



Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Física

Trabajo de Fin de Grado

Agujeros Negros y Agujeros de Gusano en Relatividad General

Autor: Alejandro García Soria

Supervisado por:

Adolfo Guarino Almeida

Curso 2022-2023

Índice general

1. Introducción	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Variedades	7
2.1.1. Vectores, Vectores duales y Tensores	9
2.1.2. Tensor métrico	12
2.1.3. Sistema de referencia inerciales.	15
2.1.4. Densidades tensoriales	17
2.2. Curvatura	17
2.2.1. Derivadas covariantes	18
2.2.2. Transporte paralelo	20
2.2.3. Tensor de curvatura de Riemann	22
2.2.4. Simetrías y vectores de Killing	26
2.2.5. Desviación geodésica	28
2.3. Gravitación	30
2.4. Gravitación acoplada a materia y radiación	31
2.4.1. Ecuaciones de campo de Einstein a partir del principio de Mínima acción	32
2.4.2. El campo escalar y el campo electromagnético	33
3. Soluciones a las ecuaciones de campo: agujeros negros	39
3.1. La métrica general estática e isotrópica	39
3.2. El agujero negro de Schwarzschild	41

3.2.1. Estudio de las órbitas	42
3.3. El agujero negro de Reissner-Nordström	47
4. Agujeros de gusano	51
4.1. Un agujero de gusano sencillo	51
4.2. La solución de Einstein-Rosen	53
4.3. Agujeros de gusano atravesables: soluciones de Morris y Thorne	58
4.3.1. Forma de la métrica	59
4.3.2. Ecuaciones de estructura: tensor de energía-momento y tensor de Einstein	60
4.3.3. Condiciones de frontera	63
4.3.4. Superficies embebidas	64
4.3.5. Viajando a través de un agujero de gusano	65
4.3.6. El tensor de energía-momento: materia exótica	71
4.3.7. Una solución específica: confinamiento de la materia exótica	72
5. Conclusiones	77
A. Ecuación de estado para un gas ideal clásico	79
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción

La relatividad general es una de las teorías más importantes de la física moderna, propuesta por Albert Einstein en 1915. Esta teoría describe cómo la presencia de masa y energía en el espacio-tiempo curva la geometría del universo, y cómo esta curvatura afecta el movimiento de los objetos en él.

El presente trabajo de fin de grado se divide en dos partes. En la primera, se desarrolla el marco teórico de la relatividad general, empezando por la definición de la geometría del espacio-tiempo desde un punto de vista general y topológico, hasta llegar a las ecuaciones de campo de Einstein. Para ello nos basamos principalmente en el libro de Carroll [1], y el libro de Freedman y Van Proeyen [3]. En la segunda parte se profundiza en dos tipos de soluciones específicas de las ecuaciones de campo: los agujeros negros y los agujeros de gusano.

En el capítulo de agujeros negros se exploran las propiedades y características de estos objetos. En concreto, se estudia la métrica general estática e isotrópica, realizando un estudio sobre la solución de Schwarzschild y de Reissner-Nordström. Para este desarrollo nos guiamos por [1] y [6].

En el capítulo de agujeros de gusano se analiza la posibilidad teórica de la existencia de túneles que conecten diferentes regiones del espacio-tiempo. Se aborda la naturaleza de los agujeros de gusano, estudiando condiciones para que puedan existir, y se trata la posibilidad de que puedan ser atravesables por un ser humano. Con este objetivo, nos basamos principalmente en el trabajo de Morris y Thorne [5], así como en los trabajos [6], [2] y [4].

En resumen, este trabajo tiene como objetivo proporcionar una introducción a la teoría de la relatividad general, así como una exploración de dos objetos importantes dentro de la teoría: los agujeros negros y los agujeros de gusano.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo exponemos el marco teórico necesario para obtener una buena comprensión de la teoría de la Relatividad General, y poder realizar un estudio detallado de los agujeros negros y los agujeros de gusano. Para ello dividimos el capítulo en tres secciones principales.

La primera parte se centra en la noción de variedades topológicas y los diferentes objetos matemáticos que podemos definir sobre las mismas, como los vectores, los tensores y las densidades tensoriales. Esta sección nos proporciona el fundamento matemático básico para comprender y describir la geometría intrínseca del espacio-tiempo. Para ello nos basamos en el libro de Carroll [1].

En la segunda parte realizamos un estudio de la propia curvatura de una variedad. Presentamos los distintos tensores que utilizamos para caracterizar la curvatura del espacio tiempo, y como sería el movimiento de las partículas sobre una variedad curva. También se introduce de forma informal las ecuaciones de campo de Einstein. De nuevo, basamos nuestro trabajo en [1].

Por último, introducimos las nociones básicas de teoría clásica de campos, ya que es la teoría utilizada para describir la interacción entre partículas y campos en la Relatividad General. Basándonos en el principio de mínima acción llegamos a las ecuaciones de campo de Einstein. Utilizamos principalmente el libro de Freedman y Van Proeyen [3].

2.1. Variedades

Comenzamos introduciendo el concepto topológico de *variedad*. A grosso modo, una variedad es un espacio topológico que localmente se parece a \mathbb{R}^n , de forma que localmente hereda muchas de las propiedades del espacio euclídeo al que estamos acostumbrados, pero que globalmente puede diferir del mismo, como por ejemplo poseyendo curvatura, o siendo topológicamente más complicado. Una variedad se construye "pegando" parches de \mathbb{R}^n de forma regular. Para entender

este concepto de pegar parches, necesitamos de algunas definiciones matemáticas.

Definición 2.1 (Mapa). Es una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ entre dos conjuntos M, N que asigna a cada elemento de M un elemento de N . Es una generalización del concepto de función. A los mapas que son C^∞ se les dice que son *suaves*.

Definición 2.2 (Difeomorfismo). Se trata de un mapa de clase C^∞ que posee inversa de clase C^∞ .

Definición 2.3 (Carta o sistema coordenada). Dado un subconjunto U de un conjunto M , junto con un mapa inyectivo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de tal forma que la imagen $\phi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \Psi : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p \in U &\rightarrow x_p^\mu \quad \text{con } \mu = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

denominamos como sistema coordenada a la pareja (U, Ψ) ; a x_p^μ las llamamos coordenadas del punto (evento) p .

Definición 2.4 (Atlas C^∞). Consiste en una colección de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ satisfaciendo dos condiciones:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ (La unión de todos los subconjuntos cubre el conjunto M).
2. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$. Además todos estos mapas han de ser C^∞ en su región de definición. Es decir, las cartas se pueden "pegar" de forma regular para cubrir todo el conjunto inicial M .

Definición 2.5 (Variedad C^∞ n -dimensional).

Llamamos **variedad C^∞ n -dimensional** a un conjunto M junto con un atlas maximal (que contiene todas las cartas posibles). Esta definición de variedad corresponde formalmente con el hecho de parecerse localmente a \mathbb{R}^n .

Una vez que tenemos introducido el marco geométrico de la teoría, el siguiente paso lógico es definir aquellos elementos que "viven" en dicho espacio, como son los vectores, los vectores duales, y como forma general los tensores. Estos son los elementos que usamos para describir las situaciones físicas, y en concreto, para describir la relatividad general. Como notación, utilizaremos el convenio de suma de Einstein, bajo el cual eliminamos el símbolo de sumatorio, entendiendo que la suma se realiza sobre todos los valores:

$$\sum_{i=1}^n c_i x^i \equiv c_i x^i.$$

El criterio se aplica para índices repetidos.

2.1.1. Vectores, Vectores duales y Tensores

Con el objetivo de describir estos objetos matemáticos, es necesario que introduzcamos el concepto de función f en una variedad M

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p \in M &\longrightarrow f(p) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una función se dice que es *suave*, o C^∞ , si la aplicación $f \circ \Psi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ para todos los sistemas coordenada (O, Ψ) . Denotamos por \mathcal{F} al espacio de las funciones C^∞ que van de M en \mathbb{R} . Podemos notar que cada curva que pasa por un punto $p \in M$ define un operador en este espacio, la derivada direccional, que mapea $f \longrightarrow df/d\lambda|_p$. Una noción muy importante a tener en cuenta es que el espacio tangente a p en M , T_pM , lo podemos identificar como el espacio de los operadores de derivada direccional a lo largo de las curvas que pasan por p . Para demostrar esta idea (Véase [1]) bastaría ver por un lado que el conjunto de derivadas direccionales forman un espacio vectorial; y por otro lado, para ver que es equivalente a T_pM , basta encontrar las coordenadas del espacio. En este caso, dadas las coordenadas de M , x^μ , se tiene $\{\partial_\mu\}$ como base de T_pM , y se suelen denotar como $\hat{e}_\mu \equiv \partial_\mu$. Estas coordenadas forman la **base coordenada** de T_pM , y se cumple que $\dim[T_pM] = n$. Dada una base coordenada se cumple que $V = V^\mu \partial_\mu \equiv V^\mu$ y $V(f) = V^\mu \partial_\mu f$. Un espacio T_pM se puede definir en todo punto $p \in M$, de forma que eligiendo un vector V^μ para cada punto p obtenemos un campo vectorial en la variedad M .

De forma similar, si ya tenemos definido un campo vectorial en la variedad, un vector en un punto puede ser visto como un operador de derivada direccional a lo largo de un camino que pasa por dicho punto. Así, resulta claro que todo espacio vectorial define un mapa de funciones C^∞ en funciones C^∞ en toda la variedad, tomando la derivada en cada punto

$$\frac{df}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu.$$

Por tanto, basta con definir un vector del espacio tangente como $V = V^\mu \partial_\mu$ donde $V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ es la dirección tangente a la trayectoria dada. Otra forma de entender entonces el espacio tangente es como el espacio que contiene todas las curvas en M pasando por p .

Una operación de gran importancia en este contexto es el **braket de Lie**

Definición 2.6 (Bracket de Lie). Se define como el conmutador de dos campos vectoriales

$$\begin{aligned} [U, V](f) &= U^\rho \partial_\rho (V^\lambda \partial_\lambda f) - V^\rho \partial_\rho (U^\lambda \partial_\lambda f) \\ &= [U^\rho \partial_\rho V^\lambda - V^\rho \partial_\rho U^\lambda] \partial_\lambda f = [U, V]^\lambda \partial_\lambda f. \end{aligned}$$

El bracket de Lie cumple que es antisimétrico, verifica la identidad de Jacobi y es bilinear, definiendo así una álgebra de Lie (no entramos en más detalles sobre álgebras de Lie)

Como sabemos, dado un espacio vectorial, se puede definir su espacio dual (vectorial) como el espacio de funciones lineales que van del espacio vectorial en \mathbb{R} . Un espacio dual de gran importancia es el dual al espacio tangente, también denominado como *espacio cotangente*, T_p^*M , cuyos elementos denotamos como $w \equiv w_\nu$.

$$\begin{aligned} w : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ V &\longrightarrow w(V). \end{aligned}$$

Un ejemplo clásico es el gradiente de una función, df . Su acción sobre un vector $d/d\lambda$ es exactamente la derivada direccional de la función

$$df \left(\frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda}.$$

El gradiente de las funciones coordenadas x^μ proporciona una base natural del espacio cotangente, $\{\hat{\theta}^\mu\}$, demandando que $\hat{\theta}^\mu \hat{e}_\nu = \delta_\nu^\mu$, donde δ_ν^μ es el la delta de Kronecker. A esta base la denominamos como *base coordenada dual de T_p^*M* . De esta forma podemos expandir cualquier vector dual como $w = w_\mu \hat{\theta}^\mu = w_\mu dx^\mu$, de forma que la acción del dual sobre un vector del espacio tangente viene dada como sigue

$$w(V) = w_\nu V^\nu.$$

Debemos destacar que al trabajar con espacios vectoriales de dimensión finita, se cumple que la dimensión de un espacio y su dual son iguales, y el espacio dual del espacio dual vuelve a ser el espacio original ($(T_p^*)^* = T_p$).

Como se puede observar, hasta hora hemos usado una notación de subíndices y superíndices que puede parecer un poco ambigua. Sin embargo todo cobra sentido una vez introducido el concepto de tensor.

Definición 2.7 (Tensor). Un tensor T de tipo (k, l) es una forma multilineal que actúa sobre k copias de T_p^* y l copias de T_p y va en \mathbb{R} .

$$T : \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_k \otimes \underbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}_l \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Usando la base coordenada $\{\partial_\mu, dx^\mu\}$, podemos describir un tensor de tipo (k, l) mediante sus componentes

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}.$$

Un hecho que caracteriza a los tensores es que sus propiedades no dependen de la elección de

coordenadas, aunque las componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ dependen de la base coordenada elegida.

Podemos indagar un poco más en como transforman las componentes de los tensores bajo un cambio de coordenadas. Por un lado los vectores base se transforman de la siguiente manera:

$$dx'^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad ; \quad \partial'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \partial_{\mu},$$

donde las coordenadas sin primas se transforman en las primas. De aquí se sigue inmediatamente que un tensor se transforma como

$$T'^{\lambda_1 \dots \lambda_k}_{\rho_1 \dots \rho_l}(x') = \frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\lambda_k}}{\partial x^{\mu_k}} \dots T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x). \quad (2.1)$$

Volviendo a la nota sobre los superíndices y subíndices, una vez introducida la definición de tensor podemos entender los vectores como tensores de tipo (1,0), y de ahí que las componentes tengan superíndice, mientras que los vectores duales corresponden con tensores del tipo (0,1), y por eso sus componentes se denotan con subíndices. Un caso también importante son los tensores de tipo (0,0), que se corresponden con escalares.

Tensor de energía-momento

Un ejemplo de tensor es el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. Este es uno de los tensores más importantes desde un punto de vista físico, y crucial en el marco de la relatividad general, pues tiene un papel primordial en las que denominamos como ecuaciones de campo de Einstein, que veremos más adelante. Se trata de un tensor de tipo (2,0) simétrico¹ cuya definición viene dada por el significado de sus componentes. En un espacio-tiempo plano, la componente T^{00} es la densidad de energía. Las componentes $T^{0,i}$ son la densidad de momento lineal p^i . Las componentes T^{i0} representan el flujo de energía a través de una superficie con x^i constante y por último, las componentes $T^{i,j}$ se corresponden con el flujo de momento p^j a través de una superficie con x^i constante. Para un espacio-tiempo más general, con una métrica $g_{\mu\nu}$, la interpretación se hace como sigue bajo la forma T_{μ}^{ν} :

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_z \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

¹De forma general, para cualquier par de índices, podemos descomponer un tensor en su parte simétrica y antisimétrica tal que

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad , \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad de energía y P_x, P_y, P_z las presiones en las direcciones x, y, z respectivamente. En coordenadas esféricas (2.3) se escribe como

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

2.1.2. Tensor métrico

La métrica es uno de los tensores más importante que podemos asignar a una variedad, ya que tiene un papel principal en la descripción del espacio-tiempo. Acudiendo a una definición matemática², la *métrica* es un tensor del tipo (0,2)

$$g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}.$$

Es importante que notemos como la definición de variedad no depende de una métrica, y como distintas métricas se pueden asignar a una misma variedad. Únicamente cuando especificamos una métrica en la variedad le asignamos su "forma", curvatura, etc.

Algunas de las propiedades del tensor métrico son:

- Simétrico

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

- No degenerado (usualmente)

$$g \equiv |g_{\mu\nu}| \neq 0$$

- Inversa

$$(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} \quad \text{de forma que} \quad g_{\rho\mu} g^{\mu\nu} = \delta_{\rho}^{\nu}$$

Denominamos como *forma canónica de la métrica* a una manera concreta de escribir el tensor métrico, de forma que sea diagonal y sus elementos tengan los valores ± 1 y 0 únicamente:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Definimos como *signatura de la métrica* al número de -1 y 1 que posee la forma canónica. Decimos que la métrica es *degenerada* si posee algún elemento que sea nulo. Los elementos

²Destacar que no es estrictamente la definición de métrica en el contexto de la topología, ya que en ese caso se exige que sea definida positiva (autovalores positivos), algo que no se cumple en el marco de la relatividad general (véase métrica de Minkowski mismamente).

de la métrica pueden depender de las coordenadas, aunque si es continua y no degenerada la signatura es igual en todos los puntos. Cuando todos los elementos valen 1, decimos que tenemos una *métrica Euclídea/Riemanniana*, mientras que si un único elemento es -1 , hablamos de *métrica Lorentziana/pseudo-Riemanniana*

Al tratarse de una aplicación que actúa sobre los vectores, la métrica nos permite definir el *producto escalar* entre dos vectores

$$\begin{aligned} g : T_p \times T_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (V, W) &\longrightarrow g(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \equiv V \cdot W. \end{aligned}$$

Así mismo, también nos permite definir la *norma de un vector* U^μ como

$$\|U\|^2 = U \cdot U = g(U, U) = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu.$$

Existe una clasificación de los vectores en función de su norma. Dado un vector $V \in T_p M$, decimos que es

- Tipo tiempo si $\|V\|^2 < 0$
- Nulo si $\|V\|^2 = 0$
- Tipo espacio si $\|V\|^2 > 0$

Un vector cuya norma nos resulta ser de gran importancia es

$$ds = dx^\mu \hat{e}_\mu \implies \|ds\|^2 \equiv ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

ya que nos permite definir la distancia entre dos puntos (eventos) separados por dx^μ . A la norma $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ la denominamos como *elemento de línea en un espacio-tiempo general* M . El elemento de línea no se refiere a un diferencial, o el cuadrado de algún elemento, sino que es otra forma de llamar al tensor métrico, ya que $g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = g(V, W) = ds^2(V, W)$.

Continuando con las ventajas de la métrica, esta nos permite "subir" y "bajar" los índices de cualquier tensor pues se verifica que

$$\underbrace{T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l}}_{\text{tensor } (l, k)} = g_{\mu_1 \rho_1} \dots g_{\mu_k \rho_k} g^{\nu_1 \sigma_1} \dots g^{\nu_l \sigma_l} \underbrace{T^{\rho_1 \dots \rho_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l}}_{\text{tensor } (k, l)}.$$

De esta forma tenemos una correspondencia entre los vectores y sus duales, de manera que

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad \text{y} \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu.$$

Métrica de Minkowski

Como veremos más adelante, la forma del tensor métrico viene determinada por el problema que se pretende resolver, relacionándose con los elementos del sistema mediante las ecuaciones de campo de Einstein. Existe sin embargo un tensor métrico de gran importancia, la denominada como métrica de Minkowski, que posee su propia notación $\eta_{\mu\nu}$.

Definición 2.8 (Métrica de Minkowski). Se define como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Podemos observar que se trata de una métrica de signatura (1,3), y por tanto Lorentziana. Así mismo, la métrica viene representada directamente en su forma canónica. Esta métrica se corresponde con la teoría de la relatividad especial, donde trabajamos con un espacio-tiempo plano.

Relatividad Especial

Utilizando los conocimientos introducidos hasta el momento, podemos hacer una pequeña pausa para aplicarlos definiendo el marco de la relatividad especial, de forma que la notación introducida también nos sirva para el resto de discusiones. Así, en relatividad especial trabajamos con una variedad (de hecho \mathbb{R}^4) en la que a cada punto lo denominamos como *evento*. Contrariamente a la mecánica Newtoniana, en el marco de la relatividad general ninguna partícula puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, c , independientemente del marco de referencia. Como hemos comentado, la métrica que se utiliza en relatividad especial es la de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, de forma que el elemento de línea se define como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6)$$

Las funciones coordenadas las denotamos por

$$x^\mu = \begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

Aunque se suelen utilizar unidades naturales ($c = 1$). Además, si queremos referirnos únicamente a las coordenadas espaciales utilizaremos como superíndice las letras del abecedario latino x^i .

Definido el elemento de línea, podemos introducir el **tiempo propio**, $d\tau$ como el tiempo que pasa entre dos eventos para un observador que se mueve en línea recta entre los mismos:

$$d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.7)$$

Este tiempo nos permite definir "velocidades" en el espacio tiempo. Sea $X^\mu(\lambda)$ la trayectoria de una partícula, $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ es el vector tangente a la curva, de forma que su norma es

$$\|U^\mu\|^2 = \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = ds^2/d\tau^2 = -1. \quad (2.8)$$

Observamos que es siempre constante e igual a -1 .

En relatividad especial existen transformaciones especiales, denominadas como **transformaciones de Lorentz**, caracterizadas por dejar invariante la métrica:

$$\Lambda \in SO(1, 3), \quad (2.9)$$

de forma que

$$\Lambda^t \eta_{\mu\nu} \Lambda = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Otra forma de caracterizar las transformaciones de Lorentz es decir que son las transformaciones más generales que dejan invariante el elemento de línea ds^2 . Algunas transformaciones de Lorentz son las rotaciones, las traslaciones y los "boosts".

2.1.3. Sistema de referencia inerciales.

Es momento de que volvamos a hacer referencia a que una variedad es un espacio que localmente se parece a \mathbb{R}^n . Como hemos visto, las propiedades geométricas de la variedad vienen determinadas por el tensor métrico. Puesto que $g_{\mu\nu}$ es simétrico, siempre lo podemos diagonalizar (localmente, en cada punto) para obtener su forma canónica $\eta_{\mu\nu}$, que corresponde con la métrica de una geometría plana. De hecho, podemos ser un poco más ambiciosos, pues se verifica la siguiente propiedad.

Teorema 2.1. *Dada una variedad M , se cumple que $\forall p \in M, \exists x^{\hat{i}}$ sistema coordenada en el cual $g_{\mu\nu}$ toma su forma canónica $\eta_{\mu\nu}$ y $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$:*

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) = 0 \quad , \quad \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} \neq 0 \quad (2.11)$$

La idea de la demostración se puede encontrar en las páginas 74-75 de [1].

A las coordenadas $x^{\hat{\mu}}$ las llamamos *coordenadas localmente inerciales*, y los vectores base asociados son el *sistema de referencia localmente inercial*. El teorema anterior es realmente importante, pues nos dice que localmente la métrica $g_{\mu\nu}$ difiere de una geometría plana con orden cuadrático, y por tanto localmente es similar a \mathbb{R}^n . En el contexto de la relatividad general, podemos decir que el espacio tiempo es localmente plano en todo punto, no importa cual sea la geometría global (agujeros negros, de gusano, etc). Es importante dejar claro que la transformación de coordenadas que dejan la métrica en su forma canónica es únicamente local, no global, pues si no estaríamos diciendo que la geometría depende de las coordenadas utilizadas, y no puede ser así. De hecho, esta transformación normalmente solo puede realizarse punto a punto, ni siquiera en un entorno. Podríamos construir conjuntos de vectores base donde en todo punto de la variedad la métrica sea $\eta_{\mu\nu}$, el problema es que en general no habrá un sistema coordenada del que poder derivar esta base.

La idea de la existencia de sistemas localmente inerciales también tiene una analogía física, el *principio de equivalencia*. Este principio (propuesto por Einstein) establece que en pequeñas regiones del espacio tiempo las leyes físicas se reducen a aquellas de la relatividad especial; es imposible detectar la existencia de gravedad mediante experimentos locales. Una versión débil del principio es que no podemos distinguir la masa inercial de la masa gravitacional de un objeto.

Las coordenadas localmente inerciales son realmente útiles. De hecho, generalmente no necesitamos construir las coordenadas, simplemente saber que existen. Contemplemos su utilidad con un ejemplo.

Ejemplo 2.1. Supongamos un observador con cuadri-velocidad U^μ y un cohete con V^μ . ¿Qué velocidad real observa?. Si trabajamos con coordenadas inerciales globales, nos encontramos de forma local en el marco de la relatividad especial, donde que el observador se encuentra en reposo $\rightarrow U = (1, 0, 0, 0)$, y el cohete se mueve respecto al observador en una única dirección $\rightarrow V = (\gamma, v\gamma, 0, 0)$ donde $\gamma = -\eta_{\mu\nu}U^\mu V^\nu = U_\mu V^\mu$ es el factor de Lorentz por trabajar en espacio-tiempo plano. Así, la velocidad real medida (en espacio-tiempo plano) resulta ser

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - (U_\mu V^\mu)^{-2}}. \quad (2.12)$$

Al volver a la geometría curva, donde la métrica deja de ser plana, podemos usar coordenadas inerciales en el punto de medida, que sabemos que existen, en las que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, de forma que (2.12) se sigue verificando para un espacio-tiempo curvo. Es más, al tratarse de una ecuación puramente tensorial, que no depende de las coordenadas, es totalmente general. Esta forma de proceder resulta ser increíblemente útil.

2.1.4. Densidades tensoriales

En la teoría de la relatividad especial hemos dicho que hay tensores, como $\eta_{\mu\nu}$, que son invariantes respecto a transformaciones de Lorentz. Sin embargo, en el marco de la relatividad general, sabemos que bajo una transformación de coordenadas, las componentes de la métrica pueden cambiar

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (2.13)$$

Esto se traduce en la existencia de **densidades tensoriales**, objetos parecidos a los tensores que transforman con alguna potencia de $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$

$$\mathcal{T}'^\mu{}_\nu = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^w \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \mathcal{T}_\sigma{}^\rho, \quad (2.14)$$

con w el 'peso'. Por ejemplo, para el determinante de la métrica,

$$|g'| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 |g| \quad w = -2. \quad (2.15)$$

Para el símbolo de Lévi-Civita se cumple que

$$\varepsilon'^{\lambda\varepsilon\psi\tau} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\lambda\varepsilon\psi\tau} \quad w = 1. \quad (2.16)$$

A partir de las densidades tensoriales, podemos construir tensores multiplicando por $|g|^{w/2}$. Por ejemplo, como $d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x$ (teorema fundamental del cálculo), construimos el tensor de volumen como

$$\sqrt{|g|} d^4x, \quad (2.17)$$

el cual cumple ser invariante bajo cambios de coordenadas ($\sqrt{|g'|} d^4x' = \sqrt{|g|} d^4x$).

2.2. Curvatura

La noción de curvatura es fácil de visualizar en una figura, sin embargo, ¿qué es realmente lo que define la curvatura de una variedad?. Vamos a formalizar el concepto de curvatura. Como hemos dicho en 2.1.2, la métrica le asigna la "forma" a una variedad, i.e, la curvatura. Veamos como es eso.

Todas las formas en las que se manifiesta la curvatura se basan en la **conexión**, la cual relaciona vectores de espacios tangentes de puntos cercanos. A partir de una métrica $g_{\mu\nu}$ podemos definir una conexión única conocida como **conexión de Christoffel**. Esta viene encapsulada en los

símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (2.18)$$

Se trata de una conexión libre de torsión³ simétrica en los índices bajos ($\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$). Los símbolos de Christoffel se denominan símbolos pues no son tensores (no transforman como tal). Vemos por tanto que en efecto la curvatura se relaciona de algún modo con la métrica, aunque no hayamos explicado del todo como se manifiesta la curvatura.

2.2.1. Derivadas covariantes

Una de las diferencias entre una variedad plana y una curva es que en la última la derivada parcial no genera tensores al actuar. Como nos interesa una teoría tensorial (para que se cumpla el principio de covarianza), es necesario introducir un nuevo concepto de derivada, que se reduzca a la derivada parcial en un espacio-tiempo plano. Esta derivada es la **derivada covariante**, ∇_{μ} . Como hablamos de variedades curvas, tiene sentido pensar que dependerá de la conexión, y por tanto de los símbolos de Christoffel. Como en el espacio-tiempo plano la derivada ∂_{μ} es un mapa de tensores (k, l) en tensores $(k, l + 1)$, pero que depende de las coordenadas, buscamos que la nueva derivada sea el mismo tipo de mapa pero sin depender de las coordenadas. Así, le exigimos que sea lineal y que cumpla la regla de Leibniz.

Definición 2.9 (Derivada covariante). Se define como la derivada parcial más la corrección especificada por n matrices $(\Gamma_{\mu})_{\sigma}^{\rho}$ (n siendo la dimensión de la variedad),

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}V^{\lambda}, \quad (2.19)$$

de forma que verifique

- Linealidad

$$\nabla(T + S) = \nabla(T) + \nabla(S)$$

- Regla de Leibniz:

$$\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes S + T \otimes \nabla S$$

- Conmutación con contracciones

$$\nabla_{\mu}(T^{\lambda}{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\lambda\rho} (\Leftrightarrow \nabla_{\mu}\delta_{\sigma}^{\lambda} = 0)$$

³En general, una conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ puede tener una parte simétrica que depende de la métrica, como la definida en (2.18), y una parte antisimétrica que se indentifica con la torsión. En la gran mayoría de los trabajos de relatividad general, y en este trabajo concreto, se trabaja con una conexión libre de torsión.

- Reducción a ∂_μ para escalares

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi.$$

De esta forma ∇_μ es un tensor (0,1).

Para los vectores duales, podemos pensar en una expresión similar a (2.19), como $\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu + \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda$ a, donde $\hat{\Gamma}$ no ha de estar relacionada con Γ en principio. Sin embargo, debido a las propiedades exigidas al operador, es fácil demostrar que $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = -\Gamma_{\nu\mu}^\lambda (= -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)$, de forma que para los vectores duales se cumple

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda. \quad (2.20)$$

De forma general, para tensores de tipo (k, l) tenemos que

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \quad (2.21)$$

Una propiedad importante de la conexión es que mientras que no es un tensor como tal, la diferencia de dos conexiones sí que es un tensor. En efecto, supongamos que tenemos definidas dos derivadas covariantes ∇_μ y $\hat{\nabla}_\mu$, con símbolos asociados $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$. Entonces la diferencia

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.22)$$

es un tensor de tipo (1,2). En efecto, dado un campo vectorial arbitrario V^λ , como $\nabla_\mu V^\lambda$ y $\hat{\nabla}_\mu V^\lambda$ son tensores, la diferencia lo también lo ha de ser:

$$\nabla_\mu V^\lambda - \hat{\nabla}_\mu V^\lambda = S^\lambda_{\mu\nu} V^\nu.$$

Cualquier conexión se puede expresar como la suma de otra conexión con una corrección tensorial.

Compatibilidad métrica.

Definición 2.10. Dada una variedad en la que tenemos definida una métrica $g_{\mu\nu}$, decimos que la derivada covariante ∇_μ es *compatible con la métrica* si se cumple

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0.$$

Como consecuencia, la compatibilidad con la métrica nos permite conmutar con ∇_μ :

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho (g_{\mu\lambda} V^\lambda) = \nabla_\rho (V_\mu), \quad (2.23)$$

de forma que subir (bajar) índices conmuta con tomar derivadas covariantes.

En la ecuación (2.18) tenemos escritos los símbolos de Cristoffel en función de la métrica. Veamos como derivar esta expresión a partir del postulado de compatibilidad métrica y de una conexión libre de torsión, como exigimos en el marco de la relatividad general que utilizamos. Escribiendo el postulado de la métrica de tres formas:

$$\begin{aligned} i) \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} = 0, \\ ii) \quad \nabla_\mu g_{\nu\lambda} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho} = 0, \\ iii) \quad \nabla_\nu g_{\lambda\mu} &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\lambda\rho} = 0, \end{aligned}$$

basta calcular $i) - ii) - iii)$ y aplicar la libre torsión de la conexión para obtener

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda}. \quad (2.24)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $g^{\lambda\sigma}$ obtenemos

$$g^{\sigma\lambda}[\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}] = -2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma, \quad (2.25)$$

de donde obtenemos (2.18)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Vemos por tanto que la conexión de Cristoffel viene determinada de forma única tras exigir la libre torsión y el postulado de compatibilidad métrica. Se verifica que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(g)$. Es importante notar que debido a las simetrías se tienen $n(n+1)/2 \times n$ componentes independientes.

Podemos observar como en un sistema de coordenadas localmente inerciales, donde las primeras derivadas de la métrica se anulan, los símbolos de Christoffel son nulos. Una conexión idénticamente nula se corresponde con lo que denominamos como geometría plana. Es importante destacar que aunque los símbolos se anulen para un espacio-tiempo plano en coordenadas cartesianas, esto no ocurre por ejemplo en coordenadas polares (no ha de extrañar esta dependencia con las coordenadas pues no son tensores).

2.2.2. Transporte paralelo

Una derivada no deja de ser una forma de medir la tasa de cambio de algo. En el caso de la derivada covariante, ¿respecto a que medimos el cambio?. Para responder a esta pregunta, definimos el **transporte paralelo**. En una variedad plana, el transporte paralelo de un vector es análogo a mantener las componentes cartesianas del vector constante a lo largo de la trayectoria en la que se transporta el vector. En un espacio-tiempo curvo, es el análogo a mantener un vector constante a lo largo de la trayectoria, y por tanto depende del camino tomado. En la figura 2.1 tenemos

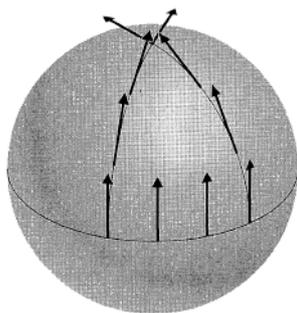


Figura 2.1: Transporte paralelo de un vector en una esfera. En variedades curvas, el resultado final de un vector transportado paralelamente puede depender de la trayectoria seguida. Modificado de [1].

representado el transporte paralelo de un vector en una esfera. Así, decimos que la derivada covariante mide la velocidad con la que cambia un tensor en comparación con que hubiese sido transportado paralelamente. Desarrollando las matemáticas detrás de esta idea, supongamos que tenemos una curva parametrizada por λ , $x^\mu(\lambda)$, y un tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$. Pedimos entonces que $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ sea constante

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0. \quad (2.26)$$

Sin embargo, como nos interesa que las ecuaciones sean tensoriales, reemplazamos la derivada parcial por una covariante, y definimos la **derivada covariante direccional** como

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (2.27)$$

Notar que se trata de un mapa definido únicamente a lo largo de la trayectoria, que va de tensores (k, l) en tensores (k, l) . Con la ayuda de este concepto, definimos el **transporte paralelo de un tensor T** a lo largo de la trayectoria $x^\mu(\lambda)$ requiriendo que la derivada covariante direccional se anule a lo largo del camino:

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0. \quad (2.28)$$

Esta es una ecuación tensorial bien definida, pues tanto el vector tangente $(dx^\mu/d\lambda)$ como la derivada covariante son tensores, y la denotamos como **ecuación del transporte paralelo**.

El transporte paralelo es un concepto que depende intrínsecamente de la conexión, de forma que distintas conexiones pueden dar distintos resultados. Si la conexión es compatible con la métrica, esta siempre es transportada paralelamente respecto de la conexión:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.29)$$

Otra propiedad importante del transporte paralelo, que deriva de la compatibilidad métrica, es que si dos vectores V^μ, W^ν , son transportados paralelamente, el escalar formado del producto

vectorial de ambos, $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$, también es transportado paralelamente. Esto implica que conserva la norma de los vectores.

Geodésicas

De forma intuitiva, siempre se ha dicho que las geodésicas de un espacio curvo es el análogo a las rectas de un espacio plano, la distancia más corta entre dos puntos. Desde un punto de vista físico, las geodésicas se pueden definir a partir de un principio mínimo de acción, como aquellas trayectorias que minimizan la acción para una *partícula-prueba*⁴. Este camino de minimizar la acción nos llevaría a la ecuación de las geodésicas en una variedad. Sin embargo, podemos definir las geodésicas de otra manera utilizando el concepto de transporte paralelo.

Definición 2.11 (Geodésicas). Dada una variedad M , las geodésicas de M son aquellas trayectorias que transportan paralelamente su vector tangente:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0.$$

Expandiendo la expresión anterior, llegamos a la *ecuación de las geodésicas*:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\rho dx^\sigma}{d\lambda^2} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0. \quad (2.30)$$

Es fácil notar que cuando la conexión es la de un espacio Euclídeo, como para los espacios-tiempos planos, recuperamos la ecuación de la recta.

Las geodésicas resultan ser muy útiles en relatividad general, principalmente porque resultan ser los caminos seguidos por partículas de prueba no aceleradas.

En la derivación de la ecuación geodésica hemos pasado por alto un hecho bastante importante, y es que para que el vector tangente de una trayectoria sea transportado de forma paralela a lo largo de la misma, el parámetro ha de ser el tiempo propio, τ , o un *parámetro afín*, $\lambda = a\tau + b$, con a y b constantes. Denotando por $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, la ecuación geodésica se puede representar como

$$\dot{x}^\mu \nabla_\mu \dot{x}^\sigma = 0. \quad (2.31)$$

2.2.3. Tensor de curvatura de Riemann

La curvatura viene cuantificada por el tensor de Riemann, el cual deriva de la conexión. En un espacio-tiempo curvo, al contrario que en uno plano, las derivadas covariantes no tienen por qué conmutar. Algo que hemos visto por ejemplo en la figura 2.1, donde el transporte paralelo de un

⁴Las partículas de prueba (*test-particles*) son partículas que no influyen por si mismas en la geometría por la que se mueven.

vector en la esfera nos lleva a resultados distintos según el camino. El tensor de Riemann va a computar de alguna manera como de grande es la diferencia. Así, calculemos el conmutador de las derivadas covariantes utilizando una métrica libre de torsión:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\rho) \\ &= \nabla_\mu(\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) - \nabla_\nu(\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda). \end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación anterior, teniendo en cuenta que las derivadas parciales conmutan y la simetría en los índices bajos de los símbolos de Cristoffel, llegamos a la siguiente expresión:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = [\partial_\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\tau}^\rho\Gamma_{\nu\lambda}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\rho\Gamma_{\mu\lambda}^\tau]V^\lambda = R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda V^\lambda. \quad (2.32)$$

A $R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda$ lo conocemos como el **tensor de Riemann**. Es en efecto un tensor, con lo que bajo transformaciones generales de coordenadas viene transformado como

$$R'_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\psi} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} R_{\sigma\epsilon}{}^\psi{}_\tau. \quad (2.33)$$

Es importante que notemos que el tensor de Riemann se construye a partir de la métrica $g_{\mu\nu}$, junto con sus primeras y segundas derivadas.

El tensor de Riemann nos permite distinguir cuando un espacio-tiempo es curvo o plano. Esto es así pues para variedades *Lorentzianas o pseudo-Riemannianas* se cumple que, para coordenadas generalizadas centradas en un punto p (véase [1] para una derivación formal),

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\beta\nu}x^\alpha x^\beta + O(|x|^3). \quad (2.34)$$

Por tanto, cuando las componentes del tensor de Riemann se anulan en un punto, la métrica es similar a la métrica de Minkowski, i.e, a la métrica de una variedad plana. En coordenadas cartesianas es evidente ver que la métrica de Minkowski posee un tensor de Riemann nulo pues los símbolos de Christoffel son cero. Sin embargo, si escribimos la métrica en coordenadas esféricas, ξ^a , deja de ser trivial que estemos tratando con una geometría plana, pues la métrica depende de las coordenadas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } x^\mu = (t, r, \theta, \varphi).$$

Habría que ver si existe una transformación que relacione $\eta_{\mu\nu}$ con $g_{\mu\nu}$

$$\eta^{ab} = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}.$$

Sin embargo, el uso del tensor métrico nos permite resolver esta cuestión sin necesidad de encontrar la transformación de coordenadas, estableciendo que si existe un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica son constantes, el tensor de Riemann se anula. Esto también funciona en la otra dirección, pues si el tensor de Riemann se anula, siempre podremos construir un sistema coordenada en el que las componentes de la métrica sean constantes. Sin profundizar en la demostración de este hecho, la primera parte es fácil de visualizar, ya que si existen unas coordenadas en las que $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, los símbolos de Cristoffel se anulan por construcción, con lo que $R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = 0$. Como trabajamos con tensores, si se cumple en un sistema coordenada particular, se cumple en todos. Observamos de nuevo la ventaja de trabajar con ecuaciones tensoriales.

Como podemos observar, el tensor de Riemann es un tensor de tipo (1,3), y se puede escribir como un tensor (0,4) con la ayuda de la métrica, $R_{\sigma\mu\rho\nu} = g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu}{}^\lambda{}_\nu$. Posee además varias propiedades importantes:

- Antisimétrico en los dos primeros índices

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} = -R_{\mu\sigma\rho\nu}, \quad (2.35)$$

- Antisimétrico en sus dos últimos índices

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} = -R_{\sigma\mu\nu\rho}, \quad (2.36)$$

- Invariante al intercambiar el primer par de índices por el segundo par

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} = R_{\rho\nu\sigma\mu}, \quad (2.37)$$

- La suma de permutaciones cíclica de los tres últimos índices se anula

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} + R_{\sigma\nu\mu\rho} + R_{\sigma\rho\nu\mu} = 0. \quad (2.38)$$

Estas propiedades son fáciles de demostrar en un sistema de referencia localmente inercial, donde las primeras derivadas de la métrica se anulan, de forma que el tensor de Riemann en este sistema adopta la siguiente expresión:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}). \quad (2.39)$$

Utilizando entonces que son ecuaciones tensoriales, se demuestra que las propiedades se verifican

en cualquier sistema de referencia.

Con estas simetrías, se puede demostrar que el tensor de Riemann posee $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ componentes independientes. Para $n = 4$, son 20 componentes independientes, que se corresponden con los 20 grados de libertad en las segundas derivadas de la métrica que no se pueden igualar a 0 al construir los sistemas de referencia localmente inerciales (véase [1]).

A partir del tensor de Riemann podemos definir otra serie de tensores también interesantes que sirven para caracterizar la curvatura. El primero de ellos es el *tensor de Ricci*,

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}. \quad (2.40)$$

Notar que el tensor de Ricci se define como una contracción entre el primer y el tercer índice⁵ del tensor de Riemann. Debido a (2.37), el tensor de Ricci es simétrico.

Si hacemos la contracción del tensor de Ricci, obtenemos el *escalar de Ricci/ de curvatura*,

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

El tensor de Ricci y el escalar de curvatura contienen toda la información sobre las trazas del tensor de Riemann. Las partes libres de traza están encapsuladas en el *tensor de Weyl*, que es básicamente el tensor de Riemann eliminando todas sus contracciones,

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2}(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R. \quad (2.42)$$

Es una fórmula complicada pero con ella conseguimos anular todas sus contracciones, a la vez que mantenemos las simetrías del tensor de Riemann. Una de las propiedades más importantes del tensor de Weyl es que es invariante bajo transformaciones conformes (que preservan los ángulos).

En adición a las identidades algebraicas, los tensores de Riemann, Ricci y el escalar de curvatura cumplen una serie de ecuaciones diferenciales, que se conocen como *identidades de Bianchi*,

$$\nabla_{[\mu}R_{\nu\rho]}{}^{\lambda}{}_{\sigma} = 0. \quad (2.43)$$

De nuevo, esta identidad se puede demostrar para un sistema de referencia localmente inercial y aludir a la covarianza de las identidades tensoriales.

Si calculamos la traza de (2.43) respecto de (ν, λ) obtenemos

$$\nabla_{\mu}R_{\rho\sigma} - \nabla_{\rho}R_{\mu\sigma} + \nabla_{\lambda}R_{\rho\mu}{}^{\lambda}{}_{\sigma} = 0.$$

⁵Al trabajar con la conexión de Christoffel, esta es la única contracción independiente. El resto se anulan o se relacionan con la contracción. Esto no ha de ocurrir para una conexión arbitraria.

Haciendo lo mismo sobre (ρ, σ) llegamos a

$$\nabla_{\mu}R - \nabla_{\rho}R_{\mu}^{\rho} + \nabla_{\lambda} \underbrace{R_{\rho\mu}^{\lambda\rho}}_{-R_{\rho\mu}^{\rho\lambda} = -R_{\mu}^{\lambda}} = \nabla_{\mu}R - 2\nabla_{\rho}R_{\mu}^{\lambda} = -2\nabla_{\rho} \left(R_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\rho}R \right) = 0.$$

De forma que si subimos el índice μ , obtenemos

$$\nabla_{\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = 0. \quad (2.44)$$

Debido a su importancia, redefinimos la expresión entre el paréntesis como

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = G^{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Al tensor $G^{\mu\nu}$ lo denominamos como *tensor de Einstein*, y es el tensor que aparece en las ecuaciones de campo de Einstein que veremos más adelante. A partir de (2.44) podemos ver que el tensor de Einstein se conserva gracias a las simetrías:

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.46)$$

Una forma equivalente de escribir la expresión anterior es $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$.

2.2.4. Simetrías y vectores de Killing

Como sabemos, en los estudios de sistemas físicos resulta realmente importante conocer las simetrías del sistema. De hecho, por el teorema de Noether (véase [3]), sabemos que las simetrías se corresponden con corrientes conservadas. Indaguemos un poco más sobre las simetrías en las variedades.

Definición 2.12 (Simetría en una variedad). Decimos que una variedad M posee una simetría si su geometría es invariante bajo transformaciones que mapean M en M .

Las simetrías de la métrica se denominan *isometrías*. Para el espacio de Minkowski por ejemplo, conocemos varias simetrías como las traslaciones o las transformaciones de Lorentz. Que la métrica de Minkowski es invariante bajo traslaciones es una consecuencia lógica de que sus componentes $\eta_{\mu\nu}$ sean independientes de las coordenadas. De hecho se cumple que siempre que la métrica sea independiente de una dirección dada ($\partial_{\hat{\sigma}}g_{\mu\nu} = 0$ para todo μ, ν) tenemos una simetría bajo traslaciones en la dirección $x^{\hat{\sigma}}$

$$\partial_{\hat{\sigma}}g_{\mu\nu} = 0 \implies x^{\hat{\sigma}} \longrightarrow x^{\hat{\sigma}} + a^{\hat{\sigma}} \text{ es una simetría.} \quad (2.47)$$

Isometrías de la forma de (2.47) tienen una consecuencia inmediata en el movimiento de partículas

prueba a lo largo de una geodésica. Recordando la ecuación de las geodésicas (2.31), podemos tomar como vector p^μ el cuadri-momento para obtener así la identidad

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0. \quad (2.48)$$

Por la compatibilidad métrica, podemos bajar el índice μ y expandir la derivada covariante para obtener

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma p^\lambda p_\sigma = 0. \quad (2.49)$$

El primer término nos indica como varían las componentes del momento a lo largo del camino,

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau}, \quad (2.50)$$

mientras que operando el segundo término, usando que $p^\mu p^\nu = p^\nu p^\mu$, obtenemos

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu. \quad (2.51)$$

Juntando ambas expresiones, la ecuación de la geodésica se puede expresar como

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu. \quad (2.52)$$

Por tanto, si todos los coeficientes de la métrica son independientes de una coordenada $x^{\hat{\sigma}}$, la componente del momento $p_{\hat{\sigma}}$ se conserva:

$$\partial_{\hat{\sigma}} g_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{dp_{\hat{\sigma}}}{d\tau} = 0. \quad (2.53)$$

Es importante notar que aunque la independencia de la métrica de alguna coordenada implique la existencia de isometrías, el contrario no es siempre cierto. Las transformaciones de Lorentz por ejemplo producen simetrías pero no se relacionan con independencia de la métrica respecto de alguna coordenada. Podría ocurrir que estamos con un cambio de coordenadas suficientemente complejo en el que ni siquiera las simetrías traslacionales sean obvias. Este cambio de coordenadas cambiaría las componentes de la métrica, pero no la geometría subyacente.

Supongamos que $x^{\hat{\sigma}}$ es la coordenada de la que $g_{\mu\nu}$ es independiente. Consideremos el vector $\partial_{\hat{\sigma}}$, que denotamos como K , y en notación de componentes es

$$K^\mu = (\partial_{\hat{\sigma}})^\mu = \delta_{\hat{\sigma}}^\mu. \quad (2.54)$$

Decimos entonces que el vector K^μ genera una isometría; i.e. la transformación bajo la cual la geometría es invariante viene expresada como un movimiento infinitesimal a lo largo de la

dirección de K^μ . En términos de este vector, la cantidad $p_{\hat{\sigma}}$ es

$$p_{\hat{\sigma}} = K^\nu p_\nu = K_\nu p^\nu. \quad (2.55)$$

La conservación de esta cantidad (escalar) es equivalente a decir que su derivada direccional a lo largo de la geodésica se anule:

$$\frac{dp_{\hat{\sigma}}}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu K_\nu \nabla_\mu p^\nu + p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0, \quad (2.56)$$

donde hemos invocado la ecuación de la geodésica (2.48) y la simetría del producto $p^\mu p^\nu$. Concluimos así que cualquier vector K_μ que cumpla $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ implica que $K_\nu p^\nu$ se conserva a lo largo de una geodésica:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \implies p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (2.57)$$

La ecuación de la izquierda es de gran importancia, la denominamos como **ecuación de Killing**, y los campos vectoriales que la satisfacen son los **vectores de Killing**. Un vector de Killing en una variedad está relacionado con simetrías continuas en la métrica, a partir de la derivada de Lie a lo largo de la dirección del vector. No vamos a indagar sobre las matemáticas bajo esta correspondencia (véase apéndice B de [1] para ello), pero es importante destacar que todo vector de Killing implica la existencia de cantidades conservadas asociadas al movimiento a lo largo de una geodésica. Físicamente, al ser por definición la métrica constante a lo largo de un vector de Killing, una partícula libre no sentiría ninguna aceleración en dicha dirección, de forma que la componente de su momento en esa dirección se mantendría constante.

De manera análoga a como hemos maniobrado, podemos definir la existencia de **tensores de Killing**: tensores simétricos $K_{\nu_1 \dots \nu_l}$ que satisfacen la ecuación de Killing generalizada a todos sus índices. A pesar de no tener una relación obvia con las simetrías del espacio tiempo, los tensores de Killing resultan útiles para el estudio de distintos sistemas físicos.

Se puede demostrar que para un espacio de dimensión n , la cantidad máxima de vectores de Killing independientes es $\frac{1}{2}n(n+1)$. Los espacios que poseen este número de Killings se denominan **espacios maximalmente simétricos**. La característica de estos espacios es que su curvatura es igual en todos los lados (simetría traslacional) y en todas las direcciones (simetrías rotacionales), de forma que su escalar de curvatura debe ser igual en todos los puntos.

2.2.5. Desviación geodésica

El tensor de Riemann aparece como consecuencia de la curvatura en el fenómeno de la **desviación geodésica**. Uno de los postulados que definen la geometría euclídea (plana) es que las trayectorias inicialmente paralelas permanecen paralelas para siempre. Este es un hecho que no siempre se verifica en una geometría curva, como resulta evidente por ejemplo en la esfera. Buscamos

cuantificar este comportamiento.

Como el concepto de "paralelo" no está del todo definido en una geometría curva, nuestro punto de partida es considerar trayectorias que sean paralelas en un punto, y ver como evolucionan. Con este fin, consideramos un conjunto de geodésicas parametrizadas por un único parámetro afín $\gamma_s(t)$. El conjunto de estas curvas define una variedad bidimensional suave (embebida en una variedad M de dimensión arbitraria). Como coordenadas de esta variedad, podemos escoger s y t , siempre que hayamos escogido un conjunto de geodésicas que no se crucen. El conjunto de puntos de esta superficie es $x^\mu(s, t) \in M$. Tenemos dos campos vectoriales definidos en la superficie: el vector tangente a las geodésicas

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \quad (2.58)$$

y el **vector de desviación**

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}. \quad (2.59)$$

Este nombre surge de la idea de que S^μ va de una geodésica a sus vecinas.

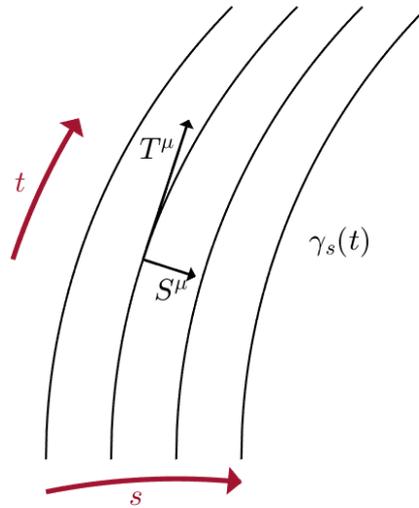


Figura 2.2: Un conjunto de geodésicas $\gamma_s(t)$, junto con su vector tangente T^μ . El vector S^μ mide la desviación entre las geodésicas.

El concepto de que S^μ apunta desde una geodésica a otra nos lleva a definir la **velocidad relativa entre geodésicas** como

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu, \quad (2.60)$$

y consecuentemente la **aceleración relativa entre geodésicas**

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu. \quad (2.61)$$

Desarrollando la aceleración relativa, usando que T y S conmutan por ser vectores de la base, y apelando a la ecuación de las geodésicas (2.31), obtenemos que

$$A^\mu = R_{\rho\nu\lambda}{}^\mu T^\rho S^\nu T^\lambda. \quad (2.62)$$

Hemos derivado entonces la **ecuación de la desviación geodésica**

$$A^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = -R_{\nu\rho\lambda}{}^\mu S^\nu T^\rho T^\lambda. \quad (2.63)$$

Esta ecuación expresa algo que ya esperábamos: la aceleración relativa entre dos geodésicas vecinas es proporcional a la curvatura.

Físicamente, la aceleración de las geodésicas vecinas es interpretada como una manifestación de las fuerzas gravitacionales de marea. Esta ecuación y efecto de marea cobran importancia a la hora de estudiar la evolución de objetos físicos no puntuales que se mueven a lo largo de una geometría curva, como notaremos al estudiar los agujeros de gusano, y el paso de un objeto a través de la garganta del mismo.

2.3. Gravitación

El efecto de la gravedad es una manifestación de las denominadas como **ecuaciones de campo de Einstein**. Estas relacionan la gravedad (representada por la curvatura a partir de la métrica) con la distribución de masa existente en el espacio (representada por el tensor de energía momento). Mediante un razonamiento heurístico, tiene sentido buscar una ecuación similar a la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$, que relaciona el potencial con una distribución de masa. Como buscamos ecuaciones tensoriales, tiene sentido sustituir el lado derecho con el tensor de energía momento. Además podemos poner algo de la forma $[\nabla^2 g]_{\mu\nu}$ en el lado izquierdo, como representación del potencial (véase [1] para entender el potencial newtoniano como una perturbación pequeña de la métrica de Minkowski). Un buen tensor de estas características puede ser el tensor de Einstein, de forma que tiene sentido proponer unas ecuaciones como

$$G_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} \quad (2.64)$$

La constante k se puede obtener a partir del límite Newtoniano, demostrándose que

$$k^2 = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.65)$$

donde G es la constante gravitatoria. En lo que sigue de trabajo tomaremos $c = 1$.

En efecto esta es la forma de las ecuaciones de campo de Einstein, y podemos llegar a ellas mediante un razonamiento matemático formal a partir de un principio variacional de la acción. Para ello, es necesario introducir el concepto de teoría de campos, pues sin haberlo mencionado aún, la teoría de la relatividad general es una teoría de campos clásica. Por ello a continuación se explican las bases de la teoría de campos clásica y el desarrollo para llegar a las ecuaciones de Einstein.

2.4. Gravitación acoplada a materia y radiación

Como hemos mencionado anteriormente, la teoría de Einstein de la relatividad general es una teoría clásica de campos. Antes de llegar a las ecuaciones de campo de Einstein, es importante hacer un inciso sobre lo que significa ser una teoría de campos, y como podemos maniobrar con ella para obtener las ecuaciones de movimiento de nuestros sistemas.

En cierta manera, es una extensión de la mecánica clásica de sistemas físicos con un número finito de grados de libertad, como por ejemplo N partículas interactuando. Es una extensión porque pasamos de un número finito de grados de libertad a un número infinito, donde pasas de tener una función para cada partícula, $\phi_i(t)$, a tener una función general definida en todo el espacio, denominada como **campo** $\phi(\vec{x}, t)$. Debemos notar que esta función también varía en el espacio, al contrario que $\phi_i(t)$. De esta forma, la acción que define un sistema de N partículas

$$S[q_i] = \int \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2.66)$$

pasa a convertirse en la **acción de un campo** de la siguiente forma:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \vec{\nabla} \phi), \quad (2.67)$$

donde \mathcal{L} se denomina **densidad lagrangiana**, aunque se suele denotar indistintamente como **Lagrangiano**. Si tenemos en cuenta que estamos trabajando en un espacio-tiempo relativista, con una métrica cualquiera $g_{\mu\nu}$, la acción pasa a escribirse como

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.68)$$

La acción es un funcional (función que toma otras funciones como argumento) y es una cantidad escalar. A partir del principio de mínima acción, podemos obtener las ecuaciones de movimiento del campo: Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta S[\phi] = \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.69)$$

2.4.1. Ecuaciones de campo de Einstein a partir del principio de Mínima acción

Vamos a derivar las ecuaciones de campo de Einstein (2.64) a partir de un principio variacional de la acción. Una característica de la teoría de la relatividad general es que la propia métrica es un campo (tensorial en este caso), de forma que la acción puede ser transformada bajo variaciones del tensor métrico. Vamos a usar este hecho para obtener sus ecuaciones de movimiento, y veremos como son exactamente las ecuaciones de Einstein obtenidas anteriormente de forma heurística. Para ello, partimos de la denominada como **acción de Hilbert-Einstein**:

$$S_g[g] = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-|g|} R, \quad (2.70)$$

donde k es la misma constante introducida anteriormente ($8\pi G$) y R es el tensor de Ricci. De esta forma, aplicando el principio variacional

$$\delta S_g = \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.71)$$

procedemos a variar la acción respecto a la métrica. Teniendo en cuenta la expresión del tensor de Ricci obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{2k^2} \int d^4x \delta \left[\sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2k^2} \int d^4x \left[\delta \left(\sqrt{-|g|} \right) R + \sqrt{-|g|} \delta \left(g^{\mu\nu} \right) R_{\mu\nu} + \sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned}$$

Calculemos entonces las tres variaciones por separado:

- $\delta \left(\sqrt{-|g|} \right)$: Aplicando la identidad $\delta|M| = |M| \text{Tr}(M^{-1} \delta M)$, obtenemos que

$$\delta \left(\sqrt{-|g|} \right) = \frac{1}{2} \frac{(-|g|)}{\sqrt{-|g|}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.72)$$

- $\delta(g^{\mu\nu})$: Como queremos expresarlo como una variación de $g_{\mu\nu}$, aplicamos que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda &\Rightarrow \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\lambda} \\ &\Rightarrow \delta g^{\rho\lambda} = -g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

de forma que

$$\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \delta g_{\lambda\rho}. \quad (2.73)$$

- $\delta R_{\mu\nu}$: Para computar la variación del tensor de Ricci, debemos recordar que en su expresión completa (2.40) el tensor depende de los símbolos de Christoffel, los cuales a su vez

dependen de la métrica. Así, realizando la variación $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\delta R_{\nu\lambda} &= \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\rho + \delta \Gamma_{\rho\tau}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\tau + \Gamma_{\rho\tau}^\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\tau - \delta \Gamma_{\nu\tau}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\rho \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\tau \\ &= \nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\rho,\end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de la derivada covariante. De esta forma, tenemos que

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\nu}^\rho). \quad (2.74)$$

Notar que si calculamos la integral de esta variación, no deja de ser la integral a todo el volumen de una divergencia. Haciendo uso del teorema de la divergencia (versión tensorial⁶), las integrales a todo el volumen de una divergencia se convierten en integrales en la frontera, denominadas como **términos de frontera**. En nuestro caso los términos frontera los igualamos a 0, despreocupándonos de ellos.

De esta forma, juntando (2.72), (2.73) y (2.74) obtenemos que

$$\delta S_g = \frac{1}{2k^2} d^4x \sqrt{-|g|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-|g|} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.75)$$

Igualando la expresión a 0, y teniendo en cuenta que $\delta g_{\mu\nu}$ es arbitraria, obtenemos la ecuación de Einstein (2.64) para gravedad pura, en ausencia de materia:

$$G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.76)$$

2.4.2. El campo escalar y el campo electromagnético

Hemos visto como, a partir de un principio variacional de mínima acción, podemos obtener las ecuaciones de campo de Einstein para un espacio tiempo de gravedad pura. Podemos ahora, siguiendo el mismo principio, añadir distintos campos al espacio-tiempo, y desarrollar sus ecuaciones de movimiento. Los dos campos principales que vamos a estudiar son el campo escalar, $\phi(x)$, y el campo electromagnético (o radiación) $A_\mu(x)$.

El campo escalar

Comencemos con el campo escalar $\phi(x)$. Está gobernado por la acción

$$S_\phi[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.77)$$

⁶Para eliminar de esta forma los términos frontera es necesario estar trabajando con una conexión sin torsión, como es el caso de la conexión Levi-Civita.

Es importante notar que el Lagrangiano no deja de ser el término cinético menos un potencial, como en la mecánica teórica clásica. Dada entonces la expresión de la acción, su variación bajo transformaciones infinitesimales es

$$\delta S_g = \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_g}{\delta \phi} \delta \phi. \quad (2.78)$$

Calculemos cada contribución por separado:

- Variación respecto a la métrica: Partiendo de la expresión de la acción, es fácil ver que su variación respecto a la métrica se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-|g|}) \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{-|g|} \delta g^{\mu\rho} \partial_\mu \phi \partial_\rho \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[g^{\lambda\epsilon} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) + \partial^\lambda \phi \partial^\epsilon \phi \right] \delta g_{\lambda\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} T_\phi^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que por tratar con un campo escalar, las derivadas covariantes y derivadas parciales coinciden. Hemos denotado como $T_\phi^{\mu\nu}$ a

$$T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - V(\phi) \right). \quad (2.79)$$

Este tensor es el **tensor de energía-momento de un campo escalar ϕ bajo gravitación**.

Como tanto la variación de la acción de Hilbert-Einstein como la del campo escalar quedan en función de la variación de la métrica $\delta g_{\mu\nu}$, al igualarla a cero respecto de dicha variación recuperamos la expresión (2.64)

$$-\frac{1}{2k^2} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow G^{\mu\nu} = k^2 T^{\mu\nu}.$$

Con esto queda justificada la expresión (2.64) que introdujimos de forma heurística.

De la misma forma, debemos variar la acción respecto del campo en sí ($\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$). Este procedimiento nos lleva a obtener las ecuaciones de movimiento del campo ϕ .

- Variación con respecto al campo:

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{2} (\nabla_\mu \delta\phi \nabla^\mu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \delta\phi) - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\nabla_\mu \nabla^\mu \delta\phi - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right]. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\delta\phi = \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\delta\phi) - (g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)\delta\phi$$

e ignoramos el término frontera $\nabla_\nu(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\delta\phi)$, tenemos que la variación de la acción bajo el campo la podemos escribir como

$$\delta S_\phi = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[\square\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi. \quad (2.80)$$

Donde el símbolo $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ se denomina *D'Alembertiano*. De esta forma, las ecuaciones de movimiento del campo son

$$\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.81)$$

Juntando todo, tenemos que la variación de la acción para un campo escalar es

$$\delta S_\phi[g, \phi] = \frac{1}{2} T_\phi^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \left[\square\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi \quad (2.82)$$

El campo electromagnético

Los campos físicos eléctrico y magnético \vec{E} , \vec{B} no se consideran vectores respecto a transformaciones de Lorentz. Es por ello por lo que su información se encapsula en un objeto más fundamental, el **potencial vector**, A_μ , el cuál si es un vector bien definido. Las componentes del potencial vector son $A_\mu = (\varphi, \vec{A})$, donde φ es el potencial escalar y \vec{A} el potencial vector. A partir de este campo vectorial, acudiendo a la simetría de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$, podemos definir un tensor antisimétrico de la siguiente forma

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.83)$$

denominado como **tensor de intensidad del campo** o **tensor de Faraday**. La acción del campo electromagnético se define a partir de este tensor de la siguiente forma

$$S_A[g, A] = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} \right]. \quad (2.84)$$

De donde se sigue que

$$\delta S_A = \frac{\delta S_a}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_A}{\delta A_\mu} \delta A_\mu.$$

De la misma forma que con el campo escalar, la variación respecto de la métrica nos va a dar la definición del tensor de energía momento del campo; y la variación respecto del campo nos proporcionará las ecuaciones del movimiento del mismo. Procedemos entonces a computar dichas variaciones.

- Variación con respecto la métrica: Bajo variaciones $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ uno tiene que

$$\begin{aligned}
\delta S_A &= -\frac{1}{4} \int d^4x \left[\delta \left(\sqrt{-|g|} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sqrt{-|g|} \left\{ \delta g^{\mu\rho} F_{\mu\nu} F_{\rho}{}^{\nu} + \delta g^{\nu\sigma} F_{\nu}{}^{\rho} F_{\rho\sigma} \right\} \right] \\
&= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_{\nu}{}^{\lambda} F^{\epsilon\nu} - F^{\rho\lambda} F_{\rho}{}^{\epsilon} \right] \delta g_{\lambda\epsilon} \\
&= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2F_{\rho}{}^{\lambda} F^{\epsilon\rho} \right] \delta g_{\lambda\epsilon} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[F_{\rho}{}^{\lambda} F^{\epsilon\rho} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\lambda\epsilon} \right] \delta g_{\lambda\epsilon} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} T_A^{\lambda\epsilon} \delta g_{\lambda\epsilon}.
\end{aligned}$$

De esta forma, el **tensor de energía momento de A_μ** se define como

$$T_A^{\mu\nu} = F_{\rho}{}^{\mu} F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} g^{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Debemos notar que $T_{\mu}{}^{\mu}{}_A = 0$.

- Variación con respecto al campo: Bajo variaciones $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ uno tiene que

$$\begin{aligned}
\delta S_A &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{4} (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} F^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} \delta A_{\nu} - \nabla_{\nu} \delta A_{\mu}) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} 2F^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta A_{\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} 2\nabla_{\mu} (F^{\mu\nu} \delta A_{\nu}) - 2(\nabla_{\mu} F^{\mu\nu}) \delta A_{\nu}.
\end{aligned}$$

De esta forma, ignorando de nuevo el término de frontera, obtenemos que

$$\delta S_A = \int d^4x \sqrt{-|g|} \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\nu}. \quad (2.86)$$

Las ecuaciones del campo son

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.87)$$

Desarrollando estas ecuaciones, junto con las ecuaciones $\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$, se obtienen las ecuaciones de Maxwell en el vacío ya conocidas para el electromagnetismo.

El resultado final juntado las dos variaciones queda como sigue:

$$\delta S_A[g, A] = \frac{1}{2} T_A^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu} F^{\mu\nu}) \delta A_{\nu}. \quad (2.88)$$

De forma general podemos tener sistemas que tengan tanto un campo escalar por la presencia de materia, como un campo vectorial por la presencia de radiación. Teniendo en cuenta lo desarrollado anteriormente, podemos escribir la acción como la suma de cada contribución:

$$S[g, \phi, A] = S_g[g] + S_\phi[g, \phi] + S_A[g, A]. \quad (2.89)$$

Su dinámica viene determinada por el principio variacional

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta S}{\delta A_\mu} \delta A_\mu, \quad (2.90)$$

de tal forma que igualando cada componente a cero, obtendremos tanto las ecuaciones de Einstein (variación bajo la métrica), como las ecuaciones de movimiento de ϕ y A_μ .

Este será nuestro formalismo matemático para poder estudiar distintos sistemas y configuraciones del espacio-tiempo, entre ellos los agujeros negros y los agujeros de gusano que veremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Soluciones a las ecuaciones de campo: agujeros negros

En este capítulo vamos a indagar sobre algunas soluciones conocidas a las ecuaciones de campo que producen los denominados agujeros negros. Para ello discutiremos distintas métricas que describen una gran variedad de sistemas gravitatorios en el marco de la relatividad general. Utilizaremos todo el marco teórico desarrollado durante el capítulo anterior para atacar estos sistemas y ver sus características. Nos basamos principalmente en los libros de Carroll [1], y Thorne [6].

3.1. La métrica general estática e isotrópica

La primera métrica que tratamos es la considerada como estática e isotrópica. Que la métrica sea estática quiere decir que debe existir una coordenada temporal, $x^0 \equiv t$ de forma que el elemento de línea ds^2 sea independiente de ella. Una métrica isotrópica es aquella para la que existen algunas coordenadas espaciales, $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ de forma que ds^2 depende únicamente de las combinaciones invariantes bajo rotaciones (isotrópicas) $d\vec{x}^2$, $\vec{x}d\vec{x}$ y \vec{x}^2 .

Bajo estas consideraciones el elemento de línea toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2E(r)dt(\vec{x}d\vec{x}) + D(r)(\vec{x}d\vec{x})^2 + C(r)d\vec{x}^2, \quad (3.1)$$

donde $F(r)$, $E(r)$, $D(r)$ y $C(r)$ son funciones de $r^2 = \vec{x}^2$. Realizando el cambio a coordenadas esféricas

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta,$$

tenemos que

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2rE(r)dt dr + r^2D(r)dr^2 + C(r) [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2]. \quad (3.2)$$

Bajo un cambio en la coordenada temporal de la forma

$$t' = t + \Phi(r) \quad \text{con} \quad \frac{d\Phi}{dr} = -r \frac{E(r)}{F(r)},$$

tenemos que

$$ds^2 = -F(r)dt'^2 + G(r)dr^2 + c(r) [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2], \quad (3.3)$$

donde $G(r) \equiv r^2 \left[D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right]$.

Podemos redefinir la coordenada radial como

$$r'^2 = C(r)r^2,$$

de forma que el elemento de línea para una métrica general estática e isotrópica queda de la siguiente forma:

$$ds^2 = -B(r')dt'^2 + A(r')dr'^2 + r'^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (3.4)$$

con $B(r') \equiv F(r)$ y $A(r') \equiv \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}$.

Con el propósito de agilizar la notación removemos las primas de las coordenadas, de forma que en lo que sigue usaremos la expresión

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2]. \quad (3.5)$$

Podemos notar que es equivalente a escribir $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ con $g_{00} = B(r)$, $g_{11} = A(r)$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2\sin^2\theta$, $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ y $x^3 = \varphi$. Vemos por tanto que la métrica es diagonal, siendo nulas el resto de componentes.

Como buscamos caracterizar la curvatura, podemos calcular las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Para ello podemos utilizar (2.32) calculando así el tensor de Riemann, y consecuentemente aplicar la definición del tensor de Ricci (2.40). Para realizar estos cálculos, es necesario computar los símbolos de Cristoffel. Esta es una tarea que gracias a trabajar con una métrica diagonal se simplifica en gran medida. Realizando los cálculos pertinentes obtenemos que las componentes

no nulas del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{B'(r)}{2A(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left[\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right), \\
R_{rr} &= -\frac{B'(r)}{2B(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left[\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} \right), \\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{A(r)} + \frac{r}{2A(r)} \left[\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right], \\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Podemos entonces imponer estas expresiones de $R_{\mu\nu}$ en la ecuación de Einstein y buscar las funciones $A(r)$ y $B(r)$ compatibles con un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ dado. En función de la distribución de materia/energía impuesta encontraremos distintos sistemas. A continuación se desarrollan algunos de los sistemas más interesantes dentro de una métrica estática e isotrópica.

3.2. El agujero negro de Schwarzschild

Se trata de una solución *no trivial* a las ecuaciones de Einstein en el vacío $G^{\mu\nu} = 0$. De hecho, existe un teorema, el **teorema de Birkhoff**, el cual establece que la métrica de Schwarzschild es la *única* solución en el vacío con simetría esférica, estática e isotrópica (véase [1] sec 5.2 o [6] sec 32.2). La métrica de Schwarzschild posee un parámetro libre M , interpretado como la masa del agujero negro. En concreto, las funciones $A(r)$ y $B(r)$ toman la siguiente expresión:

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \quad y \quad A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2MG}{r}} = \frac{1}{B(r)}, \tag{3.7}$$

de forma que

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{3.8}$$

Viendo la expresión de la métrica de Schwarzschild, notamos que en el límite $r \rightarrow \infty$ encontramos la métrica de Minkowski.

Otra cosa que observamos en (3.8) es que posee singularidades. Estas son puntos del espacio-tiempo para los que algún elemento de la métrica diverge, y consecuentemente ds^2 también lo hace. En concreto tenemos las siguientes singularidades:

$$\begin{aligned}
g_{tt} = 0 &\iff B(r) = 0 \iff r = 2MG = r_s, \\
g_{rr} = 0 &\iff A(r) = 0 \iff r = 0.
\end{aligned}$$

El radio que aparece en la primera condición, r_s , lo denominamos como **radio de Schwarzschild**. Es importante destacar que las componentes de la métrica dependen de las coordenadas y por tanto puede que algunas singularidades simplemente surjan de un fallo en el sistema de

coordenadas (como en el origen de las coordenadas polares), en lugar de la variedad en la que se encuentra. Estas singularidades que aparecen por la elección de las coordenadas se denominan **singularidades de coordenadas**, y es el caso de la singularidad en $r = r_s$. Algunas singularidades de coordenadas pueden representar lugares físicos especiales, como este caso, en el que representa el **horizonte de sucesos**. Al tratarse de una singularidad de coordenadas, podemos encontrar una transformación de las mismas que elimine la singularidad, como por ejemplo en el caso de las **coordenadas de Lemaître**

$$d\tau = dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr, \quad d\rho = dt + \sqrt{\frac{r}{r_s}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr,$$

de forma que

$$ds^2 = -\tau^2 + \frac{r_s}{r} d\rho^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

donde $r \equiv \left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{1/3} r_s^{1/3}$.

Podemos notar que en las coordenadas de Lemaître la singularidad $r = r_s$ desaparece mientras que $r = 0$ sigue apareciendo. Esto se debe a que es una singularidad de naturaleza distinta a la de $r = r_s$. Decimos que $r = 0$ es una **singularidad física**. Se han escrito muchos libros sobre la naturaleza de las singularidades en la relatividad general, y en ocasiones indican que la geometría está "fuera de control". El criterio que usamos para decir que una singularidad es de naturaleza física, y algo está "mal" en la geometría, es que la curvatura del espacio-tiempo en ese punto sea infinita. Como sabemos, la curvatura se encuentra encapsulada en el tensor de Riemann, y es complicado decir cuando un tensor se hace infinito, pues sus componentes dependen de las coordenadas. Por ello utilizamos los distintos escalares que sabemos construir a partir del tensor de Riemann, pues las cantidades escalares son independientes de las coordenadas. Si estos escalares (no necesariamente todos) se hacen infinito al acercarnos a un punto, decimos que ese punto es una **singularidad de la curvatura**.

En este caso de la métrica de Schwarzschild, el cálculo del escalar de Kretschmann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12r_s^2}{r^6} \quad (3.9)$$

revela que $r = 0$ es en efecto una singularidad física mientras que $r = r_s$ es una singularidad de las coordenadas.

3.2.1. Estudio de las órbitas

Siguiendo con el estudio del agujero negro de Schwarzschild, podemos preguntarnos como serán sus órbitas. Para responder la cuestión, el paso evidente sería considerar el comportamiento de las geodésicas. Sin embargo, el cálculo explícito de los símbolos de Christoffel y el uso de la ecuación de las geodésicas (2.30) lleva a cuatro ecuaciones acopladas no muy fáciles de resolver (sec 3.5

de [1]). Otro camino es explotar el alto grado de simetría que posee el sistema y hacer uso de los vectores de Killing y su significado. En total tenemos cuatro vectores de Killing, tres espaciales asociados a la simetría esférica del sistema, y uno temporal asociado a la independencia de la métrica respecto de la coordenada temporal. Los Killings espaciales conllevan la conservación del momento angular (de forma similar a la mecánica clásica Kepleriana). Dos de ellos indican que el movimiento de una partícula se va a encontrar en un plano, de forma que sin perder generalidad siempre podemos escoger $\theta = \pi/2$. El otro Killing espacial corresponde con la conservación de la magnitud del momento angular L .

De forma explícita, tenemos que el Killing temporal es

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (3.10)$$

y el Killing asociado a la cantidad de momento angular, por ser la métrica independiente de φ , es

$$R^\mu = (\partial_\varphi)^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (3.11)$$

En ambos casos nos resulta conveniente bajar el índice y escribir los vectores como

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right), 0, 0, 0 \right) \quad y \quad R_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta). \quad (3.12)$$

Por la discusión en sobre los Killings realizada en 2.2.4 sabemos que la existencia de un vector de Killing conlleva la conservación de la cantidad $K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, con λ un parámetro afín. De esta forma, utilizando que $\theta = \pi/2$, las dos cantidades conservadas en este caso son

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (3.13)$$

y

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.14)$$

Para partículas sin masa, estas cantidades pueden ser interpretadas como la energía y momento angular conservados, mientras que para partículas masivas son la energía y momento angular por unidad de masa conservadas.

Las cantidades E y L nos proporcionan una manera conveniente de entender las órbitas de las partículas en la geometría de Schwarzschild. A partir de la definición del elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, si dividimos por $1/d\lambda^2$ tenemos que¹

$$-\varepsilon = \frac{ds^2}{d\lambda^2} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (3.15)$$

¹Escribimos ε pues utilizamos un parámetro afín. En el caso de usar τ queda la expresión ya conocida $-1 = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ de la conservación del módulo de la quadri-velocidad.

Expandiendo la expresión (3.15) y usando las expresiones de E y L obtenemos que

$$-E^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \varepsilon\right) = 0. \quad (3.16)$$

Hemos obtenido así una única ecuación para $r = r(\lambda)$. Podemos reescribir esta última expresión para dejarla como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \varepsilon, \quad (3.17)$$

donde

$$V(r) = \frac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon \frac{r_s}{2r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_s L^2}{2r^3}, \quad (3.18)$$

y

$$\varepsilon = \frac{1}{2}E^2. \quad (3.19)$$

Notemos como (3.17) es la ecuación para una partícula clásica de masa unidad y energía ε moviéndose en un potencial unidimensional $V(r)$. A pesar de que las trayectorias que podemos considerar en esta geometría de Schwarzschild no son unidimensionales, pues también nos interesan las componentes $t(\lambda)$ y $\phi(\lambda)$, entender el comportamiento de la parte radial nos es de gran ayuda para entender el problema. Si recordamos el análisis en gravedad Newtoniana llegamos al mismo resultado (3.17), pero con un potencial sin el último término de (3.18). Este último término es la contribución de la relatividad general, y se hace especialmente importante para valores radiales pequeños.

Radio superior a $r = r_s$

Indagando un poco más sobre las órbitas, sabemos que estas serán órbitas circulares de radio r_c dado por $dV/dr|_{r=r_c} = 0$. Derivando la expresión del potencial (3.18) e igualando a cero tenemos que

$$\varepsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 = 0. \quad (3.20)$$

Para valores de r grandes, el comportamiento Newtoniano y de la relatividad general son iguales, existiendo órbitas periódicas para partículas masivas (tanto circulares como no circulares), al igual que órbitas no acotadas. Sin embargo, cuando $r \rightarrow 0$ debemos tener en cuenta el término de la relatividad general $-GML^2/r^3$, el cual implica que el potencial se vaya a $-\infty$ en lugar de ∞ como en el caso newtoniano. Para $r = r_s$ el potencial es siempre 0.

Partículas no masivas: en el caso de partículas sin masa (como fotones), para las cuales $\varepsilon = 0$, tenemos la existencia de una barrera que solo será sobrepasada por un fotón con suficiente energía (en comparación con el momento angular L). En la cima de la barrera hay órbitas circulares

inestables cuyo radio obtenemos de (3.20) con $\varepsilon = 0$

$$r_c = 3GM = \frac{3}{2}r_s.$$

Esto significa que un fotón puede orbitar para siempre en $r = 3/2r_s$, pero cualquier perturbación le llevará a $r = 0$ o $r = \infty$.

Partículas masivas: para partículas masivas hay tres regímenes distintos según el momento angular. Las órbitas circulares ocurren con radio

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM}. \quad (3.21)$$

Podemos notar como para valores grandes de L hay dos órbitas circulares, una estable y otra inestable. Cuando $L \rightarrow \infty$ sus radios son respectivamente

$$r_c = \left(\frac{2L^2}{r_s}, \frac{3}{2}r_s \right). \quad (3.22)$$

En este límite la órbita estable se aleja al infinito y la inestable a $3/2r_s$, como en el caso de las partículas sin masa. Por otro lado, al disminuir L , ambas órbitas circulares se acercan; coinciden cuando el discriminante de (3.21) se anula, que es en $L = \sqrt{3}r_s$, y por tanto

$$r_c = 3r_s. \quad (3.23)$$

Las órbitas circulares desaparecen para valores de L menores. Vemos por tanto que $3r_s$ es el menor radio posible para una órbita circular estable en la métrica de Schwarzschild. También existen órbitas no acotadas, que llegan desde el infinito y rebotan, y órbitas acotadas periódicas no circulares, que oscilan alrededor del radio de la órbita circular estable. Debemos notar que estas órbitas, que en mecánica newtoniana describen una sección de cono exacta, dejan de hacerlo en relatividad general, aunque habría que resolver $d\varphi/d\lambda$ para demostrarlo. Por último, también existen órbitas que vienen desde el infinito y llegan hasta $r = 0$; esto puede pasar si la energía es suficiente para sobrepasar la barrera, o si $L < \sqrt{3}r_s$, cuando la barrera no existe.

Resumiendo lo estudiado para las órbitas en la geometría de Schwarzschild, hemos encontrado que las soluciones poseen una órbita estable circular para $L > 3r_s$ e inestable circular para $3/2r_s < r < 3r_s$. Es importante remarcar que esto es para las geodésicas, trayectorias de partículas no aceleradas; nada nos impide la existencia de una partícula acelerada que baje a valores menores de $3/2r_s$ y vuelva, siempre que no sobrepase el límite $r = 2r_s$, es decir, el horizonte de sucesos.

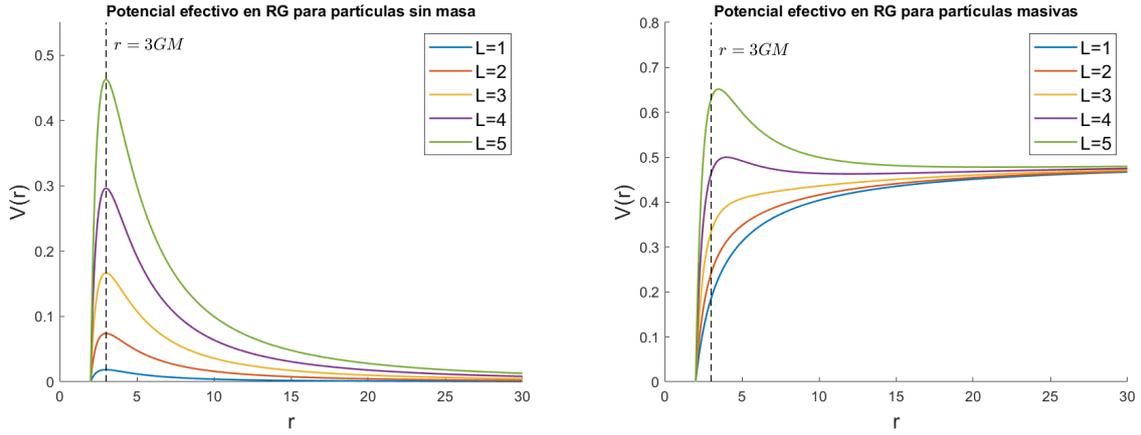


Figura 3.1: Potenciales efectivos en la métrica de Schwarzschild. Se ha escogido $r_s = 2$. El potencial es siempre 0 en $r = r_s$. Notar como en el caso de partículas sin masa la órbita circular siempre queda en $r_c = 3/2r_s$ mientras que en el caso de partículas masivas solo existen órbitas circulares para $L > \sqrt{3}r_s = 3.4641$. Observar además como a medida que aumenta L el radio de la órbita circular inestable se acerca a $r = 3/2r_s$. Cualquier órbita que sobrepase $r = 3/2r_s$ continuará hasta $r = 0$ (para partículas en geodésicas).

Radio inferior a $r = r_s$

Habiendo entendido un poco más el comportamiento de las geodésicas para un radio superior a $r = r_s$, podemos preguntarnos que ocurre para radios inferiores a r_s . Para ello estudiamos la estructura causal de la geometría del espacio-tiempo definida por la métrica de Schwarzschild, sus conos de luz. Consideramos por tanto curvas nulas radiales, para las cuales θ y φ son constantes y $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (3.24)$$

de donde se sigue que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) es exactamente la pendiente de los conos de luz en el diagrama del espacio-tiempo en el plano $t-r$. Para valores grandes de r la pendiente es ± 1 , como en el espacio-tiempo plano, mientras que al acercarnos a $r = r_s$, $dt/dr \rightarrow \pm\infty$, y el cono de luz aparenta cerrarse como podemos ver en la figura 3.2. Por tanto un rayo de luz que se acerca a $r = r_s$ parece que nunca llega allí, al menos en este sistema de coordenadas; en su lugar parece que existe una asíntota en ese radio. Esta incapacidad de llegar a $r = r_s$ es una ilusión, pues como ya hemos comentado se trata de una singularidad de coordenadas, y en realidad un rayo de luz o partícula masiva no tendría problema en cruzar esa frontera. Si nos mantuviésemos fuera observando como una partícula se adentra en la región del agujero negro mientras envía señales periódicas, veríamos como el tiempo entre señales se va haciendo cada vez más grande hasta hacerse infinito al "llegar" a $r = r_s$. Nunca veríamos a la partícula cruzar el horizonte, la veríamos moverse cada vez más

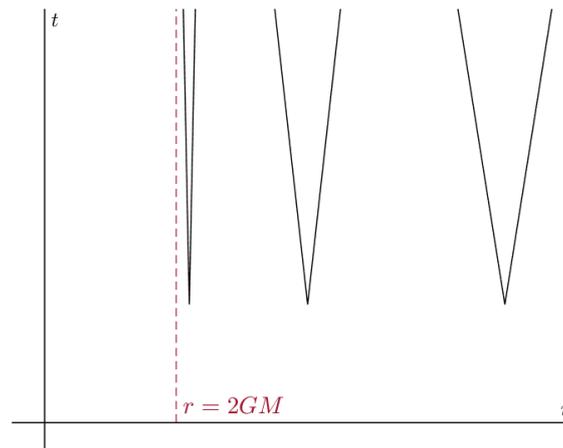


Figura 3.2: Los conos de luz aparentan cerrarse al acercarse a $r = r_s = 2GM$ en las coordenadas de Schwarzschild.

lento.

Por último, si nos fijamos en que ocurre dentro de la región delimitada por el horizonte de sucesos $r = r_s$, notamos que en las coordenadas de Schwarzschild se produce una inversión; r pasa a ser de tipo temporal mientras que t pasa a ser de tipo espacial. De aquí derivamos que una vez pasado el horizonte de sucesos no solo no se puede escapar de la región, sino que uno está destinado a caer y avanzar hasta $r = 0$, pues es la nueva dirección temporal; uno no puede dejar de moverse hacia la singularidad física más de lo que puede dejar de envejecer.

3.3. El agujero negro de Reissner-Nordström

Este es una solución no trivial (1916-1918) de las ecuaciones de Einstein en presencia de un campo electromagnético $G^{\mu\nu} = k^2 T^{\mu\nu}(F)$. Nos vamos a restringir a la presencia de carga eléctrica únicamente, ignorando la carga magnética, aunque el estudio es similar. La métrica de Reissner-Nordström es estática e isotrópica con dos parámetros libres M y Q , que interpretamos como la masa y la carga del agujero negro. La métrica viene caracterizada por las funciones

$$B(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \quad y \quad A(r) = \frac{1}{B(r)}, \quad (3.26)$$

con $r_s = 2GM$ y $r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0}$ (en lo que sigue tomaremos $4\pi\epsilon_0 = 1$, donde ϵ_0 es la permitividad del vacío). De esta forma el elemento de línea es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.27)$$

El campo electromagnético viene dado por el tensor de intensidad del campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, con un potencial vector de la forma

$$A_\mu = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\frac{r_Q}{r}, \vec{0} \right). \quad (3.28)$$

Este campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (3.29)$$

A partir de la definición del tensor de energía momento para un campo electromagnético (2.85), concluimos que se satisfacen las ecuaciones de Einstein

$$\frac{G^{\mu\nu}}{\kappa^2} = T_\mu^\nu = \frac{r_Q^2}{k^2 r^4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & & & \\ & -P_r & & \\ & & P_\theta & \\ & & & P_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Al igual que en la métrica de Schwarzschild, la de Reissner-Nordström también presenta singularidades. En concreto, se dan cuando:

$$\begin{aligned} g_{tt} = 0 &\iff B(r) = 0 \iff r_\pm = \frac{1}{2} \left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right), \\ g_{rr} = 0 &\iff A(r) = 0 \iff r = 0. \end{aligned}$$

Los dos horizontes r_\pm se degeneran cuando

$$r_s = 2r_Q \Rightarrow B(r) = \left(1 - \frac{r_Q}{r} \right)^2, \quad (3.31)$$

lo que denominamos como **solución extremal** de Reissner-Nordström o **agujero negro extremal**. Además, bastaría calcular el escalar de Kretschmann para ver que la singularidad en $r = 0$ tiene naturaleza física.

Indagando un poco más sobre la expresión de los horizontes de sucesos

$$r_\pm = \frac{1}{2} \left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right), \quad (3.32)$$

podemos diferenciar tres situaciones en función del discriminante $r_s^2 - 4r_Q^2$.

El primer caso que consideramos es cuando $2r_Q > r_s \Rightarrow Q^2 > GM^2$. En esta situación decimos que existe una *singularidad desnuda* en $r = 0$, pues deja de estar definido un horizonte de sucesos, y la métrica es siempre regular hasta $r = 0$. Esto estaría en contradicción de la **hipótesis de censura cósmica**. Establecida por Roger Penrose en 1969, la hipótesis de censura cósmica nos dice que no pueden existir singularidades desnudas en el espacio-tiempo. Esto quiere decir que todas las singularidades existen escondidas tras un horizonte de sucesos, con lo que no pueden ser observadas desde el resto del espacio-tiempo. Podemos notar como en este caso la coordenada t es siempre temporal, y la coordenada r espacial, sin producirse una inversión como en el caso de Schwarzschild; a este tipo de singularidades las denominamos *de naturaleza temporal*, mientras a singularidades como la de Schwarzschild las denominamos *de naturaleza espacial*. Esto implica que un observador podría acercarse a la singularidad y volver sin problema.

El segundo caso se da cuando $r_s > 2r_Q \Rightarrow GM^2 > Q^2$. En esta situación existen dos horizontes de sucesos bien definidos por r_+ y r_- . De nuevo, la singularidad en $r = 0$ es de tipo tiempo, al contrario que en Schwarzschild. Si un observador cayese a la singularidad desde más allá de r_+ , al pasar por el primer horizonte le ocurriría lo mismo que al cruzar $r = r_s$ en la métrica de Schwarzschild: la coordenada r se vuelve temporal y estaría destinado a seguir cayendo. Tras un tiempo, el observador acabaría cruzando el segundo horizonte, donde r vuelve a ser espacial y deja de ser imperativo avanzar en el sentido negativo de r . Por tanto uno no está obligado a caer hasta la singularidad $r = 0$; esto era esperado por la naturaleza temporal de la singularidad. De hecho, uno podría volver a cruzar por r_- , y en este caso se vería obligado a seguir la dirección de aumento de r , hasta atravesar r_+ , como si saliese expulsado del agujero.

Por último, está el caso degenerado $r_s = 2r_Q \Rightarrow GM^2 = Q^2$. Como ya hemos comentado, esta solución es conocida como la solución extremal de Reissner-Nordström. El agujero negro extremal tiene un horizonte de sucesos en $r = GM$, pero la coordenada r nunca se vuelve temporal; se vuelve nula justo en $r = GM$, pero es espacial a ambos lados. La singularidad $r = 0$ es temporal, como en los otros dos casos. De esta forma para este agujero negro la singularidad es de nuevo evitable.

Capítulo 4

Agujeros de gusano

En el capítulo anterior nos hemos adentrado a estudiar algunas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, denominadas como agujeros negros. Soluciones caracterizadas por la existencia de singularidades del espacio-tiempo. A lo largo de este capítulo vamos a investigar otro tipo de soluciones, relacionadas con las anteriores, en las que una singularidad conecta distintas regiones del espacio-tiempo, en una especie de puente, formándose un objeto llamado agujero de gusano. Una especie de agujero negro con entrada y salida. A parte de ver si dicho objeto tiene cabida dentro de las ecuaciones, también estudiaremos el problema de su atravesabilidad, buscando condiciones en las que se podría atravesar dicho puente. Para ello nos basamos principalmente en los trabajos [2], [5], [4] y [6].

4.1. Un agujero de gusano sencillo

Comenzamos con una de las soluciones más simples a las ecuaciones de Einstein que dan lugar a un agujero de gusano. Partimos de una métrica prácticamente plana como la de Minkowski, pero añadimos una modificación de la parte esférica. La métrica en cuestión es la siguiente (véase [5]):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

donde tenemos el rango $t \in (-\infty, +\infty)$, $l \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in [0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, y b_0 es una constante. La coordenada l se corresponde con una coordenada radial que mide la distancia radial propia para un tiempo fijo t .

Podemos notar que para la métrica (4.1) el espacio-tiempo posee simetría esférica y es estático; tiene además dos regiones asintóticamente planas $l \rightarrow +\infty$ y $l \rightarrow -\infty$. Además no posee horizontes de sucesos (g_{tt} no tiene ceros).

Realizando la transformación¹ $l^2 = r^2 - b_0^2$, la métrica se convierte en

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} dr^2 + r^2 d\Omega. \quad (4.2)$$

Esta métrica posee una singularidad para $r = b_0$. Debido a su simetría esférica, podemos fijar un tiempo t y un valor para $\theta = \pi/2$, simplificando así la métrica a la siguiente expresión:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

De esta forma podemos intentar dibujar la superficie embebida en un espacio tridimensional euclídeo. Para ello la expresamos en coordenadas cilíndricas (z, r, φ) ,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4.3)$$

donde la función de embebimiento es $z(r) = \pm b_0 \ln \left(\frac{r}{b_0} + \sqrt{(r/b_0)^2 - 1} \right)$ (véase [5] para la derivación). En la figura 4.1 tenemos la superficie (revolucionada en φ debido a la simetría esférica) representada. Podemos observar la conexión de dos regiones a través de una especie de "puente". Esta es la denominada como **garganta de un agujero de gusano**.

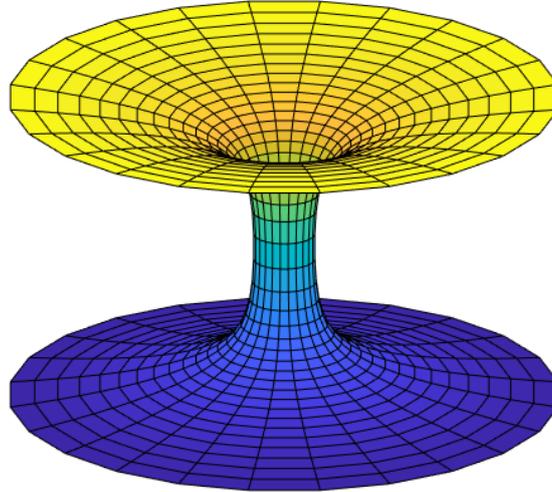


Figura 4.1: Agujero de gusano embebido en \mathbb{R}^3

Si calculamos el tensor de energía-momento requerido por la solución (4.2) como consecuencia

¹Notar que la transformación realizada, $l^2 = r^2 - b_0^2$, no es una transformación de coordenadas entre l y r , pues no es un difeomorfismo según la definición 2.2.

de las ecuaciones de Einstein (2.64), obtenemos que

$$\kappa^2 T_\mu^\nu = \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \kappa^2 \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\phi \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Debido a la interpretación que realizamos sobre las componentes del tensor de Energía-momento, debemos notar que $T_0^0 = +\frac{1}{\kappa^2} \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} = -\rho$. El hecho de que la densidad de energía ρ sea negativa hace imposible pensar en construir un material con el tensor de energía-momento (4.4). Un tensor de energía-momento como (4.4) se puede obtener de un campo escalar "fantasma" que tiene el término cinético con el signo contrario: $\mathcal{L}_\phi = +\frac{1}{2} g g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$.

Este ejemplo sencillo ya nos anticipa la naturaleza exótica de los agujeros de gusano.

4.2. La solución de Einstein-Rosen

Uno de los trabajos más famosos sobre agujeros de gusano fue el realizado por Albert Einstein y Nathan Rosen en 1935 (véase [2]). En su artículo los autores buscan entender que son las partículas desde un punto de vista geométrico, y se hacen la pregunta de si existe una teoría atomística de la materia y el electromagnetismo que, excluyendo las singularidades en el campo, no use otras variables mas que las del campo gravitatorio ($g_{\mu\nu}$) y las del campo electromagnético (A_μ).

A primera vista la respuesta es negativa, pues ya hemos visto que tanto en la solución de Schwarzschild (3.2) como en la de Reissner-Nördstrom (3.3) se tiene la existencia de singularidades. De hecho, la expresión de las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético (3.29), aparenta excluir la existencia de densidades de carga, y por tanto de partículas eléctricas.

Por esas razones, los autores suponen que las partículas materiales sean consideradas como singularidades del campo. A pesar de que sabemos que esto es erróneo, debemos entender el contexto en el que trabajaban los autores, donde la mecánica cuántica y en concreto la teoría cuántica de campos no estaba aún desarrollada del todo, lo que llevó a Einstein a buscar respuestas sobre la naturaleza de las partículas en la geometría.

Una singularidad especial y su eliminación

Partimos entonces de una métrica que es una transformación de la de Minkowski

$$ds^2 = -\alpha^2 (x^1)^2 (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (4.5)$$

La métrica de este campo satisface

$$R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (4.6)$$

y por tanto

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

La métrica de (4.5) es regular en todos los puntos finitos del espacio-tiempo. Sin embargo no podemos asegurar que las ecuaciones (4.7) se satisfagan en todos los valores finitos de (x^0, x^1, x^2, x^3) . Esto se debe a que el determinante de la métrica, g , se anula en $x^1 = 0$. Debido a esto, la inversa $g^{\mu\nu}$ se vuelve infinita y los tensores de Riemann y de curvatura toman la forma $0/0$. Es decir, el hiper-plano $x^1 = 0$ representa una singularidad del campo.

Nos preguntamos ahora si las leyes del campo gravitacional pueden ser modificadas de forma natural para que la solución (4.5) satisfaga las ecuaciones de campo para todos los puntos finitos, incluido el hiper-plano $x^1 = 0$. En efecto se puede, pues podemos expresar los tensores de Riemann y Ricci como funciones racionales de la métrica y sus dos primeras derivadas multiplicándolos por adecuadas potencias de g , evitando así el uso de denominadores en las expresiones de los mismos. En concreto, haciendo

$$R^*_{\mu\nu} = g^2 R_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

evitas que el nuevo tensor de Ricci tome la forma $0/0$, ya que el 0 del denominador provenía de $1/|g^2|$. Al decir que $R^*_{\mu\nu}$ no posee ningún denominador nos referimos a que se ha eliminado la fracción $1/|g^2|$ del tensor de Riemann. Así, reemplazando esta expresión en (4.7):

$$R^*_{\mu\nu} = 0 \quad (4.9)$$

representa un conjunto de ecuaciones que cumple $g_{\mu\nu}$ en todos los puntos finitos, incluido $x^1 = 0$. Notar que lo que estamos haciendo es operar con densidades tensoriales de un peso adecuado en lugar de con tensores. De esta forma evadimos las singularidades caracterizadas por la anulación del determinante de la métrica g .

A pesar de que la solución (4.5) no tiene mayor importancia física aparte de su singularidad, llevó a los autores a entender hasta que punto la regularización de las hiper-superficies $g = 0$ llevaba a una representación teórica de la materia. En el marco de la teoría de la relatividad general tenemos las ecuaciones de campo (2.64). Para interpretar (4.5) en este marco debemos aproximar el elemento de línea por uno ligeramente diferente que evite la singularidad. Para ello los autores introdujeron una constante $\sigma (> 0)$ evitando así la singularidad en $x^1 = 0$, y definieron

$$ds^2 = -(\alpha^2(x^1)^2 + \sigma)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (4.10)$$

Calculando el tensor de energía momento que corresponde a esta solución a partir de (2.64) las

componentes no nulas son

$$T_{22} = T_{23} = \frac{\alpha^2}{\sigma \left(1 + \frac{\alpha^2(x^1)^2}{\sigma}\right)^2}.$$

Podemos notar que a menor σ , más se concentra el tensor en el entorno de la hiper-superficie $x^1 = 0$. Es decir, σ es un parámetro con el que los autores son capaces de evitar la singularidad, y controla la concentración de energía entorno a $x^1 = 0$. Desde el punto de vista de la teoría original la solución (4.5) contiene una singularidad que los autores hacen corresponder con una energía o masa concentrada en la superficie $x^1 = 0$; desde el punto de vista de la teoría modificada, (4.5) es solución de (4.9), libre de singularidades, en la que el parámetro σ establece la concentración de energía en el hiper-plano $x^1 = 0$. Es importante que notemos que en el caso de la solución (4.5) el campo consiste en dos mitades iguales, separadas por la hypersuperficie $x^1 = 0$, de forma que en los puntos correspondientes (x^0, x^1, x^2, x^3) y $(x^0, -x^1, x^2, x^3)$ la métrica $g_{\mu\nu}$ es igual. Como consecuencia, el signo de g no cambia en todo el espacio-tiempo.

La solución neutra

Vamos ahora a aplicar estas ideas a la solución de Schwarzschild. Recordemos su solución:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2), \quad (4.11)$$

donde $r_s = 2GM$. Si introducimos una nueva variable²

$$u^2 = r - r_s,$$

obtenemos la expresión

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + r_s} dt^2 + 4(u^2 + r_s) du^2 + (u^2 + r_s)^2 d\Omega. \quad (4.12)$$

Las nuevas componentes $g_{\mu\nu}$ son funciones regulares para todos los valores de las variables. Para $u = 0$ la componente g_{00} se anula, y por tanto el determinante g (es el horizonte de sucesos $r = r_s$). Esto no previene a las ecuaciones de campo (4.9) de ser satisfechas para todos los valores de las variables. Estamos tratando por tanto con una solución que es ahora libre de singularidades en todos los puntos finitos. La hiper-superficie $u = 0$ (o $r = r_s$) juega el mismo rol que la superficie $x^1 = 0$ del ejemplo anterior.

A medida que u varía de $-\infty$ a $+\infty$, r varía desde $+\infty$ hasta r_s y luego de nuevo desde r_s hasta $+\infty$. La solución regular (4.12) interpretada en el espacio t, r, θ, φ nos lleva a la siguiente

²De nuevo este no es un difeomorfismo. Lo que se consigue bajo la transformación es coger la solución del agujero negro de Schwarzschild, eliminar la parte de $r < r_s$, y "pegar" dos soluciones, la de $u > 0$ y la de $u < 0$ uniéndolas a través de la superficie $r = r_s$, creando el agujero de gusano.

conclusión: el espacio cuadri-dimensional está descrito matemáticamente por dos partes o "láminas" congruentes, correspondientes a $u > 0$ y $u < 0$ cuya métrica en $u \rightarrow \pm\infty$ se corresponde con la de Minkowski, que se juntan por el hiper-plano $r = r_s$ o $u = 0$ en el cual g se anula. A dicha conexión entre las dos partes o láminas la denominamos como *puente*. Por lo comentado anteriormente, este puente sería la representación matemática de una partícula en la solución libre de singularidades propuesta Einstein y Rosen.

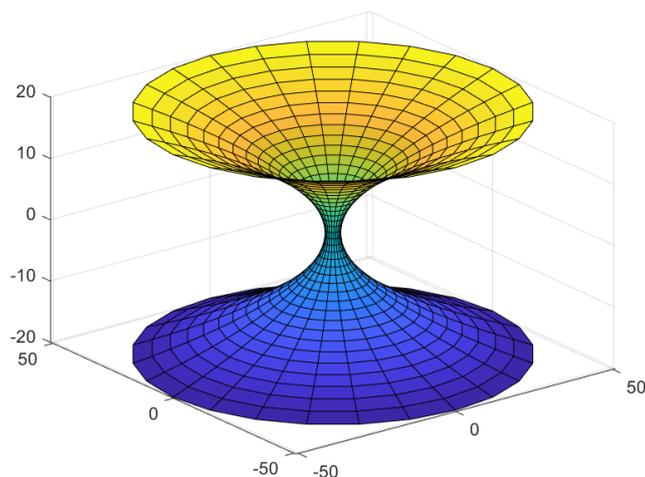


Figura 4.2: Representación del puente de Einstein-Rosen embebido en \mathbb{R}^3 . Hemos tomado un corte del espacio para el cual $t = 0$, $\theta = \pi/2$, el cual da una $2 - \text{variedad}$ con métrica $4(u^2 + r_s)du^2 + (u^2 + r_s)^2 d\varphi^2$, que se embebe de forma isométrica en \mathbb{R}^3 mediante coordenadas cilíndricas vía el mapa $(u, \varphi) \rightarrow (u^2 + r_s, \varphi, \sqrt{4r_s}u)$. En este caso tomamos $r_s = 2$, $u \in (-7, 7)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vemos por tanto que una característica de esta teoría propuesta es la descripción del espacio-tiempo mediante dos láminas. Un puente, espacialmente finito de área mínima $4\pi(r_s)^2$, que conecta dichas láminas caracterizaría la presencia de una partícula elemental neutra según Einstein y Rosen. Con esta idea uno sería capaz de obtener la representación de una partícula elemental usando únicamente las ecuaciones del campo, sin introducir nuevas cantidades para describir la densidad de materia. Además, también permitiría entender que no deberían existir partículas de masa negativa: si hubiésemos empezado con $-M$ ($\Rightarrow r_s = 2MG < 0$), no hubiésemos podido construir la solución regular introduciendo una nueva variable u ; es decir, ningún *puente* es posible que se corresponda con una partícula de masa negativa.

Volviendo a la solución (4.5), a partir de la información obtenida con la solución de Schwarzschild podemos notar que en la solución original también se tienen dos mitades del espacio ($x^1 > 0$ y $x^1 < 0$) congruentes, que se corresponden con dos láminas del mismo espacio físico. En este sentido el ejemplo representa un campo gravitacional, independiente de x^2 y x^3 , que acaba en un plano cubierto de masa formando una frontera en el espacio. En este ejemplo, al igual que en la solución de Schwarzschild, podemos construir una solución libre de singularidades en todos

los puntos finitos introduciendo las ecuaciones de gravitación modificadas (4.9).

El hecho de que $g = 0$ en $r = r_s$ nos avisa de que algo ocurre en ese punto del espacio. De hecho, un análisis sobre las geodésicas de la solución cerca de ese entorno (véase [6], cap 31) indica que no existen geodésicas que puedan cruzar de una lámina a otra. Cualquier geodésica que cruce el horizonte acaba en la región $r < r_s$ de la geometría y finalmente cae en la singularidad $r = 0$; decimos entonces que el agujero negro no es atravesable.

La solución cargada

Para poder obtener soluciones estáticas con simetría esférica, libres de singularidades, que representen partículas cargadas (objetivo de Einstein y Rosen), se debe modificar la solución de Reissner-Nördstrum (3.27), cambiando $Q^2 \Rightarrow -Q^2$ ($\Rightarrow r_Q^2 \rightarrow -r_Q^2$). De esta forma obtenemos, en unidades naturales, la siguiente solución:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - r_s/r - r_Q^2/r^2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.13)$$

El campo electromagnético viene dado por (3.28).

De nuevo en este caso no hay problema para formar una solución libre de singularidades³. Resulta también que la masa M y la carga Q son constantes independientes, y la eliminación de la singularidad no requiere necesariamente de una masa M positiva. De hecho, existe una solución libre de singularidades para la cual $M = 0$. Si en la ecuación (4.13) omitimos la masa, podemos realizar un cambio de coordenadas similar al realizado en la solución de Schwarzschild,

$$u^2 = r^2 - r_Q^2,$$

de forma que se tiene

$$ds^2 = - \left(\frac{u^2}{u^2 + r_Q^2} \right) dt^2 + du^2 + (u^2 + r_Q^2) d\Omega. \quad (4.14)$$

Esta solución es libre de singularidades para todos los puntos del espacio, estando de nuevo formada por dos láminas y un puente entre ambas radiando el campo electromagnético. Esta sería la representación que Einstein y Rosen dieron de una partícula elemental cargada y sin masa, el neutrino.

El problema que subyace en toda esta discusión es que de nuevo, al igual que para el agujero de gusano sencillo discutido anteriormente, no se cumplen las ecuaciones de Einstein debido a un

³El cambio necesario en la carga es para que aparezca $-r_Q^2$ en lugar de $+r_Q^2$ en la solución (4.13). Esto es debido a que con $+r_Q^2$ no sería posible obtener una solución libre de singularidades.

singo negativo. En efecto, calculando el tensor de Einstein asociado a (4.13), obtenemos que

$$G_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r_Q^2}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_Q^2}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_Q^2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r_Q^2}{r^4} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Por otro lado, el tensor de energía-momento asociado al potencial (3.28) es

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} -\frac{r_Q^2}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_Q^2}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_Q^2}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_Q^2}{r^4} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

de forma que en este caso se tiene $G_{\mu}^{\nu} = -\kappa^2 T_{\mu}^{\nu}$ en lugar de (2.64).

4.3. Agujeros de gusano atravesables: soluciones de Morris y Thorne

Una cualidad que hemos podido notar sobre el puente de Einstein-Rosen, sin entrar en la demostración, es que se correspondía con un agujero de gusano que no es atravesable, pues las geodésicas acaban cayendo a la singularidad $r = 0$. Vamos a ver a continuación condiciones que podemos introducir en la geometría del espacio-tiempo, o más bien en la distribución de energía y materia, para poder construir un agujero de gusano que si sea atravesable.

Un agujero de gusano atravesable (o practicable) debe de satisfacer ciertas condiciones básicas propuestas por Morris y Thorne [5]:

1. La métrica ha de tener simetría esférica y ha de ser independiente del tiempo (estática).
2. Las soluciones han de satisfacer las ecuaciones de Einstein (2.64).
3. La solución ha de tener una garganta que una dos regiones del espacio-tiempo asintóticamente planas para que represente un agujero de gusano.
4. El agujero de gusano no puede tener un horizonte de sucesos, pues impediría el viaje a través de él en ambas direcciones.
5. Las fuerzas de marea gravitacionales que experimente el viajero han de ser tolerables.

6. El tiempo propio necesario para atravesar el agujero de gusano ha de ser finito y razonablemente pequeño.
7. La distribución de energía-materia y los campos que generen la geometría del espacio-tiempo del agujero de gusano deben tener un un tensor de energía-momento físicamente razonable.
8. La solución debe ser perturbativamente estable.
9. La construcción del agujero de gusano ha de ser tal que se requiera mucha menos masa que la del total del universo y requiera un tiempo mucho menor que la edad del universo.

Los criterios del 1 al 4 se denominan *criterios básicos* de un agujero de gusano, y son los necesarios para que sea atravesable por una geodésica; los criterios 5 al 9 son condiciones para que sea atravesable por un ser humano.

4.3.1. Forma de la métrica

Vistos estos criterios, los autores proponen una métrica como la siguiente:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.17)$$

A la función $b(r)$ se la denomina función de forma del agujero de gusano, pues determina la forma espacial del mismo. La función $\Phi = \Phi(r)$ se denomina función de corrimiento al rojo, pues determina el corrimiento al rojo gravitacional. Ambas funciones están restringidas a las propiedades anteriores. Por notación, llamamos $f(r) = (1 - b(r)/r)^{-1}$.

4.3.2. Ecuaciones de estructura: tensor de energía-momento y tensor de Einstein

Si tenemos en cuenta que la métrica $g_{\mu\nu}$ es diagonal, y las distintas propiedades del tensor de Riemann mencionadas en el capítulo 2, se tienen 24 componentes distintas de cero:

$$\begin{aligned}
R_{10}^0{}_1 &= -R_{11}^0{}_0 = -\Phi''(r) - (\Phi(r))^2 + \frac{(rb'(r) - b)}{2r(r-b)\Phi'(r)}, \\
R_{20}^0{}_2 &= -R_{22}^0{}_0 = \Phi'(r)(b-r), \\
R_{30}^0{}_3 &= -R_{33}^0{}_0 = \Phi'(r)(-r+b)\sin^2\theta, \\
R_{01}^1{}_0 &= -R_{00}^1{}_1 = e^{2\Phi} \left[\left(1 - \frac{b}{r}\right) (\Phi'' + (\Phi')^2) + \Phi' \left(\frac{b-rb'}{2r^2}\right) \right], \\
R_{21}^1{}_2 &= -R_{22}^1{}_1 = \frac{rb' - b}{2r}, \\
R_{12}^2{}_1 &= -R_{11}^2{}_2 = \frac{rb' - b}{2r^2(r-b)}, \\
R_{31}^1{}_3 &= -R_{33}^1{}_1 = \frac{(rb' - b)\sin^2\theta}{2r}, \\
R_{13}^3{}_1 &= -R_{11}^3{}_3 = \frac{rb' - b}{2r^2(r-b)}, \\
R_{32}^2{}_3 &= -R_{33}^2{}_2 = \frac{b}{r}\sin^2\theta, \\
R_{23}^3{}_2 &= -R_{22}^3{}_3 = \frac{b}{r}, \\
R_{02}^2{}_0 &= -R_{00}^2{}_2 = e^{2\Phi}\Phi'\frac{r-b}{r^2}, \\
R_{03}^3{}_0 &= -R_{00}^3{}_3 = e^{2\Phi}\Phi'\frac{r-b}{r^2}.
\end{aligned}$$

Denotando nuestra base ortogonal de vectores asociada a las coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ como \vec{e}_α , existe una transformación de Lorentz Λ local

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

de forma que

$$\vec{e}_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad (4.19)$$

define una nueva base donde la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ es

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta_{\mu\nu} \quad (4.20)$$

Esta base nos permite introducir un nuevo sistema de coordenadas, el sistema de referencia propio:

$$d\tilde{x}^\nu = \Lambda_\mu^\nu dx^\mu \quad (4.21)$$

o equivalentemente

$$d\tilde{x}^0 = e^\Phi dx^0, \quad d\tilde{x}^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} dx^1, \quad d\tilde{x}^2 = r dx^2, \quad d\tilde{x}^3 = r \sin \theta dx^3.$$

Esta base describe observadores que siempre permanecen en reposo en el campo gravitacional del agujero negro.

En esta nueva base, recordando la expresión de la transformación de un tensor (2.1), las componentes del tensor de Riemann no nulas son

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{10}^0{}_{10} &= -\tilde{R}_{11}^0{}_{00} = -\tilde{R}_{01}^1{}_{00} = \tilde{R}_{00}^1{}_{10} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' - (\Phi')^2 + \frac{rb' - b}{2r(r-b)} \Phi' \right], \\ \tilde{R}_{20}^0{}_{20} &= -\tilde{R}_{22}^0{}_{00} = -\tilde{R}_{02}^2{}_{00} = \tilde{R}_{00}^2{}_{20} = \tilde{R}_{30}^0{}_{30} = -\tilde{R}_{33}^0{}_{00} = -\tilde{R}_{03}^3{}_{00} = \tilde{R}_{00}^3{}_{30} \\ &= \frac{b-r}{r^2} \Phi', \\ \tilde{R}_{21}^1{}_{20} &= -\tilde{R}_{22}^1{}_{10} = -\tilde{R}_{12}^2{}_{10} = \tilde{R}_{11}^2{}_{20} = \tilde{R}_{31}^1{}_{30} = -\tilde{R}_{33}^1{}_{10} = -\tilde{R}_{13}^3{}_{10} = \tilde{R}_{11}^3{}_{30} \\ &= \frac{rb' - b}{2r^3} \Phi', \\ \tilde{R}_{32}^2{}_{30} &= -\tilde{R}_{33}^2{}_{20} = \tilde{R}_{23}^3{}_{20} = -\tilde{R}_{22}^3{}_{30} = \frac{b}{r^3}. \end{aligned}$$

A partir del tensor de Riemann podemos contraer para calcular el tensor de Ricci, $R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ (expresión (2.40)) y contraer este último para obtener el tensor de curvatura, \tilde{R} (expresión (2.41)). Así, como el tensor de Einstein es

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

sus componentes no nulas son

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= \frac{b'}{r^2}, \\ \tilde{G}_{11} &= -\frac{2(b-r)}{r^2} \Phi' - \frac{b}{r^3}, \\ \tilde{G}_{22} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} + \frac{b-rb'}{2r(r-b)} \Phi' - \frac{rb'-b}{2r^2(r-b)} \right], \\ \tilde{G}_{22} &= \tilde{G}_{33}, \end{aligned}$$

donde la ' representa la derivada radial y '' la segunda derivada radial.

Si recordamos el teorema de Birkhoff mencionado en el capítulo anterior, la única solución en el vacío con simetría esférica es la de Schwarzschild, con lo que el único agujero de gusano compatible con las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica es el de Schwarzschild, el cual

hemos visto que no es practicable. Por tanto un agujero de gusano atravesable debe estar inmerso en materia/radiación con un tensor de energía-momento no nulo. A la vista de las ecuaciones de Einstein (2.64), la estructura de $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es similar a la de $\tilde{G}_{\mu\nu}$ debido a su proporcionalidad. Esto implica que las únicas componentes no nulas del tensor de energía-momento son

$$\tilde{T}_{00} = \rho(r), \quad (4.23)$$

$$\tilde{T}_{11} = -\tau(r), \quad (4.24)$$

$$\tilde{T}_{22} = P(r), \quad (4.25)$$

$$\tilde{T}_{33} = \tilde{T}_{22}, \quad (4.26)$$

donde $\tau(r) = P_r$ es la presión radial. Como la base de vectores es la de unos observadores estáticos que perciben una geometría de Minkowski, la interpretación de cada componente tiene una interpretación física simple. $\rho(r)$ representa la densidad total de energía que pueden medir en el campo gravitacional del agujero de gusano, $\tau(r)$ es la tensión por unidad de área medida por dichos observadores en la dirección radial, y $P(r)$ es la presión medida en las direcciones ortogonales a la radial.

A partir de las ecuaciones de Einstein (2.64), la expresión del tensor de Einstein y del tensor de energía momento, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$b'(r) = \kappa^2 r^2 \rho(r), \quad (4.27)$$

$$\Phi'(r) = \frac{b - \kappa^2 r^3 \tau}{2r(r - b)} \quad (4.28)$$

$$\tau' = (\rho(r) - \tau)\Phi' - \frac{2}{r}(P(r) + \tau(r)), \quad (4.29)$$

Las ecuaciones (4.27) y (4.28) son las partes temporales y radiales de las ecuaciones de campo, respectivamente. La ecuación (4.29) se corresponde con la parte ortogonal de las ecuaciones de campo. Otra forma de interpretar (4.29), desde una perspectiva física, es notar que se corresponde con la ecuación de equilibrio hidrostático para la materia de la que está constituido el agujero de gusano.

Las ecuaciones de campo (4.27)-(4.29) son tres ecuaciones diferenciales con cinco funciones incógnita de r : b , Φ , ρ , τ y P . La forma estándar de afrontar este problema es asumir algún tipo específico de materia o campo que genera el tensor de energía momento, y utilizar las ecuaciones de estado de la fuente. Por ejemplo, para el estudio de un agujero negro eléctricamente cargado, pondríamos $\tau = P = \rho c^2$, y obtendríamos la solución de Reissner-Nördstrom estudiada en 3.3 de las ecuaciones de campo de Einstein (véase [6] cap 31 para la forma de las ecuaciones).

En la búsqueda de soluciones que den lugar a agujeros de gusano practicable, Morris y Thorne proponen una metodología que se basa en probar con funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$, controlando sus propiedades de forma que permitan moldear el agujero de gusano a las especificaciones requeridas;

consecuentemente, es necesario dejar las relaciones entre ρ , τ y P en el aire, solo para ser fijadas por las ecuaciones de campo y la elección de b y Φ .

Con este fin, las ecuaciones (4.27)-(4.29) se pueden reescribir como

$$\rho(r)c^2 = \frac{b'}{\kappa^2 r^2}, \quad (4.30)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{\kappa^2 r^2} \left[\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right], \quad (4.31)$$

$$P(r) = -\tau(r) + \frac{r}{2} [\Phi'(\rho(r) - \tau) - \tau']. \quad (4.32)$$

La forma de estas ecuaciones nos sugiere la estrategia a seguir: ajustar $b(r)$ y $\Phi(r)$ para crear un buen agujero de gusano; la ecuación (4.30) junto con la elección de $b(r)$ nos proporciona $\rho(r)$; la ecuación (4.31) junto con las elecciones de $b(r)$ y $\Phi(r)$ dan la forma de $\tau(r)$; y, finalmente, la ecuación (4.32) junto con lo anterior nos determina $P(r)$.

4.3.3. Condiciones de frontera

En algunos casos puede interesarnos dejar al tensor de energía-momento que genera el agujero de gusano extenderse hasta cualquier valor de un radio arbitrario. Sin embargo, en nuestro caso nos restringimos al interior de una esfera de radio $r = R_s$ de manera que en la región exterior $r > R_s$, las funciones ρ , τ y P se anulan. Las ecuaciones (4.30)-(4.32) implican que $\tau \rightarrow 0$ de forma continua cuando $r \rightarrow R_s$ desde un valor inferior, pero permiten una discontinuidad en los valores de ρ y P . Las ecuaciones (4.27)-(4.29) evaluadas en la región exterior a $r = R_s$ condicionan la geometría externa del espacio-tiempo a ser similar a la de Schwarzschild:

$$b(r) = b(R_s) = B = \text{const en } r > R_s \quad (4.33)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{B}{r} \right) \text{ en } r > R_s. \quad (4.34)$$

Otra condición que debe cumplirse es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b/r = 0$$

para asegurar que el espacio-tiempo es asintóticamente plano lejos del campo gravitacional del agujero de gusano. Esta condición es así pues la métrica (4.17) para la región $r > R_s$ se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{B}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{B}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.35)$$

Y por último, para que una métrica asintóticamente plana, estática, y con simetría esférica, no tenga horizontes de sucesos, sabemos que debemos exigir que $g_{00} \neq 0$, lo que en este caso equivale a pedir que $e^{2\Phi} \neq 0$; es decir, Φ ha de ser finita en todo punto del espacio para que un agujero

de gusano practicable no tenga horizontes de sucesos.

4.3.4. Superficies embebidas

Buscamos representar de alguna forma un agujero de gusano en un diagrama tridimensional. Para ello, fijamos un instante de tiempo $t = cte$, y debido a la simetría esférica, fijamos un valor de $\theta = \pi/2$ (plano ecuatorial). Bajo estas suposiciones, la parte espacial de la métrica (4.17) se escribe como

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{b}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.36)$$

Buscamos representar una superficie bidimensional embebida en el espacio euclídeo tridimensional que posea la misma geometría que (4.36). Utilizando coordenadas cilíndricas (z, r, φ) para el espacio euclídeo, su métrica se escribe como

$$ds_{Euclídea}^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right) dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4.37)$$

donde suponemos $z = z(r)$ (la superficie embebida posee simetría axial).

Identificando las coordenadas (r, φ) euclídeas con las coordenadas (r, φ) del agujero de gusano, el elemento de línea (4.37) será el mismo que el del agujero de gusano (4.36). Esto nos permite escribir

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}},$$

de donde obtenemos que

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b} - 1}}. \quad (4.38)$$

La ecuación (4.38) nos permite entender cómo la función $b(r)$ modela la geometría espacial del agujero de gusano. Podemos notar cómo todo agujero de gusano tiene un radio mínimo $r = b_0$ para el cual la superficie embebida es vertical; es decir, para $b(r) = r = b_0$ se cumple que

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=b=b_0} = \pm \infty.$$

Dicho radio define la **garganta** del agujero de gusano.

Debido a la divergencia de la coordenada radial en la proximidad de la garganta, resulta adecuado definir una *distancia propia radial*

$$dl = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} \quad (4.39)$$

i.e.,

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1/2} dr. \quad (4.40)$$

Esta distancia propia es positiva sobre la garganta del agujero de gusano, y negativa por debajo de la misma. Lejos de la garganta la superficie embebida se vuelve plana

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{l \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

correspondiéndose con las dos regiones asintóticamente planas que conecta el agujero de gusano.

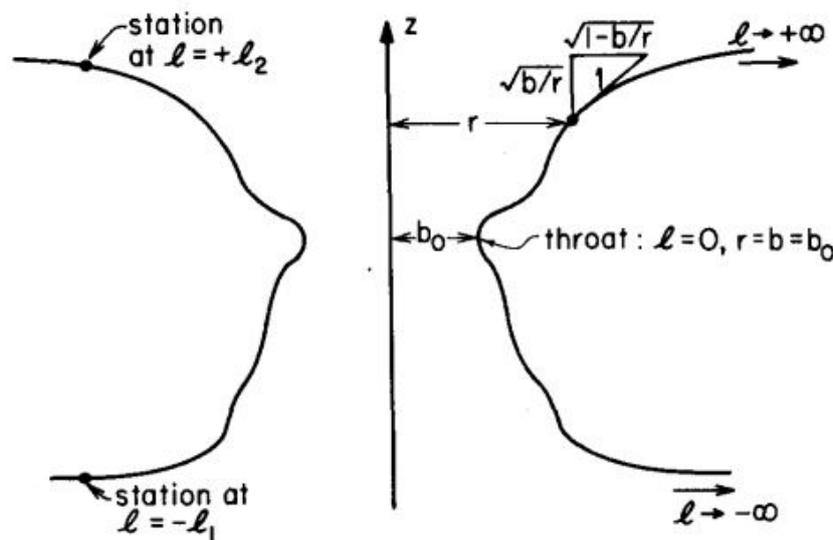


Figura 4.3: Diagrama de embebimiento de un agujero de gusano genérico, visto de perfil. En la garganta se cumple que $b(r) = r = b_0 \rightarrow l = 0$. Para el diagrama completo habría que rotar la figura alrededor del eje z . Obtenido de [5].

4.3.5. Viajando a través de un agujero de gusano

Consideremos a un viajero que se mueve en la dirección radial a través de un agujero de gusano. El viajero parte del reposo desde una estación espacial en la posición $l = -l_1$ y viaja hasta otra estación espacial ubicada en $l = +l_2$. Denotamos por $v(r)$ a la velocidad radial medida por un observador en reposo en cualquiera de las estaciones,

$$v(r) = \mp \frac{d\tilde{x}^1}{d\tilde{x}^0}, \quad (4.41)$$

que escrita en términos de la distancia propia radial queda

$$v(r) = \frac{dl}{e^{\Phi} dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^{\Phi} dt}. \quad (4.42)$$

Si τ_T es el tiempo propio medido por el viajero y definimos $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ ($c = 1$) como en relatividad especial, se cumple que

$$v\gamma = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_T}. \quad (4.43)$$

El signo negativo de (4.43) se refiere a la primera parte del viaje, en la parte inferior del agujero de gusano; el signo positivo se refiere a la segunda parte del viaje, en la parte superior. Al exigir que el viaje empiece y acabe en reposo, tenemos que $v = 0$ en $l = -l_1, +l_2$, mientras que $v > 0$ en $-l_1 < l < l_2$. Supondremos además que las estaciones en $-l_1$ y $+l_2$ se encuentran lo suficientemente alejadas de la garganta del agujero de gusano como para que los efectos gravitacionales del mismo sean muy pequeños. En particular,

- (i) La geometría del espacio en las estaciones ha de ser prácticamente plana.
- (ii) El *redshift* gravitacional, z de las señales desde las estaciones al infinito ha de ser muy pequeño

$$z = \Delta\lambda/\lambda = e^{-\Phi} - 1 \ll 1 \Rightarrow |\Phi| \ll 1 \quad (\text{véase [6]}).$$

Debido a que en las estaciones $|\Phi| \ll 1$, el tiempo propio medido por un observador en una de las estaciones es similar al tiempo coordenada t ; cf. la métrica espacial (4.17).

Para que el viaje a través del agujero de gusano sea conveniente para los seres humanos, Morris y Thorne proponen tres condiciones:

- (i) Los tiempos empleados para viajar entre las estaciones, medidos tanto por el viajero como por unos observadores en las estaciones, deberían ser menores que un año; esta condición se traduce en

$$\begin{aligned} \Delta\tau_T &= \int_{-l_1}^{+l_1} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ año} \\ \Delta t &= \int_{-l_1}^{+l_1} \frac{dl}{ve^{\Phi}} \leq 1 \text{ año} \end{aligned}$$

- (ii) La aceleración \vec{a} experimentada por el viajero no debe exceder por mucho la de la gravedad terrestre.
- (iii) Las aceleraciones de marea $\Delta\vec{a}$ entre las distintas partes del cuerpo del viajero no deben exceder la de la gravedad terrestre.

Aceleración del viajero

Con el fin de discutir la aceleración sufrida por el viajero, introducimos una base de coordenadas ortogonal en el sistema de referencia del mismo $\{\vec{e}_\alpha\}$. Las coordenadas en el sistema de referencia del viajante (\hat{x}^μ) se pueden escribir en función de las de los observadores estáticos (\tilde{x}^ν) como

$$\hat{x}^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu_\nu \tilde{x}^\nu,$$

donde

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

donde $\beta = v$ ($c = 1$). Bajo esta transformación⁴, los vectores de la nueva base son $\vec{e}_\alpha = (\tilde{\Lambda}^{-1})^\beta_\alpha \vec{e}_\beta$.

$$\vec{e}_0 = \gamma\vec{e}_0 \mp \gamma\beta\vec{e}_1, \quad (4.45)$$

$$\vec{e}_1 = \mp\gamma\beta\vec{e}_0 + \gamma\vec{e}_1, \quad (4.46)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_2, \quad (4.47)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_3. \quad (4.48)$$

La cuadri-velocidad del viajero es

$$\hat{u}^\mu = \vec{u} = \vec{e}_0. \quad (4.49)$$

Sabemos que los cuadvectores de aceleración a^μ y velocidad u^μ son ortogonales entre si, de manera que

$$\hat{a}^\mu \hat{u}_\nu = 0 \Rightarrow \hat{a}^0 = 0. \quad (4.50)$$

Además, por considerar que el viajero se mueve en la dirección radial, su aceleración ha de ser radial, con lo que $\hat{a}^2 = \hat{a}^3 = 0$, y por lo tanto

$$\vec{a} = \hat{a}^1 \vec{e}_1 = a \vec{e}_1, \quad (4.51)$$

con a la magnitud de la aceleración experimentada por el viajero.

Podemos notar que, a partir de (4.51), (4.19) y (4.46), tenemos lo siguiente:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_0 = a \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0 = a e^\Phi \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0 = \mp \gamma \beta a e^\Phi.$$

⁴Notar que esta transformación es global, entre espacios espacios de Minkowski, y por ello, al contrario que en la transformación local(4.18), podemos relacionar directamente las coordenadas.

De esta relación deducimos que en la base $\{\vec{e}_\alpha\}$

$$a^0 = \mp \gamma \beta a e^\Phi g_{00} = \mp \gamma \beta a e^{-\Phi}. \quad (4.52)$$

Teniendo en cuenta la relación (4.19) entre las bases $\{\vec{e}_\alpha\}$ y $\{\vec{\tilde{e}}_\alpha\}$, en las cuales la cuadri-velocidad se escribe como $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$ con $u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3)$, y $\vec{\tilde{u}} = \tilde{u}^\mu \vec{\tilde{e}}_\mu$ con $\tilde{u}^\mu = (\gamma c, \gamma v, 0, 0)$ respectivamente, es fácil comprobar que

$$u^0 = e^{-\Phi} \gamma c, \quad (4.53)$$

$$u^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \gamma v, \quad (4.54)$$

$$u^2 = 0, \quad (4.55)$$

$$u^3 = 0. \quad (4.56)$$

En la base $\{\vec{e}_\alpha\}$ también tenemos que

$$a^\alpha = \nabla_\beta u^\alpha u^\beta = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma \right) u^\beta, \quad (4.57)$$

donde $u^\alpha = u^\alpha(r)$. En concreto, para $\alpha = 0$ la expresión queda

$$a^0 = \left(\frac{\partial u^0}{\partial x^1} \right) u^1 + 2\Gamma_{01}^0 u^0 u^1. \quad (4.58)$$

Sustituyendo por los valores de u^0 , u^1 obtenidos en (4.53) y (4.54), y teniendo en cuenta que $\Gamma_{01}^0 = \Phi'(r)$ (véase [5]), tenemos que

$$a^0 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-2\Phi} \gamma \beta \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi). \quad (4.59)$$

Juntando la ecuación (4.59) junto con (4.52) tenemos que

$$a = \mp \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-\Phi} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi), \quad (4.60)$$

que en términos de la derivada respecto a l queda

$$a = e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi). \quad (4.61)$$

La condición de que el viajero no sienta una aceleración superior a la de la gravedad nos impone que

$$|a| = \left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \right| \leq g_\oplus \iff \left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \right| \leq \frac{1}{0.971 \text{ años luz}}, \quad (4.62)$$

donde g_\oplus es la gravedad terrestre ($\sim 9.8 m/s^2$).

Fuerzas de marea

Vamos ahora a estudiar las aceleraciones de marea $\Delta\vec{a}$ entre varias partes del cuerpo del viajero. Para ello, denotamos como $\vec{\xi}$ el cuadri-vector separación entre dos partes del cuerpo del mismo. Notar que $\vec{\xi}$ es puramente espacial en el sistema de referencia del viajero ($\hat{\xi}^0 = 0$). La aceleración de marea gravitacional está dada por la ecuación de desviación de la geodésica (2.63), que en la base $\{\hat{e}_\alpha\}$ se escribe como

$$\Delta\hat{a}^\nu = -c^2 \hat{R}_{\beta\gamma\ \mu}{}^\nu \hat{\xi}^\gamma \hat{u}^\beta \hat{u}^\mu. \quad (4.63)$$

Notar que por ser $\vec{\xi}$ puramente espacial, la aceleración de marea también lo es. Por ello, teniendo en cuenta que el vector de Riemann $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ es antisimétrico en sus dos primeros índices, llegamos a que

$$\Delta\hat{a}^i = -\hat{R}_{i0j0}\hat{\xi}^j. \quad (4.64)$$

Calculando las componentes \hat{R}_{i0j0} , llegamos a que

$$\begin{aligned} \hat{R}_{1010} &= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' + \frac{rb' - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right], \\ \hat{R}_{2020} &= \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[2(r-b)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(rb' - b)\right], \\ \hat{R}_{3030} &= \hat{R}_{2020}, \\ \hat{R}_{1020} &= \hat{R}_{1030} = \hat{R}_{2030} = 0, \\ \hat{R}_{2010} &= \hat{R}_{3010} = \hat{R}_{3020} = 0. \end{aligned}$$

De esta forma, las componentes de la aceleración son

$$\Delta\hat{a}^1 = -\hat{R}_{1010}\hat{\xi}^1 = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' + \frac{rb' - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right] \hat{\xi}^1, \quad (4.65)$$

$$\Delta\hat{a}^2 = -\hat{R}_{2020}\hat{\xi}^2 = -\frac{\gamma^2}{2r^2} \left[2(b-r)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(b-rb')\right] \hat{\xi}^2 \quad (4.66)$$

$$\Delta\hat{a}^3 = -\hat{R}_{3030}\hat{\xi}^3 = -\frac{\gamma^2}{2r^2} \left[(b-r)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(b-rb')\right] \hat{\xi}^3. \quad (4.67)$$

Si tomamos $|\hat{\xi}^i| \simeq 2$ metros (el tamaño del viajero), y exigimos que $|\Delta\hat{a}^i| \leq g_\oplus = 9.8 \text{ m/s}^2$, llegamos a las siguientes restricciones

$$|\hat{R}_{1010}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' + \frac{rb' - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right] \right| \leq \frac{g_\oplus}{2[m]c^2} \simeq \frac{1}{(1.36 \times 10^8 \text{ m})^2} \quad (4.68)$$

$$|\hat{R}_{2020}| = |\hat{R}_{3030}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[2(b-r)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(b-rb')\right] \right| \leq \frac{g_\oplus}{2[m]c^2} \simeq \frac{1}{(1.36 \times 10^8 \text{ m})^2} \quad (4.69)$$

A (4.68) y (4.69) se las denomina restricciones de marea gravitacional radial y laterales, respectivamente (véase [5]). La restricción de marea radial la podemos entender como una restricción

al coeficiente Φ . Generalmente la restricción se cumple de forma simple exigiendo $\Phi' = 0$ en todo punto. La restricción de marea lateral se corresponde con una restricción en la velocidad v con la que el viajero atraviesa el agujero de gusano.

Aceleración en las estaciones

Existe una condición más acerca de la aceleración para que el hipotético viaje tenga sentido en la escala humana, que exige que la aceleración sufrida por un observador en cualquiera de las estaciones no sea superior a la de la gravedad terrestre.

La cuadri-aceleración sufrida por un objeto en las estaciones es

$$\tilde{a}^\alpha = \left(\frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \right) \tilde{u}^\beta. \quad (4.70)$$

Para un observador en reposo podemos escribir

$$\tilde{u}^\alpha = (\tilde{u}^0, 0, 0, 0),$$

donde $\tilde{u}^0 = c$. Si utilizamos la expresión de los símbolos de Christoffel en la base $\{\vec{e}_\alpha\}$ (véase [5]), llegamos a que

$$\tilde{a}^0 = \tilde{a}^2 = \tilde{a}^3 = 0 \quad (4.71)$$

$$\tilde{a}^1 = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \Phi'. \quad (4.72)$$

Así, la aceleración de la gravedad medida en las estaciones es

$$\tilde{g} = -(-\tilde{a}^\alpha \tilde{a}_\alpha)^{1/2}. \quad (4.73)$$

Calculando esta expresión con la ayuda de (4.72), la aceleración medida es (véase [5] o [4]):

$$\tilde{g} = - \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \Phi' c^2 \approx -\Phi', \quad (4.74)$$

ya que exigimos que $b/r \rightarrow 0$ en las estaciones. Como la aceleración ha de ser menor o igual a la de la gravedad terrestre, esta condición se traduce en pedir que

$$|\tilde{g}| = |\Phi'| \leq g_\oplus = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (4.75)$$

4.3.6. El tensor de energía-momento: materia exótica

Las condiciones que hemos considerado en la función de forma del agujero de gusano $b(r)$ hemos visto que generan, vía las ecuaciones de Einstein, condiciones en la densidad de energía ρ , la tensión radial τ y la presión lateral P , que generan la curvatura del espacio-tiempo.

Las restricciones más severas se dan para la garganta del agujero negro. El hecho de que $r = b = b_0$ en la garganta, junto con que $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ en la misma ⁵ implican que, según la ecuación (4.31), que la tensión en la garganta es

$$\tau_0 = \frac{1}{\kappa b_0^2}. \quad (4.76)$$

Esta tensión es enorme. Para $b_0 = 1$ km, la tensión es

$$\tau_0 = 4.83 \times 10^{36} \frac{\text{Newtons}}{\text{m}^2}.$$

En el entorno de la garganta, podemos estudiar otro aspecto clave de esta tensión definiendo la función adimensional

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|}, \quad (4.77)$$

donde hemos usado las ecuaciones (4.30) y (4.31). A la función ζ la denotamos como función de **exoticidad** (véase [4]).

El requerimiento de que el agujero de gusano conecte regiones del espacio asintóticamente planas implica que la superficie embebida se ensancha hacia afuera, como se observa en la figura 4.2. Esta condición (en inglés "outward flaring of the throat" (véase [5])) matemáticamente significa que la inversa de la función de embebimiento $r(z)$ debe satisfacer $\left. \frac{d^2 r}{dz^2} \right| > 0$ en la garganta o cerca de ella.

A partir de la ecuación (4.38) podemos calcular dicha segunda derivada:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b - rb'}{2b^2}. \quad (4.78)$$

Combinando esta ecuación con la relación (4.77) tenemos que

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2 r}{dz^2} \right) - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|}. \quad (4.79)$$

Esta expresión, junto con la finitud de ρ y por tanto de b' , y que $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ en la garganta, nos permite reescribir la condición de ensanchamiento como

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho_0|} > 0 \quad \text{justo en la garganta o cerca de ella,} \quad r = b = b_0, \quad (4.80)$$

⁵Esto se sigue de la finitud de ρ y por tanto de b' vía (4.30); y de la ausencia de horizonte que implica la finitud de Φ'

de manera que $\tau_0 > \rho_0$. Esta última restricción implica que en la garganta, la tensión τ_0 debe ser tan grande como para exceder la densidad total de masa-energía ρ_0 total. Esta restricción resulta conflictiva. A un material que cumple la propiedad $\tau > \rho > 0$ los autores Morris y Thorne lo denominan *exótico* (véase [5]).

La naturaleza exótica de la materia de la garganta del agujero de gusano resulta especialmente problemática por sus implicaciones en las medidas de un observador que atraviesa la garganta con una velocidad radial cercana a la de la luz ($\gamma \gg 1$). Tal observador mide una densidad de energía \hat{T}_{00} que según la relación entre $\{\vec{e}_\alpha\}$ y $\{\tilde{e}_\alpha\}$ la podemos escribir como

$$\begin{aligned}\hat{T}_{00} &= \gamma^2 \tilde{T}_{00} \mp 2\gamma^2 \beta \tilde{T}_{01} \gamma^2 \beta^2 \tilde{T}_{11} \\ &= \gamma^2 (\rho_0 - \tau_0) + \tau_0.\end{aligned}\tag{4.81}$$

A partir de la expresión anterior podemos notar que si el observador viaja a suficiente velocidad, puede llegar a medir una densidad de energía negativa.

Formas de minimizar la materia exótica

Debido a la problemática que surge de considerar la existencia de materia exótica, parece apropiado usar el mínimo posible para la construcción de agujeros de gusano. Cuantificamos la cantidad de materia exótica a partir de la función de exotividad $\xi(r)$, y nos basamos en tres métodos para limitar la cantidad usada.

- (a) Usar materia exótica ($\xi > 0$) asegurándonos que la densidad de la misma decae de forma rápida con el radio al alejarnos de la garganta.
- (b) Usar materia exótica como única fuente de curvatura, pero confinarla a una región de radio R_s . Así, $\xi > 0$ para $r < R_s$, y $\rho c^2 = \tau = P = 0$ para $r > R_s$.
- (c) Relegar el uso de materia exótica a una pequeña región central $-l_c > l > +l_c$ alrededor de la garganta, y rodear esa región de materia ordinaria. Es decir, $\xi > 0$ para $|l| < l_c$, y $\xi \leq 0$ para $|l| \geq l_c$.

4.3.7. Una solución específica: confinamiento de la materia exótica

Para finalizar el estudio sobre los agujeros de gusano atravesables, vamos a indagar sobre una solución específica propuesta por Morris y Thorne (véase [5]), la cual se basa en el método (b), confinando la materia exótica a una región finita alrededor de la garganta del agujero de gusano. Se trata de una solución sin fuerzas de marea radial en el interior de una superficie de radio R_s , que se une de forma continua al exterior de la solución de Schwarzschild. Con este fin, tomamos

como funciones

$$b = b_0 \left(\frac{r}{b_0} \right)^{1-\eta} \quad \text{con} \quad 0 < \eta = \text{cste} < 1, \quad (4.82)$$

$$\Phi = \Phi_0 = \text{cste}, \quad \text{para} \quad b_0 \leq r < R_s \quad (4.83)$$

Dadas las funciones de forma b y Φ , a partir de las ecuaciones (4.30)-(4.32) obtenemos que

$$\rho(r) = (1-\eta) \frac{b(r)}{\kappa^2 r^3}, \quad (4.84)$$

$$\tau(r) = \frac{\rho}{(1-\eta)} = \frac{b(r)}{\kappa^2 r^3}, \quad (4.85)$$

$$P(r) = \frac{\eta\rho}{2(1-\eta)} = \frac{\eta b(r)}{2\kappa^2 r^3}. \quad (4.86)$$

Bajo estas condiciones, la función de exotividad es constante

$$\xi(r) = \frac{\eta}{1-\eta}. \quad (4.87)$$

Es fácil notar que este "interior" satisface todas las propiedades de un agujero de gusano: Existe una garganta para $b = b_0$ (ecuación (4.38) y notar que $r/b|_{r=b=b_0} = 1$); no hay singularidades (por Φ ser constante en todo punto); y el diagrama de embebimiento se ensancha hacia afuera para $\eta > 0$ (figura 4.4).

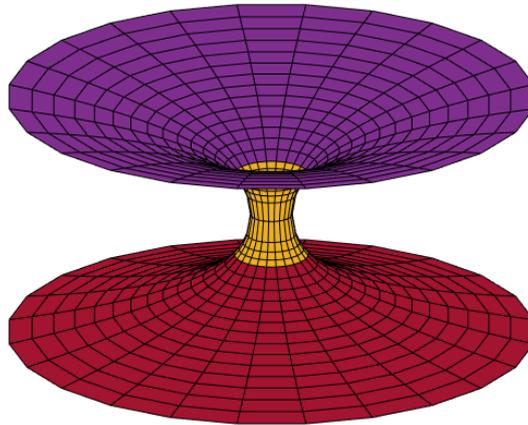


Figura 4.4: Diagrama de embebimiento para la solución sin fuerzas de marea. Se ha escogido $\eta = 1/2$, $b_0 = 4.5$ y $R_s = 6$. Podemos apreciar el ensanchamiento hacia afuera tanto en la parte con $l > 0$ (morada) como en $l < 0$ (roja). En amarillo se observa la parte de la garganta del agujero de gusano en donde la densidad de energía es negativa.

Por simplicidad y para poner un ejemplo específico, en lo que sigue se asume que $\eta = 1/2$.

Capa de transición

Recordando la discusión sobre las condiciones de frontera (subsección 4.3.3), las ecuaciones de Einstein implican que $\tau \rightarrow 0$ de forma continua cuando $r \rightarrow R_s$, aunque permiten la discontinuidad en ρ y P . Con el fin de llevar τ a 0 cerca de la superficie de radio R_s , debemos unir la solución del interior a una capa de transición en R_s , que, a su vez, unimos a un vacío externo en $R_s + \Delta R$. Una elección simple para esta capa de transición es

$$\rho(r) = \frac{\tau(R_s)}{c^2} \frac{R_s}{\Delta R}, \quad (4.88)$$

$$\tau(r) = \tau(R_s) - \frac{\tau(R_s)}{\Delta R}(r - R_s), \quad (4.89)$$

para $R_s < r < R_s + \Delta R$. Bajo estas consideraciones, las ecuaciones de Einstein (4.27), (4.28) y (4.32) nos aseguran que

$$b(r) = \frac{\kappa^2}{3}(r^3 - R_s^3) \frac{R_s \tau(R_s)}{\Delta R} + b(R_s) \quad (4.90)$$

$$\Phi'(r) = \frac{b - \kappa^2 r^3 \tau}{2r(r - b)} \quad (4.91)$$

$$P(r) = -\tau(r) + \frac{r}{2} [\Phi'(\rho(r)c^2 - \tau) - \tau']. \quad (4.92)$$

Por simplicidad, es recomendable elegir el espesor de la capa de transición como $\Delta R = b(R_s)$, y asumir que se encuentra lejos de la garganta, $R_s \gg b_0$, de forma que $\Delta R = b(R_s) \ll R_s$. De esta forma las ecuaciones (4.90)-(4.92) implican que, a parte de errores del orden $\Delta R/R_s \ll 1$, b , Φ' , y τ cambian de forma lineal a través de la capa, mientras que P y ρ son constantes:

$$b(r) = b(R_s) + \frac{(r - R_s)}{\Delta R} b(R_s), \text{ de forma que } B = b(r + \Delta R) = 2b(R_s) \quad (4.93)$$

$$\Phi'(r) = \frac{r - R_s}{\Delta R} \frac{B}{2R_s^2}, \text{ de forma que } \Phi'(R_s + \Delta R) = \frac{B}{2R_s^2}, \quad (4.94)$$

$$\tau(r) = \tau(R_s) - \frac{(r - R_s)}{\Delta R} \tau(R_s), \text{ de forma que } \tau(R_s + \Delta R) = 0, \quad (4.95)$$

$$P(r) = \frac{R_s}{2\Delta R} \tau(R_s), \quad (4.96)$$

$$\rho(r) = \frac{R_s}{\Delta R} \tau(R_s). \quad (4.97)$$

Las ecuaciones (4.93) y (4.94) nos permiten juntar la solución en $r = R_s + \Delta R$ a una solución de Schwarzschild (ecuaciones (4.33) y (4.34)). Las ecuaciones (4.95), (4.96) y (4.97) muestran que las ecuaciones de estado del material de la capa son $P = \rho/2$, y " ρ independiente de τ ". En el apéndice A se puede ver una pequeña discusión sobre la ecuación de estado y el significado de la relación entre la densidad de energía y la presión. La elección de ρ en la capa (ecuación (4.88)) se basa en la exigencia de que el material sea no-exótico.

Restricciones en la aceleración sufrida por el viajero

Por otro lado, debemos localizar las estaciones espaciales en el borde de la región de Schwarzschild ($r_1 = r_2 = R_s + \Delta R$), y requerir que el viajero sea capaz de frenar en ellas sin ser aplastado gravitacionalmente. La restricción en la aceleración del viajero (4.62) resulta ser mas restrictiva que la de las fuerzas de marea (4.68) y (4.69), de forma que

$$|\Phi'(R_s + \Delta R)| = \frac{B}{2R_s^2} \leq (9.2 \times 10^{15} \text{ m})^{-1}. \quad (4.98)$$

Aquí hemos usado que $B/2 = \Delta R \ll R_s$ y la ecuación (4.94). En virtud de la forma de Φ (ecuación(4.83) con $\eta = 1/2$), esto corresponde con

$$R_s > 1 \times 10^{11} \text{ m}(b_0/10 \text{ m})^{1/3} \simeq 0.6 \text{ u.a.}(b_0/10 \text{ m})^{1/3}, \quad (4.99)$$

i.e, debemos hacer la superficie del agujero de gusano de radio R_s extremadamente grande con el fin de mantener pequeña la aceleración de la gravedad en las estaciones espaciales. Este radio R_s implica, mediante las ecuaciones (4.82) y (4.93), que

$$B = b(R_s + \Delta R) = 2b(R_s) \simeq 1.9 \times 10^6 \text{ m}(b_0/10 \text{ m})^{2/3}. \quad (4.100)$$

Cuando la solución de Schwarzschild exterior (ecuaciones (4.33) y (4.34) para $r > R_s + \Delta R$) se iguala a la de la capa (ecuaciones (4.93)-(4.97)), encontramos, a parte de correcciones del orden $\Delta R/R_s \ll 1$, que Φ en el interior del agujero de gusano tiene un valor de

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{B}{R_s} \right) \simeq \frac{B}{2R_s}. \quad (4.101)$$

Esto implica que $e^{2\Phi_0} = (1 - B/R_s)$ se aleja de la unidad únicamente por una cantidad muy pequeña de forma que el tiempo propio medido por un observador estático es prácticamente similar al tiempo coordenado t a lo largo del agujero de gusano. Por tanto, el análisis del viaje a través del agujero de gusano dado en 4.3.5 se puede aplicar en este caso; y, en particular, un viaje plausible requiere que $v \lesssim (60 \text{ m/s})(b_0/10 \text{ m})$ en la garganta (véase [5]).

Velocidad del viajero

Debido a que necesitamos que las estaciones estén muy alejadas de la garganta del agujero de gusano, y pedimos que el viaje tenga una duración razonable, debemos exigir que el viajero tenga una velocidad variable. Esta velocidad siempre estará limitada por las fuerzas de marea (4.69),

que para nuestro caso se reduce a

$$v \leq \left(\frac{2r}{10^8 \text{ m}} \right) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{1/4}, \quad \text{i.e.,} \quad v \lesssim (60 \text{ m/s}) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{5/4} \left(\frac{b_0}{10 \text{ m}} \right). \quad (4.102)$$

La velocidad también se ve restringida por la demanda de que no sufra una aceleración demasiado grande (ecuación (4.62) con $\gamma \simeq 1$, Φ constante, y $v \simeq dl/dt$):

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2l}{dt^2} \right| \lesssim g_{\oplus}. \quad (4.103)$$

Por especificar, si pedimos al viajero que acelere alejándose de la primera estación (parte de abajo de la figura 4.4) con $d^2l/dt^2 = +g_{\oplus}$ hasta que se encuentre a medio camino de la garganta, después decelere con $d^2l/dt^2 = -g_{\oplus}$ hasta quedar en reposo en la garganta, tras esto acelere de nuevo alejándose de la garganta con $d^2l/dt^2 = +g_{\oplus}$ hasta que este a mitad de camino de la segunda estación, y finalmente decelere con $d^2l/dt^2 = -g_{\oplus}$ hasta estar en reposo en la estación superior. Con este plan de viaje su velocidad máxima sería (véase [5])

$$v_{max} = \left(\frac{1}{2} g_{\oplus} R_s \right)^{1/2} = 7 \times 10^5 \text{ m/s} (R_s / 10^{11} \text{ m})^{1/2}, \quad (4.104)$$

que da $\gamma \simeq 1$ siempre y cuando

$$R_s \ll 10^{16} \text{ m}. \quad (4.105)$$

Este perfil de velocidad, $v(r)$ asociado con el plan de viaje propuesto satisface la condición de marea (4.102) para todo radio; y nos da un tiempo total de viaje entre estaciones de

$$\Delta\tau_T = \Delta t = \left(\frac{32R_s}{g_{\oplus}} \right)^{1/2} \simeq (7 \text{ días}) \left(\frac{R_s}{10^{11} \text{ m}} \right)^{1/2}. \quad (4.106)$$

Por tanto, vemos que este sería un agujero de gusano muy apropiado a un viaje interestelar.

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo nos ha proporcionado una visión general de la teoría de la relatividad general, así como un estudio sobre dos áreas de la teoría: los agujeros negros y los agujeros de gusano.

En la primera parte, en el capítulo 2 hemos presentado el marco teórico en el que se basa la teoría, introduciendo todos los conceptos necesarios para desarrollar el estudio de los agujeros negros y de gusano. Hemos expuesto el marco necesario desde el punto de vista geométrico, e introducido unas nociones básicas sobre teoría clásica de campos.

En la segunda parte, se ha realizado un estudio sobre dos tipos de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein basándonos en el marco teórico expuesto anteriormente. En concreto, en el caso de los agujeros negros, en el capítulo 3 hemos comenzado presentando la métrica general estática e isotrópica, para continuar con dos ejemplos específicos: la solución de Schwarzschild y la solución de Reissner-Nordström. Hemos podido observar cómo ambas soluciones poseen singularidades en la métrica, y el por qué las denominamos agujeros negros. Además, en el caso de la solución de Schwarzschild, se ha profundizado un poco más acerca de sus orbitas haciendo uso de la simetría de la solución, los vectores de Killing y sus cantidades asociadas conservadas.

En el caso de los agujeros de gusano, hemos explorado la posibilidad de la existencia de "puentes" que conecten distintas regiones del universo o distintos universos. Partiendo del trabajo realizado con los agujeros negros, en el capítulo 4 estudiamos tanto la posible existencia teórica de estos objetos, como la existencia real, preguntándonos por su posible atravesabilidad. Hemos comenzado introduciendo una solución sencilla, que permite anticipar la naturaleza exótica de los agujeros de gusano. A continuación, hemos realizado un análisis de unos de los primeros trabajos sobre estos objetos, el de Einstein y Rosen, donde estudian los agujeros de gusano a partir de las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Y por último, sobre la cuestión de la atravesabilidad de un agujero de gusano, nos hemos basado en el trabajo de Morris y Thorne para responder a la pregunta. En él se presenta una familia de métricas que pueden dar lugar a agujeros de gusano atravesables; hemos desarrollado las condiciones que tendrían que tener para un posible viaje a

través de ellos por un ser humano, a partir de las restricciones en la aceleración y las fuerzas de marea sufridas durante el viaje. De esta manera, hemos notado que sería necesaria una densidad de energía negativa en la garganta del agujero de gusano para poder ser atravesado, la cual sería generada por la que hemos llamado materia exótica. Este hecho parece indicar que son objetos más teóricos que reales. En un intento de evadir esta situación de materia exótica, se puede limitar el uso de la misma a una región finita del espacio. Para finalizar, hemos propuesto un ejemplo concreto de métrica que da lugar a un agujero de gusano atravesable.

Apéndice A

Ecuación de estado para un gas ideal clásico

En el capítulo 4, a la hora de estudiar un agujero negro atravesable, hemos encontrado una ecuación de estado de la forma $P = \rho/2$. Este tipo de relación entre la densidad de energía y la presión está relacionada con el tipo de Hamiltoniano asociado al problema. Consideremos un Hamiltoniano de la siguiente forma

$$H = \lambda \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^\alpha, \quad (\text{A.1})$$

asociado a un gas ideal clásico tridimensional compuesto por $N \gg 1$ partículas. En este caso \vec{p}_i es el momento lineal de la partícula i -ésima, y $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ son dos constantes específicas del gas.

A partir de la mecánica estadística es fácil ver que la función de partición del sistema es

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V}{h_0^3} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) (\beta\lambda)^{-3/\alpha} \right]^N, \quad (\text{A.2})$$

donde $\beta = K_b T$, la constante de Boltzmann por la temperatura, y $\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)$ es la función gamma evaluada en $3/\alpha$. De esta forma, la función de estado del sistema es

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = K_B T \frac{N}{V}. \quad (\text{A.3})$$

Así mismo, como

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{-1}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{\alpha} N K_B T, \quad (\text{A.4})$$

se cumple que

$$P = \frac{\alpha}{3} \rho \quad (\text{A.5})$$

es la relación entre la densidad de energía y la presión (para el gas ideal). Analizando el significado del factor $\alpha/3$, notamos que

- $\alpha/3 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \iff$ no hay dinámica
- $\alpha/3 = 1/3 \Rightarrow \alpha = 1 \iff H \propto |\vec{p}| \iff$ sistema ultrarelativista
- $\alpha/3 = 2/3 \Rightarrow \alpha = 2 \iff H \propto |\vec{p}|^2 \iff$ sistema no relativista

Para el caso de la ecuación de estado del agujero de gusano atravesable, $P = \rho/2$, tendríamos $\alpha = 3/2$. Este valor cae en medio del caso ultrarelativista y no relativista.

Bibliografía

- [1] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.
- [3] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] Carlos Marin. Agujeros de gusano: solución exponencial. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 2, 06 2010.
- [5] Michael S. Morris and Kip S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 56(5):395–412, 1988.
- [6] Kip S Thorne, John Archibald Wheeler, and Charles W Misner. *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 1973.