Doc. nº 013/1990

MEDIDAS DE DESIGUALDAD: UN ESTUDIO ANALITICO.

EQUIPO MECO.

MEDIDAS DE DESIGUALDAD:

UN ESTUDIO ANALITICO.

*Equipo **MECO** **
Universidad de Oviedo

SUMARIO

Este documento es el primero de una serie de trabajos en los que abordamos la cuantificación de la desigualdad de renta de una población.

En el trabajo de discusión que ahora presentamos se hace un planteamiento general de las medidas de desigualdad desde una óptica puramente analítica. Comenzaremos considerando los índices usualmente utilizados para cuantificar la desigualdad haciendo explícitos los inconvenientes que plantea el empleo de los mismos. A continuación se hace referencia a las propiedades que intuitivamente parece lógico exigir a las medidas de desigualdad. En la sección siguiente estudiaremos de modo exhaustivo el indice de orden - 1, poniendo de manifiesto las ventajas que esta medida presenta frente a otros indicadores.

A modo de apéndice se recogen otros tipos de medidas de desigualdad además de las ya estudiadas y se evalúa la bondad de todas ellas a partir de un conjunto de propiedades consideradas deseables.

* El equipo **MECO** -Métodos de Economía Cuantitativa Oviedo- está formado por los siguientes investigadores: Rigoberto **PEREZ**, Ana Jesús **LOPEZ**, Carmen **RAMOS**, Mercedes **ALVARGONZALEZ**, Rosa M. **PEREZ**, María J. **RIO** y Covadonga **CASO**.

Este equipo desea expresar su agradecimiento a la **Fundación Banco Herrero** por la colaboración prestada en esta investigación.

1 - INTRODUCCION

Uno de los pilares básicos que sustentan las políticas sociales es el afán de corregir los desequilibrios espaciales, regionales o personales, en definitiva de suavizar la desigualdad que existe entre los distintos agentes económicos.

Esta preocupación se plasma en numerosos trabajos de investigación que abordan el problema de la desigualdad desde ópticas muy diferentes.

Nosotros no pretendemos contribuir al estudio de la desigualdad con un análisis descriptivo de sus causas y efectos o posibles relaciones con otros fenómenos sino que hemos optado por centrarnos en el aspecto analítico. Nuestros esfuerzos van encaminados a lograr una cuantificación "más correcta" del nivel de desigualdad de una población.

La desigualdad económica es una noción compleja y su medición lleva consigo dificultades. Sin embargo, parece evidente la necesidad de evaluar el grado en que un reparto de renta diverge de la equidistribución.

Para hacer comparaciones entre pautas distributivas diferentes necesitamos acudir a algún tipo de instrumento que indique de forma simplificada la desigualdad. Los índices permiten resumir en una sola cifra un conjunto de magnitudes, y realizar comparaciones entre situaciones distintas basándonos en su nivel de desigualdad.

Hemos de reseñar que no existe una única medida sintetizadora de la desigualdad. Pueden emplearse numerosos índices que, además, nos conducen a valoraciones diferentes cuando se aplican sobre un mismo conjunto de datos.

Cuando nos planteamos la elección de un índice concreto debemos tener presente que no es posible evitar la introducción de connotaciones normativas, ya que detrás de la expresión algebraica del índice hay ponderaciones que valoran de forma diferente los elementos que componen la desigualdad. Por esta razón, creemos que sería conveniente apuntar de forma explícita los criterios que nos han llevado a la elección de un indicador determinado. (Estos criterios serán tratados en un próximo trabajo de discusión).

2 - INDICES USUALES : LORENZ, GINI Y THEIL

Los índices tradicionalmente más utilizados para medir la desigualdad de renta son sin duda los de Gini y Lorenz aunque, como señalan R. M. Pérez y R. Pérez en (1987) , su uso está justificado más por razones históricas que por idoneidad de los mismos como indicadores de la desigualdad.

En general el planteamiento puede ser el siguiente: Sea E una población finita formada por N individuos $\{w_1, w_2, ..., w_N\}$. Denotamos por X la variable renta, que sobre E toma unos valores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k\}$ con frecuencias absolutas $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, ..., \mathbf{n}_k\}$ ($\sum_{i=1}^{k} \mathbf{n}_i = N$).

2.1 - INDICE DE LORENZ

El índice de Lorenz se define como $L(X) = \sum_{i=1} (p_i - q_i) / \sum_{i=1} p_i$ donde p_i representa la proporción de los i rentistas con menos renta ($p_i = N_i / N$ con $N_i = \sum_{i=1}^{i} n_j$, supuestas ordenadas las rentas en orden creciente) y $q_i = A_i / A_k$ con $A_i = \sum_{i=1}^{i} x_j n_j$ es la proporción de rentas asociadas a esos rentistas.

Esta medida tiene la ventaja de permitir una representación gráfica muy ilustrativa figurando en uno de los ejes la proporción de los i primeros rentistas y en el otro la proporción de renta que les corresponde.

La interpretación es obvia: si todos los individuos reciben la misma renta, la curva de Lorenz será la diagonal del cuadrado de lado uno, pero cuVndo no exista equidistribución la proporción de renta de los i primeros rentistas será inferior a la proporción que éstos representan sobre el total.

El Indice de Lorenz representa un cociente entre dos áreas: la comprendida entre la curva de concentración y la diagonal de equidistribución, y la correspondiente al triángulo rectángulo de catetos iguales a la unidad.

La aplicación del índice de Lorenz a situaciones diferentes permite ordenar los estados de desigualdad; sin embargo, la ordenación que proporciona este criterio no es completa.

Podemos decir que una situación X es preferida a otra Y cuando la curva relativa a la distribución X está mas cerca de la diagonal principal que la curva relativa a la distribución Y, y las curvas no se cortan.

Si las curvas de X y de Y se intersecan, no se puede afirmar que ninguna de las distribuciones sea mas desigual que la otra.

Así pues, el criterio de dominación de Lorenz conduce a una cuasiordenaión de los estados de desigualdad.

2.2-INDICE DE GINI

El Indice de Gini viene dado por la expresión :

$$G(X) = \sum_{r>s}^{k} (x_r - x_s) n_r n_s / (N-1) \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

El valor de este indicador está comprendido entre cero y uno, aumentando la desigualdad a medida que el índice se acerca a la cota superior.

Esta medida admite también una interpretación geométrica en términos de la curva de concentración de Lorenz (es el doble del área comprendida entre la curva de concentración y la línea de equidistribución). Este índice será por tanto consistente con el criterio de dominación de Lorenz anteriormente comentado.

2.3- INDICE DE THEIL

Theil (1967) fue el primero en observar que las medidas de entropía propor- cionaban un marco adecuado para medir el grado de desigualdad en la distribución de renta por razones tanto de tipo conceptual como operativo (de hecho el índice de Theil es una adaptación de la medida de entropía de Shannon (1948)).

El índice de Theil puede definirse como :

$$T(X)= \sum_{i=1}^{k} y_i \log (y_i / p_i) \text{ donde } y_i = x_i n_i / \sum_{j=1}^{k} x_j n_j$$

es decir, la proporción de renta total que reparte el i-ésimo conjunto; así pues y_i / p_i será la renta per-cápita del i-ésimo conjunto deflactada por la renta per-cápita de la población total.

Operando, la expresión anterior puede escribirse como :

$$T(X)=(1/E(X)) \sum_{i=1}^{k} (x_i \log (x_i / E(X))) \ p_i$$

Este índice puede ser interpretado como la media ponderada de las desviaciones entre el logaritmo de la renta de cada grupo y el logaritmo de la renta per cápita de la población.

$$T(X)= (1/E(X)) \{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i [\log x_i - \log (E(X))]\}$$

Si consideramos continua a la variable "renta", entonces, el indicador de Theil puede también ser expresado como:

$$T(X)= E[(X/E(X)).\log(X/E(X)] = Cov(X/E(X), \log X/E(X)) + E[\log(X/E(X)]$$

Esta nueva expresión del índice de Theil, nos permite realizar nuevas interpretaciones:

Si las rentas son próximas (el recorrido de la variable es pequeño), entonces las rentas relativas (X/E(X)) serán números próximos a 1, por lo que su logarítmo es aproximadamente (X/E(X))-1; sustituyendo, tenemos:

$$T(X) \approx Cov(X/E(X), \log X/E(X)) = \sigma^2_{X/E(X)}$$

a cero (serán nulos cuando todas las rentas coincidan).

Si existe una mayor disparidad entre las rentas, el valor del índice de Theil aumenta, pero en cualquier caso aparece acotado por la covarianza entre las rentas relativas y su logarítmo.

Si la introducción de la función logaritmo como compensadora de la "justicia social" ha dado una visión acertada del problema en términos intuitivos, desde otros puntos de vista (operativo y empírico) esta función plantea diversos problemas derivados de su escasa manejabilidad.

3 - PROPIEDADES EXIGIBLES

En esta sección incluimos aquellas propiedades que intuitivamente parece lógico exigir a las medidas de desigualdad.(Un análisis exhaustivo de estas propiedades figura en el anexo).

1 - **Normalización.** Parece razonable que el indicador sea una medida relativa, que en todo momento nos permita evaluar e interpretar el grado de desigualdad de una distribución o bien comparar dos situaciones; para ello debemos fijar, al menos, uno de los extremos (asociado a alguna situación límite) que puede alcanzar esta medida, de manera que la proximidad a él nos permita interpretar el grado de desigualdad respecto a esa situación extrema. Generalmente, la situación de referencia es aquella de máxima equidad -equidistribución de la renta- en la cual no hay desigualdad y a la que por tanto se asocia el valor 0; esto es: $D_N(x,....,x) = 0$

2 - **Simetría.** Una medida de desigualdad debe ser una función simétrica de sus argumentos; si $X = \{x_1,.... , x_N\}$, entonces :

$$D_N(x_1, ..., x_N) = D_N(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(N)})$$

siendo σ una permutación cualquiera del conjunto $\{ 1, ..., N \}$.

Esta propiedad garantiza la imparcialidad y el anonimato en el cálculo de la desigualdad; el valor del índice ha de ser independiente de la ordenación y denominación de los individuos.

3 - **Independencia del tamaño poblacional.** Esta propiedad, también conocida como "principio de la población", establece que una medida de desigualdad debe ser invariante ante cambios en el tamaño de la población, siempre que no se alteren las proporciones de rentistas n_i /N. Un enunciado más formal de esta propiedad sería el siguiente : "Si E_r es una superpoblación formada por r réplicas de E, entonces el grado de desigualdad de E_r coincidirá con el de E".

4 - **Continuidad.** Una medida de desigualdad debe ser una función continua de las rentas y de las proporciones de rentistas.

Esta propiedad establece que pequeñas variaciones en las rentas o en la población supondrán pequeñas variaciones del índice.

Formalmente: $\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0 \ / \ \| X - Y \| \leq \delta \ \Rightarrow \ | D(X) - D(Y) | \leq \varepsilon$ siendo $\| \ \|$ una norma cualquiera de $\mathbb{R}^N$.

5 - **Condición de Pigou - Dalton.** Si se produce una transferencia de renta de un rentista a otro con menores ingresos, siempre que esa transferencia no supere la semidiferencia de renta entre ambos, la desigualdad se reduce. Esto es, si $x_i < x_j$ entonces:

$$D_N(x_1,\dots, x_i,\dots, x_j,\dots, x_N) > D_N(x_1,\dots, x_i + \partial ,\dots, x_j - \partial ,\dots, x_N)$$

$$\forall\ \partial \in (0, (x_j - x_i)/2)$$

Esta propiedad se conoce también como "principio de transferencia progresivas"; a modo de recíproco, puede establecerse el "principio de transferencia regresivas": si el trasvase se produce de un rentista a otro con mayores ingresos entonces la desigualdad aumenta.

6 - **Descomponibilidad.** Si la población se agrupa en estratos, el índice de desigualdad de la población podrá obtenerse a partir del índice entre grupos y del indicador de cada grupo. En otras palabras, si tenemos r estratos de tamaños N_1 .....N_r, entonces la desigualdad global podrá expresarse como :

$D_N(X) = D_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i D_{N_i}(X_i)$ donde D_0 es el índice entre grupos, $D_{N_i}(X_i)$ representa el índice del grupo i , y α es un coeficiente de ponderación que depende sólo del tamaño de ese grupo y del total de renta del mismo, pero no de las rentas individuales que lo conforman.

7 - **Invarianza por homotecias.** Si se produce una variación proporcional en todas las rentas, el valor del índice no varía. Es decir : $D(\lambda X) = D(X)\ \forall\ \lambda$ real y positivo.

Esta propiedad garantiza que la medida de desigualdad no dependerá de la unidad monetaria en la que se expresen las rentas.

Un estudio más extenso sobre estas propiedades exigibles a un buen indicador, puede verse en Eichhorn (1980) y en R, Pérez (1985); un planteamiento diferente sobre el tema figura en Ruiz-Castillo (1986).

4.- MEDIDAS DE DESIGUALDAD ADITIVAMENTE DESCOMPONIBLES.

El incumplimiento de la descomponibilidad es una de las principales críticas que podemos hacer a los indicadores de Gini y Lorenz, pues ante cualquier agregación o cambio en la estructura de la población, deberán ser realizados nuevamente todos los cálculos.

La escasa manejabilidad de estas medidas nos conduce a rechazar la utilización de las mismas como indicadores de desigualdad de una población.

La familia de medidas de desigualdad aditivamente descomponibles supone un avance frente a los índices convencionales (Gini y Lorenz) ya que garantiza la posibilidad de obtener una medida de desigualdad de una población a partir de los correspondientes indicadores de desigualdad para diferentes estratos de la misma.

Estas medidas han sido estudiadas exhaustivamente y caracterizadas por F. Bourguignon (1979), F. A. Cowell (1980a), A. E. Shorrocks (1980) y D. Zagier (1983) . Siguiendo la axiomática de este último podemos enunciarlas de la siguiente forma:

Toda medida de desigualdad descomponible y satisfaciendo las propiedades de normalización, independencia del tamaño poblacional, invarianza por homotecias, condición de Pigou-Dalton y continuidad es de la forma :

$I_N^{\beta}(X) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{\beta}(X_i /E(X))\, p_i$ siendo $\varphi_{\beta}(X)$ una función definida para cada β real como :

$$\varphi_{\beta}(X) = \begin{cases} X^{\beta} - 1 & \text{si } \beta<0 \\ -\log X & \text{si } \beta = 0 \\ 1 - X^{\beta} & \text{si } 0<\beta<1 \\ X \log X & \text{si } \beta = 1 \\ X^{\beta} - 1 & \text{si } \beta>1 \end{cases}$$

M.J. Río y R. Pérez en (1985) han establecido una axiomática de estas medidas cuando $\beta<0$, exigiendo un número menor de axiomas; concretamente no requieren independencia del tamaño poblacional ni invarianza por homotecias. En cambio sí exigen el axioma de simetría no contemplado por Zagier, y dan una formulación alternativa para la condición de Pigou-Dalton.

La familia de medidas de desigualdad generalizadas aditivamente descomponibles puede ser obtenida a partir de ciertas medidas de Teoría de la Información; algunas de estas aproximaciones pueden verse en Cowell (1980b), Pérez (1985) y Shorrocks (1980) entre otros.

Son casos particulares de esta familia el índice de Theil ($\beta=1$) y la varianza normalizada ($\beta=2$). En el caso $\beta=-1$, se obtiene el índice de orden menos uno, que abordaremos en el siguiente apartado.

Para elegir el indicador más adecuado se nos presentan dos alternativas: fijar de antemano un cierto valor de β (basándonos en algún criterio intuitivo, operativo o de estimación) o bien, en cada distribución concreta, determinar el valor de β más adecuado para la misma.

Esta última alternativa tiene una ventaja intuitiva importante, y es que β podría ser interpretado - en algún sentido - como la elasticidad de la renta de la población. Sin embargo sus limitaciones no son menos importantes, pues dadas dos distribuciones puede ocurrir que éstas conlleven la utilización de valores diferentes de β, es decir de distintos indicadores. Se plantea entonces la necesidad de encontrar algún mecanismo de comparación entre niveles de desigualdad de las dos distribuciones. Estos inconvenientes nos indican que el camino a seguir debe ser el primero y que serán criterios objetivos de validez en todo caso los que permitirán elegir el indicador más adecuado.

5 - INDICE DE ORDEN -1. PROPIEDADES.

Sea una población E integrada por N individuos $\{w_1,\ldots\ldots,w_N\}$, sobre los cuales se observa la variable renta que tomará los valores (no negativos): $\{x_1, \ldots., x_k\}$. Denotamos por n_i el número de individuos con renta x_i ($\sum_{i=1}^{k} n_i = N$) y por p_i la proporción que esos i rentistas representan sobre el total($p_i = n_i/N$). Podemos interpretar $\{p_1,\ldots.,p_k\}$ como un sistema de probabilidades asociado a la variable renta.

Se define el índice de orden -1 como el valor de la expresión:

$$I_N^{-1}(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(E(X)/x_i - 1 \right) \quad \text{donde } E(X) \text{ es la renta per-cápita.}$$

Este índice compara, por cociente, la renta pér-cápita con todas las rentas de la población.

A continuación presentamos algunas de las propiedades más interesantes que cumple el índice de orden -1.

5.1 - PROPIEDADES.

5.1.1 - Normalización.
5.1.2. - Invarianza por homotecias.
5.1.3. - Condición de Pigou-Dalton .
5.1.4 - Continuidad.
5.1.5 - Independencia del tamaño poblacional.
5.1.6 - Descomponibilidad. Si la población se puede agrupar en r estratos: $x_1, \ldots, x_r$, entonces:

$$I_N(X) = I_0 + \sum_{i=1} \alpha_i I_{N_i}(x_i) \quad \text{donde } I_0 \text{ es el índice de desigualdad}$$

entre estratos y $I_{N_i}^{-1}$ es el indicador de cada grupo.El coeficiente α_i viene dado por $(\sum_{i=1}^{k} p_{ij})^2 E(X)/E(x_j)$ siendo x_j el j-ésimo valor del i-ésimo grupo y p_{ij} la probabilidad de ese valor en el mismo estrato.

El enunciado e interpretación de estas propiedades están recogidos en la sección 3 y su justificación es trivial por ser el índice de orden -1 un caso particular de la familia general construida sobre ese conjunto de axiomas.

5.1.7 - Simetría. La comprobación es inmediata para I_N^{-1}, sin más que observar la simetría de la expresión matemática de ese indicador.

5.1.8 - Acotación. Una medida de desigualdad D_N debe tomar valores comprendidos entre dos números reales, es decir: para todo $X \in \mathbb{R}^N$ deben existir c y $c' \in \mathbb{R}^N$ de forma que $-c' \leq D_N(X) \leq c$.

Esta propiedad se cumple para el índice de orden -1 por verificarse la condición de Pigou-Dalton y la invarianza por homotecias (los valores c y c' dependerán de las rentas mínima y máxima de la población estudiada).

5.1.9 - S-convexidad. Un buen indicador de desigualdad D_N debe cumplir: $D_N(BX) \leq D_N(X)$ para todo $X \in \mathbb{R}^N$ y para toda matriz B doblemente estocástica*.

El índice de orden -1 cumple esta propiedad por satisfacer la condición de Pigou-Dalton y la simetría.

5.1.10 - Extensibilidad. El valor de una medida de desigualdad D debe aumentar cuando se introduce en la población estudiada un individuo con renta muy baja, esto es:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D_{N+1}(x_1,\ldots\ldots,x_N,\varepsilon) > D_N(x_1,\ldots\ldots,x_N).$$

5.1.11 - Conservación del signo. Un indicador de desigualdad debe tener recorrido positivo.

El indicador I_N^{-1} conserva el signo por cumplir la condición de Pigou-Dalton y la normalización.

5.1.12 - Varianza por traslaciones. Si se produce un aumento lineal en las rentas el valor del índice D_N debe variar, esto es: $D_N(X+\lambda I) \neq D_N(X)$ para todo $X \in \mathbb{R}^N$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Por ser I_N^{-1} un indicador continuo, no constante e invariante por homotecias no puede ser invariante por traslaciones.

5.1.13 - Principio de transferencias regresivo. Si se produce una transferencia de renta de un rentista a otro con mayores ingresos, siempre que esa transferencia no supere la renta del primer individuo, la desigualdad aumenta. Esto es, si $x_i < x_j$ entonces:

$$D_N(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots x_N) < D_N(x_1,\ldots,x_i - \delta,\ldots,x_j + \delta,\ldots,x_N)$$

para todo $\delta \in (0, x_i)$. Para comprobar esta propiedad en el caso del índice de orden -1 nos basamos en la convexidad de la función 1/x.

[*] Una matriz doblemente estocástica es una matriz de la forma :

$$P = \begin{pmatrix} p^{11} & \ldots & p^{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{N1} & \ldots & p^{NN} \end{pmatrix} \quad \text{con } p^{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} p^{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{N} p^{ij} = 1, \ \forall i=1, \ldots N, \ \forall j=1, \ldots N.$$

5.1.14 - Test del valor medio. La desigualdad de cualquier distribución está acotada inferiormente por la desigualdad de la equidistribución y superiormente por la desigualdad en el caso de concentración máxima, esto es:

$$D_N(\mu,\ldots\ldots,\mu) \leq D_N(X) \leq \max_i \{ \lim_{\varepsilon \to 0} D_N(p_j(\sum_{j=1}^{N} x_j - (N-1)\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon))\}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

$\forall$ **p** $\in$ M, con M matriz de permutaciones y donde $\mu = \sum_{j=1}^{N} x_j / N$.

Para el índice de orden -1 queda garantizado el cumplimiento de esta propiedad por satisfacer este indicador la condición de Pigou-Dalton.

5.1.15 -Maximalidad. Una medida de desigualdad D_N debe alcanzar su valor más alto cuando la concentración de renta es máxima, esto es:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D_N(p_i(\sum_{j=1}^{N} x_j - (N-1)\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)) > D_N(\mathbf{y}) \qquad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \text{ y}$$

para todo **p** $\in$ M con M matriz de permutaciones.

5.1.16 - Decrecimiento del impacto ante transferencias. Si se hace una transferencia de entre estratos altos de renta la desigualdad es mayor que si se hace la misma transferencia entre estratos bajos, esto es:

sea $X = (x_1, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots, x_j, \ldots\ldots, x_k, \ldots\ldots, x_l, \ldots\ldots, x_N)$ con $x_i < x_j$; $x_k < x_l$; $x_i < x_k$; $x_j < x_l$ $\quad x_j - x_i = x_l - x_k$; $\varepsilon \in (0, (x_j - x_i)/2)$, entonces:

$$D_N(x_1, \ldots, x_i + \varepsilon, \ldots, x_j - \varepsilon, \ldots, x_k, \ldots x_l, \ldots, x_N) < D_N(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k + \varepsilon, \ldots, x_l - \varepsilon, \ldots x_N).$$

6 - VENTAJAS DEL INDICE DE ORDEN - 1 FRENTE A OTROS INDICADORES

En este trabajo hemos presentado algunos indicadores de la desigualdad de renta, dejando para este apartado la decisión de elegir el tipo de indicador que consideramos más adecuado.

La respuesta debe guiarse por algunos criterios objetivos que permitan establecer un orden en el conjunto de posibles indicadores; en este sentido, podríamos requerir que un buen indicador de la desigualdad verificase el conjunto de propiedades "exigibles".

Esta restricción permite reducir el espectro de posibilidades de elección a las medidas aditivamente descomponibles de orden β, puesto que los indicadores usualmente utilizados que no pertenecen a esta familia de medidas no cumplen el conjunto propuesto de propiedades "exigibles".

Hasta ahora, nada nos permite asegurar que el índice de orden $\beta = -1$ presenta ventajas frente a otra medida de orden $\beta \neq -1$. Sin embargo, cuando abordamos el planteamiento inferencial del problema encontramos "suficientes" razones para elegir el índice de orden -1.

En la práctica, no es posible conocer los valores poblacionales de las medidas que hemos definido, pues no conocemos la ley probabilística que sigue la renta, y aún suponiendo que la distribución de renta puede explicarse a través de un modelo de Pareto o Log-normal, desconocemos los parámetros que las caracterizan.

Perez et. al. (1985) justificaron que no es posible obtener estimadores insesgados para la medida de entropía de Shannon (estos argumentos son válidos para el índice de Theil) porque no existe ninguna relación general exacta entre la esperanza del estimador y el valor del parámetro que nos permita obtener el sesgo del estimador (algunas aproximaciones del sesgo figuran en Martínez et. al. (1985)).

Aunque a nivel teórico se pueden obtener estimadores insesgados para todo β negativo y entero, las medidas cuyo orden sea distinto de -1 resultan poco operativas, ya que sería necesario calcular momentos marginales y mixtos de orden mayor o igual que cuatro.

La mayor estabilidad que presenta este indicador es otra de sus ventajas. Aunque próximamente dedicaremos un trabajo a este tipo de estudios, podemos adelantar que en las simulaciones realizadas mediante el método de Montecarlo el índice de orden -1 presentó un comportamiento más adecuado que otras alternativas (menor sesgo, menor varianza, menor ECM y menor ECMR).

REFERENCIAS

BOURGUIGNON, F. (1979): "Decomposable income inequality measures". **Econometrica** 47, pp.901-920.

COWELL, F.A. (1980a): "On the structure of additive inequality measures". **Review of Economic Studies**, 47, pp.521-531.

COWELL, F.A. (1980b): "Generalized entropy and the measurement of distributional change". **European Economic Review**, 14, pp.147-155.

EICHHORN, W. and G. GEHRIG (1980): "Measurement of Inequality in Economics". **Discussion Paper No. 141**, Inst. fur Wirtschaftstheorie und Operations Research.

MARTINEZ, I. , PEREZ, R. y M.A. GIL (1985): "Simulación de Montecarlo para la comparación de las estimaciones de las entropías cuadrática y de Shannon en el muestreo con reemplazamiento". **XV Reunión Nacional de Estadística e Investigación Operativa**, pp.436-444.

PEREZ, R. (1985): "Estimación de la incertidumbre, la incertidumbre útil y la inquietud en poblaciones finitas. Una aplicación a las medidas de desigualdad", **Sesión Científica de la Real Academia de las Cienc. Ex. Fís. y Nat.**, (Abril), Madrid.

PEREZ, R., GIL M.A. and P. Gil (1986): "Estimating the uncertainty associated with a variable in a finite population". **Kybernetes**, 15, pp.251-256.

PEREZ, R.M. y R. PEREZ (1987): "Una cuantificación de la distribución de la renta en España. I- Distribución espacial". (No publicado).

RIO, M.J. y R. PEREZ (1985): " Una caracterización de la inquietud de orden β y su interpretación para las medidas de desigualdad". **XV Reunión Nacional de Estadística e Investigación Operativa**, pp. 649-656.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986): "La medición de la pobreza y la desigualdad en España, 1980-81". **Estudios Superiores José Ortega y Gasset**, Oviedo.

SHORROCKS, A.F. (1980): " The class of additively decomposable inequality measures". **Econometrica** 48, pp.613-625.

THEIL, H. (1967): **Economics and Information Theory**. Ed. North-Holland, Amsterdam.

ZAGIER, D. (1983): "On the Decomposability of the Gini coefficient and other indices of inequality". **Discussion Paper, No. 108**, Projectgruppe Theoretische Modelle, Universitat Bonn.

ANEXO

En este anexo se recogen los índices que habitualmente se utilizan en el cálculo de la desigualdad y se hace un análisis comparativo de las propiedades que estas medidas verifican.

A.1.- Consideremos una población de tamaño N, donde la variable **X** toma valores x_1,... , x_k con frecuencias n_1, ..., n_k ($\sum_i n_i = N$). Además de las medidas ya definidas, (índices de Gini, Lorenz, Theil y de orden -1), otros índices usuales son:

RANGO: $R^N(\mathbf{X}) = (\max_i x_i - \min_i x_i)/E(\mathbf{X})$

DESVIACION MEDIA RELATIVA: $M^N(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - E(\mathbf{X})|\, p_i / E(\mathbf{X})$

VARIANZA NORMALIZADA: $V^N(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - E(\mathbf{X}))^2 p_i / (E(\mathbf{X}))^2$

DESVIACION TIPICA DE LOGARITMOS: $S^N(\mathbf{X}) = (\sum_{i=1}^{N} (\log (x_i / E(\mathbf{X}))^2 p_i)^{1/2}$

A.2.- Para contrastar la bondad de los indicadores se ha considerado el siguiente conjunto de propiedades deseables: ***minimalidad, independencia del tamaño poblacional, invarianza por homotecias, condición de Pigou-Dalton, continuidad, descomponibilidad, simetría, acotación, maximalidad, varianza por traslaciones, principio de transferencia regresivo, extensibilidad, S-convexidad, conservación del signo, test del valor medio y decrecimiento del impacto.***

Los resultados obtenidos de este estudio aparecen resumidos en el cuadro siguiente:

	RANGO	DESV. M. RELATIVA	VARIANZA NORMALIZ	DESV.ST. LOGAR.	LORENZ	GINI	THEIL	ORDEN-1
minimalidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
ind.tam.pob.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
inv. homot.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Pigou-Dalton	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI
continuidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
descomponible	NO	NO	SI	SI	NO	NO	SI	SI
simetría	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
acotación	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
maximalidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
var. traslac.	SI ×	SI ×	SI ×	SI	SI ×	SI ×	SI	SI ×
p.transf.regr.	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI
extensebilidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
S-convexidad	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI
conser. signo	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
t. valor med.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
decr. impacto	NO	NO	NO	NO	NO	NO	SI	SI

(El símbolo (×) indica que el índice cumple la propiedad de varianza por traslaciones en el sentido progresivo de disminución de la desigualdad para aumentos lineales de todas las rentas).

A.3.- <u>COMENTARIOS.</u> Podemos observar que las únicas medidas que verifican esta tabla de propiedades deseables son el índice de Theil y el aditivamente descomponible de orden -1, y por lo tanto, desde un punto de vista analítico, serían los indicadores más recomendables para cuantificar el nivel de desigualdad de una población.

Teniendo en cuenta las observaciones ya realizadas sobre el problema de la estimación del índice de Theil y su estabilidad, es posible concluir que cuando el proceso de cuantificacion incluye la inferencia de los valores poblacionales, el ***índice aditivamente descomponible de orden -1*** es la medida de desigualdad mas adecuada de todas las estudiadas.

Doc 001/1988

JUAN A. VAZQUEZ GARCIA.- Las intervenciones estatales en la minería del carbón.

Doc 002/1988

CARLOS MONASTERIO ESCUDERO.- Una valoración crítica del nuevo sistema de financiación autonómica.

Doc 003/1988

ANA ISABEL FERNANDEZ ALVAREZ; RAFAEL GARCIA RODRIGUEZ; JUAN VENTURA VICTORIA.- Análisis del crecimiento sostenible por los distintos sectores empresariales.

Doc 004/1988

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- Una propuesta para la integración multijurisdiccional.

Doc 005/1989

LUIS JULIO TASCON FERNANDEZ; JOSE MANUEL DIEZ MODINO.- La modernización del sector agrario en la provincia de León.

Doc nº 006/1989

JOSE MANUEL PRADO LORENZO.- El principio de gestión continuada: Evolución e implicaciones.

Doc nº 007/1989

JAVIER SUAREZ PANDIELLO- El gasto público del Ayuntamiento de Oviedo (1982-88).

Doc 008/1989

FELIX LOBO ALEU.- El gasto público en productos industriales para la salud.

Doc 009/1989

FELIX LOBO ALEU.- La evolución de lsa patentes sobre medicamentos en los países desarrollados.

Doc 010/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES.- Investigación de las preferencias del consumidor mediante análisis de conjunto.

Doc 011/1990

ANTONIO APARICIO PEREZ.- Infracciones y sanciones en materia tributaria.

Doc 012/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ; CONCEPCION GONZALEZ VEIGA.- Una aproximación metodológica al estudio de las matemáticas aplicadas a la economía.

Doc 013/1990

EQUIPO MECO.- Medidas de desigualdad: un estudio analítico

Doc 014/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- Una estimación de las necesidades de gasto para los municipios de menor dimensión.

Doc 015/1990

ANTONIO MARTINEZ ARIAS.- Auditoria de la información financiera.

Doc 016/1990

MONTSERRAT DIAZ FERNANDEZ.- La población como variable endógena.

Doc 017/1990

JAVIER SUAREZ PANDIELLO.- La redistribución local en los países de nuestro entorno.

Doc 018/1990

RODOLFO GUTIERREZ PALACIOS; JOSE MARIA GARCIA BLANCO.- "Los aspectos invisibles" del declive económico: el caso de Asturias.

Doc 019/1990

RODOLFO VAZQUEZ CASIELLES; JUAN TRESPALACIOS GUTIERREZ.- La política de precios en los establecimientos detallistas.

Doc 020/1990

CANDIDO PAÑEDA FERNANDEZ.- La demarcación de la economía (Seguida de un apéndice sobre su relación con la Estructura Económica).