Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Trabajo Fin de Grado

Junio 2023

Teoría Básica de Álgebra Multilineal

Autor: Gorka Prieto Varela
Tutor: Diego Aranda Orna
Grado: Matemáticas

Índice

1. Introducción

Lo que se pretende en este trabajo es realizar un desarrollo de la teoría básica del álgebra multilineal, basado en varios libros y fuentes. En ningún caso se trata de una aportación original, sino de una recopilación bibliográfica. La estructura del trabajo se ha desarrollado tomando como base los libros Bourbaki [1], Greub [3], Northcott [5] y Rotman [6]. Aunque en algún capítulo se haya indicado que el capítulo está basado en alguno de los libros, esto se refiere a la estructura general ya que se han intercalado resultados de más de uno de estos libros en cada capítulo.

El objetivo de este trabajo es el de construir formalmente los objetos matemáticos llamados tensores, muy utilizados en física e ingeniería, pero tan vagamente definidos en estas áreas. De forma que después de haber estudiado sus propiedades de la forma más general, se traducirán al lenguaje en el que se expresan en estas otras áreas y se verá cómo las propiedades con los que se caracterizan los tensores en estas áreas emergen de las obtenidas en la teoría general.

Cabe destacar que muchas de las demostraciones realizadas a lo largo del trabajo han sido adaptadas, reescritas o incluso desarrolladas por cuenta propia ya que los desarrollos llevados a cabo a lo largo del trabajo se conocen en la comunidad matemática, sin embargo, algunos de ellos son difíciles de encontrar en la bibliografía.

A lo largo de todo el trabajo se van a considerar solamente espacios vectoriales de dimensión finita sobre cuerpos de característica distinta de 2.

2. Producto Tensorial

2.1. Definición

Basándonos en el desarrollo realizado por Northcott [5], se va a definir el producto tensorial. Antes de empezar con la construcción propiamente dicha del producto tensorial, son necesarias algunas definiciones previas.

Definición 2.1 (Aplicación lineal)**.** Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una aplicación $f\colon V \longrightarrow W$ se dice lineal si para todo $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1)$$

Definición 2.2 (Aplicación multilineal)**.** Sean $V_1, \ldots, V_n$ y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una aplicación $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ se dice multilineal si para todo $v_i, v_i' \in V_i$ con $i = 1, \ldots, n$

y $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$f(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$
$$f(v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n) = \alpha \cdot f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

La propiedad universal del producto tensorial extendida al caso general de n espacios vectoriales también va a ser necesaria.

Definición 2.3 (Propiedad Universal del Producto Tensorial)**.** Sean $V_1, \ldots, V_n$ y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se dice que una aplicación multilineal $\otimes\colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ satisface la propiedad universal si para toda aplicación multilineal $h\colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow H$ existe una única aplicación lineal $\bar{h}\colon W \longrightarrow H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "h"'] & W \arrow[d, "\bar{h}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

es decir, $h = \bar{h} \circ \otimes$.

Definición 2.4 (Espacio Vectorial Libre)**.** Sean S un conjunto y un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define el espacio vectorial libre L sobre S de la siguiente manera

$$L = \left\{ f : S \longrightarrow \mathbb{F} \middle| f(x) \neq 0 \text{ para un número finito de } x \in S \right\}$$

Identificando todo $x \in S$ con la aplicación $x\colon S \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $x \mapsto 1$ y $y \mapsto 0$ para todo $y \neq x$, se tiene que S es base de L.

Se procede entonces a definir el producto tensorial de n espacios vectoriales.

Definición 2.5 (Producto Tensorial n-ario)**.** Dados $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, diremos que la pareja $(W, \otimes)$ es un producto tensorial si W es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y $\otimes\colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ es una aplicación multilineal que satisface la Propiedad Universal.

Esta definición no es constructiva. Se va a probar la existencia y unicidad del espacio definido. Aunque previamente se demostrará un lema necesario para ello.

Lema 2.6. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $f\colon V \longrightarrow W$ un homomorfismo de espacios vectoriales y $K \leq V$ tal que $K \leq \ker(f)$. Entonces, f induce un homomorfismo $\bar{f}\colon V/K \longrightarrow W$ de forma que $v + K \longmapsto \bar{f}(v + K) = f(v)$.

Demostración. Se define para todo $v + K \in V/K$, $\bar{f}(v + K) \coloneqq f(v)$. Veamos que $\bar{f}$ está bien definida. Si $v + K = u + K$ entonces $v - u \in K$. Como $K \subseteq \ker(f)$, $f(v - u) = 0$ y por lo tanto $\bar{f}(v + K) = f(v) = f(u) = \bar{f}(u + K)$. Como se ha demostrado que la imagen por $\bar{f}$ no depende del representante escogido, está bien definida. El carácter de homomorfismo lo hereda de f, ya que $\bar{f}$ actúa igual que f sobre todos los elementos. $\square$

Teorema 2.7 (Existencia y unicidad del espacio producto tensorial n-ario)**.** Dados n $\mathbb{F}$-espacios vectoriales $V_1, \ldots, V_n$ siempre existe su producto tensorial $(W, \otimes)$. Además, el espacio W es único salvo ismorfismo.

Demostración. Se considera el subespacio vectorial R de L el espacio vectorial libre sobre $V_1 \times \ldots \times V_n$ definido por:

$$R = \mathbb{F}\left\langle \left\{ \begin{matrix} (v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_n) - (v_1, ..., v_i, ..., v_n) - (v_1, ..., v_i', ..., v_n) \\ (v_1, ..., \alpha \cdot v_i, ..., v_n) - \alpha \cdot (v_1, ..., v_i, ..., v_n) \end{matrix} \middle| v_i, v_i' \in V_i \;\; i = 1, ..., n, \; \alpha \in \mathbb{F} \right\} \right\rangle$$

Considerando el espacio cociente L/R y la proyección canónica $\pi \colon L \longrightarrow L/R$ tal que para todo $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i}) \in L$, $\pi(v) \coloneqq \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i}) + R$. Es fácil comprobar que $(L/R, \pi)$ es un producto tensorial de $V_1, \ldots, V_n$. Veamos primero que π satisface la propiedad universal.

- Multilinealidad:

$$\begin{aligned} \pi(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) &= (v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) + R \\ &= (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + (v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n) + R \\ &= \pi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \pi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n), \end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned} \pi(v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n) &= (v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n) + R \\ &= \alpha \cdot (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + R \\ &= \alpha \cdot \pi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

- Sea H un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $h \colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow H$ una aplicación multilineal, veamos que existe una única aplicación lineal $\bar{h} \colon L/R \longrightarrow H$ de forma que $h = \bar{h} \circ \pi$. Nótese primero que la aplicación h se puede extender a todo L por linealidad ya que está definida para todo $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ y $V_1 \times \ldots \times V_n$ es una base de L. Llamando g a esta extensión, veamos que $R \leq \ker(g)$

$$\begin{aligned} &g((v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_n) - (v_1, ..., v_i, ..., v_n) - (v_1, ..., v_i', ..., v_n)) \\ &= g(v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_n) - g(v_1, ..., v_i, ..., v_n) - g(v_1, ..., v_i', ..., v_n) = 0 \end{aligned}$$

  y

$$g((v_1, ..., \alpha \cdot v_i, ..., v_n) - \alpha \cdot (v_1, ..., v_i, ..., v_n)) = g(v_1, ..., \alpha \cdot v_i, ..., v_n) - \alpha \cdot g(v_1, ..., v_i, ..., v_n) = 0$$

Por el lema 2.6, la aplicación $\bar{h}$ definida a continuación es una aplicación lineal tal que $h = \bar{h} \circ \pi$. Teniendo en cuenta que los elementos u de L/R son de la forma

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_{1,i}, \dots, v_{n,i}) + R,$$

con $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $v_{j,i} \in V_j$ para $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$ siendo m un natural, $\bar{h}$ queda definida por

$$\begin{aligned} \bar{h} \colon L/R &\longrightarrow H \\ u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_{1,i}, \dots, v_{n,i}) + R &\longmapsto \bar{h}(u) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(v_{1,i}, ..., v_{n,i}). \end{aligned}$$

Si existiera otra aplicación lineal h' tal que $h = h' \circ \pi$, tendríamos $\bar{h} \circ \pi = h = h' \circ \pi$ por lo tanto $(\bar{h} - h') \circ \pi = 0$ y como $\operatorname{Im} \pi = L/R$ se cumpliría $\bar{h} - h' = 0$, es decir, $\bar{h} = h'$. Por lo tanto queda demostrada la unicidad de la aplicación $\bar{h}$.

Queda así probado que $(L/R, \pi)$ es un producto tensorial de $V_1, \dots, V_n$. Veamos que de hecho el producto tensorial de $V_1, \dots, V_n$ está determinado unívocamente salvo isomorfismo. Suponinedo que existen dos productos tensoriales de $V_1, \dots, V_n$: $(W_1, \otimes_1)$ y $(W_2, \otimes_2)$. Como $\otimes_1$ satisface la propiedad universal existe una única aplicación lineal $f_1 \colon W_1 \longrightarrow W_2$ tal que $\otimes_2 = f_1 \circ \otimes_1$. Análogamente, existe una única aplicación lineal $f_2 \colon W_2 \longrightarrow W_1$ tal que $\otimes_1 = f_2 \circ \otimes_2$. Por lo tanto:

$$\otimes_2 = f_1 \circ \otimes_1 = f_1 \circ f_2 \circ \otimes_2 \text{ por lo tanto } Id_{W_2} = f_1 \circ f_2, \text{ y así } f_1 = f_2^{-1}.$$

Concluyendo entonces que $W_1 \cong W_2$, queda demostrado que el producto tensorial de $V_1 \dots V_n$ es único salvo isomorfismo. □

Notación 2.8. Usualmente el espacio L/R se denota por $V_1 \otimes_{\mathbb{F}} \dots \otimes_{\mathbb{F}} V_n$ y cuando no haya ambigüedad sobre el cuerpo sobre el que se define el producto tensorial se suele denotar por $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ y también por $\bigotimes_{i=1}^{n} V_i$. Análogamente, $\pi(v_1, \dots, v_n)$ se suele denotar por $v_1 \otimes_{\mathbb{F}} \dots \otimes_{\mathbb{F}} v_n$ y cuando no hay ambigüedad respecto del cuerpo por $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$. En general, los elementos v de $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ reciben el nombre de tensores y son de la forma $v = \sum_{i=1}^{m} v_{1,i} \otimes \dots \otimes v_{n,i}$ con m un natural. Los elementos de la forma $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ reciben el nombre de tensores puros y también es usual denotarlos por $\otimes_{i=1}^{n} v_i$.

Corolario 2.9 (Correspondencia)**.** Sean $V_1, \dots, V_n$ y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ y $h \colon V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ una aplicación multilineal, existe una única aplicación lineal $\bar{h} \colon V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow W$ tal que $\bar{h}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = h(v_1, \dots, v_n)$ para todo $v_j \in V_j$ con $j = 1, \dots, n$. En consecuencia, tenemos una biyección entre las aplicaciones multilineales definidas en $V_1 \times \dots \times V_n$ y las aplicaciones lineales definidas en $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$

Proposición 2.10. Sean $V_1, \dots, V_n$ y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $f \colon V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow$

W una aplicación multilineal y $K_i \leq V_i$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que

$$K_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n + \ldots + V_1 \times \ldots \times K_i \times \ldots \times V_n + \ldots + V_1 \times \ldots \times K_n \subseteq \ker f.$$

Entonces f induce una aplicación multilineal $\bar{f}\colon V_1/K_1 \times \ldots \times V_n/K_n$ tal que $(v_1 + K_1, \ldots, v_n + K_n) \longmapsto \bar{f}(v_1 + K_1, \ldots, v_n + K_n) = f(v_1, \ldots, v_n)$.

Demostración. Basta ver que esta aplicación está bien definida. Sean $u = (u_1 + K_1, \ldots, u_n + K_n)$ y $v = (v_1 + K_1, \ldots, v_n + K_n)$ tales que $u = v$. Se cumple entonces que $u_i - v_i \in K_i$. Como $V_1 \times \ldots \times K_i \times \ldots \times V_n \subseteq \ker f$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $\bar{f}(u) - \bar{f}(v) = f(u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n) = 0$ y por lo tanto $\bar{f}(u) = \bar{f}(v)$. Queda demostrado que la aplicación $\bar{f}$ está bien definida ya que la imagen no depende del representante escogido de la clase de equivalencia. $\square$

2.2. Producto Tensorial de Homomorfismos

La estructura del producto tensorial induce de forma natural homomorfismos sobre los espacios producto a partir de homomorfismos de los espacios iniciales. Veamos cómo se construyen.

Proposición 2.11 (Producto Tensorial de Homomorfismos)**.** Sean $V_1, \ldots, V_n$ y $W_1, \ldots, W_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f_i \in \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces existe $\bar{f} \in \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, W_1 \otimes \ldots \otimes W_n)$ dado por

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n &\longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_n \\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_n &\longmapsto f_1(v_1) \otimes \ldots \otimes f_n(v_n) \end{aligned}$$

Demostración. Se define la aplicación $f \coloneqq \otimes \circ (f_1 \times \ldots \times f_n)$

$$\begin{aligned} f : V_1 \times \ldots \times V_n &\longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_n \\ (v_1, \ldots, v_n) &\longmapsto f_1(v_1) \otimes \ldots \otimes f_n(v_n) \end{aligned}$$

Es claramente multilineal, por ser todas las f_i lineales al ser homomorfismos, y queda unívocamente determinada por las f_i. Por la propiedad universal, existe una única aplicación lineal $\bar{f}\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_n$ de forma que $f = \bar{f} \circ \otimes$. Es decir, $\bar{f} \in \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, W_1 \otimes \ldots \otimes W_n)$ tal que $\bar{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f_1(v_1) \otimes \ldots \otimes f_n(v_n)$ para todos los generadores $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. $\square$

Notación 2.12. El homomorfismo $\bar{f}$ construido en la proposición anterior suele denotarse por $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ o por $\otimes_{i=1}^n f_i$.

Proposición 2.13. Sean $V_1, \ldots, V_n$ y $W_1, \ldots, W_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f_i \in \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$. Se cumple entonces

$$\operatorname{Im}(\otimes_{i=1}^n f_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(f_i)$$

Demostración. Comprobemos el doble contenido.

$\subseteq$ Si $w \in \mathrm{Im}(\otimes_{i=1}^n f_i)$, existe $v = \sum_{j=1}^m \otimes_{i=1}^n v_{ij}$ de forma que

$$w = (\otimes_{i=1}^n f_i)(v) = \sum_{j=1}^m \otimes_{i=1}^n (f_i(v_{ij})) = \otimes_{i=1}^n (f_i(\sum_{j=1}^n v_{ij})), \text{ por lo tanto } w \in \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i).$$

$\supseteq$ Si $w \in \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i)$, existen $v_{ij} \in V_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y con $j = 1, \ldots, m$ de forma que

$$w = \sum_{j=1}^m \otimes_{i=1}^n (f_i(v_{ij})) = \sum_{j=1}^m (\otimes_{i=1}^n f_i)(\otimes_{i=1}^n v_{ij}) = (\otimes_{i=1}^n f_i)(\sum_{j=1}^m \otimes_{i=1}^n v_{ij}),$$

por lo tanto $w \in \mathrm{Im}(\otimes_{i=1}^n f_i)$.

□

Lema 2.14. Sean V y U dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sean $\{v_i\}_{i=1}^n$ una familia de vectores linealmente independientes de V y $\{u_i\}_{i=1}^n$ vectores arbitrarios de U. Entonces $\sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i = 0$ implica que $u_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots n$.

Demostración. Tomando las funciones lineales $g^j : V \longrightarrow \mathbb{F}$ de forma que $g^j(v_i) = \delta_i^j$ y $h^j : U \longrightarrow \mathbb{F}$ funciones lineales arbitrarias. Se considera la función bilineal φ definida por

$$\begin{aligned} \varphi \colon V \times U &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (v, u) &\longmapsto \sum_{j=1}^n g^j(v) h^j(u). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal, existe una única aplicación lineal $\bar{\varphi} \colon V \otimes U \longrightarrow \mathbb{F}$ de forma que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \otimes$. Por lo tanto,

$$0 = \bar{\varphi}(\sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}(v_i \otimes u_i) = \sum_{i,j=1}^n g^j(v_i) h^j(u_i) = \sum_{i=1}^n h^i(u_i).$$

Como las funciones h^j son arbitrarias, la ecuación anterior implica que $u_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Corolario 2.15. Sean V y U dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $v \in V$ y $u \in U$ son ambos distintos de cero, entonces $v \otimes u \neq 0$.

Nota 2.16. Dados dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales V_1 y V_2, en principio, las bases de el espacio $V_1 \otimes V_2$ son de la forma $\{\sum_{i \in I} v_{1ij} \otimes v_{2ij}\}_{j \in J}$ con $v_{kij} \in V_k$. Sin embargo, las bases se pueden tomar de la forma $\{v_{1i} \otimes v_{2i}\}$ con $v_{ji} \in V_j$ considerando como elemento de esta nueva base cada uno de los sumandos de cada uno de los elementos de la base inicial.

Proposición 2.17. Sean $V_1, \ldots, V_n$ y $W_1, \ldots, W_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f_i \in \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se cumple entonces

$$\ker(\otimes_{i=1}^n f_i) = \sum_{i=1}^{n} V_1 \otimes \ldots \otimes \ker(f_i) \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Demostración. Debido a lo farragoso de la notación y por simplicidad se va a comprobar solamente el caso $n = 2$. El caso general se digue de manera similar. Comprobemos el doble contenido para el caso $n = 2$.

$\subseteq$ Sea $\{v_{1i} \otimes v_{2i}\}_{i=1}^m$ una base de $\ker(f_1 \otimes f_2)$. Para todo $i = 1, \ldots, m$

$$0 = (f_1 \otimes f_2)(v_{1i} \otimes v_{2i}) = f_1(v_{1i}) \otimes f_2(v_{2i}).$$

Por el corolario 2.15, $f_j(v_{ji}) = 0$ para $j = 1$ o $j = 2$, y por lo tanto $v_{1i} \otimes v_{2i} \in \ker f_1 \otimes V_2$, o $v_{1i} \otimes v_{2i} \in V_1 \otimes \ker f_2$. Es decir, $v_{1i} \otimes v_{2i} \in \ker f_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \ker f_2$.

$\supseteq$ Sea v tal que $v \in \ker f_1 \otimes V_2$ o $v \in V_1 \otimes \ker f_2$. En el primer caso se tiene $v = v_1 \otimes v_2$ de forma que $f_1(v_1) = 0$. Por lo tanto

$$(f_1 \otimes f_2)(v) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) = 0 \otimes f_2(v_2) = 0.$$

Y por lo tanto $v \in \ker(f_1 \otimes f_2)$. En el segundo caso, $v = v_1 \otimes v_2$ de forma que $f_2(v_2) = 0$. Así

$$(f_1 \otimes f_2)(v) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) = f_1(v_1) \otimes 0 = 0.$$

Por lo tanto $v \in \ker(f_1 \otimes f_2)$. Queda demostrado el contenido.

□

Proposición 2.18. Sean V_1, V_2, V_3 y U_1, U_2, U_3 espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$, $\varphi'\colon V_2 \longrightarrow V_3$, $\psi\colon U_1 \longrightarrow U_2$ y $\psi'\colon U_2 \longrightarrow U_3$ homomorsfismos. Entonces,

$$(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi).$$

Demostración. Por la linealidad de las aplicaciones, basta comprobar que la imagen de los tensores puros de la forma $v \otimes u$ con $v \in V_1$ y $u \in U_1$ coincide por ambos homomorfismos.

$$[(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi)](v \otimes u) = (\varphi' \circ \varphi)(v) \otimes (\psi' \circ \psi)(u) = \varphi'(\varphi(v)) \otimes \psi'(\psi(u))$$

y

$$[(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)](v \otimes u) = (\varphi' \otimes \psi')(\varphi(v) \otimes \psi(u)) = \varphi'(\varphi(v)) \otimes \psi'(\psi(u)).$$

□

2.3. Asociatividad, Conmutatividad y Distributividad

Se va a probar en las siguientes líneas que, salvo isomorfismo, el orden en el que se realicen iterados productos tensoriales es indiferente.

Teorema 2.19 (Asociatividad)**.** Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, para todo $p < n$ se cumple

$$(V_1 \otimes \ldots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \ldots \otimes V_n) \cong V_1 \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Demostración. Por el teorema 2.7 y teniendo en cuenta que $(V_1 \times \ldots \times V_p) \times (V_{p+1} \times \ldots \times V_n) = V_1 \times \ldots \times V_n$, existe una aplicación multilineal $\otimes_1 \colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ y existe $\otimes_2 \colon V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow (V_1 \otimes \ldots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \ldots \otimes V_n)$ también multilineal, ambas satisfaciendo la propiedad universal. Por lo tanto, como $\otimes_1$ satisface la propiedad universal, existe una única aplicación lineal $f \colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \longrightarrow (V_1 \otimes \ldots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \ldots \otimes V_n)$ de forma que $\otimes_2 = f \circ \otimes_1$. Análogamente, existe una única aplicación lineal $g \colon (V_1 \otimes \ldots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \ldots \otimes V_n) \longrightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ tal que $\otimes_1 = g \circ \otimes_2$. Por lo tanto,

$$\otimes_2 = f \circ (g \circ \otimes_2) = (f \circ g) \circ \otimes_2 \text{ y por lo tanto } f = g^{-1}.$$

$\square$

Teorema 2.20 (Conmutatividad)**.** Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces,

$$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1.$$

Demostración. Tomamos la aplicación $h \colon V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \times V_1$ de forma que $(v_1, v_2) \longmapsto h(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. Claramente su inversa viene dada por $h^{-1} \colon V_2 \times V_1 \longrightarrow V_1 \times V_2$ con $(v_2, v_1) \longmapsto h^{-1}(v_2, v_1) = (v_1, v_2)$. Por el teorema 2.7, existen $\otimes_1 \colon V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$ y $\otimes_2 \colon V_2 \times V_1 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$ ambas satisfaciendo la propiedad universal. Las aplicaciones

$$\begin{aligned} \otimes_2 \circ h \colon V_1 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \otimes V_1 \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_2 \otimes v_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \otimes_1 \circ h^{-1} \colon V_2 \times V_1 &\longrightarrow V_1 \otimes V_2 \\ (v_2, v_1) &\longmapsto v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

son ambas bilineales. Por la propiedad universal existen aplicaciones lineales f y g tales que $\otimes_2 \circ h = f \circ \otimes_1$ y $\otimes_1 \circ h^{-1} = g \circ \otimes_2$ de forma que

$$\otimes_2 = \otimes_2 \circ h \circ h^{-1} = f \circ \otimes_1 \circ h^{-1} = f \circ g \circ \otimes_2, \text{ lo que implica } f = g^{-1}.$$

Por lo tanto $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$. $\square$

Los siguientes diagramas conmutativos ilustran la estructura construida en la prueba anterior.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "h"] & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \times V_1 \arrow[r, "\otimes_2"] & V_2 \otimes V_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_2 \times V_1 \arrow[r, "\otimes_2"] \arrow[d, "h^{-1}"] & V_2 \otimes V_1 \arrow[d, "g"] \\ V_1 \times V_2 \arrow[r, "\otimes_1"] & V_1 \otimes V_2 \end{tikzcd}$$

Teorema 2.21 (Distributividad Respecto de la Suma Directa)**.** Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tales que se pueden descomponer en sumas directas $V_i = \bigoplus_{j \in J_i} V_{ij}$. Entonces $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ se puede descomponer en sumas directas

$$\bigotimes_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} (\bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}).$$

Demostración. El espacio $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ está generado por los elementos de la forma $\otimes_{i=1}^n v_i$ con $v_i \in V_i$. Por la descomposición en sumas directas de los V_i se tiene que $v_i = \sum_{j_i \in J_i} v_{ij_i}$ con $v_{ij_i} \in V_{ij_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto

$$\otimes_{i=1}^n v_i = \otimes_{i=1}^n (\sum_{j_i \in J_i} v_{ij_i}) = \sum_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} \otimes_{i=1}^n v_{ij_i}.$$

Esto implica que $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ es de hecho suma de los factores $\bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}$. Falta comprobar que se trata de una suma directa. Considerando el homomorfismo $g\colon \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1 \ldots j_n \in J_n} (\otimes_{i=1}^n V_{ij_i})$ tal que $g(v_{1j_1} \otimes \ldots \otimes v_{nj_n}) = v_{1j_1} \otimes \ldots \otimes v_{nj_n}$ y el homomorfismo $h\colon \bigoplus_{j_1 \in J_1 \ldots j_n \in J_n} (\otimes_{i=1}^n V_{ij_i}) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ definido para cada $(j_1, \ldots, j_n)$ por los homomorfismos $h_{j_1 \ldots j_n}\colon \otimes_{i=1}^n V_{ij_i} \longrightarrow \otimes_{i=1}^n V_i$ de forma que $h_{j_1 \ldots j_n} = \otimes_{i=1}^n i_{j_i}$, donde $i_{j_i}\colon V_{ij_i} \longrightarrow V_i$ son las inclusiones canónicas. Claramente, $h \circ g = Id$ ya que se cumple para los elementos de la forma $\otimes_{i=1}^n (\sum_{j_i \in J_i} v_{ij_i})$ y estos elementos generan $\bigotimes_{i=1}^n V_i$. Similarmente, $g \circ h = Id$ ya que los elementos de la forma $\sum_{j_1 \in J_1 \ldots j_n \in J_n} (\otimes_{i=1}^n v_{ij_i})$ satisfacen esta relación y generan $\bigoplus_{j_1 \in J_1 \ldots j_n \in J_n} (\bigotimes_{i=1}^n V_i)$. Por lo tanto, g y h son isomorfismos, inversos el uno del otro, y se tiene que la descomposición de $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ como suma de factores de la forma $\bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}$ es de hecho una suma directa. □

2.4. Dimensión y Base

El objetivo de este apartado es demostrar que la dimensión de un producto tensorial es el producto de las dimensiones de los espacios vectoriales base y obtener una base del espacio producto tensorial.

Proposición 2.22. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sean $v_i \in V_i$ distintos de cero para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\otimes_{i=1}^n v_1 \neq 0$.

Demostración. Se va a demostrar por inducción. El caso $n = 2$ se trata del colorario 2.15. Asumiendo que es cierto para cierto $n > 2$, probemos que se cumple para $n + 1$. Para todo $v_i \in V_i$

distintos de cero, $\otimes_{i=1}^n v_i \neq 0$, se tiene entonces, por el corolario 2.15, $(\otimes_{i=1}^n v_i) \otimes v_{n+1} = \otimes_{i=1}^{n+1} v_i \neq 0$ para todo $v_{n+1} \in V_{n+1}$ distinto de cero. $\square$

Teorema 2.23 (Base del Espacio Producto Tensorial)**.** Sean $V_1, \dots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con bases $\{e_{ij_i}\}_{j_i \in J_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $\{\otimes_{i=1}^n e_{ij_i} | j_i \in J_i$ para todo $i = 1, \dots, n\}$ es una base de $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

Demostración. Claramente $V_i = \bigoplus_{j_i \in J_i} V_{ij_i}$ con $V_{ij_i} = \mathbb{F}\langle e_{ij_i} \rangle$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por el teorema 2.21 se tiene que

$$\bigotimes_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n} \bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}.$$

Sea $\otimes_{i=1}^n v_i \in \bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}$, entonces $v_i = \alpha_i e_{ij_i}$ con $\alpha_i \in \mathbb{F}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y por lo tanto $\otimes_{i=1}^n v_i = (\prod_{i=1}^n \alpha_i) \otimes_{i=1}^n e_{ij_i}$. Es decir, el espacio $\bigotimes_{i=1}^n V_{ij_i}$ está generado sobre $\mathbb{F}$ por $\otimes_{i=1}^n e_{ij_i}$. Además, por la proposición 2.22, $\otimes_{i=1}^n e_{ij_i} \neq 0$. Juntando todo esto

$$\bigotimes_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n} \mathbb{F}\left\langle \{\otimes_{i=1}^n e_{ij_i}\} \right\rangle.$$

Y queda demostrado que $\{\otimes_{i=1}^n e_{ij_i} | j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n\}$ es una base de $\bigotimes_{i=1}^n V_i$. $\square$

Corolario 2.24 (Dimensión del Espacio Producto Tensorial)**.** Sean $V_1, \dots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensiones $dim_{\mathbb{F}}(V_i) = m_i$. Entonces $dim_{\mathbb{F}}(\bigotimes_{i=1}^n V_i) = \prod_{i=1}^n m_i$.

Demostración. Sean $\{e_{ij_i}\}_{j_i \in J_i}$ bases de V_i, con $J_i = \{1, \dots, m_i\}$. Por el teorema anterior $\{\otimes_{i=1}^n e_{ij_i} | j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n\}$ es una base de $\bigotimes_{i=1}^n V_i$. Por lo tanto $dim_{\mathbb{F}}(\bigotimes_{i=1}^n V_i) = |\{\otimes_{i=1}^n e_{ij_i} | j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n\}| = \prod_{i=1}^n |J_i| = \prod_{i=1}^n m_i$. $\square$

Lema 2.25. Sean V y U dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $V_1, V_2 \leq V$ dos subespacios. Entonces,

$$(V_1 \otimes U) \cap (V_2 \otimes U) = (V_1 \cap V_2) \otimes U.$$

Demostración. Fijando primero $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U, se va a comprobar el doble contenido.

- $\subseteq$ Sea $v \in (V_1 \otimes U) \cap (V_2 \otimes U)$, entonces se puede expresar como $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i = \sum_{i=1}^n w_i \otimes u_i$ con $v_i \in V_1$ y $w_i \in V_2$. Así,

  $$0 = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i - \sum_{i=1}^n w_i \otimes u_i = \sum_{i=1}^n (v_i - w_i) \otimes u_i. \tag{2.1}$$

  Por el lema 2.14, se tiene que $v_i - w_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y, por lo tanto, $v_i = w_i$. Así, $v \in (V_1 \cap V_2) \otimes U$.

- $\supseteq$ Dado $v \in (V_1 \cap V_2) \otimes U$, se puede expresar como $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i$ con $v_i \in V_1 \cap V_2$. Por lo tanto, se tiene claramente que $v \in (V_1 \otimes U) \cap (V_2 \otimes U)$.

□

Lema 2.26. Sean V y U dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $V_1 \leq V$ y $U_1 \leq U$. Entonces,

$$(V_1 \otimes U) \cap (V \otimes U_1) = V_1 \cap U_1.$$

Demostración. Tomando $\tilde{U} \leq U$ de forma que $U = \tilde{U} \oplus U_1$, se tiene, por el lema 2.21,

$$V_1 \otimes U = (V_1 \otimes U_1) \oplus (V_1 \otimes \tilde{U}).$$

Entonces,

$$(V_1 \otimes U) \cap (V \otimes U_1) = (V_1 \otimes U_1) \oplus \ [(V_1 \otimes \tilde{U}) \cap (V \otimes U_1)].$$

Por el lema anterior se tiene que $(V \otimes U_1) \cap (V \otimes \tilde{U}) = V \otimes (U_1 \cap \tilde{U}) = \{0\}$ y como $V_1 \otimes \tilde{U} \subseteq V \otimes \tilde{U}$ se tiene que $(V \otimes U_1) \cap (V_1 \otimes \tilde{U}) = \{0\}$ y, por lo tanto,

$$(V_1 \otimes U) \cap (V \otimes U_1) = (V_1 \otimes U_1) \oplus \{0\} = V_1 \otimes U_1$$

□

Proposición 2.27 (Intersección de Productos Tensoriales)**.** Sean V y U espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $V_1, V_2 \leq V$ y $U_1, U_2 \leq U$. Entonces, $(V_1 \otimes U_1) \cap (V_2 \otimes U_2) = (V_1 \cap V_2) \otimes (U_1 \cap U_2)$.

Demostración. Veamos que se da el doble contenido entre los dos conjuntos.

$\subseteq$ Como $V_i \subseteq V$, se cumple que

$$(V_1 \otimes U_1) \cap (V_2 \otimes U_2) \subseteq (V \otimes U_1) \cap (V \otimes U_2) = V \otimes (U_1 \cap U_2),$$

donde en la última igualdad se ha hecho uso del lema 2.25. De manera análoga se tiene que

$$(V_1 \otimes U_1) \cap (V_2 \otimes U_2) \subseteq (V_1 \cap V_2) \otimes U.$$

De manera que

$$(V_1 \otimes U_1) \cap (V_2 \otimes U_2) \subseteq \ [V \otimes (U_1 \cap U_2)] \cap \ [(V_1 \cap V_2) \otimes U] = (V_1 \cap V_2) \otimes (U_1 \cap U_2),$$

donde en la última igualdad se ha hecho uso del lema 2.26.

$\supseteq$ Dado $v \in (V_1 \cap V_2) \otimes (U_1 \cap U_2)$, se puede expresar como $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i$ con $v_i \in V_1 \cap V_2$ y $u_i \in U_1 \cap U_2$. De forma que trivialmente se tiene que $v \in V_1 \otimes U_1$ y $v \in V_2 \otimes U_2$ y, por lo tanto, $v \in (V_1 \otimes U_1) \cap (V_2 \otimes U_2)$.

□

3. Dualidad

3.1. Dualidad General

El estudio de los espacios duales va a ser crucial a la hora de seguir desarrollando la teoría. Basado en Bourbarki [1].

Definición 3.1 (Espacio Dual)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. El espacio dual de V se define como el siguiente espacio vectorial

$$V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{F} | f \text{ es lineal}\}$$

Los elementos $f \in V^*$ reciben el nombre de formas lineales.

Definición 3.2 (Forma Bilineal de Dualidad)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Se define la forma bilineal de dualidad como la aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (f, x) &\longmapsto \langle f, x \rangle \coloneqq f(x) \end{aligned}$$

Proposición 3.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y V^* su dual. Entonces la forma bilineal de dualidad definida en 3.2 es bilineal y no degenereda.

Demostración. Veamos que de hecho esta aplicación es bilineal. Sean $u, v, \in V$, $f, g \in V^*$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$\begin{gathered} \langle f, u+v \rangle = f(u+v) = f(u) + f(v) = \langle f, u \rangle + \langle f, v \rangle \\ \langle f+g, u \rangle = (f+g)(u) = f(u) + g(u) = \langle f, u \rangle + \langle g, u \rangle \\ \langle \alpha f, u \rangle = \alpha f(u) = \alpha \langle f, u \rangle \\ \langle f, \alpha u \rangle = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha \langle f, u \rangle. \end{gathered}$$

Veamos que es no degenerada. Para ello fijemos primero una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V.

- Sea $f \in V^*$ tal que $\langle f, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$, en particular $\langle f, e_i \rangle = 0$. Por lo tanto $f(e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y en consecuencia $f = 0$ ya que es nula sobre una base de V.
- Sea $v \in V$ tal que $\langle f, v \rangle = 0$ para todo $f \in V^*$. Tomando las aplicaciones $g^j \colon V \longrightarrow \mathbb{F}$ tales que $e_i \longmapsto \delta_i^j$, es decir, $g^j(e_j) = 1$ y $g^j(e_i) = 0$ para todo $i \neq j$. Se tiene entonces $\langle g^j, v \rangle = g^j(v) = g^j(\sum_{i=1}^n v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i g^j(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \delta_i^j = v^j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $v = 0$.

□

Proposición 3.4. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$. Entonces, el espacio dual V^* de V también tiene dimensión $dim_{\mathbb{F}}(V^*) = n$ y por lo tanto $V \cong V^*$.

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V. Se definen $\omega^j \in V^*$ de forma que satisfagan las siguientes relaciones

$$\langle \omega^j, e_i \rangle = \omega^j(e_i) = \delta_i^j, \text{ para todo } i, j = 1, \ldots, n.$$

El sistema $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ es libre por ser la forma bilineal de dualidad no degenerada. Veamos que además genera V^*. Sea $f \in V^*$, está completamente determinada por la imagen sobre una base, en particular por $f(e_i) \in \mathbb{F}$ para $i = 1, \ldots, n$. Para todo $v \in V$ se puede escribir $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ para ciertos $v^i \in \mathbb{F}$. Por lo tanto

$$\langle f, v \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^n v^i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n v^i \langle f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \omega^i(v) f(e_i) = \langle \sum_{i=1}^n f(e_i)\omega^i, v \rangle.$$

Por lo tanto, como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada, $f = \sum_{i=1}^n f(e_i)\omega^i$. Queda así demostrado que $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ es una base de V^*. Por lo tanto $dim_{\mathbb{F}}(V^*) = dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y en consecuencia $V^* \cong V$. $\square$

Definición 3.5 (Base Dual)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base suya. Entonces la base $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ de V^* (se ha demostrado que es base en la demostración de la proposición 3.4) definida por las siguientes relaciones se denomina base dual de $\{e_i\}_{i=1}^n$

$$\langle \omega^j, e_i \rangle = \delta_i^j. \tag{3.1}$$

Definición 3.6 (Bidual)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define V^{**} el espacio bidual de V como el espacio dual del espacio dual de V. Es decir, $V^{**} = (V^*)^*$.

Proposición 3.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, el espacio bidual de V es canónicamente isomorfo a V.

Demostración. La aplicación denotada por $\tilde{v}$ para todo $v \in V$

$$\begin{aligned} \tilde{v} \colon V^* &\longrightarrow \mathbb{F} \\ f &\longmapsto \langle f, v \rangle = f(v) \end{aligned}$$

es un elemento de V^{**}. Fijemos una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V y denotemos por $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ su base dual. Se define la aplicación lineal (basta definir la imagen de la base $\{e_i\}_{i=1}^n$)

$$\begin{aligned} \varphi \colon V &\longrightarrow V^{**} \\ e_i &\longmapsto \tilde{e}_i \end{aligned}$$

Veamos que $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ es la base dual de $\{\omega^j\}_{j=1}^n$.

$$\langle \tilde{e}_i, \omega^j \rangle = \omega^j(e_i) = \langle \omega^j, e_i \rangle = \delta_i^j.$$

Se tiene entonces que φ lleva una base de V en una base de V^{**} y por lo tanto es una biyección. Se tiene entonces que φ es un isomorfismo canónico. $\square$

Notación 3.8. Tal y como se ha hecho en la última ecuación, se denotara, por abuso de notación, por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ toda forma bilineal de dualidad, independientemente del espacio vectorial, siempre que no dé lugar a confusión.

Proposición 3.9. Sean $\{U_i\}_{i=1}^n$, $\{V_i\}_{i=1}^n$ y $\{W_i\}_{i=1}^n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $g_i\colon U_i\times V_i \longrightarrow W_i$ aplicaciones bilineales. Entonces existe una única aplicación bilineal g tal que

$$\begin{aligned} g\colon (\bigotimes_{i=1}^n U_i) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i) &\longrightarrow (\bigotimes_{i=1}^n W_i) \\ (\otimes_{i=1}^n u_i, \otimes_{i=1}^n v_i) &\longmapsto \otimes_{i=1}^n g_i(u_i, v_i). \end{aligned}$$

Demostración. Nótese primero que si g existe es única por estar definida para todos los generadores $(\otimes_{i=1}^n u_i, \otimes_{i=1}^n v_i)$ de $(\bigotimes_{i=1}^n U_i)\times(\bigotimes_{i=1}^n V_i)$. Como las aplicaciones g_i son bilineales, por la propiedad universal existen aplicaciones lineales únicas $f_i : U_i \otimes V_i \longrightarrow W_i$ tales que $g_i = f_i \circ \otimes$. Considerando la aplicación $f = \otimes_{i=1}^n f_i\colon \bigotimes_{i=1}^n (U_i\otimes V_i) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n W_i$ (única por el teorema 2.11) y el isomorfismo (los teoremas 2.19 y 2.20 garantizan el isomorfismo) φ definido por

$$\begin{aligned} \varphi\colon (\bigotimes_{i=1}^n U_i) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n V_i) &\longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n (U_i \otimes V_i) \\ (\otimes_{i=1}^n u_i) \otimes (\otimes_{i=1}^n v_i) &\longmapsto \otimes_{i=1}^n (u_i \otimes v_i) \end{aligned}$$

Se define entonces la aplicación lineal $\bar{g} \coloneqq f\circ\varphi$ de forma que

$$\begin{aligned} \bar{g}\colon (\bigotimes_{i=1}^n U_i) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n V_i) &\longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n W_i \\ (\otimes_{i=1}^n u_i) \otimes (\otimes_{i=1}^n v_i) &\longmapsto \otimes_{i=1}^n g_i(u_i, v_i). \end{aligned}$$

Por el corolario 2.9, existe una única aplicación bilineal $g\colon (\bigotimes_{i=1}^n U_i) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n W_i$ tal que $g = \bar{g}\circ\otimes$. Es decir

$$\begin{aligned} g\colon (\bigotimes_{i=1}^n U_i) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i) &\longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n W_i \\ (\otimes_{i=1}^n u_i, \otimes_{i=1}^n v_i) &\longmapsto \otimes_{i=1}^n g_i(u_i, v_i). \end{aligned}$$

□

La aplicación bilineal g construida se denotará por $g_1\otimes\ldots\otimes g_n = \otimes_{i=1}^n g_i$.

Lema 3.10. Sean $\{W_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_i\}_{i=1}^n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \leq \mathrm{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n V_i, \bigotimes_{i=1}^n W_i).$$

Demostración. Considerando la aplicación lineal

$$f\colon \bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(V_i, W_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i)$$
$$\otimes_{i=1}^{n} \varphi_i \longmapsto \otimes_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

Sea $\{\phi_{ij_i} | j_i = 1, \ldots, m_i\}$ base de $\operatorname{Hom}(V_i, W_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, por el teorema 2.23, se tiene que $\{\otimes_{i=1}^{n} \phi_{ij_i} | j_i = 1, \ldots, m_i,\ \ i = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$. Si $f(\otimes_{i=1}^{n} \phi_{ij_i}) = f(\otimes_{i=1}^{n} \phi_{ik_i})$ entonces, por la definición de f, $\otimes_{i=1}^{n} \phi_{ij_i} = \otimes_{i=1}^{n} \phi_{ik_i}$ y, por lo tanto, f es inyectiva.

□

Nota 3.11. Nótese que el $\otimes$ en los elementos de $\bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$ denota el producto tensorial considerando φ como elementos del espacio vectorial $\operatorname{Hom}(V_i, W_i)$, mientras que el $\otimes$ en los elementos de $\operatorname{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i)$ denota el producto tensorial de los homomorfismos. Sin embargo, a partir de ahora se consideraran equivalentes realizando la identificación inducida por la aplicación f definida en esta demostración.

Teorema 3.12. Sean $\{U_i\}_{i=1}^{n}$, $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{W_i\}_{i=1}^{n}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $g_i\colon U_i \times V_i \longrightarrow W_i$ aplicaciones bilineales y $g = \otimes_{i=1}^{n} g_i$ la aplicación bilineal construida en la proposición 3.9. Entonces g es no degenerada si y solo si g_i es no degenerada para todo $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. Se consideran las aplicaciones lineales

$$\varphi_i\colon U_i \longrightarrow \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$$
$$u_i \longmapsto \varphi_i(u_i) = g_i(u_i, \cdot) \text{ y}$$
$$\varphi\colon \bigotimes_{i=1}^{n} U_i \longrightarrow \operatorname{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i)$$
$$\otimes_{i=1}^{n} u_i \longmapsto \varphi(\otimes_{i=1}^{n} u_i) = g(\otimes_{i=1}^{n} u_i, \cdot)$$

y la aplicacion inclusión $i\colon \bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(V_i, W_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i)$ que surge de considerar $\bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(V_i, W_i)$ como subespacio de $\operatorname{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i)$ (Lema 3.10). Se cumple entonces

$$(i \circ \otimes_{i=1}^{n} \varphi_i(\otimes_{i=1}^{n} u_i))(\otimes_{i=1}^{n} v_i) = \otimes_{i=1}^{n} (\varphi_i(u_i))(v_i) = \otimes_{i=1}^{n} g_i(u_i, v_i) = (\varphi(\otimes_{i=1}^{n} u_i))(\otimes_{i=1}^{n} v_i)$$

Por lo tanto tenemos que

$$i \circ \otimes_{i=1}^{n} \varphi_i(\otimes_{i=1}^{n} u_i) = \varphi(\otimes_{i=1}^{n} u_i), \text{ para todo } \otimes_{i=1}^{n} u_i \in \bigotimes_{i=1}^{n} U_i.$$

Lo que implica que $i \circ \otimes_{i=1}^{n} g_i = g$ y por lo tanto, teninedo en cuenta que i es una inyección implica que $\ker(i) = 0$, se tiene por la proposición 2.17 que

$$\ker(g) = \ker(\otimes_{i=1}^{n} g_i) = \sum_{i=1}^{n} \ker(g_i) \otimes \bigotimes_{j \neq i} (U_i \otimes V_i).$$

Esto implica que g es no degenerada si y solo si todas las g_i lo son. $\square$

Definición 3.13. Sean $\{V_i\}_{i=1}^n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\{V_i^*\}_{i=1}^n$ sus respectivos duales y $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V_i^* \times V_i \longrightarrow \mathbb{F}$ las formas bilineales de dualidad. Se define la forma bilineal de dualidad de $(\bigotimes_{i=1}^n V_i^*) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i)$

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle\colon (\bigotimes_{i=1}^n V_i^*) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i) &\longrightarrow \mathbb{F}\\ (\otimes_{i=1}^n f_i, \otimes_{i=1}^n v_i) &\longmapsto \prod_{i=1}^n \langle f_i, v_i\rangle = \prod_{i=1}^n f_i(v_i).\end{aligned}$$

Nótese que la forma bilineal definida existe y es única por la proposición 3.9.

Proposición 3.14. Sean $\{V_i\}_{i=1}^n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\{V_i^*\}_{i=1}^n$. Entonces, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma bilineal de dualidad sobre $(\bigotimes_{i=1}^n V_i^*) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i)$ definida en 3.13 es no degenerada y por lo tanto induce un isomorfismo entre $\bigotimes_{i=1}^n V_i^*$ y $(\bigotimes_{i=1}^n V_i)^*$.

Demostración. Las formas bilineales de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V_i^* \times V_i \longrightarrow \mathbb{F}$ son no degeneradas por la proposición 3.3 y por lo tanto $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon (\bigotimes_{i=1}^n V_i^*) \times (\bigotimes_{i=1}^n V_i) \longrightarrow \mathbb{F}$ también lo es por el teorema 3.12. Tal y como se vio en la demostración de la proposición 3.4, una forma bilineal no degenerada $g\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ induce un isomorfismo entre $\varphi\colon U \longrightarrow V^*$ tal que $\varphi(u) = g(u,\cdot)$ para todo $u \in U$. Por lo tanto la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi\colon \bigotimes_{i=1}^n V_i^* &\longrightarrow (\bigotimes_{i=1}^n V_i)^*\\ \otimes_{i=1}^n f_i &\longmapsto \varphi(\otimes_{i=1}^n f_i) = \langle \otimes_{i=1}^n f_i, \cdot\rangle\end{aligned}$$

es un isomorfismo. $\square$

Definición 3.15 (Traspuesto de un homomorfismo)**.** Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $u \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Se define el homomorfismo traspuesto de u

$$\begin{aligned}u^t\colon W^* &\longrightarrow V^*\\ f &\longmapsto f\circ u\end{aligned}$$

Por lo tanto el homomorfismo traspuesto de u queda determinado por la relación

$$\langle f, u(v)\rangle = f(u(v)) = \langle u^t(f), v\rangle \text{ para todo } v \in V \text{ y } f \in W^*. \tag{3.2}$$

Proposición 3.16. Sean $\{V_i\}_{i=1}^n$ y $\{W_i\}_{i=1}^n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f_i \in \mathrm{Hom}(V_i, W_i)$ para todo $i = 1,\dots,n$. Entonces,

$$(\otimes_{i=1}^n f_i)^t = \otimes_{i=1}^n (f_i)^t.$$

Demostración. Sean $\otimes_{i=1}^n v_i \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ y $\otimes_{i=1}^n \alpha_i \in \bigotimes_{i=1}^n W_i^*$. Se tiene, por la definición de homomorfismo traspuesto,

$$[(\otimes_{i=1}^n f_i)^t(\otimes_{i=1}^n \alpha_i)](\otimes_{i=1}^n v_i) = \otimes_{i=1}^n \alpha_i(\otimes_{i=1}^n f_i(\otimes_{i=1}^n v_i)) = \otimes_{i=1}^n \alpha_i(\otimes_{i=1}^n f_i(v_i)) = \prod_{i=1}^n \alpha_i(f_i(v_i))$$

y

$$[\otimes_{i=1}^n (f_i)^t(\otimes_{i=1}^n \alpha_i)](v_i) = [\otimes_{i=1}^n (f_i)^t(\alpha_i)](\otimes_{i=1}^n v_i) = [\otimes_{i=1}^n \alpha_i \circ f_i](\otimes_{i=1}^n v_i) = \prod_{i=1}^n \alpha_i(f_i(v_i)).$$

De esta igualdad y del hecho de que existen bases de la forma $\{\otimes_{i=1}^n \alpha_{ij}\}_{j\in J}$ y $\{\otimes_{i=1}^n v_{ij}\}_{j\in J}$ de $\bigotimes_{i=1}^n W_i^*$ y $\bigotimes_{i=1}^n V_i$, se decuce el resultado. □

3.2. Dualidad en Espacios Vectoriales con Estructura Adicional

El caso particular en el que el espacio vectorial sobre el que se trabaje esté dotado de una forma bilineal no degenerada y simétrica es especialmente interesante ya que en la aplicación del formalismo tensorial a las distintas teorías físicas, los espacios sobre los que se construyen los tensores suelen ser de este tipo.

Definición 3.17. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una forma bilineal, no degenerada y simétrica es una aplicacion bilineal

$$\begin{aligned} g\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto g(x,y) \end{aligned}$$

tal que

1. $g(x,y) = g(y,x)$ para todo $x, y \in V$.
2. Si $g(x,y) = 0$ para todo $y \in V$, entonces $x = 0$.

Notación 3.18. En virtud del origen de este tipo de formas bilineales como métricas sobre espacios reales, se denominará tensor métrico a las aplicaciones definidas en 3.17. El nombre de tensor se verá justificado más adelante, por el momento no se trata más que de una convención el darle ese nombre.

Nota 3.19. Las teorías físicas suelen estar construidas sobre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sobre los que hay definidas métricas pseudoriemannianas, que son un caso particular del tipo de aplicaciones definidas en 3.17. Es por ello que se va a desarrollar la teoría en este último caso más general.

Proposición 3.20. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ en el que hay definido un tensor métrico g y V^* el dual de V. Entonces, V y V^* son canónicamente isomorfos.

Demostración. Se define la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto \varphi(v) = g(v, \cdot). \end{aligned}$$

Veamos que φ es un isomorfismo. Dado $u \in V$ tal que $\varphi(u) = g(u, \cdot) = 0$, entonces $g(u, v) = 0$ para todo $v \in V$. Como g es no degenerada esto implica que $u = 0$ y por lo tanto φ es inyectiva. Como por la proposición 3.4 se tiene que $dim_{\mathbb{F}}(V) = dim_{\mathbb{F}}(V^*)$, φ es un isomorfismo. Se dice que este es un isomorfismo canónico ya que viene inducido de forma natural por el tensor métrico g de V.

□

Definición 3.21. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ en el que hay definido un tensor métrico g y V^* el dual de V. Para todo $v \in V$ se define el dual de v como $\tilde{v} \coloneqq \varphi(v) = g(v, \cdot) \in V^*$, donde φ es el isomorfismo construido en la demostración de la proposición 3.20.

Nota 3.22. Esta definición asigna de manera unívoca un único elemento de V^* a cada elemento de V ya que la aplicación φ es un isomorfismo. En este contexto suele identificarse cada elemento de V con su dual.

Proposición 3.23. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ dotado de un tensor métrico g. Entonces, g induce un tensor métrico en V^*.

Demostración. Considerando φ^{-1} el inverso del isomorfismo φ construido en la proposición 3.20, se define la aplicación

$$\begin{aligned} h\colon V^* \times V^* &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto h(\alpha, \beta) = \alpha(\varphi^{-1}(\beta)) \end{aligned}$$

La bilinealidad de la aplicación es inmediata al ser φ lineal por ser un isomorfismo. Teniendo en cuenta que φ es un isomorfismo, todo $\alpha \in V^*$ se puede escribir como $\alpha = \varphi(v) = \tilde{v}$ para un único $v \in V$. Así

$$h(\alpha, \beta) = h(\tilde{v}, \tilde{u}) = \tilde{v}(\varphi^{-1}(\tilde{u})) = \tilde{v}(u) = g(v, u).$$

Donde se ha hecho uso de que $\varphi^{-1}(\tilde{v}) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v$. De esto se deduce que h es simétrica por serlo g ya que

$$h(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(u, v) = g(v, u) = h(\tilde{v}, \tilde{u}).$$

Además, si $h(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ para todo $\tilde{v} \in V^*$ implica que

$$h(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in V.$$

Por ser g no degenerada, esto implica que $u = 0$ y por lo tanto $\tilde{u} = 0$. Así se tiene que h también es no degenerada. □

4. Álgebras Tensoriales

4.1. Álgebra Tensorial

Antes de comenzar con la construcción de las álgebras tensoriales es necesario dar la definición de un álgebra asociativa y también de una graduación sobre un álgebra ya que son las estructuras que se pretenden construir.

Definición 4.1 (Álgebra Asociativa)**.** Un ágebra asociativa es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ dotado de un producto interno $\cdot\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ de forma que este producto es bilineal y asociativo.

Definición 4.2 (Graduación)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y G un grupo. Una G-graduación en $\mathcal{A}$ es una descomposición

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{A}_g,$$

de forma que $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h\subseteq\mathcal{A}_{gh}$ para todo $g,h\in G$.

Definición 4.3 (p-ésima Potencia Tensorial)**.** Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ se define para todo natural p la p-ésima potencia tensorial de V como $\bigotimes^p V = V\otimes \overset{(p)}{\cdots} \otimes V$, a veces también denotado por $T^p(V)$. Se definen, por convenio, $\bigotimes^0 V$ como el cuerpo base $\mathbb{F}$ y $\bigotimes^1 V$ como el propio espacio V.

Notación 4.4. Los tensores no nulos de este espacio $\bigotimes^p V$ reciben el nombre de tensores de grado p.

Proposición 4.5. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base. Entonces $\{e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p} | i_j=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,p\}$ es base de $\bigotimes^p V$. Además $dim_{\mathbb{F}}(\bigotimes^p V)=n^p$.

Demostración. Es una particularización del teorema 2.23 y del corolario 2.24. $\square$

Notación 4.6. Los elementos $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ de la base suelen denotarse por $e_{i_1\ldots i_p}$.

Definición 4.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Para todo $p,q\in\mathbb{N}$ se define la aplicación bilineal

$$\begin{aligned}\beta_{pq}\colon \bigotimes^p V\times\bigotimes^q V &\longrightarrow \bigotimes^{p+q} V\\ (v_1\otimes\ldots\otimes v_p, v_{p+1}\otimes\ldots\otimes v_{p+q}) &\longmapsto v_1\otimes\ldots\otimes v_{p+q}\end{aligned}$$

Nota 4.8. Basta definir las aplicaciones β_{pq} para los tensores puros, ya que estos generan el espacio $\bigotimes^p V$, y se extiende la definición por linealidad al resto de tensores. Además, estas aplicaciones están bien definidas por la asociatividad del producto tensorial.

Notación 4.9. Dados $u\in\bigotimes^p V$ y $v\in\bigotimes^q V$, $\beta_{pq}(u,v)$ se suele denotar por $u\otimes v$.

Definición 4.10 (Álgebra Tensorial)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define el álgebra tensorial de V como el espacio vectorial

$$\bigotimes V = \bigoplus_{p \geq 0} \left(\bigotimes^{p} V \right)$$

dotado con el producto interno inducido por las aplicaciones β_{pq} definidas en 4.7.

Teorema 4.11. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, el álgebra tensorial definido en 4.10 es un álgebra graduada.

Demostración. Considerando el espacio vectorial $\bigotimes V = \bigoplus_{p \geq 0} (\bigotimes^p V)$ definido en 4.10, veamos que se trata de un álgebra considerando el producto interno inducido por las aplicaciones β_{pq} definidas en 4.7.

$$\begin{aligned} \otimes \colon \bigotimes V \times \bigotimes V &\longrightarrow \bigotimes V \\ (u, v) &\longmapsto u \otimes v \coloneqq \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{l} \beta_{pq}(u_p, v_q) \end{aligned}$$

donde sea han expresado u y v como sumas finitas de potencias tensoriales: $u = \sum_{p=1}^{m} u_p$ con $u_p \in \bigotimes^p V$ y $v = \sum_{q=1}^{l} v_q$ con $v_q \in \bigotimes^q V$. Este producto es bilineal ya que las aplicaciones β_{pq} lo son y es asociativo por serlo el producto tensorial. La graduación en este álgebra viene dada al considerar cada subespacio $\bigotimes^p V$ como el subespacio de grado p ya que dados $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in \bigotimes^p V$ y $u_1 \otimes \ldots \otimes u_q \in \bigotimes^q V$, se tiene que

$$v \otimes u = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{p+q} \in \bigotimes^{p+q} V,$$

donde se han renombrado $u_i = v_{p+i}$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Por lo tanto se cumple que $\bigotimes^p V \bigotimes^q V \subseteq \bigotimes^{p+q} V$. La graduación se trata de una $\mathbb{Z}$-graduación ya que

$$\bigotimes V = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bigotimes^{p} V,$$

definiendo $\bigotimes^p V = \{0\}$ para todo $p \leq -1$. $\square$

Proposición 4.12. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\bigotimes V$ y $\bigotimes W$ sus respectivas álgebras tensoriales y $f \colon V \longrightarrow W$ un homomorfismo. Entonces f se extiende de manera única a un homomorfismo de $\bigotimes V$ a $\bigotimes W$.

Demostración. Para todo natural p, se toma la aplicación multilineal h_p de forma que

$$\begin{aligned} h_p \colon V^p &\longrightarrow \bigotimes W \\ (v_1, \ldots, v_p) &\longmapsto f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_p) \end{aligned}$$

En el caso $p = 1$ se toma $h_1 = f$ y en el caso $p = 0$ se toma $h_0 = Id_{\mathbb{F}}$. Por la propiedad universal del producto tensorial, para todo p existe una única aplicación lineal f_p tal que $h_p = f_p \circ \otimes$. Como los elementos de $\bigotimes V$ son de la forma $v = \sum_{p=0}^{m} v_p$ con $v_p \in \bigotimes^p V$, se define la aplicación lineal $\bar{f}$

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon \bigotimes V &\longrightarrow \bigotimes W \\ v = \sum_{p=0}^{m} v_p &\longmapsto \sum_{p=0}^{m} f_p(v_p) \end{aligned}$$

$\square$

Notación 4.13. Las aplicaciones f_p construidas suelen denotarse por $\otimes^p f$ o por $f^{\otimes^p}$

4.2. Álgebra Tensorial Mixta

Definición 4.14 (Potencia Tensorial Mixta)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Se define su potencia tensorial mixta de grado (p, q), con $p, q \in \mathbb{N}$, como

$$\bigotimes{}_q^p(V^*, V) \coloneqq (\bigotimes^p V^*) \otimes (\bigotimes^q V).$$

En el caso $p = 0$ se define $\bigotimes_q^0(V^*, V) = \bigotimes^q V$ y en el caso $q = 0$ se define $\bigotimes_0^p(V^*, V) = \bigotimes^p V^*$. Esto implica en particular que si $p = q = 0$, $\bigotimes_0^0(V^*, V) = \mathbb{F}$.

Notación 4.15. Los elementos de este espacio se denominan tensores mixtos de tipo (p, q). Los tensores puros de este espacio se pueden representar por $f \otimes v$, con $f \in \bigotimes^p V^*$ y $v \in \bigotimes^q V$.

Proposición 4.16. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Si $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de V y $\mathcal{B}^* = \{e^j\}_{j=1}^n$ la base dual asociada, entonces

$$\mathcal{B}_q^p = \{e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} | j_k, i_l = 1, \ldots, n, \;\; k = 1, \ldots, p, \;\; l = 1, \ldots q\}$$

es una base de $\bigotimes_q^p(V^*, V)$. Además, $dim_{\mathbb{F}}(\bigotimes_q^p(V^*, V)) = n^{p+q}$.

Demostración. Es una particularización del teorema 2.23 y del corolario 2.24. $\square$

Notación 4.17. Los elementos $e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$ de la base suelen denotarse por $e_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_p}$.

Proposición 4.18 (Forma Bilineal de Dualidad)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. La forma bilineal de dualidad sobre $V^* \times V$ induce una forma bilineal no degenerada sobre $\bigotimes_q^p(V^*, V) \times \bigotimes_p^q(V^*, V)$ definida por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon \bigotimes{}_q^p(V^*, V) \times \bigotimes{}_p^q(V^*, V) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (f \otimes v, g \otimes u) &\longmapsto \langle f, u \rangle \langle g, v \rangle \end{aligned}$$

Demostración. Tal y como se ha demostrado en la sección de dualidad 3, las forma bilineales de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon (\bigotimes^p V^*) \times (\bigotimes^p V) \longrightarrow \mathbb{F}$ son no degeneradas y por lo tanto la forma bilineal que inducen en $\bigotimes_q^p(V^*, V) \times \bigotimes_p^q(V^*, V)$ también es no degenerada. $\square$

Corolario 4.19. Esto permite identificar $\bigotimes_p^q(V^*, V)$ como el espacio dual de $\bigotimes_q^p(V^*, V)$. En particular, $\bigotimes_p^p(V^*, V)$ es su propio dual para todo $p \in \mathbb{N}$.

Definición 4.20. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Para todo $p, q, i, j \in \mathbb{N}$ se define la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \beta_{qj}^{pi} \colon \bigotimes{}_q^p(V^*, V) \times \bigotimes{}_j^i(V^*, V) &\longrightarrow \bigotimes{}_{q+j}^{p+i}(V^*, V) \\ (f \otimes v, g \otimes u) &\longmapsto (f \otimes g) \otimes (v \otimes u) \end{aligned}$$

Definición 4.21 (Álgebra Tensorial Mixta)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Se define el álgebra tensorial mixta sobre (V^*, V) como el espacio vectorial

$$\bigotimes(V^*, V) = (\bigotimes V^*) \otimes (\bigotimes V).$$

dotado del producto bilineal interno inducido por las aplicaciones β_{qj}^{pi}.

Teorema 4.22. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. El espacio definido en 4.21 se puede expresar como suma directa de las potencias mixtas sobre (V^*, V) de la siguiente manera

$$\bigotimes(V^*, V) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} \bigotimes{}_q^p(V^*, V).$$

Además, las aplicaciones bilineales β_{qj}^{pi} inducen un producto bilineal interno $\otimes$ sobre $\bigotimes(V^*, V)$ dotándolo de estructura de álgebra graduada.

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\bigotimes V^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \bigotimes^p V^* \quad \text{y} \quad \bigotimes V = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \bigotimes^q V,$$

por el teorema 2.21 se tiene que

$$\bigotimes(V^*, V) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} \bigotimes{}_q^p(V^*, V),$$

donde por abuso de notación se omite la inclusión de los $\bigotimes^p V^*$ y $\bigotimes^q V$ en $\bigotimes(V^*, V)$. Por lo tanto los elementos de $\bigotimes(V^*, V)$ se expresan como sumas de la forma $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \sum_{j_{pq}=1}^{m_{pq}} f_{j_{pq}} \otimes v_{j_{pq}}$ con $f_{j_{pq}} \in \bigotimes^p V^*$ y $v_{j_{pq}} \in \bigotimes^q V$ para todo $j_{pq} = 1, \ldots, m_{pq}$ con m_{pq} ciertos naturales y donde la suma en p, q es finita. El producto interno, bilineal y asociativo inducido por las aplicaciones β_{qj}^{pi} viene dado por

$$\begin{aligned}\otimes\colon \bigotimes(V^*,V)\times\bigotimes(V^*,V) &\longrightarrow \bigotimes(V^*,V)\\ \Big(\sum_{p,q\in\mathbb{N}} f_p\otimes v_q, \sum_{i,j\in\mathbb{N}} g_i\otimes u_j\Big) &\longmapsto \sum_{p,q,i,j\in\mathbb{N}} \beta^{pi}_{qj}(f_p\otimes v_q, g_i\otimes u_j)\\ &= \sum_{p,q,i,j\in\mathbb{N}} (f_p\otimes g_i)\otimes(v_q\otimes u_j)\end{aligned}$$

La graduación en este caso se trata una graduación sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y viene de considerar cada subespacio $\bigotimes^p_q(V^*,V)$ de $\bigotimes(V^*,V)$ como el factor en la suma directa de grado (p,q) ya que dados $f\otimes v\in\bigotimes^p_q(V^*,V)$ y $g\otimes u\in\bigotimes^k_l(V^*,V)$

$$(f\otimes v)\otimes(g\otimes u)=(f\otimes g)\otimes(v\otimes u)\in\bigotimes_{q+l}^{p+k}(V^*,V).$$

Por lo tanto, se cumple que $\bigotimes^p_q(V^*,V)\bigotimes^k_l(V^*,V)\subseteq\bigotimes^{p+k}_{q+l}(V^*,V)$. □

4.3. Cambios de Base

En el desarrollo de la teoría hasta este punto no ha sido relevante tratar los cambios de base y como estos cambios de base afectan a las bases inducidas en las potencias tensoriales y sus subespacios. Sin embargo, la definición que dan los físicos e ingenieros de los tensores se basan específicamente en los cambios inducidos sobre los tensores por los cambios de base de los espacios vectoriales de partida para definir los propios tensores, por lo tanto, es necesario estudiar los efectos inducidos en las potencias tensoriales por los cambios de base.

Definición 4.23 (Cambio de Base)**.** Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B}=\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\tilde{\mathcal{B}}=\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases de V. Un cambio de base es una relación entre las bases $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ y se puede expresar a través de una matriz invertible A de la siguiente forma

$$\tilde{e}_i=\sum_{j=1}^n A^j{}_i e_j,$$

donde $A^j{}_i$ representa las componentes de la matriz A de cambio de base.

Notación 4.24 (Convenio de Sumación de Einstein)**.** A lo largo de esta sección se hará uso del convenio de sumación de Einstein, ya que es la forma en la que se trata en física e ingeniería con los tensores y aligera bastante la notación. El convenio se basa, siempre que estén claros los límites de los sumatorios y no de lugar a confusión, en que cada vez que en una expresión aparezca un índice repetido una vez como subíndice y una vez como superíndice de forma que se esté sumando este índice, se omitirá el sumatorio. Como ejemplo, la expresión anterior del cambio de base se escribirá omititiendo el sumatorio de la siguiente manera

$$\tilde{e}_i=A^j{}_i e_j.$$

Proposición 4.25. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ y $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases de V tales que $\tilde{e}_i = A^j{}_i e_j$. Entonces, las componentes $\tilde{v}^j$ de un vector v en la base $\tilde{\mathcal{B}}$ vienen dadas en función de las componentes v^i del vector en la base $\mathcal{B}$ por

$$\tilde{v}^j = (A^{-1})^j{}_i v^i.$$

Demostración. Sea $v \in V$ arbitrario,

$$v = \tilde{v}^j \tilde{e}_j = \tilde{v}^j A^j{}_i e_j = v^i e_i.$$

De la unicidad de la expresión de un vector en una base se sigue que $v^j = A^j{}_i \tilde{v}^i$ y como la matriz es invertible

$$(A^{-1})^i{}_j v^j = (A^{-1})^i{}_j A^j{}_k \tilde{v}^k = \delta^i_k \tilde{v}^k = \tilde{v}^i.$$

$\square$

Proposición 4.26. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, V^* su dual, $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ y $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases de V y A la matriz cambio de base que las relaciona, es decir, $\tilde{e}_i = A^j{}_i e_j$. Entonces los elementos ω^j y $\tilde{\omega}^j$ de las bases duales de $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ respectivamente se relacionan de la siguiente manera

$$\tilde{\omega}^j = (A^{-1})^j{}_i \omega^i.$$

Demostración. Los elementos ω^j y $\tilde{\omega}^j$ tabién estarán relacionados mediante una matriz cambio de base de forma que $\tilde{\omega^j} = B^j{}_i \omega^i$, de forma que

$$\delta^j_i = \tilde{\omega^j}(\tilde{e}_i) = \tilde{\omega^j}(A^k{}_i e_k) = B^j{}_l A^k{}_i \omega^l(e_k) = B^j{}_l A^k{}_i \delta^l_k = B^j{}_k A^k{}_i = (BA)^j{}_i.$$

Lo que implica que $B = A^{-1}$. $\square$

Proposición 4.27. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ y $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ dos bases de V, A la matriz cambio de base tal que $\tilde{e}_i = A^j{}_i e_j$ y $\bigotimes_q^p(V^*, V)$ la potencia tensorial mixta sobre V de grado (p, q). Entonces, para todo tensor $T \in \bigotimes_q^p(V^*, V)$, las componentes $\tilde{T}^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p}$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}}_q^p$ construida a partir de $\tilde{\mathcal{B}}$ se expresan en función de las componentes $T^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p}$ respecto de la base $\mathcal{B}_q^p$ construida a partir de $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p} = T^{k_1 \dots k_q}{}_{l_1 \dots l_p} (A^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \dots (A^{-1})^{i_q}{}_{k_q} A^{j_1}{}_{l_1} \dots A^{j_p}{}_{l_p}.$$

Demostración. Sea $T \in \bigotimes_q^p(V^*, V)$,

$$\begin{aligned} T &= \tilde{T}^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p} \tilde{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_{i_q} \otimes \tilde{\omega}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{j_p} \\ &= \tilde{T}^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p} A^{k_1}{}_{i_1} \dots A^{k_q}{}_{i_q} (A^{-1})^{j_1}{}_{l_1} \dots (A^{-1})^{j_p}{}_{l_p} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes \omega^{l_1} \otimes \dots \otimes \omega^{l_p} \\ &= T^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}. \end{aligned}$$

De nuevo, por la unicidad de la descomposición de un vector en una base, se tiene que

$$T^{k_1\dots k_q}{}_{l_1\dots l_p} = \tilde{T}^{i_1\dots i_q}{}_{j_1\dots j_p} A^{k_1}{}_{i_1}\dots A^{k_q}{}_{i_q}(A^{-1})^{j_1}{}_{l_1}\dots(A^{-1})^{j_p}{}_{l_p}$$

e invirtiendo esta relación multiplicando por las matrices A y A^{-1} tantas veces como sea necesario se llega al resultado deseado. □

4.4. Contracciones

Definición 4.28. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Se define para todo (i,j), con $i = 1,\dots,p$ y $j = 1,\dots,q$, el operador contracción C^i_j a partir de la aplicación multilineal

$$\begin{aligned} \varphi^i_j\colon (V^*)^p \times V^q &\longrightarrow \bigotimes{}^{p-1}_{q-1}(V^*, V) \\ (f_1,\dots,f_p,v_1,\dots,v_q) &\longmapsto f_i(v_j)(\otimes_{k\neq i} f_k)\otimes(\otimes_{l\neq j} v_l), \end{aligned}$$

de forma que C^i_j es la única aplicación lineal tal que $\varphi^i_j = C^i_j \circ \otimes$. La existencia y unicidad de C^i_j se sigue de la propiedad universal del producto tensorial.

Notación 4.29. Las expresiones del tipo $i_1 \overset{\wedge i_m}{\dots} i_q$ hacen referencia al listado de índices $i_1\dots i_q$ del que se ha quitado el índice i_m.

Lema 4.30. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base suya y C^l_m el operador contracción definido en 4.28. Entonces

$$C^l_m(e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}) = \delta^{j_l}_{i_m} e^{j_1 \overset{\wedge j_l}{\dots} j_p}_{i_1 \overset{\wedge i_m}{\dots} i_q}$$

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned} C^l_m(e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}) &= C^l_m(e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}) \\ &= \langle e^{j_l}, e_{i_m}\rangle e^{j_1}\otimes \overset{\wedge j_l}{\dots} \otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes \overset{\wedge i_m}{\dots} \otimes e_{i_q} \\ &= \delta^{j_l}_{i_m} e^{j_1}\otimes \overset{\wedge j_l}{\dots} \otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes \overset{\wedge i_m}{\dots} \otimes e_{i_q} = \delta^{j_l}_{i_m} e^{j_1 \overset{\wedge j_l}{\dots} j_p}_{i_1 \overset{\wedge i_m}{\dots} i_q}. \end{aligned}$$

□

Notación 4.31. Al expresar tensores de la forma $T = \sum_{j_k i_l} T^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}$, los sumatorios indican sumas en $j_k = 1,\dots,n$ para todo $k = 1,\dots,p$ y en $i_l = 1,\dots,n$ para todo $l = 1,\dots,q$, donde n será la dimensión del espacio vectorial sobre el que se consideran los tensores. Se hará uso de esta notación para aligerar ciertas expresiones.

Proposición 4.32. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base suya, $T =$

$\sum_{j_k,i_l} T^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q} \in \bigotimes^p_q(V^*,V)$ y el operador contracción C^r_s. Entonces

$$C^r_s(T) = \sum_{j_k,i_l} F^{i_1\dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{p-1}} e^{j_1\dots j_{p-1}}_{i_1\dots i_{q-1}},$$

donde

$$F^{i_1\dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{p-1}} = \sum_{a=1}^{n} T^{i_1\dots i_{s-1} a i_s \dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{r-1} a j_r \dots j_{p-1}}.$$

Demostración. Aplicando la definición del operador contracción, haciendo uso de su linealidad y del lema 4.30

$$C^r_s(T) = C^r_s(\sum_{j_k,i_l} T^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}) = \sum_{j_k,i_l} T^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} C^r_s(e^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}) = \sum_{j_k,i_l} T^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} \delta^{j_r}_{i_s} e^{j_1 \overset{\wedge^{j_r}}{\dots} j_p}_{i_1 \overset{\wedge^{i_s}}{\dots} i_q}$$

Renombrando los índices $j_r \longrightarrow a$, $i_s \longrightarrow b$, $j_k \longrightarrow j_{k-1}$ para todo $k \geq r+1$ y $i_l \longrightarrow i_{l-1}$ para todo $l \geq s+1$ se tiene

$$\begin{aligned} C^r_s(T) = \sum_{j_k,i_l,a,b} T^{i_1\dots i_{s-1} b i_s \dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{r-1} a j_r \dots j_{p-1}} \delta^a_b e^{j_1\dots j_{p-1}}_{i_1\dots i_{q-1}} = \sum_{j_k,i_l,a} T^{i_1\dots i_{s-1} a i_s \dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{r-1} a j_r \dots j_{p-1}} e^{j_1\dots j_{p-1}}_{i_1\dots i_{q-1}} \\ \sum_{j_k,i_l} \left(\sum_{a=1}^{n} T^{i_1\dots i_{s-1} a i_s \dots i_{q-1}}_{j_1\dots j_{r-1} a j_r \dots j_{p-1}} \right) e^{j_1\dots j_{p-1}}_{i_1\dots i_{q-1}}. \end{aligned}$$

$\square$

Notación 4.33. El tensor $C^r_s(T)$ se denomina la contracción del tensor T respecto de los índices (r,s).

4.5. Traza de un Endomorfismo

En esta sección se va a estudiar la traza de los endomorfismos definida de forma general sin recurrir a matrices y se va a comprobar que está definición intrínseca coincide con la definición usual para matrices cuadradas y recupera las propiedades conocidas de la traza de una matriz.

Proposición 4.34. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \theta\colon V^* \otimes V &\longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ \alpha \otimes v &\longrightarrow \theta(\alpha \otimes v), \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \theta(\alpha \otimes v)\colon V &\longrightarrow V \\ u &\longmapsto \theta(\alpha \otimes v)(u) = \langle \alpha, u \rangle v = \alpha(u) v, \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. La linealidad de θ es inmediata por su definición. Para toda la demostración se va a fijar una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V y su dual $\{\omega^j\}_{j=1}^n$. Como $dim_{\mathbb{F}}(V^* \otimes V) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}(V)) = n^2$, basta ver que la aplicación θ es inyectiva para comprobar que se trata de un isomorfismo. Sean $\alpha = \sum_{i,j} \alpha^i_j \omega^j \otimes e_i$ y $\beta = \sum_{i,j} \beta^i_j \omega^j \otimes e_i$ elementos de $V^* \otimes V$ tales que $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$. Entonces, $\theta(\alpha)(v) = \theta(\beta)(v)$ para todo $v \in V$, en particular para $v = e_k$. Así,

$$\sum_{i,j} \alpha^i_j \omega^j(e_k) e_i = \theta(\alpha)(e_k) = \theta(\beta)(e_k) = \sum_{i,j} \beta^i_j \omega^j(e_k) e_i.$$

Haciendo uso de la relación de dualidad $\omega^j(e_k) = \delta^j_k$ se tiene

$$\sum_i \alpha^i_k e_i = \sum_i \beta^i_k e_i.$$

Por ser $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base, se tiene entonces que $\alpha^i_k = \beta^i_k$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y como se ha cogido un e_k arbitrario también se cumple para todo $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $\alpha = \beta$ ya que sus coeficientes son los mismos respecto de la base $\{\omega^j \otimes e_i | i, j = 1, \ldots, n\}$. $\square$

Definición 4.35. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$, se define la traza del endomorfismo f como

$$\mathrm{Tr}(f) \coloneqq (\tau \circ \theta^{-1})(f),$$

donde

$$\begin{aligned} \tau\colon V^* \otimes V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \alpha \otimes v &\longmapsto \langle \alpha, v \rangle = \alpha(v). \end{aligned}$$

Nota 4.36. La aplicación τ está bien definida y es única ya que por la propiedad universal del producto tensorial existe una única aplicación lineal $\tau\colon V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle = \tau \circ \otimes$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forma bilineal de dualidad. Se va a estudiar ahora esta aplicación traza haciendo uso de una base concreta para comprobar que coincide con la definición de la traza de una matriz cuadrada.

Definición 4.37. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define la traza de A

$$\mathrm{Tr}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Lema 4.38. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V y $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ su base dual. El inverso del isomorfismo θ definido en la proposición 4.34 viene dado por

$$\begin{aligned} \theta^{-1}\colon \mathrm{End}(V) &\longrightarrow V^* \otimes V \\ f &\longmapsto \sum_{j=1}^n \omega^j \otimes f(e_j) \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que la aplicación θ^{-1} es independiente de la base utilizada ya que dada otra base de V $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ y su dual $\{\tilde{\omega}^j\}_{j=1}^n$ tales que $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n A^j{}_i e_j$ con A una matriz de cambio de base, al expresar θ^{-1} en esta nueva base se tiene para todo $f \in \mathrm{End}(V)$

$$\theta^{-1}(f) = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}^i \otimes f(\tilde{e}_i) = \sum_{i,j,k=1}^n (A^{-1})^i{}_j A^k{}_i \omega^j \otimes f(e_k) = \sum_{j,k=1}^n \delta_j^k \omega^j \otimes f(e_k) = \sum_{k=1}^n \omega^k \otimes f(e_k).$$

Dados $f \in \mathrm{End}(V)$ y $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$ se cumple

$$\theta(\theta^{-1}(f))(v) = \theta(\sum_{i=1}^n \omega^i \otimes f(e_i))(v) = \sum_{i=1}^n \omega^i(v) f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = f(v).$$

Por lo tanto θ^{-1} es de hecho el isomorfismo inverso de θ. □

Teorema 4.39. La definición de la traza de una matriz dada en 4.37 es consistente con la definición de la traza de un endomorfismo dada en 4.35.

Demostración. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se puede interpretar como la matriz coordenada de un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ de dimensión n en cierta base $\{e_i\}_{i=1}^n$, es decir, $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. Considerando la base dual $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ de $\{e_i\}_{i=1}^n$.

$$\mathrm{Tr}(f) = (\tau \circ \theta^{-1})(f) = \tau(\sum_{i=1}^n \omega^i \otimes f(e_i)) = \sum_{i=1}^n \omega^i(f(e_i)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega^i(e_j) = \sum_{i,j=1}^n \delta_j^i a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \mathrm{Tr}(A).$$

□

Proposición 4.40. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, la aplicación traza definida en 4.35 cumple las siguientes propiedades para todo $f, g, h \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

1. $\mathrm{Tr}(f + g) = \mathrm{Tr}(f) + \mathrm{Tr}(g)$.
2. $\mathrm{Tr}(\lambda f) = \lambda \,\mathrm{Tr}(f)$.
3. $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$.
4. $\mathrm{Tr}(f \circ g \circ h) = \mathrm{Tr}(g \circ h \circ f)$.

Demostración. Por ser θ isomorfismo, se pueden representar f y g como $f = \theta(\sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^n \theta(f_i \otimes v_i)$ y $g = \theta(\sum_{j=1}^m g_j \otimes u_j) = \sum_{j=1}^m \theta(g_j \otimes u_j)$ con $f_i, g_j \in V^*$ y $v_i, u_j \in V$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$.

1. Es inmediato por la linealidad de Tr.
2. También es inmediato por la misma razón.

3. Sea $x \in V$ arbitrario, se cumple entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \sum_{j,i} [\theta(f_i \otimes v_i)](\theta(g_j \otimes u_j)(x)) = \sum_{j,i} [\theta(f_i \otimes v_i)](g_j(x)u_j) \\ &= \sum_{j,i} f_i(u_j)g_j(x)v_i = \sum_{j,i} f_i(u_j)\theta(g_j \otimes v_i)(x)\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \sum_{i,j} [\theta(g_j \otimes u_j)](\theta(f_i \otimes v_i)(x)) = \sum_{i,j} [\theta(g_j \otimes u_j)](f_i(x)v_i) \\ &= \sum_{i,j} g_j(v_i)f_i(x)u_j = \sum_{i,j} g_j(v_i)\theta(f_i \otimes u_j)(x).\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $x \in V$, se tiene que $f \circ g = \sum_{i,j} f_i(u_j)\theta(g_j \otimes v_i)$ y $g \circ f = \sum_{i,j} g_j(v_i)\theta(f_i \otimes u_j)$. Así,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(f \circ g) &= (\tau \circ \theta^{-1}) \left[\sum_{i,j} (f_i(u_j)\theta(g_j \otimes v_i))\right] = \sum_{i,j} f_i(u_j)\tau(g_j \otimes v_i) = \sum_{i,j} f_i(u_j)g_j(v_i) \\ &= \sum_{i,j} g_j(v_i)\tau(f_i \otimes u_j) = (\tau \circ \theta^{-1}) \left[\sum_{i,j} g_j(v_i)\theta(f_i \otimes u_j)\right] = \mathrm{Tr}(g \circ f).\end{aligned}$$

4. Haciendo uso de la propiedad 3 recién demostrada se cumple que

$$\mathrm{Tr}(f \circ h \circ g) = \mathrm{Tr}(f \circ (g \circ h)) = \mathrm{Tr}((g \circ h) \circ f) = \mathrm{Tr}(g \circ h \circ f).$$

$\square$

Nota 4.41. Las propiedades 3 y 4 pueden generalizarse a un número arbitrario de endomorfismos $f_0, \ldots, f_{n-1}$ de forma que la traza de su composición es invariante bajo permutaciones rotacionales, es decir,

$$\mathrm{Tr}(f_{p \ (\text{mód } n)} \circ \ldots \circ f_{n-1+p \ (\text{mód } n)}) = \mathrm{Tr}(f_0 \circ \ldots \circ f_{n-1})$$

para todo natural p.

Nota 4.42. De esta forma se ha demostrado que la traza definida de forma más general e intrínseca cumple las propiedades esperadas de la traza de una matriz sin tener que recurrir ni a bases ni a matrices.

Proposición 4.43. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces,

$$\mathrm{Tr}(f^t) = \mathrm{Tr}(f),$$

donde f^t es el traspuesto del endomorfismo f.

Demostración. Por definición,

$$\mathrm{Tr}(f^t) = (\tau_* \circ \theta_*^{-1})(f^t),$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_*\colon V \otimes V^* &\longrightarrow \mathrm{End}(V^*) \\ v \otimes \alpha &\longmapsto \theta_*(v \otimes \alpha) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \theta_*(v \otimes \alpha)\colon V^* &\longrightarrow V^* \\ \beta &\longmapsto \theta_*(v \otimes \alpha)(\beta) = \beta(v)\alpha \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tau_*\colon V \otimes V^* &\longrightarrow \mathbb{F} \\ v \otimes \alpha &\longmapsto \alpha(v). \end{aligned}$$

Fijada una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V y su base dual $\{\omega^j\}_{j=1}^n$, se pueden expresar f y f^t haciendo uso de los isomorfismos θ y θ_* de la forma $f = \sum_{i,j=1}^n f_j^i \theta(\omega^j \otimes e_i)$ y $f^t = \sum_{i,j=1}^n \tilde{f}_j^i \theta_*(e_i \otimes \omega^j)$ para ciertos $f_j^i, \tilde{f}_j^i \in \mathbb{F}$. De forma que dados $\beta \in V^*$ y $v \in V$ se tiene que

$$[f^t(\beta)](v) = [\sum_{i,j} \tilde{f}_j^i \beta(e_i)\omega^j](v) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{f}_j^i \beta(e_i)\omega^j(v)$$

y también, por la definición de endomorfismo traspuesto,

$$[f^t(\beta)](v) = \beta(f(v)) = \beta\left(\sum_{i,j=1}^n f_j^i \omega^j(v) e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n f_j^i \omega^j(v)\beta(e_i).$$

En particular, tomando $\beta = \omega^k$ y $v = e_l$, se tiene que

$$[f^t(\omega^k)](e_l) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{f}_j^i \omega^k(e_i)\omega^j(e_l) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{f}_j^i \delta_i^k \delta_l^j = \tilde{f}_l^k$$

y también

$$[f^t(\omega^k)](e_l) = \sum_{i,j=1}^n f_j^i \omega^j(e_l)\omega^k(e_i) = \sum_{i,j=1}^n f_j^i \delta_l^j \delta_i^k = f_l^k.$$

Por lo tanto, $\tilde{f}_j^i = f_j^i$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. De forma que

$$\mathrm{Tr}(f^t) = (\tau_* \circ \theta_*^{-1})\left(\sum_{i,j=1}^n f_j^i \theta_*(e_i \otimes \omega^j)\right) = \sum_{i,j=1}^n f_j^i \tau_*(e_i \otimes \omega^j) = \sum_{i=1}^n f_i^i$$

y

$$\mathrm{Tr}(f) = (\tau \circ \theta^{-1}) \left(\sum_{i,j=1}^{n} f_j^i \theta(\omega^j \otimes e_i) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} f_j^i \tau(\omega^j \otimes e_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i^i.$$

Obteniéndose la igualdad deseada. □

Lema 4.44. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, τ_i y θ_i las particularizaciones de la definición de las aplicaciones traza de los endomorfismos de cada uno de los V_i y las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau \colon \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^* \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} V_i &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \otimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \otimes_{i=1}^{n} v_i &\longmapsto \prod_{i=1}^{n} g_i(v_i) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \theta \colon \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^* \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} V_i &\longrightarrow \mathrm{End}(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i) \\ \otimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \otimes_{i=1}^{n} v_i &\longmapsto \theta(\otimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \otimes_{i=1}^{n} v_i) \end{aligned}$$

de forma que $\theta(\otimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \otimes_{i=1}^{n} v_i)(\otimes_{i=1}^{n} u_i) = \prod_{i=1}^{n} g_i(u_i) \otimes_{i=1}^{n} v_i$. Entonces,

$$\otimes_{i=1}^{n} \theta_i(f_i \otimes v_i) = \theta[(\otimes_{i=1}^{n} f_i) \otimes (\otimes_{i=1}^{n} v_i)],$$

para todo $v_i \in V_i$ y $f_i \in V_i^*$ con $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. Dado $\otimes_{i=1}^{n} x_i \in \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$,

$$[\otimes_{i=1}^{n} \theta_i(f_i \otimes v_i)](\otimes_{i=1}^{n} x_i) = [\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)] \otimes_{i=1}^{n} v_i$$

y

$$\theta[(\otimes_{i=1}^{n} f_i) \otimes (\otimes_{i=1}^{n} v_i)](\otimes_{i=1}^{n} x_i) = (\otimes_{i=1}^{n} f_i)(\otimes_{i=1}^{n} x_i) \otimes_{i=1}^{n} v_i = [\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)] \otimes_{i=1}^{n} v_i.$$

Como sabemos que hay bases de la forma $\{\otimes_{i=1}^{n} v_{ij} | j \in J\}$, queda demostrada la igualdad deseada. □

Proposición 4.45. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f_i \in \mathrm{End}(V_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\mathrm{Tr}(\otimes_{i=1}^{n} f_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(f_i).$$

Demostración. Por definición se tiene $\mathrm{Tr}(\otimes_{i=1}^{n} f_i) = (\tau \circ \theta^{-1})(\otimes_{i=1}^{n} f_i)$ donde τ y θ son las aplicaciones definidas en el lema anterior 4.44. También por definición, se tiene que $\mathrm{Tr}(f_i) = (\tau_i \circ \theta_i^{-1})(f_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, donde τ_i y θ_i son la particularización de las aplicaciones de la definición de traza a cada V_i también mencionadas en el lema anterior. Como ya se ha visto previamente, cada

f_i puede expresarse mediante el isomorfismo θ_i en la forma $f_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} \theta_i(\alpha_{ij_i} \otimes v_{ij_i})$ con $\alpha_{ij_i} \in V_i^*$ y $v_{ij_i} \in V_i$ para todo $j_i = 1, \ldots, m_i$ con $i = 1, \ldots, n$. De forma que

$$\otimes_{i=1}^n f_i = \otimes_{i=1}^n \sum_{j_i} \theta_i(\alpha_{ij_i} \otimes v_{ij_i}) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \otimes_{i=1}^n \theta_i(\alpha_{ij_i} \otimes v_{ij_i})$$

Haciendo uso ahora del lema anterior 4.44, se tiene

$$\otimes_{i=1}^n f_i = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \theta[(\otimes_{i=1}^n \alpha_{ij_i}) \otimes (\otimes_{i=1}^n v_{ij_i})].$$

Como ya se ha calculado previamente en alguna ocasión, la traza de los f_i viene dada por $\mathrm{Tr}(f_i) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{ij_i}(v_{ij_i})$. De la misma forma, la traza de $\otimes_{i=1}^n f_i$ viene dada por

$$\mathrm{Tr}(\otimes_{i=1}^n f_i) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} (\otimes_{i=1}^n \alpha_{ij_i})(\otimes_{i=1}^n v_{ij_i}) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \prod_{i=1}^n \alpha_{ij_i}(v_{ij_i}) = \prod_{i=1}^n \sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{ij_i}(v_{ij_i}) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Tr}(f_i).$$

$\square$

Proposición 4.46 (La Traza como Contracción)**.** Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, V^* su dual y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, la traza de f coincide con la contracción C_1^1 del tensor $F \in V^* \otimes V$ definido por f.

Demostración. f queda determinado por su matriz coordenada $A^i{}_j$ respecto de una base $\{e_i\}_{i=1}^n$. El tensor F asociado a f viene entonces dado por $F = \sum_{i,j=1}^n A^i{}_j \omega^j \otimes e_i$. La traza viene entonces dada por

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{j=1}^n A^j{}_j = C_1^1(F).$$

$\square$

Nota 4.47. Identificar la traza con la contracción C_1^1, permite extender la definición de la traza a tensores arbitrarios.

Definición 4.48 (Traza Parcial)**.** Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V, $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ su base dual y $T = \sum_{i_l,j_k=1}^n T^{i_1\ldots i_q}{}_{j_1\ldots j_p} e^{j_1\ldots j_p}{}_{i_1\ldots i_q} \in \bigotimes_q^p(V^*, V)$. Se define la traza parcial de T respecto de los índices (r, s) como la acción del operador contracción C_s^r sobre T: $C_s^r(T)$.

Nota 4.49. Las trazas parciales tienen especial importancia ya que son esenciales en la implementación de la Mecánica Cuántica con matrices de densidad.

4.6. Producto de Kronecker

El producto de Kronecker surge al expresar en una base coordenada el producto tensorial de dos homomorfismos. Para ello es necesario ordenar de una manera específica los elementos de la base.

Definición 4.50 (Producto de Kronecker)**.** Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ dos matrices con entradas a_{ij} y b_{kl} respectivamente. Se define el producto de Kronecker de las matrices A y B como la matriz $A \otimes B \in \mathcal{M}_{np\times mq}(\mathbb{F})$ dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B. \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1m}b_{p1} & \cdots & a_{1m}b_{pq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \cdots & a_{n1}b_{1q} & \cdots & a_{nm}b_{11} & \cdots & a_{nm}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{p1} & \cdots & a_{n1}b_{p1} & \cdots & a_{nm}b_{p1} & \cdots & a_{nm}b_{pq} \end{pmatrix}$$

Proposición 4.51. Sean V, U, T y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $f \in \mathrm{Hom}(V,T)$ y $g \in \mathrm{Hom}(U,W)$. Dadas $\{v_i\}_{i=1}^n$, $\{u_i\}_{i=1}^p$, $\{t_i\}_{i=1}^m$ y $\{w_i\}_{i=1}^q$ bases de V, U, T y W respectivamente de forma que las matrices coordenadas de f y g son A y B respectivamente respecto de estas bases. Entonces, la matriz coordenada de $f \otimes g$ respecto de las bases $\{v_1 \otimes u_1, \dots, v_1 \otimes u_p, \dots, v_n \otimes u_1, \dots, v_n \otimes u_p\}$ y $\{t_1 \otimes w_1, \dots, t_1 \otimes w_q, \dots, t_m \otimes w_1, \dots, t_m \otimes w_q\}$ de $V \otimes U$ y $T \otimes W$ respectivamente viene dada por $A \otimes B$, el producto de Kronecker de las matrices A y B.

Demostración. No se va a dar una demostración por lo tedioso que resulta por la notación. Sin embargo, se puede encontrar una demostración en las páginas citadas de Dummit & Foote [2]. $\square$

Nota 4.52. Esto en particular implica que dados V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ con matriz coordenada A respecto de ciertas bases $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{w_j\}_{j=1}^m$ de V y W respectivamente, el homomorfismo $\otimes^p f \in \mathrm{Hom}(\bigotimes^p V, \bigotimes^p W)$ definido en la demostración de la proposición 4.12 tiene como matriz coordenada $\otimes^p A$ respecto de la bases $\{\otimes_{i=1}^p v_{k_i}\}$ y $\{\otimes_{j=1}^p w_{l_j}\}$ de $\bigotimes^p V$ y $\bigotimes^p W$ ordenadas según la proposición anterior. La matriz $\otimes^p A$ se define recursivamente como $\otimes^p A = A \otimes (\otimes^{p-1} A)$.

5. Potencias Alternadas

Los tensores antisimétricos de grado p se definen como elementos no nulos de la p-ésima potencia alternada del espacio V. Hay varias maneras de definir este espacio, que como veremos son equivalentes. Los resultados derivados en esta sección están basados en los desarrollos de Greub [3].

5.1. Cociente

La primera forma de definir las potencias alternadas de un espacio vectorial es mediante un cociente, de manera similar a la definición del producto tensorial.

Definición 5.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sean $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in \bigotimes^p V$ y $\sigma \in S_p$ una permutación del conjunto $\{1, \ldots, p\}$, se define la acción de σ sobre v

$$\sigma(v) = \sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \coloneqq v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}.$$

Esta acción está bien definida en virtud del teorema 2.20. Como es ya usual, basta definir la acción sobre los elementos de la forma $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ ya que estos generan $\bigotimes^p V$.

Proposición 5.2. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y dos permutaciones $\sigma, \rho \in S^p$. Entonces $\sigma(\rho(v)) = (\sigma\rho)(v)$ para todo $v \in V$

Demostración. Sean $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in \bigotimes^p V$ y $\rho, \sigma \in S_p$. La acción $\rho(v)$ lleva el vector en la i-ésima posición de v a la posición $\rho(i)$. Como σ actúa de igual manera que sigma, lleva la componente en la j-ésima posición a la posición $\sigma(j)$, de forma que $\sigma(\rho(v))$ lleva la componente en la i-ésima posición a la posición $\sigma(\rho(i))$. Similarmente, $\sigma\rho$ actúa llevando la componente en la i-ésima posición a la posición $(\sigma\rho)(i)$. Por la estructura de grupo de S_p, se cumple que $\sigma(\rho(i)) = (\sigma\rho)(i)$. Por lo tanto, queda demostrada el resultado deseado. □

Definición 5.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define $N^p(V)$ el subespacio vectorial de $\bigotimes^p V$

$$N^p(V) = \mathbb{F}\left\langle\left\{ v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in \bigotimes^p V | v_i = v_j \text{ para algún } i \neq j \right\}\right\rangle.$$

Nota 5.4. Por definición se toman $N^0(V) = N^1(V) = 0$.

Proposición 5.5. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $N^p(V)$ el subespacio de $\bigotimes^p V$ definido en 5.3. Se cumple que los elementos de la forma $v - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(v)$ pertenecen a $N^p(V)$ donde $v \in \bigotimes^p V$, $\sigma \in S_p$ y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ representa la signatura de la permutación σ.

Demostración. Basta comprobarlo para los elementos de la forma $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$. Considerando la trasposición $\sigma = (ij)$, se tiene

$$\begin{gathered} v - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(v) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_p - (-1)v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_p = \\ = v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_p + v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_p \\ = v_1 \otimes \ldots \otimes (v_i + v_j) \otimes \ldots \otimes (v_i + v_j) \otimes \ldots \otimes v_p \\ -v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_p - v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_p. \end{gathered}$$

Que es un elemento de $N^p(V)$ ya que todos los sumandos tienen la forma de los generadores dados en la definición de $N^p(V)$. Como las trasposiciones generan el grupo S_p, queda probada la proposición. □

Definición 5.6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define la p-ésima potencia alternada de V como

$$\bigwedge^p V := \bigotimes^p V/N^p(V),$$

donde $N^p(V)$ es el subespacio definido en 5.3.

Notación 5.7. Es usual denotar los elementos $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p + N^p(V)$ de $\bigwedge^p V$ por $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$.

5.2. Alternador

Asumiendo que la característica del cuerpo base $\mathbb{F}$ es cero, la otra manera usual de definir las potencias alternadas de un espacio vectorial es como la imagen de cierta aplicación.

Definición 5.8. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define la aplicación alternador

$$\begin{aligned} Alt\colon \bigotimes^p V &\longrightarrow \bigotimes^p V \\ v &\longmapsto \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(v). \end{aligned}$$

Proposición 5.9. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, para toda permutación $\rho \in S_p$

$$Alt \circ \rho = \rho \circ Alt = \operatorname{sgn}(\rho) Alt$$

Demostración. Veamos primero que $Alt \circ \rho = \operatorname{sgn}(\rho) Alt$

$$Alt \circ \rho = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\rho = \operatorname{sgn}(\rho)\frac{1}{p!}\sum_{(\sigma\rho)\in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma\rho)(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}(\rho) Alt.$$

Análogamente $\rho \circ Alt = \operatorname{sgn}(\rho) Alt$

$$\rho \circ Alt = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\rho\sigma = \operatorname{sgn}(\rho)\frac{1}{p!}\sum_{(\rho\sigma)\in S_p} \operatorname{sgn}(\rho\sigma)(\rho\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho) Alt.$$

□

Definición 5.10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define la p-ésima potencia alternada de V como

$$\bigwedge^p V := \operatorname{Im}(Alt),$$

donde la aplicación Alt es la definida por la ecuación 5.8.

A priori, nada nos asegura que las dos definiciones dadas para las potencias alternadas sean equivalentes o si quiera parecidas. Sin embargo, vamos a ver que sí que son equivalentes.

Teorema 5.11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, las dos definiciones 5.3 y 5.10 dadas de la p-ésima potencia alternada de V son isomorfas.

Demostración. Veamos primero que $\ker(Alt) = N^p(V)$.

- $\subseteq$ Sea $u \in \ker(Alt)$, se cumple que $u = u - Alt(u) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(u - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(u))$ que pertenece a $N^p(V)$ por ser suma finita de elementos de la forma $u - \operatorname{sgn}(\rho)\rho(u) \in N^p(V)$. Por lo tanto $u \in N^p(V)$ y $\ker(Alt) \subseteq N^p(V)$.

- $\supseteq$ $N^p(V)$ está generado por los elementos de la forma $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ tales que $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$, por lo tanto basta ver que estos generadores pertenecen a $\ker(Alt)$. Sea $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in N^p(V)$, entonces existe una trasposición τ tal que $\tau(v) = v$. Por la proposición 5.9 se tiene $Alt(\tau(v)) = -Alt(v)$, pero $Alt(\tau(v)) = Alt(v)$. Por lo tanto $Alt(v) = 0$, equivalentemente $v \in \ker(Alt)$ y $N^p(V) \subseteq \ker(Alt)$.

Queda así probado que $\ker(Alt) = N^p(V)$. Por lo tanto $\bigotimes^p V/N^p(V) = \bigotimes^p V/\ker(Alt) \cong \operatorname{Im}(Alt)$, donde la isomorfía está garantizada por el primer teorema de isomorfía. Queda así demostrado que ambas definiciones son equivalentes (a lo sumo salvo isomorfismo). $\square$

Proposición 5.12. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. La aplicación $Alt : \bigotimes^p V \to \bigotimes^p V$ es una proyección.

Demostración. Para comprobar esto basta ver que $Alt^2 = Alt$

$$
\begin{aligned}
Alt^2 = \frac{1}{(p!)^2}\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\sum_{\rho\in S_p}\operatorname{sgn}(\rho)\rho &= \frac{1}{(p!)^2}\sum_{\sigma,\rho\in S_p}\operatorname{sgn}(\sigma\rho)(\sigma\rho) \overset{\tau=\sigma\rho}{=} \frac{1}{(p!)^2}\sum_{\tau,\rho\in S_p}\operatorname{sgn}(\tau)\tau \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\operatorname{sgn}(\tau)\tau = Alt.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto Alt es una proyección y $\bigotimes^p V = \operatorname{Im}(Alt) \oplus \ker(Alt) = \bigwedge^p V \oplus N^p(V)$. $\square$

Nota 5.13. Esto permite expresar cualquier elemento v de $\bigotimes^p V$ de forma única como

$$v = v_a + v_s \text{ con } v_a \in \operatorname{Im}(Alt),\ \ v_s \in \ker(Alt).$$

La componente $v_a = Alt(v)$ suele denotarse como la componente antisimétrica de v. En particular, si $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$

$$Alt(v) = Alt(v_1 \otimes \ldots \otimes) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p.$$

5.3. Base y Dimensión

En este apartado se tratará de encontrar una base de la p-ésima potencia alternada de V a partir de una base del espacio de partida V. Para ello será crucial el uso del determinante.

Definición 5.14 (Símbolo de Levi-Civita)**.** Se define el símbolo de Levi-Civita en n índices

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} +1 \text{ si } (i_1,\dots,i_n) \text{ es una permutación par de } (1,\dots,n) \\ -1 \text{ si } (i_1,\dots,i_n) \text{ es una permutación impar de } (1,\dots,n) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Definición 5.15 (Determinante de una matriz)**.** Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, se define el determinante de A como

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\dots i_n}\prod_{k=1}^{n} a_{ki_k},$$

donde $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ es el símbolo de Levi-Civita.

Definición 5.16. Para toda pareja (p, n) se define el conjunto de índices

$$J_p^n = \{I = (i_1,\dots,i_p) | 1 \le i_1 < \dots < i_p \le n\}$$

Proposición 5.17. El cardinal del conjunto J_p^n definido en 6.15 es el número combinatorio $\binom{n}{p}$.

Demostración. Por la definición del conjunto J_p^n, se tiene que $i_1 \in \{1,\dots,n-p+1\}$, $i_j \in \{i_{j-1}+1,\dots,n-p+j\}$ para todo $2 \le j \le p-1$ e $i_p \in \{i_{p-1}+1,\dots,n\}$. Por lo tanto

$$|J_p^n| = \sum_{i_1=1}^{n-p+1}\cdots\sum_{i_p=i_{p-1}+1}^{n} 1.$$

Para $p = 1$ se tiene para todo n

$$|J_1^n| = \sum_{i_1=1}^{n} 1 = n = \binom{n}{1}.$$

Suponiendo que para todo n y para cierto p se cumple que $|J_p^n| = \binom{n}{p}$, vamos a probar por inducción que también se cumple para $p+1$

$$\begin{aligned} |J_{p+1}^n| = \sum_{i=1}^{n-(p+1)+1} |J_p^{n-i}| &= \sum_{i=i}^{n-p}\binom{n-i}{p} \overset{(k=i-1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1-p}\binom{n-k}{p} \overset{(l=n-k-p)}{=} \sum_{l=0}^{n-1-p}\binom{p+l}{p} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1-p}\binom{p+l}{l} \overset{(*)}{=} \binom{p+(n-1-p)+1}{n-1-p} = \binom{n}{p+1}. \end{aligned}$$

$(*)$ $\sum_{r=0}^{m}\binom{n+r}{r} = \binom{n+m+1}{m}$. Esta igualdad se da por la Identidad Combinatoria de Fermat, también conocida como la Identidad del Palo de Hockey, Merris [4]. $\square$

Lema 5.18. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, V^* el dual de V y $f\colon (V^*)^p \times$

$V^p \longrightarrow W$ una aplicación multilineal. Entonces f induce una aplicación bilineal $\bar{f}$ tal que

$$\begin{aligned}\bar{f}\colon \bigotimes^p(V^*) \times \bigotimes^p V &\longrightarrow W\\ (g_1 \otimes \ldots \otimes g_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) &\longmapsto f((g_1, \ldots, g_n), (v_1, \ldots, v_n))\end{aligned}$$

Demostración. Considerando el producto tensorial $(\bigotimes^p(V^*) \otimes \bigotimes^p V, \otimes_1)$ de p copias de V^* y p copias de V. Por la propiedad universal de $\otimes_1$, existe una única aplicación lineal F tal que $f = F \circ \otimes_1$. Considerando ahora $(\bigotimes^p(V^*) \otimes \bigotimes^p V, \otimes_2)$ como el producto tensorial de $\bigotimes^p(V^*)$ y $\bigotimes^p V$, por el corolario de correspondencia 2.9 existe una única aplicación bilineal $\bar{f}$ tal que $\bar{f} = F \circ \otimes_2$. $\square$

Teorema 5.19. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base. Entonces

$$\mathcal{B}_p^a = \{e_I \coloneqq \wedge_{i \in I} e_i | I \in J_p^n\}$$

es una base de $\bigwedge^p V$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}^* = \{\omega^j\}_{j=1}^n$ la base dual de $\mathcal{B}$. Se definen

$$\mathcal{B}_p^a = \{e_I \coloneqq \wedge_{i \in I} e_i | I \in J_p^n\} \quad \text{y} \quad (\mathcal{B}_p^a)^* = \{\omega^J \coloneqq \wedge_{j \in J} \omega_j | J \in J_p^n\}.$$

El objetivo es demostrar que estos dos conjuntos son bases de $\bigwedge^p V$ y $\bigwedge^p(V^*)$ respectivamente.

- $\mathcal{B}_p^a$ y $(\mathcal{B}_p^a)^*$ son sistemas generadores de $\bigwedge^p V$ y $\bigwedge^p(V^*)$ respectivamente. Comprobemos el primero de los casos, ya que el otro es análogo. Sea $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$ un elemento de la base de $\bigotimes^p V$ y la aplicación proyección $\pi_p\colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V/N^p(V) = \bigwedge^p V$. Entonces, $\pi_p(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ es igual a cero si $i_k = i_l$ para algún $k \neq l$ o se pueden renombrar y reordenar los índices de forma que $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = \pm(e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_p})$ con $1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq p$ y por lo tanto $\pi_p(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) \in \mathbb{F}\langle \mathcal{B}_p^a \rangle$. Al ser $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} | i_k = 1, \ldots, n\}$ base de $\bigotimes^p V$ y π_p una proyección (por lo tanto inyectiva), se tiene que $\pi_p(\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} | i_k = 1, \ldots, n\})$ es un sistema generador de $\bigwedge^p V$ y como acabamos de ver que $\pi_p(\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} | i_k = 1, \ldots, n\}) \subseteq \mathbb{F}\langle \mathcal{B}_p^a \rangle$, se tiene que $\mathcal{B}_p^a$ también es sistema generador.

- $\mathcal{B}_p^a$ y $(\mathcal{B}_p^a)^*$ son sistemas libres de $\bigwedge^p V$ y $\bigwedge^p(V^*)$ respectivamente. Para demostrar esto se considera la aplicación multilineal

$$\begin{aligned}f\colon (V^*)^p \times V^p &\longrightarrow \mathbb{F}\\ ((g_1, \ldots, g_p), (v_1, \ldots, v_p)) &\longmapsto \det(g_j(v_i))\end{aligned}$$

Por el lema 5.18, existe una única aplicación bilineal $\bar{f}$ tal que

$$\bar{f}\colon \bigotimes^p(V^*) \times \bigotimes^p V \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(g_1 \otimes \ldots \otimes g_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p)) \longmapsto \det(g_j(v_i)).$$

Veamos que $N^p(V^*) \times \bigotimes^p V + \bigotimes^p(V^*) \times N^p(V) \subseteq \ker \bar{f}$. Veamos primero que $N^p(V^*) \times \bigotimes^p V \subseteq \ker \bar{f}$, para ello basta comprobarlo para elementos de la forma $(g_1 \otimes \ldots \otimes g_p, v)$ tales que $g_k = g_l$ para algún $k \neq l$ y $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \in \bigotimes^p V$ ya que estos elementos generan $N^p(V^*)$.

$$\bar{f}(g_1 \otimes \ldots \otimes g_p, v) = det(g_i(v_j)) = 0.$$

El resultado es nulo por la propiedad del determinante de anularse al ser dos columnas o filas iguales. Por lo tanto $N^p(V^*) \times \bigotimes^p V \subseteq \ker \bar{f}$. De forma exactamente análoga se prueba que $\bigotimes^p(V^*) \times N^p(V) \subseteq \ker \bar{f}$ y en consecuencia $N^p(V^*) \times \bigotimes^p V + \bigotimes^p(V^*) \times N^p(V) \subseteq \ker \bar{f}$. Por la proposición 2.10, la aplicación $\bar{f}$ induce una aplicación bilineal F

$$F\colon \bigwedge^p(V^*) \times \bigwedge^p V \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(g_1 \wedge \ldots \wedge g_p, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \longmapsto \det(g_i(v_j))$$

Haciendo actuar esta aplicación sobre elementos de $(\mathcal{B}_p^a)^*$ y $\mathcal{B}_p^a$

$$F(\omega^J, e_I) = F(\omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_p}, e_{i_1}, \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \det(\omega^{j_k}(e_{i_l})) = \det(\delta_{i_l}^{j_k}) = \delta_I^J.$$

Por lo tanto F induce una relación de dualidad entre $(\mathcal{B}_p^a)^*$ y $\mathcal{B}_p^a$ y en consecuencia $(\mathcal{B}_p^a)^*$ y $\mathcal{B}_p^a$ son linealmente independientes.

□

Corolario 5.20. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$. Entonces, para todo natural p tal que $0 \leq p \leq n$

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^p V) = \binom{n}{p}.$$

Demostración. Por el teorema 5.19, $\mathcal{B}_p^a$ es base de $\bigwedge^p V$. Por lo tanto, haciendo uso de la proposición 5.17

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^p V) = |\mathcal{B}_p^a| = |J_p^n| = \binom{n}{p}.$$

□

Corolario 5.21. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces

$$\bigwedge^p V = 0 \text{ para todo } p > n.$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la prueba del teorema 5.19. □

Proposición 5.22. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V. Entonces, para todo p, con $0 \leq p \leq n$, se tiene que $\bigwedge^p V$ es isomorfo a $\bigwedge^{n-p} V$. Además un isomorfismo viene dado por

$$\phi\colon \bigwedge^p V \longrightarrow \bigwedge^{n-p} V$$

tal que $\phi(e_I) = e_J$ con $I \in J_p^n$ y $J = (j_1, \dots, j_{n-p}) = (1, \overset{\wedge i_k \in I}{\dots}, n)$

Demostración. Por el corolario 5.20 se tiene que

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^p V) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^{n-p} V).$$

Por lo tanto se tiene que los dos espacios vectoriales son isomorfos. Para ver que ϕ es de hecho un isomorfismo, basta ver que la imagen de la base de $\bigwedge^p V$ es base de $\bigwedge^{n-p} V$. Para ello basta ver que todo elemento e_J con $J \in J_{n-p}^n$ es imagen de un solo e_I con $I \in J_p^n$. Sea $J = (j_1, \dots, j_{n-p})$, J se puede esxcribir como $(1, \dots, n)$ al que se le han quitado ciertos $I = (i_1, \dots, i_p)$, es decir, $J = (1, \overset{\wedge i_k \in I}{\dots}, n)$. Por lo tanto $e_J = \phi(e_I)$, para un único $I \in J_p^n$. □

5.4. Homomorfismos

El objetivo de este apartado es el de extender los homomorfismos de V a homomorfismos de $\bigwedge^p V$. Basado en Rotman [6].

Definición 5.23. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una aplicación multilineal $f\colon V^p \longrightarrow W$ se dice alternada si

$$f(v_1, \dots, v_p) = 0$$

siempre que $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$.

Proposición 5.24. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f\colon V^p \longrightarrow W$ una aplicación alternada. Entonces, existe una única aplicación lineal $\bar{f}\colon \bigwedge^p V \longrightarrow W$ de forma que $f = \bar{f} \circ h$, con $h\colon V^p \longrightarrow \bigwedge^p V$ tal que $h(v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ para todo $v_1, \dots, v_p \in V^p$.

Demostración. Se define la aplicación $h\colon V^p \longrightarrow \bigwedge^p V$ de forma que $h(v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ para todo $(v_1, \dots, v_p) \in V^p$. Claramente h es multilineal, por lo tanto por la propiedad universal existe una única aplicación lineal $\bar{h}\colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigwedge^p V$ tal que $h = \bar{h} \circ \otimes$. Sin embargo, la aplicación proyección $\pi_p\colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V/N^p(V) = \bigwedge^p V$ satisface la ecuación $h = \pi_p \circ \otimes$, por lo tanto necesariamente $\bar{h} = \pi_p$. Construyamos ahora la aplicación $\bar{f}$. Como f es multilineal, existe una única aplicación lineal f' tal que $f = f' \circ \otimes$. Al ser f alternada $f'(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) = 0$ siempre que $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$, lo que implica que $N^p(V) \subseteq Ker(f')$. Así, por el lema 2.6, f' induce una aplicación lineal $\bar{f}\colon \bigwedge^p V \longrightarrow W$ tal que $f' = \bar{f} \circ \pi_p$. Por lo tanto

$$\bar{f} \circ h = \bar{f} \circ \pi_p \circ \otimes = f' \circ \otimes = f.$$

Además $\bar{f}$ es única porque f' es única. $\square$

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & \otimes^p V \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "f'"] & \bigwedge^p V \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Proposición 5.25. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $g \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, g define un endomorfismo de $\bigwedge^p V$ dado por

$$\begin{aligned} \bigwedge{}^p g\colon \bigwedge^p V &\longrightarrow \bigwedge^p V \\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_p &\longmapsto g(v_1) \wedge \ldots \wedge g(v_p). \end{aligned}$$

Demostración. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon V^p &\longrightarrow \bigwedge^p V \\ (v_1, \ldots, v_p) &\longmapsto g(v_1) \wedge \ldots \wedge g(v_p). \end{aligned}$$

La aplicación f queda unívocamente determinada por g y obviamente es alternada. Por lo tanto, tomando $W = \bigwedge^p V$ en la proposición 5.24, existe una única función lineal $\bar{f}\colon \bigwedge^p V \longrightarrow \bigwedge^p V$ tal que $f = \bar{f} \circ h$, con $h = \pi_p \circ \otimes$ definida como en la proposición mencionada. Es decir, para todo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \in \bigwedge^p V$

$$\bar{f}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = g(v_1) \wedge \ldots \wedge g(v_p).$$

Queda demostrado que $\bar{f} \in \mathrm{End}(\bigwedge^p V)$. $\square$

Vamos a ver a continuación como se define el determinante de un endomorfismo sin tener que recurrir a matrices ni a bases concretas.

Definición 5.26. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y sea $h \in \mathrm{End}(V)$. Se define el determinante del endomorfismo h como la constante $\lambda \in F$ tal que $(\bigwedge^n h)(v) = \lambda v$ para todo $v \in \bigwedge^p V$. Se denota por $\det(h)$ a tal constante λ.

Lema 5.27. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con Base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Entonces, para todo conjunto de índices $(i_1, \ldots, i_n)$ se cumple

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Demostración. Si $i_j = i_k$ para algún $j \neq k$, $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = 0$ y se satisface la igualdad. Si no, tomando la permutación $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, por la proposición 5.5, se tiene que

$$\sigma(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \operatorname{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n)}. \tag{5.1}$$

Por la definición del símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \operatorname{sgn}(\sigma)$ y por lo tanto

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

□

Proposición 5.28. La definición dada del determinante de un endomorfismo en 5.26 es consistente con la dada en 5.15 para una matriz cuadrada.

Demostración. Sea $h \in \operatorname{End}(V)$, con V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $dim_{\mathbb{F}} V = n$. $\bigwedge^n h \in \operatorname{End}(\bigwedge^n V)$ queda determinada por su acción sobre una base. Por el teorema 5.19, $\{e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\}$ es base de $\bigwedge^n V$ y por lo tanto basta determinar $\bigwedge^n h(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)$. Un endomorfismo se caracteriza por la imagen de una base, en particular h queda determinado por $h(e_i) = \sum_{j=1}^n h^j(e_i) e_j$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\bigwedge^n h(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) &= h(e_1) \wedge \ldots \wedge h(e_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n h^{j_1}(e_1) e_{j_1} \wedge \ldots \wedge h^{j_n}(e_n) e_{j_n} \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n \left(\prod_{k=1}^n h^{j_k}(e_k) \right) e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} = \left[\sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} \left(\prod_{k=1}^n h^{j_k}(e_k) \right) \right] e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se tiene por el lema 5.27. Según la definición 5.26, el determinante de h viene dado por $\sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^n \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} \left(\prod_{k=1}^n h^{j_k}(e_k) \right)$. Representando el endomorfismo h como una matriz respecto de la base $\{e_i\}_{i=1}^n$: $h^j(e_i)$, se tiene por la definición 5.15 que el determinante de h viene dado por $\sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^n \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \prod_{k=1}^n h^k(e_{i_k}) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^n \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \prod_{k=1}^n h^{i_k}(e_k)$. En la última igualdad se ha hecho uso de la conocida propiedad $\det(A^T) = \det(A)$. Como se puede observar ambas definiciones coinciden. □

Nota 5.29. Esta última definición del determinante es más fundamental en el sentido de que se define de forma intrínseca sin necesidad de hacer uso de ninguna base en concreto. Vamos a ver ahora como algunas de las propiedades más importantes del determinante pueden obtenerse mediante esta definición libre de bases.

Proposición 5.30. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$. Entonces, para todo $f, g \in \operatorname{End}(V)$ y para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple

1. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

2. $\det(f^t) = \det(f)$.

3. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

4. Si existe f^{-1}, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Demostración. Tomando $f, g \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ arbitrarios:

1. Para todo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$

   $$\bigwedge^n(\lambda f)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \lambda f(v_1) \wedge \ldots \wedge \lambda f(v_n) = \lambda^n f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n) = \lambda^n \det(f) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

   Por lo tanto $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

2. Para todo $\wedge_{i=1}^n \alpha_i \in \bigwedge^n(V^*)$ y para todo $\wedge_{j=1}^n v_j \in \bigwedge^n V$ se tiene que

   $$\begin{aligned}[(\bigwedge^n f^t)(\wedge_{i=1}^n \alpha_i)](\wedge_{j=1}^n v_j) = [\wedge_{i=1}^n (\alpha_i \circ f)](\wedge_{i=1}^n v_i) = \det[(\alpha_i \circ f)(v_i)] = \det[\alpha_i(f(v_j))] \\ (\wedge_{i=1}^n \alpha_i)(\wedge_{j=1}^n f(v_j)) = (\wedge_{i=1}^n \alpha_i)[(\bigwedge^n f)(\wedge_{j=1}^n v_j)] = \det(f)(\wedge_{i=1}^n \alpha_i)(\wedge_{j=1}^n v_j).\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $(\bigwedge^n f^t)(\wedge_{i=1}^n \alpha_i) = \det(f)(\wedge_{i=1}^n \alpha_i)$, que implica $\det(f^t) = \det(f)$.

3. Para todo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$

   $$\begin{aligned}\bigwedge^n(f \circ g)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) &= f(g(v_1)) \wedge \ldots \wedge f(g(v_n)) = \bigwedge^n(f)(\bigwedge^n g(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)) \\ &= \bigwedge^n(f)(\det(g) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det(f)\det(g) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.\end{aligned}$$

   Por lo tanto $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

4. Si existe f^{-1}, $f \circ f^{-1} = Id_V$. Por lo tanto

   $$\det(f)\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(Id_V).$$

   Claramente $\det(Id_V) = 1$ ya que $(\bigwedge^n Id_V)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ para todo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$. Lo que implica que $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

$\square$

Proposición 5.31. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tales que $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y $dim_{\mathbb{F}}(W) = m$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $g \in \mathrm{End}(W)$. Entonces,

$$\det(f \otimes g) = (\det(f))^m (\det(g))^n.$$

Demostración. Por la proposición 2.18 se tiene que $f\otimes g = (f\otimes Id_W)\circ(Id_V\otimes g)$, donde Id_V y Id_W son las aplicaciones identidad en V y W respectivamente. Por el tercer apartado de la proposición anterior se cumple que $\det(f\otimes g) = \det(f\otimes Id_W)\det(Id_V\otimes g)$. Para calcular $\det(f\otimes Id_W)$, tomemos $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{w_j\}_{j=1}^n$ bases de V y W respectivamente. Por el corolario 2.24 $dim_{\mathbb{F}}(V\otimes W) = nm$ y entonces, por el teorema 5.19, se tiene que $\bigwedge^{nm}(V\otimes W) = \mathbb{F}\langle\wedge_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^n v_i\otimes w_j)\rangle$. Así,

$$\begin{aligned}
\bigwedge^{nm}(f\otimes Id_W)(\wedge_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^n v_i\otimes w_j)) &= \wedge_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^n f(v_i)\otimes w_j) = \wedge_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^n f^{k_i}(v_i)v_{k_i}\otimes w_j)\\
&= \wedge_{j=1}^m\left[\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n f^{k_1}(v_1)\dots f^{k_n}(v_n)(\wedge_{i=1}^n v_{k_i}\otimes w_j)\right]\\
&= \wedge_{j=1}^m\left[\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n f^{k_1}(v_1)\dots f^{k_n}(v_n)\varepsilon_{k_1\dots k_n}(\wedge_{i=1}^n v_i\otimes w_j)\right]\\
&= \left[\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n f^{k_1}(v_1)\dots f^{k_n}(v_n)\varepsilon_{k_1\dots k_n}\right]^m \wedge_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^n v_i\otimes w_j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\det(f\otimes Id_W) = \left[\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n f^{k_1}(v_1)\dots f^{k_n}(v_n)\varepsilon_{k_1\dots k_n}\right]^m = (\det(f))^m.$$

De forma análoga se prueba que $\det(Id_W\otimes g) = (\det(g))^n$ y por lo tanto se tiene que

$$\det(f\otimes g) = \det(f\otimes Id_W)\det(Id_W\otimes g) = (\det(f))^m(\det(g))^n.$$

□

5.5. Álgebra Exterior

Definición 5.32. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Para todo $p,q\in\mathbb{N}$ se definen las aplicaciones bilineales

$$\begin{aligned}
\mu_{pq}\colon \bigwedge^p V\times\bigwedge^q V &\longrightarrow \bigwedge^{p+q} V\\
(v_1\wedge\dots\wedge v_p, v_{p+1}\wedge\dots\wedge v_{p+q}) &\longmapsto v_1\wedge\dots\wedge v_{p+q}.
\end{aligned}$$

Notación 5.33. Dados $u\in\bigwedge^p V$ y $v\in\bigwedge^q V$, el elemento $\mu_{pq}(u,v)\in\bigwedge^{p+q}V$ suele denotarse por $u\wedge v$.

Definición 5.34. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define el álgebra exterior de V como el espacio vectorial

$$\bigwedge V = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge^p V$$

dotado del producto bilineal interno inducido por las aplicaciones μ_{pq}.

Teorema 5.35. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. El álgebra exterior de V definida en 5.34 es un álgebra graduada.

Demostración. La construcción del espacio vectorial se realiza de forma análoga a como se hizo para el álgebra tensorial 4.1, solo que en este caso solo hay un número finito de potencias alternadas distintas de cero. Teniendo en cuenta que los elementos de $\bigwedge V$ son de la forma $v = \sum_{p=0}^{n} v_p$ con $v_p \in \bigwedge^p V$, el producto bilineal interno se define también de manera análoga al del álgebra tensorial

$$\begin{aligned} \wedge \colon \bigwedge V \times \bigwedge V &\longrightarrow \bigwedge V \\ (u,v) &\longmapsto u \wedge v = \sum_{p,q=0}^{n} \mu_{pq}(u_p, v_q). \end{aligned}$$

Nótese que los factores en la última suma tales que $p+q>n$ serán nulos ya que $\bigwedge^j V = 0$ para todo $j>n$. Este producto es bilineal porque todas las aplicaciones μ_{pq} lo son y es asociativo poruqe el producto tensorial lo es y, por lo tanto, dota al espacio vectorial $\bigwedge V$ de estructura de álgebra asociativa. La $\mathbb{Z}$-graduación surge también de manera análoga a la del álgebra tensorial al considerar cada subespacio $\bigwedge^p V$ de $\bigwedge V$ como el subespacio de grado p ya que dados $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \in \bigwedge^p V$ y $u = u_1 \wedge \ldots \wedge u_q \in \bigwedge^q V$ se tiene que

$$v \wedge u = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q} \in \bigwedge^{p+q} V,$$

donde se han renombrado $u_i = v_{p+i}$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Por lo tanto, se cumple que $\bigwedge^p V \bigwedge^q V \subseteq \bigwedge^{p+q} V$ y se tiene la graduación mencionada. □

Proposición 5.36. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$. Entonces el álgebra tensorial de V tiene dimensión $dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge V) = 2^n$

Demostración. Por el corolario 5.20, se tiene que $dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^p V) = \binom{n}{p}$. Por lo tanto

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge V) = dim_{\mathbb{F}}(\bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^p V) = \sum_{p=0}^{n} dim_{\mathbb{F}}(\bigwedge^p V) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

□

Proposición 5.37. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces

$$\bigwedge V = \bigotimes V / N(V),$$

donde se ha definido

$$N(V) = \bigoplus_{p \geq 0} N^p(V).$$

Demostración. Tomando las aplicaciones proyeccción $\pi_p \colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V/N^p(V)$, se extienden a una aplicación lineal

$$\begin{aligned} \pi \colon \bigotimes V &\longrightarrow \bigotimes V \\ v = \sum_{p\geq 0} v_p &\longmapsto \sum_{p\geq 0} \pi_p(v_p) \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Im}(\pi_p) = \bigwedge^p V$ y $\bigwedge V = \bigoplus_p \bigwedge^p V$, se tiene que $\mathrm{Im}(\pi) = \bigwedge V$. Por lo tanto, $\bigwedge V = \mathrm{Im}(\pi) \cong \bigotimes V/\ker(\pi) = \bigotimes V/N(V)$. La igualdad $\ker(\pi) = N(V)$ se da ya que

$$\pi(v) = \sum_p \pi_p(v_p) = 0 \iff \pi_p(v_p) = 0 \text{ para todo } p \iff v_p \in N^p(V) \text{ para todo } p.$$

□

Proposición 5.38. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $u \in \bigwedge^p V$ y $v \in \bigwedge^q V$. Entonces,

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u.$$

Demostración. Dados $u = u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \in \bigwedge^p V$ y $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_q \in \bigwedge^q V$

$$u \wedge v = u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_q$$

y

$$v \wedge u = v_1 \wedge \ldots \wedge v_q \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_p.$$

Para pasar de una expresión a la otra hay que reordenar pq elementos y como cada reordenamiento da lugar a un -1, se tiene que

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u.$$

□

Proposición 5.39. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, f induce un endomorfismo del álgebra exterior de V.

Demostración. Considerando para todo $p \geq 2$ el endomorfismo $\bigwedge^p f$ construido en la proposición 5.25 y extendiendo la notación al caso $p = 1$ denotando por $\bigwedge^1 f$ a f y definiendo en el caso $p = 0$, $\bigwedge^0 f = Id_{\mathbb{F}}$. Se define

$$\begin{aligned} F \colon \bigwedge V &\longrightarrow \bigwedge V \\ v = \sum_{p=0}^{n} v_p &\longmapsto \sum_{p=0}^{n} (\bigwedge^p f)(v_p). \end{aligned}$$

La linealidad de F se sigue de su construcción y de la linealidad de todas las $\bigwedge^p f$. Por lo tanto, $F \in \mathrm{End}(\bigwedge V)$. □

5.6. Álgebra Exterior Mixta

Definición 5.40. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Para toda pareja de naturales (p, q) se define la (p, q)-ésima potencia alternada de V como el espacio

$$\bigwedge{}_q^p(V^*, V) = \bigwedge^p(V^*) \otimes \bigwedge^q V.$$

Definición 5.41. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Para todo $p, q, k, l \in \mathbb{N}$ se define la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \xi_{ql}^{pk} \colon \bigwedge{}_q^p(V^*, V) \times \bigwedge{}_l^k(V^*, V) &\longrightarrow \bigwedge{}_{q+l}^{p+k}(V^*, V) \\ (f \otimes v, g \otimes u) &\longmapsto (f \wedge g) \otimes (v \wedge u). \end{aligned}$$

Definición 5.42. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Se define el álgebra exterior mixta sobre V y V^* como el espacio vectorial

$$\bigwedge(V^*, V) = \bigwedge(V^*) \otimes \bigwedge V$$

dotado del producto bilineal interno inducido por las aplicaciones ξ_{ql}^{pk}.

Teorema 5.43. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión n y V^* su dual. El espacio vectorial definido en 5.42 se puede expresar como suma directa

$$\bigwedge(V^*, V) = \bigoplus_{p,q=0}^{n} \bigwedge{}_q^p(V^*, V).$$

Además, las aplicaciones bilineales ξ_{ql}^{pk} inducen un producto bilineal interno sobre $\bigwedge(V^*, V)$ dotándolo de estructura de álgebra graduada.

Demostración. Como

$$\bigwedge V = \bigoplus_{q=0}^{n} \bigwedge^q V \quad \text{y} \quad \bigwedge(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^p(V^*),$$

por el teorema 2.21 se tiene que

$$\bigwedge(V^*, V) = \bigoplus_{p,q=0}^{n} \bigwedge{}_q^p(V^*, V).$$

Por lo tanto los elementos v de $\bigwedge(V^*, V)$ se expresan como sumas de la forma $v = \sum_{p,q=0}^{n} \sum_{j_{pq}=1}^{m_{pq}} f_{j_{pq}} \otimes v_{j_{pq}}$ donde $f_{j_{pq}} \in \bigwedge^p(V^*)$ y $v_{j_{pq}} \in \bigwedge^q V$ para todo $j_{pq} = 1, \dots, m_{pq}$ con m_{pq} ciertos naturales. El producto bilineal interno que inducen las aplicaciones ξ_{ql}^{pk} viene dado por

$$\begin{aligned}\cdot : \bigwedge(V^*, V) \times \bigwedge(V^*, V) &\longrightarrow \bigwedge(V^*, V) \\ \Big(\sum_{p,q=0}^{n} f_p \otimes v_q, \sum_{k,l=0}^{n} g_k \otimes u_l\Big) &\longmapsto \sum_{p,q,k,l=0}^{n} \xi_{ql}^{pk}(f_p \otimes v_q, g_k \otimes u_l) \\ &= \sum_{p,q,k,l=0}^{n} (f_p \wedge g_k) \otimes (v_q \wedge u_l)\end{aligned}$$

La asociatividad y bilinealidad de este producto se siguen de la asociatividad del producto tensorial y de la bilinealidad de todas las aplicaciones ξ_{ql}^{pk}. Por lo tanto, este producto dota de estructura de álgebra asociativa al espacio vectorial $\bigwedge(V^*, V)$. La graduación se trata de una $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-graduación y viene de considerar cada subespacio $\bigwedge_q^p(V^*, V)$ de la descomposición en suma directa de $\bigwedge(V^*, V)$ como el espacio de grado (p, q) ya que dados $f \otimes v \in \bigwedge_q^p(V^*, V)$ y $g \otimes u \in \bigwedge_l^k(V^*, V)$

$$(f \otimes v) \cdot (g \otimes u) = (f \wedge g) \otimes (v \wedge u) \in \bigwedge\nolimits_{q+l}^{p+k}(V^*, V).$$

Así, $\bigwedge_q^p(V^*, V) \bigwedge_l^k(V^*, V) \subseteq \bigwedge_{q+l}^{p+k}(V^*, V)$, obteniendose la graduación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $\square$

6. Potencias Simétricas

Los tensores simétricos de grado p, de forma análoga a los antisimétricos, se definen como los elementos no nulos de la p-ésima potencia simétrica del espacio vectorial. Igual que en el caso de las potencias alternadas, hay varias formas de definir estos espacios, que como veremos son equivalentes. Basado en Greub [3].

6.1. Cociente

De forma análoga a la definición de las potencias alternadas mediante el cociente por un subespacio, las potencias simétricas se pueden definir de la siguiente manera.

Definición 6.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define el subespacio de $\bigotimes^p V$

$$M^p(V) = \mathbb{F}\left\langle \left\{ v - \tau(v) | v \in \bigotimes^p V,\ \tau \in S_p \text{ una trasposición} \right\} \right\rangle.$$

Nota 6.2. Igual que $N^0(V) = N^1(V) = 0$, se definen $M^0(V) = M^1(V) = 0$.

Proposición 6.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, para todo $v \in \bigotimes^p V$ y toda permutación $\sigma \in S_p$

$$v - \sigma(v) \in M^p(V).$$

Demostración. Sea $v \in M^p(V)$ un generador de la forma $v = u - \tau(u)$ con τ una trasposición y sea ρ otra trasposición, entonces,

$$v - \rho(v) = (u - \tau(u)) - (\rho(u) - \rho(\tau(u))) = (u - \rho(u)) - (\tau(u) - \rho(\tau(u))).$$

Que pertenece a $M^p(V)$ por ser combiancióon lineal de dos generadores. El resultado general se sigue por inducción igual que en la prueba de la proposición 5.5 ya que toda permutación se puede descomponer como producto de trasposiciones. □

Definición 6.4. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define la p-ésima potencia simétrica de V como

$$\bigvee^p V := \bigotimes^p V / M^p(V),$$

donde $M^p(V)$ es el subespacio definido en 6.1.

Notación 6.5. Es usual denotar los elementos de $\bigvee^p V$ de la forma $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p + M^p(V)$ por $v_1 \vee \ldots \vee v_p$.

Nota 6.6. Tal y como se indicó en la introducción, se trabaja con espacios vectoriales sobre cuerpos de característica distinta de dos y es en esta sección donde se ve la necesidad de esta restricción. Si se trabajara sobre un cuerpo de característica dos las definiciones de los subespacios $N^p(V)$ y $M^p(V)$ serían iguales ya que $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (en característica dos $1 = -1$) para toda permutación $\sigma \in S^p$. Por lo tanto las potencias alternadas y simétricas coincidirían.

6.2. Simetrizador

En este apartado se supondrá que el cuerpo base $\mathbb{F}$ es de característica cero. Para definir las potencias simétricas de un espacio vectorial se hace uso de una aplicación similar al alternador.

Definición 6.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define la aplicación simetrizador

$$\begin{aligned} Sim\colon \bigotimes^p V &\longrightarrow \bigotimes^p V \\ v &\longmapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(v). \end{aligned}$$

Proposición 6.8. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, para toda permutación $\rho \in S_p$ se cumple

$$\rho \circ Sim = Sim \circ \rho = Sim.$$

Demostración. Veamos primero que $\rho \circ Sim = Sim$.

$$\rho \circ Sim = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \rho\sigma = \frac{1}{p!} \sum_{(\rho\sigma) \in S_p} (\rho\sigma) = Sim.$$

Análogamente, $Sim \circ \rho = Sim$.

$$Sim \circ \rho = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma\rho = \frac{1}{p!} \sum_{(\sigma\rho) \in S_p} (\sigma\rho) = Sim.$$

□

Definición 6.9. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se define la p-ésima potencia simétrica de V como

$$\bigvee^p V \coloneqq \operatorname{Im}(Sim),$$

donde la aplicación Sim es el simetrizador definido en 6.7.

Igual que en el caso de las potencias alternadas, vamos a comprobar que las dos definiciones dadas de las potencias simétricas son equivalentes.

Teorema 6.10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, las dos definiciones dadas de la p-ésima potencia simétrica de V, 6.4 y 6.9, son isomorfas.

Demostración. Comprobemos que $\ker(Sim) = M^p(V)$.

- $\subseteq$ Sea $u \in \ker(Sim)$. Se cumple $u = u - Sim(u) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(u - \sigma(u))$ que pertenece a $M^p(V)$ por ser suma finita de elementos de la forma $v-\sigma(v)$, que pertenecen a $M^p(V)$ por definición. Por lo tanto, $\ker(Sim) \subseteq M^p(V)$.
- $\supseteq$ Como $M^p(V)$ está generado por los elementos de la forma $u - \sigma(u)$ con $u \in \bigotimes^p V$ y $\sigma \in S_p$ una trasposición, basta ver que estos generadores pertenecen a $\ker(Sim)$. $Sim(u - \sigma(u)) = Sim(u) - (Sim \circ \sigma)(u) \overset{(6,8)}{=} Sim(u) - Sim(u) = 0$. Por lo tanto, $M^p(V) \subseteq \ker(Sim)$.

Queda así probado que $\ker(Sim) = M^p(V)$. Así $\operatorname{Im}(Sim) \cong \bigotimes^p V/\ker(Sim) = \bigotimes^p V/M^p(V)$ y se concluye que ambas definiciones son equivalentes. □

Proposición 6.11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se cumple entonces que la aplicación simetrizador definida en 6.7 es una proyección.

Demostración. Basta comrpobar que se cumple $Sim^2 = Sim$.

$$Sim^2 = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma\in S_p} \sigma \sum_{\rho\in S_p} \rho = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma,\rho\in S_p} (\sigma\rho) \overset{\tau=\sigma\rho}{=} \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\tau,\rho\in S_p} \tau = \frac{1}{p!} \sum_{\tau\in S_p} \tau = Sim.$$

Por lo tanto Sim es una proyección y $\bigotimes^p V = \ker(Sim) \oplus \operatorname{Im}(Sim) = \bigvee^p V \oplus M^p(V)$. □

Nota 6.12. Esto permite expresar cualquier elemento v de $\bigotimes^p V$ de forma única como

$$v = v_s + v_a \text{ con } v_s \in \operatorname{Im}(Sim),\;\; v_a \in \ker(Sim).$$

La componente $v_s = Sim(v)$ suele denotarse como la componente simétrica de v. En particular, si $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ se suele utilizar la notación

$$Sim(v) = Sim(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) = v_1 \vee \ldots \vee v_p.$$

6.3. Base y Dimensión

En este apartado se tratará de encontrar una base de la p-ésima potencia simétrica de V partiedno de una base dada de V. Para ello será crucial el uso del permanente, una función similar al determinante.

Definición 6.13 (Permanente de una matriz)**.** Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, se define el permanente de A como

$$\operatorname{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Nota 6.14. Nótese que $\operatorname{perm}(A^T) = \operatorname{perm}(A)$ para toda matriz cuadrada A.

Definición 6.15. Para toda pareja (p, n) se define el conjunto de índices

$$K_p^n = \{I = (i_1, \ldots, i_p) | 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n \leq n\}$$

Proposición 6.16. El cardinal del conjunto K_p^n definido en 6.15 es el número combinatorio $\binom{n+p-1}{p}$.

Demostración. Por la definición del conjunto K_p^n, $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ e $i_j \in \{i_{j-1}, \ldots, n\}$ para $2 \leq j \leq p$. Por lo tanto,

$$|K_p^n| = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=i_{p-1}}^{n} 1.$$

Para $p = 1$ y para todo n se tiene que

$$|K_1^n| = \sum_{i_1=1}^{n} 1 = n = \binom{n+1-1}{1}.$$

Vamos a probar por inducción el resultado general. Suponiendo que $|K_p^n| = \binom{n+p-1}{p}$ para cierto p,

$$\begin{aligned} |K_{p+1}^n| &= \sum_{i=1}^{n} |K_p^{n-i+1}| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+1+p-1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+p}{p} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+p}{n-i} \\ &\overset{(k=n-i)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+p}{k} \overset{(*)}{=} \binom{p+(n-1)+1}{n-1} = \binom{n+(p+1)-1}{p+1}. \end{aligned}$$

$(*)$ Donde se ha vuelto a utilizar la Identidad Combinatoria de Fernat, Merris [4]. $\square$

Teorema 6.17. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base. Entonces,

$$\mathcal{B}_p^s = \{e_I = \vee_{i \in I} e_i | I \in K_p^n\}$$

es una base de $\bigvee^p V$.

Demostración. Considerando $\mathcal{B}^* = \{\omega^j\}_{j=1}^n$ la base dual de $\mathcal{B}$, se definen

$$\mathcal{B}_p^s = \{e_I = \vee_{i\in I} e_i | I \in K_p^n\} \quad \text{y} \quad (\mathcal{B}_p^s)^* = \{\omega^J = \vee_{j\in J}\omega^j | J \in K_p^n\}.$$

Probemos que estos dos conjuntos son bases de $\bigvee^p V$ y $\bigvee^p(V^*)$ respectivamente.

- Considerando la proyección $\pi_p\colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V/M^p(V)$ y $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ un elemento de la base de $\bigotimes^p V$, se tiene que $\pi_p(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}) = e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p} + M^p(V) = e_{i_1}\vee\ldots\vee e_{i_p}$. Por la proposición 6.3, se tiene que $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p} + M^p(V) = \sigma(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}) + M^p(V)$ para toda permutación $\sigma\in S_p$. Esto implica que existen índices $j_1\leq\ldots\leq j_p$ de forma que $e_{i_1}\vee\ldots\vee e_{i_p} = e_{j_1}\vee\ldots\vee e_{j_p}$ y por lo tanto $\pi_p(\{e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}|i_k = 1,\ldots,n\})\subseteq\mathcal{B}_p^s$. Como $\{e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}|i_k=1,\ldots,n\}$ es una base de $\bigotimes^p V$ y la aplicación π_p es suprayectiva por ser una proyección, $\pi_p(\{e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}|i_k=1,\ldots,n\})$ es un sistema generador de $\bigvee^p V$ y, como $\pi(\{e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}|i_k=1,\ldots,n\})\subseteq\mathcal{B}_p^s$, $\mathcal{B}_p^s$ también es sistema generador de $\bigvee^p V$. De forma análoga se demuestra que $(\mathcal{B}_p^s)^*$ es sistema generador de $\bigvee^p(V^*)$.
- Se considera la aplicación multilineal

  $$\begin{aligned} f\colon (V^*)^p\times V^p &\longrightarrow \mathbb{F}\\ ((g_1,\ldots,g_p),(v_1,\ldots,v_p)) &\longmapsto \operatorname{perm}(g_j(v_i))). \end{aligned}$$

  Por el lema 5.18, existe una única aplicación bilineal $\bar f$ de forma que

  $$\begin{aligned} \bar f\colon \bigotimes^p(V^*)\times\bigotimes^p V &\longrightarrow \mathbb{F}\\ (g_1\otimes\ldots\otimes g_p, v_1\otimes\ldots\otimes v_p) &\longmapsto \operatorname{perm}(g_j(v_i)). \end{aligned}$$

  Como la aplicación permanente es simétrica respecto de las filas y respecto de las columnas se cumple que $M^p(V^*)\times\bigotimes^p V + \bigotimes^p(V^*)\times M^p(V)\subseteq\ker(\bar f)$. Por lo tanto, por la proposición 2.10, $\bar f$ induce una aplicación bilineal F

  $$\begin{aligned} F\colon \bigvee^p(V^*)\times\bigvee^p V &\longrightarrow \mathbb{F}\\ (g_1\vee\ldots\vee g_p, v_1\vee\ldots\vee v_p) &\longmapsto \operatorname{perm}(g_j(v_i)). \end{aligned}$$

  Actuando con esta aplicación sobre los elementos de $(\mathcal{B}_p^s)^*$ y $\mathcal{B}_p^s$

  $$F(\omega^J, e_I) = \operatorname{perm}(\omega^{j_k}(e_{i_l})) = \operatorname{perm}(\delta_{i_l}^{j_k}) = \delta_I^J.$$

  Es decir, F induce una relación de dualidad entre $(\mathcal{B}_p^s)^*$ y $\mathcal{B}_p^s$ y por lo tanto $(\mathcal{B}_p^s)^*$ y $\mathcal{B}_p^s$ son linealmente independientes.

□

Corolario 6.18. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$. Entonces para todo $p \geq 0$

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigvee^{p} V) = \binom{n+p-1}{p}$$

Demostración. Por el teorema 6.17, $\mathcal{B}_p^s = \{e_I = \vee_{i\in I} e_i | I \in K_p^n\}$ es una base de $\bigvee^p V$. Así, haciendo uso de la proposición 6.16,

$$dim_{\mathbb{F}}(\bigvee^{p} V) = |\mathcal{B}_p^s| = |K_p^n| = \binom{n+p-1}{p}.$$

□

Nota 6.19. A diferencia de las potencias alternadas, $\bigvee^p V$ no son el espacio vectorial nulo a partir de ningún p.

6.4. Homomorfismos

Tal y como se hizo en el caso de las potencias alternadas, el objetivo de este apartado es el de extender homomorfismos de V a homomorfismos de $\bigvee^p V$.

Definición 6.20. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una aplicación multilineal $f\colon V^p \longrightarrow W$ se dice simétrica si

$$f(v_1,\ldots,v_i,v_{i+1},\ldots,v_p) = f(v_1,\ldots,v_{i+1},v_i,\ldots,v_p) \text{ para todo } 1 \leq i \leq p-1, (v_1,\ldots,v_p) \in V^p.$$

Proposición 6.21. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f\colon V^p \longrightarrow W$ una aplicación simétrica. Entonces

$$f(v_1,\ldots,v_p) = f(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}) \text{ para todo } \sigma \in S_p$$

Demostración. El caso $\sigma = (i, i+1)$ se tiene por definición de aplicación homogénea. Como las trasposiciones de la forma $\tau = (i, i+1)$ generan S_p, basta comprobar que dadas dos trasposiciones de esta forma $\tau = (i, i+1)$ y $\rho = (j, j+1)$ se cumple que $f(v_{(\tau\rho)(1)},\ldots,v_{(\tau\rho)(p)}) = f(v_1,\ldots,v_p)$.

$$\begin{aligned} f(v_{(\tau\rho)(1)},\ldots,v_{(\tau\rho)(p)}) &= f(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(i+1)},v_{\rho(i)},\ldots,v_{\rho(p)}) = f(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(i)},v_{\rho(i+1)},\ldots,v_{\rho(p)}) \\ &= f(v_1,\ldots,v_{j+1},v_j,\ldots,v_p) = f(v_1,\ldots,v_j,v_{j+1},\ldots,v_p). \end{aligned}$$

Así, como se cumple para dos de estas trasposiciones, por inducción, se cumple para un número finito de ellas. □

Proposición 6.22. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f\colon V^p \longrightarrow W$ una aplicación simétrica. Entonces, existe una única aplicación lineal $\bar{f}\colon \bigvee^p V \longrightarrow W$ tal que $f = \bar{f} \circ h$, con $h\colon V^p \longrightarrow \bigvee^p V$ tal que $h(v_1,\ldots,v_p) = v_1 \vee \ldots \vee v_p$ para todo $(v_1,\ldots,v_p) \in V^p$.

Demostración. Se define la aplicación multilineal $h\colon V^p \longrightarrow \bigvee^p V$ tal que $h(v_1,\ldots,v_p) = v_1 \vee \ldots \vee v_p$. Por la propiedad universal existe una única aplicación lineal $\bar{h}\colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigvee^p V$ tal que

$h = \bar{h} \circ \otimes$, pero la aplicación proyección $\pi_p \colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V / M^p(V) = \bigvee^p V$ satisface la ecuación $h = \pi_p \circ \otimes$. Por lo tanto, se tiene $\bar{h} = \pi_p$. Al ser la función f multilineal, existe una única aplicación lineal f' tal que $f = f' \circ \otimes$. Al ser f simétrica, $f'(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) = f'(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(p)})$ para todo $\sigma \in S_p$ y, por lo tanto, dado un generador arbitrario $v = u - \tau(u)$ de $M^p(V)$ se tiene que $f'(v) = f'(u) - f'(\tau(u)) = 0$. Así, $M^p(V) \subseteq \ker(f')$ y, por el lema 2.6, f' induce una aplicación lineal $\bar{f} \colon \bigvee^p V \longrightarrow W$ de forma que $f' = \bar{f} \circ \pi_p$. Por lo tanto,

$$\bar{f} \circ h = \bar{f} \circ \pi_p \circ \otimes = f' \circ \otimes = f.$$

Además, $\bar{f}$ es única porque f' es única. ☐

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & \otimes^p V \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "f'"] & \bigvee^p V \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Proposición 6.23. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $g \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, g se extiende de forma a un endomorfismo de $\bigvee^p V$ denotado por $\bigvee^p g$ dado por

$$\begin{aligned} \bigvee{}^p g \colon \bigvee^p V &\longrightarrow \bigvee^p V \\ v_1 \vee \ldots \vee v_p &\longmapsto g(v_1) \vee \ldots \vee g(v_p). \end{aligned}$$

Demostración. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} f \colon V^p &\longrightarrow \bigvee^p V \\ (v_1, \ldots, v_p) &\longmapsto g(v_1) \vee \ldots \vee g(v_p). \end{aligned}$$

Esta aplicación queda unívocamente determinada por g y es simétrica. Tomando $W = \bigvee^p V$ en la proposición 6.22, se tiene que existe una única aplicación lineal $\bar{f} \colon \bigvee^p V \longrightarrow \bigvee^p V$ tal que $f = \bar{f} \circ h$, con $h = \pi_p \circ \otimes$ construida como en dicha proposición. Es decir, para todo $v_1 \vee \ldots \vee v_p \in \bigvee^p V$

$$\bar{f}(v_1 \vee \ldots \vee v_p) = g(v_1) \vee \ldots \vee g(v_p).$$

☐

6.5. Álgebra Simétrica

Definición 6.24. Sea V un espacio vecorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Para toda pareja de naturales (p, q) se define la aplicación bilineal

$$\begin{aligned}\gamma_{pq}\colon \bigvee^{p} V \times \bigvee^{q} V &\longmapsto \bigvee^{p+q} V \\ (v_1 \vee \ldots \vee v_p, v_{p+1} \vee \ldots \vee v_{p+q}) &\longmapsto v_1 \vee \ldots \vee v_{p+q}.\end{aligned}$$

Notación 6.25. Los elementos $\gamma_{pq}(u, v)$ de $\bigvee^{p+q} V$ suelen denotarse por $u \vee v$.

Definición 6.26. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se define el álgebra simétrica de V como el espacio vectorial

$$\bigvee V = \bigoplus_{p \geq 0} \bigvee^{p} V$$

dotado del producto bilineal interno inducido por las aplicaciones γ_{pq}.

Teorema 6.27. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. El álgebra simétrica definida en 6.26 es un álgebra graduada.

Demostración. Se construye de forma análoga a la construcción del álgebra exterior. Teniendo en cuenta que los elementos de $\bigvee V$ se pueden expresar de forma única como sumas $v = \sum_{p \geq 0} v_p$ con $v_p \in \bigvee^p V$, el producto bilineal interno que se va a considerar se construye

$$\begin{aligned}\vee\colon \bigvee V \times \bigvee V &\longrightarrow \bigvee V \\ (u, v) = (\sum_{p \geq 0} u_p, \sum_{q \geq 0} v_q) &\longmapsto u \vee v = \sum_{p,q \geq 0} \gamma_{pq}(u_p, v_q).\end{aligned}$$

Este producto es claramente bilineal por serlo todas las aplicaciones γ_{pq} y es asociativo por serlo el producto tensorial, por lo tanto, dota al espacio vectorial $\bigvee V$ de estructura de álgebra asociativa. La $\mathbb{Z}$-graduación surge de manera similar a la del álgebra exterior considerando cada subespacio $\bigvee^p V$ como el subespacio de grado p ya que dados $v = v_1 \vee \ldots \vee v_p \in \bigvee^p V$ y $u = u_1 \vee \ldots \vee u_q \in \bigvee^q V$

$$v \vee u = v_1 \vee \ldots \vee v_{p+q} \in \bigvee^{p+q} V,$$

donde se han renombrado $u_i = v_{p+i}$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Por lo tanto, se tiene que $\bigvee^p V \bigvee^q V \subseteq \bigvee^{p+q} V$ dándose la graduación sobre $\mathbb{Z}$. □

Proposición 6.28. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, el álgebra simétrica sobre V es conmutativa.

Demostración. Para ello basta ver que, dada una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ de V, los elementos de las bases $\mathcal{B}_p^s$ conmutan.

$$\begin{aligned}(e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q}) &= e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p} \vee e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q} \\ &= e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} + M^{p+q}(V) \\ &= e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} + M^{p+q}(V) \\ &= e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q} \vee e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p} \\ &= (e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q}) \vee (e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}).\end{aligned}$$

□

Proposición 6.29. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces,

$$\bigvee V = \bigotimes V / M(V),$$

donde se ha definido el subespacio de $\bigotimes V$

$$M(V) = \bigoplus_{p \geq 0} M^p(V).$$

Demostración. Considerando las proyecciones $\pi_p \colon \bigotimes^p V \longrightarrow \bigotimes^p V / M^p(V) = \bigvee^p V$, se extienden a una aplicación lineal

$$\begin{aligned}\pi \colon \bigotimes V &\longrightarrow \bigotimes V \\ v = \sum_{p \geq 0} v_p &\longmapsto \sum_{p \geq 0} \pi_p(v_p).\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Im}(\pi_p) = \bigvee^p V$ y $\bigvee V = \bigoplus_{p \geq 0} \bigvee^p V$, se tiene que $\mathrm{Im}(\pi) = \bigvee V$. Por lo tanto, $\bigvee V = \mathrm{Im}(\pi) \cong \bigotimes V / \ker(\pi) = \bigotimes V / M(V)$. Falta comrpobar que de hecho $\ker(\pi) = M(V)$

$$\pi(v) = \sum_p \pi_p(v_p) = 0 \iff \pi_p(v_p) = 0 \text{ para todo } p \geq 0 \iff v_p \in M^p(V) \text{ para todo } p \geq 0.$$

□

Proposición 6.30. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, f induce un endomorfismo del álgebra simétrica de V.

Demostración. Considerando para todo $p \geq 2$ el endomorfismo $\bigvee^p f$ construido en la proposición 6.23 y extendiendo la notación al caso $p = 1$ denotando por $\bigvee^1 f$ a f y definiendo en el caso $p = 0$ $\bigvee^0 f = Id_{\mathbb{F}}$. Se define

$$\begin{aligned}F \colon \bigvee V &\longrightarrow \bigvee V \\ v = \sum_{p \geq 0} v_p &\longmapsto \sum_{p \geq 0} (\bigvee^p f)(v_p).\end{aligned}$$

La linealidad de F se sigue de su construcción y de la linealidad de todas las $\bigvee^p f$. Por lo tanto, $F \in \mathrm{End}(\bigvee V)$. $\square$

6.6. Álgebra de Polinomios

En este apartado se va a estudiar la similitud entre el álgebra simétrica sobre un espacio vectorial de dimensión n y el álgebra de polinomios en n variables sobre un cuerpo dado.

Definición 6.31. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Se define el álgebra de polinomios en n variables sobre $\mathbb{F}$ como el espacio vectorial

$$P = \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{k \geq 0} P_k \ \text{ donde } \ P_k = \mathbb{F}\langle X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n} | \sum_{j=1}^{n} m_j = k \rangle$$

dotado de la operación binaria interna dada por la multiplicación usual de polinomios.

Nota 6.32. El álgebra de polinomios es un álgebra graduada con la $\mathbb{Z}$-graduación dada al asignar a cada subespacio P_k el grado k.

Teorema 6.33. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ y P el álgebra de polinomios en n variables sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, el álgebra simétrica de V es isomorfa al álgebra de polinomios P.

Demostración. Como ambos espacios están representados por sumas directas, basta ver que los espacios correspondientes al mismo grado son isomorfos como espacios vectoriales y que el isomorfismo construido conserva el producto. Sea $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V y $\mathcal{B}_p^s = \{e_I | I \in K_p^n\}$ la base de $\bigvee^p V$ construida a partir de $\mathcal{B}$, para todo $k \geq 0$ se definen las aplicaciones lineales (nótese que basta definir la imagen de una base)

$$\begin{aligned} \varphi_k \colon \bigvee^k V &\longrightarrow P_k \\ e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k} &\longmapsto X_{i_1} \ldots X_{i_k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_k \colon P_k &\longrightarrow \bigvee^k V \\ X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n} &\longmapsto e_1 \vee \overset{(m_1)}{\ldots} \vee e_1 \vee \ldots \vee e_n \vee \overset{(m_n)}{\ldots} \vee e_n. \end{aligned}$$

Claramente ϕ_k y φ_k son aplicaciones inversas y por lo tanto los espacios vectoriales P_k y $\bigvee^k V$ son isomorfos. De está forma, las aplicaciones φ_k inducen un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\bigvee V$ y P dado por

$$\begin{aligned} \varphi \colon \bigvee V &\longrightarrow P \\ v = \sum_{k \geq 0} v_k &\longmapsto \sum_{k \geq 0} \varphi_k(v_k). \end{aligned}$$

Falta comprobar que este isomorfismo conserva el producto. Por la linealidad del isomorfismo, basta comprobarlo para los elementos de las bases $\mathcal{B}_p^s$, es decir, $e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}$

$$\begin{aligned}\varphi((e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k}) \vee (e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q})) &= \varphi(e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k} \vee e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q}) \\ &= X_{i_1} \ldots X_{i_k} X_{j_1} \ldots X_{j_q} = (X_{i_1} \ldots X_{i_k})(X_{j_1} \ldots X_{j_q}) \\ &= \varphi((e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k}))\varphi(e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_q}).\end{aligned}$$

Y por lo tanto $\bigvee V$ y P son isomorfos como álgebras. □

6.7. Álgebra Simétrica Mixta

Definición 6.34. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. Para todo $p, q \in \mathbb{N}$ se define la (p,q)-ésima potencia simétrica de V como el espacio vectorial

$$\bigvee{}_q^p(V^*, V) = \bigvee^p(V^*) \otimes \bigvee^q V.$$

Definición 6.35. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y su dual V^*. Se define para todo $p, q, k, l \in \mathbb{N}$ la aplicación bilineal

$$\begin{aligned}\kappa_{ql}^{pk} \colon \bigvee{}_q^p \times \bigvee{}_l^k &\longrightarrow \bigvee{}_{q+l}^{p+k} \\ (f \otimes v, g \otimes u) &\longrightarrow (f \vee g) \otimes (v \vee u).\end{aligned}$$

Definición 6.36. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y su dual V^*. Se define el álgebra simétrica mixta sobre V y V^* como el espacio vectorial

$$\bigvee(V^*, V) = \bigvee(V^*) \otimes \bigvee V$$

dotado del producto bilineal interno inducido por las aplicaciones κ_{ql}^{pk}.

Teorema 6.37. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y V^* su dual. El espacio vectorial definido en 6.36 se puede expresar como la suma directa

$$\bigvee(V^*, V) = \bigoplus_{p,q \geq 0} \bigvee{}_q^p(V^*, V).$$

Además, las aplicaciones κ_{ql}^{pk} inducen un producto bilineal interno en $\bigvee(V^*, V)$ dotándolo de estructura de álgebra graduada.

Demostración. Por definición

$$\bigvee(V^*) = \bigoplus_{p \geq 0} \bigvee^p(V^*) \quad \text{y} \quad \bigvee V = \bigoplus_{q \geq 0} \bigvee^q V,$$

por el teorema 2.21 se tiene que

$$\bigvee(V^*,V)=\bigoplus_{p,q\geq 0}\bigvee{}^p_q(V^*,V).$$

Por lo tanto, los elementos v de $\bigvee(V^*,V)$ se expresan como sumas $v=\sum_{p,q=0}^{n}\sum_{j_{pq}=1}^{m_{pq}} f_{j_{pq}}\otimes v_{j_{pq}}$ donde $f_{j_{pq}}\in\bigvee^p(V^*)$ y $v_{j_{pq}}\in\bigvee^q V$ para todo $j_{pq}=1,\ldots,m_{pq}$ con m_{pq} ciertos naturales. El producto bilineal interno inducido por las aplicaciones κ^{pk}_{ql} viene dado por

$$\begin{aligned}\cdot:\ \bigvee(V^*,V)\times\bigvee(V^*,V)&\longrightarrow\bigvee(V^*,V)\\ \Big(\sum_{p,q\geq 0} f_p\otimes v_q,\sum_{k,l\geq 0} g_k\otimes u_l\Big)&\longmapsto\sum_{p,q,k,l\geq 0}\kappa^{pk}_{ql}(f_p\otimes v_q,g_k\otimes u_l)\\ &=\sum_{p,q,k,l\geq 0}(f_p\vee g_k)\otimes(v_q\vee u_l).\end{aligned}$$

Este producto es bilineal por serlo todas las aplicaciones κ^{pk}_{ql} y es asociativo por serlo el producto tensorial, y por lo tanto dota al espacio vectorial $\bigvee(V^*,V)$ de estructura de álgebra asociativa. La graduación sobre $\bigvee(V^*,V)$ es una $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-graduación que viene dada al considerar cada subespacio $\bigvee^p_q(V^*,V)$ de la descomposición en suma directa de $\bigvee(V^*,V)$ como el subespacio de grado (p,q) ya que dados $f\otimes v\in\bigvee^p_q(V^*,V)$ y $g\otimes u\in\bigvee^k_l(V^*,V)$ se tiene que

$$(f\otimes v)\cdot(g\otimes u)=(f\vee g)\otimes(v\vee u)\in\bigvee{}^{p+k}_{q+l}(V^*,V).$$

De forma que $\bigvee^p_q(V^*,V)\bigvee^k_l(V^*,V)\subseteq\bigvee^{p+k}_{q+l}(V^*,V)$. □

Nota 6.38. Los cambios de base inducidos en los espacios $\bigwedge^p V$ y $\bigvee^p V$ son particularizaciones de la proposición 4.27 cuando $q=0$ y considerando los espacios $\bigwedge^p V$ y $\bigvee^p V$ como subespacios de $\bigotimes^p V$.

Nota 6.39. Las reglas de cambio de base derivadas en la proposición 4.27 se extienden por linealidad al álgebra tensorial mixta, al álgebra exterior, al álgebra exterior mixta, al álgebra simétrica y al álgebra simétrica mixta.

7. Diccionario

Los tensores, particularmente las potencias tensoriales y el álgebra tensorial, son ampliamente utilizados por físicos e ingenieros. Sin embargo, en estos ámbitos se usan los tensores de una forma poco rigurosa y sin definirlos bien. El objetivo de esta sección es dar una especie de diccionario que ilustre que los tensores usados por los físicos e ingenieros son de hecho los mismos que se han construido a lo largo de este trabajo, con una notación diferente, y las reglas de definición que dan de los tensores se pueden derivar de la construcción general.

7.1. Tensores en Física e Ingeniería

En este apartado se van a dar las definiciones de tensores utilizadas por físicos e ingenieros y se va a ver como son derivadas de la teoría general.

Definición 7.1. Un tensor de grado (p, q) es un conjunto de números $T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p}$, que bajo un cambio de base $\tilde{e}_i = A^j{}_i e_j$ trasforman según la siguiente ley

$$\tilde{T}^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p} = T^{k_1 \ldots k_q}{}_{l_1 \ldots l_p} (A^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \ldots (A^{-1})^{i_q}{}_{k_q} A^{j_1}{}_{l_1} \ldots A^{j_p}{}_{l_p}.$$

Los tensores de grado (p, q) también se denominan tensores p veces covariantes y q veces contravariantes. De forma que un tensor de grado $(p, 0)$ se dice tensor covariante de grado p y uno de grado $(0, q)$ contravariante de grado q. Los tensores de grado $(1, 0)$, es decir, los elementos del dual, se denominan covectores.

Nota 7.2. El espacio vectorial sobre el que se definen los tensores se suele obviar ya que suele estar claro por el contexto, suele ser $\mathbb{R}^n$, alguna variedad pseudoriemanniana en el contexto de la Relatividad General o un esacio de Hilbert sobre los complejos en Mecánica Cuántica. Nótese que la ley de trasformación bajo cambios de bases es la derivada en la proposición 4.27. En general, los físicos/ingenieros hablan de las componentes de los tensores como si estas fueran los propios tensores, ignorando los elementos de las bases. Esta definición, de forma muy implicita, asume toda la estructura construida en las secciones anteriores.

Notación 7.3. Dado un tensor representado por sus componentes $T^{k_1 \ldots k_q}{}_{l_1 \ldots l_p}$, el número de superíndices y el número de subíndices indica la potencia tensorial mixta a la que pertenece. En particular los vectores se representan con un solo superíndice v^i y los covectores con un solo subíndice f_j.

Definición 7.4. Dados dos tensores $T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p}$ y $F^{i_1 \ldots i_l}{}_{j_1 \ldots j_k}$ de grados (p, q) y (k, l), su producto es un tensor de grado $(p + k, q + l)$

$$(TF)^{i_1 \ldots i_{q+l}}{}_{j_1 \ldots j_{p+k}} = T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p} F^{i_{q+1} \ldots i_{q+l}}{}_{j_{p+1} \ldots j_{p+k}}.$$

Nota 7.5. Este producto que se define de esta forma tan vaga se trata del producto bilineal interno del álgebra tensorial mixta. Implicitamente se está haciendo uso de la estructura de álgebra de este espacio.

Definición 7.6. Un tensor $T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p}$ se dice antisimétrico respecto de los índices (i_k, i_{k+1}) si

$$T^{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p} = -T^{i_1 \ldots i_{k+1} i_k \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p}.$$

Análogamente, un tensor $T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_p}$ se dice antisimétrico respecto de los índices (j_l,j_{l+1}) si

$$T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_l j_{l+1} \ldots j_p} = -T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_{l+1} j_l \ldots j_p}.$$

Nota 7.7. Estos tensores pueden entenderse como elementos de $\bigwedge^2 V \otimes \bigotimes_{q-2}^{p} V$ y $\bigwedge^2 (V^*) \otimes \bigotimes_{q}^{p-2} V$ respectivamente.

Definición 7.8. Un tensor $T^{i_1\cdots i_q}$ contravariante de grado q se dice totalmente antisimétrico si es antisimétrico respecto de todas sus parejas de índices (i_k, i_{k+1}). Análogamente, un tensor $F_{j_1\cdots j_p}$ covariante de grado p se dice totalmente antisimétrico si lo es respecto de todas sus parejas de índices (j_l, j_{l+1}).

Nota 7.9. Los tensores contravariantes totalmente antisimétricos de grado q son elementos de $\bigwedge^q V$ mientras que los tensores covariantes totalmente antisimétricos de grado p son elementos de $\bigwedge^p(V^*)$.

Definición 7.10. Un tensor $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}$ se dice simétrico respecto de los índices (i_k, i_{k+1}) si

$$T^{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p} = T^{i_1\cdots i_{k+1} i_k\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}\,.$$

Análogamente, un tensor $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}$ se dice simétrico respecto de los índices (j_l, j_{l+1}) si

$$T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_l j_{l+1}\cdots j_p} = T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{l+1} j_l\cdots j_p}\,.$$

Nota 7.11. Estos tensores pueden entenderse como elementos de $\bigvee^2 V \otimes \bigotimes^p_{q-2} V$ y $\bigvee^2(V^*) \otimes \bigotimes^{p-2}_q V$ respectivamente.

Definición 7.12. Un tensor $T^{i_1\cdots i_q}$ contravariante de grado q se dice totalmente simétrico si es simétrico respecto de todas sus parejas de índices (i_k, i_{k+1}). Análogamente, un tensor $F_{j_1\cdots j_p}$ covariante de grado p se dice totalmente simétrico si lo es respecto de todas sus parejas de índices (j_l, j_{l+1}).

Nota 7.13. Los tensores contravariantes totalmente simétricos de grado q son elementos de $\bigvee^q V$ mientras que los tensores covariantes totalmente simétricos de grado p son elementos de $\bigvee^p(V^*)$.

Definición 7.14. Dado un tensor $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}$ de grado (p, q), la contracción de $T^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}$ respecto de los índices (r, s) se define como el tensor

$$T^{i_1\cdots i_{s-1} k i_{s+1}\cdots}{}_{j_1\cdots j_{r-1} k j_{r+1}\cdots j_p}\,.$$

Nota 7.15. Se trata de la contracción implementada mediante los operadores C^r_s definidos en 4.28

7.2. Tensores en Espacios con Métricas

Tal y como se ha mencionado previamente las teorías físicas suelen desarrollarse sobre espacios vectoriales reales o complejos y suelen estar dotados de productos escalares. Estos productos escalares se tratan de casos particulares de formas bilineales simétricas no degeneradas y por lo tanto se podrán estudiar como casos particulares del desarrollo del apartado 3.2. En toda esta sección se va a trabajar sobre un espacio vectorial V sobre el que hay definido un tensor métrico tal y como se definió en 3.17, se asumirá que se está trabajando con una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ su base dual. Se utilizará la notación de la sección anterior.

Definición 7.16 (Subir y Bajar Índices)**.** Dado un vector v^i, se define la operación bajar el índice $v_i := g_{ij}v^j$, donde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Dado un covector f_i, se define la operación subir el índice $f^i := g^{ij}f_j$, donde g^{ij} son las entradas de la matriz inversa de (g_{ij}), es decir, $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Nota 7.17. La operación de bajar el índice se trata de realizar la identificación 3.21, es decir, v_i son las componentes del covector $g(v^ie_i, \cdot)$. La operación de subir el índice se trata de realizar esta identificación pero a la inversa, es decir, tomando el inverso del isomorfismo $\varphi(v) = g(v, \cdot)$ que permite realizar la identificación anterior. Este isomorfismo inverso $\varphi^{-1}\colon V^* \longrightarrow V$ induce un tensor métrico sobre V^* dado por $h\colon V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $h(\alpha, \beta) = \beta(\varphi^{-1}(\alpha)) = h^{ij}\alpha_i\beta_j$. Como φ y φ^{-1} son isomorfismos inversos debe cumplirse para todo $v \in V$ que $\varphi^{-1}(\varphi(v))^i = h^{ij}g_{jk}v^k = v^i = \delta^i_k v^k$ y por lo tanto se tiene la relación $h^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Las componentes h^{ij} suelen denotarse por g^{ij}.

Definición 7.18. La operación de bajar índices puede generalizarse a tensores de cualquier grado (p, q), siempre que $q \geq 1$, de la siguiente manera

$$T^{i_1 \dots i_{l-1}}{}_{k}{}^{i_{l+1}\dots i_q}{}_{j_1\dots j_p} = g_{ks}T^{i_1\dots i_{l-1}s i_{l+1}\dots i_q}{}_{j_1\dots j_p},$$

dando como resultado un tensor de grado $(p+1, q-1)$. Análogamente, se puede extender la operación de subir índices a tensores de cualquier grado (p, q) siempre que $p \geq 1$

$$T^{i_1\dots i_q}{}_{j_1\dots j_{l-1}}{}^{k}{}_{j_{l+1}\dots j_p} = g^{ks}T^{i_1\dots i_q}{}_{j_1\dots j_{l-1}s j_{l+1}\dots j_p},$$

dando como resultado un tensor de grado $(p - 1, q + 1)$.

Notación 7.19. Esta operaciones permiten identificar los tensores de grado (p, q) con los tensores de grado (a, b) para todo (a, b) tal que $a + b = p + q$. De esta forma se trata todos los tensores de grados (p, q) tales que $p + q = m$ como si fueran iguales y se representan con tantos subíndices y superíndices como sea conveniente según la ocasión.

Proposición 7.20. Dados un vector v^i y un covector u_i, la contracción del tensor $(vu)^i_j$ respecto de los índices $(1, 1)$ implementa el producto inducido por la métrica g.

Demostración. Dados un vector $v = v^ie_i$ y un covector $u = u_j\omega^j$ se tiene

$$(vu)^k_k = u_kv^k = g_{kl}u^lv^k = g(u, v).$$

□

Nota 7.21. Aquí se ha hecho un uso explícito de la identificación entre vectores y covectores. Esta fórmula pone de manifiesto la importancia que tienen las contracciones en las teorías físicas ya que implementan el producto interno del espacio en el que se trabaja.

Referencias

[1] N. Bourbaki. *Algebra I: Chapters 1-3.* Actualités scientifiques et industrielles. Springer, 1998.

[2] D.S. Dummit and R.M. Foote. *Vector Spaces. In: Abstract Algebra*, pages 421–422. Wiley, 2003.

[3] W.H. Greub. *Multilinear Algebra.* Graduate Texts in Mathematics: Universitex. Springer New York, 1978.

[4] R. Merris. *Combinatorial Identities. In: Combinatorics*, page 45. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2003.

[5] D. G. Northcott. *Multilinear Algebra.* Cambridge University Press, 1984.

[6] J.J. Rotman. *Advanced Modern Algebra.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.