a los tres.

Al resto de componentes del grupo de investigación SMIRE, por todos los buenos momentos que hemos pasado juntos en congresos, por vuestro ánimo y ayuda cuando ha sido necesario, y por vuestros aportes científicos. Es un orgullo saber que perteneces a un grupo tan unido y lleno de grandes investigadores y, sobre todo, grandes personas. Me gustaría hacer una mención especial a Manolo, actual Director del Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática, por haber depositado su confianza en mí y por su aprecio, así como a Asun por su inestimable ayuda. También me gustaría agradecer a María Brígida y a Ángela su apoyo diario tanto científico como emocional. Habéis sido un punto de apoyo muy importante en este camino, chicas, gracias de corazón.

A todos y cada uno de los miembros del European Centre for Soft Computing. En especial, me gustaría dar las gracias a Luis Magdalena y a Christian Borgelt por haberme brindado la oportunidad de trabajar en este centro de investigación durante cuatro años, ha sido una experiencia muy enriquecedora tanto a nivel académico como a nivel personal. Agradecer también a Wolfgang su ayuda científica durante este tiempo, así como a Enric, Óscar Cerdón y Gracián sus sabios consejos. No me quiero olvidar de mis compañeros de batalla, siempre a mi lado en momentos difíciles para ayudarme tanto científica como personalmente. Entre los que continúan batallando a mi lado están Itziar, Arnaud, Krzysztof, David, Óscar Ibáñez, Jose Alonso, Albert, Alberto, Sergio Damas, Nicola, Andrea, Prakash... Y tampoco me quiero olvidar de los que batallaron a mi lado en el pasado, como Manuel Chica, Gonzalo, Sergio Guadarrama, Verónica, Gustavo... Gracias también a los chicos de administración, en especial a Carmen Peña, Carmen Zarco, Noelia y Cristina, por preocuparos siempre por mí. En general, gracias a todo el equipo por hacerme sentir una más de los vuestros.

A Santos Domínguez y a Pedro Gil (ex-Director del Departamento de Estadística e I.O. y D.M. de la Universidad de Oviedo), por haberme animado a adentrarme en el mundo de la investigación científica, y por creer en mí desde el primer momento.

Al Profesor Thierry Denoeux, por haberme invitado unos meses a trabajar en el Departamento de Heurística de la Universidad Tecnológica de Compiègne y por sus consejos científicos.

A todos mis amigos de León y de Asturias, por todos los buenos momentos vividos juntos, por haber estado a mi lado siempre cuando más lo he necesitado y por confiar en mí. En especial, me gustaría dar las gracias a María, Vanesa, Silvia, Paula, Naomi, Mónica, Itziar, Adriana, Marta, Seila y Deli por demostrarme su apoyo en cada momento (en muchos casos a pesar de la distancia), animándome a seguir día tras día. Os quiero chicas.

A mis padres, por ser uno de los pilares más importantes de mi vida, y sin los que hoy no podría ser quien soy. Muchas gracias por vuestra educación, cariño y apoyo constantes, os quiero mucho.

A Alejandro, por quererme tanto, apoyarme día tras día en lo bueno y en lo malo y sacar siempre lo mejor de mí. Te quiero mucho.

Este trabajo ha sido financiado por las líneas de investigación NFU: StatsImpInfo-IDI.PD0006, NFU: Non-Param-IDI.PD0007 y FNA/Plan Nacional-Investigación Fundamental-IDI.PD2001 del European Centre for Soft Computing, así como por los Proyectos del Ministerio de Ciencia e Innovación MTM2006-07501, MTM2009-09440-C02-01 y MTM2009-09440-C02-02.

Prólogo

El análisis sensorial es un instrumento eficaz para el control de calidad y aceptabilidad de un alimento, ya que cuando éste se quiere comercializar, debe cumplir los requisitos mínimos de higiene, inocuidad y calidad para que sea aceptado por el consumidor. Además, cuando se le quiere otorgar a un determinado producto la calificación de Denominación de Origen, o decidir si tal calificación se mantiene o no con el paso de los años, los requisitos que se exigen son aún mayores. En el análisis sensorial intervienen evaluaciones subjetivas de expertos cualificados que en muchas ocasiones se resumen en un valor real. Sin embargo, dichas evaluaciones presentan una incertidumbre en su significado que resulta difícil de captar con un único valor. En esta memoria se propone una flexibilización de las evaluaciones subjetivas que intervienen en el análisis sensorial y se desarrollan contrastes de hipótesis estadísticos sobre la variabilidad y la imprecisión basados en estos datos “flexibles”. Los resultados obtenidos se aplicarán sobre los datos captados en el análisis sensorial realizado en Asturias sobre el queso Gamonedo, que es un producto fabricado en Asturias (ver González de Llano *et al.*, 1992; Rodríguez *et al.*, 2000), con el fin de decidir si su calificación de Denominación de Origen se mantiene o no.

Los resultados de esta memoria serán en realidad aplicables en un amplio marco de problemas. En general, en muchos experimentos reales aparecen diferentes tipos de incertidumbre, en el sentido general de falta de conocimiento preciso. Uno de ellos es la *aleatoriedad o incertidumbre estocástica* del resultado experimental que se formaliza a

partir del Cálculo de Probabilidades y que aparece a la hora de seleccionar una muestra a partir de una población dada. Otro tipo es la *imprecisión o incertidumbre no estocástica* que puede deberse a la falta de información, a una percepción no exacta de la realidad, a un proceso de agregación, etc. Por ejemplo, ésta se presenta cuando se considera la fluctuación de la tensión arterial de una persona a lo largo de un día (que no viene dada por un único valor, sino por un intervalo), o al evaluar subjetivamente la calidad de un determinado producto.

A la hora de analizar datos estadísticos imprecisos se distinguen dos puntos de vista. Un primer enfoque se basa en aquellos estudios cuyo interés se centra en una variable aleatoria real subyacente que no se puede observar de manera precisa (ver, Kwakernaak, 1978; Kruse *et al.*, 1987). Por ejemplo, cuando el objetivo es medir la temperatura de un local o la longitud de una mesa, subyace una medida real exacta cuya cuantificación se va a realizar con un instrumento de medida que posee cierto grado de imprecisión. Existe otro conjunto de estudios en los cuales no existe variable real subyacente o el interés se centra simplemente en obtener conclusiones acerca de la variable aleatoria propiamente imprecisa (ver, por ejemplo, Puri & Ralescu, 1986; Colubi *et al.*, 2007; Gonzalez-Rodríguez *et al.*, 2010). Este es el caso de las percepciones sensoriales acerca de características señaladas de un producto concreto y, por tanto, es el enfoque que se va a considerar en esta memoria.

Con el fin de manejar tal imprecisión, en muchas ocasiones ésta se resume en un valor real y se aplican técnicas de la Estadística clásica, aunque con este proceso mucha información debida a la imprecisión experimental se pierde. Para tratar de solucionar esta pérdida de información, se va a trabajar con elementos aleatorios que toman valores difusos y de intervalo.

Por un lado, el empleo de intervalos reales para formalizar cierto tipo de datos experimentales es una opción que ha resultado eficaz en diversas áreas, como por ejemplo, en Economía (ver Branzei & Alparslan Gok, 2008) o en Medicina (ver Pippier & Ritz, 2006). Los datos intervalares pueden generalizarse a una dimensión superior mediante el empleo de conjuntos de \mathbb{R}^p (ver, por ejemplo, Matheron, 1975; Molchanov, 2005).

Además, los elementos anteriores pueden extenderse a un contexto más general mediante el empleo de los llamados conjuntos difusos.

El concepto de conjunto difuso fue introducido por Zadeh (1965), y ha sido estudiado ampliamente a lo largo de los últimos 30 años (ver, por ejemplo Bellman & Zadeh, 1970; Dubois & Prade, 1980; Zimmermann, 1996; Zadeh, 2006). Formalmente, constituyen un caso especial de datos funcionales apropiados para modelar varias situaciones de la vida real, a pesar de que las operaciones más adecuadas para trabajar con ellos no coincidan con las clásicas del Análisis Funcional y merezcan una consideración especial. Inicialmente, el principal interés que presentaba la teoría de conjuntos difusos se centraba en la representación de la incertidumbre de los procesos cognitivos humanos (ver Zadeh, 1965). Posteriormente ha tenido aplicaciones en muchos campos tales como la Investigación Operativa (ver Zimmermann, 1983), la Meteorología (ver McBratney & Moore, 1985), la Medicina (ver Vila & Delgado, 1983; Bates & Young, 2003) o la Economía (ver Zopounidis *et al.*, 2001).

Los elementos aleatorios cuyos valores respuesta son intervalos (de \mathbb{R}) o conjuntos (de \mathbb{R}^p , con $p > 1$) se denominan intervalos o conjuntos aleatorios y han sido muy estudiados en diferentes trabajos (ver, por ejemplo, Kruse & Meyer, 1987; López-García *et al.*, 2000; Gil *et al.*, 2002; D'Urso & Giordani, 2006; Gil *et al.*, 2007; González-Rodríguez *et al.*, 2007; León *et al.*, 2007). Una generalización de los anteriores viene dada por los conjuntos difusos aleatorios, que son aquellos cuyos valores respuesta son conjuntos difusos.

Los conjuntos difusos aleatorios (CDAs) con los que se va a trabajar (vistos como variables aleatorias propiamente imprecisas o difusas) fueron introducidos por Puri & Ralescu (1986) como herramientas para modelar mecanismos aleatorios en los que se observan valores difusos asociados a cada uno de los resultados experimentales. En las últimas décadas, se han realizado muchos estudios sobre ellos. Por ejemplo, se ha formalizado la medibilidad de un CDA (ver Diamond & Kloeden, 1994; Colubi *et al.*, 2002; Krätschmer, 2002), se han desarrollado leyes fuertes de los grandes números (ver Klement *et al.*, 1986; Colubi *et al.*, 1999; Terán, 2003), se han analizado procedimientos de contrastes de hipótesis para el valor esperado de CDAs (ver Körner, 2000; Montenegro

et al., 2004; Gil *et al.*, 2006; González-Rodríguez *et al.*, 2010) y para la varianza de los mismos (ver Lubiano, 1999), etc.

Mientras que el valor esperado de un CDA viene dado por un valor también difuso, la varianza que se va a considerar es de tipo Fréchet, viene dada por un valor real y está definida en términos de una distancia cuadrática entre valores de la variable y el valor esperado. Concretamente, la distancia que se considera pertenece a la familia de métricas introducida por Trutschnig *et al.* (2009). En otras palabras, la varianza corresponde a un error cuadrático que resume la distribución de la variable con respecto a la media difusa. Cabe mencionar que existe otro tipo de varianza considerada como característica imprecisa en sí misma, incluso cuando los valores con los que se trabaja son reales (ver, por ejemplo, Baudrit *et al.*, 2007).

Cuando se desea analizar si un postulado de una teoría científica puede considerarse ‘sostenible’ o aceptable sobre la base de la información dada por una muestra de datos estadísticos se suele realizar un *contraste de hipótesis*. Los contrastes permiten decidir si el postulado debe ser rechazado o no con un determinado margen de error. En las situaciones reales en las que se requiere la realización de un contraste de hipótesis suelen intervenir datos modelados mediante variables aleatorias reales o vectoriales.

El problema de contrastar hipótesis acerca de un parámetro resumen de una o varias poblaciones en un marco estadístico ha sido ampliamente estudiado a lo largo de la literatura. La mayoría de los tests de hipótesis paramétricos que surgen en la práctica están basados o bien en medidas de centralización (entre los cuales cabe destacar los que abarcan el estudio del valor esperado poblacional) o bien en medidas de dispersión (también denominadas de variación, en los cuales la varianza de la población juega un papel esencial).

En lo relativo al test de una muestra para la varianza de un CDA, en Lubiano (1999) se han desarrollado contrastes de hipótesis para CDAs simples (es decir, aquellos que toman un número finito de valores diferentes) con valores difusos en \mathbb{R} , mediante el empleo de la Teoría de Grandes Muestras y una métrica introducida por Bertoluzza

et al. (1995). El primer objetivo es extender estos resultados a una clase de CDAs con número de valores distintos no necesariamente finito que toman valores en el espacio de conjuntos difusos en \mathbb{R}^p . Un posible campo de aplicación se centra en determinar si la variabilidad de la calidad de un producto determinado es elevada o no en función de las opiniones de un experto sobre ese producto a lo largo del tiempo. Para ello es necesario llevar a cabo un contraste de hipótesis sobre la varianza de tales opiniones. Existen otras situaciones en las que resulta interesante analizar si la variabilidad de las opiniones de un experto concreto puede considerarse igual que la correspondiente a otro experto. En ese caso es necesario realizar un contraste de igualdad de varianzas.

El problema de analizar la igualdad de varianzas (u homocedasticidad) de k variables aleatorias reales ha sido ampliamente estudiado a lo largo de la literatura (ver, por ejemplo, Bartlett, 1937; Box, 1953; Levene 1960; Lim & Loh, 2006; Bhandary & Dai, 2009; Cahoy, 2010). Algunos de los tests anteriores se han formalizado para variables aleatorias distribuidas normalmente y han resultado ser sensibles ante la suposición de poblaciones Gaussianas subyacentes (ver Box, 1953; Boos & Cavell, 2004). Con el fin de evitar este inconveniente, una estrategia consiste en introducir el momento de orden cuatro estimado (que está relacionado con la kurtosis de la distribución) en el estadístico correspondiente al test de Bartlett, al igual que se ha procedido en Box & Andersen (1955), Layard (1973), Conover *et al.* (1981) y Shoemaker (2003). Alternativamente, se pueden aplicar técnicas ANOVA debido a su robustez bajo no normalidad (ver Levene, 1960; Games *et al.*, 1972; Brown & Forsythe, 1974; Lim & Loh, 2006). Por ejemplo, Levene (1960) propuso la aplicación de un ANOVA utilizando o bien el valor absoluto o bien el cuadrado de ciertos residuos basados en la media o en la mediana muestral.

A día de hoy, no existen distribuciones paramétricas realistas para CDAs y, por este motivo, resulta necesaria la consideración de métodos no paramétricos. La existencia de tests bootstrap de tipo ANOVA eficientes favorece la consideración de tests bootstrap de tipo Levene como una primera alternativa. Específicamente, el test para la homocedasticidad de k CDAs que se va a desarrollar en esta memoria está inspirado en el estadístico de Levene sobre los cuadrados de ciertos residuos basados en la media.

En relación con las esperanzas de CDAs, se han desarrollado contrastes de hipótesis de igualdad para la media o medias de uno o varios CDAs (ver, por ejemplo, Körner, 2000; Montenegro *et al.*, 2004; Gil *et al.*, 2006; González-Rodríguez *et al.*, 2010). El segundo objetivo de esta memoria se centra en flexibilizar las hipótesis de “igualdad estricta” para la media de CDAs contempladas hasta la actualidad. Por ejemplo, cuando se desea analizar la calidad de un determinado producto a partir de las percepciones de un experto, resulta interesante determinar si la esperanza de tales percepciones se encuentra dentro de unos límites fijados de antemano o si se puede considerar similar a dichos límites con un determinado *grado de inclusión* o *grado de similaridad*, respectivamente. En otras ocasiones, el interés se puede centrar en analizar si existe o no intersección entre la esperanza de las opiniones y los límites previamente establecidos y, si existiera, analizar si es mayor o menor que cierto *grado de intersección* prefijado.

El problema de contrastar la inclusión de la media de una variable aleatoria real en un intervalo fijado de antemano ha sido estudiado a lo largo de la literatura como un contraste de hipótesis múltiple de tipo unión-intersección, obteniendo un test exacto bajo la suposición de normalidad de la variable (ver Roy, 1953). Por otro lado, en muchos trabajos se han establecido definiciones sobre los conceptos de grado de inclusión, grado de similaridad y grado de intersección (ver, por ejemplo, Pedrycz, 1979; Sánchez, 1979; Dubois & Prade, 1980, 1988; Wang, 1982; Bloch, 2005). En la mayoría de estos estudios, tales conceptos se centran en conjuntos difusos con soporte finito utilizando el concepto de cardinalidad o potencia de un conjunto difuso definido por De Luca & Termini (1972). En este trabajo se extienden los conceptos anteriores al espacio de intervalos así como al espacio de conjuntos difusos en \mathbb{R}^p con soporte compacto mediante una generalización del concepto de potencia de un conjunto difuso con soporte no finito introducido en Zwick *et al.* (1987). Así, se analizarán diversos contrastes de hipótesis con el fin de determinar la similitud en distintos sentidos del valor esperado de un intervalo aleatorio con un intervalo fijado de antemano.

La memoria se divide en tres capítulos más un epílogo que se resumen a continuación. A lo largo de la misma, los conceptos definidos al igual que los resultados obtenidos van a aplicarse sobre los datos extraídos de las catas realizadas del queso Gamonedo.

En el **Capítulo 1** se introducen los espacios correspondientes a los valores imprecisos con los que se va a trabajar, así como la aritmética y la distancia necesarias para operar con tales valores. Además, se definen los elementos imprecisos aleatorios que modelan el tipo de experimentos que se van a tratar en este trabajo, incluyendo algunas de sus medidas resumen como son la esperanza y la varianza. Para finalizar este capítulo, se describe la generación de números difusos a partir de un CDA cuyos valores son trapecios. Asimismo se presenta una breve descripción acerca de un método utilizado para simular valores de un CDA en \mathbb{R} con una esperanza dada.

En el **Capítulo 2** se desarrollan procedimientos de contraste de hipótesis para la varianza de un CDA, o la igualdad de varianzas de k CDAs, a partir de los datos proporcionados por muestras de observaciones provenientes de los CDAs. A la hora de llevar a cabo estos estudios se utilizarán técnicas de la teoría de UH-estadísticos y del análisis de datos funcionales en espacios de Hilbert para el estudio de la convergencia de los estadísticos propuestos. Además, fundamentándose en los tests bootstrap desarrollados para la media (ver, por ejemplo, Gil *et al.*, 2006; González-Rodríguez, 2006), se emplearán algunas técnicas bootstrap que resultarán adecuadas incluso para tamaños de muestra pequeños y moderados.

Los resultados anteriores se van a utilizar para construir un test de homocedasticidad para k CDAs inspirado en el estadístico clásico de Levene (1960), considerando los cuadrados de ciertos residuos basados en la media. Asimismo, como la distribución asintótica del estadístico es difícil de manejar, se estudia la consistencia del mismo utilizando técnicas bootstrap.

Para probar la idoneidad de los tests propuestos a lo largo del capítulo, se realizan estudios de simulación de varios tipos de CDAs considerando diferentes tamaños muestrales, así como distintas métricas pertenecientes a la familia considerada. Por otro lado,

se analiza la función potencia de los tests asintóticos planteados mediante el empleo de las llamadas alternativas locales. Finalmente, se muestran ejemplos que ilustran la aplicación práctica de los resultados obtenidos.

En el **Capítulo 3** se introducen tests de hipótesis con el fin de analizar si la esperanza de un elemento impreciso aleatorio puede ‘compararse’ en cierto modo con un valor impreciso fijado. El objetivo es desarrollar una serie de tests que involucren los conceptos de grado de inclusión, grado de intersección y grado de similaridad. Para ello, se va a utilizar la noción de núcleo intersección introducida en Shawe-Taylor & Cristianini (2004), que se define como la medida de la intersección entre dos conjuntos y que será útil para determinar los estadísticos de contraste.

De nuevo, se establecen métodos aproximados basados en técnicas asintóticas que aprovechan las buenas propiedades de los estimadores consistentes y asintóticamente normales. También se desarrollarán métodos basados en técnicas bootstrap con el fin de conseguir mejores resultados empíricos para tamaños de muestras moderados.

Para comparar la utilidad de los diferentes métodos de contraste propuestos, se realizan simulaciones considerando varios tipos de elementos imprecisos aleatorios así como diferentes tamaños muestrales. Para finalizar el capítulo, se aplican los procedimientos estudiados sobre ejemplos reales.

La memoria se completa con un epílogo en el que se recogen una serie de conclusiones sobre los desarrollos realizados y el planteamiento de problemas cuyo análisis podría abordarse en el futuro.

Índice general

Agradecimientos	I
Prólogo	v
Índice General	XIII
Índice de Figuras	XVIII
Índice de Tablas	XXII
1. Conceptos preliminares	1
1.1. Valores imprecisos	3
1.1.1. Valores de intervalo y de conjunto	3
1.1.2. Conjuntos difusos	6
1.2. Familia de distancias entre valores imprecisos	8
1.3. Elementos imprecisos aleatorios	16

1.3.1.	Valor esperado de un elemento impreciso aleatorio	19
1.3.2.	Varianza de un elemento impreciso aleatorio	21
1.4.	Simulación de CDAs	24
1.4.1.	Generación de números difusos a partir de un CDA trapezoidal en \mathbb{R}	24
1.4.2.	Generación de números difusos a partir de un CDA con valor es- perado dado	25
2.	Contrastes de hipótesis sobre la varianza de conjuntos difusos aleatorios	29
2.1.	Contrastes de hipótesis para la varianza de un CDA	30
2.1.1.	Procedimiento asintótico	31
2.1.2.	Procedimientos bootstrap	43
2.1.3.	Estudios comparativos de simulación	48
2.1.4.	Aplicación práctica	55
2.2.	Contrastes de hipótesis para la homocedasticidad de k CDAs	59
2.2.1.	Test de homocedasticidad clásico: el test de Levene	61
2.2.2.	Procedimiento asintótico	62
2.2.3.	Procedimiento bootstrap	66
2.2.4.	Caso particular: test de 2 muestras	70
2.2.5.	Estudios de simulación	73
2.2.6.	Aplicación práctica	79

2.3. Potencia de los tests propuestos	83
2.3.1. Potencia de los tests de una muestra	83
2.3.2. Potencia del test de homocedasticidad	87
2.3.3. Estudios de simulación	90
3. Contrastes de hipótesis comparativos para la media de elementos imprecisos aleatorios	95
3.1. Contrastes de hipótesis para el grado de inclusión de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado	96
3.1.1. Grado de inclusión. Definiciones previas	97
3.1.2. Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}	99
3.1.3. Casos especiales: intervalo prefijado no acotado	111
3.1.4. Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$	115
3.1.5. Procedimiento bootstrap	123
3.1.6. Estudios de simulación	134
3.1.7. Aplicación práctica	137
3.2. Contrastes de hipótesis para el grado de similaridad de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado	141
3.2.1. Grado de similaridad. Definiciones previas	141
3.2.2. Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}	142
3.2.3. Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$	148

3.2.4.	Procedimiento bootstrap	153
3.2.5.	Estudios de simulación	162
3.2.6.	Aplicación práctica	165
3.3.	Contrastes de hipótesis para el grado de intersección de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado	169
3.3.1.	Grado de intersección. Definiciones previas	169
3.3.2.	Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}	170
3.3.3.	Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$	175
3.3.4.	Procedimiento bootstrap	180
3.3.5.	Estudios de simulación	187
3.3.6.	Aplicación práctica	190
	Epílogo	195
	Bibliografía	199

Índice de Figuras

1.1. Muestra de queso Gamonedo	1
1.2. Cata del queso Gamonedo	2
1.3. Opinión de un experto acerca de la textura de un determinado queso	8
1.4. Media de las opiniones del Experto 1 y del Experto 2	9
1.5. Números difusos triangulares U , V y W	14
1.6. Diferencia cuadrática entre spr_U y spr_W según α	15
1.7. Percepciones de un experto acerca de la forma de una muestra de quesos	19
1.8. Media muestral de las percepciones del experto acerca de la forma de un conjunto de quesos	22
1.9. Descomposición de un conjunto difuso V	26
2.1. $S(a, b, c)$, $Z(a, b, c)$ y $\Pi(a, b, c, d)$	53
2.2. Potencia del test $H_0 : \sigma_X^2 \leq 6.44$	91
2.3. Potencia del test $H_0 : \sigma_X^2 \geq 6.44$	91

2.4. Potencia del test $H_0 : \sigma_{\chi}^2 = 6.44$	92
2.5. Potencia del test $H_0 : \sigma_{\chi_1^m}^2 = \sigma_{\chi_2}^2 = \sigma_{\chi_3}^2$ para T_L (azul) y T_S (rojo)	93
3.1. Diferentes formas de representación de distintos grados de inclusión de $E(X)$ (en rojo) en A (en azul)	100
3.2. Representación de $I_{supp V}$ (indicador del soporte de V)	121
3.3. Diferentes formas de representación de distintos grados de similaridad entre $E(X)$ (en rojo) y A (en azul)	144
3.4. Diferentes formas de representación de distintos grados de intersección entre $E(X)$ (en rojo) y A (en azul)	171

Índice de Tablas

1.1. Diferentes valores de $(D_{\theta}^{\varphi}(U, W))^2$ según θ y φ	15
1.2. Opinión (intervalar) del experto acerca de la textura de 20 quesos	17
1.3. Opinión (difusa) del experto acerca de la textura de 20 quesos	19
2.1. Tamaño empírico de los tests asintóticos para la varianza de un CDA trapezoidal	49
2.2. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA trapezoidal (Algoritmo 1)	49
2.3. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA trapezoidal (Algoritmo 2)	50
2.4. Varianza de \mathcal{X} según θ y φ	50
2.5. Tamaño empírico del test bilateral según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$	51
2.6. Tamaño empírico del test unilateral (\geq) según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$	51

2.7. Tamaño empírico del test unilateral (\leq) según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$	52
2.8. Tamaño empírico de los tests asintóticos para la varianza de un CDA con esperanza prefijada	54
2.9. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA con esperanza prefijada (Algoritmo 1)	55
2.10. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA con esperanza prefijada (Algoritmo 2)	55
2.11. Muestra de opiniones del experto acerca del aspecto de la pasta, la calidad del olor y la calidad del sabor de 20 quesos	58
2.12. Varianzas de \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 según θ y φ	75
2.13. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(3, 1)$) para $\rho = 0.05$	76
2.14. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \lambda$) para $\rho = 0.05$	76
2.15. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(1, 3)$) para $\rho = 0.05$	77
2.16. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(3, 1)$) para $\rho = 0.05$	77
2.17. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \lambda$) para $\rho = 0.05$	78
2.18. Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(1, 3)$) para $\rho = 0.05$	78

2.19. Muestra de opiniones de 3 expertos acerca de la calidad del olor de varios quesos	80
3.1. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso intervalar <i>I.a)</i>	135
3.2. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso intervalar <i>I.b)</i>	135
3.3. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso difuso <i>F.a)</i>	136
3.4. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso difuso <i>F.b)</i>	137
3.5. Muestra simplificada de opiniones del experto acerca del aspecto de la pasta, la calidad del olor y la calidad del sabor de 20 quesos	139
3.6. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso intervalar <i>I.a)</i>	163
3.7. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso intervalar <i>I.b)</i>	164
3.8. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso difuso <i>F.a)</i>	165
3.9. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso difuso <i>F.b)</i>	165
3.10. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso intervalar <i>I.a)</i>	188

3.11. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso intervalar <i>I.b)</i>	188
3.12. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso difuso <i>F.a)</i>	190
3.13. Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso difuso <i>F.b)</i>	190

Capítulo 1

Conceptos preliminares

El análisis sensorial se utiliza con el fin de interpretar las reacciones a aquellas características de los alimentos que se perciben por los sentidos de la vista, el oído, el olfato, el gusto y el tacto. El 'instrumento' utilizado para llevar a cabo este análisis de percepciones son personas cualificadas. En esta memoria se aplicarán los resultados teóricos obtenidos al análisis sensorial realizado por catadores expertos del queso Gamonedo, fabricado en algunas cuevas de los concejos asturianos de Cangas de Onís y Onís, y que se elabora con leche cruda de vaca, oveja y cabra (ver Figura 1.1).



Figura 1.1: Muestra de queso Gamonedo

En primer lugar, se realiza una sesión de cata del queso Gamonedo en el Instituto LILA (Laboratorio Interprofesional Lechero de Asturias, www.lilasturias.com) en la que intervienen varios catadores expertos. El queso quedará definido y caracterizado después de describir su aspecto exterior, el estudio de la textura, la clasificación del olor y el gusto, todo ello siguiendo unas determinadas pautas (ver Figura 1.2).



Figura 1.2: Cata del queso Gamonedo

Hasta ahora, la descripción de las percepciones de los expertos relativas a cierta cualidad del queso venía dada por un número real. Concretamente se utilizaba la llamada escala de Likert (ver Likert, 1932; Allen & Seaman, 2007) que asocia valores numéricos a categorías (generalmente de 1 a 5, donde 1 significa calidad muy baja y 5 calidad muy alta). El problema es que en muchas ocasiones el hecho de resumir tal percepción en un número es difícil para el experto, produciéndose una pérdida de información que podría ser útil, ya que dichas percepciones subjetivas suelen comprender cierta imprecisión que no se captura con un único valor. La transición de una categoría a otra es en general abrupta y las categorías no se perciben de igual modo por distintos observadores. Además, muchos parámetros y técnicas estadísticas no se pueden aplicar directamente cuando se utilizan las escalas de Likert, o en el caso de que se pueda, la interpretación y fiabilidad de los resultados obtenidos se reduce considerablemente (ver, por ejemplo, Stevens, 1946). Por estos motivos, se va a recurrir al empleo de valores intervalares y de valores difusos para describir la percepción de las características esenciales del queso Gamonedo.

En este capítulo se presentarán conceptos preliminares que van a resultar esenciales para los desarrollos del resto de la memoria. En la Sección 1.1 se comienzan introduciendo los espacios que comprenden los valores imprecisos con los que se va a trabajar, así como la aritmética correspondiente para operar con ellos. En la Sección 1.2 se definirán varias métricas sobre tales espacios, entre las cuales destaca una distancia de tipo L^2 . Esta métrica se empleará en resultados posteriores y está relacionada con el concepto de función soporte, lo que va a permitir identificar el espacio de elementos imprecisos con otro espacio ampliamente estudiado en la literatura y con buenas propiedades. Los conceptos de conjunto aleatorio y conjunto difuso aleatorio se introducen en la Sección 1.3, así como la esperanza y varianza de los mismos. De igual modo se definirán los correspondientes estimadores muestrales. Para finalizar, en la Sección 1.4 se detallan dos métodos de generación de muestras a partir de un conjunto difuso aleatorio que resultarán útiles para el posterior desarrollo de estudios de simulación. Todos los conceptos que se presentan en este capítulo serán ejemplificados mediante los datos obtenidos en las catas realizadas acerca del queso Gamonedo.

1.1. Valores imprecisos

Con el fin de describir las percepciones subjetivas acerca de determinados aspectos, se introducen a continuación los conceptos de valor de intervalo y de conjunto, y valor difuso.

1.1.1. Valores de intervalo y de conjunto

Se define $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ como el espacio de intervalos no vacíos y compactos de \mathbb{R} . A los elementos de este espacio se les denomina simplemente *valores de intervalo* o *valores intervalares de \mathbb{R}* . Existen dos formas de representar un valor intervalar $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$. Una de ellas considera sus extremos inferior y superior, $A = [\inf A, \sup A]$, dando lugar a la *parametrización inf/sup de un intervalo* mediante un vector $(\inf A, \sup A) \in \mathbb{R}^2$ que cumple la restricción

de orden $\inf A \leq \sup A$. Debido a que el manejo de condiciones de orden puede resultar problemático, es más conveniente trabajar con el punto medio de A ($\text{mid } A$) y la semi-amplitud de A ($\text{spr } A$), dando lugar a la *parametrización mid/spr de un intervalo* que viene dada por $(\text{mid } A, \text{spr } A) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ y se definen como

$$\text{mid } A = \frac{\sup A + \inf A}{2} \quad \text{y} \quad \text{spr } A = \frac{\sup A - \inf A}{2}.$$

A lo largo de esta memoria se va a emplear esta última representación, puesto que presenta una mayor operatividad debido a que la condición de no negatividad para los spreads es más fácil de manejar que la condición de orden exigida en la primera parametrización (ver, por ejemplo, Kulpa, 2001; Gil *et al.*, 2002; Montenegro, 2003; Blanco *et al.*, 2009).

Ejemplo 1.1.1 En la práctica, las percepciones acerca de una característica concreta de un queso (como, por ejemplo, la calidad del sabor del mismo) pueden venir dadas en forma de un intervalo $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ que contenga los valores que el experto considera que son totalmente compatibles con su opinión. Tal intervalo se moverá dentro de una escala graduada que varía desde el 0% (que representa la calidad más baja posible) hasta el 100% (que simboliza la calidad más alta alcanzable). Por ejemplo, un catador experto podría decir que la calidad del sabor de un determinado queso está en el intervalo $A = [45, 55]$. Es decir, el experto en este caso no se ve forzado a reflejar su incertidumbre con un único valor de ese intervalo, considerando que cualquier valor entre un 45% y un 55% es igualmente razonable de acuerdo con su percepción. En la Sección 1.1.2, el modelado de la imprecisión contenida en estas percepciones subjetivas se flexibilizará aún más considerando el concepto de conjunto difuso.

A continuación se va a generalizar $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ a un espacio de conjuntos compactos, convexos y no vacíos en \mathbb{R}^p , ya que estos últimos han sido ampliamente estudiados en la literatura (ver, por ejemplo, Matheron, 1975; Epifanio & Ayala, 2002; Molchanov, 2005). Los conjuntos compactos y convexos de \mathbb{R}^p no se utilizan necesariamente para modelar

características imprecisas. Por ejemplo, se han utilizado en el campo de la imagen (ver Molchanov, 2005) con el fin de clasificar la textura de las imágenes (de acuerdo con cierta escala precisa). En este contexto, cada imagen se identifica con un conjunto en el espacio Euclídeo 3-dimensional que varía en el plano dependiendo de diversos factores.

Dado el espacio Euclídeo p -dimensional \mathbb{R}^p con la norma usual $\|\cdot\|$, se define $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ como el espacio conjuntos no vacíos, compactos y convexos de \mathbb{R}^p . Los elementos de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ se denominan *valores de conjunto en \mathbb{R}^p* o *conjuntos en \mathbb{R}^p* . La aritmética usual en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, se basa en las siguientes operaciones:

- *suma de Minkowski*: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$,
- *producto por escalar*: $rA = \{ra : a \in A\}$,

para todo $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ y $r \in \mathbb{R}$. Se denomina aritmética de Minkowski (1896) y se fundamenta en la propagación de la imprecisión. A continuación se ilustrará esta idea con un ejemplo en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.2 Se sabe que la cantidad de pares de zapatos vendida en el mes de mayo en una zapatería de Oviedo está en el intervalo $[180, 200]$, y la vendida en el mes de junio es un valor en $[230, 238]$. Si se quiere obtener la cantidad total de pares de zapatos vendida en mayo y junio, es obvio que dicha cantidad será como mínimo la suma de los dos mínimos ($180+230=410$) y como máximo la suma de los máximos ($200+238=438$). Por tanto, la cantidad total vendida entre mayo y junio pertenece al intervalo $[410, 438]$. Del mismo modo, si se estima que la cantidad que se venderá en agosto será la mitad que la vendida en mayo, es intuitivo deducir que esa cantidad pertenecerá al intervalo $\frac{1}{2}[230, 238] = [115, 119]$.

El espacio $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), +, \cdot)$ posee *estructura semilineal* (es decir, no es un espacio vectorial), debido a que no existe elemento simétrico respecto a la suma, que hace que $A - A$ no sea, en general, el elemento neutro de la suma $\underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_p$.

Para considerar un concepto de diferencia análogo al usual en espacios lineales se introduce, cuando existe, la *diferencia de Hukuhara*. Esta diferencia está definida para A y $B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ como el elemento $A -_H B = C \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ tal que $A = B + C$. Hay que tener en cuenta que no siempre existe el conjunto C que satisface lo anterior (por ejemplo, no existe C tal que $[0, 1] -_H [0, 2] = C$). En general, si $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ son tales que $A -_H B$ existe, se tiene que:

$$A -_H B = \{u \in \mathbb{R}^p : B + \{u\} \subseteq A\}.$$

En el caso intervalar, la condición equivalente para que exista $A -_H B$ se reduce a que $\text{spr } B \leq \text{spr } A$, lo cual implica que o bien existe $A -_H B$ o bien existe $B -_H A$ (aunque también pueden existir ambas en el caso de que las dos semiamplitudes coincidan).

1.1.2. Conjuntos difusos

Se define $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ como la clase de las funciones $U : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ semicontinuas superiormente y con α -niveles U_α pertenecientes al conjunto $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, es decir:

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p) = \{U : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1] \mid U_\alpha \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p) \quad \forall \alpha \in (0, 1]\}.$$

A los elementos de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ se les denomina *conjuntos (o valores) difusos*, mientras que los elementos pertenecientes a $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ suelen denotarse por *números difusos*. Los α -niveles (también llamados α -cortes) se definen como $U_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^p \mid U(x) \geq \alpha\}$ para $\alpha > 0$ y $U_0 = \text{cl}(\text{supp } U)$ donde $\text{supp } U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid U(x) > 0\}$ es el *conjunto soporte* de U .

La aritmética de Minkowski propuesta en la Sección 1.1 para los valores de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ puede extenderse al espacio $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ siguiendo el *principio de extensión de Zadeh* (1975). De este modo, el espacio $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ puede dotarse de una estructura semilineal, inducida de forma natural por la *suma de conjuntos difusos* y el *producto de un conjunto difuso por un escalar*. Estas operaciones resultan compatibles con las obtenidas aplicando la aritmética de Minkowski para cada α -nivel de manera que:

- $(U + V)_\alpha = U_\alpha + V_\alpha = \{u + v : u \in U_\alpha, v \in V_\alpha\},$

$$\blacksquare (rU)_\alpha = rU_\alpha = \{ru : u \in U_\alpha\},$$

para todo $U, V \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ y $r \in \mathbb{R}$, cualquiera que sea $\alpha \in (0, 1]$.

Al igual que sucedía con $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p), +, \cdot)$ tampoco posee una estructura lineal, sino tan sólo semilineal y en ocasiones también resulta interesante considerar la *diferencia de Hukuhara*. Dados dos conjuntos difusos $U, V \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$, la diferencia de Hukuhara (denotada igualmente por $-_H$) de ambos conjuntos viene dada por el elemento $U -_H V = W \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ tal que se cumple que $U = V + W$, en caso de que tal elemento exista.

Observación 1.1.1 La condición de existencia del elemento diferencia es aún más restrictiva que en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, pues para que $W = U -_H V$ exista, deben existir las diferencias de Hukuhara para todos los α -cortes correspondientes $(U -_H V)_\alpha = U_\alpha -_H V_\alpha$.

Ejemplo 1.1.3 El tipo de datos del Ejemplo 1.1.1 se puede matizar más utilizando la escala de los conjuntos difusos. Las percepciones acerca de una característica de un queso recogen mayor información si se expresan como números difusos. Concretamente se va a trabajar con números difusos trapezoidales, de manera que el 0-nivel represente el conjunto de valores que el experto considera compatible en algún grado con su opinión (es decir, el experto piensa que no es posible que la calidad esté fuera de ese conjunto), y el 1-nivel sea el conjunto de valores que él/ella considera completamente compatible con su opinión. De nuevo, la escala de una percepción cualquiera se supondrá que varía entre el 0% y el 100%. Un número difuso trapezoidal Λ se denotará genéricamente por $\Lambda = Tra(\inf \Lambda_0, \inf \Lambda_1, \sup \Lambda_1, \sup \Lambda_0)$, de manera que $[\inf \Lambda_0, \sup \Lambda_0]$ es el 0-corte y $[\inf \Lambda_1, \sup \Lambda_1]$ es el 1-corte y sus α -cortes para $\alpha \in (0, 1)$ vendrán dados por el intervalo

$$\begin{aligned} & (Tra(\inf \Lambda_0, \inf \Lambda_1, \sup \Lambda_1, \sup \Lambda_0))_\alpha \\ &= [\inf \Lambda_1 + (1 - \alpha)(\inf \Lambda_0 - \inf \Lambda_1), \sup \Lambda_1 + (1 - \alpha)(\sup \Lambda_0 - \sup \Lambda_1)]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Por ejemplo, en la Figura 1.3 se muestra la opinión del Experto 1 acerca de la textura de un determinado queso. Analizando tal representación se puede concluir que el experto opina que la calidad no es de menos de 40 ni de más de 60, y su opinión es

totalmente compatible con cualquier valor comprendido entre 45 y 55. Este valor difuso se denotará por $Tra(40, 45, 55, 60)$. Así, mediante el empleo de números difusos el experto es capaz de captar de un modo más informativo y más flexible la imprecisión contenida en sus opiniones que si se restringe a un único intervalo como en el Ejemplo 1.1.1.

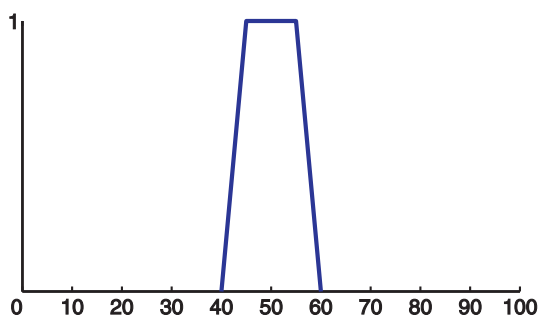


Figura 1.3: Opinión de un experto acerca de la textura de un determinado queso

Asimismo, el Experto 2 opina que tal calidad no puede estar fuera del intervalo $[35, 75]$, y su opinión es totalmente compatible con el intervalo $[48, 63]$ (por tanto, vendrá dada por el difuso $Tra(35, 48, 63, 75)$, ver Figura 1.4). Si se quiere calcular una opinión media a partir del criterio de los 2 expertos, el mínimo (máximo) del 0-nivel y el 1-nivel de la opinión media es igual a la media de los mínimos (máximos) de los dos 0-niveles o 1-niveles respectivamente, y el resto de α -niveles será una interpolación de los 4 extremos obtenidos (puesto que se trabaja con trapecios). Así, la media viene dada por el difuso $Tra(37.5, 46.5, 59, 67.5)$. En la Figura 1.4 está representada la media de las dos opiniones anteriores.

1.2. Familia de distancias entre valores imprecisos

Con el fin de definir una distancia entre conjuntos difusos, se puede aplicar al conjunto de α -cortes cualquier métrica δ definida sobre el espacio $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, integrando entonces esas distancias como una función de α con respecto a una medida de probabilidad con soporte en $(0, 1]$.

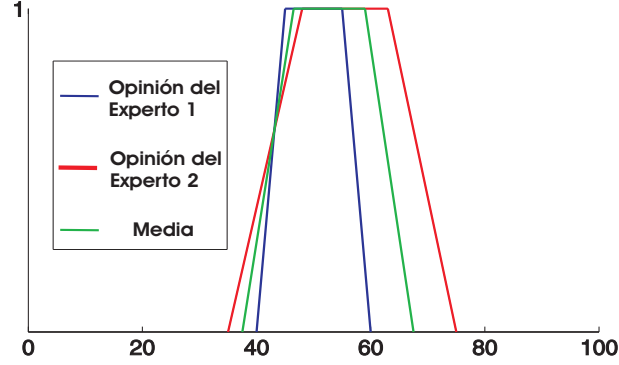


Figura 1.4: Media de las opiniones del Experto 1 y del Experto 2

Una de las métricas más utilizadas cuando se trabaja con conjuntos compactos y convexos de \mathbb{R}^p es la métrica de Hausdorff. Sin embargo, el principal inconveniente que presenta la distancia de Hausdorff es que no verifica el *principio de Fréchet* con respecto a la esperanza de Aumann (ver Näther, 1997).

Existe otro tipo de métricas de tipo L^2 que están conectadas con el concepto de función soporte. Cualquier conjunto compacto convexo $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ puede caracterizarse a partir de su *función soporte*, s_A (ver, por ejemplo, Rockafeller, 1970), siendo ésta una aplicación $s_A : \mathbb{S}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ que verifica

$$s_A(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle, \quad (1.2)$$

para todo $u \in \mathbb{S}^{p-1}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar en \mathbb{R}^p y \mathbb{S}^{p-1} denota la esfera unidad en \mathbb{R}^{p-1} ($\mathbb{S}^{p-1} = \{u \in \mathbb{R}^{p-1} : \|u\| = 1\}$).

Considérese $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{p-1}, \lambda_{\mathbb{S}^{p-1}})$ la clase de las funciones reales de tipo L^2 definidas sobre \mathbb{S}^{p-1} , donde $\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}$ es la medida de superficie uniforme en \mathbb{S}^{p-1} . El espacio $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ puede encajarse isométricamente en un cono convexo y cerrado de \mathcal{H} . El concepto de *función soporte* puede extenderse al espacio $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ (ver Puri & Ralescu, 1985) mediante la aplicación $s_U : \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de manera que

$$s_U(u, \alpha) = \sup_{w \in U_\alpha} \langle u, w \rangle, \quad (1.3)$$

para cualquier $u \in \mathbb{S}^{p-1}$ y $\alpha \in (0, 1]$.

Sea ahora $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1], \lambda_{\mathbb{S}^{p-1}} \times \lambda)$ la clase de las funciones reales cuadrado integrables definidas sobre el espacio $\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, y λ la medida de Lebesgue en $(0, 1]$. De ahora en adelante, los estudios que se van a desarrollar en esta memoria se centrarán en el espacio de conjuntos difusos

$$\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p) = \{U \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p) : s_U \in \tilde{\mathcal{H}}\}.$$

Cabe señalar que mediante la función soporte el espacio $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ puede ‘identificarse’ a través de un encaje isométrico con un cono convexo y cerrado $s(\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p))$ del espacio hilbertiano $\tilde{\mathcal{H}}$ (ver, por ejemplo, González-Rodríguez *et al.*, 2010). Esta identificación permite una gran operatividad ya que existen muchos resultados analíticos y probabilísticos sobre el espacio $\tilde{\mathcal{H}}$ que pueden utilizarse directamente en el espacio de conjuntos difusos $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ (ver, por ejemplo, Laha & Rohatgi, 1979; Young, 1988), aunque otros resultados estadísticos van a requerir un estudio más específico si quiere garantizarse que se está trabajando en $s(\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p))$ y no en $\tilde{\mathcal{H}} \setminus s(\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p))$. Además, la función soporte es una aplicación semilineal, verificando para $U, V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, y $r \in \mathbb{R}$:

- $s_{U+V} = s_U + s_V$, y $s_{rU} = r s_U$ si $r \geq 0$.
- Si existe la diferencia de Hukuhara entre U y V , $s_{U-HV} = s_U - s_V$.

La métrica que se va a introducir a continuación se basa en los conceptos de *mid* y *spread generalizados*, definidos en Trutschnig *et al.* (2009) a partir de la función soporte de $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ como las funciones $\text{mid}_A : \mathbb{S}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{spr}_A : \mathbb{S}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\text{mid}_A(u) = \frac{1}{2}(s_A(u) - s_A(-u)) \quad \text{y} \quad \text{spr}_A(u) = \frac{1}{2}(s_A(u) + s_A(-u)) \quad (1.4)$$

En Trutschnig *et al.* (2009) se muestran algunas de las propiedades más importantes que cumplen el *mid* y el *spread generalizados*, entre las que destacan las siguientes. Dados $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, y $r \in \mathbb{R}$:

- $\text{mid}_A(u) = -\text{mid}_A(-u)$ y $\text{spr}_A(u) = \text{spr}_A(-u)$, para todo $u \in \mathbb{S}^{p-1}$.
- $\text{mid}(\cdot)$ es una función lineal, es decir, $\text{mid}_{A+rB} = \text{mid } A + r\text{mid } B$.
- $\text{spr}(\cdot)$ es una función semilineal, es decir, $\text{spr}_{A+rB} = \text{spr } A + |r|\text{spr } B$.
- La función soporte puede descomponerse como suma ortogonal de mid y spread, es decir, $s_A = \text{mid } A + \text{spr } A$.

Cabe mencionar que el spread generalizado de un conjunto $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ está conectado con la forma y la imprecisión del conjunto A , mientras que el mid generalizado se refiere a la localización de A , ya que mid y spread corresponden al centro y radio, respectivamente, del intervalo proyección de A sobre la dirección $u \in \mathbb{S}^{p-1}$.

Si $s_A, s_B \in \mathcal{H}$, se define el producto escalar

$$\langle s_A, s_B \rangle_\theta = \langle \text{mid } A, \text{mid } B \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}} + \theta \langle \text{spr } A, \text{spr } B \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}} \quad (1.5)$$

donde $\theta > 0$ y

$$\langle f, g \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}} = \int_{u \in \mathbb{S}^{p-1}} f(u)g(u) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u). \quad (1.6)$$

Por tanto, considerando la norma $\|\cdot\|_\theta$ asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ se define la *distancia* d_θ entre dos valores de conjunto $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ como

$$d_\theta^2(A, B) = \|s_A - s_B\|_\theta^2 = \langle s_A - s_B, s_A - s_B \rangle_\theta \quad (1.7)$$

y considerando la norma $\|\cdot\|_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}}$ asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}}$, la distancia se puede reescribir a partir de (1.5) y (1.7) como

$$d_\theta^2(A, B) = \|\text{mid } A - \text{mid } B\|_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}}^2 + \theta \|\text{spr } A - \text{spr } B\|_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}}^2. \quad (1.8)$$

En esta definición, el valor $\theta > 0$ determina el peso relativo de la distancia entre los spreads generalizados con respecto a la distancia entre los mids generalizados. Cabe notar que d_θ es invariante por isometrías (ver Trutschnig *et al.*, 2009) y puede verse como una generalización de otras métricas bien conocidas, de manera que si se considera

el caso intervalar y $\theta \in (0, 1]$ se obtiene la métrica de Bertoluzza y otros entre intervalos compactos (ver Bertoluzza *et al.*, 1995). Además, si $\theta = 1$ resulta la métrica ρ_2 introducida en Vitale (1985).

Por otro lado, la definición dada en (1.5) se corresponde con un producto escalar sobre el espacio \mathcal{H} y, por tanto, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\theta)$ es un espacio de Hilbert. Además, en Trutschnig *et al.* (2009) se prueba que $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), d_\theta)$ es un espacio métrico completo y separable, lo que resulta muy útil para determinados desarrollos estadísticos.

La extensión de la métrica d_θ de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ puede realizarse considerando una medida de probabilidad φ con función de masa positiva y densidad acotada en el intervalo $(0, 1]$ cuya misión es promediar el peso asignado a las distancias de los α -niveles. La métrica D_θ^φ entre dos valores difusos U y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ viene definida por:

$$D_\theta^\varphi(U, V) = \left(\int_{(0,1]} d_\theta^2(U_\alpha, V_\alpha) d\varphi(\alpha) \right)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Las elecciones para φ se basan en la importancia que se quiera dar a cada uno de los α -niveles. Si todos se consideran igualmente importantes, se emplea como φ la medida de Lebesgue en $(0, 1]$ (denotada por λ). Sin embargo, si se quiere dar más masa a aquellos niveles que estén más próximos a 1 (o a 0) se podría utilizar, por ejemplo, una distribución perteneciente a la familia beta. Además, se tiene que si $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, entonces se verifica que $D_\theta^\varphi(I_A, I_B) = d_\theta(A, B)$, donde I_A denota la función indicador del conjunto A .

Los conceptos de mid y spread generalizados definidos en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ pueden extenderse a los de *mid y spread generalizados de* $U \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ a través de sus α -niveles, es decir, para todo $u \in \mathbb{S}^{p-1}$ y $\alpha \in (0, 1]$

$$\text{mid}_U(u, \alpha) = \text{mid}_{U_\alpha}(u) \quad \text{y} \quad \text{spr}_U(u, \alpha) = \text{spr}_{U_\alpha}(u). \quad (1.10)$$

Dados $s_U, s_V \in \tilde{\mathcal{H}}$, se define

$$\langle s_U, s_V \rangle_\theta^\varphi = \int_{(0,1]} \left(\langle \text{mid}_{U_\alpha}, \text{mid}_{V_\alpha} \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}} + \theta \langle \text{spr}_{U_\alpha}, \text{spr}_{V_\alpha} \rangle_{\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}} \right) d\varphi(\alpha). \quad (1.11)$$

Como consecuencia, la distancia D_θ^φ puede expresarse del siguiente modo teniendo en cuenta que $\|\cdot\|_{\theta,\varphi}$ es la norma asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta^\varphi$:

$$\left(D_\theta^\varphi(U, V)\right)^2 = \|s_U - s_V\|_{\theta,\varphi}^2 = \langle s_U - s_V, s_U - s_V \rangle_\theta^\varphi. \quad (1.12)$$

Si se tiene en cuenta el producto escalar (1.11), es fácil ver que $(\tilde{\mathcal{H}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\theta^\varphi)$ es un espacio de Hilbert. Al igual que sucedía con $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), d_\theta)$, se verifica que $(\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p), D_\theta^\varphi)$ es un espacio métrico completo y separable (ver Trutschnig *et al.*, 2009).

Observación 1.2.1 Cabe señalar que si $\Lambda_1 = Tra(a_1, b_1, c_1, d_1)$ y $\Lambda_2 = Tra(a_2, b_2, c_2, d_2)$, y se definen $r_i = d_i - c_i$ y $l_i = b_i - a_i$ para $i \in \{1, 2\}$, la distancia $D_\theta^\varphi(\Lambda_1, \Lambda_2)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left(D_\theta^\varphi(\Lambda_1, \Lambda_2)\right)^2 &= \frac{\left((b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)\right)^2 + \theta\left((c_1 - c_2) - (b_1 - b_2)\right)^2}{4} \\ &+ \frac{\left((r_1 - r_2) - (l_1 - l_2)\right)^2 + \theta\left((r_1 - r_2) + (l_1 - l_2)\right)^2}{4} \int (1 - \alpha)^2 d\varphi(\alpha) \\ &+ \left(\frac{\left((b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)\right)\left((r_1 - r_2) - (l_1 - l_2)\right)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta\left((c_1 - c_2) - (b_1 - b_2)\right)\left((r_1 - r_2) + (l_1 - l_2)\right)}{2} \right) \int (1 - \alpha) d\varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Concretamente, si se trabaja con $\varphi \equiv \lambda$, la expresión anterior se reduce a la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(D_\theta^\lambda(\Lambda_1, \Lambda_2)\right)^2 &= \frac{1}{12} \left(\left((a_1 - a_2) + (d_1 - d_2) \right)^2 + \left((b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left((a_1 - a_2) + (d_1 - d_2) \right) \left((b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) \right) \right) \\ &+ \frac{\theta}{12} \left(\left((d_1 - d_2) - (a_1 - a_2) \right)^2 + \left((c_1 - c_2) - (b_1 - b_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left((d_1 - d_2) - (a_1 - a_2) \right) \left((c_1 - c_2) - (b_1 - b_2) \right) \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

A continuación se van a comparar dos situaciones diferentes en función de distintos valores θ y diferentes medidas φ para la métrica D_θ^φ .

Ejemplo 1.2.1 A modo ilustrativo se han considerado los números difusos triangulares $U = \text{Tra}(45, 50, 55)$, $V = \text{Tra}(50, 55, 55, 60)$ y $W = \text{Tra}(40, 50, 50, 60)$ con el objetivo de analizar las diferencias existentes entre $(D_\theta^\varphi(U, V))^2$ y $(D_\theta^\varphi(U, W))^2$, según diferentes valores de θ y φ .

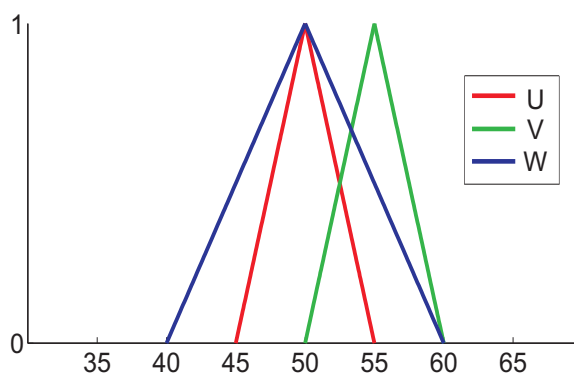


Figura 1.5: Números difusos triangulares U , V y W

Debido a que U y V son el mismo número difuso trasladado en el eje X , la distancia entre los spreads es siempre 0. Además, la distancia entre los midis es siempre la misma para todo $\alpha \in (0, 1]$. Por tanto, θ y φ no influyen a la hora de calcular $(D_\theta^\varphi(U, V))^2$ que siempre toma en este caso el valor 25.

Con el fin de calcular $(D_\theta^\varphi(U, W))^2$ se consideran diferentes valores para θ así como distintas medidas φ . Los valores de θ considerados son $\theta = 1/3$ (elección que resultaría análoga a ponderar con el mismo peso todas las distancias cuadráticas entre las correspondientes combinaciones lineales convexas de los extremos de los dos α -niveles, si se recurriera a la métrica de Bertoluzza *et al.*, equivalente a D_θ^φ en el caso $p = 1$, ver Trutschnig *et al.*, 2009), $\theta = 1$ y $\theta = 1/10$. Como medidas φ se han elegido $\varphi = \lambda = \beta(1, 1)$ (medida de Lebesgue en $(0, 1]$, que asigna pesos iguales a todos los α -niveles), $\varphi = \beta(1, 3)$ (distribución que asigna mayor peso cuanto más bajo sea el valor del α -corte) y $\varphi = \beta(3, 1)$ (que asigna mayor peso a los α -cortes más próximos a 1, es decir, a los de los valores más compatibles con las propiedades que caracterizan a U y V). Las distancias obtenidas se recogen en la Tabla 1.1.

$\theta \setminus \varphi$	$\varphi = \lambda$	$\varphi = \beta(1, 3)$	$\varphi = \beta(3, 1)$
$\theta = 1/10$	0.8375	1.5150	0.2463
$\theta = 1/3$	2.7917	5.0498	0.8210
$\theta = 1$	8.3750	15.1495	2.4629

Tabla 1.1: Diferentes valores de $(D_\theta^\varphi(U, W))^2$ según θ y φ

Como se puede observar en la Tabla 1.1, fijado un valor de θ concreto se observa que la distancia $(D_\theta^\varphi(U, W))^2$ toma un valor mayor si los α -cortes inferiores tienen un peso más grande, y toma valores más pequeños si los que pesan más son los α -cortes superiores. Cabe destacar que en este caso la distancia entre los mids de U y W es siempre 0 para todo $\alpha \in (0, 1]$, pero sí influye θ así como φ ya que la diferencia entre los spreads varía en cada α -corte, como se puede apreciar en la Figura 1.6.

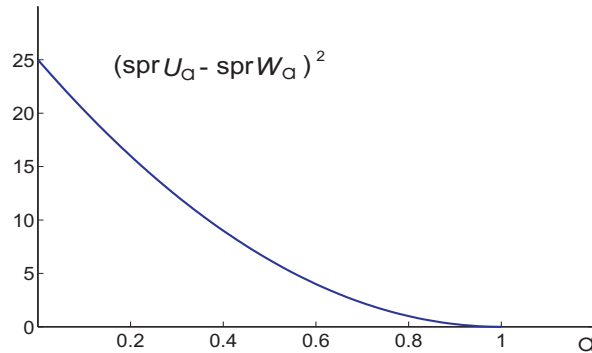


Figura 1.6: Diferencia cuadrática entre spr_U y spr_W según α

Observación 1.2.2 Según el tipo de problema que se esté abordando en la práctica, es conveniente el empleo de un valor de θ u otro, debido a que hay que tener en cuenta el orden de magnitud de la variabilidad de mids frente a la variabilidad de spreads. Así, fijar el valor θ a priori no es un problema sencillo, si bien la equivalencia cuando $p = 1$ y $\theta \leq 1$ con la métrica de Bertoluzza *et al.* facilita la interpretación de las distintas elecciones. Por

otro lado, en la mayoría de las situaciones reales que se pueden presentar se considera que todos los α -cortes de cada valor difuso tienen la misma importancia y, por este motivo, habitualmente se empleará la medida de Lebesgue como medida φ .

1.3. Elementos imprecisos aleatorios

Aquellos experimentos aleatorios sobre cuyos resultados se observa una característica imprecisa se van a modelar a partir de o bien conjuntos aleatorios (si el valor respuesta viene dado por un conjunto), o bien conjuntos difusos aleatorios (si la respuesta se corresponde con un valor difuso).

Dado un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) con valores en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, se dice que una aplicación $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ es un *conjunto aleatorio* asociado al espacio medible (Ω, \mathcal{A}) si X es medible (Borel) respecto a las σ -álgebras \mathcal{A} y β_{d_H} , donde β_{d_H} es la σ -álgebra generada por la topología inducida por d_H en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ (ver, por ejemplo, Matheron, 1985; Molchanov, 2005). En Trutschnig *et al.* (2009) se prueba que la métrica d_θ induce la misma topología que la métrica de Hausdorff d_H en el espacio $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$. De este modo, se puede definir equivalentemente un conjunto aleatorio como una aplicación medible (Borel) respecto a las σ -álgebras \mathcal{A} y β_{d_θ} , con β_{d_θ} la σ -álgebra generada por la topología inducida por d_θ en $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$.

Ejemplo 1.3.1 Se han realizado varias sesiones de cata del queso Gamonedo, en cada una de las cuales se ha testado la calidad de diversos quesos provenientes de una población de quesos producida por diferentes fabricantes especializados en el producto. Las sesiones se han llevado a cabo en momentos arbitrarios desde julio de 2009 hasta la actualidad y los quesos elegidos para cada sesión pueden considerarse representativos del período de tiempo completo. Por tanto, se puede identificar el experimento con el de realizar una única cata de quesos producidos en el período completo en el cual se elegirían los quesos a catar aleatoriamente. Se contratan varios catadores expertos para expresar su opinión acerca de las características más relevantes de cada queso propuesto,

tales como el olor, el sabor, la textura, la apariencia, etc. Se ha observado la opinión de un experto concreto acerca de la forma de los quesos testeados en ese tiempo que viene dada en forma de números difusos trapezoidales al igual que en el Ejemplo 1.1.3. En esta ocasión, se ha simplificado el experimento considerándose únicamente el intervalo de valores que el experto considera completamente compatible con su opinión (siguiendo el Ejemplo 1.1.1). Este experimento puede modelarse a través de un intervalo aleatorio, de manera que $\Omega = \{\text{conjunto de quesos producidos desde julio de 2009 hasta la actualidad}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, y P es una probabilidad distribuida uniformemente, puesto que los quesos se eligen al azar. En la Tabla 1.2 se refleja la muestra de opiniones del experto acerca de la forma de 20 quesos diferentes elegidos al azar.

Número de queso	Opinión	Número de queso	Opinión
1	[46,50]	11	[70,80]
2	[65,73]	12	[70,80]
3	[65,73]	13	[64,73]
4	[60,66]	14	[49,53]
5	[50,60]	15	[48,52]
6	[45,50]	16	[42,50]
7	[58,72]	17	[50,54]
8	[50,53]	18	[53,63]
9	[40,44]	19	[30,38]
10	[75,86]	20	[60,70]

Tabla 1.2: Opinión (intervalar) del experto acerca de la textura de 20 quesos

El concepto de conjunto difuso aleatorio (CDA) ha sido introducido desde diferentes puntos de vista a lo largo de la literatura. De acuerdo con Kruse & Meyer (1987) y Kwakernaak (1978, 1979), un CDA es una extensión del concepto de variable aleatoria real, de manera que en su modelo se trata de observar una variable aleatoria real subyacente (denominada ‘original’) que en realidad se percibe como un CDA. En el caso de

las percepciones subjetivas de un experto acerca de una característica de un producto, no existe una variable aleatoria real subyacente. Es en ésta y otras situaciones similares donde el interés se centra en obtener conclusiones acerca de la variable aleatoria propiamente imprecisa (ver Puri & Ralescu, 1986; Colubi *et al.*, 2007; González-Rodríguez *et al.*, 2010).

En relación con el último enfoque, Puri & Ralescu (1986) definieron el concepto de CDA como extensión de conjunto aleatorio. Se dice que una aplicación $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ es un *conjunto difuso aleatorio* (también llamada variable aleatoria difusa) asociado con el espacio medible (Ω, \mathcal{A}) si la aplicación α -nivel $\mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ tal que $\mathcal{X}_\alpha(\omega) = (\mathcal{X}(\omega))_\alpha$ para todo $\omega \in \Omega$, es un conjunto aleatorio cualquiera que sea $\alpha \in (0, 1]$. Equivalentemente, una aplicación $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ es un CDA si \mathcal{X} es medible Borel respecto a las σ -álgebras \mathcal{A} y $\beta_{D_\theta^\varphi}$, cuando la métrica D_θ^φ es considerada en $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ (ver, por ejemplo, Colubi *et al.*, 2002; Trutschnig *et al.*, 2009). También, \mathcal{X} es un CDA si $s_{\mathcal{X}}$ es un elemento aleatorio evaluado en $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1])$ (ver González-Rodríguez *et al.*, 2010).

Una de las ventajas más importantes de considerar una aplicación medible Borel que tome valores en un espacio métrico es que las nociones de distribución inducida, independencia, etc., son las clásicas (ver Billingsley, 1968).

Ejemplo 1.3.2 En el contexto del Ejemplo 1.3.1, se tienen las percepciones del experto acerca de la forma de los quesos representadas ahora a través de números difusos trapezoidales (como se describió en el Ejemplo 1.1.3). El experimento aleatorio se modela a través de un CDA (tomando valores en $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$) donde el espacio probabilístico es el considerado en el Ejemplo 1.3.1. En la Tabla 1.3 se reflejan los valores de la muestra de opiniones ofrecidas por el experto, así como su representación gráfica en la Figura 1.7. Cabe destacar que, así como en la representación intervalar pueden detectarse algunas coincidencias, en la representación difusa no se han detectado de modo que esta última permite describir las percepciones del experto de forma más fiel y capta mejor la variabilidad en las percepciones.

Número de queso	Opinión	Número de queso	Opinión
1	$Tra(44, 46, 50, 54)$	11	$Tra(60, 70, 80, 80)$
2	$Tra(60, 65, 73, 80)$	12	$Tra(70, 70, 80, 85)$
3	$Tra(60, 65, 73, 84)$	13	$Tra(60, 64, 73, 80)$
4	$Tra(57, 60, 66, 85)$	14	$Tra(45, 49, 53, 60)$
5	$Tra(49, 50, 60, 70)$	15	$Tra(43, 48, 52, 56)$
6	$Tra(42, 45, 50, 57)$	16	$Tra(39, 42, 50, 51)$
7	$Tra(50, 58, 72, 82)$	17	$Tra(45, 50, 54, 58)$
8	$Tra(49, 50, 53, 57)$	18	$Tra(50, 53, 63, 80)$
9	$Tra(36, 40, 44, 46)$	19	$Tra(30, 30, 38, 50)$
10	$Tra(69, 75, 86, 90)$	20	$Tra(50, 60, 70, 80)$

Tabla 1.3: Opinión (difusa) del experto acerca de la textura de 20 quesos

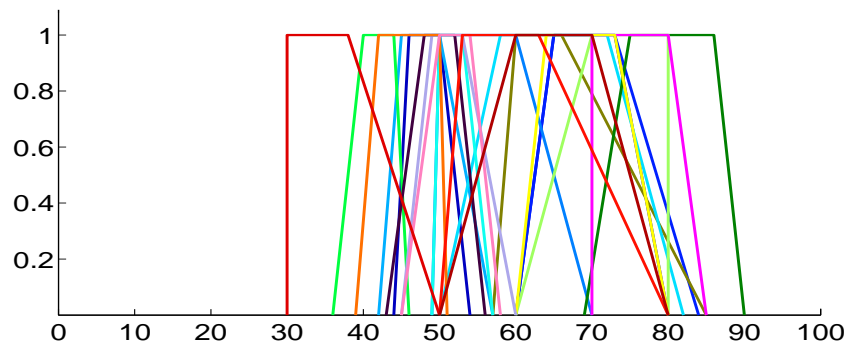


Figura 1.7: Percepciones de un experto acerca de la forma de una muestra de quesos

1.3.1. Valor esperado de un elemento impreciso aleatorio

En muchas situaciones resulta útil resumir la información de un elemento impreciso aleatorio en un sólo valor que permita comprender mejor el comportamiento del mismo o realizar comparaciones. En esta sección se considerará una medida de tendencia central, el valor esperado, alrededor del cual toma valores el elemento aleatorio. La noción de

valor esperado que va a considerarse generaliza la esperanza de un conjunto aleatorio en el sentido de Kudō-Aumann (ver Aumann, 1965; Puri & Ralescu, 1986). Debido a que el trabajo con CDAs engloba el correspondiente con conjuntos aleatorios, los conceptos y propiedades expuestos a continuación se tratarán solamente para CDAs.

Se dice que un CDA está acotado integrablemente si $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}) < \infty$. Se define el *valor esperado difuso* (o *media difusa* o *esperanza difusa*) de un CDA \mathcal{X} integrablemente acotado como el único conjunto difuso en $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que se cumple $E(s_{\mathcal{X}}) = s_{E(\mathcal{X})}$.

Para el caso $p = 1$, $E(\mathcal{X})$ viene dado como el conjunto difuso que verifica que

$$E(\mathcal{X}_\alpha) = [E(\inf(\mathcal{X}_\alpha)), E(\sup(\mathcal{X}_\alpha))] \quad \text{para todo } \alpha \in (0, 1]. \quad (1.14)$$

Equivalentemente, $E(\mathcal{X})$ puede expresarse como el conjunto difuso que cumple

$$E(\mathcal{X}_\alpha) = [E(\text{mid}(\mathcal{X}_\alpha)) \pm E(\text{spr}(\mathcal{X}_\alpha))] \quad \text{para todo } \alpha \in (0, 1]. \quad (1.15)$$

Una de las propiedades más importantes de este valor esperado es su linealidad, ya que $E(r_1\mathcal{X} + r_2\mathcal{Y}) = r_1E(\mathcal{X}) + r_2E(\mathcal{Y})$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y CDAs \mathcal{X}, \mathcal{Y} . Además, $E(\mathcal{X})$ es el único conjunto difuso en $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ que satisface para todo $\alpha \in (0, 1]$ que $(E(\mathcal{X}))_\alpha = E(\mathcal{X}_\alpha)$.

Debido a que el objetivo de esta memoria es realizar estudios de inferencia, se va a trabajar con una muestra aleatoria simple (m.a.s.) obtenida a partir de la realización independiente del experimento aleatorio un número determinado n de veces. Las realizaciones anteriores serán también elementos imprecisos aleatorios distribuidos del mismo modo que el elemento aleatorio origen. Sea $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. del CDA \mathcal{X} . Se define la *media muestral* de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ como:

$$\overline{\mathcal{X}}_n = \frac{1}{n} (\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i. \quad (1.16)$$

Algunas propiedades importante de la esperanza de Aumann en relación con la media muestral son las siguientes:

- Si \mathcal{X} está acotado integrablemente, entonces la media muestral de una m.a.s. de \mathcal{X} es un estimador insesgado del valor esperado de \mathcal{X} , es decir, $E(\overline{\mathcal{X}_n}) = E(\mathcal{X})$.
- El concepto de valor esperado de Aumann es coherente con la aritmética considerada para CDAs con un número finito o numerable de valores distintos y con la Ley Fuerte de los Grandes Números, ya que la media muestral de una m.a.s. de un CDA es un estimador fuertemente consistente de la esperanza del CDA (ver Colubi *et al.*, 1999), es decir:

$$\overline{\mathcal{X}_n} \xrightarrow[D]{n \rightarrow \infty} E(\mathcal{X}) \text{ c.s [P]} \quad (1.17)$$

para todas las métricas usuales D que pueden considerarse sobre $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$.

- Sobre la base del Teorema Central del Límite para espacios de Hilbert y el Teorema de la aplicación continua se tiene que $n(D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}_n}, E(\mathcal{X})))^2$ converge en ley al cuadrado de la norma de un gaussiano con la misma estructura de covarianzas que $s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}})$.

Ejemplo 1.3.3 Dadas las opiniones intervalares de un experto acerca de la forma de una muestra de quesos presentadas en el Ejemplo 1.3.1, su media muestral viene dada por el intervalo $[54.5, 62]$. Es decir, la opinión del experto acerca de la forma de los quesos varía entorno a un mínimo de 54.5 y un máximo de 62. Además, matizando las opiniones en forma de números difusos trapezoidales dadas por el mismo experto en el Ejemplo 1.3.2, su media muestral difusa es $Tra(50.4, 54.5, 62, 69.25)$ y en la Figura 1.8 se puede observar su representación gráfica. Por tanto, en este caso la opinión de los expertos acerca de la forma de los quesos se mueve con completa compatibilidad entre 54.5 y 62, y con mayor o menor grado de compatibilidad entre 62 y 69.25.

1.3.2. Varianza de un elemento impreciso aleatorio

Otras medidas resumen importantes en Estadística son las medidas de dispersión, encaminadas a cuantificar lo próximos o alejados que están los valores que toma el elemento

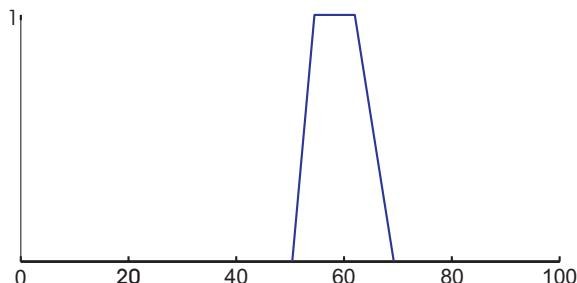


Figura 1.8: Media muestral de las percepciones del experto acerca de la forma de un conjunto de quesos

con respecto a un punto central (en general, el valor esperado). Específicamente, en esta memoria se va a trabajar con una varianza de tipo Fréchet, definida en términos de una distancia cuadrática entre los valores del elemento y su media. En otras palabras, la varianza se corresponde con un ‘error cuadrático’ que se obtiene cuando se trata de resumir la distribución por medio del valor esperado. De nuevo, los conceptos y propiedades presentados en esta sección se tratarán solamente para CDAs.

Si el CDA \mathcal{X} cumple $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^2) < \infty$, se puede cuantificar su ‘variabilidad’ en torno al valor esperado mediante el uso de la D_{θ}^{φ} -varianza (o simplemente *varianza*), que se define como el valor real

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))\right)^2\right), \quad (1.18)$$

o, equivalentemente, $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = E\left(\|s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}})\|_{\theta, \varphi}^2\right)$. Es importante notar que el valor esperado de Aumann, y la varianza así definida, están en concordancia con el *Principio de Fréchet* (ver Fréchet, 1948), en el sentido de que el valor esperado tipo Aumann cumple la condición de ser una esperanza-Fréchet con respecto a la distancia D_{θ}^{φ} , lo que significa que

$$E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))\right)^2\right) = \inf_{U \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)} E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, U)\right)^2\right). \quad (1.19)$$

Esta concordancia asegura buenas propiedades para la varianza en un sentido similar al caso clásico (ver, por ejemplo, Körner, 1997; Lubiano, 1999; Lubiano *et al.*, 2000). Es posible definir equivalentemente la varianza de un CDA \mathcal{X} a partir de la expresión (1.12)

del siguiente modo:

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_{\text{mid } \mathcal{X}}^2 + \theta \sigma_{\text{spr } \mathcal{X}}^2. \quad (1.20)$$

Se define la *varianza muestral* de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ como

$$\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}_n}) \right)^2. \quad (1.21)$$

La varianza muestral es un estimador sesgado y consistente de la varianza poblacional de \mathcal{X} (ver Lubiano, 1999; Lubiano & Gil, 1999; Körner & Näther, 2002), verificando:

$$E(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_{\mathcal{X}}^2 \quad \text{y} \quad \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_{\mathcal{X}}^2 \text{ c.s. [P]}. \quad (1.22)$$

En la práctica, se va a trabajar con la *cuasivarianza muestral* de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ dada por

$$\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}_n}) \right)^2 \quad (1.23)$$

que es un estimador insesgado y consistente de la varianza poblacional (ver Lubiano, 1999; Lubiano & Gil, 1999; Körner & Näther, 2002).

Ejemplo 1.3.4 Se pretende calcular la variabilidad de las opiniones (intervalares) dadas por un experto acerca de la forma de una muestra de quesos Gamonedo en los Ejemplos 1.3.1 y 1.3.2. Para ello se considerarán, $\varphi = \lambda$ y $\theta \in \{1, 10\}$ (siendo estos los valores elegidos en la aplicaciones prácticas, como se verá en las Secciones 2.1.4 y 2.2.6). La varianza y cuasivarianza muestrales con respecto a d_{θ} de las percepciones intervalares son $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = 149.4750$, y $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 157.3421$ para d_1 , y $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = 169.6125$, y $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 178.5395$ para d_{10} . Los resultados obtenidos concuerdan con la definición de varianza dada en (1.20), en el sentido de que cuanto mayor es el valor de θ , mayores son los valores de las correspondientes varianzas y cuasivarianzas.

Asimismo, la varianza y cuasivarianza muestrales de las opiniones trapezoidales del Ejemplo 1.3.2 vienen dadas por $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = 149.3472$ y $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 157.2076$ para D_1^{λ} , y $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = 204.2751$ y $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 215.3422$ para D_{10}^{λ} . Al igual que antes, los resultados concuerdan con (1.20), aumentando los valores de la varianza y la cuasivarianza de \mathcal{X} a medida que aumenta θ .

1.4. Simulación de CDAs

Con el objetivo de ilustrar el comportamiento en la práctica en relación con los resultados teóricos obtenidos, se realizarán simulaciones utilizando dos métodos diferentes. En primer lugar se harán simulaciones considerando la generación de muestras de un CDA trapezoidal en \mathbb{R} , ya que los números difusos trapezoidales han sido ampliamente utilizados en la literatura hasta la actualidad (ver, por ejemplo, Denoeux & Masson, 2004; Grzegorzewski, 2008; Colubi, 2009; González-Rodríguez *et al.*, 2010).

En segundo lugar se utilizará un nuevo método para la simulación de números difusos a partir de un CDA cualquiera fijado su valor esperado (ver González-Rodríguez *et al.*, 2009).

1.4.1. Generación de números difusos a partir de un CDA trapezoidal en \mathbb{R}

Como ya se vio a lo largo de la sección, un número difuso trapezoidal se denota por $\Lambda = Tra(\inf \Lambda_0, \inf \Lambda_1, \sup \Lambda_1, \sup \Lambda_0)$, donde $[\inf \Lambda_0, \sup \Lambda_0]$ es el 0-corte de Λ y $[\inf \Lambda_1, \sup \Lambda_1]$ es el 1-corte. En general, sus α -cortes vienen dados por (1.1).

Supóngase que se quieren obtener valores de un CDA trapezoidal $\mathcal{X} \equiv Tra(a, b, c, d)$. Para ello basta generar valores de dos variables aleatorias reales b y c (que constituirán los límites de los 1-cortes de los números difusos pertenecientes a la muestra), así como valores de dos variables aleatorias reales positivas, l y r , donde $l = b - a$ es la distancia entre los ínfimos del 0-corte y el 1-corte, y $r = d - c$ es la distancia entre los supremos del 0-corte y 1-corte. La distancia entre dos números difusos trapezoidales Λ_1 y Λ_2 ha sido introducida en la expresión (1.13). Además, la esperanza de un CDA trapezoidal $\mathcal{X} \equiv Tra(a, b, c, d)$ viene dada por:

$$E(\mathcal{X}) = E(Tra(a, b, c, d)) = Tra(E(b) - E(l), E(b), E(c), E(c) + E(r)). \quad (1.24)$$

Asimismo, es fácil ver que si b , c , l y r son independientes la D_θ^φ -varianza de \mathcal{X} toma el valor:

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1+\theta}{4} \left(\sigma_b^2 + \sigma_c^2 + (\sigma_r^2 + \sigma_l^2) \int_{(0,1]} (1-\alpha)^2 d\varphi(\alpha) \right). \quad (1.25)$$

Por otro lado, si los parámetros son dependientes se tiene la siguiente expresión para la varianza:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{X}}^2 &= \frac{1+\theta}{4} \left(\sigma_b^2 + \sigma_c^2 + (\sigma_r^2 + \sigma_l^2) \int_{(0,1]} (1-\alpha)^2 d\varphi(\alpha) \right) \\ &+ \frac{1-\theta}{2} \left(\sigma_{b,c} + (\sigma_{b,r} + \sigma_{b,l}) \int_{(0,1]} (1-\alpha) d\varphi(\alpha) \right) \\ &+ \frac{1+\theta}{2} \sigma_{r,l} \left(\int_{(0,1]} (1-\alpha)^2 d\varphi(\alpha) + (\sigma_{c,r} + \sigma_{c,l}) \int_{(0,1]} (1-\alpha) d\varphi(\alpha) \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Particularmente, si se considera como φ la medida de Lebesgue λ , se tiene:

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1+\theta}{4} \left(\sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \frac{1}{3} (\sigma_r^2 + \sigma_l^2) \right) \quad (1.27)$$

en caso de independencia o, en caso de dependencia:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{X}}^2 &= \frac{1+\theta}{4} \left(\sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{c,r} + \sigma_{c,l} + \frac{1}{3} (\sigma_r^2 + \sigma_l^2 + 2\sigma_{r,l}) \right) \\ &+ \frac{1-\theta}{2} \left(\sigma_{b,c} + \frac{1}{2} (\sigma_{b,r} + \sigma_{b,l}) \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.4.2. Generación de números difusos a partir de un CDA con valor esperado dado

Este método de generación aleatoria de números difusos, desarrollado por González-Rodríguez *et al.* (2009), se resume como sigue. Sea $V \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ el valor esperado del CDA que se quiera simular. Dicho valor se puede descomponer como

$$V = V^c + V^l L + V^r R, \quad (1.29)$$

(ver Figura 1.9), donde V^c es el punto medio del 1-corte de V , $V^l = V^c - \text{mín}(V_0) \in \mathbb{R}^+$ es la amplitud izquierda, $V^r = \text{máx}(V_0) - V^c \in \mathbb{R}^+$ es la amplitud derecha, y $L, R \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$

son conjuntos difusos que cumplen que:

$$L_\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V^l = 0, \\ [(\text{mín}(V_\alpha) - V^c, 0] & \text{si } V^l \neq 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

$$R_\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V^r = 0, \\ [0, (\text{máx}(V_\alpha) - V^r)] & \text{si } V^r \neq 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

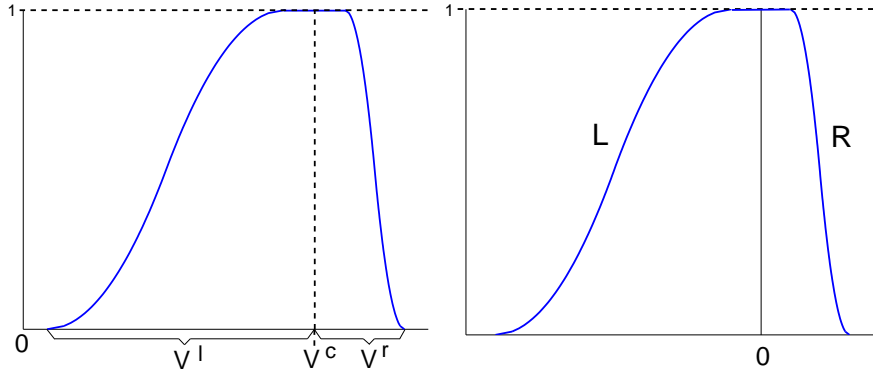


Figura 1.9: Descomposición de un conjunto difuso V

Si se fija un número $n_0 \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) de α -cortes, $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n_0} = 1$, se puede aproximar el número difuso V considerando dos variables aleatorias reales discretas, X_l y X_r , que toman los valores $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}$ con probabilidades correspondientes $p_1^l = F_{X_l}(\alpha_1)$, $p_1^r = F_{X_r}(\alpha_1)$, $p_i^l = F_{X_l}(\alpha_i) - F_{X_l}(\alpha_{i-1})$ y $p_i^r = F_{X_r}(\alpha_i) - F_{X_r}(\alpha_{i-1})$, para todo $i = 2, \dots, n_0$, y definiendo números difusos que se aproximan a V como sigue:

$$V_{n_0} = V^c + \sum_{i=1}^{n_0} -B_{1-\alpha_i} c_i^l + \sum_{i=1}^{n_0} B_{1-\alpha_i} c_i^r \quad (1.32)$$

donde $c_i^l = V^l p_i^l \geq 0$, $c_i^r = V^r p_i^r \geq 0$ ($i = 1, \dots, n_0$), y para todo $x \in [0, 1]$ el conjunto difuso $B_x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ es tal que $(B_x)_\alpha = [0, \mathbf{1}_{[\alpha, 1]}(x)]$.

Se propone hacer la simulación de un CDA \mathcal{X} de acuerdo con los siguientes pasos:

Paso 1. Fijar un valor esperado $V = E(\mathcal{X}) \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, un índice n_0 (suficientemente grande), y α -cortes $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n_0} = 1$.

Paso 2. Calcular los coeficientes $(V^c, c_1^l, \dots, c_{n_0}^l, c_1^r, \dots, c_{n_0}^r)$ mediante la ecuación (1.32).

Paso 3. Considerar un vector aleatorio de coeficientes de dimensión $(2n_0 + 1)$

$$\mathcal{Y} = (C^0, C_1^l, \dots, C_{n_0}^l, C_1^r, \dots, C_{n_0}^r) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty)^{2n_0}$$

para construir el CDA \mathcal{X}_{n_0} como una perturbación de $(V^c, c_1^l, \dots, c_{n_0}^l, c_1^r, \dots, c_{n_0}^r)$ de modo que se cumpla

$$E(C^0, C_1^l, \dots, C_{n_0}^l, C_1^r, \dots, C_{n_0}^r) = (V^c, c_1^l, \dots, c_{n_0}^l, c_1^r, \dots, c_{n_0}^r).$$

Paso 4. Generar muestras $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ a partir de \mathcal{Y} y construir conjuntos difusos A_j para $j \in \{1, \dots, m\}$ análogos a (1.32).

Siguiendo los pasos anteriores, el CDA ‘aproximado’ \mathcal{X}_{n_0} de \mathcal{X} será:

$$\mathcal{X}_{n_0} = C^0 + \sum_{i=1}^{n_0} -B_{1-\alpha_i} C_i^l + \sum_{i=1}^{n_0} B_{1-\alpha_i} C_i^r. \quad (1.33)$$

En la práctica, se va a considerar una variable aleatoria C^0 que cumpla que $E(C^0) = V^c$, y dos variables aleatorias reales no negativas Z_l, Z_r con $E(Z_l) = E(Z_r) = 1$ de las cuales se extraen dos muestras $\{X_i\}_{i=1}^{n_0}$ y $\{Y_i\}_{i=1}^{n_0}$, respectivamente. Para todo $i \in \{1, \dots, n_0\}$ se definen $C_i^l = X_i c_i^l$ y $C_i^r = Y_i c_i^r$. De este modo se tiene la siguiente igualdad:

$$(\mathcal{X}_{n_0})_{1-\alpha_j} = \left[C^0 - \sum_{i=n_0-j+1}^{n_0} C_i^l, C^0 + \sum_{i=n_0-j+1}^{n_0} C_i^r \right] \quad (1.34)$$

y así, la esperanza de \mathcal{X} viene dada por:

$$(E(\mathcal{X}_{n_0}))_{1-\alpha_j} = \left[V^c - \sum_{i=n_0-j+1}^{n_0} c_i^l, V^c + \sum_{i=n_0-j+1}^{n_0} c_i^r \right]. \quad (1.35)$$

Por otro lado, es fácil probar que la D_θ^φ -varianza de \mathcal{X}_{n_0} viene dada por la expresión:

$$\sigma_{\mathcal{X}_{n_0}}^2 = \sigma_{C^0}^2 + \frac{1+\theta}{4} \sigma_X^2 \sum_{j=1}^{n_0} j \varphi_j (c_j^l)^2 + \frac{1+\theta}{4} \sigma_Y^2 \sum_{j=1}^{n_0} j \varphi_j (c_j^r)^2, \quad (1.36)$$

donde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_0}\}$ son los pesos asignados por la distribución φ a cada α -corte, con $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}\}$. En concreto, para la medida de Lebesgue tales pesos son todos iguales y valen $1/n_0$, cumpliéndose:

$$\sigma_{\mathcal{X}_{n_0}}^2 = \sigma_{C^0}^2 + \frac{1+\theta}{4n_0} \sigma_X^2 \sum_{j=1}^{n_0} j(c_j^l)^2 + \frac{1+\theta}{4n_0} \sigma_Y^2 \sum_{j=1}^{n_0} j(c_j^r)^2. \quad (1.37)$$

Capítulo 2

Contrastes de hipótesis sobre la varianza de conjuntos difusos aleatorios

En este capítulo, el principal objetivo se centra en el desarrollo de algunas técnicas de contraste de hipótesis sobre una medida de dispersión relativa a los CDAs que a su vez toma un valor real: la varianza definida en términos de la distancia considerada en el Capítulo 1.

En primer lugar, se va a realizar el contraste bilateral de la varianza de un CDA con respecto a un elemento de \mathbb{R}^+ , así como sobre los correspondientes contrastes unilaterales. Como se ha mencionado anteriormente, la finalidad de estos estudios es la extensión de los resultados presentados por Lubiano (1999) a una clase de CDAs que toman valores en el espacio de conjuntos difusos en \mathbb{R}^p y con un número de valores distintos no necesariamente finito. Para llevarlos a cabo, se recurrirá a un estadístico de contraste basado en los llamados UH-estadísticos (ver Hoeffding, 1948), obteniendo su convergencia a partir del Teorema Central del Límite. Además, se examinarán técnicas de contraste asintóticas

y bootstrap para el estadístico obtenido. Con el fin de comparar ambas técnicas, se realizarán estudios de simulación para CDAs utilizando los dos métodos de generación de muestras de CDAs introducidos en el capítulo anterior.

En segundo lugar se va a contrastar la homocedasticidad de k CDAs a partir de la teoría clásica desarrollada por Levene (1960), debido a la existencia de tests bootstrap eficientes de tipo ANOVA para CDAs. Asimismo, se analizará el caso particular $k = 2$ mediante el empleo de técnicas de UH-estadísticos siguiendo la línea del test de una muestra. Como la distribución asintótica del estadístico de contraste que se va a utilizar es difícil de tratar, se analizará la convergencia del mismo mediante el empleo de técnicas bootstrap. Adicionalmente, se sugiere una extensión al contexto de CDAs del test desarrollado por Shoemaker (2003) y que está basado en el test clásico de Bartlett. Ambos tests se compararán empíricamente mediante estudios de simulación.

En ambos casos se analizará la potencia de los procedimientos asintóticos propuestos utilizando las llamadas alternativas locales, una sucesión de hipótesis alternativas que convergen a la hipótesis nula a medida que el tamaño de muestra aumenta.

Los resultados que se desarrollen a lo largo del capítulo van a aplicarse sobre ejemplos reales basados en el análisis de la calidad del queso Gamonedo.

2.1. Contrastes de hipótesis para la varianza de un CDA

Existen situaciones en las que resulta útil analizar si la variabilidad de una población puede considerarse igual, mayor o menor que determinado valor. Por ejemplo, para determinar si el queso Gamonedo merece o no mantener la Denominación de Origen (D.O., obtenida en el año 2003), un requisito indispensable es que no sea muy elevada la variabilidad de las opiniones de un catador acerca de la calidad de ciertos aspectos de los quesos que han sido producidos en un determinado período de tiempo.

Por tanto, uno de los problemas que se abordan en esta memoria es el de realizar el contraste de las hipótesis

$$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \neq \sigma_0^2. \quad (2.1)$$

El interés se centra igualmente en los contrastes de hipótesis unilaterales para la varianza de un CDA, es decir, en contrastar

$$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 > \sigma_0^2, \quad (2.2)$$

$$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq \sigma_0^2 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 < \sigma_0^2. \quad (2.3)$$

Como estimador (difuso) de la media poblacional de \mathcal{X} , $E(\mathcal{X})$, se considera la media muestral, $\overline{\mathcal{X}}_n$, y como estimador (real) de $\sigma_{\mathcal{X}}^2$, se tiene en cuenta la cuasivarianza muestral, $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2$.

En la Sección 2.1.1 se define un estadístico de contraste para los tests propuestos a partir del empleo de los llamados UH-estadísticos y se analiza su convergencia.

2.1.1. Procedimiento asintótico

La teoría de *U-estadísticos en un espacio de Hilbert* (o *UH-estadísticos*) fue inicialmente desarrollada por Hoeffding (1948), uno de los pioneros de la Estadística No Paramétrica. En general, sean X_1, \dots, X_n elementos aleatorios independientes con valores en un espacio medible (M, β_M) y con la misma distribución F y sea H un espacio de Hilbert real y separable con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ y norma asociada $\| \cdot \|_H$. Se define:

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$$

donde $\Phi : M^m \rightarrow H$ es un núcleo simétrico en sus argumentos. Entonces U_n se denomina *UH-estadístico*.

Sea \mathcal{X} un CDA asociado al espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) y $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ una m.a.s. obtenida a partir de \mathcal{X} . Entonces, $s_{\mathcal{X}_1}, \dots, s_{\mathcal{X}_n}$ son variables aleatorias independientes con valores en el espacio medible $(\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]), \beta_{D_\theta^\varphi})$ e igualmente distribuidas. Dado el espacio hilbertiano $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ se define el siguiente UH-estadístico:

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j})$$

donde $\Phi : \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$\Phi(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j}) = \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2.$$

Proposición 2.1.1 *Teniendo en cuenta la notación anterior, se tiene la siguiente igualdad:*

$$U_n = \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} U_n &= \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2n(n-1)} \sum_i \sum_j \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2n(n-1)} \sum_i \sum_j \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}_n}} + s_{\overline{\mathcal{X}_n}} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_i \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}_n}}\|_{\theta, \varphi}^2 + \frac{1}{2(n-1)} \sum_j \|s_{\mathcal{X}_j} - s_{\overline{\mathcal{X}_n}}\|_{\theta, \varphi}^2 \\ &\quad - \frac{2}{2n(n-1)} \sum_i \sum_j \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}_n}}, s_{\overline{\mathcal{X}_n}} - s_{\mathcal{X}_j} \rangle_\theta^\varphi. \end{aligned}$$

Además, $\frac{2}{2n(n-1)} \sum_i \sum_j \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}_n}}, s_{\overline{\mathcal{X}_n}} - s_{\mathcal{X}_j} \rangle_\theta^\varphi = 0$. Entonces:

$$U_n = \frac{n}{2(n-1)} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 + \frac{n}{2(n-1)} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 = \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2.$$

□

Los estudios realizados en Körner & Näther (2002) prueban que

$$E\left(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2\right) = \sigma_{\mathcal{X}}^2. \quad (2.4)$$

Por otro lado, también es posible calcular la varianza de $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2$ utilizando el Lema 2.1.2 propuesto por Hoeffding (1948) para variables aleatorias y según el cual:

Lema 2.1.2 (Hoeffding, 1948) Si $U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ es un UH-estadístico que verifica que $E(\Phi^2(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})) < \infty$, se cumple que:

$$\sigma_{U_n}^2 = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \zeta_k,$$

donde $\zeta_k = \sigma_{\Phi_k(X_1, \dots, X_k)}^2$ de modo que Φ_k viene dado por la expresión

$$\Phi_k(x_1, \dots, x_k) = E(\Phi(X_1, \dots, X_n) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k).$$

A partir del Lema 2.1.2, se obtiene una expresión útil de la varianza de $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2$ en la Proposición 2.1.3.

Proposición 2.1.3 Sea \mathcal{X} un CDA sobre el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) y $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ una m.a.s de \mathcal{X} . Si $E\left(\frac{1}{4} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^4\right) < \infty$ (o, equivalentemente, $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$), entonces:

$$\sigma_{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2}^2 = \frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))}^2}{n} + \frac{4\sigma_{\mathcal{X}}^4}{n(n-1)}. \quad (2.5)$$

Demostración. Utilizando el Lema 2.1.2 y teniendo en cuenta que en este caso $\Phi(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j}) = \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2$ se tiene que:

$$\sigma_{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2}^2 = \binom{n}{2}^{-1} \left[\binom{2}{1} \binom{n-2}{2-1} \zeta_1 + \binom{2}{2} \binom{n-2}{2-2} \zeta_2 \right]$$

donde:

- $\zeta_1 = \sigma_{\Phi_i(s_{\mathcal{X}_i})}^2$. Por un lado, sumando y restando la esperanza poblacional, se tiene que $\Phi_i(s_{\mathcal{X}_i}) = \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})}\|_{\theta, \varphi}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{\mathcal{X}}^2$. Además, $E(\Phi_i(s_{\mathcal{X}_i})) = \sigma_{\mathcal{X}}^2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= E(\Phi_i^2(s_{\mathcal{X}_i})) - [E(\Phi_i(s_{\mathcal{X}_i}))]^2 \\ &= \frac{E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))\right)^4\right) - \sigma_{\mathcal{X}}^4}{4} = \frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))}^2}{4}. \end{aligned}$$

- $\zeta_2 = \sigma_{\Phi_{(i,j)}^2(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j})}^2$, ya que en este caso se cumple que para $i \neq j$:

$$\Phi_{(i,j)}(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j}) = \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})} + s_{E(\mathcal{X})} - s_{\mathcal{X}_j}\|_{\theta, \varphi}^2,$$

y así, teniendo en cuenta que $E(\Phi_{(i,j)}(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j})) = \sigma_{\mathcal{X}}^2$ y que, al ser $s_{\mathcal{X}_i}$ y $s_{\mathcal{X}_j}$ independientes, se verifica:

$$E(\Phi_{(i,j)}^2(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j})) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} E[(s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})})^k] E[(s_{\mathcal{X}_j} - s_{E(\mathcal{X})})^{4-k}].$$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= E(\Phi_{(i,j)}^2(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j})) - [E(\Phi_{(i,j)}(s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_j}))]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(2 E\left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^4\right) + 6 \sigma_{\mathcal{X}}^4 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la varianza de $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\sigma_{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2}^2 = \binom{n}{2}^{-1} (2(n-2)\zeta_1 + \zeta_2) = \frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2}{n} + \frac{4\sigma_{\mathcal{X}}^4}{n(n-1)}.$$

□

Los estudios realizados en Borovskikh (1986) y en Hoeffding (1948) garantizan que los UH-estadísticos cumplen el Teorema Central del Límite en el sentido siguiente:

Lema 2.1.4 (Hoeffding, 1948; Borovskikh, 1986) Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes que toman valores en un espacio medible (M, β_M) y que tienen la misma distribución F , y sea $U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ un UH-estadístico con $\Phi : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un núcleo simétrico en sus argumentos. Entonces se cumple que

$$\frac{U_n - E(U_n)}{\sigma_{U_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

donde $E(U_n)$ y $\sigma_{U_n}^2$ denotan la media y varianza de U_n respectivamente, bajo la única condición de existencia de $E(\Phi^2(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}))$.

De los resultados anteriores, se deduce el Teorema 2.1.5.

Teorema 2.1.5 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Si $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, entonces:

$$\tilde{T}_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_{\mathcal{X}}^2)}{\sqrt{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

Demostración. Utilizando el Lema 2.1.4 y las expresiones (2.4) y (2.5) se deduce que

$$\tilde{T}_n^1 = \frac{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_{\mathcal{X}}^2}{\sqrt{\frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2}{n} + \frac{4\sigma_{\mathcal{X}}^4}{n(n-1)}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

El resultado se concluye teniendo en cuenta que

$$\tilde{T}_n = \tilde{T}_n^1 \cdot C_n, \text{ con } C_n = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2}{n} + \frac{4\sigma_{\mathcal{X}}^4}{n(n-1)}}}{\sqrt{\frac{\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

□

Debido a que el denominador de \tilde{T}_n es un valor poblacional que en principio es desconocido, se propone un estimador del mismo dado por

$$\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 \right)^2.$$

En el Teorema 2.1.6 se prueba la consistencia del estimador anterior.

Teorema 2.1.6 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Si $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, entonces:

$$\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2 \quad (2.6)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\left\{ \widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 \right\}_n$ es una sucesión de estimadores fuertemente consistentes de $\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}^2$.

Demostración. La demostración de este teorema se va a realizar en dos pasos. En el apartado a) se probará que si para todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right)^2,$$

entonces $\{A_n\}_n$ es una sucesión de estimadores fuertemente consistentes de $\sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))}^2$.

En el apartado b) se demostrará que, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\left(\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})}^2 - A_n \right) \xrightarrow{c.s.} 0.$$

a) Se comprobará en primer lugar que

$$\{A_n\}_n \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))}^2. \quad (2.7)$$

Se puede introducir el término $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = E\left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2\right)$ en la expresión de A_n , obteniendo el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) \right. \\ &\quad \left. + E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) \right) \\ &\quad \cdot \left(E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$- \left(E((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right)^2. \quad (2.9)$$

El sumando (2.8) se corresponde con la varianza muestral de las variables aleatorias reales $\left\{ (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right\}_{i=1}^n$ y se sabe que la varianza muestral es un estimador fuertemente consistente de la varianza poblacional. Por tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - E \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2 \right) \right)^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2.$$

Por la Ley Fuerte de los Grandes Números se puede asegurar que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \xrightarrow{c.s.} E \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2 \right).$$

En consecuencia, el término (2.9) converge casi seguro a 0, obteniéndose así (2.7).

b) Se probará ahora que, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\left(\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 - A_n \right) \xrightarrow{c.s.} 0. \quad (2.10)$$

Se puede introducir el término $(D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, E(\mathcal{X})))^2$ en la expresión de $\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2$ y así obtener:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 + (D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, E(\mathcal{X})))^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 + (D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, E(\mathcal{X})))^2 \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad

$$(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n))^2 + (D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, E(\mathcal{X})))^2 = (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - 2 \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi$$

y que, por las propiedades del producto escalar y la función soporte, se cumple que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right) = 0,$$

la expresión anterior se puede desarrollar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X})))^2 \right)^2 \\
&+ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right)^2 \\
&- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})}, s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right. \\
&\quad \left. \cdot \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right).
\end{aligned}$$

Se puede observar que el primer término del desarrollo anterior es A_n y, del mismo modo, se puede comprobar que

$$\begin{aligned}
&\langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})}, s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \\
&= \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})} + s_{E(\mathcal{X})} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi \\
&+ \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi + 2 \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi.
\end{aligned}$$

Tras simplificar cálculos se obtiene que $\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 = A_n - B_n$, donde

$$B_n = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right).$$

Por tanto, basta probar que $-B_n$ converge casi seguro a 0 para obtener el resultado.

Para ello, se descompone como sigue:

$$-B_n = -\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.11)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.12)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.13)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.14)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.15)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.16)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \right) \quad (2.17)$$

$$- \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi - \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_\theta^\varphi \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_\theta^\varphi \right). \quad (2.18)$$

A continuación se analizará la convergencia de los términos pertenecientes a la descomposición de $-B_n$.

En relación con el término (2.11), utilizando las desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz se cumple que:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_{\theta}^{\varphi} - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_{\theta}^{\varphi} \right) \right| \\ & \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^3 \|s_{\overline{\mathcal{X}}_n} - s_{E(\mathcal{X})}\|_{\theta, \varphi}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, el valor absoluto de (2.12) se puede acotar como sigue:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_{\theta}^{\varphi} - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\mathcal{X}_i} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\overline{\mathcal{X}}_n}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_{\theta}^{\varphi} \right) \right| \\ & \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^2 \|s_{\overline{\mathcal{X}}_n}\|_{\theta, \varphi} \|s_{E(\mathcal{X})} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}\|_{\theta, \varphi}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la cota anterior también la verifica el sumando (2.15). Finalmente, con respecto al término (2.13) se cumple que:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left(\langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_{\theta}^{\varphi} - \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{E(\mathcal{X})} \rangle_{\theta}^{\varphi} \langle s_{\mathcal{X}_i}, s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \rangle_{\theta}^{\varphi} \right) \right| \\ & \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^2 \|s_{E(\mathcal{X})}\|_{\theta, \varphi} \|s_{E(\mathcal{X})} - s_{\overline{\mathcal{X}}_n}\|_{\theta, \varphi}. \end{aligned}$$

La condición $E\left(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4\right) < \infty$ implica que $\|s_{E(\mathcal{X})}\|_{\theta, \varphi}^4 < \infty$ y, por tanto, los momentos de orden inferior también son finitos. Además, $\overline{\mathcal{X}}_n$ es un estimador fuertemente consistente de $E(\mathcal{X})$, por lo que $s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \xrightarrow{c.s.} s_{E(\mathcal{X})}$. De este modo, se concluye que los términos (2.11), (2.12), (2.13) y (2.15) convergen casi seguro a 0.

Igualmente, es inmediato que también los sumandos (2.14), (2.16), (2.17) y (2.18) convergen casi seguro a 0, teniendo en cuenta que $s_{\overline{\mathcal{X}}_n} \xrightarrow{c.s.} s_{E(\mathcal{X})}$ y gracias a las propiedades del producto escalar y de la función soporte.

Por tanto, $-B_n$ converge casi seguro a 0 y se tiene la convergencia (2.10) como se quería demostrar.

A partir de los resultados (2.7) y (2.10) obtenidos en *a)* y *b)* es obvio, por las propiedades de la convergencia casi seguro, que

$$\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2.$$

□

Como consecuencia de los estudios anteriores, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.7 *En las condiciones de los Teoremas 2.1.5 y 2.1.6, si $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$ se cumple que el estadístico definido por*

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_{\mathcal{X}}^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2}} \quad (2.19)$$

converge en ley hacia una variable aleatoria real con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.

Demostración. Por los Teoremas 2.1.5 y 2.1.6 se tiene que

$$\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_{\mathcal{X}}^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2\right) \quad \text{y} \quad \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2.$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Slutsky se satisface que

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

□

De ahora en adelante, para llevar a cabo los Tests (2.1), (2.2) y (2.3), se va a utilizar el estadístico

$$T_n^{H_0} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2}}. \quad (2.20)$$

Observación 2.1.1 A lo largo de la memoria se analizará si cada uno de los tests propuestos es asintóticamente correcto. Sea ρ un nivel de significación fijado. Se dice que

un test que consiste en rechazar H_0 cuando $T_n > k_{1-\rho}$ (siendo T_n el estadístico de contraste y $k_{1-\rho} \in \mathbb{R}$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica de T_n) es *asintóticamente correcto* si cuando H_0 es cierta se cumple:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y además la igualdad se alcanza en alguna situación bajo H_0 . La definición es análoga en el caso en el que se rechace H_0 cuando $T_n < k_\rho$ o bien cuando $|T_n| > k_{(1-\rho)/2}$.

Sobre la base de los teoremas anteriores, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.8 *Considérense las condiciones de los Teoremas 2.1.5, 2.1.6 y 2.1.7, y $\rho \in [0, 1]$.*

- a) *Sea $z_{1-\rho/2}$ el percentil de orden $100(1-\rho/2)$ de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Si H_0 en (2.1) es cierta, entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n^{H_0}| > z_{1-\rho/2}) = \rho.$$

Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.1) cuando $T_n^{H_0} > z_{1-\rho/2}$ es asintóticamente correcto.

- b) *Sea $z_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Si H_0 en (2.2) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{H_0} > z_{1-\rho}) \leq \rho,$$

y la igualdad se alcanza cuando $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.2) cuando $T_n^{H_0} > z_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

- c) *Sea z_ρ el percentil de orden 100ρ de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Si H_0 en (2.3) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{H_0} < z_\rho) \leq \rho,$$

y la igualdad se alcanza cuando $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.3) cuando $T_n^{H_0} < z_\rho$ es asintóticamente correcto.

Observación 2.1.2 Las inferencias clásicas para resolver los contrastes (2.1), (2.2) y (2.3) cuando se consideran variables aleatorias reales se basan habitualmente en el cociente entre la correspondiente cuasivarianza muestral y la varianza poblacional. Además, la distribución exacta del estadístico que involucra dicho cociente suele determinarse bajo condiciones de normalidad de la variable, condición que no se ajusta a la mayoría de los problemas reales. Teniendo en cuenta la llamada *convergencia de tipos* (ver Billingsley, 1968), existe una única distribución límite posible y esencialmente una única secuencia de constantes normalizadoras. Por tanto, se tiene que el estadístico clásico (convenientemente normalizado) y el estadístico de contraste \tilde{T}_n definido en el Teorema 2.1.5 son esencialmente el mismo.

Supóngase que Y es una variable aleatoria real con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma_Y)$ y que $Y_1 \dots Y_n$ es una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que Y . El estadístico clásico que se utiliza para contrastar la varianza es $T_Y = \frac{(n-1)\widehat{S}_Y^2}{\sigma_Y^2}$, que se distribuye como una variable χ_{n-1}^2 . Además, si a una distribución χ^2 se le resta su media y se divide por su desviación típica, se cumple que el resultado converge en ley hacia una variable $\mathcal{N}(0, 1)$ y, de este modo,

$$T_Y' = \frac{T_Y - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{\sqrt{n-1}(\widehat{S}_Y^2 - \sigma_Y^2)}{\sigma_Y^2 \sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Como $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ se tiene que

$$T_Y'' = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_Y^2 - \sigma_Y^2)}{\sigma_Y^2 \sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Según el Teorema 2.1.5, $\tilde{T}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

A continuación se prueba que en el caso real, donde Y es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma_Y)$, los denominadores de T_Y'' y \tilde{T}_n coinciden. Para ello, basta comprobar que

$$2\sigma_Y^4 = \sigma_{(D_{\theta}^{\sigma}(Y, E(Y)))}^2.$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y)))^2}^2 &= E\left[\left(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y))^2 - E\left((D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y)))^2\right)\right)^2\right] \\
 &= E\left[\left(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y))^2 - \sigma_Y^2\right)^2\right] = E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y))\right)^4\right) - \sigma_Y^4 \\
 &= E((Y - \mu)^4) - \sigma_Y^4 = \sigma_Y^4 \left(E\left(\frac{Y - \mu}{\sigma_Y}\right)^4 - 1\right).
 \end{aligned}$$

Además, $\frac{Y - \mu}{\sigma_Y} \equiv \mathcal{N}(0, 1)$, y el momento de orden 4 de esta distribución es igual a 3. Por tanto, $2\sigma_Y^4 = \sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y)))^2}^2$ y ambos estadísticos coinciden en el caso real bajo normalidad.

En el caso difuso, al desconocerse el valor de $E\left(\left(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))\right)^4\right)$, tal valor tiene que ser estimado, lo que lleva a considerar $\hat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}_n))^2}^2$ como estimador de $\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, E(\mathcal{X})))^2}^2$.

2.1.2. Procedimientos bootstrap

En Montenegro *et al.* (2004), Gil *et al.* (2006) y González-Rodríguez *et al.* (2006), la aplicación de técnicas bootstrap en los contrastes para la media difusa proporciona en la práctica una aproximación a la distribución muestral con velocidad bastante superior a la conseguida con los tests asintóticos correspondientes.

En esta sección se prueban resultados análogos para la varianza de un CDA a partir de las técnicas bootstrap clásicas utilizadas a lo largo de la literatura para contrastes de la media de una variable aleatoria real (ver, por ejemplo, Efron & Tibshirani, 1993). Estas técnicas están basadas en el cálculo de residuos por diferencia con respecto a la media muestral, con el objeto obtener una distribución que cumpla la hipótesis nula. Se propone un procedimiento análogo para contrastar la varianza de un CDA mediante el cálculo de residuos por cociente con respecto a la varianza muestral.

Sea \mathcal{X} un CDA definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que \mathcal{X} , denotados por $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Para conseguir que la distribución de la cual se va a realizar el remuestreo esté bajo la hipótesis nula, se modifica \mathcal{X} obteniendo un nuevo CDA $\mathcal{Y} = \frac{\sigma_0 \mathcal{X}}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}}$. A partir de \mathcal{Y} se extrae la que constituirá la población bootstrap, $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{\sigma_0 \mathcal{X}_i}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}} \right\}_{i=1}^n$. Es fácil ver que $\widehat{S}_{\mathcal{Y}}^2 = \sigma_0^2$.

Observación 2.1.3 La población bootstrap $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n$ sirve tanto para realizar el contraste bilateral (2.1), como para realizar los contrastes unilaterales (2.2) y (2.3), ya que en estos últimos casos también es útil el hecho de que $\widehat{S}_{\mathcal{Y}}^2 = \sigma_0^2$ pues éste sería el peor de los casos posibles bajo la hipótesis nula según se comprobó en el Teorema 2.1.8.

A continuación, se remuestrea a partir de la población bootstrap, obteniendo:

$$\{\mathcal{Y}_i^*\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{\sigma_0 \mathcal{X}_i^*}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}} \right\}_{i=1}^n.$$

En primer lugar, para dicha muestra se calcula el valor del estadístico siguiente:

$$T_n^* = \frac{\sqrt{n} (\widehat{S}_{\mathcal{Y}^*}^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2}} = \frac{\frac{\sigma_0^2}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2} \sqrt{n} (\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}_n))^2}^2}}. \quad (2.21)$$

La distribución asintótica de T_n^* viene dada en el Teorema 2.1.9.

Teorema 2.1.9 Con la notación anterior, si $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, entonces

$$T_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ c.s. } - [P]. \quad (2.22)$$

Demostración. En primer lugar, se tiene que $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 \xrightarrow{\text{c.s.}} \sigma_{\mathcal{X}}^2$, puesto que $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2$ es un estimador consistente de $\sigma_{\mathcal{X}}^2$ (ver Körner & Näter, 2002). Por tanto, se cumple que $\frac{\sigma_{\mathcal{X}}^2}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2} \xrightarrow{\text{c.s.}} 1$.

De este modo, sólo es necesario analizar la convergencia de $\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2)$. Para ello, basta aplicar un resultado de Bickel & Freedman (1981) sobre técnicas bootstrap cuando se trabaja con UH-estadísticos. Este resultado prueba que, bajo las condiciones exigidas, $\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2)$ converge en ley casi seguro a la misma distribución que $\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_{\mathcal{X}}^2)$ que a su vez, según el Teorema 2.1.5, converge a una variable aleatoria $\mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_{\theta}^c(\mathcal{X}, E(\mathcal{X}))^2)}\right)$. Finalmente, a partir del resultado probado en el Teorema 2.1.6, se tiene (2.22), como se quería demostrar. \square

Teniendo en cuenta los estadísticos $T_n^{H_0}$ y T_n^* definidos en (2.20) y (2.21), respectivamente, y como consecuencia del resultado anterior, se concluye el Teorema 2.1.10.

Teorema 2.1.10 *Considérense las condiciones del Teorema 2.1.9 y $\rho \in [0, 1]$.*

- a) *Sea $z_{1-\rho/2}^*$ el percentil de orden $100(1 - \rho/2)$ de la distribución asintótica (2.22). Si H_0 en (2.1) es cierta, entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n^{H_0}| > z_{1-\rho/2}^*) = \rho.$$

Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.1) cuando $T_n^{H_0} > z_{1-\rho/2}^$ es asintóticamente correcto.*

- b) *Sea $z_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (2.22). Si H_0 en (2.2) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{H_0} > z_{1-\rho}^*) \leq \rho,$$

y la igualdad se alcanza cuando $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.2) cuando $T_n^{H_0} > z_{1-\rho}^$ es asintóticamente correcto.*

- c) *Sea z_{ρ}^* el percentil de orden 100ρ de la distribución asintótica (2.22). Si H_0 en (2.3) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{H_0} < z_{\rho}^*) \leq \rho,$$

y la igualdad se alcanza cuando $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.3) cuando $T_n^{H_0} < z_{\rho}^$ es asintóticamente correcto.*

Observación 2.1.4 En la práctica, la distribución del estadístico T_n^* no es conocida. Para solucionar este problema se van a emplear dos aproximaciones basadas en el método de Monte Carlo. El primero de ellos, se basa en aproximar la distribución de T_n^* por Monte Carlo. Cabe notar que en este caso basta trabajar únicamente con la distribución de los numeradores de $T_n^{H_0}$ y T_n^* , puesto que los denominadores de ambos estadísticos son el mismo.

Como suele ocurrir en el caso real (ver, por ejemplo, Efron & Tibshirani, 1993), es posible emplear un método alternativo consistente en reestimar el denominador de T_n^* utilizando de nuevo Monte Carlo. Dado un CDA \mathcal{X} y una m.a.s. $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ a partir de \mathcal{X} , se considera la población bootstrap $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{\sigma_0 \mathcal{X}_i}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}} \right\}_{i=1}^n$. De dicha población se extrae una muestra bootstrap, $\{\mathcal{Y}_i^*\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{\sigma_0 \mathcal{X}_i^*}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}} \right\}_{i=1}^n$, y se utiliza para reestimar el denominador de T_n^* , obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{Y}_i^*, \overline{\mathcal{Y}_n^*}))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{Y}^*}^2 \right)^2 = \frac{\sigma_0^4}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^4} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i^*, \overline{\mathcal{X}_n^*}))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}^*}^2 \right)^2 \right).$$

Por tanto, se tiene un segundo estadístico bootstrap:

$$T_n^{**} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i^*, \overline{\mathcal{X}_n^*}))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}^*}^2 \right)}}. \quad (2.23)$$

A continuación se plantean dos algoritmos para resolver en la práctica los contrastes (2.1), (2.2) y (2.3) utilizando los dos métodos bootstrap propuestos.

Algoritmos para los contrastes bootstrap (Test de una muestra)

Con el fin de emplear la primera aproximación bootstrap, puede recurrirse al algoritmo siguiente:

Paso 1. Elegir una m.a.s. de n CDAs a partir de \mathcal{X} , denotados por $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$.

Paso 2. Para esta muestra calcular el valor del estadístico

$$T = \sqrt{n} (\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_0^2).$$

Paso 3. Obtener una m.a.s. bootstrap de tamaño n a partir de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$, que se denotará por $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$, y calcular el valor del estadístico bootstrap

$$T^* = \frac{\sigma_0^2}{\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2} \sqrt{n} (\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2).$$

Paso 4. Repetir el Paso 3 un gran número B de veces con el fin de conseguir un conjunto de B estimaciones denotado por T_1^*, \dots, T_B^* .

Paso 5. Calcular el p -valor bootstrap según el test de hipótesis que se esté llevando a cabo:

1. Si se quiere contrastar (2.1), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en T_1^*, \dots, T_B^* cuyo valor absoluto es mayor o igual que el de T .
2. Si se quiere contrastar (2.2), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en T_1^*, \dots, T_B^* mayores o iguales que T .
3. Si se quiere contrastar (2.3), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en T_1^*, \dots, T_B^* menores o iguales que T .

Para resolver los contrastes propuestos utilizando la segunda aproximación bootstrap, el algoritmo es análogo al anterior modificando los Pasos 2 y 3 del siguiente modo:

Paso 2.* Para la muestra inicial calcular el valor del estadístico

$$T = \frac{\sqrt{n} (\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_n))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}}^2 \right)^2}}.$$

Paso 3.* Obtener una m.a.s. bootstrap de tamaño n a partir de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$, que se denotará por $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$, y calcular el valor del estadístico bootstrap

$$T^* = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^*}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i^*, \bar{\mathcal{X}}_n^*))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}^*}^2 \right)^2}}.$$

2.1.3. Estudios comparativos de simulación

Con el fin de justificar el uso práctico de los tests asintótico y bootstrap propuestos en las Secciones 2.1.1 y 2.1.2 en referencia a la significación nominal, se han desarrollado estudios de simulación siguiendo los dos procedimientos de generación de CDAs en clases paramétricas particulares presentados en la Sección 1.4.

En el primer caso, se utilizará la métrica $D_{1/3}^{\lambda}$ que asocia igual peso a todos los α -cortes y a todos los valores de cada α -corte. Se ha considerado un CDA trapezoidal $\mathcal{X} \equiv Tra(a, b, c, d)$. En particular, se van a simular números difusos cuyos valores extremos del 1-corte vienen dados por dos variables aleatorias reales dependientes, $b \equiv \mathcal{N}(1, 2)$ y $c \equiv b + \mathcal{N}(1, 1)$, y de manera que $l = b - a$ varía como una variable $l \equiv \chi_3^2$ y $r = d - c$ tiene distribución $r \equiv \chi_8^2$. La esperanza de \mathcal{X} , según (1.24), es el número difuso trapezoidal $E(\mathcal{X}) = Tra(-2, 1, 2, 10)$. Además, la varianza teórica de \mathcal{X} viene dada por la expresión (1.28) y toma un valor igual a 6.77. Las hipótesis nulas que se van a contrastar son: $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 6.77$, $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 6.77$ y $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 6.77$.

En primer lugar, se presentan los resultados correspondientes al caso asintótico. Se han llevado a cabo 100000 simulaciones del procedimiento asintótico, lo que implica un error muestral asintótico del 0.0617% para $\rho = 0.01$, del 0.135% para $\rho = 0.05$ y del 0.186% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%. Los resultados para diferentes tamaños muestrales n y diferentes niveles de significación ρ se recogen en la Tabla 2.1.

Por otro lado, se han efectuado 10000 simulaciones (implicando un error muestral del 0.195% para $\rho = 0.01$, del 0.427% para $\rho = 0.05$ y del 0.588% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%) de los dos algoritmos bootstrap propuestos empleando diferentes

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 6.77$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
50	4.46	9.91	15.34	5.94	11.76	17.77	0.25	2.94	7.57
100	2.92	7.18	12.50	3.55	9.88	15.48	0.37	3.36	7.75
500	1.31	5.73	10.70	1.89	6.48	12.01	0.46	4.06	8.76
1000	1.16	5.19	10.29	1.60	5.60	10.49	0.58	4.38	9.49
5000	1.08	4.96	10.17	1.02	4.95	9.60	1.03	5.29	10.08
10000	1.01	4.81	10.36	1.08	4.89	9.95	0.97	5.08	10.23

Tabla 2.1: Tamaño empírico de los tests asintóticos para la varianza de un CDA trapezoidal

niveles de significación ρ y distintos tamaños de muestra n , y realizando 1000 réplicas bootstrap. Los resultados se muestran en las Tablas 2.2 y 2.3.

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 6.77$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	6.96	13.90	20.12	1.98	6.72	11.18	8.06	14.20	19.52
30	3.02	8.72	14.30	1.90	5.48	10.06	2.90	8.88	15.18
50	2.44	8.02	12.68	1.50	5.58	9.82	2.26	7.74	13.22
100	1.78	6.98	11.35	1.35	5.12	10.72	1.58	6.68	11.86
200	1.34	5.66	10.96	1.20	4.70	10.08	1.50	5.88	10.56
300	1.25	5.44	10.10	1.10	4.80	9.68	1.40	5.40	9.90

Tabla 2.2: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA trapezoidal (Algoritmo 1)

A la vista de los valores que se observan en la Tabla 2.1, puede concluirse que los tamaños muestrales necesarios para obtener resultados razonables son muy elevados ya que se observa que el porcentaje de rechazos está bastante cerca del nivel de significación nominal aproximadamente a partir de $n = 5000$. Por tanto, el procedimiento asintótico requiere tamaños de muestra moderados o grandes. Sin embargo, los resultados corres-

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 6.77$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 6.77$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	2.24	6.66	11.82	2.18	6.50	11	0.62	6.04	13.84
30	1.88	5.44	10.78	2.04	5.64	9.76	0.80	5.88	12.76
50	1.70	5.32	9.70	1.42	5	9.64	1	5.62	11.36
100	1.02	4.84	10.04	1.36	5.16	10.12	1.20	5.42	11.16
200	1.04	4.92	9.86	1.14	5.20	9.90	1.08	5.02	10.38

Tabla 2.3: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA trapezoidal (Algoritmo 2)

pondientes a los tests bootstrap recogidos en las Tablas 2.2 y 2.3 son bastante buenos para $n \geq 100$ en el caso del primer algoritmo, y para $n \geq 50$ en el caso del segundo, por lo que se puede concluir que sobre todo el segundo procedimiento bootstrap resulta muy útil cuando se trabaja con tamaños de muestra moderados.

En segundo lugar se van a comparar los resultados obtenidos en la Tabla 2.3 (segundo procedimiento bootstrap) con los obtenidos cuando se consideran diferentes valores de θ y φ , concretamente los empleados en el Ejemplo 1.2.1, es decir,

$$\theta \in \{1/10, 1/3, 1\},$$

$$\varphi \in \{\beta(3, 1), \lambda, \beta(1, 3)\}.$$

La varianza de \mathcal{X} según la expresión (1.25) toma los siguientes valores recogidos en la Tabla 2.4, según el valor de θ o φ que se esté considerando:

	$\varphi \equiv \beta(3, 1)$	$\varphi \equiv \lambda$	$\varphi \equiv \beta(1, 3)$
$\theta = 1/10$	4.8683	6.2917	7.9394
$\theta = 1/3$	5.0531	6.77	8.77
$\theta = 1$	5.5814	8.166	11.1735

Tabla 2.4: Varianza de \mathcal{X} según θ y φ

Se han llevado a cabo, al igual que antes, 10000 simulaciones del segundo procedimiento bootstrap y 1000 réplicas bootstrap en cada una de ellas, implicando los mismos errores muestrales que antes. Los resultados obtenidos para los tres tests propuestos para diferentes tamaños de muestra al nivel de significación $\rho = 0.05$ se muestran en las Tablas 2.5, 2.6 y 2.7.

Test bilateral (=)

$n \setminus \theta$	$\varphi \equiv \beta(3,1)$			$\varphi \equiv \lambda$			$\varphi \equiv \beta(1,3)$		
	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1
10	6.32	6.46	6.42	6.80	6.66	6.76	6.96	7.22	7.12
30	5.32	5.64	5.14	6.02	5.44	5.38	6.02	6.12	6.86
50	5.14	5.48	5.06	5.18	5.32	5.28	5.52	5.22	6.20
100	4.90	5.16	4.94	5.02	4.84	5.08	5.34	5.26	5.36
200	5.08	4.96	5.22	4.96	4.92	4.92	5.14	4.92	5.22

Tabla 2.5: Tamaño empírico del test bilateral según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$

Test unilateral (\geq)

$n \setminus \theta$	$\varphi \equiv \beta(3,1)$			$\varphi \equiv \lambda$			$\varphi \equiv \beta(1,3)$		
	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1
10	6.24	6.34	6.22	6.46	6.50	6.52	6.48	7.46	7.54
30	5.76	5.82	5.60	5.82	5.64	6.28	6.16	6.12	6.62
50	5.54	4.98	5.04	4.92	5	5.24	5.80	5.78	5.74
100	5.20	4.92	4.90	5.26	5.16	4.92	5.48	5.38	5.48
200	4.98	5.10	5.15	5.04	5.20	5.20	5.08	5.12	5.04

Tabla 2.6: Tamaño empírico del test unilateral (\geq) según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$

Test unilateral (\leq)

$n \setminus \theta$	$\varphi \equiv \beta(3, 1)$			$\varphi \equiv \lambda$			$\varphi \equiv \beta(1, 3)$		
	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1	1/10	1/3	1
10	6.20	6.54	6.92	5.88	6.04	6.50	6.38	6.26	6.66
30	5.93	5.50	6.14	5.50	5.88	6.20	5.62	5.54	5.60
50	5.52	5.22	5.88	5.48	5.62	5.82	5.40	5.36	5.52
100	5.34	5.10	5.48	5.40	5.42	5.40	5.20	5.26	5.38
200	5.04	5.20	5.08	5.14	5.02	5.08	5.04	5.14	4.94

Tabla 2.7: Tamaño empírico del test unilateral (\leq) según distintos valores de θ y φ para $\rho = 0.05$

Según lo que se observa en las Tablas 2.5, 2.6 y 2.7, no existen diferencias representativas ante diferentes elecciones de θ o φ , y en todos los casos el porcentaje de rechazos se encuentra próximo al nivel de significación nominal cuando n es mayor que 50.

Finalmente se van a realizar simulaciones empleando el método de generación de números difusos desarrollado por González-Rodríguez *et al.* (2009) y explicado en la Sección 1.4.2. Para llevar a cabo estas simulaciones se elige un CDA \mathcal{X} cuyo valor esperado viene dado por $E(\mathcal{X}) = \Pi(-3, -1, 1, 1.5)$, curva que se define genéricamente, para $a \leq b \leq c \leq d$, por:

$$\Pi(a, b, c, d)_\alpha = [\inf S(a, b, c)_\alpha, \sup Z(b, c, d)_\alpha] \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.24)$$

donde

$$S(a, b, c)_\alpha = \begin{cases} [a + (b - a)\sqrt{\alpha/2}, c] & \text{si } \alpha \leq 0.5 \\ [b + (a - b)\sqrt{(1 - \alpha)/2}, c] & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}, \quad (2.25)$$

$$Z(a, b, c)_\alpha = \begin{cases} [a, c + (b - c)\sqrt{\alpha/2}] & \text{si } \alpha \leq 0.5 \\ [a, b + (c - b)\sqrt{(1 - \alpha)/2}] & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}. \quad (2.26)$$

Las tres curvas anteriores están representadas en la Figura 2.1.

En este caso, se toman 101 α -cortes (de 0 a 1 con paso 0.01) y se elige una variable aleatoria real C^0 uniformemente distribuida en $[-8, 8]$. Las distribuciones de las

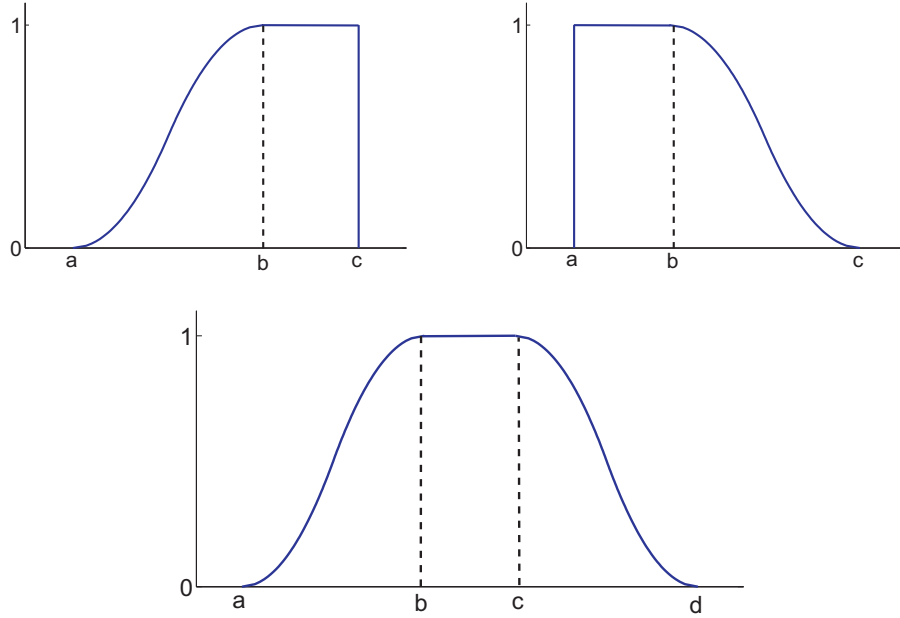


Figura 2.1: $S(a, b, c)$, $Z(a, b, c)$ y $\Pi(a, b, c, d)$

variables Z_l y Z_r se corresponden con dos χ^2_1 . Por tanto, repitiendo n veces el procedimiento descrito en la Sección 1.4.2, se obtiene una muestra de n CDAs independientes e idénticamente distribuidas que el CDA \mathcal{X} que verifica $E(\mathcal{X}) = \Pi(-3, -1, 1, 1.5)$.

La $D_{1/3}^\lambda$ -varianza de \mathcal{X} se aproxima utilizando la expresión (1.37) del siguiente modo:

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_{C^0}^2 + \frac{1}{3 \cdot 101} \sigma_{Z_l}^2 \sum_{j=1}^{101} j(c_j^l)^2 + \frac{1}{3 \cdot 101} \sigma_{Z_r}^2 \sum_{j=1}^{101} j(c_j^r)^2,$$

donde c_j^l y c_j^r se calculan como en la Sección 1.4.2. Para este ejemplo se tiene que

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = 21.33 + \frac{2}{303} \sum_{j=1}^{101} j(c_j^l)^2 + \frac{2}{303} \sum_{j=1}^{101} j(c_j^r)^2 = 22.6947.$$

Por tanto, las hipótesis nulas que se van a contrastar en este caso son $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 22.6947$, $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 22.6947$ y $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 22.6947$.

En la Tabla 2.8 se muestra el porcentaje de rechazos de H_0 a los niveles de significación usuales para diferentes tamaños muestrales. Debido al elevado tiempo computacional que conlleva cada simulación, se van a realizar 10000 de ellas (en lugar de las 100000 realizadas en el caso trapezoidal) considerando en este caso un error muestral asintótico del 0.195% para $\rho = 0.01$, del 0.427% para $\rho = 0.05$ y del 0.588% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%.

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 22.6947$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
50	2.02	7.04	12.32	2.94	7.86	13.28	0.46	3.74	8.82
100	1.60	5.86	10.70	2.02	7.16	11.76	0.52	4.32	9.24
500	1.18	5.56	10.60	1.38	5.54	10.46	0.86	4.75	9.74
1000	1.12	5.16	10.21	1.32	5.28	9.96	0.89	4.86	10.06
5000	0.96	5.08	10.04	1.12	5.01	9.99	0.94	5.02	9.98

Tabla 2.8: Tamaño empírico de los tests asintóticos para la varianza de un CDA con esperanza prefijada

Asimismo, se han llevado a cabo 5000 simulaciones y 1000 réplicas bootstrap por simulación de cada test (lo que implica un error muestral del 0.276% para $\rho = 0.01$, del 0.604% para $\rho = 0.05$ y del 0.8315% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%), utilizando los dos procedimientos bootstrap para los contrastes bilateral y unilaterales considerando varios niveles de significación ρ para diferentes tamaños de muestra n . Los resultados obtenidos se recogen en las Tablas 2.9 y 2.10.

La Tabla 2.8 muestra que, en el caso asintótico, el tamaño de muestra mínimo necesario para la obtención de resultados razonables es $n = 1000$, valor que resulta elevado. A pesar de ello, a partir de la Tabla 2.9 se puede concluir que aplicando el primer procedimiento bootstrap se necesitan tamaños de muestra mucho menores que en el caso asintótico ($n \geq 100$). Además, si se incluye el denominador bootstrap, los resultados mejoran aún más, como se puede observar en la Tabla 2.10 ya que a partir de $n = 100$, la aproximación es mejor que en los casos anteriores.

	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 22.6947$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	2.62	8.08	13.10	0.42	2.34	5.18	8.68	15.84	21.92
30	2.08	5.44	11.44	0.56	2.68	5.92	4.42	10.70	16.16
50	1.50	5.36	10.54	0.69	3.05	6.34	3.06	8.98	14.92
100	1.25	5.28	9.90	0.78	4.12	8.19	1.83	6.27	11.84
200	1.09	5.06	9.95	0.89	4.68	9.39	1.23	5.61	10.34

Tabla 2.9: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA con esperanza prefijada (Algoritmo 1)

	$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 22.6947$			$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 22.6947$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	0.73	3.62	7.82	0.44	2.84	5.72	1.49	8.62	16.22
30	0.80	4.07	9.12	0.64	3.62	6.84	1.32	6.78	13.92
50	0.88	4.38	9.46	0.70	3.95	8.26	1.26	6.14	12.52
100	0.92	4.88	9.61	0.84	4.36	9.01	1.17	5.52	10.16
200	0.98	4.95	9.82	0.93	4.89	10.07	1.08	5.23	10.09

Tabla 2.10: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la varianza de un CDA con esperanza prefijada (Algoritmo 2)

De los resultados previos se deriva que mediante el empleo de técnicas bootstrap mejoran considerablemente los resultados obtenidos en relación a las técnicas asintóticas establecidas en la Sección 2.1.1.

2.1.4. Aplicación práctica

Como se citó al comienzo de la Sección 2.1, una condición indispensable para determinar si el queso Gamonedo merece conservar la mención de Denominación de Origen en la actualidad se basa en el análisis la variabilidad de las opiniones de los expertos sobre

determinados aspectos de los quesos. En este contexto, la Denominación de Origen se mantendrá si la varianza de tales opiniones no excede determinado valor. Específicamente, se van a analizar tres cualidades de los quesos: el aspecto de la pasta del queso (carácter visual), la calidad del olor (carácter olfativo) y la calidad del sabor (carácter gustativo).



Como se especificó en el Ejemplo 1.1.3, las percepciones subjetivas de los catadores expertos acerca de ciertas características del queso Gamonedo vendrán dadas por números difusos trapezoidales. Los datos correspondientes a las catas realizadas durante el segundo semestre de 2009 y el año 2010 se han recogido en una base de datos con el fin de poder desarrollar análisis estadísticos de los mismos.

Para el desarrollo de estos estudios se realizarán tres contrastes de hipótesis para la varianza de un CDA trapezoidal teniendo en cuenta las opiniones de un experto cualificado acerca de las tres características propuestas anteriormente. En este marco se consideran los tres CDAs siguientes:

- \mathcal{X} \equiv “percepción del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- \mathcal{Y} \equiv “percepción del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- \mathcal{Z} \equiv “percepción del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

Teniendo en cuenta la expresión para la varianza dada en (1.20) en función del mid y spread generalizados, la varianza toma un valor mayor a medida que el valor de θ aumenta por lo que es necesario determinar de antemano el valor o valores de θ con los que se va a trabajar. En este caso particular es fácil ver que la diferencia de variabilidad de mids es del orden de 100 veces más grande que la diferencia de spreads. Por tanto,

se emplearán dos métricas diferentes. En primer lugar se va a considerar la distancia D_1^λ que asigna igual importancia a la diferencia de midis que a la diferencia de spreads (con lo cual la variabilidad total estará fuertemente determinada por la variabilidad de los midis, dada la diferencia de órdenes de magnitud). Por otro lado, se va a considerar la distancia D_{10}^λ con el fin de equilibrar más el peso dado a la variabilidad entre los spreads.

Se pretende analizar si la variabilidad de dichas opiniones no excede de $\sigma_1^2 = 140$ en los tres casos cuando se considera la distancia D_1^λ y que no excede de $\sigma_2^2 = 150$ cuando se trabaja con D_{10}^λ . Así, se van a llevar a cabo los siguientes contrastes de hipótesis para $i \in \{1, 2\}$:

$$H_0^i : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq \sigma_i^2 \text{ frente a } H_1^i : \sigma_{\mathcal{X}}^2 > \sigma_i^2. \quad (2.27)$$

$$H_0^i : \sigma_{\mathcal{Y}}^2 \leq \sigma_i^2 \text{ frente a } H_1^i : \sigma_{\mathcal{Y}}^2 > \sigma_i^2. \quad (2.28)$$

$$H_0^i : \sigma_{\mathcal{Z}}^2 \leq \sigma_i^2 \text{ frente a } H_1^i : \sigma_{\mathcal{Z}}^2 > \sigma_i^2. \quad (2.29)$$

En cada caso se considera la muestra de 20 percepciones que se reflejan en la Tabla 2.11. Las cuasivarianzas muestrales en los tres casos vienen dadas por: $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 76.4215$, $\widehat{S}_{\mathcal{Y}}^2 = 97.6653$ y $\widehat{S}_{\mathcal{Z}}^2 = 153.1302$ para D_1^λ , y de $\widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 = 82.2853$, $\widehat{S}_{\mathcal{Y}}^2 = 106.1383$ y $\widehat{S}_{\mathcal{Z}}^2 = 157.2098$ para D_{10}^λ . Se aplica el procedimiento bootstrap que incluye el denominador propuesto en la Sección 2.1.2, ya que se ha mostrado que resulta más adecuado que las técnicas asintóticas cuando se trabaja con muestras de tamaño pequeño. Así, los p -valores que se obtienen en cada caso son los siguientes: $p = 0.9221$, $p = 0.9305$ y $p = 0.1702$, respectivamente, para D_1^λ , y $p = 0.9297$, $p = 0.9351$ y $p = 0.1738$ para D_{10}^λ .

Como conclusión, no se rechazan las hipótesis nulas a los niveles de significación usuales. Además, ante estas percepciones del experto, se puede concluir de nuevo que el queso Gamonedo merece permanecer con la Denominación de Origen de acuerdo con este criterio.

Otras aplicaciones

Existen muchas otras situaciones en las que puede resultar útil recurrir a la resolución de un test de hipótesis para la varianza de un CDA (o un conjunto aleatorio). Algunas de ellas son las siguientes:

Nº queso	Aspecto de la pasta	Calidad olor	Calidad sabor
1	$Tra(70, 75, 84, 86)$	$Tra(60, 70, 76, 80)$	$Tra(45, 49, 56, 60)$
2	$Tra(54, 56, 60, 70)$	$Tra(50, 53, 56, 61)$	$Tra(60, 65, 70, 75)$
3	$Tra(50, 56, 63, 71)$	$Tra(64, 70, 75, 80)$	$Tra(70, 74, 80, 90)$
4	$Tra(49, 52, 56, 61)$	$Tra(64, 67, 73, 80)$	$Tra(50, 54, 60, 65)$
5	$Tra(70, 79, 84, 85)$	$Tra(50, 54, 60, 70)$	$Tra(36, 44, 50, 56)$
6	$Tra(55, 57, 63, 70)$	$Tra(60, 60, 65, 75)$	$Tra(50, 55, 60, 66)$
7	$Tra(50, 52, 57, 64)$	$Tra(50, 56, 63, 70)$	$Tra(50, 50, 56, 66)$
8	$Tra(50, 54, 60, 64)$	$Tra(65, 70, 75, 80)$	$Tra(44, 49, 53, 60)$
9	$Tra(45, 48, 53, 60)$	$Tra(48, 50, 56, 60)$	$Tra(64, 68, 72, 80)$
10	$Tra(55, 60, 66, 70)$	$Tra(67, 77, 80, 82)$	$Tra(66, 75, 80, 83)$
11	$Tra(48, 53, 56, 62)$	$Tra(70, 78, 82, 86)$	$Tra(50, 55, 60, 65)$
12	$Tra(54, 60, 65, 70)$	$Tra(45, 50, 55, 60)$	$Tra(75, 80, 86, 90)$
13	$Tra(55, 58, 62, 70)$	$Tra(64, 68, 72, 80)$	$Tra(70, 74, 80, 90)$
14	$Tra(34, 44, 50, 50)$	$Tra(74, 80, 86, 90)$	$Tra(50, 54, 60, 65)$
15	$Tra(60, 64, 70, 76)$	$Tra(70, 75, 80, 85)$	$Tra(70, 77, 84, 84)$
16	$Tra(60, 70, 76, 80)$	$Tra(50, 56, 63, 70)$	$Tra(40, 45, 50, 55)$
17	$Tra(60, 65, 70, 76)$	$Tra(54, 60, 65, 74)$	$Tra(65, 73, 80, 84)$
18	$Tra(50, 55, 61, 70)$	$Tra(40, 46, 54, 60)$	$Tra(64, 70, 74, 80)$
19	$Tra(50, 58, 62, 65)$	$Tra(55, 60, 65, 70)$	$Tra(40, 47, 53, 60)$
20	$Tra(44, 50, 56, 60)$	$Tra(70, 74, 80, 84)$	$Tra(70, 75, 82, 86)$

Tabla 2.11: Muestra de opiniones del experto acerca del aspecto de la pasta, la calidad del olor y la calidad del sabor de 20 quesos

- Cuando se aborda el problema de la decisión de inversión en Bolsa de un pequeño inversor, tal decisión puede basarse en las predicciones de un grupo de expertos sobre la posición del índice de Bolsa en determinado momento. Una posibilidad consiste en preguntar a los expertos qué valores creen que como mínimo, con mayor posibilidad, y como máximo, alcanzará dicho índice en el momento deseado. Esos datos pueden representarse como números difusos triangulares y, con el fin de dar

una respuesta al futuro inversor, es posible realizar un contraste para la variabilidad de tales predicciones (ver, por ejemplo, Ramos-Guajardo *et al.*, 2010).

- Con el fin de detectar enfermedades cardíacas de un paciente específico, en muchas situaciones puede resultar útil analizar la variación de la tensión del paciente a lo largo de un tiempo. Además, la tensión arterial es una característica que puede representarse mediante intervalos definidos por el valor mínimo y máximo que alcanza la misma a lo largo de un día (ver Lubiano, 1999). De este modo, es posible analizar estadísticamente si tal fluctuación varía mucho o poco mediante el empleo de los contrastes propuestos en esta sección.
- De igual modo, el movimiento de las mareas en un día alcanza un mínimo y un máximo y, por tanto, puede ser representado mediante intervalos. En este sentido, el análisis de la variabilidad de las mareas a lo largo de un ciclo concreto resulta interesante para determinados estudios oceanográficos (ver, por ejemplo, Yi, 2001). Así, en este contexto también resultan útiles los desarrollos realizados a lo largo de esta sección.

2.2. Contrastes de hipótesis para la homocedasticidad de k CDAs

El interés de desarrollar resultados para contrastar la *homocedasticidad* (o *igualdad de varianzas*) de dos o más variables se justifica en gran medida en la suposición de esta propiedad en el estudio clásico de un modelo de regresión, así como en los modelos concernientes al análisis de la varianza (o ANOVA).

La necesidad de realizar un contraste de este tipo en esta memoria se presenta a la hora de determinar, en el análisis concreto del queso Gamonedo, si los catadores están de acuerdo o no en relación con la calidad de algunos aspectos de los quesos en estudio. Con el fin de mantener la Denominación de Origen del queso Gamonedo, además de una baja variabilidad en las opiniones de cada experto, se requiere un acuerdo entre las

opiniones de los catadores expertos que puede interpretarse (en términos estadísticos), por ejemplo, como la igualdad de medias y la igualdad de varianzas en las percepciones de determinadas características del queso.

En lo que se refiere a la igualdad de medias de varios CDAs, en Gil *et al.* (2006) se ha realizado el estudio del ANOVA unifactorial empleando técnicas bootstrap en el caso en el que los CDAs son simples, es decir, toman un número finito de valores. Por otro lado, en González-Rodríguez *et al.* (2010) se ha extendido el estudio del ANOVA unifactorial a un contexto más general mediante el empleo de técnicas en espacios de Hilbert.

Otro de los objetivos de esta memoria se basa en extender los resultados desarrollados en la Sección 2.1 al caso en el que se quiere analizar la igualdad de varianzas de dos o más CDAs. Por tanto, dadas k poblaciones y k CDAs independientes asociados, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$, la finalidad es resolver el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \dots = \sigma_{\mathcal{X}_k}^2 & \text{frente a} \\ H_1 : \exists i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 \neq \sigma_{\mathcal{X}_j}^2. \end{cases} \quad (2.30)$$

El test más utilizado para contrastar la igualdad de k varianzas cuando las distribuciones involucradas se asumen normales es el test de Bartlett (1937). Sin embargo, este test no resulta robusto respecto a la suposición de poblaciones gaussianas subyacentes, ya que la distribución del estadístico de contraste involucra una kurtosis que puede no ser cero (ver, por ejemplo, Box, 1953; Boos & Cavell, 2004). Un modo de solucionar el problema anterior consiste en introducir la kurtosis estimada en el estadístico de Bartlett, como se expone en Box & Andersen (1955), Layard (1973), Conover *et al.* (1981) y Shoemaker (2003). Concretamente, Shoemaker (2003) ha definido un estadístico basado en el de Bartlett y que se distribuye aproximadamente como una distribución chi-cuadrado.

Otro modo alternativo de proceder se basa en aplicar el análisis de la varianza (ANOVA) para contrastar la homocedasticidad teniendo en cuenta las ventajas que supone su robustez ante distribuciones no normales (ver, por ejemplo, Levene, 1960; Games *et al.*, 1972; Brown & Forsythe, 1974). En este contexto, Levene (1960) propuso un estadístico de contraste para muestras de igual tamaño, que se generalizó posteriormente al caso

de muestras de tamaño desigual (ver Draper & Hunter, 1969). En esta sección se desarrollará el test de Levene para CDAs considerando los cuadrados de ciertos residuales basados en la media.

El estudio teórico del test de Shoemaker para CDAs no es fácil de tratar debido a las dificultades que presenta la búsqueda de su distribución límite. Por tanto, en este trabajo se analizará empíricamente la eficiencia del mismo en comparación con el test de Levene para CDAs, dejando abierta una línea de investigación que puede ser abordada en futuros estudios.

En la Sección 2.2.1 se resume el test de homocedasticidad clásico introducido por Levene (1960).

2.2.1. Test de homocedasticidad clásico: el test de Levene

Considérense k poblaciones y k variables aleatorias reales, Y_1, \dots, Y_k . De cada variable aleatoria Y_i se extrae una muestra de n_i elementos independientes e idénticamente distribuidos que Y_i , $\{Y_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, donde $i \in \{1, \dots, k\}$. El tamaño de muestra global viene dado por $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Además, se definen los siguientes momentos muestrales para $i \in \{1, \dots, k\}$:

- $\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/n_i$ es la media muestral en el grupo i .
- $\bar{Y}_{..} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/N$ es la media muestral global.

Levene (1960) sugirió llevar a cabo un ANOVA teniendo en cuenta o bien las variables residuales $Z_i = |Y_i - \bar{Y}_i|$, o bien $Z_i = (Y_i - \bar{Y}_i)^2$, $i \in \{1, \dots, k\}$, definiendo las denominadas *variabilidad entre grupos* (o *suma de cuadrados del factor*, SCF) y *variabilidad intra grupos* (o *suma de cuadrados del error*, SCE) como sigue:

- $\text{SCF} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z}_{..})^2$ que es la variación debida al factor.
- $\text{SCE} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2$ que es la variación debida al error experimental.

Para contrastar la hipótesis $H_0 : \sigma_{Y_1}^2 = \dots = \sigma_{Y_k}^2$ frente a la alternativa $H_1 : \exists i, j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\sigma_{Y_i}^2 \neq \sigma_{Y_j}^2$ al nivel de significación ρ , se considera el estadístico

$$F = \text{SCF}/\text{SCE}. \quad (2.31)$$

En este caso, la hipótesis nula se rechaza siempre y cuando $F > F_{(k-1, N-k, \rho)}$ donde $F_{(k-1, N-k, \rho)}$ es el cuantil de orden $(1 - \rho)$ de la distribución $F_{(k-1, N-k)}$ (F de Snedecor con $k-1$ y $N-k$ grados de libertad). Cabe destacar que este procedimiento es también válido por aproximación cuando las variables involucradas no siguen una distribución normal.

2.2.2. Procedimiento asintótico

La teoría desarrollada por Levene se puede extender con el fin de obtener un test para analizar la igualdad de varianzas de k CDAs. Sean k poblaciones y k CDAs, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$. De cada CDA \mathcal{X}_i se extrae una m.a.s. $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$. Al igual que en la Sección 2.2.1, el tamaño de muestra global se denota por N . La media muestral en el grupo i y la media muestral global se definen como en la teoría clásica. Además:

- La *varianza en la muestra i* se define como $\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}{n_i}$.
- La *cuasivarianza en la muestra i* es igual a $\widehat{S}_{\mathcal{X}_i}^2 = n_i \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 / (n_i - 1)$.
- La *varianza muestral global* viene dada por la expresión $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2}{N}$.

En este caso, se definen las siguientes variables residuales a partir de la métrica generalizada para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, n_i\}$:

$$Z_{ij} = (D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i))^2, \quad (2.32)$$

y los correspondientes momentos muestrales:

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i))^2 = \overline{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2, \quad (2.33)$$

$$\overline{Z}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i))^2 = \overline{\sigma}^2. \quad (2.34)$$

De forma análoga a lo que sucede en el ANOVA clásico, la variación total de los datos se puede expresar por medio de la llamada *suma de cuadrados del total*, SCT, que viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \overline{Z}_{..})^2. \quad (2.35)$$

En la Proposición 2.2.1 se muestra una descomposición de la variación total SCT.

Proposición 2.2.1 *La variación total se puede descomponer en dos términos como sigue:*

$$\text{SCT} = \text{SCE} + \text{SCF} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \overline{Z}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\overline{Z}_i - \overline{Z}_{..})^2 \quad (2.36)$$

donde SCE denota la variación dentro de los grupos debida al error experimental, y SCF es la variación entre grupos debida al factor.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{SCT} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i))^2 - \overline{\sigma}^2 \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i))^2 - \overline{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 + \overline{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \overline{\sigma}^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \bar{\mathcal{X}}_i))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \widehat{\sigma}^2)^2 \\
&+ 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_{ij}, \bar{\mathcal{X}}_i))^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right) (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \widehat{\sigma}^2).
\end{aligned}$$

Es fácil de ver que el último sumando es igual a 0, y que el primero y el segundo se corresponden con SCE y SCF, respectivamente. \square

Con el fin de resolver el contraste (2.30), se define el siguiente estadístico basado en SCF:

$$T_{(n_1, \dots, n_k)} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \widehat{\sigma}^2)^2}{\sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2}. \quad (2.37)$$

Observación 2.2.1 Cabe señalar que el estadístico anterior se puede expresar como una combinación lineal de UH-estadísticos, como se verá en el Teorema 2.2.2 en donde se analiza su distribución límite. Además, se podrían considerar otras alternativas al mismo, como podría ser la siguiente:

$$T_{(n_1, \dots, n_k)} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \widehat{\sigma}^2)^2}{\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2}. \quad (2.38)$$

o bien otros estadísticos basados en el estadístico clásico de Bartlett (por ejemplo, el estadístico de Shoemaker, cuyo estudio empírico se desarrollará en la Sección 2.2.5). Estas alternativas se proponen como futuras líneas de investigación.

Teorema 2.2.2 Sean $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ k CDAs independientes y sea $\{\mathcal{X}_{i1}, \dots, \mathcal{X}_{in_i}\}_{j=1}^{n_i}$ una m.a.s. proveniente de \mathcal{X}_i , para $i \in \{1, \dots, k\}$. Considérese el estadístico definido en (2.37). Bajo la hipótesis nula H_0 , si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, y $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces

$$T_{(n_1, \dots, n_k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sum_{i=1}^k \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_i p_l} Z_l \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))^2}^2}, \quad (2.39)$$

donde $(Z_1, \dots, Z_k)^T \equiv \mathcal{N}_k(\vec{0}, \Sigma)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma = \text{diag}\left(\sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_1, E(\mathcal{X}_1)))}^2, \dots, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_k, E(\mathcal{X}_k)))}^2\right). \quad (2.40)$$

Demostración. Bajo la hipótesis nula, la variación entre grupos tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} SCF &= \sum_{i=1}^k n_i (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \bar{\sigma}^2)^2 \\ &\stackrel{H_0}{=} \sum_{i=1}^k n_i \left[\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_l}^2) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left[\sqrt{n_i} (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_i}^2) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k \sqrt{n_i} \sqrt{n_l} \sqrt{n_l} (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_l}^2) \right]^2. \end{aligned}$$

La última expresión es función de las variables independientes

$$\{\xi_i\}_{i=1}^k = \left\{ \sqrt{n_i} (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_i}^2) \right\}_{i=1}^k \quad (2.41)$$

y se define equivalentemente del siguiente modo:

$$f_n(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{i=1}^k \left(\xi_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{\frac{n_l}{N}} \sqrt{\frac{n_i}{N}} \xi_l \right)^2. \quad (2.42)$$

Por otro lado, se define la función:

$$f(a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k \left(a_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_l p_i} a_l \right)^2. \quad (2.43)$$

Teniendo en cuenta que $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$, es inmediato ver que $f_n(\xi_1, \dots, \xi_k) - f(\xi_1, \dots, \xi_k) \xrightarrow{P} 0$. Además, f es continua por ser combinación de funciones continuas y como en el Teorema 2.1.5 se probó que $\xi_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))}^2\right)$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, se tiene que

$$f(\xi_1, \dots, \xi_k) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(Z_1, \dots, Z_k) = \sum_{i=1}^k \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_i p_l} Z_l \right)^2,$$

donde $(Z_1, \dots, Z_k)^T \equiv \mathcal{N}_k(\vec{0}, \Sigma)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (2.40).

Así, por el Teorema de Slutsky se verifica que $f_n(\xi_1, \dots, \xi_k) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(Z_1, \dots, Z_k)$.

Por otro lado, en el Teorema 2.1.6 se prueba que si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))^2}^2$. De este modo, se obtiene el resultado deseado. \square

De los desarrollos anteriores se concluye el Teorema 2.2.3.

Teorema 2.2.3 *Considérense las condiciones del Teorema 2.2.2. Sean $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica (2.39). Si H_0 en (2.30) es cierta, entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_{(n_1, \dots, n_k)} > k_{1-\rho}) = \rho.$$

Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.30) cuando $T_{(n_1, \dots, n_k)} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Debido a que la distribución límite del estadístico $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ definido en (2.37) no es sencilla de manejar, es necesario recurrir de nuevo a técnicas bootstrap para estudiar la convergencia del test propuesto. En la Sección 2.2.3, se va a desarrollar un procedimiento basado en el bootstrap residual (ver Shao & Tu, 1995) con el fin de contrastar la homocedasticidad de k CDAs.

2.2.3. Procedimiento bootstrap

En primer lugar, se consideran k CDAs, $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^k$, y de cada CDA \mathcal{X}_i se extrae una m.a.s. $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$. Con el fin de conseguir distribuciones que verifiquen la hipótesis nula del contraste (2.30), se modifican las iniciales obteniendo $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^k = \{\widehat{\sigma}^2 \mathcal{X}_i / \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2\}_{i=1}^k$, extrayéndose nuevas muestras de éstas:

$$\{\mathcal{Y}_{ij}\}_{j=1}^{n_i} = \{\widehat{\sigma}^2 \mathcal{X}_{ij} / \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2\}_{j=1}^{n_i} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.44)$$

En este caso, es fácil ver que $\widehat{\sigma}_{\mathcal{Y}_i}^2 = \widehat{\sigma}^2 \forall i \in \{1, \dots, k\}$, verificándose así H_0 . Seguidamente, para cada i se extrae una muestra bootstrap de $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, siendo ésta $\{\mathcal{X}_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i}$, y

se construyen las siguientes muestras bootstrap procedentes de $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^k$:

$$\{\mathcal{Y}_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i} = \{\widehat{\sigma}^2 \mathcal{X}_{ij}^* / \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2\}_{j=1}^{n_i} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.45)$$

Como primera aproximación, para las muestras en (2.45) se calcula el valor del estadístico

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}^* = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{Y}_i^*}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \widehat{\sigma}_{\mathcal{Y}_l^*}^2 \right]^2}{\sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^*}^2 \right]^2}{\sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2},$$

que puede reescribirse equivalentemente de la siguiente forma:

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}^* = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2} (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2} (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^*}^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2) \right]^2}{\sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))^2}^2}. \quad (2.46)$$

Teorema 2.2.4 Con la notación anterior, si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, y $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sum_{i=1}^k \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_i p_l} Z_l \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))^2}^2} \quad \text{c.s.} - [P], \quad (2.47)$$

donde $(Z_1, \dots, Z_k)^T \equiv \mathcal{N}_k(\vec{0}, \Sigma)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (2.40).

Demostración. El estadístico $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$ es función de las variables independientes

$$\{\xi_i^*\}_{i=1}^k = \left\{ \sqrt{n_i} (\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2) \right\}_{i=1}^k \quad (2.48)$$

y está definido como sigue:

$$f_n(\xi_1^*, \dots, \xi_k^*) = \sum_{i=1}^k \left(\xi_i^* - \sum_{l=1}^k \sqrt{\frac{n_l}{N}} \sqrt{\frac{n_i}{N}} \xi_l^* \right)^2. \quad (2.49)$$

Aplicando la teoría desarrollada por Bickel & Friedman (1981),

$$\xi_i^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))}^2\right) \quad c.s. - [P] \quad (2.50)$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Por otro lado, se tiene que $\widehat{\sigma}^2 / \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \xrightarrow{c.s.} 1$, ya que

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[H_0]{c.s.} \sum_{i=1}^k p_i \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 \quad \text{y} \quad \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \xrightarrow[H_0]{c.s.} \sigma_{\mathcal{X}_i}^2.$$

Por tanto, siguiendo un procedimiento análogo al de la demostración del Teorema 2.2.2, y considerando que $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, se tiene la siguiente convergencia:

$$f_n(\xi_1^*, \dots, \xi_k^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(Z_1, \dots, Z_k) = \sum_{i=1}^k \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_i p_l} Z_l \right)^2 \quad c.s. - [P], \quad (2.51)$$

donde $(Z_1, \dots, Z_k)^T \equiv \mathcal{N}_k(\vec{0}, \Sigma)$ con matriz de varianzas-covarianzas la misma que en (2.40). Finalmente, la convergencia del denominador de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$ se ha probado en el Teorema 2.1.6. \square

Como consecuencia del Teorema 2.2.4, se concluye el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5 *Considérense las condiciones del Teorema 2.2.4. Sean $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (2.47). Si H_0 en (2.30) es cierta, entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_{(n_1, \dots, n_k)} > k_{1-\rho}^*) = \rho.$$

Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (2.30) cuando $T_{(n_1, \dots, n_k)} > k_{1-\rho}^$ es asintóticamente correcto.*

Observación 2.2.2 Al igual que sucedía en la aproximación bootstrap para el test de una muestra, la distribución de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$ no es conocida, por lo que una solución a este problema consiste en estimar su distribución por Monte Carlo (y, de este modo, basta trabajar con los numeradores de $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ y $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$).

De nuevo, una segunda aproximación bootstrap consiste en reestimar el denominador de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$. Sean $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^k$ k CDA's independientes y $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ una m.a.s. de \mathcal{X}_i , para $i \in \{1, \dots, k\}$. Para cada i , se considera la población bootstrap $\{\mathcal{Y}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ definida en (2.44). De dicha población se extrae una muestra bootstrap, $\{\mathcal{Y}_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i}$, fijada en (2.45) y se utiliza para reestimar el denominador de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$, obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \hat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{Y}_i^*, \overline{\mathcal{Y}_i^*}))}^2 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left[(D_\theta^\varphi(\mathcal{Y}_{ij}^*, \overline{\mathcal{Y}_i^*}))^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{Y}_i^*}^2 \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4}{n_i \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4} \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{ij}^*, \overline{\mathcal{X}_i^*}))^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene un segundo estadístico bootstrap:

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}^{**} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2} (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2} (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^*}^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2) \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4} \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{ij}^*, \overline{\mathcal{X}_i^*}))^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 \right)^2}. \quad (2.52)$$

A partir de las dos aproximaciones anteriores, se sugieren los siguientes algoritmos.

Algoritmos para los contrastes bootstrap (Test de k muestras)

Considérense en primera instancia los numeradores de los estadísticos $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ y $T_{(n_1, \dots, n_k)}^*$. Los pasos a seguir son los siguientes:

Paso 1. Elegir una muestra aleatoria $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ a partir de cada \mathcal{X}_i , para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Paso 2. Para las muestras anteriores, calcular el valor del estadístico

$$T = \sum_{i=1}^k n_i (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \hat{\sigma}^2)^2.$$

Paso 3. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, obtener una m.a.s. $\{\mathcal{X}_{ij}^*\}_{j=1}^{n_i}$ a partir de $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, y calcular el valor del estadístico bootstrap

$$T^* = \sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2} \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2} \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^*}^2 \right]^2.$$

Paso 4. Repetir el Paso 3 un gran número B de veces con el fin de conseguir un conjunto de B estimaciones denotado por T_1^*, \dots, T_B^* .

Paso 5. Calcular el p -valor bootstrap como la proporción de valores en T_1^*, \dots, T_B^* mayores o iguales que T .

En relación con la segunda aproximación bootstrap, se consideran los estadísticos $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ y $T_{(n_1, \dots, n_k)}^{**}$. El algoritmo es análogo al anterior variando los Pasos 2 y 3 como sigue:

Paso 2.* Para la muestra inicial calcular el valor del estadístico

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \bar{\sigma}^2)^2}{\sum_{i=1}^k \hat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \bar{\mathcal{X}}_i))}^2}$$

Paso 3.* Obtener una muestra de n variables aleatorias e idénticamente distribuidas $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$ de la población $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ y calcular el valor del estadístico bootstrap

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \frac{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^*}^2}{\hat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2} \right]^2}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4} \sum_{j=1}^{n_i} \left((D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{ij}^*, \bar{\mathcal{X}}_{i.}^*))^2 - \hat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^*}^2 \right)^2}$$

Debido a las dificultades de manejo que presenta la distribución asintótica del estadístico $T_{(n_1, \dots, n_k)}$, a continuación se plantea otro modo de resolver el contraste específico de igualdad de varianzas de dos poblaciones haciendo uso de los resultados presentados en las secciones previas.

2.2.4. Caso particular: test de 2 muestras

Considérense dos CDAs independientes, \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 , así como dos m.a.s. de tamaño n_1 y n_2 extraídas de ellas, $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ para $i \in \{1, 2\}$. Asimismo, sea N el tamaño muestral global.

En este caso, se pretende resolver el test

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_2}^2 & \text{frente a} \\ H_1 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 \neq \sigma_{\mathcal{X}_2}^2. \end{cases} \quad (2.53)$$

Para contrastar las hipótesis (2.53), se considera el siguiente estadístico:

$$T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)} = \frac{\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_1}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}_2}^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_1, \overline{\mathcal{X}_1}))}^2 + \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_2, \overline{\mathcal{X}_2}))}^2}}. \quad (2.54)$$

En el Teorema 2.2.6 se analiza el comportamiento asintótico de $T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}$ bajo la hipótesis nula.

Teorema 2.2.6 *Si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$ para $i \in \{1, 2\}$ y $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$, para $i \in \{1, 2\}$, entonces*

$$T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)} \xrightarrow[H_0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.55)$$

Demostración. Aplicando la teoría de UH-estadísticos introducida en Hoeffding (1948) al caso bidimensional y teniendo en cuenta los resultados para el test de una muestra desarrollados en la Sección 2.1.1, es claro que:

$$(\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_1}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_1}^2), \sqrt{n_2}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_2}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_2}^2))^T \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma),$$

con $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_1, E(\mathcal{X}_1)))}^2, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_2, E(\mathcal{X}_2)))}^2)$.

Mediante el empleo de las propiedades de la distribución normal multivariante, se puede concluir que:

$$\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_1}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_1}^2) - \sqrt{n_2}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_2}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_2}^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_1, E(\mathcal{X}_1)))}^2 + \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_2, E(\mathcal{X}_2)))}^2\right).$$

Además, como n_1 y n_2 diverge a infinito a la misma velocidad, entonces:

$$\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{\mathcal{X}_1}^2 - \widehat{S}_{\mathcal{X}_2}^2 - (\sigma_{\mathcal{X}_1}^2 - \sigma_{\mathcal{X}_2}^2)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_1, E(\mathcal{X}_1)))}^2 + \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_2, E(\mathcal{X}_2)))}^2\right).$$

Por tanto, bajo la hipótesis nula que asegura que $\sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_2}^2$, se tiene el resultado buscado. \square

Observación 2.2.3 El Teorema 2.2.6 es también válido cuando se consideran dos CDAs \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 dependientes. En este caso, se puede utilizar la matriz de varianzas-covarianzas con el fin de obtener un resultado análogo.

Observación 2.2.4 Recurriendo al procedimiento clásico para contrastar la igualdad de varianzas de dos variables aleatorias normales, se tiene la siguiente equivalencia. Sean Y_1 e Y_2 dos variables aleatorias reales que siguen distribuciones normales, de manera que $Y_1 \equiv \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{Y_1}^2)$ e $Y_2 \equiv \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_{Y_2}^2)$. De cada variable se extrae una m.a.s., $\{Y_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, para $i \in \{1, 2\}$, donde n_1 y n_2 divergen a infinito a la misma velocidad. Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \sigma_{Y_1}^2 = \sigma_{Y_2}^2$ frente a la alternativa $H_0 : \sigma_{Y_1}^2 \neq \sigma_{Y_2}^2$, se utiliza el estadístico

$$\mathcal{F}_{(Y_1, Y_2)} = \frac{\widehat{S}_{Y_1}^2}{\widehat{S}_{Y_2}^2} \quad (2.56)$$

que se distribuye como una F de Snedecor con $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ grados de libertad. Además, cabe resaltar que si \mathcal{F} sigue una distribución $F_{(d_1, d_2)}$ de Snedecor, entonces $(\mathcal{F} - E(\mathcal{F}))/\sigma_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ si $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$, para $i \in \{1, 2\}$, donde

$$E(\mathcal{F}) = \frac{d_2}{d_2 - 2} \quad \text{y} \quad \sigma_{\mathcal{F}}^2 = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}.$$

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{\mathcal{F}_{(Y_1, Y_2)} - \frac{n_2 - 1}{n_2 - 3}}{\sqrt{\frac{2(n_2 - 1)^2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_1 - 1)(n_2 - 3)^2(n_2 - 5)}}} = \frac{\mathcal{F}_{(Y_1, Y_2)} - 1}{\sqrt{\frac{2(n_2 - 1)^2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_1 - 1)(n_2 - 3)^2(n_2 - 5)}}} + \frac{1 - \frac{n_2 - 1}{n_2 - 3}}{\sqrt{\frac{2(n_2 - 1)^2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_1 - 1)(n_2 - 3)^2(n_2 - 5)}}}$$

converge en ley a una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. El segundo sumando de la expresión anterior converge a 0 cuando n_1 y n_2 divergen a infinito y, por tanto, basta centrarse en el primero

de ellos que se puede escribir, equivalentemente, como sigue:

$$\frac{\mathcal{F}_{(Y_1, Y_2)} - 1}{\sqrt{\frac{2(n_2 - 1)^2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_1 - 1)(n_2 - 3)^2(n_2 - 5)}}} = \frac{\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{Y_1}^2 - \widehat{S}_{Y_2}^2)}{2\sigma_{Y_2}^2} \cdot A_{(n_1, n_2)},$$

donde

$$A_{(n_1, n_2)} = \frac{2\sigma_{Y_2}^2 \sqrt{(n_1 - 1)}}{\widehat{S}_{Y_2}^2 \sqrt{n_1} \sqrt{\frac{2(n_2 - 1)^2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_2 - 3)^2(n_2 - 5)}}} \xrightarrow[n_1, n_2 \rightarrow \infty]{c.s.} 1.$$

Así,

$$T_{(Y_1, Y_2)} = \frac{\sqrt{n_1}(\widehat{S}_{Y_1}^2 - \widehat{S}_{Y_2}^2)}{2\sigma_{Y_2}^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

De este modo, comparando $T_{(Y_1, Y_2)}$ con el estadístico $T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}$ definido para CDAs en (2.54) (considerando las varianzas de las distancias poblacionales, sin estimar), se observa que los numeradores son iguales. Además, como se vio en la Observación 2.1.2, si $Y \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma_Y)$ entonces $\sigma_{(D_{\theta}^{\varphi}(Y, E(Y)))}^2 = 2\sigma_Y^4$. Así, bajo la hipótesis nula de (2.53) y suponiendo normalidad, los denominadores también coinciden, y los dos estadísticos son equivalentes.

Observación 2.2.5 La relación existente entre el estadístico $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ definido en (2.37) y $T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}$ introducido en (2.54) se basa en que el primero puede verse, salvo constantes normalizadoras, como el cuadrado del segundo cuando se particulariza al caso de dos muestras.

2.2.5. Estudios de simulación

En esta sección se desarrollan varias simulaciones comparativas para ilustrar el comportamiento de los tests propuestos para tamaños de muestra finitos. En este caso se va a trabajar únicamente con CDAs trapezoidales, pudiendo hacerse un estudio análogo al

presentado en la Sección 1.4.2 utilizando el método de generación de CDAs conociendo su esperanza.

Específicamente, se tienen tres CDAs trapezoidales, $\mathcal{X}_i \equiv Tra(a_i, b_i, c_i, d_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, que se simularán según lo establecido en la Sección 1.4.1. Teniendo en cuenta que $l_i = b_i - a_i$ y $r_i = d_i - c_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, se consideran las siguientes distribuciones independientes:

- $l_1 = b_1 - a_1 \equiv \chi_3^2$, $b_1 \equiv U(0, 1)$, $c_1 \equiv U(1, 2)$ y $r_1 = d_1 - c_1 \equiv \chi_8^2$;
- $l_2 = b_2 - a_2 \equiv \chi_8^2$, $b_2 \equiv U(-2, -1)$, $c_2 \equiv U(1, 2)$ y $r_2 = d_2 - c_2 \equiv \chi_3^2$;
- $l_3 = b_3 - a_3 \equiv \chi_5^2$, $b_3 \equiv U(1, 2)$, $c_3 \equiv U(2, 3)$ y $r_3 = d_3 - c_3 \equiv \chi_6^2$.

Los valores esperados de los anteriores CDAs son: $E(\mathcal{X}_1) = Tra(-2.5, 0.5, 1.5, 9.5)$, $E(\mathcal{X}_2) = Tra(-9.5, -1.5, 1.5, 4.5)$ y $E(\mathcal{X}_3) = Tra(-3.5, 1.5, 2.5, 8.5)$.

El objetivo se centra en comparar los estadísticos T_L y T_S . T_L es una notación reducida para el estadístico $T_{(n_1, \dots, n_k)}$ definido en (2.37), y T_S denota una extensión para CDAs del estadístico de tipo Bartlett desarrollado por Shoemaker (2003). Teniendo en cuenta el Apéndice 1 en Shoemaker (2003) y la Proposición 2.1.3, la generalización T_S puede definirse como sigue:

$$T_S = \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4 (\ln \widehat{S}_{\mathcal{X}_i}^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \widehat{S}_{\mathcal{X}_i}^2)^2}{\widehat{\sigma}_{(D_{\theta}^{\varphi}(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}_i}))}^2 + \frac{2\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^4}{n_i - 1}} \right). \quad (2.57)$$

Shoemaker (2003) ha probado que T_S se distribuye aproximadamente como una χ_{k-1}^2 para variables aleatorias reales. El estudio teórico del test de Shoemaker cuando se trabaja con CDAs es difícil de llevar a cabo debido a las dificultades para encontrar la distribución límite de $\sqrt{n_i} \ln \widehat{S}_{\mathcal{X}_i}^2$. Tal estudio constituirá una nueva línea de investigación para afrontar en futuros trabajos. A continuación se compararán empíricamente los estadísticos T_S y T_L .

En este contexto, se han aplicado técnicas bootstrap para contrastar la igualdad de varianzas de \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 mediante el empleo de los estadísticos de Shoemaker y Levene para CDAs. Para ello, se considerará la segunda aproximación bootstrap que incluye el denominador y que fue propuesta en la Sección 2.2.3. Debido a que la varianza y los estadísticos de contraste están definidos en términos de la distancia generalizada D_θ^φ , se va a evaluar el efecto de la elección de los valores de θ y φ dentro de la familia de métricas. Concretamente, se han considerado los mismos valores de θ y φ utilizados en el Ejemplo 1.2.1, es decir:

$$\theta \in \{1/10, 1/3, 1\},$$

$$\varphi \in \{\beta(3, 1), \lambda, \beta(1, 3)\}.$$

De acuerdo con la expresión (1.25), las varianzas de \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 son iguales y para las elecciones anteriores de θ y φ toman los valores mostrados en la Tabla 2.12.

	$\varphi \equiv \beta(3, 1)$	$\varphi \equiv \lambda$	$\varphi \equiv \beta(1, 3)$
$\theta = 1/10$	0.6431	2.0625	3.71
$\theta = 1/3$	0.79	2.5	4.45
$\theta = 1$	1.18	3.75	6.68

Tabla 2.12: Varianzas de \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 según θ y φ

En primer lugar se presentan los resultados correspondientes al test bootstrap para la igualdad de las tres varianzas, donde se han realizado 10000 simulaciones al nivel de significación $\rho = 0.05$ y con 1000 réplicas bootstrap por simulación. Esta elección implica un error muestral del 0.427% con un nivel de confianza del 95%. Además, los resultados para tamaños de muestra iguales (diseño balanceado) y distintos, teniendo en cuenta los tres valores de θ , se reflejan en las Tablas 2.13, 2.14 y 2.15 (cada una de ellas correspondiente a una elección de φ).

A partir de estas simulaciones se puede concluir que todos los casos muestran un comportamiento similar, y que mejoran para muestras del mismo tamaño moderado/grande. La versión bootstrap del test de Shoemaker para CDAs también presenta un buen com-

$$T_L/T_S (\varphi = \beta(3, 1))$$

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2, n_3)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	3.02/5.76	2.97/6.03	3.18/5.95	(10,15,20)	3.15/5.75	3.42/5.84	3.70/5.64
30	3.86/5.54	3.47/5.08	3.61/5.72	(30,40,30)	3.85/5.34	4.15/5.58	3.58/5.24
50	4.38/5.50	4.39/5.52	4.38/5.50	(75,55,45)	4.12/4.91	4.48/5.45	4.66/5.94
100	4.83/5.21	4.63/5.34	4.52/5.30	(100,100,150)	4.87/5.43	4.86/5.37	4.60/5.23
200	5.04/5.16	4.93/5.18	4.83/5.17	(200,180,230)	4.87/4.97	4.96/5.13	4.88/5.14

Cuadro 2.13: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(3, 1)$) para $\rho = 0.05$

$$T_L/T_S (\varphi = \lambda)$$

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2, n_3)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	2.96/5.82	3.05/6.09	3.45/6.03	(10,15,20)	3.26/5.36	3.33/5.53	3.66/6.03
30	3.72/5.20	3.70/5.52	3.73/5.44	(30,40,30)	3.94/5.72	3.91/5.53	3.48/5.44
50	4.34/5.76	4.18/5.29	4.44/5.72	(75,55,45)	4.29/5.57	4.39/5.45	4.35/5.41
100	4.74/5.20	4.72/5.12	4.65/5.35	(100,100,150)	4.43/5.06	4.87/5.55	4.74/5.26
200	4.82/4.94	4.97/4.96	4.85/5.25	(200,180,230)	4.89/4.95	4.96/4.96	5.07/5.15

Tabla 2.14: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \lambda$) para $\rho = 0.05$

portamiento empírico, aunque T_L es más conservador y, por tanto, su uso puede resultar más conveniente.

Por otro lado, se han llevado a cabo 10000 simulaciones del procedimiento asintótico para el test de dos muestras utilizando el estadístico $T_{(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}$ introducido en (2.54). En este caso no se hacen comparaciones con el estadístico de Shoemaker puesto que no se conoce su distribución asintótica. De nuevo, el error muestral cometido es del 0.427% al 95%. Al igual que antes, se consideran diferentes valores de θ y φ para la distancia

$$T_L/T_S (\varphi = \beta(1, 3))$$

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2, n_3)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	3.34/5.77	2.96/5.86	3.37/6.02	(10,15,20)	3.19/5.14	3.39/5.77	3.76/5.74
30	3.51/5.54	3.59/5.14	3.56/5.38	(30,40,30)	3.69/5.06	3.59/5.14	3.81/5.61
50	4.47/5.49	4.11/5.39	4.06/5.36	(75,55,45)	4.01/5.26	4.06/5.36	4.13/5.51
100	4.69/5.34	4.55/5.32	4.49/5.37	(100,100,150)	4.68/5.15	4.55/5.32	4.52/5.17
200	4.86/5.17	4.87/5.12	4.91/5.15	(200,180,230)	5.07/5.30	4.96/5.05	4.98/5.29

Tabla 2.15: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la homocedasticidad de 3 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(1, 3)$) para $\rho = 0.05$

D_θ^φ . Asimismo, los resultados al nivel de significación $\rho = 0.05$ para tamaños de muestra iguales y distintos se recogen en las Tablas 2.16, 2.17 y 2.18.

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	12.88	12.95	13.93	(10,15)	11.93	11.59	12.27
30	7.05	6.59	7.46	(30,15)	9.54	9.44	9.92
50	5.68	5.35	6.26	(65,45)	5.92	6.29	6.62
100	5.74	5.21	5.85	(80,125)	5.61	5.83	5.60
200	5.25	5.35	4.97	(150,250)	5.35	5.31	5.21
300	4.99	5.21	5.18	(300,500)	5.24	5.13	5.52

Tabla 2.16: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(3, 1)$) para $\rho = 0.05$

Como consecuencia de los resultados que se muestran en las Tablas 2.17, 2.18 y 2.16, se concluye que si los tamaños de muestra considerados son moderados o grandes y similares en todos los casos, el porcentaje de rechazos bajo la hipótesis nula está cerca del nivel de significación nominal. A pesar de este hecho, aunque este procedimiento es más sencillo de aplicar en la práctica que el general para dos muestras, resulta más conveniente

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	13.57	12.62	14.17	(10,15)	12.90	12.24	12.76
30	6.85	6.67	7.08	(30,15)	10.44	10.26	10.14
50	6.40	5.90	6.88	(65,45)	6.22	6.40	6.04
100	5.70	5.79	5.82	(80,125)	5.93	5.70	6.20
200	5.06	4.96	5.07	(150,250)	5.34	5.13	5.32
300	5.12	4.87	5.06	(300,500)	4.88	5.23	5.11

Tabla 2.17: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \lambda$) para $\rho = 0.05$

diseño balanceado				diseño no balanceado			
n_i	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$	(n_1, n_2)	$\theta=1/10$	$\theta=1/3$	$\theta=1$
10	12.15	11.57	12.20	(10,15)	11.80	11.69	11.89
30	7.31	7.02	7.16	(30,15)	9.44	9.16	9.57
50	5.94	6.29	6.15	(65,45)	6.34	6.13	6.23
100	5.42	5.31	5.58	(80,125)	5.77	5.61	5.92
200	5.09	5.11	5.26	(150,250)	5.48	5.35	5.83
300	5.18	5.34	5.02	(300,500)	4.94	5.09	5.24

Tabla 2.18: Tamaño empírico de los tests bootstrap para la igualdad de varianzas de 2 CDAs trapezoidales ($\varphi = \beta(1, 3)$) para $\rho = 0.05$

el empleo del procedimiento bootstrap introducido en la Sección 2.2.3 cuando se trabaja con muestras de tamaño moderado.

Cabe destacar que el coste computacional necesario para desarrollar las simulaciones anteriores es menor cuando se considera la medida de Lebesgue λ como medida φ . Esto se debe a que en este caso es posible obtener una expresión más sencilla, dada en la ecuación (1.13), para la distancia D_θ^λ entre números difusos trapezoidales.

2.2.6. Aplicación práctica

Uno de los requerimientos que exige la permanencia de la mención de Denominación de Origen del queso Gamonedo en relación con el Ejemplo 2.1.4 se basa en el acuerdo entre varios expertos acerca de las características que poseen los quesos. En este sentido, se puede abordar un análisis de igualdad de varianzas e igualdad de medias de las opiniones de tales expertos. Específicamente, el interés se va a centrar en examinar la calidad del olor de los quesos producidos y se va a aplicar el test de igualdad de varianzas para dos muestras del mismo tamaño, y el test de homocedasticidad para muestras de tamaño desigual. De este modo, se consideran las opiniones sobre tal calidad dadas por tres expertos diferentes, de manera que se tienen 25 opiniones de los Expertos 1 y 2, y 20 del Experto 3. Así, se tienen los siguientes CDAs:

- $\mathcal{X}_1 \equiv$ “percepción del Experto 1 sobre la calidad del olor de cada queso”;
- $\mathcal{X}_2 \equiv$ “percepción del Experto 2 sobre la calidad del olor de cada queso”;
- $\mathcal{X}_3 \equiv$ “percepción del Experto 3 sobre la calidad del olor de cada queso”.

El Experto 3 es el mismo considerado en el Ejemplo 2.1.4, y sus opiniones acerca del olor del queso vienen dadas en la Tabla 2.11. En la Tabla 2.19 se recogen las muestras correspondientes a los Expertos 1 y 2.

En primer lugar, para analizar la igualdad de varianzas de CDAs, se plantea el test de homocedasticidad propuesto en esta memoria. Para ello se plantea un test de igualdad de varianzas teniendo en cuenta las muestras de opiniones sobre dicha calidad de dos y tres catadores. En un primer estudio, se estudia la igualdad de varianzas de las opiniones sobre la calidad de los quesos producidos dadas por los Expertos 1 y 2. Al igual que en los desarrollos correspondientes a la Sección 2.1.4, se consideran las distancias D_1^λ y D_{10}^λ . La finalidad es resolver el contraste

$$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_2}^2 \text{ frente a } H_1 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 \neq \sigma_{\mathcal{X}_2}^2.$$

Opinión	Experto 1	Experto 2
1	$Tra(47, 50, 53, 60)$	$Tra(50, 50, 57, 66)$
2	$Tra(65, 67, 70, 80)$	$Tra(50, 50, 57, 66)$
3	$Tra(50, 55, 60, 65)$	$Tra(20, 25, 33, 40)$
4	$Tra(70, 74, 80, 90)$	$Tra(46, 48, 55, 58)$
5	$Tra(50, 60, 67, 75)$	$Tra(54, 58, 70, 81)$
6	$Tra(40, 47, 53, 60)$	$Tra(52, 60, 70, 80)$
7	$Tra(74, 80, 84, 90)$	$Tra(40, 47, 52, 54)$
8	$Tra(64, 68, 72, 80)$	$Tra(50, 51, 60, 65)$
9	$Tra(70, 74, 80, 90)$	$Tra(60, 67, 82, 90)$
10	$Tra(50, 54, 60, 65)$	$Tra(50, 50, 55, 65)$
11	$Tra(50, 55, 60, 66)$	$Tra(50, 50, 57, 60)$
12	$Tra(64, 70, 74, 80)$	$Tra(50, 50, 53, 56)$
13	$Tra(36, 44, 50, 56)$	$Tra(59, 69, 81, 87)$
14	$Tra(60, 65, 74, 80)$	$Tra(45, 48, 52, 55)$
15	$Tra(70, 75, 82, 86)$	$Tra(70, 80, 90, 99)$
16	$Tra(75, 80, 86, 90)$	$Tra(69, 79, 93, 95)$
17	$Tra(45, 49, 56, 60)$	$Tra(10, 10, 22, 41)$
18	$Tra(73, 78, 83, 86)$	$Tra(50, 50, 55, 60)$
19	$Tra(50, 55, 60, 68)$	$Tra(40, 47, 50, 56)$
20	$Tra(44, 49, 53, 60)$	$Tra(40, 46, 50, 56)$
21	$Tra(50, 50, 56, 66)$	$Tra(70, 80, 95, 100)$
22	$Tra(53, 57, 61, 70)$	$Tra(30, 37, 43, 50)$
23	$Tra(70, 77, 84, 84)$	$Tra(52, 60, 68, 71)$
24	$Tra(30, 36, 43, 50)$	$Tra(57, 62, 70, 75)$
25	$Tra(60, 64, 70, 80)$	$Tra(53, 60, 66, 73)$

Tabla 2.19: Muestra de opiniones de 3 expertos acerca de la calidad del olor de varios quesos

Las correspondientes varianzas muestrales vienen dadas por $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 = 150.5865$ y $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_2}^2 = 246.2334$ para D_1^λ , y por $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 = 159.4005$ y $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_2}^2 = 311.5437$ para D_{10}^λ . Debido a que el tamaño de muestra es pequeño, se aplica el procedimiento bootstrap que incluye el denominador desarrollado en la Sección 2.2.3, que conduce a un p -valor de $p = 0.2396$ para D_1^λ y de $p = 0.0795$ para D_{10}^λ . Se concluye que en el primero de los casos no se rechaza H_0 a los niveles de significación usuales, por lo que las opiniones de ambos expertos acerca de la calidad del olor de los quesos producidos presentan la misma variabilidad. Por otro lado, cuando se utiliza D_{10}^λ se tiene que H_0 no se rechaza a los niveles $\rho = 0.05$ y $\rho = 0.01$ y sí que se rechaza para $\rho = 0.1$. A la vista de los estudios realizados, se deriva que el hecho de dar más peso con θ a la variabilidad entre los spreads de los valores difusos (asociados con la imprecisión) hace que al nivel $\rho = 0.1$ se detecten diferencias que no se detectan cuando $\theta = 1$.

En un segundo estudio se incluyen las opiniones del Experto 3, y se analiza la igualdad de varianzas de las percepciones de los tres expertos. Al igual que antes se consideran las distancia D_1^λ y D_{10}^λ . Se pretende resolver

$$H_0 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_2}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_3}^2 \text{ frente a } \exists i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ tal que } \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 \neq \sigma_{\mathcal{X}_j}^2.$$

La varianza de la tercera muestra viene dada por $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_3}^2 = 92.7820$ cuando se considera D_1^λ y $\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_3}^2 = 100.8312$ para D_{10}^λ . Aplicando de nuevo el procedimiento bootstrap para la homocedasticidad de varios CDAs se obtiene un p -valor de $p = 0.0894$ para D_1^λ y de $p = 0.0179$ para D_{10}^λ . Por tanto, en el primer caso no se rechaza la hipótesis nula a los niveles $\rho = 0.05$ y $\rho = 0.01$, pero sí al nivel $\rho = 0.1$, mientras que en el segundo caso se rechaza para $\rho = 0.05$ y $\rho = 0.1$ y no se rechaza para $\rho = 0.01$. En este caso, si el valor de θ es más grande se detectan diferencias al nivel $\rho = 0.05$.

A partir de los estudios realizados se puede concluir que no se rechaza la igualdad de varianzas de las opiniones de los tres expertos si se considera un nivel de significación $\rho = 0.01$, por lo que en este caso se podría mantener la Denominación de Origen del queso Gamonedo. Sin embargo, si se considera un nivel de significación $\rho = 0.05$, la hipótesis nula no se rechaza si $\theta = 1$ y sí en el caso $\theta = 10$. Como se puede observar, los resultados

obtenidos dependen de la importancia que se quiera dar a la imprecisión y, por este motivo, resultaría interesante en el futuro realizar un análisis de sensibilidad profundo relativo a las diferentes elecciones de θ .

Debido a que la hipótesis de homocedasticidad no se rechaza al nivel $\rho = 0.05$ cuando se considera la distancia D_1^λ , se va a realizar el contraste ANOVA para la igualdad de medias de los tres CDAs desarrollado por González-Rodríguez *et al.* (2010) con esa distancia específica. El test a resolver es:

$$H_0 : E(\mathcal{X}_1) = E(\mathcal{X}_2) = E(\mathcal{X}_3) \text{ frente a } \exists i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ tal que } E(\mathcal{X}_i) \neq E(\mathcal{X}_j).$$

Para ello, se considera el siguiente estadístico:

$$A_n = \sum_{i=1}^3 n_i (D_1^\lambda(\overline{\mathcal{X}}_i, \overline{\mathcal{X}}_{..}))^2.$$

En este caso particular, las medias muestrales anteriores vienen dadas por

$$\overline{\mathcal{X}}_1 = Tra(56.4, 61.32, 66.84, 73.48), \quad \overline{\mathcal{X}}_2 = Tra(58.5, 63.7, 69.05, 74.85),$$

$$\overline{\mathcal{X}}_3 = Tra(48.68, 53.36, 61.44, 67.96) \text{ y } \overline{\mathcal{X}}_{..} = Tra(54.2429, 59.1571, 65.5429, 71.9).$$

A continuación se aplica el test bootstrap propuesto en González-Rodríguez *et al.* (2010), obteniendo un p -valor de $p = 0.05824$. Por tanto, la hipótesis de igualdad de medias se rechazaría para un nivel de significación $\rho = 0.1$ pero no se rechazaría a los niveles $\rho = 0.05$ y $\rho = 0.01$. Como conclusión, si se elige la distancia D_1^λ se podría mantener la Denominación de Origen del queso Gamonedo de acuerdo con este criterio.

Otras aplicaciones

- En el caso de la detección de una enfermedad cardíaca en un paciente específico, es posible comparar la fluctuación de su tensión a lo largo de un tiempo con la de un paciente que esté completamente sano, con el fin de determinar un desajuste cardíaco. Para ello, además de un análisis de igualdad de medias, se realizaría un

contraste de igualdad de varianzas de la tensión (intervalar) del paciente sano y el que se pretende diagnosticar.

- Por otro lado, puede resultar útil comparar si el movimiento de las mareas en un determinado punto es similar al detectado en otro punto. Con este fin, se pueden comparar las medias de los valores obtenidos así como analizar si la variabilidad del movimiento en ambos puntos es similar o no.

2.3. Potencia de los tests propuestos

Con el objetivo de analizar la eficiencia de los tests propuestos a lo largo de este capítulo, se va a realizar un estudio sobre la potencia de los mismos. Como es bien sabido, en muchas ocasiones la potencia de un test resulta difícil de tratar. Un modo de afrontar este problema consiste en recurrir a las llamadas *alternativas locales*, una serie de hipótesis alternativas que convergen a la hipótesis nula a medida que el tamaño de muestra aumenta. Este tipo de alternativas se emplea normalmente con el objeto de determinar la sensibilidad de un determinado test bajo pequeñas desviaciones con respecto a la hipótesis nula.

2.3.1. Potencia de los tests de una muestra

Sea \mathcal{X} un CDA que satisface que $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$ y $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$. Asimismo, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ una m.a.s. obtenida a partir de \mathcal{X} , y considérese una ‘corrección’ $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}$ de $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ definida del siguiente modo

$$\mathcal{X}_i^{[n]} = \sqrt{1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}}} \mathcal{X}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.58)$$

con el fin de conseguir CDAs cuya varianza sea

$$\sigma_{\mathcal{X}_i^{[n]}}^2 = \sigma_n^2 = \left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sigma_0^2, \quad (2.59)$$

donde $a_n \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$. De este modo, si $|a_n| \nearrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$, la sucesión de varianzas $\{\sigma_n^2\}_n$ converge a σ_0^2 cuando el tamaño de muestra n tiende a infinito. Así, la hipótesis nula no se cumple, pero la sucesión de alternativas se aproxima a ella a medida que n tiende a infinito. En el Teorema 2.3.1 se prueba que la potencia bajo esas alternativas locales converge a 1.

Teorema 2.3.1 *En las condiciones anteriores, si el procedimiento asintótico presentado en la Sección 2.1.1 se aplica al nivel de significación ρ a la sucesión de muestras corregidas $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}_n$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n^{[n]}| > t_{(1-\rho)/2}) = 1, \quad (2.60)$$

donde

$$T_n^{[n]} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^{[n]}}^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]})})}^2}}. \quad (2.61)$$

Demostración. Debido a que

$$\overline{\mathcal{X}_n^{[n]}} = \sqrt{1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}}} \overline{\mathcal{X}_n}, \quad \widehat{S}_{\mathcal{X}^{[n]}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(D_\theta^\varphi \left(\mathcal{X}_i^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]}} \right) \right)^2,$$

y

$$\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}^{[n]}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(D_\theta^\varphi \left(\mathcal{X}_i^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]}} \right) \right)^2, \quad \widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]})})}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(D_\theta^\varphi \left(\mathcal{X}_i^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]}} \right) \right)^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}^{[n]}}^2 \right)^2,$$

el estadístico de contraste puede escribirse como

$$T_n^{[n]} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{S}_{\mathcal{X}^{[n]}}^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}^{[n]}, \overline{\mathcal{X}_n^{[n]})})}^2}} = \frac{\sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_0^2 \right]}{\left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})})}^2}}.$$

Se introduce el término σ_n^2 sumando y restando en la expresión anterior, obteniendo:

$$T_n^{[n]} = \frac{\sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \sigma_n^2 \right]}{\left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})})}^2}} + \frac{\sqrt{n} [\sigma_n^2 - \sigma_0^2]}{\left(1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})})}^2}}. \quad (2.62)$$

El primer sumando coincide con el estadístico $T_n^{H_0}$ definido en (2.20) y, como se vio en el Teorema 2.1.7, converge a una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Además, las condiciones $|a_n| \nearrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ implican la divergencia a infinito del valor absoluto del segundo sumando. Por tanto, $|T_n^{[n]}| \rightarrow \infty$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n^{[n]}| > t_{(1-\rho)/2}) = 1$. \square

La consistencia de los tests unilaterales para la varianza de un CDA se puede probar utilizando argumentos análogos a los del Teorema 2.3.1. El resultado es el siguiente:

Teorema 2.3.2 *Sea \mathcal{X} un CDA que satisface que $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$ y $E(\|s_{\mathcal{X}}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ una m.a.s. a partir de \mathcal{X} . Considérese el estadístico $T_n^{[n]}$ definido en (2.61), así como una sucesión tal que $a_n \in (-1, \infty)$, $a_n \rightarrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$.*

- i) *Para resolver el contraste (2.2), considérese una muestra corregida $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}$ de $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$ tal que*

$$\mathcal{X}_i^{[n]} = \sqrt{1 + \frac{a_n}{\sqrt{n}}} \mathcal{X}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

(con $\sigma_{\mathcal{X}_i^{[n]}}^2 = \sigma_n^2 = (1 + a_n/\sqrt{n}) \sigma_0^2$). Entonces, si el procedimiento asintótico de contraste presentado en la Sección 2.1.1 se aplica al nivel de significación ρ a $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}_n$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{[n]} > t_{1-\rho}) = 1. \quad (2.63)$$

- ii) *Para resolver el contraste (2.3), considérese una muestra corregida $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}$ de $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$, tal que*

$$\mathcal{X}_i^{[n]} = \sqrt{1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}} \mathcal{X}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

(con $\sigma_{\mathcal{X}_i^{[n]}}^2 = \sigma_n^2 = (1 - a_n/\sqrt{n}) \sigma_0^2$). Entonces, si el procedimiento asintótico de contraste presentado en la Sección 2.1.1 se aplica al nivel de significación ρ a $\{\mathcal{X}_1^{[n]}, \dots, \mathcal{X}_n^{[n]}\}_n$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{[n]} < t_{\rho}) = 1. \quad (2.64)$$

Demostración.

i) Siguiendo el procedimiento de demostración utilizado en el Teorema 2.3.1, el desarrollo del estadístico $T_n^{[n]}$ al introducir sumando y restando el término $\sigma_n^2 = (1 + a_n/\sqrt{n}) \sigma_0^2$, coincide con (2.62). De nuevo, el primer sumando converge en ley a una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, y el segundo, tiende a infinito debido a que $a_n \rightarrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ cuando el tamaño de muestra aumenta. Por tanto, $T_n^{[n]} \rightarrow \infty$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{[n]} > t_{1-\rho}) = 1$.

ii) En este caso, cuando se introduce $\sigma_n^2 = (1 - a_n/\sqrt{n}) \sigma_0^2$ en el estadístico $T_n^{[n]}$, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$T_n^{[n]} = \frac{\sqrt{n} \left[\left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \widehat{S}_{\mathcal{X}}^2 - \left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sigma_0^2 \right]}{\left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})^2)}}} + \frac{\sqrt{n} \left[\left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sigma_0^2 - \sigma_0^2 \right]}{\left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})^2)}}}.$$

El primer sumando coincide de nuevo con el estadístico $T_n^{H_0}$, por lo que converge a una variable $\mathcal{N}(0, 1)$. El segundo sumando, que se denotará por A_n , tiene la siguiente expresión:

$$A_n = \frac{-\sigma_0^2 a_n}{\left(1 - \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{\widehat{\sigma}_{D_k^2(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}_n})}}}$$

Teniendo en cuenta que $a_n \rightarrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es obvio que $A_n \rightarrow -\infty$. De este modo, $T_n^{[n]} = T_n^{H_0} + A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ y, por tanto, se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{[n]} < t_\rho) = 1$.

□

Observación 2.3.1 El Teorema 2.3.1 muestra que para cualquier sucesión $\{a_n\}_n$, tal que $a_n \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, $|a_n| \nearrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$, entonces $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma_0^2$ puntualmente, y el procedimiento asintótico presentado en la Sección 2.1.1 detecta la diferencia con respecto a la hipótesis nula *c.s.* - $[P]$. Por otro lado, el Teorema 2.3.2 indica el mismo resultado para los tests unilaterales, considerando cualquier sucesión $\{a_n\}_n$, tal que $a_n \in (-1, \infty)$, $a_n \rightarrow \infty$ y $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2.3.2. Potencia del test de homocedasticidad

Sean $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_k$ k CDAs independientes que cumplen $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 = \dots = \sigma_{\mathcal{X}_k}^2$. Para $n_i \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ una m.a.s. obtenida a partir de \mathcal{X}_i , y considérese una ‘corrección’ $\{\mathcal{X}_{ij}^{[n_i]}\}_{j=1}^{n_i}$ de $\{\mathcal{X}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ definida del siguiente modo:

$$\mathcal{X}_{1j}^{[n_1]} = \sqrt{1 + \frac{a_{n_1}}{\sqrt{n_1}}} \mathcal{X}_{1j} \quad \text{para } j \in \{1, \dots, n_1\}$$

$$\mathcal{X}_{ij}^{[n_i]} = \mathcal{X}_{ij} \quad \text{para } j \in \{1, \dots, n_i\}, i \in \{2, \dots, k\}$$

con el fin de obtener CDAs cuyas varianzas sean

$$\sigma_{\mathcal{X}_1^{[n_1]}}^2 = \left(1 + \frac{a_{n_1}}{\sqrt{n_1}}\right) \sigma_{\mathcal{X}_1}^2, \text{ y } \sigma_{\mathcal{X}_i^{[n_i]}}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_i}^2 \quad \text{para } i \in \{2, \dots, k\}$$

donde a_{n_1} es una sucesión perteneciente al intervalo $(-1, \infty)$. Así, si $a_{n_1} \rightarrow \infty$ y $a_{n_1}/\sqrt{n_1} \rightarrow 0$ cuando $n_1 \rightarrow \infty$, entonces la sucesión de varianzas $\sigma_{\mathcal{X}_1^{[n_1]}}^2$ converge puntualmente a $\sigma_{\mathcal{X}_1}^2$ a medida que el tamaño de muestra n_1 tiende a infinito. Considérese el estadístico ‘corregido’ definido bajo la hipótesis alternativa:

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^{[n_i]}}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^{[n_l]}}^2 \right]^2}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\left(D_{\theta}^{\varphi} \left(\mathcal{X}_{ij}^{[n_i]}, \overline{\mathcal{X}_i^{[n_i]}} \right) \right)^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^{[n_i]}}^2 \right]^2}.$$

En el Teorema 2.3.3 se prueba que la potencia del Test (2.30), bajo las alternativas locales propuestas, converge a 1.

Teorema 2.3.3 *Con la notación anterior, si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ cuando $n_i \rightarrow \infty$ y el procedimiento asintótico presentado en la Sección 2.2.2 se aplica al nivel de significación ρ a la sucesión de muestras corregidas $\{\mathcal{X}_{i1}^{[n_i]}, \dots, \mathcal{X}_{in_i}^{[n_i]}\}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, se tiene que*

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} P \left(T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]} > t_{(1-\rho)} \right) = 1. \quad (2.65)$$

Demostración. En primer lugar, el denominador de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]}$ (que se denotará por $D^{[n_1, \dots, n_k]}$) satisface

$$\begin{aligned} D^{[n_1, \dots, n_k]} &= \left(1 + \frac{a_{n_1}}{\sqrt{n_1}}\right) \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \left[\left(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{1j}, \overline{\mathcal{X}}_1) \right)^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 \right]^2 \\ &+ \sum_{i=2}^k \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\left(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i) \right)^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right]^2. \end{aligned}$$

En el Teorema 2.1.6 se probó que si $E(\|s_{\mathcal{X}_i}\|_{\theta, \varphi}^4) < \infty$, entonces

$$\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\left(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_{ij}, \overline{\mathcal{X}}_i) \right)^2 - \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right]^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))}^2$$

para $i \in \{1, \dots, k\}$. Además, $\left(1 + \frac{a_{n_1}}{\sqrt{n_1}}\right)^{n_1 \rightarrow \infty} 1$. Por tanto,

$$D^{[n_1, \dots, n_k]} \xrightarrow{c.s.} D = \sum_{i=1}^k \sigma_{(D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, E(\mathcal{X}_i)))}^2.$$

Por otro lado, el numerador de $T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]}$ (denotado por $M^{[n_1, \dots, n_k]}$) puede descomponerse como sigue:

$$M^{[n_1, \dots, n_k]} = n_1 \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1^{[n_1]}}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^{[n_i]}}^2 \right]^2 + \sum_{i=2}^k n_i \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i^{[n_i]}}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l^{[n_l]}}^2 \right]^2.$$

El primer término de $M^{[n_1, \dots, n_k]}$, M_1^* , se puede desarrollar del siguiente modo:

$$M_1^* = \left[\sqrt{n_1} \left(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right) \right]^2 \quad (2.66)$$

$$+ \left[a_{n_1} \left(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 - \frac{n_1}{N} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 \right) \right]^2 \quad (2.67)$$

$$+ 2n_1 \left(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 \right) \left(\frac{a_{n_1}}{\sqrt{n_1}} \left(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 - \frac{n_1}{N} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 \right) \right). \quad (2.68)$$

El segundo sumando de $M^{[n_1, \dots, n_k]}$, M_2^* , presenta la siguiente descomposición:

$$M_2^* = \sum_{i=2}^k n_i \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2 \right]^2 \quad (2.69)$$

$$+ (N - n_1) \left(\frac{n_1 a_{n_1}^2}{N^2} \right) \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^4 \quad (2.70)$$

$$- 2 \frac{\sqrt{n_1 a_{n_1}}}{N} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 \sum_{i=2}^k n_i \left[\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_i}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^k n_l \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_l}^2 \right]. \quad (2.71)$$

En primer lugar, el término (2.66) puede expresarse en función de las variables $\{\xi_i\}_{i=1}^k$, definidas en (2.41), como sigue:

$$f_n(\xi_1, \dots, \xi_k) = \left(\xi_1 - \sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{n_1}{N}} \sqrt{\frac{n_i}{N}} \xi_i \right)^2. \quad (2.72)$$

Teniendo en cuenta que $n_i/N \rightarrow p_i \in (0, 1)$ a medida que $n_i \rightarrow \infty$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y procediendo del mismo modo que en la demostración del Teorema 2.2.2, se tiene que la función definida en (2.72) converge en ley a

$$f(Z_1, \dots, Z_k) = \left(Z_1 - \sum_{i=1}^k \sqrt{p_1 p_i} Z_i \right)^2,$$

donde $(Z_1, \dots, Z_k)^T \equiv \mathcal{N}_k(\vec{0}, \Sigma)$, siendo Σ la matriz de varianzas-covarianzas dada en (2.40). Análogamente, (2.69) converge en ley a

$$f(Z_1, \dots, Z_k) = \sum_{i=2}^k \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_i p_l} Z_l \right)^2.$$

Como $a_{n_1} \rightarrow \infty$ y $\left(\widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 - \frac{n_1}{N} \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^2 \right)^2 \xrightarrow{c.s.} (1 - p_1)^2 \sigma_{\mathcal{X}_1}^4$, se concluye que el término (2.67) dividido por $(a_{n_1} \cdot D^{[n_1, \dots, n_k]})$ diverge a infinito cuando $n_i \rightarrow \infty$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Además, teniendo en cuenta los argumentos precedentes, se satisface que (2.68) dividido por $(a_{n_1} \cdot D^{[n_1, \dots, n_k]})$ converge en ley a

$$2(1 - p_1) \sigma_{\mathcal{X}_1}^2 \left(Z_1 - \sum_{i=1}^k \sqrt{p_1 p_i} Z_i \right)^2.$$

Por otro lado, como $\left(\frac{n_1}{N}\right)\left(\frac{N-n_1}{N}\right)^2 \widehat{\sigma}_{\mathcal{X}_1}^4 \xrightarrow{a.s.} p_1 \sigma_{\mathcal{X}_1}^4 \sum_{i=2}^k p_i$ y la sucesión $a_{n_1} \rightarrow \infty$, entonces el término (2.70) dividido por $(a_{n_1} \cdot D^{[n_1, \dots, n_k]})$ diverge a infinito a medida que $n_i \rightarrow \infty$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Además, es fácil ver que (2.71) dividido por $(a_{n_1} \cdot D^{[n_1, \dots, n_k]})$ converge en ley a

$$-2p_1 \sum_{i=2}^k p_i \left(Z_i - \sum_{l=1}^k \sqrt{p_l p_l} Z_l \right).$$

Finalmente, de las expresiones anteriores se deduce que $T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]} / a_{n_1} \xrightarrow{P} \infty$ cuando $n_i \rightarrow \infty$ para $i \in \{1, \dots, k\}$ y, como resultado, $\lim_{n_i \rightarrow \infty} P(T_{(n_1, \dots, n_k)}^{[n_1, \dots, n_k]} > t_{(1-\rho)}) = 1$. \square

Observación 2.3.2 El Teorema 2.3.3 indica que para cualquier sucesión $\{a_{n_1}\}$ tal que $a_{n_1} \in (0, \infty)$, $a_{n_1} \rightarrow \infty$ y $a_{n_1}/\sqrt{n_1} \rightarrow 0$ a medida que $n_1 \rightarrow \infty$, entonces $\sigma_{\mathcal{X}_1^{[n_1]}}^2 \rightarrow \sigma_{\mathcal{X}_1}^2$ punto a punto, y el procedimiento asintótico propuesto rechaza la hipótesis nula en (2.30) con probabilidad 1 en el límite.

2.3.3. Estudios de simulación

En un primer estudio, se han llevado a cabo algunas simulaciones de un CDA trapezoidal \mathcal{X} con el fin de mostrar la consistencia de los tests propuestos en la Sección 2.1. En este caso se van a simular números difusos cuyos valores extremos del 1-corte vienen dados por las variables aleatorias reales dependientes, $b \equiv \mathcal{N}(1, \sqrt{3})$ y $c \equiv b + \mathcal{N}(1, \sqrt{3})$, y de manera que $l = b - a$ varía como una variable $l \equiv \chi_3^2$ y $r = d - c$ tiene distribución $r \equiv \chi_8^2$. De nuevo se emplea la métrica $D_{1/3}^\lambda$, obteniendo una varianza de $\sigma_{\mathcal{X}}^2 = 6.44$ aplicando la expresión (1.28).

Considerando $\sigma_0^2 = 6.44$ se analiza la potencia de los tests (2.2) y (2.3). Para este propósito, dados $m_1, m_2 \in (1, \infty)$ se consideran los CDAs $\mathcal{X}^{m_1} = \sqrt{1 - \frac{1}{m_1}} \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^{m_2} = \sqrt{1 + \frac{1}{m_2}} \mathcal{X}$ que cumplen las hipótesis alternativas $\sigma_{\mathcal{X}^{m_1}}^2 = (1 - \frac{1}{m_1}) \sigma_0^2$ y $\sigma_{\mathcal{X}^{m_2}}^2 = (1 + \frac{1}{m_2}) \sigma_0^2$, respectivamente. Las Figuras 2.2 y 2.3 muestran la funciones potencia de ambos tests al nivel de significación $\rho = 0.05$. Se han ejecutado 10000 simulaciones (lo que implica un error muestral del 0.427% al nivel de confianza 95%), utilizando un tamaño de muestra

$n = 100$ para diferentes valores de m_1 y m_2 . Como resultado, en las Figuras 2.2 y 2.3 se observa que la potencia está cercana a 1 a medida que la hipótesis alternativa se va alejando de la nula en los dos casos.

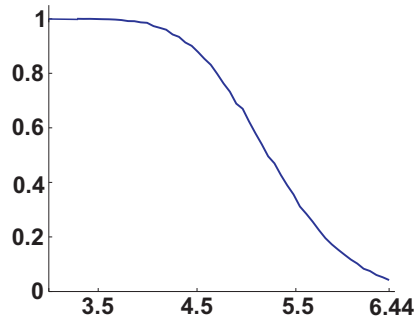


Figura 2.2: Potencia del test $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \leq 6.44$

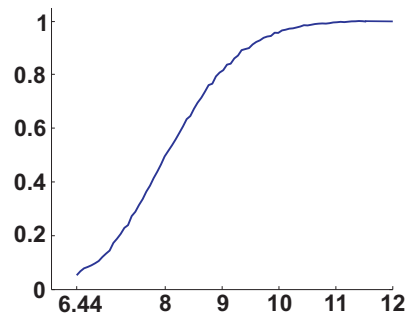


Figura 2.3: Potencia del test $H_0 : \sigma_{\mathcal{X}}^2 \geq 6.44$

Del mismo modo, para analizar la potencia del Test bilateral (2.1), se considera el CDA $\mathcal{X}^m = \sqrt{\frac{m}{6.44}}\mathcal{X}$ que verifica $\sigma^2 = m$, con m variando en el intervalo $(0, 12]$. En este caso, la Figura 2.4 muestra que la función potencia del test bilateral al nivel $\rho = 0.05$, y construida bajo las mismas condiciones que en el caso unilateral, está próxima a 1 a medida que la hipótesis alternativa se aleja de la nula.

En último lugar, siguiendo el estudio comparativo iniciado en la Sección 2.2.5 entre los estadísticos de Levene y de Shoemaker (T_L y T_S , respectivamente), se va a analizar

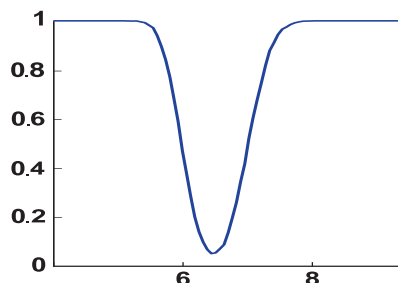


Figura 2.4: Potencia del test $H_0 : \sigma_{\chi}^2 = 6.44$

empíricamente la función potencia de ambos tests. Se consideran los CDAs \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 e \mathcal{X}_3 y la distancia $D_{1/3}^{\lambda}$, de manera que:

- $\mathcal{X}_1^m \equiv \sqrt{\frac{m}{2.5}} \cdot Tra(a_1, b_1, c_1, d_1)$ tal que $l_1 = b_1 - a_1 \equiv \chi_3^2$, $b_1 \equiv U(0, 1)$, $c_1 \equiv U(1, 2)$ y $r_1 = d_1 - c_1 \equiv \chi_8^2$,
- $\mathcal{X}_2 \equiv Tra(a_2, b_2, c_2, d_2)$ tal que $l_2 = b_2 - a_2 \equiv \chi_8^2$, $b_2 \equiv U(-2, -1)$, $c_2 \equiv U(1, 2)$ y $r_2 = d_2 - c_2 \equiv \chi_3^2$,
- $\mathcal{X}_3 \equiv Tra(a_3, b_3, c_3, d_3)$ tal que $l_3 = b_3 - a_3 \equiv \chi_5^2$, $b_3 \equiv U(1, 2)$, $c_3 \equiv U(2, 3)$ y $r_3 = d_3 - c_3 \equiv \chi_6^2$.

Los tres CDAs anteriores satisfacen que

$$\sigma_{\mathcal{X}_1^m}^2 = m \text{ para todo } m \in (0, \infty) \text{ y } \sigma_{\mathcal{X}_2}^2 = \sigma_{\mathcal{X}_3}^2 = 2.5.$$

Se han extraído tres m.a.s. de tamaño 1000 a partir de \mathcal{X}_1^m , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 , respectivamente, para diferentes valores de m variando en $(0, 5]$, y se han ejecutado 10000 simulaciones del procedimiento asintótico en cada caso, lo que implica un error de muestreo de 0.427% con un nivel de confianza del 95%. La potencia de ambos tests al nivel de significación $\rho = 0.05$ como función de m se representa en la Figura 2.5.

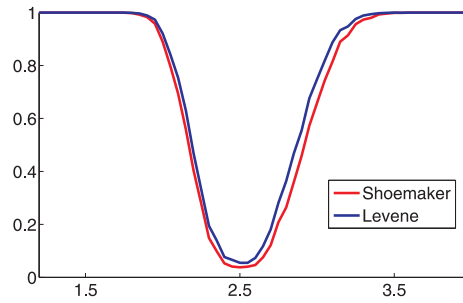


Figura 2.5: Potencia del test $H_0 : \sigma_{\lambda_1}^2 = \sigma_{\lambda_2}^2 = \sigma_{\lambda_3}^2$ para T_L (azul) y T_S (rojo)

Como conclusión, la Figura 2.5 muestra que en este caso el test de Levene para CDAs desarrollado en la Sección 2.2 es más potente que el test de Shoemaker, puesto que su función potencia se aproxima más rápido a 1 a medida que la hipótesis alternativa se aleja de la nula. A pesar de ello, puede resultar interesante el desarrollo teórico de la extensión del test de Shoemaker para contrastar la igualdad de varianzas de k CDAs.

Capítulo 3

Contrastes de hipótesis comparativos para la media de elementos imprecisos aleatorios

En este capítulo se pretende ampliar el marco de aplicación de los contrastes sobre el valor esperado de un CDA flexibilizando las hipótesis. Los contrastes de hipótesis habituales relativos a la media en este contexto involucran ‘igualdades estrictas’ (igualdad del valor esperado del CDA a un valor difuso concreto, ver Körner, 2000, Montenegro *et al.*, 2004; o bien igualdad de los valores esperados de varios CDAs, ver Montenegro *et al.*, 2001, Gil *et al.*, 2006, González-Rodríguez *et al.*, 2010). Sin embargo, en muchos contextos puede resultar útil determinar la similitud (o la concordancia en distintos sentidos) del valor esperado de un CDA con un valor difuso fijado de antemano. Por ejemplo, Sánchez (1979), Dubois & Prade (1980, 1988), Wang (1982) y Pedrycz (1993) han definido el concepto de grado de inclusión de un conjunto difuso en otro dado, así como los denominados grado de similaridad y grado de intersección, tomando como base el concepto de cardinalidad o potencia de un conjunto difuso definido por De Luca & Termini (1972). En este contexto,

se van a desarrollar técnicas inferenciales eficientes para resolver este problema dentro del marco de la inferencia estadística clásica en espacios métricos, realizando diversos contrastes de hipótesis acerca del grado de inclusión, de intersección y de similaridad de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en o con un valor impreciso fijado de antemano. Cada test se va a estudiar utilizando tanto técnicas asintóticas como técnicas bootstrap, así como llevando a cabo simulaciones para mostrar su eficacia. Además, se expondrá su aplicabilidad en el análisis de la calidad del queso Gamonedo.

A la hora de determinar si la calidad del queso Gamonedo permanece dentro de los límites exigidos por la categoría de Denominación de Origen, en muchas ocasiones resulta conveniente analizar si el valor medio de las opiniones dadas por los expertos se encuentra dentro de tales límites con cierto grado de inclusión. Este problema se analiza en la Sección 3.1. En otras ocasiones, dado un valor fijado de antemano que sirva de referencia, se puede estudiar si el valor medio de las opiniones dadas por los expertos acerca de determinadas características del queso resulta similar a la referencia establecida con cierto grado de similaridad. Por tanto, para resolver este problema se propone un contraste de hipótesis para el grado de similaridad en la Sección 3.2. Por último, conocida la media de opiniones de un experto concreto acerca de alguna característica específica del queso, se puede analizar si la esperanza de las opiniones correspondientes a otro experto se interseca en cierto grado con la primera de ellas. Con este propósito, en la Sección 3.3 se expone un contraste de hipótesis sobre el grado de intersección entre la esperanza de un elemento impreciso aleatorio y un valor impreciso fijado.

3.1. Contrastes de hipótesis para el grado de inclusión de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado

En primer lugar se introducen algunas definiciones previas sobre la intersección de conjuntos y conjuntos difusos, y sobre el grado de inclusión.

3.1.1. Grado de inclusión. Definiciones previas

Si $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$, se define la *medida del intervalo* A , $m(A)$, como la amplitud del mismo, es decir, $m(A) = 2\text{spr} A$. El espacio $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ no es cerrado por intersecciones pero está contenido en el espacio más general $\widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R})$ de intervalos compactos (vacíos o no) de \mathbb{R} . Cabe notar que $m(\emptyset) = 0$. De este modo, si $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}) \subset \widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R})$ entonces $A \cap B \in \widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R})$. En este contexto, se tiene que la *medida de la intersección de dos intervalos* A y B (ver Shawe-Taylor & Cristianini, 2004) está definida así:

$$m(A \cap B) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 2\text{spr} A, 2\text{spr} B, \text{spr} A + \text{spr} B - |\text{mid} A - \text{mid} B| \right\} \right\}. \quad (3.1)$$

Esta medida se puede extender a $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ como sigue. Dado $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$, se define la *medida del conjunto* A como:

$$m(A) = 2 \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \text{spr}_A(u) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u). \quad (3.2)$$

Si $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ entonces $A \cap B \in \widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R}^p)$, donde $\widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R}^p)$ es el espacio de subconjuntos compactos y convexos (vacíos o no) de \mathbb{R}^p . La *medida de la intersección de dos conjuntos* A y B viene dada por:

$$m(A \cap B) = \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \max \left\{ 0, \min \left\{ (\text{spr}_A + \text{spr}_B)(u) - |(\text{mid}_A - \text{mid}_B)(u)|, 2\text{spr}_A(u), 2\text{spr}_B(u) \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u). \quad (3.3)$$

Del mismo modo, dado $U \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ se define la *medida del conjunto difuso* U como sigue:

$$m(U) = 2 \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \text{spr}_U(u, \alpha) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha). \quad (3.4)$$

De nuevo el espacio $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ no es cerrado por intersecciones. Con el fin de solucionar este problema se considera el espacio de conjuntos difusos $\widetilde{\mathcal{F}}_c^2(\mathbb{R}^p)$ que generaliza a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, de manera que:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_c^2(\mathbb{R}^p) = \{U : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1] \mid U_\alpha \in \widetilde{\mathcal{K}}_c(\mathbb{R}^p) \quad \forall \alpha \in (0, 1]\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p) \subset \widetilde{\mathcal{F}}_c^2(\mathbb{R}^p)$ y, así, se define la *medida de la intersección de dos conjuntos difusos* U y V como extensión de la medida para conjuntos de la forma siguiente:

$$m(U \cap V) = \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \max \left\{ 0, \min \left\{ (\text{spr}_U + \text{spr}_V)(u, \alpha) - |(\text{mid}_U - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, \right. \right. \\ \left. \left. 2\text{spr}_U(u, \alpha), 2\text{spr}_V(u, \alpha) \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha). \quad (3.5)$$

El grado de inclusión de un conjunto difuso en otro (ver, por ejemplo, Sánchez, 1979) está basado en el concepto de *cardinalidad* o *potencia* para conjuntos difusos con conjunto soporte finito definido por De Luca & Termini (1972). Así, si U es un conjunto difuso con conjunto soporte finito, se define su potencia como:

$$|U| = \sum_{x \in \text{supp}(U)} U(x). \quad (3.6)$$

Zwick *et al.* (1987) extendieron el concepto de potencia al espacio de conjuntos difusos con conjunto soporte continuo, de manera que en ese caso:

$$|U| = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx. \quad (3.7)$$

Puede comprobarse que $|U|$ coincide con la medida $m(U)$ definida en (3.4). Así, en esta memoria se va a trabajar con el concepto de *grado de inclusión de U en V* definido mediante la generalización a \mathbb{R}^p por α -cortes de la medida de un intervalo y de la intersección de dos intervalos dada en (3.1). Este concepto generaliza al introducido por Sánchez (1979) y para $U, V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ viene dado por:

$$I(U, V) = \frac{m(U \cap V)}{m(U)}. \quad (3.8)$$

Como $m(U \cap V) \leq m(U)$, es inmediato que el rango de valores para el grado de inclusión de un conjunto difuso en otro es $[0, 1]$. El grado de inclusión se puede particularizar a los espacios $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ y $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$.

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, \mathcal{X} un CDA y V un conjunto difuso fijado. Dado $d \in [0, 1]$, el objetivo es contrastar

$$H_0 : I(E(\mathcal{X}), V) = d \quad \text{frente a} \quad H_1 : I(E(\mathcal{X}), V) \neq d. \quad (3.9)$$

De igual modo, se pueden plantear los correspondientes contrastes unilaterales como sigue:

$$H_0 : I(E(\mathcal{X}), V) \leq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : I(E(X), V) > d; \quad (3.10)$$

$$H_0 : I(E(X), V) \geq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : I(E(X), V) < d. \quad (3.11)$$

En los siguientes apartados de esta sección se resolverán los tests anteriores para intervalos aleatorios en \mathbb{R} , fijando un intervalo compacto A con $\text{spr } A > 0$. Posteriormente, se estudiarán algunos casos especiales en los que A no está acotado. Asimismo, se extenderán los resultados obtenidos al marco de CDAs con valores en $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, y se realizarán simulaciones para analizar su buen funcionamiento. Finalmente, los tests propuestos se aplicarán sobre ejemplos prácticos.

3.1.2. Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , se considera un intervalo aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ tal que $\text{spr } E(X) > 0$ y un intervalo cerrado y acotado fijado A con $\text{spr } A > 0$. El objetivo es resolver los Tests (3.9), (3.10) y (3.11) para el grado de inclusión de $E(X)$ en A .

A partir de la definición de medida de un intervalo dada en (3.1), se deduce que las hipótesis del test bilateral (3.9) pueden expresarse equivalentemente como

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \{ -2d \text{spr } E(X), \text{mín} \{ \text{spr } A + (1 - 2d) \text{spr } E(X) - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A|, \\ \quad \quad \quad 2(1 - d) \text{spr } E(X), 2(\text{spr } A - d \text{spr } E(X)) \} \} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \{ -2d \text{spr } E(X), \text{mín} \{ \text{spr } A + (1 - 2d) \text{spr } E(X) - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A|, \\ \quad \quad \quad 2(1 - d) \text{spr } E(X), 2(\text{spr } A - d \text{spr } E(X)) \} \} \neq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Los contrastes (3.10) y (3.11) pueden expresarse equivalentemente de modo análogo a (3.12), cambiando el signo $=$ en la hipótesis nula por \leq y \geq , así como el signo \neq en la hipótesis alternativa por $>$ y $<$, respectivamente.

Observación 3.1.1 Existen tres situaciones que deben distinguirse, ya que su estudio se realiza de diferentes modos, como se verá posteriormente: $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$.

- $d = 1$ significa que el intervalo $E(X)$ está completamente contenido en A .
- $d \in (0, 1)$ implica que $E(X)$ está parcialmente contenido en A , con grado d .
- $d = 0$ equivale a decir que $E(X)$ no está contenido en A .

En la Figura 3.1 se muestran varios ejemplos que se pueden encontrar según los distintos grados de inclusión.

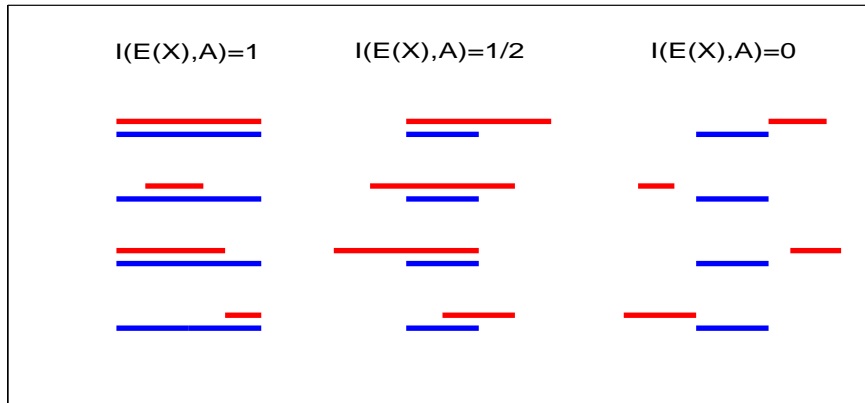


Figura 3.1: Diferentes formas de representación de distintos grados de inclusión de $E(X)$ (en rojo) en A (en azul)

A continuación se analizan las tres situaciones propuestas.

Caso $d = 1$

Es fácil ver que en este caso particular, las hipótesis del Test (3.9) son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) \leq \text{spr } A; \\ H_1 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) > \text{spr } A. \end{cases} \quad (3.13)$$

Cabe notar que cuando $d = 1$ el Test (3.11) se reduce al (3.13) ya que el grado de inclusión no puede ser mayor que 1, mientras que el Test (3.10) no presenta interés debido a que el grado de inclusión es siempre menor o igual que 1.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. extraída a partir de X . Para resolver el Test (3.13), se propone el siguiente estadístico:

$$T_n^{I^1} = \sqrt{n} \left(|\text{mid } \bar{X}_n - \text{mid } A| + \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A \right). \quad (3.14)$$

Se podrían exigir las condiciones necesarias para evitar la singularidad de las matrices de varianzas-covarianzas de los procesos límite. Sin embargo, esto no es imprescindible ya que no se trabajará con la densidad de dichos procesos. No obstante, se requerirán algunas condiciones naturales sobre las varianzas que simplificarán la exposición. De esta manera, se considera $\mathcal{P} = \{Y : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R}) \mid \sigma_{\text{mid } Y}^2 < \infty \wedge 0 < \sigma_{\text{spr } Y}^2 < \infty\}$. En el Lema 3.1.1 se analiza la convergencia de $T_n^{I^1}$ bajo ciertas condiciones y en el Teorema 3.1.2 se prueba que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.13) cuando $T_n^{I^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Lema 3.1.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{I^1}$ definido como en (3.14). Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$, se cumple que:*

$$T_n^{I^1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{z_1, z_2\}, \quad (3.15)$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{mid } X + \text{spr } X}^2 & \sigma_{\text{spr } X}^2 - \sigma_{\text{mid } X}^2 \\ \sigma_{\text{spr } X}^2 - \sigma_{\text{mid } X}^2 & \sigma_{-\text{mid } X + \text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Demostración. El estadístico $T_n^{I^1}$ definido en (3.14) puede expresarse equivalentemente como:

$$T_n^{I^1} = \text{máx} \left\{ \sqrt{n} \left(\text{mid } \bar{X}_n - \text{mid } A + \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A \right), \right. \\ \left. \sqrt{n} \left(-\text{mid } \bar{X}_n + \text{mid } A + \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A \right) \right\},$$

y, además, si $E(X) = A$ el estadístico anterior es igual a:

$$T_n^{I^1} = \max\left\{\sqrt{n}\left(\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n - E(\text{mid } X + \text{spr } X)\right), \sqrt{n}\left(-\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n - E(-\text{mid } X + \text{spr } X)\right)\right\}.$$

Utilizando el Teorema Central del Límite para variables bidimensionales, se cumple la siguiente convergencia en ley:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}\left(\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n - E(\text{mid } X + \text{spr } X)\right) \\ \sqrt{n}\left(-\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n - E(-\text{mid } X + \text{spr } X)\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2\left(\vec{0}, \Sigma\right),$$

donde Σ está definida como en (3.16). Asimismo, como la función máximo es continua, se tiene el resultado buscado. \square

Teorema 3.1.2 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.1. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.15). Si H_0 en (3.13) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^1} > k_{1-\rho}\right) \leq \rho \quad (3.17)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.13) cuando $T_n^{I^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Demostración. La desigualdad (3.17) se va a probar en dos pasos. En primer lugar, dado $k \in \mathbb{R}$ se va a comprobar que:

$$\begin{aligned} P\left(T_n^{I^1} > k\right) &= P\left(T_n^{I^1} > k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) \leq \text{spr } A\right) \\ &\leq P\left(T_n^{I^1} > k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) = \text{spr } A\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sea X un intervalo aleatorio para el que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) < \text{spr } A$ y

$$T_n^X = \sqrt{n}\left(|\text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A| + \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A\right).$$

Dado el intervalo aleatorio

$$Y = X + [-\text{spr } A + |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X), \text{spr } A - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X)],$$

se cumple que $|\text{mid } E(Y) - \text{mid } A| + \text{spr } E(Y) = \text{spr } A$ y, además, es inmediato ver que $T_n^Y > T_n^X$ para todo $\omega \in \Omega$. Por tanto, se satisface que $P(T_n^Y > k) \geq P(T_n^X > k)$, y así se tiene la desigualdad (3.18).

Por otro lado va a probarse la desigualdad

$$\begin{aligned} & P\left(T_n^{I^1} > k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) = \text{spr } A\right) \\ & \leq P\left(T_n^{I^1} > k \mid E(X) = A\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sea X un intervalo aleatorio para el que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| > 0$ y $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, y sea T_n^X definido como en (3.39). Dado el intervalo aleatorio

$$Y = X + \text{mid } A - \text{mid } E(X) + [\text{spr } E(X) - \text{spr } A, -\text{spr } E(X) + \text{spr } A],$$

se cumple que $|\text{mid } E(Y) - \text{mid } A| = 0$ y $\text{spr } E(Y) = \text{spr } A$ y se puede comprobar, que al igual que antes, $T_n^Y > T_n^X$ para todo $\omega \in \Omega$. De este modo, $P(T_n^Y > k) \geq P(T_n^X > k)$ y la desigualdad (3.19) es cierta.

A partir del Lema 3.1.1 se tiene que $P\left(T_n^{I^1} > k_{1-\rho} \mid E(X) = A\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho$ y, por tanto, teniendo en cuenta las desigualdades (3.18) y (3.19) se concluye de modo inmediato (3.17), como se quería demostrar. \square

Observación 3.1.2 En el caso particular en el que $\text{spr } X = 0$ (c.s.), es decir, si X es casi seguro una variable aleatoria real, la definición de grado de inclusión dada en (3.8) no tiene sentido, ya que la medida de $E(X)$ sería 0. Por tanto, el contraste que consiste en analizar si la esperanza de una variable aleatoria real está en un intervalo fijado no puede verse como una particularización del Test (3.13), si bien sus hipótesis presentan la siguiente forma:

$$\begin{cases} H_0 : |E(X) - \text{mid } A| \leq \text{spr } A; \\ H_1 : |E(X) - \text{mid } A| > \text{spr } A. \end{cases} \tag{3.20}$$

Clásicamente, el contraste de estas hipótesis se ha resuelto como un contraste múltiple de tipo unión-intersección (ver, por ejemplo, Roy, 1953), de manera que se descompone

a su vez en dos tests unilaterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0^1 : E(X) - \text{mid } A \leq \text{spr } A; \\ H_1^1 : E(X) - \text{mid } A > \text{spr } A. \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0^2 : -E(X) + \text{mid } A \leq \text{spr } A; \\ H_1^2 : -E(X) + \text{mid } A > \text{spr } A. \end{array} \right.$$

De este modo, si $T_1 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \text{mid } A - \text{spr } A)}{\sigma_X}$ y $T_2 = \frac{\sqrt{n}(-\bar{X} + \text{mid } A - \text{spr } A)}{\sigma_X}$ son los estadísticos utilizados clásicamente para resolver los contrastes anteriores, entonces el estadístico de contraste para el test múltiple (3.20) es el máximo de ambos estadísticos, es decir, $\text{máx}\{T_1, T_2\}$.

En este caso, es inmediato ver que los dos peores casos bajo la hipótesis nula se alcanzan cuando $E(X) = \text{spr } A + \text{mid } A$ ó $E(X) = \text{mid } A - \text{spr } A$, y en ambas situaciones se verifica que $\text{máx}\{T_1, T_2\}$ converge en ley al valor absoluto de una variable $\mathcal{N}(0, 1)$. Así, al nivel de significación ρ y siendo $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ del valor absoluto de una $\mathcal{N}(0, 1)$, si H_0 en (3.20) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\text{máx}\{T_1, T_2\} > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $E(X) = \text{spr } A + \text{mid } A$, o bien cuando $E(X) = \text{mid } A - \text{spr } A$. De esta forma, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.20) cuando $\text{máx}\{T_1, T_2\} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Finalmente, se razonaría de la misma manera en el caso en el que el $\text{spr } X$ esté degenerado en cualquier constante $c \in \mathbb{R}$.

Caso $d \in (0, 1)$

En esta memoria se va a estudiar únicamente el test unilateral (3.11) para $d \in (0, 1)$ ya que éste parece más interesante para las aplicaciones prácticas. El desarrollo teórico de los contrastes (3.9) y (3.10) se deja como un problema abierto para futuros trabajos.

Teniendo en cuenta que $d \in (0, 1)$, las hipótesis del Test (3.11) pueden expresarse del siguiente modo:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \{ |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, d \text{spr } E(X) \} \leq \text{spr } A; \\ H_1 : \text{máx} \{ |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, d \text{spr } E(X) \} > \text{spr } A. \end{cases} \quad (3.21)$$

Dada una m.a.s. $\{X_i\}_{i=1}^n$ obtenida a partir de X , se considera el estadístico

$$T_n^{I(0,1)} = \sqrt{n} \text{máx} \{ |\text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A| + (2d - 1) \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A, d \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A \}, \quad (3.22)$$

analizándose su distribución límite bajo ciertas condiciones en el Lema 3.1.3. Además, en el Teorema 3.1.4 se prueba que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.21) cuando $T_n^{I(0,1)} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Lema 3.1.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{I(0,1)}$ definido como en (3.22). Si $X \in \mathcal{P}$, entonces:*

a) *Cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:*

$$T_n^{I(0,1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx} \{ \tau_1, \tau_2 \} \quad (3.23)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X}^2 & \sigma_{\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X, d \text{spr } X} \\ \sigma_{\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X, d \text{spr } X} & d^2 \sigma_{\text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

b) *Cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:*

$$T_n^{I(0,1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx} \{ \zeta_1, \zeta_2 \} \quad (3.25)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X}^2 & \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X, d \text{spr } X} \\ \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X, d \text{spr } X} & d^2 \sigma_{\text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Demostración.

a) El estadístico $T_n^{I^{(0,1)}}$ definido en (3.22) puede expresarse equivalentemente como:

$$\begin{aligned} T_n^{I^{(0,1)}} = \text{máx} \{ & \sqrt{n} \left(\text{mid } \overline{X}_n + (2d-1) \text{spr } \overline{X}_n - E(\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X) \right. \\ & \left. + E(\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X) - (\text{mid } A + \text{spr } A) \right), \\ & \sqrt{n} \left(-\text{mid } \overline{X}_n + (2d-1) \text{spr } \overline{X}_n - E(-\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X) \right. \\ & \left. + E(-\text{mid } X + (2d-1) \text{spr } X) - (-\text{mid } A + \text{spr } A) \right), \\ & \left. \sqrt{n} \left(d \text{spr } \overline{X}_n - E(d \text{spr } X) + E(d \text{spr } X) - \text{spr } A \right) \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones $\text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d-1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, la segunda componente del máximo anterior diverge en probabilidad a $-\infty$ a medida que $n \rightarrow \infty$ en virtud del Teorema Central del Límite y el Teorema de Slutsky, por lo que basta con analizar las otras dos componentes. Es fácil ver que la primera y tercera componentes convergen conjuntamente en ley a $(\tau_1, \tau_2)^T$ que se distribuye como una variable normal bidimensional $\mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con matriz de varianzas-covarianzas Σ_1 la misma que en (3.24). Por tanto, por la continuidad del máximo es inmediato que

$$T_n^{I^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{\tau_1, \tau_2\}.$$

b) Análogamente, a partir de la descomposición del estadístico $T_n^{I^{(0,1)}}$ presentada en el apartado a) de la demostración, bajo las condiciones $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d-1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ la primera componente de dicho estadístico diverge en probabilidad a $-\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que para analizar la convergencia en ley basta estudiar las componentes restantes del estadístico. De este modo, la segunda y tercera componentes convergen conjuntamente en ley a $(\zeta_1, \zeta_2)^T$ que se distribuye como una variable normal bidimensional $\mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con matriz de varianzas-covarianzas en (3.26). Así, en estas condiciones se tiene que

$$T_n^{I^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{\zeta_1, \zeta_2\}. \quad \square$$

Teorema 3.1.4 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.3. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.23) y*

(3.25). Si H_0 en (3.21) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^{(0,1)}} > k_{1-\rho}\right) \leq \rho \quad (3.27)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d - 1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d - 1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.21) cuando $T_n^{I^{(0,1)}} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Demostración. En primer lugar, dado $k \in \mathbb{R}$ se va a probar la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^{(0,1)}} > k \mid \text{máx}\{|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1)\text{spr } E(X), d\text{spr } E(X)\} \leq \text{spr } A\right) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^{(0,1)}} > k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A \wedge d\text{spr } E(X) = \text{spr } A\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sea X un intervalo aleatorio que cumple H_0 y una de las siguientes condiciones: o bien $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1)\text{spr } E(X) < \text{spr } A$, o bien $d\text{spr } E(X) < \text{spr } A$, y considérese

$$T_n^X = \sqrt{n} \text{máx}\{T_1(X), T_2(X), T_3(X)\}, \quad (3.29)$$

donde

- $T_1(X) = \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A + (2d - 1)\text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A$,
- $T_2(X) = -\text{mid } \overline{X}_n + \text{mid } A + (2d - 1)\text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A$ y
- $T_3(X) = d\text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A$.

Por un lado, teniendo en cuenta las propiedades de la probabilidad se satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & P(\sqrt{n} \text{máx}\{T_1(X), T_2(X), T_3(X)\} > k) \\ & \leq P(\sqrt{n} T_1(X) > k) + P(\sqrt{n} T_2(X) > k) + P(\sqrt{n} T_3(X) > k). \end{aligned} \quad (3.30)$$

A continuación se analiza (3.28) en los tres casos posibles que pueden darse.

- 1) Supóngase que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) < \text{spr } A$.

1.i) Si $\text{mid } E(X) \geq \text{spr } A$, se considera el intervalo aleatorio Y definido como sigue:

$$Y = X + \text{mid } A - \text{mid } E(X) + \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[\text{spr } E(X) - \frac{1}{d} \text{spr } A, -\text{spr } E(X) + \frac{1}{d} \text{spr } A \right]. \quad (3.31)$$

Se tiene que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d-1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, y además $T_1(X) = T_1(Y)$, por lo que

$$P(\sqrt{n} T_1(X) > k) = P(\sqrt{n} T_1(Y) > k) \leq P(\sqrt{n} \max\{T_1(Y), T_2(Y), T_3(Y)\} > k).$$

En virtud del Teorema Central del Límite y el Teorema de Slutsky es inmediato comprobar que $P(\sqrt{n} T_2(X) > k)$ y $P(\sqrt{n} T_3(X) > k)$ convergen a 0 a medida que n tiende a ∞ . Así, por el apartado a) del Lema 3.1.4 se cumple (3.28).

1.ii) Si $\text{mid } E(X) < \text{spr } A$, la demostración para obtener (3.28) es análoga a la de 1.i) teniendo en cuenta en este caso el intervalo

$$Y = X + \text{mid } A - \text{mid } E(X) + \frac{d-1}{d} \text{spr } A + \left[\text{spr } E(X) - \frac{1}{d} \text{spr } A, -\text{spr } E(X) + \frac{1}{d} \text{spr } A \right], \quad (3.32)$$

y el apartado b) del Lema 3.1.4.

2) Supóngase que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d-1) \text{spr } E(X) < \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$. En este caso basta considerar cualquiera de los dos intervalos (3.31) o (3.32) y realizar un razonamiento similar al de los apartados anteriores para obtener (3.28), teniendo en cuenta ahora que $P(\sqrt{n} T_1(X) > k)$ y $P(\sqrt{n} T_3(X) > k)$ convergen a 0 a medida que n tiende a ∞ .

3) Supóngase que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d-1) \text{spr } E(X) < \text{spr } A$ y $d \text{spr } E(X) < \text{spr } A$. En este caso se puede definir Y o bien como en (3.31), o bien (3.32), concluyendo que $T_1(X) \leq T_1(Y)$, por lo que se tiene

$$P(\sqrt{n} T_1(X) > k) \leq P(\sqrt{n} T_1(Y) > k) \leq P(\sqrt{n} \max\{T_1(Y), T_2(Y), T_3(Y)\} > k).$$

De este modo, como $P(\sqrt{n} T_1(X) > k)$, $P(\sqrt{n} T_2(X) > k)$ y $P(\sqrt{n} T_3(X) > k)$ convergen a 0 a medida que n tiende a ∞ , se concluye fácilmente (3.28).

Por otro lado, por el Lema 3.1.3 se tiene que

$$P\left(T_n^{I^{(0,1)}} > k_{1-\rho} \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (2d - 1) \text{spr } E(X) = \text{spr } A \wedge d \text{spr } E(X) = \text{spr } A\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho$$

y así, por la desigualdad (3.28), se concluye de modo inmediato (3.27), como se quería demostrar. \square

Caso $d = 0$

En el caso $d = 0$, las hipótesis del test bilateral (3.9) son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) \geq \text{spr } A; \\ H_1 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) < \text{spr } A. \end{cases} \quad (3.33)$$

Del mismo modo, el Test (3.10) se reduce al (3.33) ya que el grado de inclusión no puede ser menor que 0, mientras que el test (3.11) no presenta interés ya que siempre el grado de inclusión es mayor o igual que 0.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. obtenida a partir de X . Se considera el estadístico

$$T_n^{I^0} = \sqrt{n} (|\text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A| - \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A). \quad (3.34)$$

Siguiendo la estructura del caso $d \in (0, 1)$, en el Lema 3.1.5 se analiza la convergencia del estadístico $T_n^{I^0}$ bajo ciertas condiciones y en el Teorema 3.1.6 se probará que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.33) cuando $T_n^{I^0} < k_\rho$ es asintóticamente correcto.

Lema 3.1.5 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{I^0}$ definido como en (3.34). Si $X \in \mathcal{P}$, entonces:*

a) *Cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:*

$$T_n^{I^0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{mid } X - \text{spr } X}^2). \quad (3.35)$$

b) Cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:

$$T_n^{I^0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{mid } X + \text{spr } X}^2). \quad (3.36)$$

Demostración.

a) El estadístico $T_n^{I^0}$ definido en (3.34) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} T_n^{I^0} = \max \bigg\{ & \sqrt{n} \left(\text{mid } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n - E(\text{mid } X - \text{spr } X) \right. \\ & \left. + E(\text{mid } X - \text{spr } X) - (\text{mid } A + \text{spr } A) \right), \\ & \sqrt{n} \left(-\text{mid } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n - E(-\text{mid } X - \text{spr } X) \right. \\ & \left. + E(-\text{mid } X - \text{spr } X) - (-\text{mid } A + \text{spr } A) \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición $\text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, el Teorema Central del Límite y el Teorema de Slutsky, la segunda componente del máximo anterior tiende en probabilidad a $-\infty$ a medida que $n \rightarrow \infty$. De ese modo, para la convergencia en ley basta analizar la primera componente del estadístico. Así, se tiene (3.35).

b) Del mismo modo, si se considera la descomposición de $T_n^{I^0}$ dada en el apartado a), bajo la condición $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ se cumple que su primera componente diverge en probabilidad a $-\infty$ a medida que $n \rightarrow \infty$ y así se cumple (3.36).

□

Teorema 3.1.6 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.5. Sea $\rho \in [0, 1]$ y k_ρ el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.35) y (3.36). Si H_0 en (3.33) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(T_n^{I^0} < k_\rho \right) \leq \rho \quad (3.37)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.33) cuando $T_n^{I^0} < k_\rho$ es asintóticamente correcto.

Demostración. En primer lugar, dado $k \in \mathbb{R}$ se va a comprobar la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & P\left(T_n^{I^0} < k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) \geq \text{spr } A\right) \\ & \leq P\left(T_n^{I^0} < k \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) = \text{spr } A\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sea X un intervalo aleatorio para el que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) > \text{spr } A$ y

$$T_n^X = \sqrt{n} \left(|\text{mid } \bar{X}_n - \text{mid } A| - \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A \right). \quad (3.39)$$

Dado el intervalo aleatorio

$$Y = X + [\text{spr } A - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + \text{spr } E(X), -\text{spr } A + |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X)],$$

se cumple que $|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y, además, es inmediato comprobar que $T_n^Y < T_n^X$ para todo $\omega \in \Omega$. Por tanto, se cumple $P(T_n^Y < k) \geq P(T_n^X < k)$ teniéndose la desigualdad (3.38). Por otro lado, según el Lema 3.1.3 se satisface que

$$P\left(T_n^{I^0} < k_\rho \mid |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| - \text{spr } E(X) = \text{spr } A\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho.$$

Como consecuencia, la desigualdad (3.37) se deduce de modo inmediato. \square

3.1.3. Casos especiales: intervalo prefijado no acotado

Existen situaciones en las que el intervalo A fijado de antemano con el que se quiere comparar la esperanza del intervalo aleatorio en cuestión no tiene por qué estar acotado. En esta sección se analizarán los contrastes equivalentes a (3.9) para $d \in \{0, 1\}$ y el equivalente a (3.11) para $d \in (0, 1)$ en tres de dichas situaciones, siendo estas para $e_1 < e_2$:

$$A = (-\infty, e_1], \quad A = [e_2, \infty) \quad \text{y} \quad A = (-\infty, e_1] \cup [e_2, \infty),$$

y resultando análogo el procedimiento seguido para resolver el resto de contrastes.

Caso 3.1.3.a): $A = (-\infty, e_1]$

Sean un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , un intervalo aleatorio X asociado al mismo y $A = (-\infty, e_1]$. En este caso, $m(E(X) \cap A)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$m(E(X) \cap A) = \text{máx} \{0, \text{mín} \{2\text{spr } E(X), e_1 - \text{mid } E(X) + \text{spr } E(X)\}\}. \quad (3.40)$$

Por tanto, las hipótesis del Test (3.9) cuando $A = (-\infty, e_1]$ pueden expresarse equivalentemente como:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \left\{ -2d\text{spr } E(X), \text{mín} \left\{ e_1 - \text{mid } E(X) + (1 - 2d)\text{spr } E(X), \right. \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left. 2(1 - d)\text{spr } E(X) \right\} \right\} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \left\{ -2d\text{spr } E(X), \text{mín} \left\{ e_1 - \text{mid } E(X) + (1 - 2d)\text{spr } E(X), \right. \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. \left. 2(1 - d)\text{spr } E(X) \right\} \right\} \neq 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Asimismo, las hipótesis del Test (3.11) se expresarían al igual que las del anterior intercambiando $=$ por \geq , y \neq por $<$. A continuación, se analizan estos contrastes según los diferentes valores de $d \in [0, 1]$:

- $d = 1$: A partir de (3.41), las hipótesis del Test (3.9) se transforman en las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) + \text{spr } E(X) \leq e_1; \\ H_1 : \text{mid } E(X) + \text{spr } E(X) > e_1, \end{cases} \quad (3.42)$$

que se resuelve como un test clásico para la esperanza de la variable aleatoria real $\text{mid } X + \text{spr } X$.

- $d \in (0, 1)$: Del mismo modo, a partir del test unilateral análogo a (3.41), las hipótesis del Test (3.11) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) + (2d - 1)\text{spr } E(X) \leq e_1; \\ H_1 : \text{mid } E(X) + (2d - 1)\text{spr } E(X) > e_1, \end{cases} \quad (3.43)$$

resultando equivalente al test unilateral clásico para la esperanza de la variable aleatoria real $\text{mid } X + (2d - 1)\text{spr } X$.

- $d = 0$: En este caso, las hipótesis del Test (3.41) se expresan como sigue:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) - \text{spr } E(X) \geq e_1; \\ H_1 : \text{mid } E(X) - \text{spr } E(X) < e_1, \end{cases} \quad (3.44)$$

resolviéndose como un test unilateral clásico para la media de la variable aleatoria real $\text{mid } X - \text{spr } X$.

Caso 3.1.3.b): $A = [e_2, \infty)$

Sean un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , un intervalo aleatorio X asociado al mismo y $A = [e_2, \infty)$. En este caso, $m(E(X) \cap A)$ se expresa como sigue:

$$m(E(X) \cap A) = \text{máx} \{0, \text{mín} \{2\text{spr } E(X), \text{spr } E(X) + \text{mid } E(X) - e_2\}\}. \quad (3.45)$$

Así, las hipótesis del Test (3.9) para $A = [e_2, \infty)$ pueden expresarse equivalentemente como:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \{ -2d\text{spr } E(X), \text{mín} \{ \text{mid } E(X) + (1 - 2d)\text{spr } E(X) - e_2, \\ \quad 2(1 - d)\text{spr } E(X) \} \} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \{ -2d\text{spr } E(X), \text{mín} \{ \text{mid } E(X) + (1 - 2d)\text{spr } E(X) - e_2, \\ \quad 2(1 - d)\text{spr } E(X) \} \} \neq 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Al igual que en casos anteriores, las hipótesis del Test (3.11) se expresarían al igual que las del anterior intercambiando $=$ por \geq , y \neq por $<$. A continuación se analizan ambos tests para diferentes valores de $d \in [0, 1]$.

- $d = 1$: Las hipótesis del Test (3.46) se escriben del siguiente modo:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) - \text{spr } E(X) \geq e_2; \\ H_1 : \text{mid } E(X) - \text{spr } E(X) < e_2, \end{cases} \quad (3.47)$$

tratándose de un test clásico unilateral para la esperanza de la variable aleatoria real $\text{mid } X - \text{spr } X$.

- $d \in (0, 1)$: Igualmente, a partir del test unilateral análogo a (3.46), las hipótesis del Test (3.11) para $d \in (0, 1)$ son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) + (1 - 2d) \text{spr } E(X) \geq e_2; \\ H_1 : \text{mid } E(X) + (1 - 2d) \text{spr } E(X) < e_2, \end{cases} \quad (3.48)$$

que es equivalente al test clásico para la esperanza de la variable aleatoria real $\text{mid } X + (1 - 2d) \text{spr } X$.

- $d = 0$: En este caso, las hipótesis del Test (3.46) se escriben como:

$$\begin{cases} H_0 : \text{mid } E(X) + \text{spr } E(X) \leq e_2; \\ H_1 : \text{mid } E(X) + \text{spr } E(X) > e_2, \end{cases} \quad (3.49)$$

siendo este un test clásico para la esperanza de la variable aleatoria real $\text{mid } X + \text{spr } X$.

Caso 3.1.3.c): $A = (-\infty, e_1] \cup [e_2, \infty)$

El interés de este tipo de tests se centra en la idea de contrastar que la esperanza de un intervalo aleatorio no está contenida en un intervalo abierto $A^c = (e_1, e_2)$ con cierto grado $d \in [0, 1]$.

Además, dado un intervalo aleatorio X , es fácil ver que el hecho de que $E(X)$ esté contenido en $A = (-\infty, e_1] \cup [e_2, \infty)$ con grado $d \in [0, 1]$ es equivalente a que $E(X)$ esté contenido en $A^{c*} = [e_1, e_2]$ con grado $(d - 1) \in [0, 1]$. De este modo, el estudio se reduce a los tests propuestos en la Sección 3.1.2 para $(d - 1)$.

Los resultados obtenidos hasta ahora en esta sección se extienden a continuación al espacio de valores difusos $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$.

3.1.4. Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$

Sean (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ un CDA tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ un valor difuso fijado tal que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$. El objetivo ahora consiste en resolver los Tests (3.9), (3.10) y (3.11) sobre el grado de inclusión de $E(\mathcal{X})$ en V . A partir de la medida de un conjunto difuso introducida en (3.4) y la medida del conjunto difuso intersección definida en (3.5), las hipótesis del Test (3.9) para CDAs pueden expresarse equivalentemente de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \max \left\{ -2d \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \min \left\{ (\text{spr}_V + (1-2d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, 2(1-d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \right. \right. \\ \quad \left. \left. 2(\text{spr}_V - d \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \max \left\{ -2d \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \min \left\{ (\text{spr}_V + (1-2d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, 2(1-d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \right. \right. \\ \quad \left. \left. 2(\text{spr}_V - d \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda \neq 0. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Al igual que sucedía en el caso intervalar, los Tests (3.10) y (3.11) para CDAs pueden expresarse equivalentemente de modo análogo a (3.50), intercambiando el signo = en la hipótesis nula por \leq y \geq , y el signo \neq en la hipótesis alternativa por $>$ y $<$, respectivamente. Además, los casos $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$ deben analizarse separadamente. A continuación se estudiará el test bilateral (3.50) para $d \in \{0, 1\}$, así como el contraste unilateral correspondiente para $d \in (0, 1)$, que se denotará por (3.50'), donde = se sustituye por \geq bajo H_0 , y \neq por $<$ bajo H_1 . En este último caso, los desarrollos del test bilateral y el otro test unilateral se dejan como problema abierto para futuros trabajos.

Caso $d = 1$

Si $d = 1$, la hipótesis nula definida en (3.50) es equivalente a que la función no positiva

$$\tilde{f}_I^1(u, \alpha) = \max \left\{ -2 \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \min \left\{ (\text{spr}_V - \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, 0, 2(\text{spr}_V - \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right\} \right\}$$

se anule para casi todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$. Sin pérdida de generalidad se puede trabajar con la función no negativa

$$f_I^1(u, \alpha) = \max \left\{ |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| + (\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - \text{spr}_V)(u, \alpha), 0 \right\} \quad (3.51)$$

o, equivalentemente, con $(f_I^1)^2$ y, de este modo, las hipótesis del Test (3.50) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_I^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_I^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) > 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta que $\text{mid}_{f_I^1}(u, \alpha) = 0$ y $\text{spr}_{f_I^1}(u, \alpha) = f_I^1(u, \alpha)$ para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, se obtiene finalmente el test siguiente:

$$H_0 : \frac{1}{\theta} \|f_I^1\|_{\theta, \lambda}^2 = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \frac{1}{\theta} \|f_I^1\|_{\theta, \lambda}^2 > 0. \quad (3.53)$$

considerándose para la resolución del mismo el estadístico

$$T_n(f_I^1) = \frac{n}{\theta} \|\text{máx}\{|\text{mid}_{\bar{\mathcal{X}}_n} - \text{mid}_V| + \text{spr}_{\bar{\mathcal{X}}_n} - \text{spr}_V, 0\}\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.54)$$

Sea $\tilde{\mathcal{P}} = \{\mathcal{Y} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p) \mid \sigma_{\text{mid}_{\mathcal{Y}}}^2 < \infty \wedge 0 < \sigma_{\text{spr}_{\mathcal{Y}}}^2 < \infty\}$. La distribución del estadístico $T_n(f_I^1)$ bajo ciertas condiciones se estudia en el Lema 3.1.7. Además, en el Teorema 3.1.8 se muestra que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.53) cuando $T_n(f_I^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Lema 3.1.7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_I^1)$ definido como en (3.54). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$ se cumple que:*

$$T_n(f_I^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\text{máx}\{0, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}\|_{\theta, \lambda}^2 \quad (3.55)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T$, siendo $s_{\mathcal{X}}$ la función soporte de \mathcal{X} .

Demostración. A partir del Lema 3.1.1 y del Teorema Central del Límite para espacios de Hilbert separables, bajo la condición $E(\mathcal{X}) = V$ se cumple que:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(\text{mid}_{\bar{\mathcal{X}}_n} + \text{spr}_{\bar{\mathcal{X}}_n} - (\text{mid}_V + \text{spr}_V)) \\ \sqrt{n}(-\text{mid}_{\bar{\mathcal{X}}_n} + \text{spr}_{\bar{\mathcal{X}}_n} - (-\text{mid}_V + \text{spr}_V)) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X} - E(\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X}), -\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X} - E(-\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X}))^T.$$

Además, teniendo en cuenta que $\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X} = s_{\mathcal{X}}$ y $-\text{mid } \mathcal{X} + \text{spr } \mathcal{X} = s_{-\mathcal{X}}$, y debido a que el máximo, la norma $\|\cdot\|_{\theta, \lambda}$ y el cuadrado son funciones continuas, es inmediata la convergencia (3.55) propuesta en el lema. \square

Teorema 3.1.8 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.7. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.55). Si H_0 en (3.53) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_I^1) > k_{1-\rho}) \leq \rho \quad (3.56)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.53) cuando $T_n(f_I^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Demostración. La desigualdad (3.3.6) resulta inmediata a partir de la generalización a \mathbb{R}^p y por α -cortes del Teorema 3.1.2 para intervalos. \square

Caso $d \in (0, 1)$

Cuando $d \in (0, 1)$, se cumple que la función continua

$$f_I^{(0,1)}(u, \alpha) = \max \left\{ -2d \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \min \left\{ (\text{spr}_V + (1 - 2d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, 2(1 - d) \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), 2(\text{spr}_V - d \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right\} \right\} \quad (3.57)$$

que interviene en la hipótesis nula de (3.50) toma en unas ocasiones valores positivos y en otras valores negativos. Se definen las funciones

$$F, G : \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]) \longrightarrow \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1])$$

tales que para $f \in \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1])$ se cumple:

$$F(f)(u, \alpha) = \max\{f(u, \alpha), 0\}, \quad (3.58)$$

Lema 3.1.9 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_I^{(0,1)})$ definido como en (3.62). Si $X \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a) Cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n(f_I^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.63)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$\left(ds_{\mathcal{X}} + (d-1)s_{-\mathcal{X}} - E(ds_{\mathcal{X}} + (d-1)s_{-\mathcal{X}}), \frac{d}{2}(s_{\mathcal{X}} - s_{-\mathcal{X}}) - E\left(\frac{d}{2}(s_{\mathcal{X}} - s_{-\mathcal{X}})\right) \right)^T. \quad (3.64)$$

b) Cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n(f_I^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.65)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$\left(ds_{-\mathcal{X}} + (d-1)s_{\mathcal{X}} - E(ds_{-\mathcal{X}} + (d-1)s_{\mathcal{X}}), \frac{d}{2}(s_{\mathcal{X}} - s_{-\mathcal{X}}) - E\left(\frac{d}{2}(s_{\mathcal{X}} - s_{-\mathcal{X}})\right) \right)^T. \quad (3.66)$$

El siguiente teorema señala que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.61) cuando $T_n(f_I^{(0,1)}) < k_\rho$ es asintóticamente correcto. Tampoco se incluirá su demostración puesto que es análoga a la del Teorema 3.1.8, recurriendo al Teorema 3.1.4 para intervalos aleatorios.

Teorema 3.1.10 Considérense las condiciones del Lema 3.1.9. Sea $\rho \in [0, 1]$ y k_ρ el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.63) y (3.65).

Si H_0 en (3.61) es cierta, entonces:

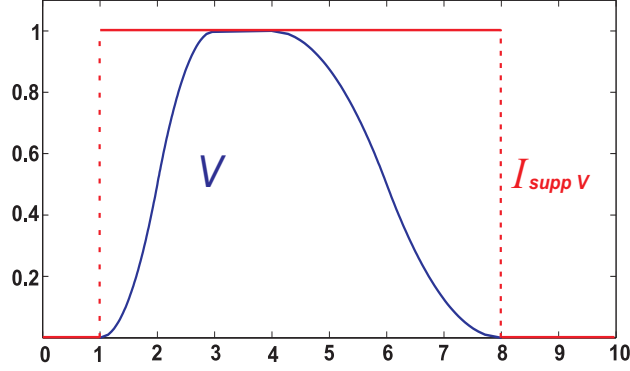
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n\left(f_I^{(0,1)}\right) < k_\rho\right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V + (2d - 1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, o bien cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V + (2d - 1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.61) cuando $T_n\left(f_I^{(0,1)}\right) < k_\rho$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Dado $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ que satisface que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, existen tres posibles situaciones que se pueden dar según la forma de su conjunto soporte: que el soporte de V sea de la forma $(-\infty, e]$, de la forma $[e, \infty)$, o bien de la forma $[e_1, e_2]$. Supongamos que se da la tercera situación, ya que el modo de proceder con las dos primeras sería análogo. En este caso, a la hora de analizar si $I(E(\mathcal{X}), V) = 0$, al igual que en casos anteriores la idea se centra en extender por α -cortes los resultados obtenidos en el Lema 3.1.5 cuando $d = 0$ en el caso intervalar. Para ello, es necesario que o bien todos los ínfimos de los α -niveles de V coincidan con los supremos de los α -niveles de $E(\mathcal{X})$ o viceversa. Entonces, si V_α está contenido estrictamente en (e_1, e_2) para $\alpha \in [c, 1]$ con $0 < c < 1$, lo anterior no se verificaría para todos los α -cortes, y el estadístico de contraste (que, como se ha visto en situaciones anteriores es un promedio por α -cortes) no tendría distribución límite puesto que divergiría en probabilidad a $-\infty$. Por este motivo, el estudio se va a restringir al trabajo con el indicador del soporte de V , ya que es en ese caso cuando será posible encontrar una distribución límite del estadístico de contraste para cada $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, según lo visto en el Lema 3.1.5. En la Figura 3.2 se representa el intervalo soporte de V .

En el caso $d = 0$, la hipótesis nula definida en (3.50) es equivalente a que la siguiente función no negativa:


 Figura 3.2: Representación de $I_{supp V}$ (indicador del soporte de V)

$$\tilde{f}_I^0(u, \alpha) = \max \left\{ 0, \min \left\{ (\text{spr}_{I_{supp V}} + \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) - \left| (\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_{I_{supp V}})(u, \alpha) \right|, 2\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), 2\text{spr}_{I_{supp V}}(u, \alpha) \right\} \right\}. \quad (3.67)$$

sea 0 para cada $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$. Como $2\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha) > 0$ y $2\text{spr}_{I_{supp V}}(u, \alpha) > 0$ para todo (u, α) , se puede trabajar alternativamente con la función no positiva:

$$f_I^0(u, \alpha) = \min \left\{ 0, \left| (\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_{I_{supp V}})(u, \alpha) \right| - (\text{spr}_{I_{supp V}} + \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) \right\} \quad (3.68)$$

igualada a 0 para todo (u, α) o, sin pérdida de generalidad, con la función $(f_I^0)^2$ y así (3.50) para $d = 0$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_I^0(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_I^0(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) > 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Finalmente, dado que $\text{mid}_{f_I^0}(u, \alpha) = 0$ y $\text{spr}_{f_I^0}(u, \alpha) = f_I^0(u, \alpha)$ para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, se obtienen como hipótesis del test las siguientes:

$$H_0 : \frac{1}{\theta} \|f_I^0\|_{\theta, \lambda}^2 = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \frac{1}{\theta} \|f_I^0\|_{\theta, \lambda}^2 > 0. \quad (3.70)$$

Para resolver el Test (3.70) se utilizará el siguiente estadístico:

$$T_n(f_I^0) = \frac{n}{\theta} \left\| \min \left\{ 0, \left| \text{mid}_{\bar{\mathcal{X}}_n} - \text{mid}_{I_{\text{supp}}V} \right| - \left(\text{spr}_{\bar{\mathcal{X}}_n} + \text{spr}_{I_{\text{supp}}V} \right) \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.71)$$

Como ya se mencionó, la convergencia del estadístico $T_n(f_I^0)$ bajo ciertas condiciones que se proponen en el Lema 3.1.11 se restringe al trabajo con $I_{\text{supp}}V$ y su demostración resulta análoga a la del Lema 3.1.1 teniendo en cuenta los resultados para intervalos correspondientes al Lema 3.1.5, por lo que no se incluirá dicha demostración.

Lema 3.1.11 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_I^0)$ definido como en (3.71). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:*

a) *Cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_{I_{\text{supp}}V} - \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_{I_{\text{supp}}V}$, se cumple que:*

$$T_n(f_I^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left\| \min \{0, \mathbf{Z}_1\} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \quad (3.72)$$

con \mathbf{Z}_1 una variable gaussiana en $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ que tiene esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))$.

b) *Cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_{I_{\text{supp}}V} - \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_{I_{\text{supp}}V}$, se cumple que:*

$$T_n(f_I^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left\| \min \{0, \mathbf{Z}_2\} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \quad (3.73)$$

con \mathbf{Z}_2 una variable gaussiana en $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ que tiene esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}))$.

El siguiente teorema afirma que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.70) cuando $T_n(f_I^0) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto. De nuevo no se incluye su demostración por ser análoga a la del Teorema 3.1.8, como extensión en este caso del Teorema 3.1.6 para intervalos aleatorios.

Teorema 3.1.12 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.11. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el máximo de los percentiles de orden $100(1 - \rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.72) y (3.73). Si H_0 en (3.70) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_I^0) > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_{I_{\text{supp}}V} - \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_{I_{\text{supp}}V}$, o bien cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_{I_{\text{supp}}V} - \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_{I_{\text{supp}}V}$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.70) cuando $T_n(f_I^0) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

3.1.5. Procedimiento bootstrap

Al igual que se vio en las Secciones 2.1.2 y 2.2.3 relativas a los tests bootstrap para la varianza de uno o varios CDAs, el empleo de técnicas bootstrap proporciona una velocidad de convergencia al nivel de significación nominal mayor que en el caso asintótico, haciendo posible el uso de los tests sobre la varianza incluso cuando se trabaja con muestras de tamaño pequeño/moderado. Además, dichas técnicas resultan útiles cuando la distribución límite del estadístico propuesto para el test asintótico es difícil de manejar, cosa que sucede cuando se trabaja con el grado de inclusión.

En esta sección se desarrolla un procedimiento bootstrap para el grado de inclusión de un intervalo aleatorio (o un CDA) en un intervalo (o valor difuso) fijado, siguiendo los estudios realizados para la media difusa en Montenegro *et al.* (2004), Gil *et al.* (2006) y González-Rodríguez *et al.* (2006). El bootstrap que se utiliza para llevar a cabo el análisis propuesto es de tipo residual, de manera que se emplean residuos por diferencia con respecto a la media muestral. En primer lugar se analizará el caso intervalar según los diferentes grados de inclusión considerados previamente, extendiendo posteriormente los resultados obtenidos al caso difuso.

Caso $d = 1$

El objetivo se centra en la aplicación de técnicas bootstrap para resolver el Test (3.13). Sea X un intervalo aleatorio definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) tal que

$\text{spr } E(X) > 0$ y sea $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ con $\text{spr } A > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n . Se define la población bootstrap como $\{Y_i\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid } A - \overline{X}_n + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n$. Es inmediato ver que $\overline{Y}_n = A$, siendo éste el peor de los casos bajo la hipótesis nula según se comprobó en el Lema 3.1.1.

Se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n, \{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir una muestra bootstrap procedente de $\{Y_i\}_{i=1}^n$, que será la siguiente:

$$\{Y_i^*\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n.$$

Se calcula para la muestra anterior la expresión del estadístico $T_n^{I^1}$ definido en (3.14), que operando se reduce a:

$$T_n^{I^{1*}} = \sqrt{n} \left(|\text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n| + \text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n \right). \quad (3.74)$$

Para resolver el Test (3.53) correspondiente al caso difuso, considérense \mathcal{X} un CDA definido sobre (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr } E(\mathcal{X})_\alpha > 0$ para $\alpha < 1$ y una m.a.s. a partir de él para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Sea también $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que $\text{spr } V_\alpha > 0$ para $\alpha < 1$. Procediendo de modo análogo al caso intervalar, se define el siguiente estadístico bootstrap:

$$T_n^*(f_I^1) = \frac{n}{\theta} \left\| \max \left\{ \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n \right| + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n, 0 \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.75)$$

En el Lema 3.1.13 se analiza la distribución asintótica de $T_n^{I^{1*}}$ y $T_n^*(f_I^1)$.

Lema 3.1.13 Sean $T_n^{I^{1*}}$ y $T_n^*(f_I^1)$ definidos como en (3.74) y (3.75).

a) Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$, se cumple:

$$T_n^{I^{1*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{z_1, z_2\} \text{ c.s. } - [P], \quad (3.76)$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.16).

b) Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$, se cumple:

$$T_n^*(f_I^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\text{máx}\{0, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}\|_{\theta, \lambda}^2 \text{ c.s. } - [P], \quad (3.77)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T$.

Demostración.

a) Mediante el empleo del Teorema Central del Límite Bootstrap para variables aleatorias reales y el Lema 3.1.1 se tiene que si $E(X) = A$,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(\text{mid } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n^* - (\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n)) \\ \sqrt{n}(-\text{mid } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n^* - (-\text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n)) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma) \text{ c.s. } [P], \quad (3.78)$$

donde Σ está definida como en (3.16). Asimismo, como la función máximo es continua, se tiene el resultado buscado.

b) A partir de los resultados desarrollados en el Lema 3.1.7 y del Teorema Central del Límite Bootstrap cuando se trabaja en espacios de Hilbert separables introducido por Giné & Zinn (1990), bajo la condición $E(\mathcal{X}) = V$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* - (\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n)) \\ \sqrt{n}(-\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* - (-\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n)) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \text{ c.s. } [P], \quad (3.79)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T$. Finalmente, debido a la continuidad de las funciones máx, $\|\cdot\|_{\theta, \lambda}$ y $(\cdot)^2$, se obtiene el apartado b) del teorema. \square

Observación 3.1.3 En el caso en el que las condiciones $E(X) = A$ o $E(\mathcal{X}) = V$ no se cumplieran, también sería posible probar que el estadístico bootstrap correspondiente converge a cierta distribución límite, si bien ésta no coincidiría con las indicadas en el teorema anterior. De esta forma, se puede asegurar no sólo que el procedimiento bootstrap

es correcto (puesto que preserva el nivel de significación a medida que el tamaño de muestra aumenta) sino que también es consistente (es decir, la potencia tiende a 1 a medida que la hipótesis alternativa se aleja de la nula). Este razonamiento es también válido para todos los resultados bootstrap que se van a proponer a lo largo de la memoria.

Como consecuencia del resultado anterior, se concluye el Teorema 3.1.14. Su demostración no se incluirá por ser análoga a las de los Teoremas 3.1.2 y 3.1.8.

Teorema 3.1.14 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.13 y $\rho \in [0, 1]$:*

- a) *Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica (3.78). Si H_0 en (3.13) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^1} > k_{1-\rho}^*\right) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.80)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.13) cuando $T_n^{I^1} > k_{1-\rho}^$ es asintóticamente correcto.*

- b) *Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica (3.79). Si H_0 en (3.53) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n(f_I^1) > k_{1-\rho}^*\right) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.81)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.53) cuando $T_n(f_I^1) > k_{1-\rho}^$ es asintóticamente correcto.*

Caso $d \in (0, 1)$

Dado X un intervalo aleatorio tal que $\text{spr} E(X) > 0$, X_1, \dots, X_n una m.a.s. extraída a partir de X y $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ con $\text{spr} A > 0$, se consideran las siguientes poblaciones bootstrap:

$$\{Y_i^1\}_{i=1}^n = \left\{ X_i + \text{mid} A - \overline{X}_n + \frac{1-d}{d} \text{spr} A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr} A, \frac{1}{d} \text{spr} A \right] \right\}_{i=1}^n,$$

$$\{Y_i^2\}_{i=1}^n = \left\{ X_i + \text{mid } A - \overline{X}_n - \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n.$$

Es inmediato ver que

$$\begin{aligned} \text{mid } \overline{Y}_n^1 - \text{mid } A + (2d-1) \text{spr } \overline{Y}_n^1 &= \text{spr } A \quad \text{y} \quad d \text{spr } \overline{Y}_n^1 = \text{spr } A, \\ -\text{mid } \overline{Y}_n^2 + \text{mid } A + (2d-1) \text{spr } \overline{Y}_n^2 &= \text{spr } A \quad \text{y} \quad d \text{spr } \overline{Y}_n^2 = \text{spr } A, \end{aligned}$$

siendo estos los peores casos bajo la hipótesis nula según se indicó en el Lema 3.1.3.

Se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir muestras bootstrap procedentes de $\{Y_i^1\}_{i=1}^n$ y $\{Y_i^2\}_{i=1}^n$ que serán las siguientes:

$$\begin{aligned} \{Y_i^{1*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n + \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^{2*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n - \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n. \end{aligned}$$

A partir de las muestras bootstrap que se acaban de definir, el estadístico $T_n^{I^{(0,1)}}$ introducido en (3.22) se transforma en los siguientes estadísticos según el caso que se esté considerando:

$$T_n^{I_1^{(0,1)*}} = \sqrt{n} \max \left\{ \left| \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n + \frac{1-d}{d} \text{spr } A \right| + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) + \frac{d-1}{d} \text{spr } A, d (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) \right\}, \quad (3.82)$$

$$T_n^{I_2^{(0,1)*}} = \sqrt{n} \max \left\{ \left| \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n - \frac{1-d}{d} \text{spr } A \right| + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) + \frac{d-1}{d} \text{spr } A, d (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) \right\}. \quad (3.83)$$

En relación al Test (3.61), sean \mathcal{X} un CDA tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ una m.a.s. extraída a partir de \mathcal{X} y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$. Procediendo de modo análogo al caso intervalar se definen los siguientes estadísticos:

$$T_n^* (f_{I_1}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{I_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{I_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.84)$$

$$T_n^* (f_{I_2}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{I_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{I_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.85)$$

donde

$$f_{I_1}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1}{d} \text{spr } \nu \right), \right. \\ \min \left\{ \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu + (1-2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right) \right. \\ \left. - \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu \right|, \right. \\ \left. 2(1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1}{d} \text{spr } \nu \right), 2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right) \right\}, \quad (3.86)$$

$$f_{I_2}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1}{d} \text{spr } \nu \right), \right. \\ \min \left\{ \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu + (1-2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right) \right. \\ \left. - \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} - \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu \right|, \right. \\ \left. 2(1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1}{d} \text{spr } \nu \right), 2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right) \right\}. \quad (3.87)$$

En el Lema 3.1.15 se muestra la distribución asintótica de los estadísticos bootstrap anteriores. La demostración del mismo no se incluye puesto que es análoga a la realizada en el Lema 3.1.13, en este caso teniendo en cuenta los Lemas 3.1.3 y 3.1.9.

Lema 3.1.15 Sean $T_n^{I_1^{(0,1)*}}$, $T_n^{I_2^{(0,1)*}}$, $T_n^*(f_{I_1}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{I_2}^{(0,1)})$ definidos como en (3.82), (3.83), (3.84) y (3.85), respectivamente. Si $X \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a.1) Cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d-1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{I_1^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{\tau_1, \tau_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.88)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.24).

a.2) Cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d-1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{I_2^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{\zeta_1, \zeta_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.89)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.26).

b.1) Cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^* \left(f_{I_1}^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s. } - [P] \quad (3.90)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.64).

b.2) Cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^* \left(f_{I_2}^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s. } - [P] \quad (3.91)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.66).

A partir del resultado anterior, se concluye el Teorema 3.1.16.

Teorema 3.1.16 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.15 y $\rho \in [0, 1]$:*

a) Sea $k_{1-\rho}^*$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.88) y (3.89). Si H_0 en (3.21) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(T_n^{I^{(0,1)}} > k_{1-\rho}^* \right) \leq \rho \quad \text{c.s. } - [P] \quad (3.92)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d-1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d-1)\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.21) cuando $T_n^{I^{(0,1)}} > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea k_ρ^* el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.90) y (3.91). Si H_0 en (3.61) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(T_n \left(f_I^{(0,1)} \right) < k_\rho^* \right) \leq \rho \quad \text{c.s. } - [P] \quad (3.93)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, o bien cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V + (2d-1)\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $d\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.61) cuando $T_n(f_I^{(0,1)}) < k_p^*$ es asintóticamente correcto.

Caso $d=0$

En este caso se pretende aplicar técnicas bootstrap para resolver el Test (3.33). Sean X un intervalo aleatorio tal que $\text{spr} E(X) > 0$, X_1, \dots, X_n una m.a.s. extraída a partir de X y $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ con $\text{spr} A > 0$. Se consideran las siguientes poblaciones bootstrap:

$$\{Y_i^1\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid} A - \overline{X}_n + \text{spr} A\}_{i=1}^n \quad \text{y} \quad \{Y_i^2\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid} A - \overline{X}_n - \text{spr} A\}_{i=1}^n.$$

Es inmediato ver que

$$\text{mid} \overline{Y}_n^1 - \text{mid} A - \text{spr} \overline{Y}_n^1 = \text{spr} A \quad \text{y} \quad -\text{mid} \overline{Y}_n^2 + \text{mid} A - \text{spr} \overline{Y}_n^2 = \text{spr} A,$$

siendo estos los peores casos bajo la hipótesis nula según se indicó en el Lema 3.1.5.

Se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir muestras bootstrap procedentes de $\{Y_i^1\}_{i=1}^n$ y $\{Y_i^2\}_{i=1}^n$ que serán las siguientes:

$$\{Y_i^{1*}\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid} A - \overline{X}_n + \text{spr} A\}_{i=1}^n \quad \text{y} \quad \{Y_i^{2*}\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid} A - \overline{X}_n - \text{spr} A\}_{i=1}^n.$$

A partir de las muestras que se acaban de definir, el estadístico $T_n^{I^0}$ introducido en (3.34) se transforma en los siguientes estadísticos según el caso que se esté considerando:

$$T_n^{I_1^{0*}} = \sqrt{n} \left(\left| \text{mid} \overline{X}_n^* - \text{mid} \overline{X}_n + \text{spr} A \right| - \left(\text{spr} \overline{X}_n^* - \text{spr} \overline{X}_n \right) - \text{spr} A \right), \quad (3.94)$$

$$T_n^{I_2^{0*}} = \sqrt{n} \left(\left| \text{mid} \overline{X}_n^* - \text{mid} \overline{X}_n - \text{spr} A \right| - \left(\text{spr} \overline{X}_n^* - \text{spr} \overline{X}_n \right) - \text{spr} A \right). \quad (3.95)$$

De modo análogo al caso intervalar, con el fin de resolver el Test (3.70) correspondiente al caso difuso, se considera un CDA \mathcal{X} definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$ y una m.a.s. a partir de él para cada $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Sea $I_{supp V}$ el indicador del soporte de $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, con $\text{spr } V_\alpha > 0$ para $\alpha < 1$. Se definen los siguientes estadísticos:

$$T_n^*(f_{I_1}^0) = \frac{n}{\theta} \left\| \min \left\{ 0, \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } I_{supp V} \right| - \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } I_{supp V} \right) \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2, \quad (3.96)$$

$$T_n^*(f_{I_2}^0) = \frac{n}{\theta} \left\| \min \left\{ 0, \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } I_{supp V} \right| - \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } I_{supp V} \right) \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.97)$$

En el Lema 3.1.17, cuya demostración se obviará por resultar análoga a la del Lema 3.1.15, considerando en este caso los Lemas 3.1.5 y 3.1.11, se indica la distribución asintótica de los estadísticos $T_n^{I_1^{0*}}$, $T_n^{I_2^{0*}}$, $T_n^*(f_{I_1}^0)$ y $T_n^*(f_{I_2}^0)$.

Lema 3.1.17 Sean $T_n^{I_1^{0*}}$, $T_n^{I_2^{0*}}$, $T_n^*(f_{I_1}^0)$ y $T_n^*(f_{I_2}^0)$ definidos como en (3.94), (3.95), (3.96) y (3.97), respectivamente. Si $X \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a.1) Cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{I_1^{0*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{mid } X - \text{spr } X}^2) \text{ c.s. } - [P]. \quad (3.98)$$

a.2) Cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{I_2^{0*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{mid } X + \text{spr } X}^2) \text{ c.s. } - [P]. \quad (3.99)$$

b.1) Cuando $\text{mid } E(\mathcal{X}) - \text{mid } V - \text{spr } E(\mathcal{X}) = \text{spr } V$, se cumple:

$$T_n^*(f_{I_1}^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left\| \min \{0, \mathbf{Z}_1\} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \text{ c.s. } - [P] \quad (3.100)$$

con \mathbf{Z}_1 una variable gaussiana en $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ que tiene esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))$.

b.2) Cuando $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V - \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^*(f_{I_2}^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\text{mín}\{0, \mathbf{Z}_2\}\|_{\theta, \lambda}^2 \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.101)$$

con \mathbf{Z}_2 una variable gaussiana en $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ que tiene esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}))$.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se concluye el Teorema 3.1.18.

Teorema 3.1.18 *Considérense las condiciones del Lema 3.1.17 y $\rho \in [0, 1]$.*

a) Sea k_ρ^* el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.98) y (3.99). Si H_0 en (3.33) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{I^0} < k_\rho^*) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.102)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) = \text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.33) cuando $T_n^{I^0} < k_\rho^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea $k_{1-\rho}^*$ el máximo de los percentiles de orden $100(1 - \rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.100) y (3.101). Si H_0 en (3.70) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_I^0) > k_{1-\rho}^*) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.103)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(\mathcal{X}) - \text{mid}_{I_{\text{supp } V}} - \text{spr } E(\mathcal{X}) = \text{spr}_{I_{\text{supp } V}}$, o bien cuando $-\text{mid } E(\mathcal{X}) + \text{mid}_{I_{\text{supp } V}} - \text{spr } E(\mathcal{X}) = \text{spr}_{I_{\text{supp } V}}$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.70) cuando $T_n(f_I^0) > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

A continuación se presentan los algoritmos correspondientes a los tests bootstrap presentados a lo largo de esta sección. Específicamente, se exponen los algoritmos correspondientes al trabajo con CDAs, resultando análogos los mismos para intervalos.

Algoritmos para los contrastes bootstrap (Test de inclusión)

Paso 1. En cada caso, elegir una m.a.s. de tamaño n a partir de $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$.

Paso 2. Para esta muestra calcular:

- El valor del estadístico $T_n(f_I^1)$ definido en (3.54) en el caso $d = 1$.
- El valor del estadístico $T_n(f_I^{(0,1)})$ definido en (3.62) en el caso $d \in (0, 1)$.
- El valor del estadístico $T_n(f_I^0)$ definido en (3.71) en el caso $d = 0$.

Paso 3. En cada caso, obtener una m.a.s. bootstrap $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$ de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ y calcular:

- El valor del estadístico bootstrap $T_n^*(f_I^1)$ definido en (3.75) en el caso $d = 1$.
- Los valores de los estadísticos bootstrap $T_n^*(f_{I_1}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{I_2}^{(0,1)})$ definidos en (3.84) y (3.85), respectivamente, en el caso $d \in (0, 1)$.
- Los valores de los estadísticos bootstrap $T_n^*(f_{I_1}^0)$ y $T_n^*(f_{I_2}^0)$ definidos en (3.96) y (3.97), respectivamente, en el caso $d = 0$.

Paso 4. Repetir el Paso 3 un gran número B de veces con el fin de conseguir un conjunto de B valores de los estadísticos en cada uno de los casos. Estos conjuntos se denotarán por $E_{I_1}^*$ si $d = 1$, $E_{I_1}^{*(0,1)}$ y $E_{I_2}^{*(0,1)}$ si $d \in (0, 1)$, $E_{I_1}^*$ y $E_{I_2}^*$ si $d = 0$.

Paso 5. Calcular el p -valor bootstrap según el grado de inclusión que se esté considerando:

CASO $d = 1$: Si se quiere contrastar (3.53), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en $E_{I_1}^*$ mayores o iguales que $T_n(f_I^1)$.

CASO $d \in (0, 1)$: Si se quiere contrastar (3.61), el p -valor aproximado viene dado por el máximo de las proporciones de valores en $E_{I_1}^{*(0,1)}$ y en $E_{I_2}^{*(0,1)}$ menores o iguales que $T_n(f_I^{(0,1)})$.

CASO $d = 0$: Si se quiere contrastar (3.70), el p -valor aproximado viene dado por el máximo de las proporciones de valores en $E_{I_1}^*$ y en $E_{I_2}^*$ mayores o iguales que $T_n(f_I^0)$.

3.1.6. Estudios de simulación

En esta sección se van a llevar a cabo estudios de simulación para analizar el funcionamiento de los tests bootstrap presentados en la Sección 3.1.5. En el caso intervalar, se van a resolver los siguientes contrastes de hipótesis:

$$H_0^1 : E(X) \subset A \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : E(X) \not\subset A, \quad \text{con } A = [-1, 3]; \quad (3.104)$$

$$H_0^2 : I(E(X), B) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : I(E(X), B) \neq 1/2, \quad \text{con } B = [1, 3]; \quad (3.105)$$

$$H_0^3 : E(X) \not\subset C \quad \text{frente a} \quad H_1^3 : E(X) \subset C, \quad \text{con } C = [3, 5]. \quad (3.106)$$

Dado el intervalo aleatorio X , se van a considerar dos casos diferentes según las distribuciones del mid y el spread:

$$I.a) \quad \text{mid } X \equiv \mathcal{N}(1, 5) \quad \text{y} \quad \text{spr } X \equiv \chi_2^2.$$

$$I.b) \quad \text{mid } X \equiv U(-4, 6) \quad \text{y} \quad \text{spr } X \equiv \chi_2^2.$$

Es inmediato comprobar que en los dos casos anteriores se cumple $E(X) = [-1, 3]$. En este contexto no se han realizado simulaciones para los tests asintóticos (tanto sin estimación de varianza como con ella) puesto que la distribución límite para todos los grados de inclusión considerados es difícil de manejar. El algoritmo bootstrap seguido es el incluido al final de la Sección 3.1.5.

En las Tablas 3.1 y 3.2 se presentan los resultados correspondientes a los tests propuestos anteriormente. En todos los casos se han realizado 10000 simulaciones a diferentes niveles de significación, así como 1000 réplicas bootstrap por simulación, lo cual implica un error muestral asintótico del 0.195% para $\rho = 0.01$, del 0.427% para $\rho = 0.05$ y del 0.588% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%.

Como se observa en las Tablas 3.1 y 3.2, el porcentaje de rechazos de H_0 está bastante próximo al nivel de significación nominal para tamaños de muestra mayores o iguales que $n = 100$. Por tanto, los tamaños de muestra necesarios para obtener resultados adecuados

	$H_0^1 : E(X) \subset A$			$H_0^2 : I(E(X), B) = 1/2$			$H_0^3 : E(X) \notin C$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	2.42	7.84	13.62	2.86	7.36	12.02	14.79	22.04	27.74
30	1.26	6.18	10.48	1.54	5.95	11.22	7.19	13.22	18.32
50	1.08	5.02	9.90	1.47	5.46	10.47	4.22	9.91	14.76
100	1.06	5.16	9.74	1.39	5.11	10.53	2.14	6.26	10.73
200	1.10	5.00	10.34	1.25	5.06	10.11	1.06	5.25	10.56

Tabla 3.1: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso intervalar *I.a)*

	$H_0^1 : E(X) \subset A$			$H_0^2 : I(E(X), B) = 1/2$			$H_0^3 : E(X) \notin C$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	1.82	6.42	11.64	3.70	7.35	12.30	4.73	11.00	16.33
30	0.90	4.72	10.26	1.69	6.01	10.60	1.72	6.15	10.79
50	0.82	4.80	9.70	1.63	5.74	10.51	1.19	5.06	10.08
100	0.70	4.68	9.72	1.40	5.41	10.31	1.08	4.99	10.16
200	0.90	5.02	9.82	0.99	4.91	10.10	0.89	5.03	9.94

Tabla 3.2: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso intervalar *I.b)*

son moderados. Como futuro estudio, puede abordarse la opción de estimar la matriz de varianzas-covarianzas de la distribución límite de los estadísticos de contraste mediante el empleo de Monte Carlo.

Por otro lado, se van a realizar estudios de simulación para el grado de inclusión de la esperanza de un CDA \mathcal{X} en ciertos valores difusos fijados, $U, V, W \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Concretamente se considera un CDA trapezoidal $\mathcal{X} = Tra(a, b, c, d)$ de manera que $b - a \equiv \chi_{14}^2$, $d - c \equiv \chi_8^2$ y b y c siguen las siguientes distribuciones:

F.a) $b \equiv \mathcal{N}(-0.5, 2)$ y $c \equiv b + \mathcal{N}(1, 1)$.

F.b) $b \equiv U(-1, 0)$ y $c \equiv U(1, 2)$.

En los dos casos la esperanza de \mathcal{X} viene dada por $E(\mathcal{X}) = \text{Tra}(-14.5, -0.5, 1.5, 9.5)$. En este caso se pretenden resolver los tests siguientes:

$$H_0^1 : E(\mathcal{X}) \subset U \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : E(\mathcal{X}) \not\subset U; \quad (3.107)$$

$$H_0^2 : I(E(\mathcal{X}), V) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : I(E(\mathcal{X}), V) \neq 1/2; \quad (3.108)$$

$$H_0^3 : I_{\text{supp } E(\mathcal{X})} \not\subset W \quad \text{frente a} \quad H_1^3 : I_{\text{supp } E(\mathcal{X})} \subset W, \quad (3.109)$$

donde $I_{\text{supp } E(\mathcal{X})}$ es el indicador del soporte de $E(\mathcal{X})$ para ponernos en el peor caso bajo H_0 según se vio en la Sección 3.1.5, $U = \text{Tra}(-14.5, -0.5, 1.5, 9.5)$, $V = \text{Tra}(-3.5, 0.5, 1.5, 9.5)$ y $W = \text{Tra}(9.5, 9.5, 12.5, 20.5)$. El estadístico de contraste para el grado de inclusión en el caso difuso está definido en función de la norma $\|\cdot\|_{\theta, \lambda}$, aunque es fácil ver que el valor de θ no influye en el procedimiento bootstrap. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se va a trabajar con $\theta = 1/3$. Al igual que antes, se van a realizar 10000 simulaciones de los correspondientes procedimientos bootstrap (implicando los mismos errores muestrales) a distintos niveles de significación y con 1000 réplicas bootstrap en cada una de ellas. Los resultados se presentan en las Tablas 3.3 y 3.4.

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : E(\mathcal{X}) \subset U$			$H_0^2 : I(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$			$H_0^3 : I_{\text{supp } E(\mathcal{X})} \not\subset W$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	1.90	7.01	12.39	2.47	6.97	12.99	3.01	7.79	12.63
30	1.37	5.86	10.35	1.32	5.59	10.45	1.64	5.94	10.81
50	1.11	4.87	10.11	1.15	5.10	10.31	1.34	4.83	11.02
100	0.89	4.86	9.87	1.16	4.87	10.11	1.18	5.10	10.72
200	0.97	4.91	10.00	1.14	5.24	9.97	1.02	5.20	10.15

Tabla 3.3: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso difuso *F.a)*

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : E(\mathcal{X}) \subset U$			$H_0^2 : I(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$			$H_0^3 : I_{supp E(\mathcal{X})} \notin W$		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
10	1.04	4.56	9.66	1.58	5.96	11.52	3.99	8.17	12.62
30	0.54	3.63	8.91	0.95	4.80	9.74	1.90	6.39	10.82
50	0.65	4.01	8.81	0.99	4.59	9.50	1.57	5.71	10.20
100	0.68	3.92	8.97	0.95	4.67	9.83	1.46	5.54	10.15
200	0.63	4.31	9.28	0.89	4.76	10.21	1.12	5.15	9.93

Tabla 3.4: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de inclusión en el caso difuso *F.b*)

Según se puede observar en las Tablas 3.3 y 3.4, los porcentajes de rechazos de hipótesis nula se encuentran cerca del nivel de significación nominal, en general, para tamaños de muestra mayores o iguales que $n = 100$. De nuevo resultaría necesario llevar a cabo una estimación de la matriz de varianzas-covarianzas para acelerar la aproximación al nivel de significación nominal.

3.1.7. Aplicación práctica

Un requerimiento que exige la permanencia de la mención de Denominación de Origen del queso Gamonedo se basa en analizar si las opiniones de un experto concreto acerca de determinadas características del queso se encuentran dentro de unos límites establecidos de antemano con cierto grado de inclusión. Al igual que en la Sección 2.1.4, el estudio se va a centrar en el aspecto, la calidad del olor y la calidad del sabor del queso y las percepciones de las características anteriores vendrán dadas por números difusos trapezoidales.

En primer lugar, las opiniones del experto se van a simplificar considerando únicamente los intervalos dados por el 1-corte de los números trapezoidales anteriores. En este contexto se consideran los siguientes intervalos aleatorios:

- $X \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- $Y \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- $Z \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

Se pretende analizar si la media de opiniones del experto acerca del aspecto, el olor y el sabor del queso está contenida en el intervalo $A = [60, 100]$ con grado mayor o igual a $1/2$, y si no está contenida en el intervalo $B = [0, 60]$. Para ello, se van a resolver los siguientes contrastes de hipótesis.

$$H_0^1 : I(E(X), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^1 : I(E(X), A) < 1/2. \quad (3.110)$$

$$H_0^2 : I(E(Y), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^2 : I(E(Y), A) < 1/2. \quad (3.111)$$

$$H_0^3 : I(E(Z), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^3 : I(E(Z), A) < 1/2. \quad (3.112)$$

$$H_0^4 : I(E(X), B) = 0 \text{ frente a } H_1^4 : I(E(X), B) \neq 0. \quad (3.113)$$

$$H_0^5 : I(E(Y), B) = 0 \text{ frente a } H_1^5 : I(E(Y), B) \neq 0. \quad (3.114)$$

$$H_0^6 : I(E(Z), B) = 0 \text{ frente a } H_1^6 : I(E(Z), B) \neq 0. \quad (3.115)$$

Se considera una muestra de 20 percepciones intervalares a partir de los intervalos aleatorios X , Y y Z , siendo las mismas los 1-cortes de las muestras expresadas en la Tabla 2.11. Las muestras se recogen en la Tabla 3.5.

Las medias muestrales en los tres casos vienen dadas por $\bar{X} = [58.30, 63.70]$, $\bar{Y} = [63.70, 69.05]$ y $\bar{Z} = [61.65, 67.30]$. Se ha aplicado el procedimiento bootstrap desarrollado en la Sección 3.1.5 para el test de inclusión de un intervalo aleatorio en un intervalo en los casos $d \in (0, 1)$ y $d = 0$, llevándose a cabo 10000 réplicas del mismo. Los p -valores obtenidos según cada caso son siempre $p = 1$ para los Tests (3.110), (3.111) y (3.112), y $p = 0.2026$, $p = 0.9543$ y $p = 0.7320$ para los Tests (3.113), (3.114) y (3.115), respectivamente. Por tanto, no se rechaza ninguna de las hipótesis nulas a los niveles de significación usuales y así se puede concluir que la media de las opiniones del experto acerca de la apariencia, el olor y el sabor del queso puede considerarse que está contenida en $[60, 100]$ con grado mayor o igual a $1/2$ y que no está contenida en el intervalo $[0, 60]$.

Nº queso	Aspecto de la pasta	Calidad olor	Calidad sabor
1	[75,84]	[70,76]	[49,56]
2	[56,60]	[53,56]	[65,70]
3	[56,63]	[70,75]	[74,80]
4	[52,56]	[67,73]	[54,60]
5	[79,84]	[54,60]	[44,50]
6	[57,63]	[60,65]	[55,60]
7	[52,57]	[56,63]	[50,56]
8	[54,60]	[70,75]	[49,53]
9	[48,53]	[50,56]	[68,72]
10	[60,66]	[77,80]	[75,80]
11	[53,56]	[78,82]	[55,60]
12	[60,65]	[50,55]	[80,86]
13	[58,62]	[68,72]	[74,80]
14	[44,50]	[80,86]	[54,60]
15	[64,70]	[75,80]	[77,84]
16	[70,76]	[56,63]	[45,50]
17	[65,70]	[60,65]	[73,80]
18	[55,61]	[46,54]	[70,74]
19	[58,62]	[60,65]	[47,53]
20	[50,56]	[74,80]	[75,82]

Tabla 3.5: Muestra simplificada de opiniones del experto acerca del aspecto de la pasta, la calidad del olor y la calidad del sabor de 20 quesos

En un segundo estudio, se quiere analizar el grado de inclusión basándose en los siguientes CDAs trapezoidales:

- $\mathcal{X} \equiv$ “percepción del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- $\mathcal{Y} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- $\mathcal{Z} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

De nuevo se va a considerar $\theta = 1/3$. Las medias muestrales de los tres CDAs anteriores son $\bar{\mathcal{X}} = Tra(53.15, 58.3, 63.7, 69)$, $\bar{\mathcal{Y}} = Tra(58.5, 63.7, 69.05, 74.85)$ y $\bar{\mathcal{Z}} = Tra(56.45, 61.65, 67.3, 73)$. Se quiere contrastar si la media de las opiniones del experto para cada característica está contenida en el número difuso trapezoidal $U = Tra(55, 70, 100, 100)$ con grado mayor o igual a $1/2$ y si puede considerarse que la misma no está incluida en el número $V = Tra(0, 0, 50, 60)$. Así, se llevarán a cabo los siguientes contrastes:

$$H_0^1 : I(E(\mathcal{X}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^1 : I(E(\mathcal{X}), U) < 1/2. \quad (3.116)$$

$$H_0^2 : I(E(\mathcal{Y}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^2 : I(E(\mathcal{Y}), U) < 1/2. \quad (3.117)$$

$$H_0^3 : I(E(\mathcal{Z}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^3 : I(E(\mathcal{Z}), U) < 1/2. \quad (3.118)$$

$$H_0^4 : I(E(\mathcal{X}), V) = 0 \text{ frente a } H_1^1 : I(E(\mathcal{X}), V) \neq 0. \quad (3.119)$$

$$H_0^5 : I(E(\mathcal{Y}), V) = 0 \text{ frente a } H_1^2 : I(E(\mathcal{Y}), V) \neq 0. \quad (3.120)$$

$$H_0^6 : I(E(\mathcal{Z}), V) = 0 \text{ frente a } H_1^3 : I(E(\mathcal{Z}), V) \neq 0. \quad (3.121)$$

En este caso las muestras de opiniones para cada característica son las mismas que las dadas en la Tabla 2.11. Se han realizado 10000 réplicas del procedimiento bootstrap presentado en la Sección 3.1.5 para el caso difuso cuando $d \in (0, 1)$ y $d = 0$. Los p -valores obtenidos son $p = 0.0796$, $p = 1$ y $p = 0.5456$ para los Tests (3.116), (3.117) y (3.118), y $p = 0.0868$, $p = 0.4534$ y $p = 0.3538$ para los Tests (3.119), (3.120) y (3.121). Se puede concluir que en el caso de la calidad del olor y del sabor, las hipótesis nulas no se rechazarían a los niveles de significación usuales, mientras que en el caso del aspecto de la pasta no se rechazarían a los niveles $\rho = 0.01$ y $\rho = 0.05$ aunque sí se rechazarían las hipótesis nulas en (3.116) y (3.119) al nivel $\rho = 0.1$.

Otras aplicaciones

En las siguientes situaciones también puede resultar útil recurrir a la resolución de un test de hipótesis para el grado de inclusión de la esperanza de un CDA (o de un conjunto aleatorio) en un conjunto difuso (o conjunto) previamente fijado.

- En el caso de inversión en bolsa es interesante analizar si la media de las predicciones de los expertos sobre la posición del índice de Bolsa en un determinado momento se encuentra incluida dentro de ciertos límites con un grado de riesgo considerado.
- Además, en el caso de la detección de una enfermedad cardíaca en un paciente específico, es posible analizar si la fluctuación de las tensión de un paciente que esté enfermo puede considerarse contenida entre un mínimo y un máximo previamente establecido (por ejemplo, los límites que presente un paciente sano) con al menos determinado grado.
- Finalmente, puede resultar útil comparar si el movimiento de las mareas en un determinado punto varía entre determinados límites con cierto grado con el fin de detectar cambios climáticos a lo largo del tiempo.

3.2. Contrastes de hipótesis para el grado de similitud de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado

A continuación se incluyen algunas definiciones previas sobre el grado de intersección entre conjuntos y conjuntos difusos.

3.2.1. Grado de similaridad. Definiciones previas

Si $U, V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, se define el grado de similaridad de U en V según Dubois & Prade (1980), $S(U, V)$, como $|U \cap V|/|U \cup V|$. Aquí $|U|$ denota la potencia del conjunto U definida por De Luca & Termini (1972) como se vio en (3.7), concepto que resulta equivalente al de medida de un conjunto introducido en (3.4). De este modo, se tiene la siguiente expresión para el *grado de similaridad de U y V* :

$$S(U, V) = \frac{m(U \cap V)}{m(U \cup V)}, \quad (3.122)$$

donde $m(U \cup V) = m(U) + m(V) - m(U \cap V)$. Es inmediato comprobar que el *rango de valores del grado de similaridad* es $[0, 1]$, ya que $m(U \cap V) \leq m(U \cup V)$. Además, se puede definir análogamente el grado de similaridad para elementos de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ y $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$.

Sean (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, \mathcal{X} un CDA y V un conjunto difuso fijado. Dado $d \in [0, 1]$, el objetivo en este caso es contrastar

$$H_0 : S(E(\mathcal{X}), V) = d \quad \text{frente a} \quad H_1 : S(E(\mathcal{X}), V) \neq d. \quad (3.123)$$

Al igual que ocurría para el grado de inclusión, se pueden plantear los correspondientes contrastes unilaterales como sigue:

$$H_0 : S(E(\mathcal{X}), V) \leq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : S(E(\mathcal{X}), V) > d; \quad (3.124)$$

$$H_0 : S(E(\mathcal{X}), V) \geq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : S(E(\mathcal{X}), V) < d. \quad (3.125)$$

Inicialmente se resolverán los tests propuestos para intervalos aleatorios y A compacto con $\text{spr } A > 0$, y a continuación se extenderán los resultados al contexto difuso en $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$. Seguidamente se llevarán a cabo simulaciones para probar el buen comportamiento de los tests propuestos. Por último, se aplicarán los resultados obtenidos sobre ejemplos reales. En este caso, no tiene sentido analizar el grado de similaridad entre $E(X)$ y A cuando este último es un intervalo no acotado, ya que como la medida de A es infinita dicho grado será siempre 0.

3.2.2. Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}

Sean (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ tal que $\text{spr } E(X) > 0$ y A un intervalo compacto fijado para el que $\text{spr } A > 0$. En este caso, objetivo se centra en resolver los Tests (3.123), (3.124) y (3.125) para el grado de similaridad entre $E(X)$ en A .

De la definición dada en (3.1) se tiene que las hipótesis del Test (3.123) pueden expresarse de modo equivalente como:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \left\{ -2d(\text{spr } E(X) + \text{spr } A), \text{mín} \left\{ \text{spr } E(X) - d \text{spr } A, \text{spr } A - d \text{spr } E(X), \right. \right. \\ \left. \left. (1-d)(\text{spr } E(X) + \text{spr } A) - (1+d)|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| \right\} \right\} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \left\{ -2d(\text{spr } E(X) + \text{spr } A), \text{mín} \left\{ \text{spr } E(X) - d \text{spr } A, \text{spr } A - d \text{spr } E(X), \right. \right. \\ \left. \left. (1-d)(\text{spr } E(X) + \text{spr } A) - (1+d)|\text{mid } E(X) - \text{mid } A| \right\} \right\} \neq 0. \end{cases} \quad (3.126)$$

Asimismo, las hipótesis de los Tests (3.124) y (3.125) son análogas a las del anterior cambiando el signo = en H_0 por \leq y \geq respectivamente, así como el signo \neq en la H_1 por $>$ y $<$, respectivamente.

Observación 3.2.1 Al igual que sucedía en el caso del grado de inclusión, hay tres situaciones diferentes en cuanto al modo de llevar a cabo su estudio, $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$.

- $d = 1$ quiere decir que el intervalo $E(X)$ y A son iguales.
- $d \in (0, 1)$ supone que el intervalo $E(X)$ se parece a A con cierto grado d .
- $d = 0$ significa que $E(X)$ no tiene nada en común con A .

La Figura 3.3 refleja los diversos grados de similaridad que se pueden presentar.

En los siguientes apartados se analizan las diferentes situaciones que se acaban de citar.

Caso $d = 1$

Las hipótesis del Test (3.123) pueden expresarse del siguiente modo:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \{ |\text{spr } E(X) - \text{spr } A|, |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| \} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \{ |\text{spr } E(X) - \text{spr } A|, |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| \} > 0. \end{cases} \quad (3.127)$$

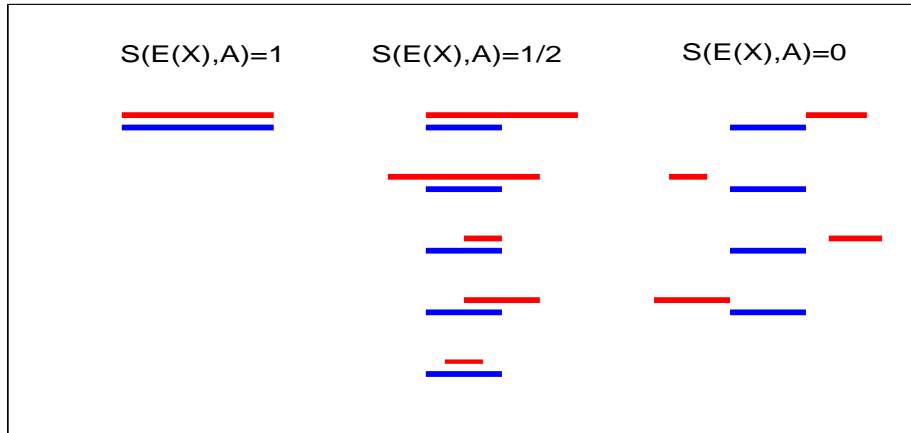


Figura 3.3: Diferentes formas de representación de distintos grados de similaridad entre $E(X)$ (en rojo) y A (en azul)

El Test (3.125) resulta igual al anterior puesto que el grado de similaridad no puede ser superior a 1 y, por otro lado, el estudio del Test (3.124) para $d = 1$ carece de interés, ya que siempre se cumple que el grado de similaridad es menor o igual que 1.

Dada una m.a.s. extraída a partir de X , $\{X_i\}_{i=1}^n$, en el Lema 3.2.1 se analiza la convergencia bajo ciertas condiciones del siguiente estadístico:

$$T_n^{S^1} = \sqrt{n} \max \{ |\text{mid } \bar{X}_n - \text{mid } A|, |\text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A| \}. \quad (3.128)$$

Lema 3.2.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X , X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{S^1}$ definido como en (3.128). Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$ se cumple que:

$$T_n^{S^1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{|z_1|, |z_2|\} \quad (3.129)$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{mid } X}^2 & \sigma_{\text{mid } X, \text{spr } X} \\ \sigma_{\text{mid } X, \text{spr } X} & \sigma_{\text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.130)$$

Demostración. Bajo la condición $E(X) = A$, el estadístico (3.128) es igual a:

$$T_n^{S^1} = \text{máx} \left\{ \sqrt{n} |\text{mid } \overline{X}_n - E(\text{mid } X)|, \sqrt{n} |\text{spr } \overline{X}_n - E(\text{spr } X)| \right\}.$$

Utilizando el Teorema Central del Límite para variables bidimensionales se tiene

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} (\text{mid } \overline{X}_n - E(\text{mid } X)) \\ \sqrt{n} (\text{spr } \overline{X}_n - E(\text{spr } X)) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma),$$

donde Σ está definida como en (3.130). Asimismo, como las funciones valor absoluto y máximo son continuas, se tiene el resultado buscado. \square

En el siguiente teorema se prueba que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.127) cuando $T_n^{S^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Teorema 3.2.2 *Considérense las condiciones del Lema 3.2.1. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.129). Si H_0 en (3.127) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{S^1} > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.127) cuando $T_n^{S^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

En esta sección se estudiará el test unilateral (3.125) para un grado de similaridad $d \in (0, 1)$, dejando el análisis de los otros dos contrastes para trabajos futuros. Las hipótesis del Test (3.125) pueden escribirse de modo equivalente como sigue:

$$\begin{cases} H_0 : \text{máx} \left\{ d \text{spr } A - \text{spr } E(X), d \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \quad \left. (1 + d) |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (d - 1) (\text{spr } E(X) + \text{spr } A) \right\} \leq 0; \\ H_1 : \text{máx} \left\{ d \text{spr } A - \text{spr } E(X), d \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \quad \left. (1 + d) |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| + (d - 1) (\text{spr } E(X) + \text{spr } A) \right\} > 0; \end{cases} \quad (3.131)$$

Se considera $\{X_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. obtenida a partir de X y se define el estadístico

$$T_n^{S^{(0,1)}} = \sqrt{n} \max \left\{ d \operatorname{spr} A - \operatorname{spr} \overline{X_n}, d \operatorname{spr} \overline{X_n} - \operatorname{spr} A, \right. \\ \left. (1+d) |\operatorname{mid} \overline{X_n} - \operatorname{mid} A| + (d-1) (\operatorname{spr} \overline{X_n} + \operatorname{spr} A) \right\}, \quad (3.132)$$

encontrándose su distribución límite bajo ciertas condiciones en el Lema 3.2.3. Además, el Teorema 3.2.4 muestra que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.131) cuando $T_n^{S^{(0,1)}} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto. La demostración de ambos es análoga a las correspondientes al Lema 3.1.3 y al Teorema 3.1.4, respectivamente, y por tanto no se incluirán en esta memoria.

Lema 3.2.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{S^{(0,1)}}$ definido como en (3.132). Si $X \in \mathcal{P}$, entonces:*

a) *Cuando $\operatorname{spr} E(X) = d \operatorname{spr} A$ y $\operatorname{mid} E(X) - \operatorname{mid} A = (1-d) \operatorname{spr} A$, se cumple que:*

$$T_n^{S^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{\tau_1, \tau_2\} \quad (3.133)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X}^2 & \sigma_{(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X, \operatorname{spr} X} \\ \sigma_{(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X, \operatorname{spr} X} & \sigma_{\operatorname{spr} X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.134)$$

b) *Cuando $\operatorname{spr} E(X) = d \operatorname{spr} A$ y $-\operatorname{mid} E(X) + \operatorname{mid} A = (1-d) \operatorname{spr} A$, se cumple que:*

$$T_n^{S^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{\zeta_1, \zeta_2\} \quad (3.135)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{-(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X}^2 & \sigma_{-(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X, \operatorname{spr} X} \\ \sigma_{-(1+d)\operatorname{mid} X+(d-1)\operatorname{spr} X, \operatorname{spr} X} & \sigma_{\operatorname{spr} X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

c) *Cuando $d \operatorname{spr} E(X) = \operatorname{spr} A$ y $\operatorname{mid} E(X) - \operatorname{mid} A = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr} A$, se cumple que:*

$$T_n^{S^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{\xi_1, \xi_2\} \quad (3.137)$$

donde $(\xi_1, \xi_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_3)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X}^2 & \sigma_{(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X, d\text{spr } X} \\ \sigma_{(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X, d\text{spr } X} & d^2 \sigma_{\text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

d) Cuando $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A = \frac{(1-d)}{d}\text{spr } A$, se cumple que:

$$T_n^{S^{(0,1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{v_1, v_2\} \quad (3.139)$$

donde $(v_1, v_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_4)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_{-(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X}^2 & \sigma_{-(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X, d\text{spr } X} \\ \sigma_{-(1+d)\text{mid } X+(d-1)\text{spr } X, d\text{spr } X} & d^2 \sigma_{\text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

Teorema 3.2.4 *Considérense las condiciones del Lema 3.2.3. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.133), (3.135), (3.137) y (3.139). Si H_0 en (3.131) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{S^{(0,1)}} > k_{1-\rho}\right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza en cuatro situaciones diferentes: o bien cuando $\text{spr } E(X) = d\text{spr } A$ y $\text{mid } E(X) - \text{mid } A = (1-d)\text{spr } A$; o cuando $\text{spr } E(X) = d\text{spr } A$ y $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A = (1-d)\text{spr } A$; o cuando $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $\text{mid } E(X) - \text{mid } A = \frac{(1-d)}{d}\text{spr } A$; o bien cuando $d\text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A = \frac{(1-d)}{d}\text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.131) cuando $T_n^{S^{(0,1)}} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

En este caso, el Test (3.123) se reduce al contraste (3.33) introducido para el grado de inclusión igual a 0. Esto es debido a que el hecho de que un conjunto no esté en absoluto contenido en otro es equivalente a que el grado de similaridad se anule.

Asimismo, el Test (3.124) se reduce al (3.33) ya que el grado de similaridad no puede ser menor que 0, mientras que el Test (3.125) no es interesante debido a que dicho grado es siempre mayor o igual que 0.

3.2.3. Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , un CDA $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ asociado tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, y un valor difuso fijado $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ con $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, el objetivo de esta sección se centra en resolver los Tests (3.123), (3.124) y (3.125) sobre el grado de similaridad de $E(\mathcal{X})$ en V .

Cuando se trabaja con CDAs, las hipótesis del Test (3.123) pueden expresarse equivalentemente como

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \text{máx} \left\{ -2d(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} + \text{spr}_V)(u, \alpha), \text{mín} \left\{ (\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - d \text{spr}_V)(u, \alpha), \right. \right. \\ \quad \left. \left. (\text{spr}_V - d \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha), (1-d)(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} + \text{spr}_V)(u, \alpha) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - (1+d)|(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0. \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \text{máx} \left\{ -2d(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} + \text{spr}_V)(u, \alpha), \text{mín} \left\{ (\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - d \text{spr}_V)(u, \alpha), \right. \right. \\ \quad \left. \left. (\text{spr}_V - d \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha), (1-d)(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} + \text{spr}_V)(u, \alpha) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - (1+d)|(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| \right\} \right\} d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda \neq 0. \end{array} \right. \quad (3.141)$$

Al igual que sucedía en el caso intervalar, es inmediato ver que las hipótesis de los Tests (3.124) y (3.125) en el marco de CDAs pueden expresarse equivalentemente de modo análogo a las del (3.141), cambiando el símbolo = en H_0 por \leq y \geq , y \neq en H_1 por $>$ y $<$, respectivamente.

De nuevo, los casos $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$ deben analizarse separadamente. En esta sección se estudiará el test bilateral (3.141) para $d \in \{0, 1\}$, así como el contraste unilateral correspondiente para $d \in (0, 1)$, (3.141'), donde = se sustituye por \geq bajo la hipótesis nula, y \neq por $<$ bajo la hipótesis alternativa. De nuevo, los desarrollos del test bilateral y el otro test unilateral en el caso $d \in (0, 1)$ se dejan como problema abierto para futuros trabajos.

Caso $d = 1$

En el caso $d = 1$, se tiene la siguiente función continua y no positiva que para cada $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$ se define como:

$$\tilde{f}_S^1(u, \alpha) = \max \left\{ -2(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} + \text{spr}_V)(u, \alpha), \min \left\{ (\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - \text{spr}_V)(u, \alpha), (\text{spr}_V - \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha), -2|(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| \right\} \right\}.$$

La hipótesis nula definida en (3.141) implica que la función anterior debe ser 0 en cada punto. Además, sin pérdida de generalidad se puede considerar la función no negativa

$$f_S^1(u, \alpha) = \max \left\{ |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, |(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - \text{spr}_V)(u, \alpha)| \right\} \quad (3.142)$$

o lo que es lo mismo, con $(f_S^1)^2$. Por tanto, las hipótesis del Test (3.141) se pueden escribir como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_S^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_S^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) > 0. \end{array} \right. \quad (3.143)$$

Por otro lado, al igual que sucedía cuando se trabajaba con el grado de inclusión, se cumple que $\text{mid}_{f_S^1}(u, \alpha) = 0$ y $\text{spr}_{f_S^1}(u, \alpha) = f_S^1(u, \alpha)$ para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, obteniéndose finalmente las hipótesis siguientes:

$$H_0 : \frac{1}{\theta} \|f_S^1\|_{\theta, \lambda}^2 = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \frac{1}{\theta} \|f_S^1\|_{\theta, \lambda}^2 > 0. \quad (3.144)$$

Para resolver el test propuesto se considera el estadístico

$$T_n(f_S^1) = \frac{n}{\theta} \left\| \max \left\{ |\text{mid}_{\bar{x}_n} - \text{mid}_V|, |\text{spr}_{\bar{x}_n} - \text{spr}_V| \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.145)$$

La distribución del estadístico $T_n(f_S^1)$ bajo ciertas condiciones viene dada en el Lema 3.2.5. Su demostración es análoga a la descrita en el Lema 3.1.7, en este caso teniendo en cuenta el Lema 3.2.1 así como el Teorema Central del Límite en espacios de Hilbert separables.

Lema 3.2.5 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_S^1)$ definido como en (3.54). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$ se cumple que:

$$T_n(f_S^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\text{máx}\{|\mathbf{Z}_1|, |\mathbf{Z}_2|\}\|_{\theta, \lambda}^2 \quad (3.146)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(\text{mid } \mathcal{X} - E(\text{mid } \mathcal{X}), \text{spr } \mathcal{X} - E(\text{spr } \mathcal{X}))^T$.

El siguiente teorema afirma que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.144) cuando $T_n(f_S^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto. Su demostración es análoga a la del Teorema 3.1.8.

Teorema 3.2.6 Considérense las condiciones del Lema 3.2.5. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.146). Si H_0 en (3.144) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_S^1) > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.144) cuando $T_n(f_S^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

En este caso, la función continua

$$f_S^{(0,1)}(u, \alpha) = \text{máx} \left\{ -2d(\text{spr } E(\mathcal{X}) + \text{spr } V)(u, \alpha), \text{mín} \left\{ (\text{spr } E(\mathcal{X}) - d \text{spr } V)(u, \alpha), \right. \right. \\ \left. \left. (\text{spr } V - d \text{spr } E(\mathcal{X}))(u, \alpha), (1 - d)(\text{spr } E(\mathcal{X}) + \text{spr } V)(u, \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. -(1 + d)|(\text{mid } E(\mathcal{X}) - \text{mid } V)(u, \alpha)| \right\} \right\} \quad (3.147)$$

toma en unas ocasiones valores positivos y en otras valores negativos. A partir de las funciones continuas F y G introducidas en (3.58) y (3.59), respectivamente, se tiene que

cuando $d \in (0, 1)$ las hipótesis del Test (3.141') son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(F(f_S^{(0,1)})(u, \alpha) - G(f_S^{(0,1)})(u, \alpha) \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) \geq 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(F(f_S^{(0,1)})(u, \alpha) - G(f_S^{(0,1)})(u, \alpha) \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) < 0. \end{cases} \quad (3.148)$$

Teniendo en cuenta que se cumple $\text{mid}_{F(f_S^{(0,1)})}(u, \alpha) = \text{mid}_{G(f_S^{(0,1)})}(u, \alpha) = 0$, $\text{spr}_{F(f_S^{(0,1)})}(u, \alpha) = F(f_S^{(0,1)})(u, \alpha)$ y $\text{spr}_{G(f_S^{(0,1)})}(u, \alpha) = G(f_S^{(0,1)})(u, \alpha)$, para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, las hipótesis del test anterior se pueden escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} H_0 : \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_S^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_S^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \geq 0; \\ H_1 : \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_S^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_S^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) < 0. \end{cases} \quad (3.149)$$

Se considera el estadístico siguiente basado en $f_S^{(0,1)}$:

$$\begin{aligned} T_n(f_S^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} & \left(\left\| \left(F \left(\begin{aligned} & \text{máx} \{ -2d(\text{spr } \bar{x}_n + \text{spr } v)(u, \alpha), \text{mín} \{ (\text{spr } \bar{x}_n - d \text{spr } v)(u, \alpha), \\ & (\text{spr } v - d \text{spr } \bar{x}_n)(u, \alpha), (1-d)(\text{spr } \bar{x}_n + \text{spr } v)(u, \alpha) \\ & - (1+d) |(\text{mid } \bar{x}_n - \text{mid } v)(u, \alpha)| \} \} \} \right) \right\|_{\theta, \lambda}^{1/2} \right\|^2 \right. \\ & \left. - \left\| \left(G \left(\begin{aligned} & \text{máx} \{ -2d(\text{spr } \bar{x}_n + \text{spr } v)(u, \alpha), \text{mín} \{ (\text{spr } \bar{x}_n - d \text{spr } v)(u, \alpha), \\ & (\text{spr } v - d \text{spr } \bar{x}_n)(u, \alpha), (1-d)(\text{spr } \bar{x}_n + \text{spr } v)(u, \alpha) \\ & - (1+d) |(\text{mid } \bar{x}_n - \text{mid } v)(u, \alpha)| \} \} \} \right) \right\|_{\theta, \lambda}^{1/2} \right\|^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.150) \end{aligned}$$

En el Lema 3.2.7 se plantea la convergencia del estadístico anterior bajo ciertas condiciones y en el Teorema 3.2.8 se prueba que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.149) cuando $T_n(f_S^{(0,1)}) < k_\rho$ es asintóticamente correcto. Su demostración es análoga a la del Lema 3.1.7 y a la del Teorema 3.1.8, considerando en este caso los resultados del Lema 3.2.3 y el Teorema Central del Límite para espacios de Hilbert separables.

Lema 3.2.7 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_S^{(0,1)})$ definido como en (3.150). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a) Cuando $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \text{spr}_V$ y $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V = (1-d) \text{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n(f_S^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.151)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(s_{-\mathcal{X}} - ds_{\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}} - ds_{\mathcal{X}}), (s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2 - E((s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2))^T. \quad (3.152)$$

b) Cuando $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \text{spr}_V$ y $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V = (1-d) \text{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n(f_S^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.153)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(s_{\mathcal{X}} - ds_{-\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}} - ds_{-\mathcal{X}}), (s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2 - E((s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2))^T. \quad (3.154)$$

c) Cuando $d \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \text{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n(f_S^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.155)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(s_{-\mathcal{X}} - ds_{\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}} - ds_{\mathcal{X}}), d(s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2 - E(d(s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2))^T. \quad (3.156)$$

d) Cuando $d \operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = \operatorname{spr}_V$ y $-\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} + \operatorname{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr}_V$, se cumple que:

$$T_n \left(f_S^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.157)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(s_{\mathcal{X}} - ds_{-\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}} - ds_{-\mathcal{X}}), d(s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2 - E(d(s_{\mathcal{X}} + s_{-\mathcal{X}})/2))^T. \quad (3.158)$$

Teorema 3.2.8 *Considérense las condiciones del Lema 3.2.7. Sea $\rho \in [0, 1]$ y k_ρ el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.151), (3.153), (3.155) y (3.157). Si H_0 en (3.149) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(T_n \left(f_S^{(0,1)} \right) < k_\rho \right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza en cuatro situaciones diferentes: o bien cuando $\operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \operatorname{spr}_V$ y $\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} - \operatorname{mid}_V = (1-d)\operatorname{spr}_V$; o cuando $\operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \operatorname{spr}_V$ y $-\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} + \operatorname{mid}_V = (1-d)\operatorname{spr}_V$; o cuando $d \operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = \operatorname{spr}_V$ y $\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} - \operatorname{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr}_V$; o bien cuando $d \operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = \operatorname{spr}_V$ y $-\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} + \operatorname{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.149) cuando $T_n \left(f_S^{(0,1)} \right) < k_\rho$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Al igual que sucedía en el caso intervalar, el test de similaridad (3.141) en el caso difuso para $d = 0$, se escribe igual que el contraste correspondiente al grado de inclusión (3.70) cuando dicho grado es igual a 0.

3.2.4. Procedimiento bootstrap

El procedimiento bootstrap desarrollado para el test sobre el grado de inclusión va a servir de inspiración para el del grado de similaridad de un intervalo aleatorio (o un CDA) en

un intervalo (o en un valor difuso) fijado. De nuevo, el bootstrap que se utiliza es de tipo residual, empleándose residuos por diferencia con respecto a la media muestral. Se analizará el caso intervalar según los diferentes grados de similaridad considerados previamente, extendiendo más adelante los resultados que se obtengan a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^P)$.

Caso $d = 1$

En este caso, la idea consiste en resolver el Test (3.127) mediante el empleo de técnicas bootstrap. Dado X un intervalo aleatorio definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr} E(X) > 0$, se consideran para cada $n \in \mathbb{N}$, n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X , siendo estos X_1, \dots, X_n . Sea $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ para el que $\text{spr} A > 0$. Se considera la población bootstrap $\{Y_i\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid} A - \overline{X}_n + [-\text{spr} A, \text{spr} A]\}_{i=1}^n$. Es fácil comprobar que $\overline{Y}_n = A$, que es el peor de los casos bajo H_0 según el Lema 3.2.1.

Se extrae una muestra bootstrap $\{X_i^*\}_{i=1}^n$ a partir de $\{X_i\}_{i=1}^n$, para construir otra muestra bootstrap a partir de $\{Y_i\}_{i=1}^n$:

$$\{Y_i^*\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid} A - \overline{X}_n + [-\text{spr} A, \text{spr} A]\}_{i=1}^n.$$

A partir de la expresión del estadístico $T_n^{S^1}$ definido en (3.128), se calcula para la muestra anterior el valor del siguiente estadístico:

$$T_n^{S^{1*}} = \sqrt{n} \max \left\{ \left| \text{mid} \overline{X}_n^* - \text{mid} \overline{X}_n \right|, \left| \text{spr} \overline{X}_n^* - \text{spr} \overline{X}_n \right| \right\}. \quad (3.159)$$

De forma análoga, con el fin de resolver el test para el grado de similaridad $d = 1$ en el caso difuso, (3.144), se considera un CDA \mathcal{X} definido sobre (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$ y una m.a.s. a partir de él para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Dado $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^P)$ tal que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$ se define el siguiente estadístico:

$$T_n^*(f_S^1) = \frac{n}{\theta} \left\| \max \left\{ \left| \text{mid} \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{mid} \overline{\mathcal{X}}_n \right|, \left| \text{spr} \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{spr} \overline{\mathcal{X}}_n \right| \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.160)$$

En el Lema 3.2.9 se presenta la distribución asintótica de $T_n^{S^{1*}}$ y $T_n^*(f_S^1)$. La demostración del mismo se obviará puesto que es análoga a la correspondiente al Lema 3.1.13, en este caso teniendo en cuenta los Lemas 3.2.1 y 3.2.5.

Lema 3.2.9 Sean $T_n^{I_S^{1*}}$ y $T_n^*(f_S^1)$ definidos como en (3.159) y (3.160), respectivamente.

a) Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$, se cumple:

$$T_n^{S^{1*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max\{|z_1|, |z_2|\} \text{ c.s. } - [P], \quad (3.161)$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.130).

b) Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$, se cumple:

$$T_n^*(f_I^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\max\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}\|_{\theta, \lambda}^2 \text{ c.s. } - [P], \quad (3.162)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(\text{mid } \mathcal{X} - E(\text{mid } \mathcal{X}), \text{spr } \mathcal{X} - E(\text{spr } \mathcal{X}))^T$.

Como consecuencia del Lema 3.2.9, se concluye el siguiente resultado.

Teorema 3.2.10 Considérense las condiciones del Lema 3.2.9 y $\rho \in [0, 1]$:

a) Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.161). Si H_0 en (3.127) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{S^1} > k_{1-\rho}^*\right) \leq \rho \text{ c.s. } - [P] \quad (3.163)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.127) cuando $T_n^{S^1} > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.162). Si H_0 en (3.144) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n(f_S^1) > k_{1-\rho}^*\right) \leq \rho \text{ c.s. } - [P] \quad (3.164)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.144) cuando $T_n(f_S^1) > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

Sean X un intervalo aleatorio tal que $\text{spr } E(X) > 0$, X_1, \dots, X_n una m.a.s. extraída a partir de X y $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ con $\text{spr } A > 0$. Se consideran las siguientes poblaciones bootstrap:

$$\begin{aligned} \{Y_i^1\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i + \text{mid } A - \overline{X_n} + (1-d) \text{spr } A + [-d \text{spr } A, d \text{spr } A] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^2\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i + \text{mid } A - \overline{X_n} - (1-d) \text{spr } A + [-d \text{spr } A, d \text{spr } A] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^3\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i + \text{mid } A - \overline{X_n} + \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^4\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i + \text{mid } A - \overline{X_n} - \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que

$$\begin{aligned} \text{mid } \overline{Y_n^1} - \text{mid } A &= (1-d) \text{spr } A \quad \text{y} \quad \text{spr } \overline{Y_n^1} = d \text{spr } A, \\ -\text{mid } \overline{Y_n^1} + \text{mid } A &= (1-d) \text{spr } A \quad \text{y} \quad \text{spr } \overline{Y_n^1} = d \text{spr } A, \\ \text{mid } \overline{Y_n^1} - \text{mid } A &= \frac{(1-d)}{d} \text{spr } A \quad \text{y} \quad d \text{spr } \overline{Y_n^1} = \text{spr } A, \\ -\text{mid } \overline{Y_n^1} + \text{mid } A &= \frac{(1-d)}{d} \text{spr } A \quad \text{y} \quad d \text{spr } \overline{Y_n^1} = \text{spr } A, \end{aligned}$$

siendo estos los peores casos bajo la hipótesis nula según se comprobó en el Lema 3.2.3.

Se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir muestras bootstrap procedentes de $\{Y_i^1\}_{i=1}^n$, $\{Y_i^2\}_{i=1}^n$, $\{Y_i^3\}_{i=1}^n$ e $\{Y_i^4\}_{i=1}^n$ que serán las siguientes:

$$\begin{aligned} \{Y_i^{1*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \overline{X_n} + (1-d) \text{spr } A + [-d \text{spr } A, d \text{spr } A] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^{2*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \overline{X_n} - (1-d) \text{spr } A + [-d \text{spr } A, d \text{spr } A] \right\}_{i=1}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Y_i^{3*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \bar{X}_n + \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n, \\ \{Y_i^{4*}\}_{i=1}^n &= \left\{ X_i^* + \text{mid } A - \bar{X}_n - \frac{1-d}{d} \text{spr } A + \left[-\frac{1}{d} \text{spr } A, \frac{1}{d} \text{spr } A \right] \right\}_{i=1}^n. \end{aligned}$$

A partir de las muestras bootstrap que se acaban de definir, el estadístico $T_n^{S^{(0,1)}}$ introducido en (3.132) se transforma en los siguientes estadísticos según el caso que se esté considerando:

$$\begin{aligned} T_n^{S_1^{(0,1)*}} &= \sqrt{n} \text{máx} \left\{ \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n^*, d(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n) + (d^2 - 1) \text{spr } A, \right. \\ &\quad (1+d) \left| \text{mid } \bar{X}_n^* - \text{mid } \bar{X}_n + (1-d) \text{spr } A \right| \\ &\quad \left. + (d-1) (\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n + (d+1) \text{spr } A) \right\}, \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} T_n^{S_2^{(0,1)*}} &= \sqrt{n} \text{máx} \left\{ \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n^*, d(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n) + (d^2 - 1) \text{spr } A, \right. \\ &\quad (1+d) \left| \text{mid } \bar{X}_n^* - \text{mid } \bar{X}_n - (1-d) \text{spr } A \right| \\ &\quad \left. + (d-1) (\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n + (d+1) \text{spr } A) \right\}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} T_n^{S_3^{(0,1)*}} &= \sqrt{n} \text{máx} \left\{ \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n^* + \frac{d^2-1}{d} \text{spr } A, d(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n), \right. \\ &\quad (1+d) \left| \text{mid } \bar{X}_n^* - \text{mid } \bar{X}_n + \frac{1-d}{d} \text{spr } A \right| \\ &\quad \left. + (d-1) \left(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n + \frac{d+1}{d} \text{spr } A \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} T_n^{S_4^{(0,1)*}} &= \sqrt{n} \text{máx} \left\{ \text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } \bar{X}_n^* + \frac{d^2-1}{d} \text{spr } A, d(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n), \right. \\ &\quad (1+d) \left| \text{mid } \bar{X}_n^* - \text{mid } \bar{X}_n - \frac{1-d}{d} \text{spr } A \right| \\ &\quad \left. + (d-1) \left(\text{spr } \bar{X}_n^* - \text{spr } \bar{X}_n + \frac{d+1}{d} \text{spr } A \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Análogamente, en relación con el Test (3.149) para el caso difuso, se considera un CDA \mathcal{X} tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$ y una m.a.s. $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ extraída a partir de \mathcal{X} . Dado $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, se definen los siguientes estadísticos:

$$T_n^* (f_{S_1}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{S_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{S_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.169)$$

$$T_n^* (f_{S_2}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{S_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{S_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.170)$$

$$T_n^*(f_{S_3}^{(0,1)*}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{S_3}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta,\lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{S_3}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta,\lambda}^2 \right), \quad (3.171)$$

$$T_n^*(f_{S_4}^{(0,1)*}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{S_4}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta,\lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{S_4}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta,\lambda}^2 \right), \quad (3.172)$$

donde

$$f_{S_1}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (d+1) \text{spr } \nu \right), \right. \\ \left. \begin{aligned} & \min \left\{ \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n}, d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right) + (1-d^2) \text{spr } \nu, \right. \\ & (1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (d+1) \text{spr } \nu \right) \\ & \left. \left. - (1+d) \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + (1-d) \text{spr } \nu \right| \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$f_{S_2}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (d+1) \text{spr } \nu \right), \right. \\ \left. \begin{aligned} & \min \left\{ \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n}, d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right) + (1-d^2) \text{spr } \nu, \right. \\ & (1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (d+1) \text{spr } \nu \right) \\ & \left. \left. - (1+d) \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} - (1-d) \text{spr } \nu \right| \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$f_{S_3}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{d+1}{d} \text{spr } \nu \right), \right. \\ \left. \begin{aligned} & \min \left\{ \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (1-d^2) \text{spr } \nu, d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right), \right. \\ & (1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{d+1}{d} \text{spr } \nu \right) \\ & \left. \left. - (1+d) \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu \right| \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.175)$$

$$f_{S_4}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{d+1}{d} \text{spr } \nu \right), \right. \\ \left. \begin{aligned} & \min \left\{ \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + (1-d^2) \text{spr } \nu, d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} \right), \right. \\ & (1-d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{d+1}{d} \text{spr } \nu \right) \\ & \left. \left. - (1+d) \left| \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} - \frac{1-d}{d} \text{spr } \nu \right| \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.176)$$

En el Lema 3.2.11 se establece la distribución asintótica de los estadísticos anteriores. La demostración del mismo no se llevará a cabo, ya que es análoga a la del Lema 3.1.15 pero considerando en esta ocasión los resultados desarrollados en los Lemas 3.2.3 y 3.2.7.

Lema 3.2.11 Sean $T_n^{S_1^{(0,1)*}}$, $T_n^{S_2^{(0,1)*}}$, $T_n^{S_3^{(0,1)*}}$, $T_n^{S_4^{(0,1)*}}$, $T_n^*(f_{S_1}^{(0,1)})$, $T_n^*(f_{S_2}^{(0,1)})$, $T_n^*(f_{S_3}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{S_4}^{(0,1)})$ definidos como en (3.165), (3.166), (3.167), (3.168), (3.169), (3.170), (3.171) y (3.172), respectivamente. Si $X \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a.1) Cuando $\text{spr } E(X) = d \text{spr } A$ y $\text{mid } E(X) - \text{mid } A = (1 - d) \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{S_1^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{\tau_1, \tau_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.177)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.134).

a.2) Cuando $\text{spr } E(X) = d \text{spr } A$ y $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A = (1 - d) \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{S_2^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{\zeta_1, \zeta_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.178)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.136).

a.3) Cuando $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $\text{mid } E(X) - \text{mid } A = \frac{(1 - d)}{d} \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{S_3^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{\xi_1, \xi_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.179)$$

donde $(\xi_1, \xi_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_3)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.138).

a.4) Cuando $d \text{spr } E(X) = \text{spr } A$ y $-\text{mid } E(X) + \text{mid } A = \frac{(1 - d)}{d} \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{S_4^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{máx}\{v_1, v_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.180)$$

donde $(v_1, v_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_4)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.140).

b.1) Cuando $\text{spr }_{E(\mathcal{X})} = d \text{spr }_V$ y $\text{mid }_{E(\mathcal{X})} - \text{mid }_V = (1 - d) \text{spr }_V$, se cumple:

$$T_n^*(f_{S_1}^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\text{mín}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\text{mín}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s. } - [P] \quad (3.181)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.152).

b.2) Cuando $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \text{spr}_V$ y $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V = (1-d)\text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^* \left(f_{S_2}^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s.} - [P] \quad (3.182)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.154).

b.3) Cuando $d \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^* \left(f_{S_3}^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s.} - [P] \quad (3.183)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.156).

b.4) Cuando $d \text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$ y $-\text{mid}_{E(\mathcal{X})} + \text{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \text{spr}_V$, se cumple:

$$T_n^* \left(f_{S_4}^{(0,1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s.} - [P] \quad (3.184)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.158).

A partir del resultado anterior, se concluye el Teorema 3.2.12.

Teorema 3.2.12 *Considérense las condiciones del Lema 3.2.11 y $\rho \in [0, 1]$:*

a) Sea $k_{1-\rho}^*$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.177), (3.178), (3.179) y (3.180). Si H_0 en (3.131) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(T_n^{S^{(0,1)}} > k_{1-\rho}^* \right) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.185)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{spr} E(X) = d \text{spr} A$ y $\text{mid} E(X) - \text{mid} A = (1-d)\text{spr} A$, o bien $\text{spr} E(X) = d \text{spr} A$ y $-\text{mid} E(X) + \text{mid} A = (1-d)\text{spr} A$, o bien

$d \operatorname{spr} E(X) = \operatorname{spr} A$ y $\operatorname{mid} E(X) - \operatorname{mid} A = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr} A$, o bien cuando $d \operatorname{spr} E(X) = \operatorname{spr} A$ y $-\operatorname{mid} E(X) + \operatorname{mid} A = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr} A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.131) cuando $T_n^{S^{(0,1)}} > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea k_ρ^* el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.181), (3.182), (3.183) y (3.184). Si H_0 en (3.149) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n\left(f_S^{(0,1)}\right) < k_\rho^*\right) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.186)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando se cumple $\operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \operatorname{spr}_V$ y $\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} - \operatorname{mid}_V = (1-d) \operatorname{spr}_V$, o bien $\operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = d \operatorname{spr}_V$ y $-\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} + \operatorname{mid}_V = (1-d) \operatorname{spr}_V$, o bien $d \operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = \operatorname{spr}_V$ y $\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} - \operatorname{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr}_V$, o bien cuando $d \operatorname{spr}_{E(\mathcal{X})} = \operatorname{spr}_V$ y $-\operatorname{mid}_{E(\mathcal{X})} + \operatorname{mid}_V = \frac{(1-d)}{d} \operatorname{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.149) cuando $T_n\left(f_S^{(0,1)}\right) < k_\rho^*$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Debido a que el estudio del grado de similaridad para $d = 0$ se reduce al estudio del grado de inclusión cuando $d = 0$, el análisis bootstrap en este caso es el mismo que el desarrollado en la Sección 3.1.5 para $d = 0$.

Los algoritmos relativos a los tests bootstrap que acaban de exponerse para el grado de similaridad del valor esperado de un CDA con un valor difuso fijado se presentan a continuación.

Algoritmos para los contrastes bootstrap (Test de similaridad)

Paso 1. En cada caso, elegir una m.a.s. de tamaño n a partir de $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$.

Paso 2. Para esta muestra calcular:

- El valor del estadístico $T_n(f_S^1)$ definido en (3.145) en el caso $d = 1$.

- El valor del estadístico $T_n(f_S^{(0,1)})$ definido en (3.150) en el caso $d \in (0, 1)$.

Paso 3. En cada caso, obtener una m.a.s. bootstrap $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$ de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ y calcular:

- El valor del estadístico bootstrap $T_n^*(f_S^1)$ definido en (3.160) en el caso $d = 1$.
- Los valores de los estadísticos bootstrap $T_n^*(f_{S_1}^{(0,1)})$, $T_n^*(f_{S_2}^{(0,1)})$, $T_n^*(f_{S_3}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{S_4}^{(0,1)})$ definidos en (3.169), (3.170), (3.171) y (3.172), respectivamente, en el caso $d \in (0, 1)$.

Paso 4. Repetir el Paso 3 un gran número B de veces con el fin de conseguir un conjunto de B valores de los estadísticos en cada uno de los casos. Estos conjuntos se denotarán por $E_{S_1}^*$ si $d = 1$ y $E_{S_1}^{*(0,1)}$, $E_{S_2}^{*(0,1)}$, $E_{S_3}^{*(0,1)}$ y $E_{S_4}^{*(0,1)}$ si $d \in (0, 1)$.

Paso 5. Calcular el p -valor bootstrap según el grado de inclusión que se esté considerando:

CASO $d = 1$: Si se quiere contrastar (3.144), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en $E_{S_1}^*$ mayores o iguales que $T_n(f_S^1)$.

CASO $d \in (0, 1)$: Si se quiere contrastar (3.149), el p -valor aproximado viene dado por el máximo de las proporciones de valores en $E_{S_1}^{*(0,1)}$, $E_{S_2}^{*(0,1)}$, $E_{S_3}^{*(0,1)}$ y en $E_{S_4}^{*(0,1)}$ menores o iguales que $T_n(f_S^{(0,1)})$.

3.2.5. Estudios de simulación

A continuación se analiza el funcionamiento de los tests bootstrap para el grado de similaridad presentados en la sección anterior. En lo relativo al caso intervalar, se pretenden resolver los siguientes contrastes de hipótesis:

$$H_0^1 : S(E(X), A) = 1 \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : S(E(X), A) < 1, \quad \text{con } A = [-1, 3]; \quad (3.187)$$

$$H_0^2 : S(E(X), B) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : S(E(X), B) \neq 1/2, \quad \text{con } B = [-5, 3]. \quad (3.188)$$

Como se ha mencionado a lo largo del capítulo, el grado de similaridad para $d = 0$ es equivalente al grado de inclusión para $d = 0$, por lo que no se estudiará en esta

sección. Dado el intervalo aleatorio X , se llevan a cabo dos estudios diferentes según las distribuciones del mid y el spread de X siguientes:

I.a) mid $X \equiv \mathcal{N}(1, 5)$ y spr $X \equiv \chi_2^2$.

I.b) mid $X \equiv U(-4, 6)$ y spr $X \equiv \chi_2^2$.

En los dos casos anteriores se verifica $E(X) = [-1, 3]$ y el algoritmo bootstrap seguido es el incluido al final de la Sección 3.2.4. En las Tablas 3.6 y 3.7 se presentan los resultados correspondientes a los Tests (3.187) y (3.188). En todos los casos se han realizado 10000 simulaciones a los niveles de significación $\rho = 0.01$, $\rho = 0.05$ y $\rho = 0.1$, así como 1000 réplicas bootstrap por simulación, lo cual implica un error muestral asintótico del 0.195% para $\rho = 0.01$, del 0.427% para $\rho = 0.05$ y del 0.588% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%.

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : S(E(X), A) = 1$			$H_0^2 : S(E(X), B) = 1/2$		
	1	5	10	1	5	10
10	3.52	9.86	14.98	3.24	7.22	13.26
30	1.82	6.76	11.54	1.78	5.78	11.36
50	1.64	5.82	10.54	1.32	5.64	10.86
100	1.14	5.56	10.40	1.18	5.54	10.22
200	1.08	5.38	9.96	1.24	5.46	10.00

Tabla 3.6: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso intervalar *I.a)*

Como se observa en las Tablas 3.6 y 3.7, el porcentaje de rechazos de H_0 está bastante próximo al nivel de significación nominal para tamaños de muestra mayores que $n = 100$. Al igual que sucedía para el caso de inclusión, se puede plantear como trabajo futuro la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas de los estadísticos correspondientes.

En segundo lugar, se realizarán estudios de simulación para el caso difuso, analizando el grado de similaridad entre la esperanza de un CDA \mathcal{X} y ciertos valores difusos

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : S(E(X), A) = 1$			$H_0^2 : S(E(X), B) = 1/2$		
	1	5	10	1	5	10
10	3.82	6.10	14.84	3.98	7.44	12.34
30	1.96	5.80	10.72	2.06	6.18	10.66
50	1.50	5.76	10.58	1.52	5.36	9.80
100	1.28	5.48	10.28	1.48	5.38	10.28
200	1.24	5.22	9.82	1.20	5.24	10.18

Tabla 3.7: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso intervalar *I.b*)

previamente fijados ($U, V, C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$). Específicamente, se considera un CDA trapezoidal $\mathcal{X} = Tra(a, b, c, d)$ de manera que $b - a \equiv \chi_3^2$, $d - c \equiv \chi_8^2$ y b y c siguen las siguientes distribuciones:

F.a) $b \equiv \mathcal{N}(0.5, 5)$ y $c \equiv b + \mathcal{N}(1, 3)$.

F.b) $b \equiv U(0, 90)$ y $c \equiv b + U(0, 20)$.

En la primera situación, la esperanza de \mathcal{X} viene dada por $E(\mathcal{X}) = Tra(-2.5, 0.5, 1.5, 9.5)$, mientras que en la segunda $E(\mathcal{X}) = Tra(42, 45, 55, 63)$. En este caso se pretenden resolver los tests siguientes:

$$H_0^1 : S(E(\mathcal{X}), U) = 1 \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : S(E(\mathcal{X}), U) < 1; \quad (3.189)$$

$$H_0^2 : S(E(\mathcal{X}), V) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : S(E(\mathcal{X}), V) \neq 1/2, \quad (3.190)$$

donde $U = Tra(-2.5, 0.5, 1.5, 9.5)$ y $V = Tra(-14.5, -0.5, 1.5, 9.5)$ en el caso *F.a*), y $U = Tra(42, 45, 55, 63)$ y $V = Tra(21, 35, 55, 9.5)$ en el caso *F.b*). De nuevo se va a trabajar con $\theta = 1/3$ y se van a realizar 10000 simulaciones de los correspondientes procedimientos bootstrap (implicando los mismos errores muestrales que en el caso intervalar) a distintos niveles de significación y con 1000 réplicas bootstrap en cada una de ellas. Los resultados se recogen en las Tablas 3.8 y 3.9.

Según los resultados expuestos en las Tablas 3.8 y 3.9, los porcentajes de rechazos de la hipótesis nula están cerca del nivel de significación nominal en general para tamaños

	$H_0^1 : S(E(\mathcal{X}), U) = 1$			$H_0^2 : S(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10
10	3.72	9.34	15.68	2.86	7.85	13.00
30	1.90	6.24	11.14	1.48	5.72	11.08
50	1.66	6.14	10.54	1.52	5.62	10.72
100	1.38	5.86	10.30	1.40	5.48	10.34
200	1.30	5.56	10.24	1.08	5.22	10.08

Tabla 3.8: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso difuso *F.a)*

	$H_0^1 : S(E(\mathcal{X}), U) = 1$			$H_0^2 : S(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10
10	4.22	9.68	15.14	3.56	7.86	13.12
30	1.90	6.54	10.66	1.80	6.58	10.32
50	1.60	6.04	10.60	1.60	5.56	10.28
100	1.10	5.52	10.40	1.42	5.10	10.08
200	1.06	5.34	10.26	1.08	5.04	10.18

Tabla 3.9: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de similaridad en el caso difuso *F.b)*

de muestra mayores o iguales que $n = 100$ y en algunos casos para tamaños mayores que $n = 50$. Al igual que en ocasiones anteriores, resultaría conveniente llevar a cabo una estimación de matriz de varianzas-covarianzas.

3.2.6. Aplicación práctica

Con el objetivo de que la mención de Denominación de Origen del queso Gamonedo se mantenga, se va a analizar si las opiniones de determinado experto acerca de la apariencia, la calidad del olor y la calidad del sabor del queso pueden considerarse similares a unos

valores previamente fijados con cierto grado de similaridad. El estudio se realizará sobre la base de las opiniones del experto acerca de las tres características anteriores con las que se trabajó también en la Sección 3.1.7. Tales opiniones vienen dadas en forma de números difusos trapezoidales aunque de nuevo en un primer estudio van a simplificarse mediante la consideración del intervalo definido por el 1-corte de cada uno de los valores. Los intervalos aleatorios con los que se va a trabajar son:

- $X \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- $Y \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- $Z \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

En este contexto, se quiere estudiar si la media de las opiniones del experto acerca del aspecto, el olor y el sabor del queso puede considerarse similar al intervalo $A = [60, 70]$ con grado mayor o igual que $2/3$. Además, se va a analizar también si la media de las opiniones anteriores puede considerarse similar al intervalo $B = [60, 65]$ con grado 1. Así, se van a llevar a cabo los siguientes tests de hipótesis.

$$H_0^1 : S(E(X), A) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^1 : S(E(X), A) < 2/3. \quad (3.191)$$

$$H_0^2 : S(E(Y), A) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^2 : S(E(Y), A) < 2/3. \quad (3.192)$$

$$H_0^3 : S(E(Z), A) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^3 : S(E(Z), A) < 2/3. \quad (3.193)$$

$$H_0^4 : S(E(X), B) = 1 \text{ frente a } H_1^4 : S(E(X), B) < 1. \quad (3.194)$$

$$H_0^5 : S(E(Y), B) = 1 \text{ frente a } H_1^5 : S(E(Y), B) < 1. \quad (3.195)$$

$$H_0^6 : S(E(Z), B) = 1 \text{ frente a } H_1^6 : S(E(Z), B) < 1. \quad (3.196)$$

Se consideran muestras de 20 percepciones intervalares a partir de los intervalos aleatorios X , Y y Z y que están reflejadas en la Tabla 3.5 en la Sección 3.1.7. Al igual que se mencionó en dicha sección, las medias muestrales son $\bar{X} = [58.30, 63.70]$, $\bar{Y} = [63.70, 69.05]$ y $\bar{Z} = [61.65, 67.30]$. En este caso, se ha aplicado el procedimiento bootstrap desarrollado en la Sección 3.2.4 en el caso intervalar para $d \in (0, 1)$ y $d = 1$ se han llevado

a cabo 10000 réplicas del mismo. Los p -valores obtenidos según cada caso son $p = 0.1094$, $p = 0.4830$ y $p = 0.459$ para los Tests (3.191), (3.192) y (3.193), y $p = 0.4527$, $p = 0.0869$ y $p = 0.4837$ para los Tests (3.194), (3.195) y (3.196). Se puede concluir que las hipótesis nulas de todos los tests, exceptuando la del Test (3.195), no se rechazan a los niveles de significación usuales por lo que las tres características pueden considerarse similares a $[60, 70]$ con un grado mayor o igual que $2/3$, mientras que tanto el aspecto de la pasta como la calidad del sabor pueden considerarse similares a $[60, 65]$ con grado 1. Por otro lado, la calidad del olor puede considerarse similar a $[60, 65]$ a los niveles de significación $\rho = 0.01$ y $\rho = 0.05$, mientras que tal hipótesis se rechaza al nivel $\rho = 0.1$.

En segundo lugar, se quiere analizar el grado de similaridad basándose en los CDAs trapezoidales

- $\mathcal{X} \equiv$ “percepción del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- $\mathcal{Y} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- $\mathcal{Z} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

Las medias muestrales de los tres CDAs anteriores son $\bar{\mathcal{X}} = Tra(53.15, 58.3, 63.7, 69)$, $\bar{\mathcal{Y}} = Tra(58.5, 63.7, 69.05, 74.85)$ y $\bar{\mathcal{Z}} = Tra(56.45, 61.65, 67.3, 73)$. Además, se va a considerar $\theta = 1/3$ (término que, como ya se ha citado en más de una ocasión, no influye a la hora de resolver el test mediante técnicas bootstrap). Se quiere contrastar si la media de las opiniones del experto para cada característica puede considerarse similar al número difuso trapezoidal $U = Tra(57, 62, 70, 75)$ con grado mayor o igual que $2/3$ así como si el grado de similaridad de tales medias es similar a $V = Tra(55, 60, 65, 70)$ con grado máximo. Por tanto, se llevarán a cabo los siguientes contrastes:

$$H_0^1 : S(E(\mathcal{X}), U) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^1 : S(E(\mathcal{X}), U) < 2/3. \quad (3.197)$$

$$H_0^2 : S(E(\mathcal{Y}), U) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^2 : S(E(\mathcal{Y}), U) < 2/3. \quad (3.198)$$

$$H_0^3 : S(E(\mathcal{Z}), U) \geq 2/3 \text{ frente a } H_1^3 : S(E(\mathcal{Z}), U) < 2/3. \quad (3.199)$$

$$H_0^4 : S(E(\mathcal{X}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^1 : S(E(\mathcal{X}), V) < 1. \quad (3.200)$$

$$H_0^5 : S(E(\mathcal{Y}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^2 : S(E(\mathcal{Y}), V) < 1. \quad (3.201)$$

$$H_0^6 : S(E(\mathcal{Z}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^3 : S(E(\mathcal{Z}), V) < 1. \quad (3.202)$$

Las muestras de opiniones de tamaño 20 son las reflejadas previamente en la Tabla 2.11. Se han realizado 10000 réplicas del procedimiento bootstrap presentado en la Sección 3.2.4 en el contexto difuso cuando $d \in (0, 1)$ y $d = 1$. Los p -valores obtenidos toman valores $p = 0.087$, $p = 1$ y $p = 1$ para los Tests (3.197), (3.198) y (3.199), y $p = 0.4388$, $p = 0.0569$ y $p = 0.4283$ para los Tests (3.200), (3.201) y (3.202). Así, la calidad del sabor y del olor del queso Gamonedo puede considerarse similar al número difuso trapezoidal $Tra(57, 62, 70, 75)$ con grado mayor o igual que $2/3$ a los niveles de significación usuales sobre la base de las percepciones del experto, mientras que del aspecto de la pasta del queso puede concluirse lo mismo para los niveles de significación $\rho = 0.01$ y $\rho = 0.05$ pero al nivel $\rho = 0.1$ se rechaza la hipótesis nula en (3.197). Por otro lado, también se puede concluir que el aspecto de la pasta y la calidad del sabor puede considerarse similar al número $Tra(55, 60, 65, 70)$ a los niveles de significación usuales, resultando análoga la conclusión para la calidad del olor a los niveles $\rho = 0.01$ y $\rho = 0.05$ pero no al nivel $\rho = 0.1$, donde se rechazaría la hipótesis nula en (3.201).

Otras aplicaciones

Al igual que sucedía para el grado de inclusión, existen situaciones en las que también se puede analizar el grado de similaridad entre la esperanza de un CDA (o de un conjunto aleatorio) y un conjunto difuso (o conjunto) previamente fijado, como son las siguientes:

- En el caso de inversión en bolsa se puede estudiar si las predicciones de los expertos sobre la posición del índice de Bolsa en un determinado momento resulta similar a la correspondiente al año anterior.
- Por otro lado, también se puede analizar si la fluctuación de la tensión de un paciente a lo largo de un periodo de tiempo es similar en cierto grado a la tensión media de un paciente que esté sano.

- De modo análogo, se puede comparar el movimiento de las mareas en determinado punto con el correspondiente a otro punto y con grado de similaridad fijado previamente, con el fin de establecer comparaciones entre ambos puntos.

3.3. Contrastes de hipótesis para el grado de intersección de la esperanza de un elemento impreciso aleatorio en un valor impreciso fijado

Finalmente, se introduce el concepto de grado de intersección y posteriormente se van a desarrollar contrastes de hipótesis para analizar el grado de intersección entre la esperanza de un intervalo aleatorio o de un CDA en un intervalo o valor difuso fijado previamente.

3.3.1. Grado de intersección. Definiciones previas

Dados $U, V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$, el *grado de intersección entre U y V* se ha definido dentro de la Teoría de la Posibilidad (ver, por ejemplo, Dubois *et al.*, 1988) teniendo en cuenta las funciones de pertenencia de U y V como sigue:

$$O(U, V) = \sup_x \min\{U(x), V(x)\}. \quad (3.203)$$

Esta definición puede extenderse teniendo en cuenta el concepto de hipervolumen (*Hip*) de un conjunto y una t -norma cualquiera (ver Bloch, 2005) así:

$$O(U, V) = \frac{Hip(t(U, V))}{\min\{Hip(U), Hip(V)\}}. \quad (3.204)$$

Equivalentemente, a partir de la definición de medida de $U \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ introducida en (3.4), el grado de intersección entre U y V puede definirse en $[0, 1]$ de la siguiente manera:

$$O(U, V) = \frac{m(U \cap V)}{\min\{m(U), m(V)\}}. \quad (3.205)$$

La expresión anterior para intervalos de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ y conjuntos de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ es análoga. Considérense un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , un CDA \mathcal{X} y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ fijado. En este caso, dado $d \in [0, 1]$ van a plantearse los tests siguientes:

$$H_0 : O(E(\mathcal{X}), V) = d \quad \text{frente a} \quad H_1 : O(E(\mathcal{X}), V) \neq d, \quad (3.206)$$

así como los correspondientes contrastes unilaterales:

$$H_0 : O(E(\mathcal{X}), V) \leq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : O(E(\mathcal{X}), V) > d, \quad (3.207)$$

$$H_0 : O(E(\mathcal{X}), V) \geq d \quad \text{frente a} \quad H_1 : O(E(\mathcal{X}), V) < d. \quad (3.208)$$

Aplicando el procedimiento seguido para el caso del grado de inclusión o el grado de similaridad, se resolverán los tests propuestos para el caso concreto de intervalos aleatorios y A un intervalo compacto con $\text{spr } A > 0$, extendiendo posteriormente dichos estudios al contexto de CDAs. En el caso intervalar, si se trabaja con un intervalo A no acotado, el estudio se reduce a considerar el grado de inclusión de la esperanza en un intervalo A fijado no acotado (ver Sección 3.1.3). Por último, se presentan simulaciones de los tests propuestos así como su aplicación en ejemplos de la vida real.

3.3.2. Caso particular: intervalos aleatorios en \mathbb{R}

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , se consideran un intervalo aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ tal que $\text{spr } E(X) > 0$ y un intervalo compacto fijado A con $\text{spr } A > 0$. Esta sección se centra en resolver los Tests (3.206), (3.207) y (3.208) para el grado de intersección entre $E(X)$ y A . Por un lado, las hipótesis del Test (3.206) pueden expresarse equivalentemente como

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{máx} \left\{ 0, \text{mín} \left\{ \text{spr } A + \text{spr } E(X) - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A|, 2\text{spr } E(X), 2\text{spr } A \right\} \right\} \\ \quad - 2d \text{mín} \left\{ \text{spr } E(X), \text{spr } A \right\} = 0; \\ H_1 : \text{máx} \left\{ 0, \text{mín} \left\{ \text{spr } A + \text{spr } E(X) - |\text{mid } E(X) - \text{mid } A|, 2\text{spr } E(X), 2\text{spr } A \right\} \right\} \\ \quad - 2d \text{mín} \left\{ \text{spr } E(X), \text{spr } A \right\} \neq 0. \end{array} \right. \quad (3.209)$$

Además, los tests unilaterales (3.207) y (3.208) pueden expresarse al igual que el bilateral, pero cambiando el signo $=$ en la hipótesis nula por \leq y \geq respectivamente, así como el signo \neq en la hipótesis alternativa por $>$ y $<$, respectivamente.

Observación 3.3.1 De nuevo existen tres situaciones diferentes que deben estudiarse por separado: $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$.

- $d = 1$ implica que o bien $E(X)$ está completamente contenido en A , o bien A está completamente contenido en $E(X)$.
- $d \in (0, 1)$ supone que $E(X)$ y A están intersecados parcialmente, con grado d .
- $d = 0$ equivale a decir que $E(X)$ y A son disjuntos.

En la Figura 3.4 se representan distintos grados de intersección entre $E(X)$ y A .

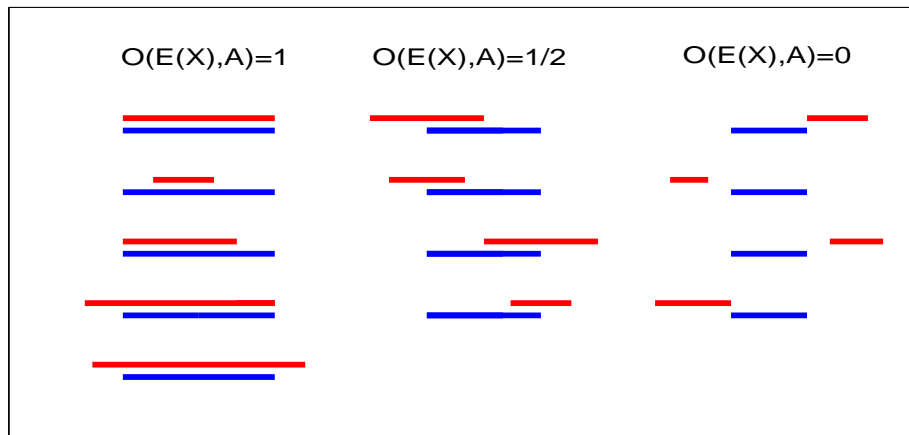


Figura 3.4: Diferentes formas de representación de distintos grados de intersección entre $E(X)$ (en rojo) y A (en azul)

A continuación se analizan los tres casos anteriores independientemente.

Caso $d = 1$

En este caso, las hipótesis del Test (3.206) se escriben como:

$$\begin{cases} H_0 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| \leq |\text{spr } E(X) - \text{spr } A|; \\ H_1 : |\text{mid } E(X) - \text{mid } A| > |\text{spr } E(X) - \text{spr } A|. \end{cases} \quad (3.210)$$

Además, el Test (3.208) se reduce al (3.210) ya que el grado de intersección no puede ser mayor que 1, y el Test (3.207) carece de interés ya que el grado de intersección siempre es menor o igual que 1. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. extraída a partir de X . Para resolver el Test (3.210), se propone el siguiente estadístico:

$$T_n^{O^1} = \sqrt{n} (|\text{mid } \bar{X}_n - \text{mid } A| - |\text{spr } \bar{X}_n - \text{spr } A|). \quad (3.211)$$

En el Lema 3.3.1 se plantea la convergencia de $T_n^{O^1}$ bajo ciertas condiciones. El procedimiento de demostración sigue líneas análogas a la del Lema 3.1.1.

Lema 3.3.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{O^1}$ definido como en (3.211). Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$ se cumple que:*

$$T_n^{O^1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max \{ \min \{ z_1, z_2 \}, \min \{ -z_1, -z_2 \} \} \quad (3.212)$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{mid } X + \text{spr } X}^2 & \sigma_{\text{spr } X}^2 - \sigma_{\text{mid } X}^2 \\ \sigma_{\text{spr } X}^2 - \sigma_{\text{mid } X}^2 & \sigma_{\text{mid } X - \text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.213)$$

A continuación se propone un resultado que afirma que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.210) cuando $T_n^{O^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto. Su demostración es similar a la del Teorema 3.1.2 y no se incluirá en esta memoria.

Teorema 3.3.2 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.1. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.212). Si H_0 en (3.210) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{I^1} > k_{1-\rho}\right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.210) cuando $T_n^{O^1} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

Al igual que en el caso $d \in (0, 1)$ correspondiente a los grados de inclusión y de similaridad, el objetivo ahora se centra en resolver el test unilateral (3.208) dejando el test bilateral y el otro test unilateral para su desarrollo en futuros trabajos. En este caso, las hipótesis del Test (3.208) pueden escribirse de modo equivalente como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \left\{ \text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) + (2d - 1) \text{spr } A \right\}, \\ \text{mín} \left\{ -\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \left. -\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) + (2d - 1) \text{spr } A \right\} \end{array} \right\} \leq 0; \\ H_1 : \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \left\{ \text{mid } E(X) - \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \text{mid } E(X) - \text{mid } A - \text{spr } E(X) + (2d - 1) \text{spr } A \right\}, \\ \text{mín} \left\{ -\text{mid } E(X) + \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } E(X) - \text{spr } A, \right. \\ \left. -\text{mid } E(X) + \text{mid } A - \text{spr } E(X) + (2d - 1) \text{spr } A \right\} \end{array} \right\} > 0. \end{array} \right. \quad (3.214)$$

Dada $\{X_i\}_{i=1}^n$ una m.a.s. obtenida a partir de X , se considera el estadístico

$$T_n^{O(0,1)} = \sqrt{n} \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \left\{ \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A, \right. \\ \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } A - \text{spr } \overline{X}_n + (2d - 1) \text{spr } A \right\}, \\ \text{mín} \left\{ -\text{mid } \overline{X}_n + \text{mid } A + (2d - 1) \text{spr } \overline{X}_n - \text{spr } A, \right. \\ \left. -\text{mid } \overline{X}_n + \text{mid } A - \text{spr } \overline{X}_n + (2d - 1) \text{spr } A \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.215)$$

exponiéndose su distribución límite en el Lema 3.3.3 bajo ciertas condiciones. La demostración del mismo no se llevará a cabo, puesto es análoga a la del Lema 3.1.3.

Asimismo, en el Teorema 3.3.4 se afirma que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.214) cuando $T_n^{O(0,1)} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto, siendo su demostración análoga a la del Teorema 3.1.4.

Lema 3.3.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X, X_1, \dots, X_n , definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n^{O(0,1)}$ definido como en (3.215). Si $X \in \mathcal{P}$, entonces:*

a) *Cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(1-d)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:*

$$T_n^{O(0,1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \min\{\tau_1, \tau_2\} \quad (3.216)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X}^2 & \sigma_{\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X, \text{mid } X - \text{spr } X} \\ \sigma_{\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X, \text{mid } X - \text{spr } X} & \sigma_{\text{mid } X - \text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.217)$$

b) *Cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(d-1)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple que:*

$$T_n^{O(0,1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \min\{\zeta_1, \zeta_2\} \quad (3.218)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X}^2 & \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X, -\text{mid } X - \text{spr } X} \\ \sigma_{-\text{mid } X + (2d-1)\text{spr } X, -\text{mid } X - \text{spr } X} & \sigma_{-\text{mid } X - \text{spr } X}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.219)$$

Teorema 3.3.4 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.3. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.216) y (3.218). Si H_0 en (3.214) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{O(0,1)} > k_{1-\rho}\right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(1-d)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(d-1)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.214) cuando $T_n^{O(0,1)} > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Como sucedía en el contraste de similaridad con grado $d = 0$, el Test (3.206) se reduce al contraste (3.33) introducido para el grado de inclusión igual a 0, ya que si dos conjuntos son disjuntos es lo mismo que afirmar que uno de ellos no está contenido en el otro. Por otro lado, el Test (3.207) se reduce al correspondiente contraste bilateral ya que el grado de intersección no puede tomar valor 0, mientras que el Test (3.208) no presenta interés debido a que dicho grado es siempre mayor o igual que 0.

3.3.3. Extensión a $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$

Sean (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ un CDA asociado tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ un valor difuso fijado con $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$. El objetivo ahora es extender los desarrollos anteriores al caso difuso para resolver los contrastes (3.206), (3.207) y (3.208) acerca del grado de intersección entre $E(\mathcal{X})$ en V . El primero de ellos resulta equivalente al de las hipótesis siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(\begin{array}{l} \text{máx} \{0, \text{mín} \{ (\text{spr}_V + \text{spr}_{E(\mathcal{X})}) (u, \alpha) - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V) (u, \alpha)|, \\ 2\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), 2\text{spr}_V(u, \alpha) \} \} \\ - 2d \text{mín} \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \} \end{array} \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(\begin{array}{l} \text{máx} \{0, \text{mín} \{ (\text{spr}_V + \text{spr}_{E(\mathcal{X})}) (u, \alpha) - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V) (u, \alpha)|, \\ 2\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), 2\text{spr}_V(u, \alpha) \} \} \\ - 2d \text{mín} \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \} \end{array} \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda \neq 0. \end{array} \right. \quad (3.220)$$

mientras que los Tests (3.207) y (3.208) pueden escribirse de modo análogo a (3.220), cambiando el símbolo = en la hipótesis nula por \leq y \geq , y \neq en la alternativa por $>$ y $<$, respectivamente. Al igual que en ocasiones anteriores, los casos $d = 1$, $d \in (0, 1)$ y $d = 0$ se analizarán por separado. Además, en las secciones siguientes se analiza el Test (3.220) para los valores de $d \in \{0, 1\}$, así como el correspondiente test unilateral (3.220') para

$d \in (0, 1)$, de manera que los signos $=$ y \neq se cambian por \geq y $<$, respectivamente. Los desarrollos de los dos tests restantes en el caso $d \in (0, 1)$ quedan como problema futuro.

Caso $d = 1$

Para cada $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$ se define la siguiente función no positiva y continua:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_O^1(u, \alpha) = \max \left\{ -2 \min \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \}, \right. \\ \min \left\{ (\text{spr}_V + \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| \right. \\ \left. - 2 \min \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \}, \right. \\ \left. 2 (\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha) - \min \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \}) \right. \\ \left. 2 (\text{spr}_V(u, \alpha) - \min \{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \}) \right\}. \end{aligned}$$

Si la integral de una función continua que toma valores no positivos en todo punto se anula (según H_0 en (3.220)), entonces dicha función debe anularse en cada punto. Así, sin pérdida de generalidad, se puede trabajar con la función no negativa

$$f_O^1(u, \alpha) = \max \left\{ 0, |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)| - |(\text{spr}_{E(\mathcal{X})} - \text{spr}_V)(u, \alpha)| \right\} \quad (3.221)$$

o, equivalentemente, con $(f_O^1)^2$ y, de este modo, las hipótesis del Test (3.220) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_O^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) = 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} (f_O^1(u, \alpha))^2 d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) > 0. \end{cases} \quad (3.222)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\text{mid}_{f_O^1}(u, \alpha) = 0$ y $\text{spr}_{f_O^1}(u, \alpha) = f_O^1(u, \alpha)$ para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$, se obtiene finalmente:

$$H_0 : \frac{1}{\theta} \|f_O^1\|_{\theta, \lambda}^2 = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \frac{1}{\theta} \|f_O^1\|_{\theta, \lambda}^2 > 0. \quad (3.223)$$

Para resolver el test propuesto se considera el siguiente estadístico:

$$T_n(f_O^1) = \frac{n}{\theta} \left\| \max \left\{ 0, |\text{mid}_{\bar{x}_n} - \text{mid}_V| - |\text{spr}_{\bar{x}_n} - \text{spr}_V| \right\} \right\|_{\theta, \lambda}^2. \quad (3.224)$$

La distribución del estadístico $T_n(f_O^1)$ bajo ciertas condiciones se plantea en el Lema 3.3.5 y su demostración no se incluye puesto que resulta análoga a la del Lema 3.1.7.

Lema 3.3.5 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_O^1)$ definido como en (3.224). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$ se cumple que:*

$$T_n(f_O^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\max\{0, \min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}, \min\{-\mathbf{Z}_1, -\mathbf{Z}_2\}\}\|_{\theta, \lambda}^2 \quad (3.225)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T$.

En el siguiente teorema se afirma que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.223) cuando $T_n(f_O^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto. Su demostración se obviará puesto que resulta análoga a la del Teorema 3.1.8.

Teorema 3.3.6 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.5. Sea $\rho \in [0, 1]$ y $k_{1-\rho}$ el percentil de orden $100(1 - \rho)$ de la distribución asintótica (3.225). Si H_0 en (3.223) es cierta, entonces:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_O^1) > k_{1-\rho}) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.223) cuando $T_n(f_O^1) > k_{1-\rho}$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

En el caso $d \in (0, 1)$, se satisface que la función continua

$$f_O^{(0,1)}(u, \alpha) = \max \left\{ 0, \min \left\{ (\text{spr}_V + \text{spr}_{E(\mathcal{X})})(u, \alpha) - |(\text{mid}_{E(\mathcal{X})} - \text{mid}_V)(u, \alpha)|, \right. \right. \\ \left. \left. 2\text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), 2\text{spr}_V(u, \alpha) \right\} \right\} \\ - 2d \min \left\{ \text{spr}_{E(\mathcal{X})}(u, \alpha), \text{spr}_V(u, \alpha) \right\} \quad (3.226)$$

es positiva en unas ocasiones y negativa en otras. Por tanto, se consideran de nuevo las funciones continuas F y G definidas en (3.58) y (3.59) y así, las hipótesis del Test (3.220') pueden expresarse equivalentemente como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(F(f_O^{(0,1)})(u, \alpha) - G(f_O^{(0,1)})(u, \alpha) \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) \geq 0; \\ H_1 : \int_{(0,1]} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \left(F(f_O^{(0,1)})(u, \alpha) - G(f_O^{(0,1)})(u, \alpha) \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{p-1}}(u) d\lambda(\alpha) < 0, \end{array} \right. \quad (3.227)$$

o, del mismo modo, considerando que $\text{mid}_{F(f_I^{(0,1)})}(u, \alpha) = \text{mid}_{G(f_I^{(0,1)})}(u, \alpha) = 0$, $\text{spr}_{F(f_I^{(0,1)})}(u, \alpha) = F(f_I^{(0,1)})(u, \alpha)$ y $\text{spr}_{G(f_I^{(0,1)})}(u, \alpha) = G(f_I^{(0,1)})(u, \alpha)$, para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{S}^{p-1} \times (0, 1]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_O^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_O^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \geq 0; \\ H_1 : \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_O^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_O^{(0,1)})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) < 0. \end{array} \right. \quad (3.228)$$

Para la resolución el test propuesto se considera el siguiente estadístico basado en la función $f_O^{(0,1)}$ definida en (3.226)

$$T_n(f_O^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| F(\widehat{f}_O^{(0,1)}) \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| G(\widehat{f}_O^{(0,1)}) \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.229)$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{f}_O^{(0,1)} = \text{máx} \left\{ \right. & -2d \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n}, -2d \text{spr}_V, \\ & \text{mín} \left\{ \text{mid}_{\overline{\mathcal{X}}_n} - \text{mid}_V + (1 - 2d) \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + \text{spr}_V, \right. \\ & \quad \left. -\text{mid}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + \text{mid}_V + (1 - 2d) \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + \text{spr}_V, \right. \\ & \quad \left. 2(1 - d) \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n}, 2(\text{spr}_V - d \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n}) \right\}, \\ & \text{mín} \left\{ \text{mid}_{\overline{\mathcal{X}}_n} - \text{mid}_V + \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + (1 - 2d) \text{spr}_V, \right. \\ & \quad \left. -\text{mid}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + \text{mid}_V + \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n} + (1 - 2d) \text{spr}_V, \right. \\ & \quad \left. 2(1 - d) \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n}, 2(\text{spr}_V - d \text{spr}_{\overline{\mathcal{X}}_n}) \right\} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.230)$$

En el Lema 3.3.7 se propone la convergencia del estadístico $T_n(f_O^{(0,1)})$ bajo ciertas condiciones, siendo su demostración análoga a la del Lema 3.1.9. Además, en el Teorema 3.3.8 se expone que el test que consiste en rechazar H_0 en (3.228) cuando $T_n(f_O^{(0,1)}) < k_\rho$ es asintóticamente correcto, aunque su comprobación no se incluirá por ser análoga a la del Lema 3.1.7 y a la del Teorema 3.1.8, considerando en este caso los resultados del Lema 3.3.3 y el Teorema Central del Límite para espacios de Hilbert separables.

Lema 3.3.7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran n CDAs independientes e igualmente distribuidos que $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, definidos sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $T_n(f_I^{(0,1)})$ definido como en (3.62). Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:*

a) *Cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(1-d)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple que:*

$$T_n(f_O^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.231)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(ds_{\mathcal{X}} + (d-1)s_{-\mathcal{X}} - E(ds_{\mathcal{X}} + (d-1)s_{-\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T. \quad (3.232)$$

b) *Cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(d-1)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, se cumple que:*

$$T_n(f_O^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \quad (3.233)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de

$$(ds_{-\mathcal{X}} + (d-1)s_{\mathcal{X}} - E(ds_{-\mathcal{X}} + (d-1)s_{\mathcal{X}}), s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}))^T. \quad (3.234)$$

Teorema 3.3.8 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.7. Sea $\rho \in [0, 1]$ y k_ρ el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.231) y (3.233).*

Si H_0 en (3.61) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n\left(f_O^{(0,1)}\right) < k_\rho\right) \leq \rho$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(1-d)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(d-1)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.228) cuando $T_n\left(f_O^{(0,1)}\right) < k_\rho$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Las hipótesis del Test (3.220) cuando se trabaja con valores difusos de $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ para un grado de intersección igual a 0 se expresan del mismo modo que las del contraste correspondiente al grado de inclusión (3.70) cuando dicho grado es 0.

3.3.4. Procedimiento bootstrap

En esta sección se desarrolla un procedimiento bootstrap para el grado de intersección de un intervalo aleatorio (o un CDA) en un intervalo (o valor difuso) fijado, análogo al presentado para el correspondiente grado de inclusión o el grado de similaridad. Al igual que en ocasiones anteriores, se trata de un bootstrap residual. Como es usual, en primer lugar se analiza el caso intervarlar y posteriormente se extienden los resultados al caso difuso.

Caso $d = 1$

En primer lugar se aplican técnicas bootstrap para resolver el Test (3.210). Sea X un intervalo aleatorio definido sobre (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr} E(X) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran n intervalos aleatorios independientes e igualmente distribuidos que X , X_1, \dots, X_n , y $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ con $\text{spr} A > 0$. Se considera la población bootstrap $\{Y_i\}_{i=1}^n =$

$\{X_i + \text{mid } A - \overline{X}_n + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n$ a partir de él. Es inmediato ver que $\overline{Y}_n = A$, siendo este el peor de los casos bajo H_0 según se indicó en el Lema 3.3.1. A continuación, se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir una muestra bootstrap procedente de $\{Y_i\}_{i=1}^n$, siendo esta la siguiente:

$$\{Y_i^*\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n.$$

A partir de la expresión del estadístico $T_n^{O^1}$ definido en (3.211), se calcula para la muestra anterior el valor del siguiente estadístico:

$$\begin{aligned}
 T_n^{O^{1*}} = \sqrt{n} \max \{ & \min \{ \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n, \\
 & \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n \}, \\
 & \min \{ -\text{mid } \overline{X}_n^* + \text{mid } \overline{X}_n + \text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n, \\
 & -\text{mid } \overline{X}_n^* + \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n \} \}.
 \end{aligned} \tag{3.235}$$

Análogamente, para resolver el Test (3.223) correspondiente al caso difuso, se considera un CDA \mathcal{X} definido sobre (Ω, \mathcal{A}, P) tal que $\text{spr}_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$ y una m.a.s. extraída a partir de \mathcal{X} para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Si $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que $\text{spr}_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, se define el siguiente estadístico:

$$\begin{aligned}
 T_n^*(f_O^1) = \frac{n}{\theta} \left\| \max \{ 0, \min \{ \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n, \right. \\
 \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n - \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n \}, \\
 \min \{ -\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* - \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n, \\
 \left. -\text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{mid } \overline{\mathcal{X}}_n - \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n^* + \text{spr } \overline{\mathcal{X}}_n \} \right\|_{\theta, \lambda}^2.
 \end{aligned} \tag{3.236}$$

En el Lema 3.3.9 se muestran las distribuciones asintóticas de $T_n^{O^{1*}}$ y $T_n^*(f_O^1)$, siendo su demostración análoga a la correspondiente al Lema 3.1.13, considerando en este caso los resultados expuestos en los Lemas 3.3.1 y 3.3.5.

Lema 3.3.9 Sean $T_n^{O^{1*}}$ y $T_n^*(f_O^1)$ definidos como en (3.235) y (3.236).

a) Si $X \in \mathcal{P}$ y $E(X) = A$, se cumple:

$$T_n^{O^{1*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max \{ \min \{ z_1, z_2 \}, \min \{ -z_1, -z_2 \} \} \text{ c.s. } - [P] \tag{3.237}$$

donde $(z_1, z_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.213).

b) Si $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$ y $E(\mathcal{X}) = V$, se cumple:

$$T_n^*(f_O^1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \|\max\{0, \min\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}, \min\{-\mathbf{Z}_1, -\mathbf{Z}_2\}\}\|_{\theta, \lambda}^2 \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.238)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de $(s_{\mathcal{X}} - E(s_{\mathcal{X}}), s_{-\mathcal{X}} - E(s_{-\mathcal{X}}))^T$.

A partir del resultado anterior, se concluye el Teorema 3.3.10.

Teorema 3.3.10 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.9 y $\rho \in [0, 1]$:*

a) Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica (3.237). Si H_0 en (3.210) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n^{O^1} > k_{1-\rho}^*) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.239)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(X) = A$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.210) cuando $T_n^{O^1} > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea $k_{1-\rho}^*$ el percentil de orden $100(1-\rho)$ de la distribución asintótica (3.238). Si H_0 en (3.223) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(T_n(f_O^1) > k_{1-\rho}^*) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.240)$$

y la igualdad se alcanza cuando $E(\mathcal{X}) = V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.223) cuando $T_n(f_O^1) > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

Caso $d \in (0, 1)$

Considérese X un intervalo aleatorio tal que $\text{spr } E(X) > 0$ y sea A un intervalo compacto fijado para el que $\text{spr } A > 0$. Sean X_1, \dots, X_n una m.a.s. extraída a partir de X y las siguientes poblaciones bootstrap:

$$\{Y_i^1\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid } A - \overline{X}_n + 2(1-d)\text{spr } A + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n,$$

$$\{Y_i^2\}_{i=1}^n = \{X_i + \text{mid } A - \overline{X}_n - 2(1-d) \text{spr } A + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n.$$

Es inmediato ver que

$$\text{mid } \overline{Y}_n^1 = \text{mid } A + 2(1-d) \text{spr } A \quad \text{y} \quad \text{spr } \overline{Y}_n^1 = \text{spr } A,$$

$$\text{mid } \overline{Y}_n^2 = \text{mid } A + 2(d-1) \text{spr } A \quad \text{y} \quad \text{spr } \overline{Y}_n^2 = \text{spr } A,$$

siendo estos los peores casos bajo la hipótesis nula según se comprobó en el Lema 3.3.3.

A continuación, se extrae una muestra bootstrap de $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{X_i^*\}_{i=1}^n$, y se utiliza para construir muestras bootstrap procedentes de $\{Y_i^1\}_{i=1}^n$ e $\{Y_i^2\}_{i=1}^n$ que serán las siguientes:

$$\{Y_i^{1*}\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n + 2(1-d) \text{spr } A + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n,$$

$$\{Y_i^{2*}\}_{i=1}^n = \{X_i^* + \text{mid } A - \overline{X}_n + 2(d-1) \text{spr } A + [-\text{spr } A, \text{spr } A]\}_{i=1}^n.$$

Teniendo en cuenta estas muestras, el estadístico $T_n^{O(0,1)}$ introducido en (3.215) se transforma en los siguientes estadísticos según el caso que se esté considerando:

$$\begin{aligned} T_n^{O_1^{(0,1)*}} = \sqrt{n} \max \{ & \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n), \\ & \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n, \\ & \min \{ \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } \overline{X}_n^* + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) + 4(d-1) \text{spr } A, \\ & \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n + 4(d-1) \text{spr } A \}, \end{aligned} \quad (3.241)$$

$$\begin{aligned} T_n^{O_2^{(0,1)*}} = \sqrt{n} \max \{ & \min \{ \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n) + 4(d-1) \text{spr } A, \\ & \text{mid } \overline{X}_n^* - \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n + 4(d-1) \text{spr } A \}, \\ & \min \{ \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } \overline{X}_n^* + (2d-1) (\text{spr } \overline{X}_n^* - \text{spr } \overline{X}_n), \\ & \text{mid } \overline{X}_n - \text{mid } \overline{X}_n - \text{spr } \overline{X}_n^* + \text{spr } \overline{X}_n \}. \end{aligned} \quad (3.242)$$

En relación al Test (3.228) en el contexto difuso, dados \mathcal{X} un CDA tal que $\text{spr }_{E(\mathcal{X})_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ una m.a.s. extraída a partir de \mathcal{X} y $V \in \mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ tal que $\text{spr }_{V_\alpha} > 0$ para $\alpha < 1$, se definen los siguientes estadísticos:

$$T_n^* (f_{O_1}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{O_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{O_1}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.243)$$

$$T_n^*(f_{O_2}^{(0,1)}) = \frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(f_{O_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(f_{O_2}^{(0,1)*})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right), \quad (3.244)$$

donde

$$f_{O_1}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), -2d \text{spr } v, \right. \\ \min \left\{ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + (1 - 2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right) + 4(d - 1) \text{spr } v, \right. \\ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + (1 - 2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right) \\ \left. \left. 2(1 - d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), 2 \left(\text{spr } v - d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right) \right) \right\}, \right. \\ \min \left\{ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + 4(d - 1) \text{spr } v, \right. \\ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \\ \left. \left. 2(1 - d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), 2 \left(\text{spr } v - d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right) \right) \right\} \right\},$$

$$f_{O_2}^{(0,1)*} = \max \left\{ -2d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), -2d \text{spr } v, \right. \\ \min \left\{ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + (1 - 2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right), \right. \\ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + (1 - 2d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} \right) + 4(d - 1) \text{spr } v \\ \left. \left. 2(1 - d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), 2 \left(\text{spr } v - d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right) \right) \right\}, \right. \\ \min \left\{ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n}, \right. \\ \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{mid } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + 4(d - 1) \text{spr } v \\ \left. \left. 2(1 - d) \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right), 2 \left(\text{spr } v - d \left(\text{spr } \overline{\mathcal{X}_n^*} - \text{spr } \overline{\mathcal{X}_n} + \text{spr } v \right) \right) \right\} \right\}.$$

En el Lema 3.3.11 se expone la distribución asintótica de los estadísticos anteriores, siendo el modo de proceder en la demostración análogo al del Lema 3.1.15 pero considerando en este caso los resultados obtenidos en los Lemas 3.3.3 y 3.3.7.

Lema 3.3.11 Sean $T_n^{O_1^{(0,1)*}}$, $T_n^{O_2^{(0,1)*}}$, $T_n^*(f_{O_1}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{O_2}^{(0,1)})$ definidos como en (3.241), (3.242), (3.243) y (3.244), respectivamente. Si $X \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{P}}$, entonces:

a.1) Cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(1 - d)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{O_1^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \min\{\tau_1, \tau_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.245)$$

donde $(\tau_1, \tau_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_1)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.217).

a.2) Cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(d-1)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, se cumple:

$$T_n^{O_2^{(0,1)*}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{mín}\{\zeta_1, \zeta_2\} \text{ c.s. } - [P] \quad (3.246)$$

donde $(\zeta_1, \zeta_2)^T \equiv \mathcal{N}_2(\vec{0}, \Sigma_2)$ con la matriz de varianzas-covarianzas dada en (3.219).

b.1) Cuando $\text{mid }_{E(\mathcal{X})} = \text{mid } V + 2(1-d)\text{spr } V$ y $\text{spr }_{E(\mathcal{X})} = \text{spr } V$, se cumple:

$$T_n^*(f_{O_1}^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s. } - [P] \quad (3.247)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.232).

b.2) Cuando $\text{mid }_{E(\mathcal{X})} = \text{mid } V + 2(d-1)\text{spr } V$ y $\text{spr }_{E(\mathcal{X})} = \text{spr } V$, se cumple:

$$T_n^*(f_{O_2}^{(0,1)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\theta} \left(\left\| \sqrt{F(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 - \left\| \sqrt{G(\text{máx}\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\})} \right\|_{\theta, \lambda}^2 \right) \text{ c.s. } - [P] \quad (3.248)$$

donde $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ se distribuye como un proceso gaussiano en el espacio $\mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1]) \times \mathcal{L}_\theta^\varphi(\mathbb{S}^{p-1} \times [0, 1])$ con esperanza nula y el mismo operador de covarianzas que el de (3.234).

Teniendo en cuenta el Lema 3.3.11, se concluye el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12 *Considérense las condiciones del Lema 3.3.11 y $\rho \in [0, 1]$:*

a) Sea $k_{1-\rho}^*$ el máximo de los percentiles de orden $100(1-\rho)$ de las distribuciones asintóticas (3.245) y (3.246). Si H_0 en (3.214) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n^{O^{(0,1)}} > k_{1-\rho}^*\right) \leq \rho \text{ c.s. } - [P] \quad (3.249)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(1-d)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) = \text{spr } A$, o bien cuando $\text{mid } E(X) = \text{mid } A + 2(d-1)\text{spr } A$ y $\text{spr } E(X) =$

spr A . Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.214) cuando $T_n^{O(0,1)} > k_{1-\rho}^*$ es asintóticamente correcto.

b) Sea k_ρ^* el máximo de los percentiles de orden 100ρ de las distribuciones asintóticas (3.247) y (3.248). Si H_0 en (3.228) es cierta, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(T_n\left(f_O^{(0,1)}\right) < k_\rho^*\right) \leq \rho \quad \text{c.s.} - [P] \quad (3.250)$$

y la igualdad se alcanza o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(1-d)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$, o bien cuando $\text{mid}_{E(\mathcal{X})} = \text{mid}_V + 2(d-1)\text{spr}_V$ y $\text{spr}_{E(\mathcal{X})} = \text{spr}_V$. Como consecuencia, el test que consiste en rechazar H_0 en (3.228) cuando $T_n\left(f_O^{(0,1)}\right) < k_\rho^*$ es asintóticamente correcto.

Caso $d = 0$

Como se comprobó anteriormente, cuando el grado de intersección es 0, su análisis se reduce al estudio del grado de inclusión para $d = 0$. De este modo, los desarrollos bootstrap en este caso se corresponden con los mismos de la Sección 3.1.5 para $d = 0$.

A continuación se introducen los algoritmos correspondientes a los contrastes bootstrap presentados en esta sección, necesarios para la aplicación de los mismos en la práctica.

Algoritmos para los contrastes bootstrap (Test de intersección)

Paso 1. En cada caso, elegir una m.a.s. de tamaño n a partir de $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$.

Paso 2. Para esta muestra calcular:

- El valor del estadístico $T_n(f_O^1)$ definido en (3.224) en el caso $d = 1$.
- El valor del estadístico $T_n(f_O^{(0,1)})$ definido en (3.229) en el caso $d \in (0, 1)$.

Paso 3. En cada caso, obtener una m.a.s. bootstrap $\{\mathcal{X}_i^*\}_{i=1}^n$ de $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ y calcular:

- El valor del estadístico bootstrap $T_n^*(f_O^1)$ definido en (3.236) en el caso $d = 1$.
- Los valores de los estadísticos bootstrap $T_n^*(f_{O_1}^{(0,1)})$ y $T_n^*(f_{O_2}^{(0,1)})$ definidos en (3.243) y (3.244), respectivamente, en el caso $d \in (0, 1)$.

Paso 4. Repetir el Paso 3 un gran número B de veces con el fin de conseguir un conjunto de B valores de los estadísticos en cada uno de los casos. Estos conjuntos se denotarán por $E_{O_1}^*$ si $d = 1$, y $E_{O_1}^{*(0,1)}$ y $E_{O_2}^{*(0,1)}$ si $d \in (0, 1)$.

Paso 5. Calcular el p -valor bootstrap según el grado de inclusión que se esté considerando:

CASO $d = 1$: Si se quiere contrastar (3.223), el p -valor aproximado viene dado por la proporción de valores en $E_{O_1}^*$ mayores o iguales que $T_n(f_O^1)$.

CASO $d \in (0, 1)$: Si se quiere contrastar (3.228), el p -valor aproximado viene dado por el máximo de las proporciones de valores en $E_{O_1}^{*(0,1)}$ y en $E_{O_2}^{*(0,1)}$ menores o iguales que $T_n(f_O^{(0,1)})$.

3.3.5. Estudios de simulación

En esta sección se analiza la consistencia de los tests bootstrap estudiados en la Sección 3.3.4. En primer lugar se analizan los siguientes contrastes correspondientes al caso intervalar:

$$H_0^1 : O(E(X), A) = 1 \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : O(E(X), A) < 1, \quad \text{con } A = [-1, 3]; \quad (3.251)$$

$$H_0^2 : O(E(X), B) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : O(E(X), B) \neq 1/2, \quad \text{con } B = [-5, 3]. \quad (3.252)$$

De nuevo el grado de intersección para $d = 0$ no se estudia por ser igual al grado de inclusión para $d = 0$. Dado $X : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$, se distinguen dos situaciones según diferentes distribuciones de $\text{mid } X$ y de $\text{spr } X$:

I.a) $\text{mid } X \equiv \mathcal{N}(1, 5)$ y $\text{spr } X \equiv \chi_2^2$.

I.b) $\text{mid } X \equiv U(-4, 6)$ y $\text{spr } X \equiv \chi_2^2$.

En todos los casos se tiene $E(X) = [-1, 3]$ y el algoritmo bootstrap seguido es el incluido al final de la Sección 3.3.4. Las Tablas 3.10 y 3.11 muestran los resultados correspondientes a los Tests (3.251) y (3.252). En cada caso se han llevado a cabo 10000 simulaciones a diferentes niveles de significación, así como 1000 réplicas bootstrap por simulación, lo cual implica un error muestral asintótico del 0.195% para $\rho = 0.01$, del 0.427% para $\rho = 0.05$ y del 0.588% para $\rho = 0.1$, a un nivel de confianza del 95%.

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : O(E(X), A) = 1$			$H_0^2 : O(E(X), B) = 1/2$		
	1	5	10	1	5	10
10	3.92	9.78	14.02	3.60	8.12	12.28
30	2.06	6.72	11.66	2.06	6.22	10.70
50	1.52	6.38	11.02	1.46	5.82	10.58
100	1.48	5.24	10.82	1.38	5.78	9.84
200	1.22	5.18	10.32	1.22	5.45	9.90

Tabla 3.10: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso intervalar *I.a)*

$n \setminus 100 \cdot \rho$	$H_0^1 : O(E(X), A) = 1$			$H_0^2 : O(E(X), B) = 1/2$		
	1	5	10	1	5	10
10	4.48	9.00	13.70	3.30	7.62	12.90
30	1.90	6.82	12.20	2.16	5.78	9.88
50	1.80	6.02	11.10	1.54	5.66	10.12
100	1.32	5.48	9.94	1.32	5.64	9.90
200	1.26	5.36	9.86	1.22	5.44	9.92

Tabla 3.11: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso intervalar *I.b)*

Según lo mostrado en las Tablas 3.10 y 3.11, los tamaños de muestra necesarios para obtener resultados próximos al nivel de significación fijado son mayores que $n = 100$. Por tanto, el procedimiento bootstrap es adecuado para tamaños de muestra moderados. Como en ocasiones anteriores, podría ser interesante estimar la matriz de varianzas-covarianzas de los estadísticos bootstrap correspondientes.

En relación con el caso difuso, se considera un CDA trapezoidal $\mathcal{X} = Tra(a, b, c, d)$ tal que $b - a \equiv \chi_3^2$, $d - c \equiv \chi_8^2$ y con b y c que siguen las distribuciones siguientes:

F.a) $b \equiv \mathcal{N}(0.5, 5)$ y $c \equiv b + \mathcal{N}(1, 3)$.

F.b) $b \equiv U(0, 1)$ y $c \equiv U(1, 2)$.

Se tiene que en ambos casos $E(\mathcal{X}) = Tra(-2.5, 0.5, 1.5, 9.5)$. Se van a contrastar las hipótesis siguientes:

$$H_0^1 : O(E(\mathcal{X}), U) = 1 \quad \text{frente a} \quad H_1^1 : O(E(\mathcal{X}), U) < 1; \quad (3.253)$$

$$H_0^2 : O(E(\mathcal{X}), V) = 1/2 \quad \text{frente a} \quad H_1^2 : O(E(\mathcal{X}), V) \neq 1/2, \quad (3.254)$$

donde $U = Tra(-2.5, 0.5, 1.5, 9.5)$ y $V = Tra(-8, 0, 1, 4)$ en los tres primeros casos, y $U = Tra(42, 45, 55, 63)$ y $V = Tra(31.5, 40, 50, 52.5)$ en el último de ellos. Al igual que en el caso de inclusión y de similaridad se considera $\theta = 1/3$ y se realizan 10000 simulaciones de los correspondientes procedimientos bootstrap (implicando los mismos errores muestrales que en el caso intervalar) a distintos niveles de significación y con 1000 réplicas bootstrap en cada una de ellas. Los resultados se recogen en las Tablas 3.12 y 3.13.

Según los resultados expuestos en las Tablas 3.12 y 3.13, los porcentajes de rechazos de la hipótesis nula están cerca del nivel de significación nominal en general para tamaños de muestra mayores o iguales que $n = 100$ y en algunos casos para tamaños sensiblemente mayores que $n = 100$. Al igual que en ocasiones anteriores, es recomendable la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas mediante el empleo de técnicas estadísticas adecuadas.

	$H_0^1 : O(E(\mathcal{X}), U) = 1$			$H_0^2 : O(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10
10	4.24	9.74	15.12	3.66	8.34	11.62
30	1.68	7.02	11.34	1.70	5.90	10.82
50	1.60	6.54	10.66	1.58	5.54	10.48
100	1.44	5.44	10.46	1.20	5.30	9.89
200	1.02	5.28	10.12	1.14	5.08	10.14

Tabla 3.12: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso difuso *F.a)*

	$H_0^1 : O(E(\mathcal{X}), U) = 1$			$H_0^2 : O(E(\mathcal{X}), V) = 1/2$		
$n \setminus 100 \cdot \rho$	1	5	10	1	5	10
10	4.78	10.10	14.00	6.66	11.46	15.40
30	2.72	7.34	11.78	3.62	8.48	12.12
50	1.82	6.30	11.18	2.90	7.72	11.74
100	1.30	6.10	10.66	2.40	6.58	10.96
200	1.24	5.50	10.28	1.80	5.68	10.24

Tabla 3.13: Tamaño empírico de los tests bootstrap para el grado de intersección en el caso difuso *F.b)*

3.3.6. Aplicación práctica

Como última aplicación, y de nuevo con el objetivo de analizar si el queso Gamonedo merece o no mantener la mención de Denominación de Origen, se llevará a cabo un estudio sobre el grado de intersección entre la calidad de ciertas características del queso y unos límites establecidos de antemano. De nuevo el análisis se centrará en tres características esenciales del queso: la apariencia, la calidad del olor y la calidad del sabor. Además, se tendrán en cuenta las opiniones con las que se ha trabajado en las Secciones 3.1.7 y 3.2.6 dadas en forma de números difusos trapezoidales. En primer lugar se va a consi-

derar únicamente el 1-nivel de las opiniones anteriores y se trabajará con los siguientes intervalos aleatorios:

- $X \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”.
- $Y \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del olor de cada queso”.
- $Z \equiv$ “percepción simplificada del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”.

En este caso, se va a analizar si la esperanza de las opiniones del experto acerca del aspecto, el olor y el sabor del queso tiene intersección con el intervalo $A = [62, 70]$ en un grado mayor o igual a $1/2$. También se estudiará si dicha esperanza interseca completamente al intervalo $B = [60, 65]$. De este modo, los contrastes que se van a llevar a cabo son:

$$H_0^1 : O(E(X), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^1 : O(E(X), A) < 1/2. \quad (3.255)$$

$$H_0^2 : O(E(Y), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^2 : O(E(Y), A) < 1/2. \quad (3.256)$$

$$H_0^3 : O(E(Z), A) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^3 : O(E(Z), A) < 1/2. \quad (3.257)$$

$$H_0^4 : O(E(X), B) = 1 \text{ frente a } H_1^4 : O(E(X), B) < 1. \quad (3.258)$$

$$H_0^5 : O(E(Y), B) = 1 \text{ frente a } H_1^5 : O(E(Y), B) < 1. \quad (3.259)$$

$$H_0^6 : O(E(Z), B) = 1 \text{ frente a } H_1^6 : O(E(Z), B) < 1. \quad (3.260)$$

Al igual que en ocasiones anteriores, se tienen en cuenta tres muestras de tamaño 20 a partir de los intervalos aleatorios X , Y y Z y que vienen reflejadas en la Tabla 3.5 en la Sección 3.1.7. Las correspondientes medias muestrales son $\bar{X} = [58.30, 63.70]$, $\bar{Y} = [63.70, 69.05]$ y $\bar{Z} = [61.65, 67.30]$. Se ha aplicado el procedimiento bootstrap desarrollado en la Sección 3.3.4 para intervalos aleatorios en los casos $d \in (0, 1)$ y $d = 1$. Se han llevado a cabo 10000 réplicas del mismo, obteniéndose los siguientes p -valores según cada caso: $p = 0.3058$, $p = 0.9712$ y $p = 0.8303$ en los Tests (3.255), (3.256) y (3.257), y $p = 0.4844$, $p = 0.0892$ y $p = 0.5359$ para los Tests (3.258), (3.259) y (3.260). Por tanto, se tiene que la calidad de las tres características puede admitirse que tiene intersección con $[62, 70]$

en un grado mayor o igual a $1/2$ a los distintos niveles de significación usuales. Además, el aspecto de la pasta y la calidad del sabor del queso Gamonedo puede considerarse que interseca completamente al intervalo $[60, 65]$ a los niveles habituales, mientras que la hipótesis nula en (3.259) relativa a la calidad del olor no se rechaza a los niveles $\rho = 0.01$ y $\rho = 0.05$, pero sí al nivel $\rho = 0.1$.

En segundo lugar se analizará el grado de inclusión en el caso difuso considerando los siguientes CDAs:

- $\mathcal{X} \equiv$ “percepción del experto sobre el aspecto de la pasta de cada queso”,
- $\mathcal{Y} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del olor de cada queso”,
- $\mathcal{Z} \equiv$ “percepción del experto sobre la calidad del sabor de cada queso”,

cuyas medias muestrales vienen dadas por $\bar{\mathcal{X}} = Tra(53.15, 58.3, 63.7, 69)$, $\bar{\mathcal{Y}} = Tra(58.5, 63.7, 69.05, 74.85)$ y $\bar{\mathcal{Z}} = Tra(56.45, 61.65, 67.3, 73)$. Como en otras ocasiones se considerará $\theta = 1/3$. En este caso el primer objetivo se centra en analizar si la media de las opiniones del experto para cada característica interseca a $U = Tra(60, 65, 70, 75)$ con un grado mayor a $1/2$, y el segundo en estudiar si dichas medias intersecan completamente al número difuso $V = Tra(50, 60, 65, 75)$. Así, los contrastes que van a llevarse a cabo a continuación son:

$$H_0^1 : O(E(\mathcal{X}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^1 : O(E(\mathcal{X}), U) < 1/2. \quad (3.261)$$

$$H_0^2 : O(E(\mathcal{Y}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^2 : O(E(\mathcal{Y}), U) < 1/2. \quad (3.262)$$

$$H_0^3 : O(E(\mathcal{Z}), U) \geq 1/2 \text{ frente a } H_1^3 : O(E(\mathcal{Z}), U) < 1/2. \quad (3.263)$$

$$H_0^4 : O(E(\mathcal{X}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^4 : O(E(\mathcal{X}), V) < 1. \quad (3.264)$$

$$H_0^5 : O(E(\mathcal{Y}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^5 : O(E(\mathcal{Y}), V) < 1. \quad (3.265)$$

$$H_0^6 : O(E(\mathcal{Z}), V) = 1 \text{ frente a } H_1^6 : O(E(\mathcal{Z}), V) < 1. \quad (3.266)$$

Para ello, se consideran de nuevo las muestras de opiniones de un experto acerca de las tres características introducidas inicialmente en la Tabla 2.11. Se han realizado 10000

réplicas del procedimiento bootstrap presentado en la Sección 3.3.4 en el contexto difuso teniendo en cuenta que $d \in (0, 1)$ y $d = 1$. Los p -valores obtenidos fueron $p = 0.2881$, $p = 1$ y $p = 0.8366$ para los Tests (3.261), (3.262) y (3.263), y $p = 0.7211$, $p = 0.2575$ y $p = 0.6926$ para los Tests (3.264), (3.265) y (3.266). Como conclusión, ninguno de las hipótesis nulas de los tests anteriores se rechaza a los niveles de significación usuales y, por tanto, la esperanza de las opiniones del experto acerca del aspecto, la calidad del olor y la calidad del sabor del queso Gamonedo puede admitirse que interseca a $U = Tra(60, 65, 70, 75)$ con grado mayor o igual que $1/2$ y que interseca completamente a $V = Tra(50, 60, 65, 75)$.

Otras aplicaciones

El grado de intersección entre la esperanza de un CDA (o de un conjunto aleatorio) y un conjunto difuso (o conjunto) previamente fijado también podría aplicarse en las siguientes situaciones:

- En el caso de inversión en bolsa resulta interesante analizar si la media de las predicciones de los expertos sobre la posición del índice de Bolsa en determinado momento interseca unos límites concretos con cierto grado de intersección.
- Además, con el objetivo de comparar la fluctuación de la tensión de un paciente enfermo con un paciente sano a lo largo del tiempo, puede estudiarse si la media de las fluctuaciones de las tensiones del paciente enfermo intersecan la media correspondiente al paciente sano con cierto grado si esta última es conocida.
- Al igual que sucedía para el grado de similaridad, se puede comparar el movimiento de las mareas en un determinado punto con el correspondiente a otro punto (si este último se conoce), analizando el grado de intersección entre la media de las variaciones en el primer punto y la variación en el último.

Epílogo

En la presente memoria se han desarrollado varios contrastes de hipótesis relacionados con la variabilidad y la imprecisión de elementos aleatorios asociados con datos experimentales cuyos valores son intervalos o conjuntos difusos. Los procedimientos teóricos empleados para ello se han formalizado, respectivamente, dentro del marco de intervalos aleatorios y conjuntos difusos aleatorios mediante el empleo de una familia de métricas generalizada.

En la primera parte de este trabajo se ha analizado el test de una muestra para la varianza (difusa) de un conjunto difuso aleatorio, extendiendo posteriormente los resultados obtenidos al análisis de la igualdad de varianzas de dos o más conjuntos difusos aleatorios. Ambos estudios se han basado en la teoría de UH-estadísticos y en el Teorema Central del Límite. Además, se han aplicado técnicas bootstrap que proporcionan una aproximación a la distribución muestral con velocidad superior a la conseguida con los tests asintóticos correspondientes, resultando adecuadas para tamaños de muestra moderados. Con el objetivo de analizar la idoneidad de los tests propuestos, se han llevado a cabo estudios de simulación de varios tipos de conjuntos difusos aleatorios, teniendo en cuenta distintos tamaños muestrales y diferentes métricas de la familia considerada. También se ha analizado la potencia de los tests asintóticos planteados mediante alternativas locales. En particular, se ha probado la consistencia de tales tests. Los resultados obtenidos se han utilizado en un ejemplo real con el fin de mostrar su aplicabilidad.

A continuación se señalan algunas líneas de investigación generales que se pretenden abordar en el futuro:

- En relación con el test de igualdad de varianzas de dos o más conjuntos difusos aleatorios, es posible la definición de diferentes estadísticos de contraste basados o bien en modificaciones del estadístico propuesto en esta memoria, o bien en el clásico test de Bartlett. Este último es el caso del test de Shoemaker, cuyo análisis empírico se ha llevado a cabo en el Capítulo 2 y cuyo estudio teórico es necesario abordar en futuros trabajos. También puede analizarse la posibilidad de definir otro tipo de tests basados en diferentes técnicas, para compararlos posteriormente de forma empírica.
- Resultaría interesante llevar a cabo un análisis de sensibilidad más profundo con respecto a diferentes elecciones de los valores de θ y φ , así como de la forma de las distribuciones involucradas y de los conjuntos difusos elegidos para describir las valoraciones/percepciones imprecisas.
- Puede resultar útil analizar empíricamente el comportamiento de los tests propuestos en el espacio $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ (con $p > 1$), así como la aplicación práctica de los mismos en diferentes campos.

En la segunda parte de la memoria se han introducido diversos tests de hipótesis con el fin de analizar si la esperanza de un elemento impreciso aleatorio puede ‘compararse’ en cierto modo con un valor impreciso fijado. En este contexto, se han desarrollado tests sobre el grado de inclusión, grado de similaridad y grado de intersección de la media de un elemento impreciso aleatorio en o con un valor impreciso previamente fijado. Para ello, se han establecido métodos aproximados basados en técnicas asintóticas que aprovechan las buenas propiedades de los estimadores consistentes y asintóticamente normales. Además, se han aplicado técnicas bootstrap para aproximar la distribución muestral de los estadísticos de contraste y se ha analizado el comportamiento de los mismos por medio de estudios de simulación, resultando adecuados para tamaños de

muestra moderados. Finalmente, la aplicabilidad de los resultados teóricos se ha mostrado sobre un ejemplo real.

De nuevo se establecen posibles líneas de investigación futura sobre la base de los resultados obtenidos:

- Es necesario analizar la función potencia de los tests propuestos para determinar su consistencia, tanto teórica como empíricamente, y comparar la idoneidad de los índices en los que se basan.
- Con el objetivo de mejorar los resultados empíricos obtenidos, puede resultar interesante integrar en el estudio la estimación bootstrap de la matriz de varianzas-covarianzas de cada estadístico de contraste mediante el uso de técnicas adecuadas.
- Al igual que en el caso de la varianza, es interesante el análisis empírico considerando conjuntos difusos aleatorios definidos sobre $\mathcal{F}_c^2(\mathbb{R}^p)$ (con $p > 1$) y su aplicación sobre ejemplos reales.
- También podría desarrollarse un estudio para contrastar el grado de inclusión, intersección o similaridad de la esperanza de un conjunto difuso aleatorio en la esperanza de otro.
- La principal línea de investigación que se propone se centra en la formalización de nuevos contrastes de hipótesis para la esperanza de elementos imprecisos aleatorios, basados en una mayor flexibilización de las hipótesis. En este contexto, sería interesante analizar, por ejemplo, si “ $E(\mathcal{X})$ está alrededor de V ” o si “ $E(\mathcal{X})$ puede considerarse que es mucho más grande que V ”. Para ello, es necesario establecer en primer lugar cómo formalizar las ideas “estar alrededor de” y “ser mucho más grande que”, para posteriormente proceder al desarrollo del test mediante el empleo de técnicas estadísticas adecuadas.

Bibliografía

- [1] Abdel-Kader, M.G. & Dugdale, D. (2001). Evaluating investments in advanced manufacturing technology: A fuzzy set theory approach. *The British Accounting Review*, 33 (4), 455–489.
- [2] Allen, I.E. & Seaman C.A. (2007). Likert scales and data analyses. *Quality Progress*, 40, 64–65.
- [3] Artstein, Z. & Vitale, R.A. (1975). A strong law of large numbers for random compact sets. *Annals of Probability*, 5, 879–882.
- [4] Aumann, R.J. (1965). Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12, 1–12.
- [5] Bartlett, M.S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society A*, 160, 262–282.
- [6] Bates, J.H.T. & Young, M. (2003). Applying fuzzy logic to medical decision making in the intensive care unit. *American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine*, 167, 948–952.
- [7] Baudrit, C., Couso, I. & Dubois, D. (2007). Joint propagation of probability and possibility in risk analysis: Towards a formal framework. *International Journal of Approximate Reasoning*, 45 (1), 82–105.
- [8] Baum, L.E. & Katz, M. (1965). Convergence rates in the law of large numbers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 120 (1), 108–123.

- [9] Bellman, R. & Zadeh, L.A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, 141–164.
- [10] Bertoluzza, C., Corral, N. & Salas, A. (1995). On a new class of distances between fuzzy numbers. *Mathware & Soft Computing*, 2, 71–84.
- [11] Bickel, P.J. & Freedman, D.A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *The Annals of Statistics*, 9 (6), 1196–1217.
- [12] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
- [13] Bhandary, M. & Dai, H. (2009). An alternative test for the equality of variances for several populations when the underlying distributions are normal. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38 (1), 109–117.
- [14] Blanco, A., Corral, N. & González-Rodríguez, G. (2008). Some properties of the d_K -variance for interval-valued random sets. In: Dubois, D. *et al.* (Eds.) *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*. *Advances in Soft Computing*, 48, 331–337. Springer Berlin/Heidelberg.
- [15] Bloch, I. (2005). Fuzzy spatial relationships for image processing and interpretation: a review. *Image and Vision Computing*, 23, 89–110.
- [16] Boos, D.D. & Cavell, B. (2004). Comparing variances and other measures of dispersions, *Statistical Science*, 19 (4), 571–578.
- [17] Borovskikh, Y.V. (1986). Theory of U-statistics in Hilbert spaces. Preprint, No. 86.78, UkrSSR Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Kiev.
- [18] Box, G.E.P. (1953). Non-normality and tests on variances. *Biometrika*, 40, 318–335.
- [19] Box, G.E.P. & Andersen, S.L. (1955). Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumption (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 17, 1–34.
- [20] Branzei, R. & Alparslan Gok, S.Z. (2008). Bankruptcy problems with interval uncertainty. *Economics Bulletin*, 3 (56), 1–10.

- [21] Brown, M.B. & Forsythe, A.B. (1974). Robust test for the equality of variances. *Journal of the American Statistical Association*, 55, 245–264.
- [22] Cahoy, D.O. (2010). A bootstrap test for equality of variances. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54 (10), 2306–2316.
- [23] Chalco-Cano, Y., Roman-Flores, H. & Gomide, F. (2008). A new type of approximation for fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 1376–1383.
- [24] Colubi, A., Domínguez-Menchero, J.S., López-Díaz, M. & Gil, M.A. (1999). A generalized strong law of large numbers. *Probability Theory and Related Fields*, 114, 401–417.
- [25] Colubi, A., Domínguez-Menchero, J.S., López-Díaz, M. & Ralescu, R. (2002). A $D_E[0, 1]$ representation of random upper semicontinuous functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130, 3237–3242.
- [26] Colubi, A., Coppi, R., D’Urso, P. & Gil, M.A. (2007). Statistics with fuzzy random variables, *Metron*, 65 (3), 277–303.
- [27] Colubi, A. (2009). Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy- and real-valued data. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 344–356.
- [28] Conover, W.J., Johnson, M.E. & Johnson, M.M. (1981). A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data. *Technometrics*, 23, 351–361.
- [29] Corbatón, J.A. & Ceballos, D. (2004). Aplicación del método Fuzzy Delphi a la predicción bursátil. In: XI Congress of International Association for Fuzzy-set Management and Economy (SIGEF, Reggio Calabria, Italia).
- [30] D’Urso, P. & Giordani, P. (2006). A robust fuzzy k-means clustering model for interval valued data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 21 (2), 251–269.
- [31] De Luca, A. & Termini, S. (1972). A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Journal of Information and Control*, 20, 301–312.

- [32] Denoeux, T. & Masson, M.H. (2004). Principal component analysis of fuzzy data using autoassociative neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12 (3), 336–349.
- [33] Diamond, P. & Kloeden, P. (1994). *Metric Spaces of Fuzzy Sets*. World Scientific, Singapore.
- [34] Draper, N.R. & Hunter, W. G. (1969). Transformations: some examples revisited. *Technometrics*, 11 (1), 129–132.
- [35] Dubois, D. & Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York.
- [36] Dubois, D., Prade, H., Farreny, H., Martin-Clouaire, R. & Testemale, C. (1988). *Possibility Theory—An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York.
- [37] Efron, B. & Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, New York.
- [38] Epifanio, I. & Ayala, G. (2002). A random set view of texture classification. *IEEE Transactions on image processing*, 11 (8), 859–867.
- [39] Fréchet, M. (1948). Les éléments aléatoires de natures quelconque dans un espace distancié. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 10, 215–310.
- [40] Games, P.A., Winkler, H.B. & Probert, D.A. (1972). Robust tests for homogeneity of variances. *Educational and Psychological Measurement*, 32, 887–909.
- [41] Gil, M.A., Lubiano, M.A., Montenegro, M. & López-García, M.T. (2002). Least squares fitting of an affine function and strength of association for interval-valued data. *Metrika*, 56, 97–111.
- [42] Gil, M.A., Montenegro, M., González-Rodríguez, G., Colubi, A. & Casals, M.R. (2006). Bootstrap approach to the multi-sample test of means with imprecise data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 148–162.

- [43] Gil, M.A., González-Rodríguez, G., Colubi, A. & Montenegro, M. (2007). Testing linear independence in linear models with interval-valued data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 (6), 3002–3015.
- [44] Giné, E. & Zinn, J. (1989). Bootstrapping general empirical measures. *Annals of Probability*, 17, 684–691.
- [45] Gonzalez de Llano, D., Ramos, M., Rodríguez, A., Montilla, A. & Juárez, M. (1992). Microbiological and physicochemical characteristics of gamonedo blue cheese during ripening. *International Dairy Journal*, 2 (2), 121–135.
- [46] González-Rodríguez, G., Montenegro, M., Colubi, A. & Gil, M.A. (2006). Bootstrap techniques and fuzzy random variables: Synergy in hypothesis testing with fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 2608–2613.
- [47] González-Rodríguez, G., Blanco, A., Corral, N. & Colubi, A. (2007). Least squares estimation of linear regression models for convex compact random sets. *Advances in Data Analysis and Classification*, 1, 67–81.
- [48] González-Rodríguez, G., Colubi, A. & Trutschnig, W. (2009). Simulation of fuzzy random variables. *Information Sciences*, 179, 642–653.
- [49] González-Rodríguez, G., Colubi, A. & Gil, M.A. (2010). Fuzzy data treated as functional data: A one-way ANOVA test approach. *Computational Statistics & Data Analysis In press*. (doi:10.1016/j.csda.2010.06.013).
- [50] Grzegorzewski, P. (2008). Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval - Algorithms and properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 159 (11), 1354–1364.
- [51] Hoeffding, W. (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19, 293–325.
- [52] Klement, E., Puri, M.L. & Ralescu, D.A. (1986). Limit theorems for fuzzy random variables. *Proceedings of the Royal Society A*, 407, 171–182.

- [53] Körner, R. (1997). *Linear models with random fuzzy variables*. PhD Thesis, Freiberg University of Mining and Technology.
- [54] Körner, R. (2000). An asymptotic α -test for the expectation of random fuzzy variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 83, 331–346.
- [55] Körner, R. & Näther, W. (2002). On the variance of random fuzzy variables. In: Bertoluzza, C. *et al.* (Eds.) *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data*, 22–39. Physica-Verlag, Heidelberg.
- [56] Krätschmer, V. (2002). Some complete metrics on spaces of fuzzy subsets. *Fuzzy sets and Systems*, 130, 357–365.
- [57] Kruse, R. & Meyer, K.D. (1987). *Statistics with Vague Data*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- [58] Kulpa, Z. (2001). Diagrammatic representation for interval arithmetic. *Linear Algebra and its Applications*, 324, 55–80.
- [59] Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems. *Information Sciences*, 15, 1–29.
- [60] Kwakernaak, H. (1979). Fuzzy random variables-II. Algorithms and examples for the discrete case. *Information Sciences*, 17, 253–278.
- [61] Laha, R.G. & Rohatgi, V.K. (1979). *Probability Theory*. Wiley, New York.
- [62] Lai, Y.J. & Hwang, C.L. (1994). *Fuzzy Multiple Objective Decision Making Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [63] Layard, M.W.J. (1973). Robust large-sample tests for homogeneity of variances. *Journal of the American Statistical Association*, 68, 195–198.
- [64] León, T., Sebastián, R., Ayala, G., Díaz, M.E., Zoncu, R. & Roomre, D. (2007). Fuzzy temporal random sets with an application to cell Biology. In: *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE, London, UK)*, 1–6.

- [65] Levene, H. (1960). Robust tests for equality of variances. In: I. Olkin (Ed.) Contributions to Probability and Statistics. Stanford University Press, Palo Alto, California, 278–292.
- [66] Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, 140, 1–55.
- [67] Lim, T.-S. & Loh, W.-Y. (2006). A comparison of tests of equality of variances. *Computational Statistics & Data Analysis*, 22, 287–301.
- [68] López-García, H., López-Díaz, M. & Gil, M.A. (2000). Interval-valued quantification of the inequality associated with a random set. *Statistics & Probability Letters*, 46 (2), 149–159.
- [69] Lubiano, M.A. (1999). *Medidas de variación para elementos aleatorios imprecisos*. PhD Thesis, University of Oviedo.
- [70] Lubiano, M.A. & Gil, M.A. (1999). Estimating the expected value of fuzzy random variables in random samplings from finite populations. *Statistical Papers*, 40 (3), 277–295.
- [71] Lubiano, M.A., Gil, M.A., López-Díaz, M. & López, M.T. (2000). The $\vec{\lambda}$ -mean squared dispersion associated with a fuzzy random variable. *Fuzzy sets and Systems*, 111 (3), 307–317.
- [72] Maiers, J. & Sherif, Y.S. (1985). Applications of fuzzy set theory. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15 (1), 175–189.
- [73] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York.
- [74] McBratney, A.B. & Moore, A.W. (1985). Application of fuzzy sets to climatic classification. *Agricultural and Forest Meteorology*, 35, 165–185.
- [75] Minkowski, H. (1896). *Geometrie der Zahlen*. Teubner, Leipzig.
- [76] Molchanov, I. (2005). *Theory of Random Sets*. Springer, London.

- [77] Montenegro, M. (2003). *Estadística con datos imprecisos basada en una métrica generalizada*. PhD Thesis, University of Oviedo.
- [78] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A. & Gil, M.A. (2001). Two-sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable. *Information Sciences*, 133 (1–2), 89–100.
- [79] Montenegro, M., Colubi, A., Casals, M.R. & Gil, M.A. (2004). Asymptotic and Bootstrap techniques for testing the expected value of a fuzzy random variable. *Metrika*, 59, 31–49.
- [80] Näther, W. (1997). Linear statistical inference for random fuzzy data. *Statistics*, 29, 221–240.
- [81] Pedrycz, W. (1993). *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. Research Studies Press, J. Wiley, New York.
- [82] Pippier, C.B. & Ritz, C. (2006). Checking the grouped data version of the Cox Model for interval-grouped survival data. *Scandinavian Journal of Statistics*, 34, 405–418.
- [83] Puri, M.L. & Ralescu, D.A. (1985). The concept of normality for fuzzy random variables. *Annals of Probability*, 13, 1373–1379.
- [84] Puri, M.L. & Ralescu, D.A. (1986). Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114, 409–422.
- [85] Ramos-Guajardo, A. B., Colubi, A., González-Rodríguez, G. & Gil, M. A. (2010). One-sample tests for a generalized Fréchet variance of a fuzzy random variable. *Metrika*, 71 (2), 185–202.
- [86] Rockafeller, R.T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [87] Rodríguez, A., Alonso, L., González, M.D., González, C. & Mayo, B. (2000). Quesos de asturias. *Alimentaria 2000*, 111–124.
- [88] Roy, S.N. (1953). On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 24 (2), 220–238.

- [89] Ruiz, F.J., Angulo, C. & Agell, N. (2006). A supervised discretization method for quantitative and qualitative ordered variables. *Computación y Sistemas*, 9 (4), 314–325.
- [90] Sánchez, E. (1979). Inverses of fuzzy relations. Application to possibility distributions and medical diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 75–86.
- [91] Shao, J. & Tu, D. (1995). *The Jackknife and Bootstrap*. Springer-Verlag, New York.
- [92] Shawe-Taylor, J. & Cristianini, N. (2004). *Kernel Methods for Pattern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [93] Shoemaker, L.H. (2003). Fixing the F test for equal variances. *Journal of American Statistical Association*, 57, 105–114.
- [94] Stevens, S.S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science*, 103 (2684), 677–680.
- [95] Terán, P. (2003). A strong law of large numbers for random upper semicontinuous functions under exchangeability conditions. *Statistics & Probability Letters*, 65, 251–258.
- [96] Tetsushi, K. & Tooru, U. (1999). Data envelopment analysis based on triangular fuzzy numbers. *Technical Reports of Seikei University*, 36 (1), 9–15.
- [97] Trutschnig, W., González-Rodríguez, G., Colubi, A. & Gil, M.A. (2009). A new family of metrics for compact, convex (fuzzy) sets based on a generalized concept of mid and spread. *Information Sciences*, 179, 3964–3972.
- [98] Vila, M.A. & Delgado, M. (1983). On medical diagnosis using possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 10, 211–222.
- [99] Vineis, P. (2008). Methodological insights: fuzzy sets in medicine. *Journal of Epidemiology and Community Health*, 62, 273–278.
- [100] Vitale, R.A. (1985). L_p metrics for compact, convex sets. *Journal of Approximation Theory*, 45, 280–287.

- [101] Wang, P.P. (1982). *Theory of Fuzzy Sets and their Applications*. Shanghai Science and Technology, Shanghai.
- [102] Yager, R.R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information Sciences*, 24, 143–161.
- [103] Yen, K.K., Ghosray, S. & Roig, G. (1999). A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients. *Fuzzy sets and systems*, 106 (2), 167–177.
- [104] Yi, F. (2001). Short-term variability and temporary structures of tides and mean wind in the polar summer mesosphere. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 63, 749–757.
- [105] Young, N. (1988). *An Introduction to Hilbert Spaces*. Cambridge Mathematical Textbooks.
- [106] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information Control*, 8, 338–353.
- [107] Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part 1. *Information Sciences*, 8, 199–249; Part 2. *Information Sciences*, 8, 301–353; Part 3. *Information Sciences*, 9, 43–80.
- [108] Zimmermann, H.J. (1983). Using fuzzy sets in operational research. *European Journal of Operational Research*, 13, 201–216.
- [109] Zimmermann, H.J. (1996). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Third edition. Ed. Kluwer Academic Publishers.
- [110] Zopounidis, C., Pardalos, P. & Baourakis, G. (2001). *Fuzzy Sets in Management, Economics and Marketing*. World Scientific.
- [111] Zwick, R., Carlstein, E. & Budescu, D. (1987). Measures of similarity among fuzzy sets: a comparative analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1, 221–242.

Índice alfabético

- U -estadísticos en un espacio de Hilbert o UH -estadísticos, 31
- α -cortes, 6
- α -niveles, 6
- D_θ^φ -varianza de un CDA, 22
- alternativas locales para un test, 83
- cardinalidad o potencia de un conjunto difuso, 98
- conjunto aleatorio, 16
- conjunto difuso aleatorio, 18
 - D_θ^φ -varianza, 22
 - esperanza, 20
 - homocedasticidad de varios CDAs, 59
 - media, 20
 - valor esperado, 20
 - varianza, 22
- conjuntos difusos, 6
 - cardinalidad o potencia, 98
 - conjunto soporte de, 6
 - diferencia de Hukuhara, 7
 - distancia D_θ^φ , 12
 - función soporte, 9
 - grado de inclusión entre dos, 98
 - grado de intersección, 169
 - grado de similaridad, 141
 - medida, 97
 - medida de la intersección, 98
 - mid generalizado, 12
 - producto de un conjunto difuso por un escalar, 6
 - spread generalizado, 12
 - suma de conjuntos difusos, 6
- cuasivarianza muestral de una m.a.s. de un CDA, 23
- diferencia de Hukuhara
 - entre conjuntos difusos, 7
 - entre valores de conjunto, 6
- distancia d_θ entre valores de conjunto, 11
- distancia D_θ^φ entre valores difusos, 12
- esperanza difusa de un CDA, 20
- estructura semilineal, 5
- función soporte
 - de un conjunto difuso, 9
 - de un valor de conjunto, 9

- grado de inclusión de un conjunto difuso en otro, 98
 rango de valores, 98
 grado de intersección entre dos conjuntos difusos, 169
 grado de similaridad de dos conjuntos difusos, 141
 rango de valores, 141

 homocedasticidad de CDAs, 59

 igualdad de varianzas de CDAs, 59

 media difusa de un CDA, 20
 media muestral de una m.a.s. de un CDA, 20
 medida de la intersección de dos conjuntos, 97
 medida de la intersección de dos conjuntos difusos, 98
 medida de la intersección de dos intervalos, 97
 medida del conjunto, 97
 medida del conjunto difuso, 97
 medida del intervalo, 97
 mid generalizado de un valor de conjunto, 10
 mid generalizado de un valor difuso, 12

 números difusos, 6
 simulación, 24
 números difusos trapezoidales, 7

 parametrización inf/sup de un intervalo, 3
 parametrización mid/spr de un intervalo, 4
 principio de extensión de Zadeh, 6
 principio de Frèchet, 9
 producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ en \mathcal{H} , 11

 simulación de números difusos, 24
 spread generalizado de un valor de conjunto, 10
 spread generalizado de un valor difuso, 12
 suma de cuadrados del total, 63

 test asintóticamente correcto, 41

 valor esperado difuso de un CDA, 20
 valores de conjunto
 distancia d_θ , 11
 medida, 97
 medida de la intersección, 97
 valores de conjunto en \mathbb{R}^p , 5
 diferencia de Hukuhara, 6
 función soporte, 9
 mid generalizado, 10
 producto por escalar, 5
 spread generalizado, 10
 suma de Minkowski, 5
 valores de intervalo, 3
 medida, 97
 medida de la intersección, 97
 valores difusos, 6
 cardinalidad o potencia, 98
 conjunto soporte de, 6

- diferencia de Hukuhara, 7
- distancia D_{θ}^{φ} , 12
- función soporte, 9
- grado de inclusión entre dos, 98
- grado de intersección, 169
- grado de similaridad, 141
- medida, 97
- medida de la intersección, 98
- mid generalizado, 12
- spread generalizado, 12
- valores intervalares de \mathbb{R} , 3
- variación dentro de los grupos, 63
- variación entre grupos, 63
- varianza de un CDA, 22
- varianza muestral de una m.a.s. de un CDA, 23

