



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Clara Sánchez de Posada Orihuela

Dirigido por
Carlos Hoyos Badajoz

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Facultad de Ciencias
Grado en Física

Febrero de 2023

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Introducción y motivación	3
1.2. Estructura del trabajo	4
2. Conceptos básicos	6
3. Integral de Camino	9
3.1. N variables y límite al continuo	12
3.2. ¿Qué hemos visto hasta ahora?	14
4. Perturbaciones de los campos	16
4.1. Propagación de una partícula	16
4.2. Campos libres	17
4.2.1. Potenciales de un campo escalar	21
4.3. Campo vectorial	23
4.4. Campo tensorial	25
4.5. Conclusiones	26
5. Diagramas de Feynman	27
5.1. Sistema en una variable	27
5.2. Sistema discreto en N variables	31
5.3. Sistema continuo	32

5.4. Colisión de dos partículas	33
6. Cuantización Canónica	38
6.1. Cuantización Canónica en QFT	38
6.2. Campo escalar	39
6.3. Propagador de un campo escalar	41
6.4. Teoría de perturbaciones	42
6.5. Fórmula de Reducción LSZ	44
6.6. Diagramas de Feynman y funciones de correlación	45
7. Ruptura espontánea de simetría	47
7.1. Acción y potencial efectivos	48
7.2. Potencial efectivo en un campo escalar	49
7.2.1. Renormalización del potencial efectivo	51
7.2.2. Potencial clásico y potencial efectivo	53
8. Conclusiones	58
A. Ecuación de Euler Lagrange para el campo φ	60
B. Energía potencial de un campo libre	62

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción y motivación

La Teoría Cuántica de Campos o *QFT* (“*Quantum Field Theory*”), surge de la necesidad de dar explicación a procesos que ocurren a pequeña escala y a gran energía. Nace a finales de los años 20 del siglo XX [9], con los estudios de Erwin Schrödinger y Paul Dirac que buscaban comprender los fenómenos cuánticos a escalas relativistas. Al mismo tiempo, Werner Heisenberg, Pascual Jordan y Max Born, indagaban en el problema del Cuerpo Negro, surgiendo así la cuantización de un campo eléctrico. La teoría que se desarrolló a partir de estos trabajos se llamó “Segunda Cuantización”, pero tenía grandes inconsistencias. No fue hasta los años 30 y 40, que Richard Feynman, Julian Schwinger, Shin’ichiro Tomonaga y Freeman Dyson, entre otros, consiguieron resolver los problemas matemáticos que habían surgido. En 1965, los tres primeros ganaron el Premio Nobel de Física por el desarrollo de la Electrodinámica Cuántica (*QED*, “*Quantum Electrodynamics*”), que describe las interacciones entre fotones y fermiones.

Pero, ¿de dónde nace este deseo de una nueva teoría? De manera general, la Mecánica Cuántica describe las partículas mediante funciones de onda que son solución a la ecuación de Schrödinger, bajo ciertas condiciones. El módulo al cuadrado de dicha función es la probabilidad de encontrar la partícula en una región del espacio. La probabilidad de encontrarla en todo el espacio es 1. Si tomamos un sistema formado por un número determinado de partículas y lo sometemos a un potencial cualquiera, la probabilidad de tener dichas partículas en algún punto del espacio debe seguir siendo 1. Sin embargo, se observó que suministrando suficiente energía, el número de partículas y la naturaleza de estas, podía cambiar. A grandes energías, entra en juego la Teoría de la Relatividad. La ecuación de la energía de una partícula relativista libre, $E = mc^2$, pone de manifiesto que la variación en la energía equivale a variación en la masa. Cuando unimos ambas teorías, permitimos que el número de partículas de un

sistema no se conserve, es decir, que puedan crearse y aniquilarse durante el proceso.

Se llegó a la conclusión de que la Mecánica Cuántica debía ser reinterpretada, y así se hizo. Se comenzaron a tratar las funciones de onda como “campos”, que toman valores continuos en todo el espacio-tiempo, y las partículas, como sus perturbaciones o modos de vibración, que surgen cuando se excitan. Ahora bien, si excitamos un campo eléctrico, se crean electrones. Puesto que estos tienen carga, se viola el Principio de Conservación de la Carga. Para corregir esto, se introdujo la antimateria [3]. Toda partícula cargada lleva asociada una partícula con masa y espín iguales, pero con carga opuesta. A finales de los años 20, Paul Dirac postuló la existencia de la antipartícula del electrón, llamada positrón, y a principios de los 30, fue descubierta. Estos hechos permiten que la teoría sea compatible con la causalidad [8, pág. 27].

Por otro lado, tratando las funciones de onda como operadores, es posible imponer reglas de conmutación simétricas, si el campo es bosónico, y antisimétricas, si es fermiónico. Esto permite recuperar el Principio de Exclusión de Pauli. Además, la Teoría Cuántica de Campos asocia un espín a cada partícula. Por último, cabe destacar que la teoría es útil también en materia condensada (a bajas energías), ya que describe el comportamiento de los fonones, encargados de muchas de las propiedades de los sólidos.

Queda evidenciada, de forma somera, la necesidad e importancia de esta teoría. Existen dos acercamientos a la Teoría Cuántica de Campos: la integral de camino y la cuantización canónica. En este texto nos centraremos, sobre todo, en el primero. La motivación del trabajo es llevar a cabo un desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos, que permita comprender sus principios y que sea accesible para aquellos que no han profundizado, todavía, en la materia.

1.2. Estructura del trabajo

El primer capítulo será dedicado a la notación y conceptos básicos que conviene conocer. Comenzaremos el desarrollo teórico, en el capítulo 3, a partir del experimento de la doble rendija de Young, para llegar a la integral de camino. En el siguiente capítulo, perturbaremos los campos, con el fin de que se cree una partícula, se propague un tiempo y se aniquile. Obtendremos la expresión para el propagador, que nos dará la amplitud de dicho proceso. Por medio del estudio de las energías potenciales en campos escalares libres, se pondrá en manifiesto que cargas del mismo signo se atraen. En el capítulo 5, introduciremos los diagramas de Feynman, que, siguiendo unas reglas, nos permitirán describir las interacciones entre partículas en los campos de manera sencilla. Se verán algunos ejemplos, para clarificar los casos más comunes. Esta primera parte del trabajo se ha llevado a cabo siguiendo [10].

En el capítulo 6, cambiaremos de punto de vista, para hacer un desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos a partir de la cuantización canónica. Obtendremos, de nuevo, el pro-

pagador de un campo escalar, esta vez descrito mediante el producto ordenado temporal; perturbaremos el estado fundamental del campo; expondremos la fórmula de Reducción LSZ y describiremos los diagramas de Feynman usando las funciones de correlación. Por último, haremos una pequeña introducción a la ruptura espontánea de simetría en el capítulo 7. Obtendremos expresiones para la acción y potencial efectivos para el ejemplo considerado, y compararemos gráficamente los potenciales clásico y efectivo.

En estos dos últimos capítulos, además de [10], hemos utilizado [3] y [8]. El resto de la bibliografía que se muestra, ha sido bibliografía complementaria que ha ayudado a fijar los conceptos.

Capítulo 2

Conceptos básicos

A lo largo de este capítulo introduciremos conceptos, notación y unidades que se usarán en el texto. Se trabaja en unidades naturales, donde la constante de Planck, \hbar , y la velocidad de la luz, c , valen 1. En este sistema de unidades, es equivalente hablar de energía y de frecuencia de un fotón, o de momento y vector de onda de una partícula libre.

El espacio tiempo se verá como un espacio de Minkowski. La métrica de Minkowski, $\eta^{\mu\nu}$, utilizada es la que tiene signatura $(+, -, -, -)$:

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para los índices de las coordenadas de un objeto en 4 dimensiones (tiempo y espacio) utilizaremos letras griegas, mientras que para uno en 3 dimensiones (espacio), se usarán las itálicas: x^μ con $\mu = 0, \dots, 4$ y x^i con $i = 1, \dots, 3$, respectivamente. Los vectores del espacio tiempo vendrán escritos como $x = x^\mu = (x^0, x)$. La coordenada x^0 será la coordenada temporal y x , la espacial.

La transformada de Fourier de una función f definida sobre el espacio de d dimensiones es

$$f(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} f(p) e^{ipx}, \quad \text{con } f(p) = \int d^d x f(x) e^{-ipx},$$

y la función escalón de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La mayor parte de las veces, en lugar de hablar de Lagrangiano, L , nos referiremos a la densidad lagrangiana \mathcal{L} , tal que

$$L = \int d^3x \mathcal{L}.$$

La derivada parcial con respecto a la componente x^μ se simplificará como ∂_μ . Dado un campo φ , escribimos

$$(\partial\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi = (\partial_t\varphi)^2 - \sum_i (\partial_i\varphi)^2 = (\partial_t\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2.$$

Funcionales y derivadas funcionales

De manera sencilla, un funcional se puede ver como una función cuyos argumentos son funciones. El argumento de los funcionales se escribe entre corchetes para diferenciarlo de las funciones cuyos argumentos son números. Por ejemplo, el funcional de la acción clásica es $A[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$, con q representando las coordenadas generalizadas que son funciones del tiempo.

Sea F un funcional definido como

$$F[f] = \int dy G(f(y)),$$

se cumple que

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = \int dy G'(f(y)) \frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = G'(f(x)),$$

ya que

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(y - x).$$

Un desarrollo más detallado sobre los funcionales y sus propiedades se encuentra en [5].

Teorema de los residuos

A la hora de evaluar ciertas integrales divergentes, es útil hacerlo mediante el método de los residuos. Podemos encontrar más información en [6]. Supongamos que tenemos una función, f , definida sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ excepto en ciertos puntos $c_1, \dots, c_m \in D$ llamados polos o singularidades de f en D . Sea γ una curva orientada positivamente que constituye un contorno de D ,

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f, c_k).$$

La expresión $Res(f, c)$ recibe el nombre de residuo de f en c . En caso que c sea un polo simple de f , el residuo se calcula

$$Res(f, c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z).$$

Función de Green

Sea \mathcal{D} un operador diferencial lineal definido sobre \mathbb{R}^n , una función de Green es aquella que cumple $\mathcal{D}G(x, x') = \delta^{(n)}(x - x')$, donde δ es la delta de Dirac. Bajo ciertas condiciones de contorno y simetrías, la función de Green solución a esta ecuación es única.

Las funciones de Green nos permiten resolver ecuaciones del tipo $\mathcal{D}u(x) = f(x)$, de tal forma que podemos encontrar que $u(x) = \int dy G(x, y)f(y)$. A fin de esclarecer con ejemplos el concepto, se puede consultar [2].

En este trabajo las funciones de Green representarán las propagaciones de partículas entre dos posiciones en un tiempo dado.

Capítulo 3

Integral de Camino

Los cursos de mecánica cuántica suelen comenzar con el experimento de la doble rendija de Young. En él, se hace incidir un haz de partículas sobre una pantalla con dos rendijas y el resultado se recoge en un detector colocado a continuación de la pantalla. Este experimento nos permite observar la dualidad onda-corpúsculo. En este primer capítulo obtendremos la noción de integral de camino a partir del sistema discreto que forma un conjunto de rendijas.

Consideramos una fuente S y un detector O . Entre ellos colocamos una pantalla con dos rendijas. Por el principio de superposición, sabemos que la amplitud de la onda que llega al detector es la suma de las amplitudes que pasan por ambas rendijas: $\mathcal{A}(S \rightarrow O) = \mathcal{A}_{Rendija1} + \mathcal{A}_{Rendija2}$. Si entre la fuente y el detector añadimos otra pantalla con rendijas, observamos que la amplitud final será la suma de las amplitudes de todos los posibles caminos que pueden recorrer las partículas (figura (3.1)).

Podemos seguir añadiendo pantallas y obtendremos muchos más caminos posibles. ¿Y qué ocurre si hacemos infinitos agujeros en las rendijas (ver figura (3.2))? La amplitud de la partícula que llega a O seguirá siendo la suma de las amplitudes de todos los caminos posibles desde S hasta O . El hecho de tener rendijas con infinitos agujeros es equivalente a no tener rendijas y por tanto, la suma de todos los caminos posibles se convertirá en una integral de camino en el espacio que hay entre la fuente y el detector.

Nos proponemos obtener la expresión de la integral de caminos. Para calcular la amplitud de cada camino lo dividiremos en segmentos de longitud l y calcularemos la amplitud en cada segmento. Después, tomaremos el límite al continuo, $l \rightarrow 0$.

Con esta idea evaluamos la amplitud de propagación desde un estado inicial, q_I , a un estado final, q_F , en un tiempo T . Las coordenadas $\{q_i\}$ representan las posiciones de una masa en el espacio. Utilizamos el operador de evolución temporal e^{-iHT} , siendo H el Hamiltoniano del sistema. Dividimos el tiempo T en N intervalos de longitud $\delta t = T/N$. En notación de Dirac

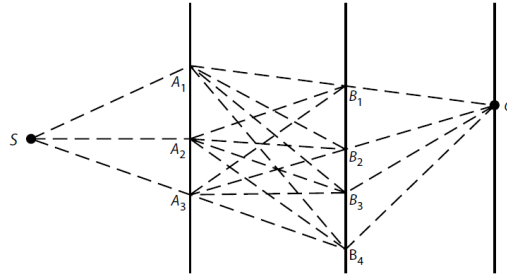


Figura 3.1: Experimento de la doble rendija con dos pantallas. Imagen extraída de [10, pág. 8,9]

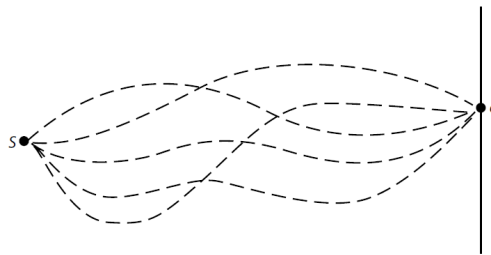


Figura 3.2: Experimento de la doble rendija llevado al continuo. Imagen extraída de [10, pág. 8,9]

escribimos la amplitud de la propagación como sigue,

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \langle q_F | e^{-iH\delta t} \dots e^{-iH\delta t} | q_I \rangle.$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que los estados están normalizados. Utilizamos la regla de completitud y llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle &= \\ &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \langle q_F | e^{-iH\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\delta t} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q_I \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $\langle q_j |$ es la posición de la masa después de j intervalos de tiempo δt : $t_j = j\delta t$, $|q_I\rangle = |q_0\rangle$ y $|q_F\rangle = |q_N\rangle$.

Para resolver la integral, tomamos primero el Hamiltoniano de una partícula libre: $H = \hat{p}^2/2m$, siendo \hat{p} el operador momento y $|p\rangle$ el autoestado asociado, con autovalor p . Nos fijamos en uno de los factores de la ecuación (3.1) e introducimos la regla de completitud para

el momento

$$\begin{aligned}
 \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | q_j \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\
 &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\delta t(p^2/2m)} \langle q_{j+1} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\
 &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\delta t(p^2/2m)} e^{ip(q_{j+1}-q_j)}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hemos llegado a una integral Gaussiana en p cuya solución conocemos:

$$\begin{aligned}
 \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | q_j \rangle &= \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{1/2} e^{[im(q_{j+1}-q_j)^2]/(2\delta t)} \\
 &= \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{1/2} e^{i\delta t(m/2)[(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (3.1), obtenemos

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{N/2} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \right) e^{i\delta t(m/2) \sum_{j=0}^{N-1} [(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}.$$

Llevamos el desarrollo al límite continuo haciendo tender $N \rightarrow \infty$ y $\delta t \rightarrow 0$, donde $N\delta t = T$, entonces

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2}, \tag{3.4}$$

siendo $Dq(t)$ la representación de los posibles caminos tal que

$$\int Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{N/2} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \right).$$

A través de esta ecuación estamos integrando sobre todos los posibles caminos, $q(t)$, que van desde $q_I = q(0)$ a $q_F = q(T)$. En el límite al continuo, hemos hecho los cambios $(q_{j+1}-q_j)/\delta t \rightarrow \dot{q}$ y $\sum_{j=0}^{N-1} \delta t \rightarrow \int_0^T dt$.

De forma general, si consideramos un Lagrangiano $L(\dot{q}, q)$ obtenemos que

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt L(\dot{q}, q)}. \tag{3.5}$$

Esta expresión incluye todas las trayectorias posibles que puede seguir una masa desde un estado inicial, $|I\rangle$, a un estado final, $|F\rangle$.

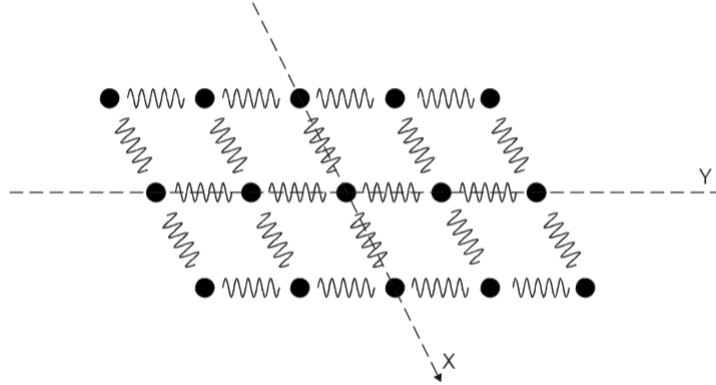


Figura 3.3: Representación de los objetos masivos situadas en los vértices de una malla bidimensional.

Podemos pasar de la ecuación en unidades naturales al sistema internacional introduciendo \hbar en en la exponencial para hacerla adimensional, entonces

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar}HT} | q_I \rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}S},$$

donde $S = \int dt L(q, \dot{q})$ es la acción clásica el sistema.

Si hacemos tender $\hbar \rightarrow 0$, la integral oscila cada vez más rápido. Los términos de la integral se anulan entre ellos y permanecen solo aquellos caminos que son puntos críticos de S , es decir, cuando $\hbar \rightarrow 0$, la integral está dominada por los caminos que son solución a las ecuaciones clásicas de movimiento. Hemos recuperado el límite clásico. Para ver un desarrollo más detallado de este hecho, consultar [4, pág. 20].

Llamaremos $Z = \langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle$ a la función de partición de nuestro sistema de una única masa con Hamiltoniano H , tomando $|\Omega\rangle$ como el estado de la posición inicial.

3.1. N variables y límite al continuo

En esta sección vamos a generalizar los resultados anteriores. En primer lugar, consideramos N masas situadas en los vértices de una malla como se observa en la figura (3.3).

Las masas están separadas una distancia l entre ellas y los muelles representan sus interacciones. El Hamiltoniano del sistema, cuando las masas se encuentran bajo la acción de un potencial V , viene dado por $H = \sum_a \frac{1}{2m_a} \hat{p}_a^2 + V(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N)$, donde \hat{p}_a es el operador momento de la masa a -ésima, \hat{q}_a es el operador posición y q_a su autovalor, que representa la posición relativa a la de equilibrio, $q_a = 0$, en la dirección perpendicular la plano. La acción clásica del

sistema pasa a ser

$$S(q) = \int_0^T dt \left[\sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2 - V(q_1, \dots, q_N) \right],$$

y la función de partición del sistema

$$Z = \langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle = \int Dq(t) e^{iS(q)}.$$

Supongamos que queremos hacer un estudio a grandes escalas de longitud. Esto equivale a llevar la longitud de cada celda de la malla al límite $l \rightarrow 0$. Reemplazamos el índice a de cada masa por un vector posición en dos dimensiones, x , y la variable q , por φ , entonces $q_a(t) \rightarrow \varphi(t, x)$. La función $\varphi(t, x)$ se llama campo. Consideraremos un sistema homogéneo de objetos de masa m . El sumatorio relativo a las energías cinéticas de las masas pasa a ser una integral sobre la posición por unidad de longitud, l . La parte cinética la podemos escribir como

$$\sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2 \rightarrow \int d^2x \frac{1}{2} \frac{m}{l^2} (\partial_t \varphi)^2$$

y llamaremos $\sigma = m/l^2$.

Supongamos que no tenemos potencial externo actuando sobre el sistema, entonces desaparecen los términos lineales del potencial del sistema. Sí aparecen términos cuadráticos que se corresponden con el primer orden de interacción entre las masas y términos de órdenes mayores: $V(q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{ab} \frac{1}{2} k_{ab} (q_a - q_b)^2 + \dots$. La constante k_{ab} es el análogo a la constante elástica de los muelles. Tomando el sistema de la figura (3.3), hay interacción únicamente entre masas contiguas, por lo tanto $k_{ab} \neq 0$ solo si a y b son puntos adyacentes en la malla. En el límite al continuo, podemos escribir $\partial_x \varphi \simeq (q_a - q_b)/l$, con la derivada hecha en la dirección que une los puntos de la red a y b .

Juntándolo todo llegamos a que

$$\begin{aligned} S(q) \rightarrow S(\varphi) &= \int_0^T dt \int d^2x \mathcal{L}(\varphi) \\ &= \int_0^T \int dx^2 \frac{1}{2} [\sigma \partial_t^2 \varphi - \rho (\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi)] + \dots, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde el parámetro ρ contiene la constante de interacción que une los puntos de la red. Si pensamos en la interacción a primeros vecinos como un muelle, se corresponde con la constante elástica entre dos puntos de la red. El resto de sumandos que no hemos escrito son contribuciones a órdenes mayores de φ que despreciaremos. Si escribimos $\rho = \sigma c^2$ siendo c la velocidad de fase de las ondas en la red, y reescalamos φ como $\varphi/\sqrt{\sigma}$, tenemos que $\mathcal{L}(\varphi) \propto \partial_t^2 \varphi - c^2 (\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi)$.

Para poder llegar a un resultado consistente con lo que ocurre en la naturaleza, actualmente el estudio se hace de la siguiente forma: decidimos qué simetría puede haber; vemos cómo se transforman los campos bajo esas simetrías y escribimos la acción de nuestro sistema.

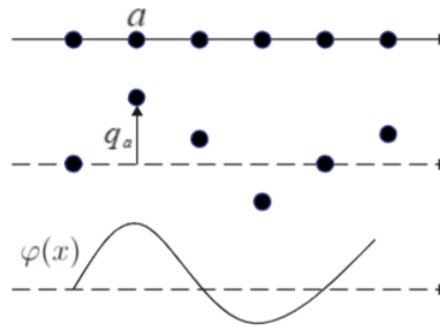


Figura 3.4: Descripción del campo en una dimensión.

Generalizando al caso de $D = d + 1$ -dimensiones espacio-temporales, llegamos a que

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \dots \right], \quad (3.7)$$

con $(\partial\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ la métrica de Minkowski descrita en el capítulo 2.

Notemos que, al imponer que aparezcan al menos dos derivadas temporales y tener invarianza de Lorentz, llegamos a una densidad lagrangiana de la forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)$. A partir de ahora vamos a restringir el potencial a una función polinómica.

Finalmente, tenemos que la integral de camino tomando un campo escalar en $(d + 1)$ -dimensiones espacio-temporales resulta

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x \mathcal{L}(\varphi)}. \quad (3.8)$$

La información física se encuentra codificada en las integrales de camino, luego nuestro problema reside en evaluar dichas integrales.

3.2. ¿Qué hemos visto hasta ahora?

Veamos la idea física que hay detrás de estos desarrollos matemáticos. Supongamos que tenemos un sistema discreto de masas colocadas formando una cadena en una dimensión como en la figura (3.4). El eje sobre el que descansan sería el eje X. Al perturbarlas, las masas se excitan de forma que se mueven en la dirección del eje Y hacia arriba o hacia abajo.

En el límite al continuo, el campo es la función $\varphi(x)$ que nos describe la perturbación. Podríamos considerar el sistema una cuerda, y la excitación daría lugar a un desplazamiento de la posición de la cuerda.

Al pasar a dos dimensiones, el esquema discreto se correspondería con el de la figura (3.3). Cuando perturbamos el sistema, cada masa, a , se desplaza en la dirección del eje Z . Al llevarlo al límite continuo, podríamos imaginarnos el movimiento ondulatorio que sigue una sábana agitada o la superficie del agua.

De modo que estas “masas” no son más que la discretización de un sistema continuo. Un instrumento utilizado para derivar la acción del campo al tomar el límite al continuo. De manera general, al perturbar un sistema en d dimensiones pasamos a tener uno en $D = d + 1$ dimensiones. El campo clásico representa la posición del medio continuo en la dirección adicional.

Cuando cuantizamos el campo, estamos permitiendo que el campo adopte diferentes configuraciones. El resultado final es la superposición de todos los posibles escenarios, cada uno con una amplitud de probabilidad determinada. El campo cuantizado tiene un número determinado de modos de vibración posibles que se identifican con las partículas.

Capítulo 4

Perturbaciones de los campos

Cuando perturbamos un campo, este vibra. La vibración se propaga por el medio durante un tiempo después del cual, el sistema vuelve a ser perturbado y recupera su estado fundamental. Estas vibraciones del campo reciben el nombre de partículas. A lo largo de este capítulo estudiaremos cómo se propagan las partículas. Llamamos fuente al punto del espacio tiempo donde se provoca la perturbación que crea las partículas y sumidero al punto donde se aniquilan tras haberse propagado un tiempo determinado. Por convenio, diremos que la energía del sistema en el nivel fundamental es cero.

4.1. Propagación de una partícula

Comenzamos con un sistema discreto formado por N partículas que se encuentran bajo la acción de un potencial. Si queremos perturbar el sistema en la posición a -ésima, debemos añadir un término de la forma $J_a q_a$ al potencial. Pasando al límite al continuo, tomamos la función $J(t, x)$, denominada fuente, que describe la perturbación en el punto (t, x) del espacio-tiempo. Al potencial del sistema debemos añadirle un término de la forma $-\int d^d x J(x)\varphi(x)$.

La función de partición del sistema perturbado pasa a ser:

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x [\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) + J(x)\varphi(x)]}. \quad (4.1)$$

Esta integral se sabe evaluar solo si V es el potencial de un campo libre: $V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$. En los desarrollos sucesivos, a no ser que se indique lo contrario, tomamos $d = 4$.

4.2. Campos libres

Pongamos por caso que tenemos una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2]. \quad (4.2)$$

Suponemos que los campos van lo suficientemente rápido a cero para que se cumpla que, al integrar a todo el espacio, $\int d^4x(\partial\varphi)^2 = -\int d^4x\varphi\partial^2\varphi$. Teniendo en cuenta el desarrollo del apéndice A, la ecuación de movimiento del sistema es

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0, \quad (4.3)$$

y se llama ecuación de Klein-Gordon¹. Su solución es la superposición de ondas planas de la forma $\varphi(x, t) = e^{i(\omega t - k \cdot x)}$ con $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. En unidades naturales, la expresión de la frecuencia coincide con la de una partícula relativista de masa m .

La función de partición asociada al campo libre es

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + m^2)\varphi + J\varphi]}. \quad (4.4)$$

Para evaluar esta integral, tomamos un volumen y un intervalo de tiempo finitos y lo discretizamos. En esta “caja”, tendremos un número finito de posiciones del espacio-tiempo posibles, dadas por x_1, \dots, x_N , de tal forma que $q_i = \varphi(x_i)$, con $i = 1, \dots, N$. La variable q_i representa el desplazamiento, respecto a la posición de equilibrio, en una nueva dirección, del punto del espacio tiempo dado por la coordenada x_i . La integral por unidad de longitud se convierte en un sumatorio a las posibles posiciones:

$$\begin{aligned} \int d^4x [-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + m^2)\varphi + J\varphi] &\longrightarrow \Delta x \Delta t \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{2}\varphi(x_i)(\partial^2 + m^2)\varphi(x_i) + J\varphi(x_i) \right] \\ &= \Delta x \Delta t \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{2}q_i(\partial^2 + m^2)q_i + Jq_i \right], \end{aligned}$$

siendo Δx y Δt la amplitud de los intervalos de volumen y de tiempo, respectivamente, en la discretización del sistema. Los valores del campo φ permanecen continuos y se encuentran en $(-\infty, +\infty)$, luego también q_i , $i = 1, \dots, N$, toma valores en ese intervalo. Los operadores

¹La generalización del operador Laplaciano, ∂^2 , al espacio de Minkowski suele denotarse también por \square y se conoce como operador D'Alembertiano.

diferenciales se transforman en matrices. Denotamos por A , al operador $(\partial^2 + m^2)$. En el sistema finito discreto, la ecuación (4.4), se reescribe como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \dots dq_N e^{\frac{i}{2} q A q + i J q} = \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det(A)} \right)^{1/2} e^{-\frac{i}{2} J A^{-1} J}, \quad (4.5)$$

donde, hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{i}{2} x A x} = \sqrt{\frac{2\pi i}{\det(A)}}.$$

En el límite al continuo, denotamos por $D(x-y)$ al inverso del elemento de la matriz A que conecta los puntos x e y del espacio. La identidad $A \cdot A^{-1} = I$, que expresada por componentes es $A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$, se transforma en el continuo en

$$-(\partial^2 + m^2)D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (4.6)$$

La función $D(x-y)$ es una función de Green llamada propagador y da la amplitud de la propagación de una perturbación del campo desde un punto x a un punto y del espacio-tiempo. Vamos a centrarnos en encontrar la expresión del propagador. La transformada de Fourier del propagador será

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) e^{ik(x-y)}, \quad (4.7)$$

que debe satisfacer la ecuación (4.6) escrita en el espacio de momentos: $(k^2 - m^2)\tilde{D}(k) = 1$. Despejando el propagador^{II}, encontramos

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2}. \quad (4.8)$$

El vector $k = (k^0, \mathbf{k})$, cumple que $k^2 = k^t \eta_k = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2$ y $kx = k^0 x^0 - \mathbf{k}x$. Sustituyendo en la expresión anterior y separando la integral en parte espacial y parte temporal, tenemos que

$$D(x-y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2}. \quad (4.9)$$

^{II}En cierta bibliografía como [7] o [8], se utiliza la relación $-(\partial^2 + m^2)D(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y)$, obteniendo un factor i de diferencia con [10]:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{\pm ik(x-y)}.$$

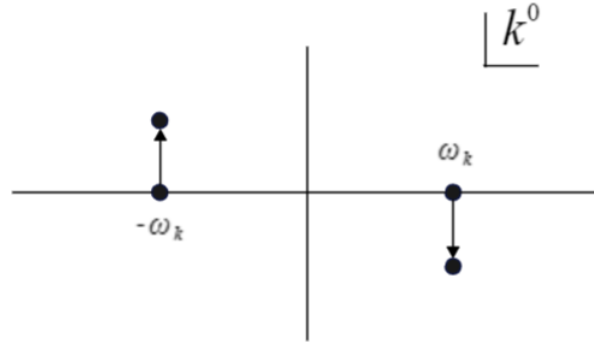


Figura 4.1: Polos de la integral (4.10).

Nos centramos en evaluar la parte temporal de esta integral. En primer lugar, vemos que la integral tiene dos polos en $k^0 = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tendiendo a cero y hacemos el cambio $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$. Definimos $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. La parte temporal de la integral resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon}. \quad (4.10)$$

La integral se puede calcular en el plano complejo k^0 . El sumando $i\varepsilon$ desplaza ligeramente los polos, $\pm\omega_k$, como se muestra en la figura (4.1), cuya expresión ahora es

$$k^0 = \pm\omega_k \sqrt{1 - \frac{i\varepsilon}{\omega_k^2}} \simeq \pm\omega_k \left(1 - \frac{i\varepsilon}{2\omega_k^2}\right).$$

Para resolver la integral (4.10) diferenciamos dos casos: $x^0 - y^0 > 0$ y $x^0 - y^0 < 0$. En el primer caso, la exponencial $e^{ik^0(x^0-y^0)}$ estará amortiguada si cerramos el contorno superiormente. Realizaremos la integral del contorno que se muestra en la imagen (4.2) y haremos $a \rightarrow \infty$. Llamamos

$$\alpha = \omega_k \left(1 - \frac{i\varepsilon}{2\omega_k^2}\right) \quad \text{y} \quad f(k^0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \alpha^2},$$

y evaluamos la integral $\int dk^0 f(k^0)$ aplicando que

$$\int_{\text{contorno}} dk^0 f(k^0) = \int_{-a}^a dk^0 f(k^0) + \int_{\text{arco}} dk^0 f(k^0). \quad (4.11)$$

Por el teorema de los residuos, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\text{contorno}} dk^0 f(k^0) &= 2\pi i \text{Res}(f, -\alpha) = 2\pi i \lim_{k^0 \rightarrow -\alpha} (k^0 + \alpha) f(k^0) \\ &= -i \frac{e^{-i\alpha(x^0-y^0)}}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

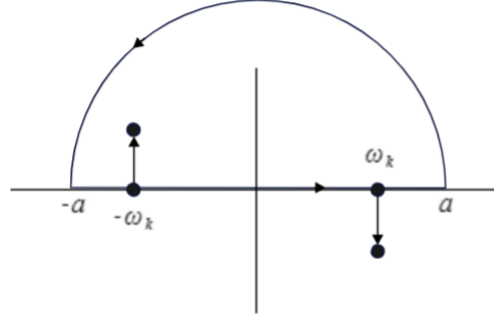


Figura 4.2: Contorno a evaluar para resolver la integral (4.10) cuando $x^0 - y^0 > 0$.

La integral sobre el arco de circunferencia resulta

$$\begin{aligned} \int_{\text{arco}} dk^0 f(k^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{arco}} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \alpha^2} dk^0 \leq \frac{a}{2} \sup_{\text{arco}} \left| \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \alpha^2} \right| \\ &= \frac{a}{2} \sup_{\text{arco}} \frac{1}{|(k^0)^2 - \alpha^2|} \leq \frac{a}{2(a^2 - \alpha^2)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral (4.11) y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} = -\frac{i}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(x^0-y^0)}. \quad (4.13)$$

Análogamente, si $x^0 - y^0 < 0$, cerramos el contorno por debajo y obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} = -\frac{i}{2\omega_k} e^{i\omega_k(x^0-y^0)}. \quad (4.14)$$

En este caso, el signo negativo aparece al cerrar el contorno con un arco orientado negativamente.

Definimos las funciones

$$\begin{aligned} D^>(x-y) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i[\omega_k(x^0-y^0)+k(x-y)]}, \\ D^<(x-y) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i[\omega_k(x^0-y^0)-k(x-y)]}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

y el propagador

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D^>(x-y), & \text{si } x^0 > y^0, \\ D^<(x-y), & \text{si } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (4.16)$$

El propagador puede ser expresado también por medio de la función escalón de Heaviside:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \{ \theta(x^0 - y^0) e^{-i[\omega_k(x^0-y^0)+k(x-y)]} \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) e^{i[\omega_k(x^0-y^0)-k(x-y)]} \}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Este propagador recibe el nombre de propagador de Feynman, u ordenado temporalmente, y estará relacionado con las líneas internas de los diagramas de Feynman que representan la propagación hacia delante en el tiempo de las partículas virtuales con energía ω_k .

Si evaluamos la integral (4.10) utilizando otros contornos, podemos obtener los propagadores avanzado

$$D_{adv}(x-y) = \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin[\omega_k(x^0 - y^0)] e^{-ik(x-y)}, \quad (4.18)$$

o retardado

$$D_{ret}(x-y) = -\theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin[\omega_k(x^0 - y^0)] e^{-ik(x-y)}. \quad (4.19)$$

4.2.1. Potenciales de un campo escalar

Utilizando la expresión (4.5) y la del operador de Feynman, podemos reescribir la función de partición de un campo libre, (4.4), como

$$Z = \mathcal{C} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y)}, \quad (4.20)$$

donde \mathcal{C} es la constante que aparece en la ecuación (4.5), y se corresponde con el valor de $Z(J=0)$ cuando no tenemos fuente. Definimos el funcional W tal que $Z(J) = \mathcal{C} e^{iW[J]}$ y su expresión será

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y). \quad (4.21)$$

Pasamos al espacio de momentos utilizando la ecuación (4.8) y la expresión de la transformada de Fourier de la fuente $J(x) = \int d^4k \tilde{J}(k) e^{ikx}$. El resultado es

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}^*(k) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tilde{J}(k). \quad (4.22)$$

Imaginemos que tenemos dos fuentes localizadas en dos puntos distintos del espacio J_1 y J_2 , es decir, $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$. En $W[J]$ aparecerán términos de la forma $J_1^* J_1$, $J_2^* J_2$, $J_1^* J_2$ y $J_2^* J_1$. El primer término, $J_1^* J_1$, lo tendremos tanto si existe la fuente J_2 como si no y físicamente representa la creación de una partícula en la región en la que se encuentra J_1 y su aniquilación en la misma. Lo mismo ocurre con el segundo término, por lo que vamos a centrarnos en el último en el cual tenemos interacción entre las dos fuentes. El término de $W[J]$ asociado es

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J_2^*(k) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J_1(k), \quad (4.23)$$

y se corresponde con la creación de una partícula en la fuente J_1 que se propaga en el espacio tiempo hasta J_2 donde se aniquila como se observa en la figura (4.3).

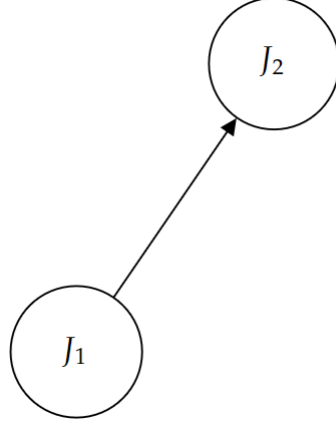


Figura 4.3: Representación de la creación de una partícula en J_1 y se aniquila en J_2 .

En caso que J_1 y J_2 se superpongan en un cierto k y que $k^2 - m^2 \rightarrow 0$, entonces W se hará muy grande. Tendremos un pico de resonancia cuando $k^2 = m^2$, que en unidades naturales es equivalente a pedir que se cumpla la ecuación de Klein-Gordon.

Pongamos ahora por caso que tenemos dos fuentes, J_1 y J_2 , de la forma $J_a = q_a \delta(x - x_a)$ con q_a real y $a = 1, 2$. $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$ es la suma de dos fuentes independientes del tiempo, cuya contribución es grande en los puntos del espacio x_1 y x_2 . Sustituyendo en la ecuación (4.21) y pasando al espacio de momentos, tenemos:

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int dx^0 \int dy^0 \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^0(x^0 - y^0)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J^*(k) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J(k), \quad (4.24)$$

donde hemos separado la parte temporal de la espacial. Nos fijamos de nuevo en los términos de interacción de las dos fuentes y sustituimos las deltas de Dirac por sus transformadas de Fourier:

$$- \int dx^0 \int dy^0 \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^0(x^0 - y^0)} \int q_1 q_2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (4.25)$$

Notemos que en la expresión anterior el factor $1/2$ desaparece ya que intervienen los términos de $J_1^* J_2$ y $J_2^* J_1$ que son iguales. Hacemos la integral en dy^0 :

$$\int \frac{dy^0}{2\pi} e^{-ik^0 y^0} = \delta(k^0).$$

Para que la expresión (4.25) no se anule debemos hacer $k_0 = 0$, entonces $k^2 - m^2 + i\varepsilon = -k^2 - m^2 + i\varepsilon$ y podemos hacer $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\left(\int dx^0 \right) \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} q_1 q_2 \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 + m^2} \right). \quad (4.26)$$

Recordemos que en mecánica cuántica, el valor esperado del operador de evolución temporal es $\langle \Omega | e^{iHT} | \Omega \rangle \simeq e^{-iET}$, cuando T es muy grande, y siendo E la energía del estado inicial Ω . Además, tenemos que $Z = \mathcal{C}e^{iW}$, por tanto $E = -WT$, siendo E la energía debida a la presencia de las fuentes. En particular, la energía debida a la interacción entre las dos fuentes separadas por el vector $r = x_1 - x_2$ viene dada por

$$E = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} q_1 q_2 \frac{e^{ikr}}{k^2 + m^2}. \quad (4.27)$$

Tengamos presente que la expresión (4.26) solo depende temporalmente por medio de la integral en dx^0 , por tanto, $T = \int dx^0$. La integral anterior está evaluada en el apéndice B y el resultado es

$$E = - \frac{q_1 q_2}{4\pi r} e^{-mr}, \quad (4.28)$$

donde $r = |r| = |x_1 - x_2|$. Si hacemos $q_1 = q_2 = 1$, la energía es siempre negativa. La presencia de dos fuentes, es decir, la perturbación del campo en dos puntos, provoca una disminución de la energía. Hemos obtenido la expresión de un potencial atractivo para cargas, q_1 y q_2 , del mismo signo. Si la distancia r se hace muy grande, $E \rightarrow 0$; al contrario, la energía decrece según las dos fuentes se acerquen. Concluimos que el intercambio entre dos puntos del campo de una partícula de masa m produce la fuerza. Por ejemplo, el potencial de Yukawa es de la forma de (4.28): el intercambio de unas partículas con masa llamadas piones es responsable, en parte, de las fuerzas de interacción fuertes entre neutrones y protones en el núcleo atómico. En función de la partícula que se intercambie, tendremos una masa diferente y por tanto, un potencial y una fuerza asociada. En particular, si hacemos $m = 0$, obtenemos $E \propto -1/r$, como el potencial de Coulomb o de Newton, y la fuerza asociada $F \propto 1/r^2$. Las partículas sin masa fotón y gravitón están asociadas a la fuerza electromagnética y gravitacional respectivamente.

Teniendo en cuenta las simetrías que se conservan podemos tener campos de diferentes tipos. En caso en que el campo sea invariante bajo rotación o transformación de Lorentz, es decir, un campo escalar como el que hemos considerado en este capítulo, se le asocian partículas de espín 0. Si el resultado de la acción del campo es un vector, se llama campo vectorial, es invariante bajo rotaciones completas y se le asocian partículas de espín 1. Otros objetos de interés son los espinores: debemos hacer que el espacio dé dos vueltas completas para conseguir que el espinor dé una. Los campos espinoriales están relacionados con partículas de espín 1/2.

4.3. Campo vectorial

Uno de los ejemplos más importantes de campo vectorial aparece en la electrodinámica cuántica o *QED*. Esta es la cuantización del campo electromagnético.

La densidad lagrangiana del campo electromagnético viene dada por $\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético y $A_\mu(x)$ el potencial vector. Estamos tratando un campo vectorial que lleva asociada como partícula el fotón de espín 1 y masa nula. Sin embargo, para hacer el desarrollo vamos a considerar una partícula de espín 1 general con masa m y después haremos que dicha masa sea cero. Al Lagrangiano anterior debemos añadirle el término de la masa y una fuente, J^μ . Dicha fuente se corresponde con la corriente. Suponemos que se conserva y entonces $\partial_\mu J^\mu = 0$. El Lagrangiano resultante es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu.$$

La acción asociada al campo es

$$\begin{aligned} S(A) &= \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \right) \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu [(\partial^2 + m^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu + A_\mu J^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por analogía con el desarrollo hecho del campo escalar, debe cumplirse que

$$[(\partial^2 + m^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] D_{\nu\lambda}(x) = \delta_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x), \quad (4.30)$$

y para que se cumpla, la función $D_{\nu\lambda}$ debe ser de la siguiente forma:

$$D_{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-\eta_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda / m^2}{k^2 - m^2} e^{ikx}. \quad (4.31)$$

Llamando $G_{\nu\lambda} = \eta_{\nu\lambda} - k_\nu k_\lambda / m^2$, obtenemos el propagador de una partícula con espín 1 y masa m :

$$D_{\nu\lambda} = \frac{-G_{\nu\lambda}}{k^2 - m^2}. \quad (4.32)$$

Buscamos ahora la expresión del potencial del campo vectorial y obtenemos que

$$W(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{-\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J^\nu(k). \quad (4.33)$$

Supusimos que la corriente se conservaba, lo que se traduce al espacio de momentos como $k_\mu J^\mu = 0$, luego para tener alguna contribución en la integral anterior, debe cumplirse $\nu = \mu$. Añadiéndolo a la ecuación anterior tenemos que

$$W(J) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J_\mu(k). \quad (4.34)$$

Si consideramos que las dos cargas que generan las fuentes son iguales, por analogía con las ecuaciones (4.23) y (4.34), encontramos la siguiente expresión para la energía potencial

$$E = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}.$$

Esta energía es positiva mientras que la que encontrábamos en (4.23) era negativa, por tanto cargas iguales se repelen y cargas opuestas se atraen. Por último, haciendo $m = 0$, encontramos

$$E = \frac{1}{4\pi r}, \quad (4.35)$$

la expresión para la energía potencial que adquiere un fotón intercambiado entre dos cargas iguales separadas una distancia r .

4.4. Campo tensorial

Las partículas de espín 2 se encuentran bajo la acción de campos tensoriales, aquellos que a cada punto del espacio-tiempo le asigna un tensor. Los cálculos son más complicados que en el caso de los campos vectoriales, por lo que en este trabajo vamos a dar directamente los resultados.

El propagador en este caso, vendría dado por la siguiente expresión

$$D_{\mu\nu,\lambda\sigma}(k) = \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2}.$$

Al igual que hemos visto cómo es la energía potencial entre dos partículas con la misma carga, veamos qué ocurre con dos masas. Hablar de masa equivale a hablar de densidad de energía y esta se corresponde con la componente T^{00} del tensor energía-momento. Consideremos un campo tensorial dado por el gravitón al cual le vamos a asignar una masa m , como hicimos con el caso del fotón. Tenemos que

$$W(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T^{\mu\nu}(k)^* \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} T^{\lambda\sigma}(k). \quad (4.36)$$

Centrándonos únicamente en la primera componente del tensor

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T^{00}(k)^* \frac{1 + 1 - \frac{2}{3}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} T^{00}(k), \quad (4.37)$$

y comparándola con la expresión de la ecuación (4.34), observamos que difieren en un signo. En este caso, la expresión para la energía potencial será negativa, por lo que la fuerza es atractiva cuando la energía o la masa son positivas.

4.5. Conclusiones

Si perturbamos el campo en un punto del espacio-tiempo, se crea una partícula que se propaga durante un tiempo y después se aniquila, provocando que el campo recupere su estado inicial. En función del campo que estemos considerando encontramos diferentes potenciales. Si consideramos cargas iguales y campos escalares, el intercambio de una partícula de espín 0 produce una fuerza atractiva; en el caso del vectorial, la fuerza es repulsiva; y en el tensorial, de nuevo atractiva. La partícula intercambiada se denomina partícula virtual, porque no puede ser observada. Se introduce en el esquema teórico a fin de dar explicación a las diferencias en energía y momento que surgen de las interacciones, es decir, cuando dos partículas interactúan puede darse que una pierda energía y la otra la gane, y la partícula virtual es la encargada de transportar dicha energía de un punto al otro.

Cuando consideramos el caso de la electrodinámica cuántica encontramos que dos cargas del mismo signo se repelen. Por ejemplo, la interacción de dos electrones produce un cambio en sus momentos que asignamos al intercambio de fotones. Durante este proceso pueden intercambiar un único fotón o dos fotones, entre otras cosas. Este tipo de interacciones será descrita por los diagramas de Feynman. En cada proceso intervienen diferentes diagramas y el resultado final será la suma de todos ellos, cada uno con una amplitud de probabilidad determinada.

En el último caso, la interacción entre dos masas daba lugar a un potencial negativo, es decir, a una fuerza atractiva. Esta es la razón de que sintamos la gravedad que atrae nuestros cuerpos a la Tierra. Si bien está fuera del contenido de este trabajo, cabe destacar que la Teoría Cuántica de Campos no puede describir el campo gravitatorio.

Capítulo 5

Diagramas de Feynman

Los diagramas de Feynman nos muestran las trayectorias que siguen las partículas desde su creación en una fuente hasta su desaparición en un sumidero. Existen diferentes formas de llegar a los diagramas de Feynman: la primera, que haremos a continuación, por medio de la integral de caminos y la segunda forma, mediante el formalismo canónico, que introduciremos en el siguiente capítulo.

Hasta ahora, hemos considerado sistemas formados por partículas libres, es decir, que no interactúan entre ellas. Estos tenían fácil resolución ya que la integral a la que llegábamos era una integral gaussiana. Sin embargo, en cuanto añadimos términos anarmónicos, evaluar la integral es más complicado. Introducimos aquí los diagramas de Feynman que facilitan mucho los cálculos. Añadimos un término $-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ a nuestra función de partición y vamos a tratar de evaluar integrales de la siguiente forma

$$Z(J) = \int D\varphi e^{i \int d^4x \{ \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi \}}. \quad (5.1)$$

5.1. Sistema en una variable

En primer lugar, consideramos la integral ordinaria

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda}{4!}q^4 + Jq}. \quad (5.2)$$

Obviamente, en el caso $\lambda = 0$ recuperamos la integral gaussiana. Expandimos la exponencial de la ecuación (5.2) en términos de λ :

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq} \left[1 - \frac{\lambda}{4!}q^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 q^8 + \dots \right]. \quad (5.3)$$

Notemos que $\int dqe^{Jq}q^n = \left(\frac{d}{dJ}\right)^n \int dqe^{Jq}$, luego la integral anterior resulta

$$\begin{aligned} Z(J) &= \left[1 - \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \left(\frac{d}{dJ}\right)^8 + \dots \right] \int_{-\infty}^{+\infty} dqe^{-\frac{1}{2}m^2q^2+Jq} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dqe^{-\frac{1}{2}m^2q^2+Jq} = \left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4} e^{\frac{J^2}{2m^2}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Expandiendo ambas exponenciales en suma de potencias,

$$Z(J) = \left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[-\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right]^p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^r, \quad (5.5)$$

podemos obtener los términos que nos interesen en orden de λ y J . Por ejemplo, si queremos el sumando en Z que va como λ y J^4 , basta tomar $p = 1$ y $r = 4$ en la ecuación anterior. El sumando resultante es

$$-\left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{1/2} \frac{8!}{(4!)^3(2m^2)^4} \lambda J^4, \quad (5.6)$$

y los diagramas asociados se muestran en la figura (5.1): J representa la fuente o sumidero y como tenemos J^4 en cada diagrama deben aparecer 4 finales de línea donde la partícula empieza o acaba su recorrido; λ representa la interacción, que viene dada por un punto de unión entre las líneas, es decir, un vértice. De la misma forma, si buscamos el sumando en el que hay dos vértices, λ^2 , y cuatro finales de línea, J^4 , extraemos el término con $p = 2$ y $r = 6$ en la ecuación (5.5):

$$\left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{1/2} \frac{12!}{2(4!)^3(2m^2)^6} \lambda^2 J^4. \quad (5.7)$$

En la figura (5.7) vemos los diagramas asociados al término anterior. En todos ellos tenemos cuatro fuentes o sumideros donde se crean o aniquilan las partículas, asociadas a J^4 , y dos vértices donde las trayectorias de las partículas se cruzan provocando la interacción, λ^2 . En la figura se observan diagramas muy diversos, más adelante haremos un estudio más detallado de ellos.

En la ecuación (5.2) hicimos el desarrollo en términos de λ , sin embargo, podemos hacerlo también en términos de J , obteniendo lo siguiente:

$$Z(J) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} J^s \int_{-\infty}^{+\infty} dqe^{-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda}{4!}q^4} q^s. \quad (5.8)$$

Introducimos la función

$$G^{(s)} = \frac{1}{Z(0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dqe^{-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda}{4!}q^4} q^s, \quad (5.9)$$

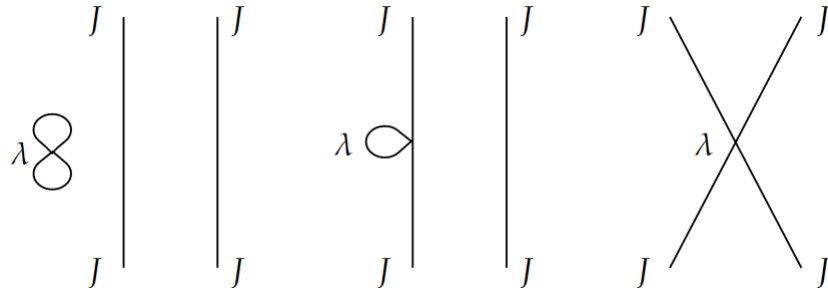


Figura 5.1: Diagramas asociados al término λJ^4 (ver ecuación (5.6)).

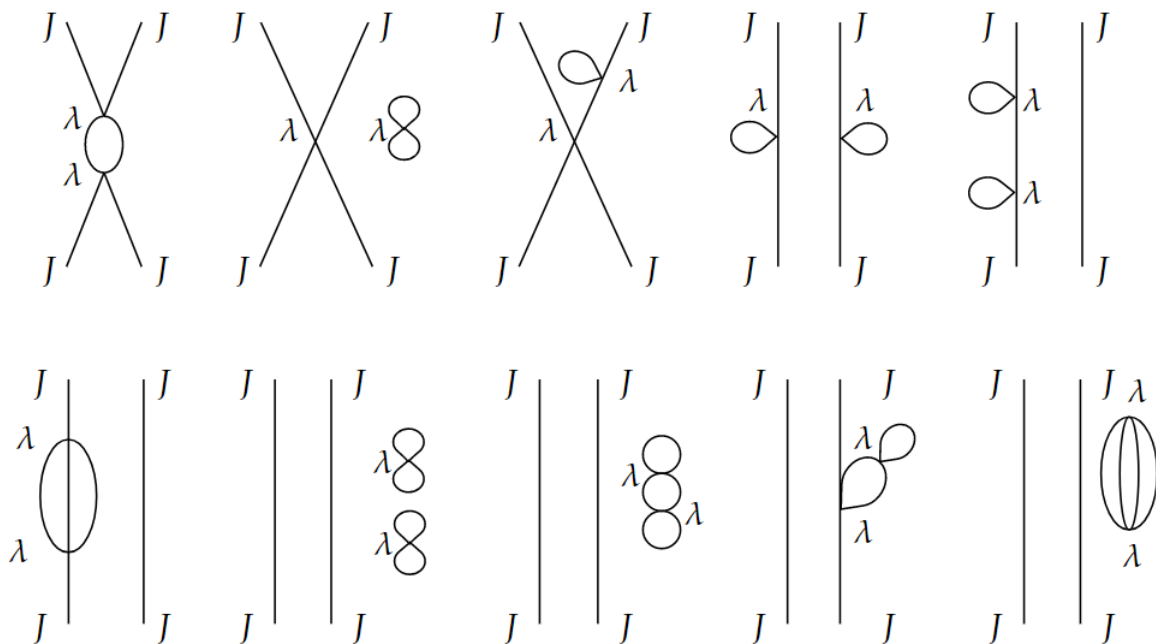


Figura 5.2: Diagramas asociados al término $\lambda^2 J^4$ (ver ecuación (5.7)).

que será el análogo a una función de Green en Teoría Cuántica de Campos. Esta función se evalúa en términos de λ usando

$$e^{-\frac{\lambda}{4!}q^4} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(-\frac{\lambda}{4!}q^4\right)^p, \quad (5.10)$$

y reescribir la ecuación (5.8) como

$$Z(J) = Z(0,0) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} J^s G^{(s)}. \quad (5.11)$$

Hemos visto hasta ahora que la función de partición se representa como una combinación de diagramas de Feynman en diferentes proporciones, dependiendo del coeficiente que acompañe

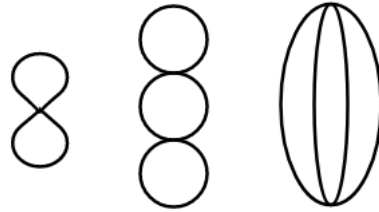


Figura 5.3: Diagramas sin fuentes externas: el primero con un único vértice asociado con un término λ ; los otros con dos vértices asociados a λ^2 .

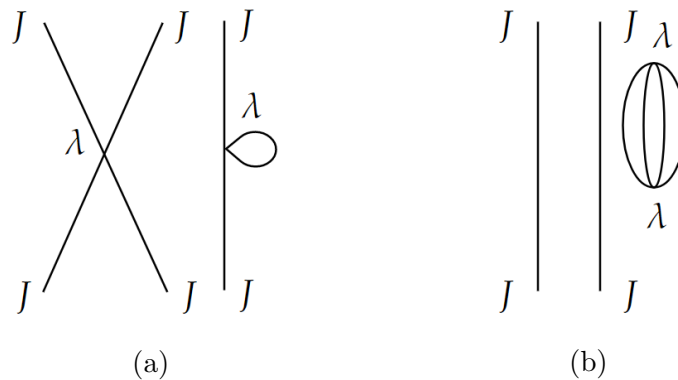


Figura 5.4: Diagramas de Feynman desconexos, suma de diagramas conexos.

a $\lambda^n J^m$. Recordemos que

$$Z(J, \lambda) = Z(J = 0, \lambda) e^{W(J, \lambda)}, \tag{5.12}$$

donde $Z(0, \lambda)$ contiene aquellos diagramas que no poseen fuentes externas, como por ejemplo los que se encuentran en la figura (5.3). Expandiendo también esta exponencial, tenemos que

$$Z(J, \lambda) = Z(J = 0, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} W^n(J, \lambda). \tag{5.13}$$

Como hemos dicho, el primer factor, $Z(J = 0, \lambda)$, es suma de diagramas que no poseen fuentes externas. Sin embargo, Z está compuesto por diagramas conexos y no conexos. Aquellos en los que intervengan fuentes externas deben estar contenidos en la exponencial de (5.12), luego asumimos que $W(J, \lambda)$ es suma de diagramas conexos. El número de componentes conexos que formen nuestro diagrama desconexo nos dará la potencia de W que estamos considerando. Por ejemplo, en la figura (5.4) tenemos dos diagramas desconexos: el primero, (5.4a), está asociado al término $[W(J, \lambda)]^2/2!$ y el factor $1/2$ pone en manifiesto que el diagrama es el mismo aunque cambiemos el orden de las componentes; el segundo, (5.4b), está asociado a $[W(J, \lambda)]^3/3!$, ya que está compuesto por tres componentes, su orden no influye y de ahí el factor $1/3!$.

5.2. Sistema discreto en N variables

Al igual que hicimos en el desarrollo de la integral de caminos, consideremos ahora una generalización del caso anterior tomando el sistema con más variables:

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \dots dq_N e^{-\frac{1}{2}qAq - \frac{\lambda}{4!}q^4 + Jq},$$

y resolviendo la integral Gaussiana,

$$Z(J) = \left[\frac{(2\pi)^N}{\det[A]} \right]^{1/2} e^{-\frac{\lambda}{4!} \sum_i (\frac{\partial}{\partial J_i})^4} e^{\frac{1}{2}JA^{-1}J}. \quad (5.14)$$

Teniendo en cuenta que $q^2 = \sum_{i=1}^N q_i^2$ y que los subíndices i indican las posiciones en la red, expandimos e^{Jq} y obtenemos

$$Z(J) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_s=1}^N \frac{1}{s!} J_{i_1} \dots J_{i_s} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_N e^{-\frac{1}{2}qAq - \frac{\lambda}{4!}q^4 + Jq} q_{i_1} \dots q_{i_s}.$$

Introducimos la función de Green a s -puntos,

$$G_{i_1, \dots, i_s}^{(s)} = \frac{1}{Z(0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_N q_i e^{-\frac{1}{2}qAq - \frac{\lambda}{4!}q^4} q_{i_1} \dots q_{i_s}, \quad (5.15)$$

y tenemos

$$Z(J) = Z(0,0) \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_s=1}^N \frac{1}{s!} J_{i_1} \dots J_{i_s} G_{i_1 \dots i_s}^{(s)}. \quad (5.16)$$

Veamos qué información esconde esta función de Green. Si recuperamos la ecuación (4.5) y la diferenciamos dos veces con respecto a J , encontramos

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{Z(0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_N e^{-\frac{1}{2}qAq} q_i q_j = G_{ij}^{(2)}(\lambda = 0), \quad (5.17)$$

que no es más que la función de Green a 2-puntos cuando $\lambda = 0$ y se corresponde con el propagador de i a j . Podemos escribir las funciones de Green en términos de la matriz A^{-1} . Como antes, la función se evalúa en términos de λ , pero además debemos añadir todas las posibles permutaciones de los índices. Por ejemplo, veamos la función de Green a 4-puntos

hasta orden λ :

$$\begin{aligned}
 G_{ijkl}^{(4)} &= \frac{1}{Z(0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_N e^{-\frac{1}{2}qAq} q_i q_j q_k q_l \left[1 - \frac{\lambda}{4!} q^4 + O(\lambda^2) \right] \\
 &= (A^{-1})_{ij} (A^{-1})_{kl} + (A^{-1})_{ik} (A^{-1})_{jl} + (A^{-1})_{il} (A^{-1})_{jk} \\
 &\quad - \lambda \sum_{p=1}^N (A^{-1})_{ip} (A^{-1})_{jp} (A^{-1})_{kp} (A^{-1})_{lp} \\
 &\quad - \lambda \sum_{p=1}^N (A^{-1})_{ij} (A^{-1})_{kp} (A^{-1})_{lp} (A^{-1})_{pp} + \dots + O(\lambda^2).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

El primer sumando describe una propagación de i a j y otra de k a l , lo mismo ocurre con los dos siguientes. En orden λ , i, j, k y l se propagan hasta el punto p y ahí interaccionan con una amplitud λ . Los índices se pueden repetir: a modo de ejemplo, la función a 3-puntos contendría sumandos de la forma $(A^{-1})_{ij} (A^{-1})_{kk}$. La acción de tomar todas las posibles combinaciones de índices se denomina contracción de Wick y será introducida de manera más rigurosa en el siguiente capítulo.

5.3. Sistema continuo

Ya estamos listos para pasar a Teoría Cuántica de Campos. Dejando atrás el caso discreto, consideramos las funciones φ y J de la variable continua x . La función de partición del sistema es

$$Z[J, \lambda] = \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + J\varphi \right\}}. \tag{5.19}$$

Procedemos de forma análoga a los casos anteriores. Expandimos la exponencial en términos de λ , y calculamos la integral obteniendo los \mathcal{X} 's a partir de las derivadas respecto a la fuente J :

$$\begin{aligned}
 Z[J, \lambda] &= \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2] + J\varphi \right\}} \left[1 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \varphi^8 + \dots \right] \\
 &= e^{-\frac{i}{4!} \lambda \int d^4 w \left[\frac{\delta}{i\delta J(w)} \right]^4} \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2] + J\varphi \right\}}.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Si recordamos la expresión de (4.20), podemos reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$Z[J, \lambda] = Z(0,0) e^{-\frac{i}{4!} \lambda \int d^4 w \left[\frac{\delta}{i\delta J(w)} \right]^4} e^{-\frac{i}{2} \int \int d^4 x d^4 y J(x) D(x-y) J(y)}. \tag{5.21}$$

En los casos anteriores, para resolver la integral utilizamos la derivada parcial con respecto a J . En este caso, tenemos el diferencial de un funcional con respecto a J , que a su vez es

una función del espacio. Además, la amplitud de propagación en uno de los casos venía dada por $1/m^2$ y en el otro por A^{-1} , ahora nos la da el propagador $D(x - y)$.

Si expandimos (5.19) en términos de J , tenemos que

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int dx_1 \dots dx_s J(x_1) \dots J(x_s) \\ &\quad \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\}} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int dx_1 \dots dx_s J(x_1) \dots J(x_s) G^{(s)}(x_1, \dots, x_s). \end{aligned} \quad (5.22)$$

De aquí extraemos la expresión para la función de Green:

$$G^{(s)}(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{Z(0, 0)} \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\}} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s). \quad (5.23)$$

Igual que antes, si evaluamos la función de Green a 2 puntos cuando $\lambda = 0$, obtenemos

$$G^{(2)}(x_1, x_2; \lambda = 0) = \frac{1}{Z(0, 0)} \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] \right\}} \varphi(x_1) \varphi(x_2),$$

que no es más que el propagador, $D(x_1 - x_2)$, que describe la propagación de una partícula de un punto x_1 a un punto x_2 en ausencia de interacción (ya que $\lambda = 0$). Cuando $\lambda \neq 0$, la función de Green a dos puntos es el propagador de una partícula entre dos posiciones del espacio separados una distancia $|x_1 - x_2|$ durante la cual se pueden producir interacciones.

5.4. Colisión de dos partículas

Si en el sistema hay una fuente y un sumidero, una partícula nace, se propaga por el espacio, y se extingue. ¿Qué ocurrirá si tenemos dos fuentes y dos sumideros? Cabe esperar que nazca una partícula en cada una de las fuentes 1 y 2 y que desaparezcan en los sumideros 3 y 4 (figura 5.5a). Por tanto, nos interesa buscar el término $J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4)$ en la función de partición. Fijándonos en la ecuación (5.22), debemos considerar la función de Green $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$, que en primer orden en λ resulta

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &\simeq \frac{1}{Z(0, 0)} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4w \\ &\quad \int D\varphi e^{i \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\}} \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \varphi^4(w). \end{aligned}$$

Haciendo la contracción de Wick, la ecuación anterior se puede escribir como

$$-i\lambda \int d^4w D(x_1 - w) D(x_2 - w) D(x_3 - w) D(x_4 - w). \quad (5.24)$$

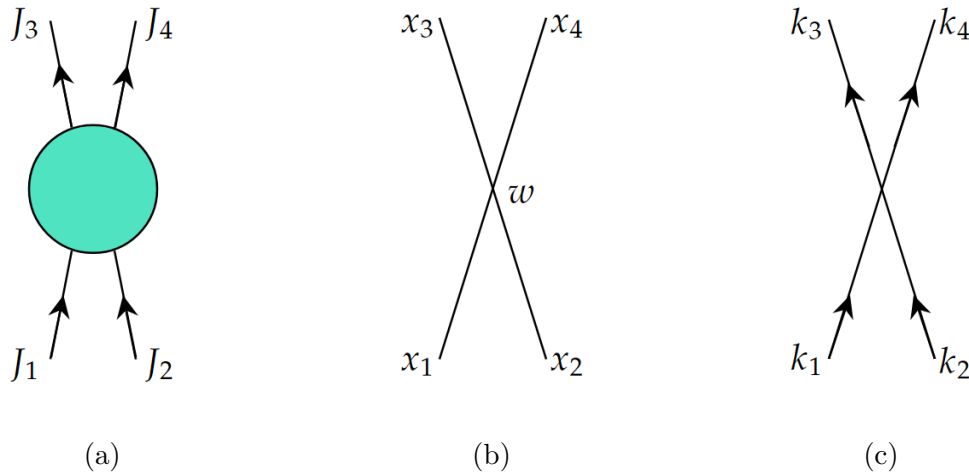


Figura 5.5: Diagramas de Feynman relativos a la colisión de dos partículas.

Los propagadores nos dan la amplitud de propagación de las partículas que van de x_1 y x_2 a un punto w y desde este punto, a los sumideros en x_3 y x_4 . La integral en la variable w indica que la interacción se puede producir en cualquier punto del espacio.

Si pasamos al espacio de momentos, una partícula con momento k_1 y otra con momento k_2 colisionan y salen dispersadas con momentos k_3 y k_4 . Conocemos la expresión del propagador en el espacio de momentos:

$$D(x_a - w) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{\pm ik_a(x_a - w)}}{k_a^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Para describir el proceso mediante un diagrama, podemos asignar a cada partícula un momento, al punto de colisión una amplitud de dispersión $-i\lambda$ y a cada línea una amplitud de propagación dada por el propagador. Además como la colisión se puede producir en cualquier punto, nos faltaría hacer la integral a todo el espacio. Observemos en la expresión del propagador que tenemos cierta libertad a la hora de escoger el signo de la exponencial que dependerá del sentido en el que recorramos las trayectorias. Fijémonos en que

$$\int d^4w e^{-i(+k_1+k_2-k_3-k_4)w} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4).$$

Al hacer la integral a todo el espacio de la parte de la exponencial asociada a los momentos, será distinta de cero sólo si $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$. Hemos llegado a la conservación del momento.

A lo largo de esta sección obtuvimos los diagramas de Feynman para el nacimiento y colisión de dos partículas tanto en el espacio real, (5.5b), como en el espacio de momentos (5.5c).

A partir del estudio hecho, hemos derivado las reglas de Feynman para el campo escalar

en el espacio de momentos. A la hora de representar un diagrama de Feynman, seguimos los siguientes pasos:

1. Se etiqueta cada línea con un momento, k , asociado al propagador $i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$.
2. A cada vértice de interacción se le asocia el factor $(-i\lambda)$ y $(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_i k_i - \sum_j k_j)$. Donde los índices i hacen referencia a las partículas que entran en el vértice, y los j a las que salen.
3. El momento asociado a las líneas internas, es decir, aquellas que se encuentran entre vértices, se debe integrar con medida $d^4k/(2\pi)^4$.
4. Se deben añadir los factores de simetría provenientes de las diferentes expansiones de las exponenciales.

Para el ejemplo de dos partículas masivas que colisionan, siguiendo las normas obtenemos que

$$-i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \prod_{a=1}^4 \left(\frac{i}{k_a^2 - m^2 + i\varepsilon} \right).$$

Esta expresión se puede simplificar aún más. El factor $\prod_{a=1}^4 \left(\frac{i}{k_a^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)$ será común a todos los diagramas en los que dos partículas colisionan y dan lugar a otras dos, luego podemos prescindir de él. Además, si imponemos que se cumpla la conservación del momento, no es necesario escribir la función delta. A las reglas anteriores añadimos: no asociar un propagador a las líneas externas y, suponiendo la conservación del momento, la función delta no es necesaria.

La amplitud del suceso la denotamos por \mathcal{M} y para nuestro ejemplo, aplicando todas las reglas, obtenemos que $\mathcal{M} = -i\lambda$.

El diagrama que acabamos de estudiar es uno de los asociados con el término $(\frac{1}{m^2})^4\lambda J^4$ de la ecuación (5.4). Entre otros, tendremos también el que describe cómo dos partículas se propagan sin interactuar entre ellas. Debido a la forma del término que estamos considerando debemos tener también un vértice. El diagrama que describe este suceso es el de la figura (5.6). En él, una partícula viaja desde una posición x_1 a una posición x_3 y otra de x_2 a x_4 . Además, en algún punto del espacio, w , se produce una interacción que provoca una amplitud $-i\lambda$. Esta interacción provoca un cambio temporal en la energía de dicho punto y se le denomina fluctuación cuántica.

Veamos otro ejemplo. Consideremos el diagrama de la figura (5.7). Las líneas están ya etiquetadas con ciertos momentos. Siguiendo las reglas, vamos a obtener la amplitud del diagrama.

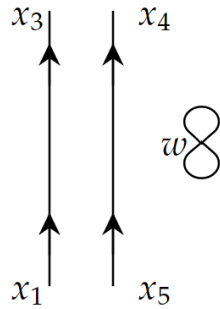


Figura 5.6: Diagrama asociado a $(\frac{1}{m^2})^4 \lambda J^4$ de dos partículas que no interactúan.

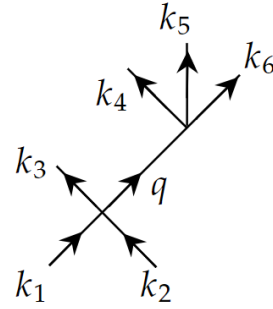


Figura 5.7: Ejemplo de diagrama de Feynman con más partículas reales.

En primer lugar, tenemos dos vértices, por lo que aparecerá un factor $(-i\lambda)^2$. El producto de los propagadores relativo a las 6 líneas externas, $\prod_{a=1,\dots,6} \left(\frac{1}{k_a^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)$, no lo tenemos en cuenta. Las deltas de Dirac que nos aparezcan, podemos olvidarlas si imponemos que $k_1 + k_2 = k_3 + q$ y $q = k_4 + k_5 + k_6$. Por último, debemos acordarnos de introducir la línea interna que se corresponde con la partícula que nace en el primer vértice y se propaga con momento q hasta el segundo vértice. La amplitud del diagrama sería

$$\mathcal{M} = (-i\lambda)^2 \frac{i}{(k_4 + k_5 + k_6)^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

En la figura (5.7), partimos de dos partículas con momentos k_1 y k_2 que interactúan. Como resultado final tenemos 4 partículas con momentos k_3, k_4, k_5 y k_6 . Se tienen dos vértices y se conoce que del primero surge una de las partículas, luego del segundo deben salir las otras 3. Podemos suponer que como resultado de la primera interacción nace una partícula con momento k_3 y asignamos el resto, q , a una partícula virtual que se propagará hasta el punto en el que se creen las demás partículas. Debemos tener en cuenta que, en lugar de asignar a la primera partícula el momento k_3 , podríamos haberle asignado k_4, k_5 y k_6 , teniendo siempre presente la conservación del momento. A la hora de dar la amplitud de este diagrama, se debe añadir la contribución debida a la libertad de elección del momento.

La partícula virtual no tiene por qué cumplir que $q^2 = m^2$, por tanto cuanto mayor sea la diferencia entre el momento y la masa de la partícula, menor será la amplitud de propagación. Notemos que si quisiésemos obtener esto a partir de las ecuaciones, deberíamos hacer el desarrollo de la exponencial en λ hasta orden 2.

Veamos como último ejemplo el que se muestra en la figura (5.8), en el cual hay más de una partícula virtual. Dos partículas reales con momentos k_1 y k_2 colisionan para dar lugar a dos partículas virtuales con momentos q_1 y q_2 que se propagan durante un tiempo hasta interactuar y obtener otras dos partículas reales con k_3 y k_4 .

Teniendo en cuenta la conservación del momento, se cumple que $k_1 + k_2 = q_1 + q_2$ y

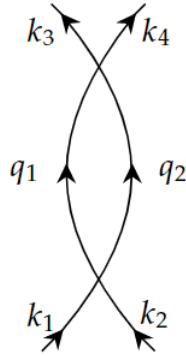


Figura 5.8: Ejemplo de diagrama de Feynman con dos partículas virtuales.

$q_1 + q_2 = k_3 + k_4$. De la primera igualdad despejamos el momento de una de las partículas virtuales $q_2 = k_1 + k_2 - q_1$ y lo llamamos $q = q_1$. Aplicando las reglas de Feynman obtenemos que

$$\frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(k_1 + k_2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

El factor $1/2$ aparece al considerar los dos posibles diagramas. Como q recorre todos los posibles valores, la integral es grande sólo si al menos uno de los momentos de las partículas virtuales al cuadrado, se acerca al valor de m^2 , es decir, si dichas partículas virtuales tienden a ser partículas reales. Para valores grandes de q la integral diverge. Estas divergencias se tratan mediante un método llamado renormalización que va más allá del contenido de este trabajo.

Capítulo 6

Cuantización Canónica

En este capítulo desarrollaremos la Teoría Cuántica de Campos a través de la cuantización canónica y veremos que llegamos a las mismas conclusiones que con la integral de caminos.

La cuantización canónica consiste en tomar el sistema descrito clásicamente y cuantizarlo, haciendo que las magnitudes físicas sean operadores. Consideraremos un sistema descrito por las magnitudes posición, q^i , y momento, p^i . Imponemos que estas coordenadas cumplan las reglas de conmutación $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$, $[q^i, q^j] = 0$ y $[p^i, p^j] = 0$. A partir de estas reglas, construimos los operadores de momento, posición y los escalera, y obtenemos los posibles estados del sistema. En caso de tener el sistema en la imagen de Heisenberg, debemos tener las coordenadas en el mismo instante de tiempo.

6.1. Cuantización Canónica en QFT

En primer lugar, tomamos un sistema formado por una única partícula de masa m bajo un cierto potencial. El Lagrangiano es $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(\hat{q})$. Los operadores momento y posición cumplen la relación $[\hat{p}, \hat{q}] = -i$ cuando los medimos en el mismo instante t (imagen de Heisenberg). Además,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{p}}{dt} &= i[H, \hat{p}] = -V'(\hat{q}), \\ \frac{d\hat{q}}{dt} &= i[H, \hat{q}] = \frac{\hat{p}}{m}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Definimos los operadores escalera

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \left(\omega \hat{q} + \frac{i}{m} \hat{p} \right), \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \left(\omega \hat{q} - \frac{i}{m} \hat{p} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Basta conocer cómo actúa el operador de subida sobre el estado fundamental y partir de él calculamos el resto de estados. Por ejemplo, en el oscilador armónico imponíamos $a|0\rangle = 0$ y $V(\hat{q}) = \omega^2 \hat{q}^2 / 2$.

En la generalización a N partículas que se encuentran bajo un potencial, el Lagrangiano del sistema pasa a ser el siguiente:

$$L = \sum_a \frac{1}{2} \dot{\hat{q}}_a^2 - V(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N), \quad (6.3)$$

donde $\hat{p}_a = \partial L / \partial \dot{\hat{q}}_a$ y $[\hat{p}_a(t), \hat{q}_a(t)] = -i\delta_{ab}$. Para obtener la Teoría Cuántica de Campos realizamos los mismos cambios que en la integral de camino y en vez de escribir la variable posición, escribimos el operador campo $\varphi(x, t)$,

$$L = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - V(\varphi) \right]. \quad (6.4)$$

Definimos la densidad de momento canónico conjugado como

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x, t)} = \partial_0 \varphi(x, t), \quad (6.5)$$

y la relación de conmutación resulta

$$[\Pi(x, t), \varphi(x', t)] = [\partial_0 \varphi(x, t), \varphi(x', t)] = -i\delta^{(D)}(x, x'). \quad (6.6)$$

Debemos tener en cuenta que $[\varphi(x), \varphi(y)] = [\Pi(x), \Pi(y)] = 0$. Por último, el Hamiltoniano del sistema es el siguiente:

$$H = \int d^D x [\Pi(x, t) \partial_0 \varphi(x, t) - \mathcal{L}]. \quad (6.7)$$

6.2. Campo escalar

Consideramos de nuevo el campo escalar libre. Para resolver la ecuación de Klein-Gordon se siguen los mismos pasos que con la ecuación de Schrödinger. Las soluciones a la ecuación

de movimiento serán

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} \right), \\ \Pi(x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} \right),\end{aligned}\tag{6.8}$$

donde $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Además, se cumplen las siguientes relaciones de conmutación¹:

$$\begin{aligned}[a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta^{(3)}(k - k'), \\ [\varphi(x), \Pi(x')] &= i\delta^{(3)}(x - x').\end{aligned}\tag{6.9}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.7) las expresiones obtenidas para los operadores, encontramos una nueva forma de escribir el Hamiltoniano del sistema:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{[a_k, a_k^\dagger]}{2} \right),\tag{6.10}$$

y utilizando las reglas de conmutación, llegamos a que

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{(2\pi)^3}{2} \delta(0) \right).\tag{6.11}$$

El segundo sumando en la integral, es la suma a todos los modos con energía $\omega_k/2$. Si calculamos $E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle$, este primer sumando es el único término que contribuye, por tanto podemos asignarlo a la energía del vacío. Experimentalmente nos interesan únicamente las diferencias de energía, luego fijamos en 0 la energía del vacío y

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \omega_k a_k^\dagger a_k.\tag{6.12}$$

Imponemos que el estado fundamental del sistema, $|0\rangle$ cuando no haya perturbación alguna, cumpla $a_k |0\rangle = 0$, para cualquier k . En Teoría Cuántica de Campos los operadores escalera se les denomina operadores de creación, a_k^\dagger , y aniquilación, a_k . El asociado a una partícula con momento k cumple $|k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle$.

¹En cierta bibliografía aparecen relaciones de conmutación del tipo $[a_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - k')$ ya que las funciones de onda vienen dadas por $\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} \right)$

6.3. Propagador de un campo escalar

En primer lugar, veamos que

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) |0\rangle &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} \right) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} |k\rangle,\end{aligned}\tag{6.13}$$

luego el operador $\varphi(x)$ actuando sobre el vacío, crea una partícula en la posición x . A partir de este resultado, podemos encontrar

$$\langle 0 | \varphi(x, t) |k\rangle = \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)}.\tag{6.14}$$

La expresión anterior se corresponde con la función de onda de una partícula con momento k . La amplitud de una partícula que viaja de una posición y a una posición x en el espacio-tiempo viene dada por $\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) |0\rangle$. Centrémonos en calcular la amplitud cuando la partícula parte de una posición 0 a una posición x : $\langle 0 | \varphi(x, t) \varphi(0, 0) |0\rangle$,

$$\begin{aligned}\langle 0 | \varphi(x, t) \varphi(0, 0) |0\rangle &= \langle 0 | \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)} \right) \right. \\ &\quad \left. \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left(a_{k'} + a_{k'}^\dagger \right) \right] |0\rangle.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Al evaluar la expresión anterior nos aparecerán 4 sumandos: $\langle 0 | a_k a_{k'} |0\rangle$, $\langle 0 | a_k^\dagger a_{k'} |0\rangle$, $\langle 0 | a_k^\dagger a_{k'}^\dagger |0\rangle$ y $\langle 0 | a_k a_{k'}^\dagger |0\rangle$. De estos, solo sobrevive el último. Como resultado obtenemos

$$\langle 0 | \varphi(x, t) \varphi(0, 0) |0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)}.\tag{6.16}$$

La expresión anterior se corresponde con la aparición y propagación de una partícula. Para que sea coherente físicamente, primero se debe crear la partícula y después se debe aniquilar. Es por esto que vamos a introducir el producto ordenado temporal o *time-ordered product*:

$$T[\varphi(x) \varphi(y)] = \theta(x^0 - y^0) \varphi(x) \varphi(y) + \theta(y^0 - x^0) \varphi(y) \varphi(x),\tag{6.17}$$

donde θ es la función escalón de Heaviside.

Recuperemos la ecuación del propagador de Feynman (4.17). Vamos a evaluar la parte temporal de la integral de $D(x)$. Debemos recordar que, en la métrica de Minkowski, $k^2 = (k^0)^2 - |k|^2$. Introduciendo la energía de una partícula relativista, tenemos que $k^2 = (k^0)^2 - \omega_k^2$.

La parte temporal del propagador tiene dos polos dados por $\pm\sqrt{\omega_k^2 - i\varepsilon}$. Si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$, se aproximan a $\pm(\omega_k - i\varepsilon)$. Dependiendo del signo de x^0 obtendremos un valor u otro de la integral. El resultado se puede expresar en términos de la función escalón de Heaviside (como se puede ver en [10, pág 24]):

$$D(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [\theta(x^0)e^{-i(\omega_k t + vk \cdot x)} + \theta(-x^0)e^{i(\omega_k t - k \cdot x)}]. \quad (6.18)$$

Si calculamos $\langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(0)] | 0 \rangle$, obtenemos la misma expresión que en la ecuación (6.18), por tanto $\langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(0)] | 0 \rangle = iD(x)$. De forma más general, podemos escribir

$$\langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(y)] | 0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.19)$$

y se denomina función de correlación a 2 puntos o función de Green a dos puntos, y al igual que el propagador, nos da la amplitud de propagación de una posición y a un x para la teoría libre.

6.4. Teoría de perturbaciones

Cuando consideramos interacciones entre campos, lo más probable es que el estado fundamental del sistema no se corresponda con el estado fundamental en el caso del campo libre, $|0\rangle$. Vamos a llamar al estado fundamental cuando tenemos interacciones $|\Omega\rangle$, y nos centramos en obtener una expresión para la función de correlación a dos puntos

$$\langle \Omega | [T\varphi(x)\varphi(y)] | \Omega \rangle. \quad (6.20)$$

Al igual que hicimos en el capítulo 5, consideramos una perturbación del tipo φ^4 . El Hamiltoniano del sistema lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$H = H_0 + H_{int} = H_{K-G} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x),$$

donde H_{K-G} es el Hamiltoniano de Klein-Gordon o de un campo libre.

El Hamiltoniano de la interacción va a actuar sobre el campo en la imagen de Heisenberg y sobre el estado $|\Omega\rangle$. Buscamos expresar ambos en términos de campos libres (que son tratados como operadores) y del estado $|0\rangle$.

En primer lugar, notemos que $\varphi(x) = e^{iHt}\varphi(x)e^{-iHt}$. Definimos el campo en la imagen de la interacción, $\varphi_I(x, t) = e^{iH_0(t-t_0)}\varphi(x, t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}$ que, en caso de tener $\lambda = 0$, va a contener

toda la información temporal de $\varphi(x)$. Por definición, se trata de un campo libre:

$$\varphi_I(x, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right]_{x^0=t-t_0}. \quad (6.21)$$

Introduciendo $U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$, el operador de evolución temporal, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \varphi_I(x, t_0) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= U^\dagger(t, t_0) \varphi_I(x, t) U(t, t_0). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Es fácil comprobar que $i\partial_t U(t, t_0) = H_I U(t, t_0)$, siendo $H_I = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH(t-t_0)}$ el Hamiltoniano en la imagen de interacción, por tanto

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\ &(-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (6.23)$$

Podemos utilizar el operador de ordenación temporal para escribir los sumandos como

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) = \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T[H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3)].$$

Llegamos a la expresión exacta para el operador en términos del Hamiltoniano en la imagen de interacción:

$$U(t, t_0) = T \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt'' H_I(t'')} \right], \quad t \geq t_0. \quad (6.24)$$

El operador de ordenación temporal aplicado sobre la exponencial, no es más que el operador aplicado cuando hacemos la expansión en serie de la exponencial. Además, es un operador unitario, $U(t, t) = 1$, y verifica $U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$.

Pasemos, ahora, a buscar la expresión del estado fundamental $|\Omega\rangle$. Suponemos que $|0\rangle$ y $|\Omega\rangle$ se superponen, es decir, $\langle 0|\Omega\rangle \neq 0$. Llamamos E_n a los autovalores del Hamiltoniano total, y usaremos la regla de completitud para escribir

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle, \quad (6.25)$$

usando que $H_0 |0\rangle = 0$ y $\langle \Omega| H |\Omega\rangle = E_0$.

Teniendo presente que $E_n > E_0$ para cualquier $n > 0$, y haciendo $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$, podemos despejar el estado fundamental de la perturbación obteniendo

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Teniendo en cuenta los desarrollos hechos, que $1 = \langle \Omega | \Omega \rangle$, con algunas cuentas que se muestran en [8, pág 87] y suponiendo que $x^0 > y^0$, llegamos a que

$$\langle \Omega | \varphi(x)\varphi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | U(T, x^0)\varphi_I(x)U(x^0, y^0)\varphi_I(y)U(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle}. \quad (6.27)$$

Es importante destacar que obtenemos este resultado cuando $x^0 > y^0$. En caso, contrario, tendríamos la misma expresión pero con los papeles de x^0 e y^0 permutados. Introduciendo el operador de ordenación temporal, obtenemos la expresión exacta para la amplitud de propagación de una excitación desde una posición y a una posición x cuando el estado fundamental no se corresponde con $|0\rangle$:

$$\langle \Omega | T[\varphi(x)\varphi(y)] | \Omega \rangle = \lim_{\tilde{T} \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[\varphi_I(x)\varphi_I(y)e^{-i \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} dt H_I(t)} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} dt H_I(t)} \right] | 0 \rangle}. \quad (6.28)$$

6.5. Fórmula de Reducción LSZ

Consideramos un Hamiltoniano general de la forma $H = H_0 + H_{int}$. Tomamos dos estados: $|a\rangle$ en el que se encuentra el sistema a un tiempo t_i y $|b\rangle$ a un tiempo t_f . La amplitud de probabilidad de que $|a\rangle$ evolucione a $|b\rangle$ viene dada por $\langle b | e^{-iH(t_f-t_i)} | a \rangle$. Imponemos que dichos estados estén muy separados temporalmente, es decir, $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$ y llamamos matriz S al operador evolución $e^{-iH(t_f-t_i)}$. La amplitud de dispersión viene dada por

$$\langle b | S | a \rangle = \lim_{(t_f-t_i) \rightarrow \infty} \langle b | e^{-iH(t_f-t_i)} | a \rangle. \quad (6.29)$$

Podemos separar el caso trivial definiendo la matriz de transición T de tal forma que $S = Id + iT$. Supongamos que tenemos dos conjuntos de partículas dados por $|k_1 k_2 \dots k_m\rangle$ y $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n\rangle$. Podemos derivar una ecuación que nos relacione las funciones de correlación con los elementos de matriz de S (ver [8, pág 222]). Esta se denomina fórmula de Reducción LSZ:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\alpha=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_\alpha^2 - m^2} \right) \left(\prod_{\beta=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_\beta^2 - m^2} \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | iT | k_1 k_2 \dots k_m \rangle \\ &= \int \left(\prod_{\alpha=1}^m d^4 x_\alpha e^{-ik_\alpha x_\alpha} \right) \int \left(\prod_{\beta=1}^n d^4 y_\beta e^{ip_\beta y_\beta} \right) \langle 0 | T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)\varphi(y_1) \dots \varphi(y_n)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde el factor \sqrt{Z} es un factor de renormalización que se corresponde con el residuo de la función a dos puntos. Esta fórmula debe su nombre a Lehmann, Symanzik y Zimmermann y

relaciona la matriz S con las funciones de correlación. Veamos ahora qué tienen que ver las funciones de correlación con los diagramas de Feynman, y habremos encontrado el hilo que une el desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos a través de la integral de camino y a través de la cuantización cuántica.

6.6. Diagramas de Feynman y funciones de correlación

Antes de comenzar vamos a introducir un resultado llamado el teorema de Wick. En primer lugar, decimos que un conjunto de operadores escalera están en orden normal u orden de Wick, si los de creación están al izquierda de los de aniquilación. El operador de ordenación normal se suele denotar con la letra \mathcal{N} . Así, si tenemos un producto de operadores escalera ordenados normalmente actuando sobre el estado fundamental, el resultado será cero.

Comencemos por la cantidad $\langle 0|T[\varphi_I(x)\varphi_I(y)]|0\rangle$, cuyo resultado ya conocemos. Vamos a descomponer los campos como suma de dos $\varphi_I(x) = \varphi_I^+(x) + \varphi_I^-(x)$ donde

$$\varphi^+(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_k e^{-i(\omega_k t - k \cdot x)}, \quad \varphi^-(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - k \cdot x)}.$$

Definimos contracción de Wick como

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = \begin{cases} [\varphi^+(x), \varphi^-(y)], & \text{si } x^0 > y^0, \\ [\varphi^+(y), \varphi^-(x)], & \text{si } x^0 < y^0, \end{cases} \quad (6.31)$$

donde $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador de dos operadores (en este caso). La expresión (6.31) coincide exactamente con el propagador de Feynman (ver (4.16)), luego

$$T[\varphi(x)\varphi(y)] = \mathcal{N}[\varphi(x)\varphi(y) + \overline{\varphi(x)\varphi(y)}].$$

Generalizando este resultado obtenemos el teorema de Wick:

$$T[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)] = \mathcal{N}[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)] + (\text{todas las contracciones posibles}). \quad (6.32)$$

Aplicemos el teorema de Wick para obtener los diagramas de Feynman posibles de un caso sencillo a orden cero en teoría de perturbaciones. Escribiremos $\varphi_j = \varphi(x_j)$,

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4]|0\rangle &= \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} \\ &= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{34}, \end{aligned}$$

donde D_{ij} representa el propagador entre las posiciones x_i y x_j . En el espacio de posiciones estos diagramas están asociados con la figura (6.1).

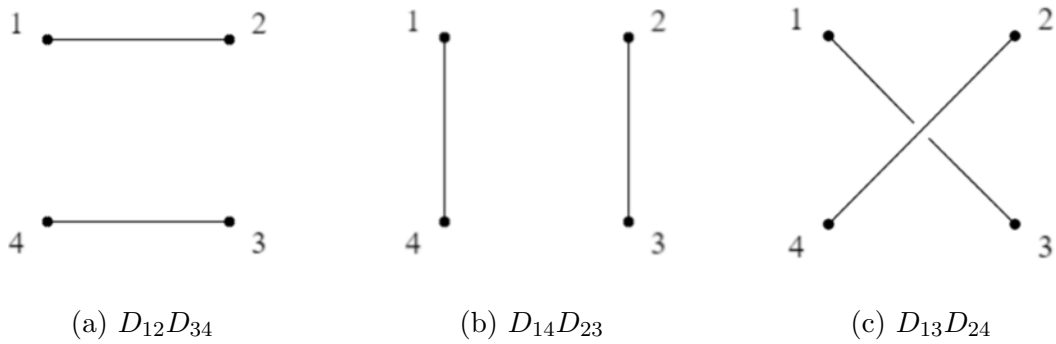


Figura 6.1: Diagramas de Feynman correspondientes a la función de correlación a 4 puntos.

Llegados a este punto somos capaces de describir los sucesos de dos formas: mediante los diagramas de Feynman, vistos en el capítulo 5, y mediante las funciones de correlación. Podemos relacionar ambos y obtener los elementos de la matriz de dispersión descrita mediante la cuantización canónica.

Capítulo 7

Ruptura espontánea de simetría

En este capítulo vamos a hacer una pequeña introducción a la ruptura espontánea de simetría. Consideramos el Lagrangiano del campo escalar con el término φ^4

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4,$$

y reemplazamos m^2 por $-\mu^2$, con $\mu > 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \quad (7.1)$$

Este Lagrangiano tiene simetría de reflexión, es decir, es invariante bajo el cambio $\varphi \rightarrow -\varphi$. El potencial asociado es

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \quad (7.2)$$

y el valor del campo que minimiza el potencial es

$$\varphi_0 = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu. \quad (7.3)$$

Denotamos $v = \mu\sqrt{6/\lambda}$, este recibe el nombre de valor de expectación del vacío de φ . Vamos a suponer que el sistema se encuentra en un entorno del mínimo y escribimos el campo como $\varphi(x) = v + \sigma(x)$. Sustituimos en la ecuación (7.2) y

$$\begin{aligned} V(v + \sigma) &= -\frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4!}(v + \sigma)^4 \\ &= \mu^2\sigma^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 + \frac{\lambda}{4!}\sigma^4 + a, \end{aligned}$$

donde $a = 5\mu^4/(6\lambda)$ contiene el término constante. De la misma forma, el Lagrangiano pasa a ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \mu^2\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4 - a. \quad (7.4)$$

Hacer el cambio $\varphi \rightarrow -\varphi$ es equivalente a $\sigma \rightarrow -\sigma$. En (7.4) aparecen términos cúbicos en σ , luego el Lagrangiano no es invariante bajo cambio de signo del campo y se ha roto la simetría de reflexión.

7.1. Acción y potencial efectivos

Consideramos la función de partición que encontramos mediante la integral de caminos y que nos describe la teoría de un campo escalar φ en presencia de una fuente J . Vamos a suponer que está normalizada, es decir $Z(J=0) = 1$. Recordemos que teníamos

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int D\varphi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}[\varphi] + J\varphi]}, \quad (7.5)$$

y notemos que $W[J] = -i \ln Z[J]$, por tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= -i \frac{\delta \ln Z[J]}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\int D\varphi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}[\varphi] + J\varphi]} \varphi(x)}{\int D\varphi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}[\varphi] + J\varphi]}}. \end{aligned}$$

Esta expresión se corresponde con el valor esperado¹ del campo φ en presencia de una fuente J y recibe el nombre de campo clásico:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle_J = \varphi_{cl}(x). \quad (7.6)$$

Definimos la acción efectiva como la transformación de Legendre de W :

$$\Gamma(\varphi_{cl}) = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi_{cl}(x), \quad (7.7)$$

donde $J(x)$ y $\varphi_{cl}(x)$ son las variables conjugadas de Legendre. Teniendo en cuenta la regla de la cadena, hacemos la derivada funcional:

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi_{cl})}{\delta \varphi_{cl}(x)} = \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi_{cl}(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi_{cl}(x)} \varphi_{cl}(y) - \int d^4y J(y) \delta^{(4)}(x-y).$$

¹También se conoce como valor de expectación y es un promedio de los posibles valores del campo con sus respectivos pesos.

Teniendo presente la ecuación (7.6), los dos primeros términos se cancelan, obteniendo que

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi_{cl})}{\delta\varphi_{cl}(x)} = -J(x). \quad (7.8)$$

En ausencia de fuente externa, $J = 0$, φ_{cl} minimiza la acción efectiva:

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi_{cl})}{\delta\varphi_{cl}(x)} = 0. \quad (7.9)$$

Si suponemos que φ_{cl} es invariante bajo traslaciones, tenemos que la solución no depende de x , es decir, es constante. Por tanto, la ecuación (7.9) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria.

Podemos tomar el espacio-tiempo como una caja de dimensiones VT , siendo V el volumen y T el tiempo, y escribir la acción efectiva de la siguiente forma

$$\Gamma(\varphi_{cl}) = -VTV_{eff}(\varphi_{cl}), \quad (7.10)$$

donde V_{eff} se llama potencial efectivo. De la ecuación (7.9) obtenemos que cuando no tenemos fuente externa,

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial\varphi_{cl}} = 0. \quad (7.11)$$

El valor de expectación del campo en el vacío, $\langle\Omega|\varphi(x)|\Omega\rangle_J = \varphi_{cl}(x)$ es la solución que minimiza el potencial efectivo. Este hecho nos permite evaluar las contribuciones de las correcciones cuánticas. El cálculo del potencial efectivo no es tarea sencilla, es por eso que vamos a ver cómo se calcula en el ejemplo del campo escalar con término en φ^4 .

7.2. Potencial efectivo en un campo escalar

Cuando evaluamos la ecuación $\delta\Gamma[\varphi_{cl}] = 0$, obtenemos los campos que hacen extrema la acción efectiva. Sin embargo, al hacer una expansión en torno a φ_{cl} , aparecen correcciones que se asocian a perturbaciones en el campo. Retomamos nuestra integral de camino en d dimensiones llamando $\mathcal{L}_{tot}[\varphi] = \mathcal{L}[\varphi] + J\varphi$,

$$Z = e^{iW[J]} = \int D\varphi e^{i\int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi]}. \quad (7.12)$$

Añadimos al campo escalar una perturbación de tal forma que $\varphi = \varphi_{cl} + \delta\varphi$, siendo φ_{cl} constante cuando J sea constante. Veamos las correcciones al potencial efectivo debidas a $\delta\varphi$. Expandimos la densidad lagrangiana en torno al campo clásico hasta segundo orden

$$\mathcal{L}_{tot}[\varphi] = \mathcal{L}_{tot}[\varphi_{cl}] + \left. \frac{\delta\mathcal{L}_{tot}}{\delta\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{cl}} \delta\varphi + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2\mathcal{L}_{tot}}{\delta\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{cl}} \delta\varphi^2. \quad (7.13)$$

El campo φ_{cl} cumple las ecuaciones clásicas de movimiento, luego verifica

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}_{tot}}{\delta \varphi} \right|_{\varphi_{cl}} = 0. \quad (7.14)$$

En vista de que $\delta^2 \mathcal{L}_{tot} / \delta \varphi^2 = \delta^2 \mathcal{L} / \delta \varphi^2$, la integral de camino pasa a ser de la forma

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\varphi e^{i \int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi]} \\ &= e^{i \int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi_{cl}]} \int D\delta\varphi \exp \left(\frac{i}{2} \int d^d x \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right|_{\varphi_{cl}} \delta\varphi^2 \right) \\ &= e^{i \int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi_{cl}]} \left[\det \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

En la última igualdad de la ecuación anterior se ha utilizado el hecho de que es una integral gaussiana y consideramos $\delta^2 \mathcal{L} / \delta \varphi^2$ como un operador diagonal. La acción efectiva es la transformada de Legendre de la función W , luego vamos a obtener una expresión para esta tomando el logaritmo de la integral de camino:

$$\ln Z[J] = iW[J] = i \int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi_{cl}] - \frac{1}{2} \ln \left[\det \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right) \right]. \quad (7.16)$$

Teniendo en cuenta que $\ln [\det(\delta^2 \mathcal{L} / \delta \varphi^2)] = \text{Tr}[\ln(\delta^2 \mathcal{L} / \delta \varphi^2)]^{\text{II}}$, se sigue que

$$W[J] = \int d^d x \mathcal{L}_{tot}[\varphi_{cl}] + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right) \right], \quad (7.17)$$

y la acción efectiva,

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = \int d^d x \mathcal{L}[\varphi_{cl}] + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right) \right]. \quad (7.18)$$

El operador lo podemos escribir de una forma análoga al que aparece en la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \varphi^2} \right|_{\varphi_{cl}} = \partial^2 + |V''(\varphi_{cl})|. \quad (7.19)$$

^{II}Si A es una matriz con autovalores a_i , se cumple que

$$\det A = \prod_i a_i = e^{\ln(\prod_i a_i)} = e^{\sum_i \ln a_i} = e^{\text{Tr}(\ln A)}.$$

Nos centramos en el segundo sumando de la ecuación (7.18). Para pasar del espacio discreto, en el que se define la traza, al continuo, necesitamos un factor de dimensión que represente la caja en d dimensiones del espacio-temporales en la cual estamos evaluando la acción. Lo vamos a denotar por VT . Usando que $\partial^2 \equiv -k^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\ln(\partial^2 + V''(\varphi_{cl}))] &= VT \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(-k^2 + V''(\varphi_{cl})) \\ &= -VT \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2 + V''(\varphi_{cl}))^\alpha} \right]_{\alpha=0} \\ &= -VT \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(-1)^\alpha \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - V''(\varphi_{cl}))^\alpha} \right]_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Para el cálculo de la integral, puede utilizarse el siguiente resultado que aparece en [8, Apéndice, pág 807]:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\ln(\partial^2 + V''(\varphi_{cl}))] &= -VT \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(-1)^\alpha \frac{(-1)^\alpha i \Gamma(\alpha - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{V''(\varphi_{cl})} \right)^{\alpha-d/2} \right]_{\alpha=0} \\ &= -VT i \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} [V''(\varphi_{cl})]^{d/2}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Habíamos impuesto que φ_{cl} fuese un campo escalar constante, por lo que $\int \mathcal{L}[\varphi_{cl}] = VT \mathcal{L}[\varphi_{cl}] = -VT V(\varphi_{cl})$. Con este resultado y el anterior, podemos sustituir en la ecuación (7.18) obteniendo la expresión para la acción efectiva en este caso:

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = VT \left[-V(\varphi_{cl}) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \cdot [V''(\varphi_{cl})]^{d/2} \right] \quad (7.22)$$

A partir de la definición de potencial efectivo de la sección anterior (ecuación (7.10)), obtenemos que

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = V(\varphi_{cl}) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} [V''(\varphi_{cl})]^{d/2}. \quad (7.23)$$

7.2.1. Renormalización del potencial efectivo

Conviene ahora repasar los cálculos hechos. Comencemos por notar que en la ecuación (7.20) escribimos $\ln(k^2 - V''(\varphi_{cl}))$ y el argumento del logaritmo no es adimensional. Además,

en la expresión del potencial efectivo obtenida, $-d/2$ es un polo de la función Gamma cuando $d \rightarrow 4$. Ambos problemas se van a solucionar mediante el proceso de renormalización, por el cual vamos a añadir los llamados contratérminos a la expresión que absorberán los infinitos obtenidos.

Vamos a centrarnos en la expresión $\Gamma(-d/2)(V''(\varphi_{cl})/(4\pi))^{d/2}$. Tomamos la dimensión $d = 4 - \varepsilon$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces,

$$\Gamma\left(-\frac{4-\varepsilon}{2}\right) = \Gamma(-2 + \varepsilon/2) = \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(-2 + \varepsilon/2)(-1 + \varepsilon/2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)\right), \quad (7.24)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni que aparece al hacer la expansión de la función Gamma en torno al cero. Ahora vamos a escribir el segundo factor en forma de exponencial. Para ello reescribimos la derivada del potencial como

$$V''(\varphi_{cl}) = \text{sign}(V''(\varphi_{cl}))|V''(\varphi_{cl})|, \quad (7.25)$$

y de nuevo ponemos $d = 4 - \varepsilon$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V''(\varphi_{cl})}{4\pi}\right)^{d/2} &= [\text{sign}(V''(\varphi_{cl}))]^{d/2} \left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi}\right)^{d/2} \\ &= [\text{sign}(V''(\varphi_{cl}))]^{d/2} \Lambda^d \exp\left[\frac{d}{2} \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right)\right] \\ &= [\text{sign}(V''(\varphi_{cl}))]^2 \Lambda^4 \exp\left[(2 - \varepsilon/2) \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right)\right] \\ &= \Lambda^4 \exp\left[2 \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

El término Λ posee unidades de masa, ya que $V''(\varphi_{cl}) = -\mu^2 + \lambda\varphi_{cl}^2/2$. Juntamos las dos expansiones obtenidas y tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{4-\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{V''(\varphi_{cl})}{4\pi}\right)^{(4-\varepsilon)/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi\Lambda^2}\right) + O(\varepsilon)\right) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{4\pi}\right)^2 \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{\tilde{\Lambda}^2}\right). \end{aligned}$$

Por el método de renormalización hemos eliminado la parte divergente, que ha sido absorbida por el factor $\tilde{\Lambda}$, a fin de obtener el resultado físico. Modificando el resultado de la ecuación (7.23) tenemos que

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = V(\varphi_{cl}) + \frac{|V''(\varphi_{cl})|^2}{4(4\pi)^2} \ln\left(\frac{|V''(\varphi_{cl})|}{\tilde{\Lambda}^2}\right). \quad (7.27)$$

Recordando que $V(\varphi) = -\mu^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4!$ y $V''(\varphi) = -\mu^2 + \lambda\varphi^2/2$, obtenemos nuestro potencial efectivo:

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_{cl}^4 + \frac{1}{4(4\pi)^2} \left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{|-\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_{cl}^2|}{\tilde{\Lambda}^2}\right). \quad (7.28)$$

7.2.2. Potencial clásico y potencial efectivo

En esta última sección, vamos a observar las diferencias entre el potencial efectivo y el potencial clásico. Las constantes, μ , λ y $\tilde{\Lambda}$ se obtienen experimentalmente, pero podemos darles valores y representar gráficamente los potenciales. Recordemos que el potencial clásico posee dos mínimos en $\varphi_0 = \pm\mu\sqrt{6/\lambda}$, donde toma el valor

$$V(\varphi_0) = -\frac{3\mu^4}{2\lambda}, \quad (7.29)$$

mientras que el potencial efectivo

$$V_{eff}(\varphi_0) = -\frac{3\mu^4}{2\lambda} + \frac{\mu^4}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{2\mu^2}{\tilde{\Lambda}^2}\right). \quad (7.30)$$

Hacemos los cambios $\mu \rightarrow \tilde{\mu} = \mu/\tilde{\Lambda}$ y $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi/\tilde{\Lambda}$ y con el fin de representar los potenciales adimensionales $\tilde{V}_{eff} = V_{eff}/\tilde{\Lambda}^4$ y $\tilde{V} = V/\tilde{\Lambda}^4$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\varphi}) &= -\frac{\tilde{\mu}^2}{2}\tilde{\varphi} + \frac{\lambda}{4!}\tilde{\varphi}^4, \\ \tilde{V}_{eff}(\tilde{\varphi}) &= -\frac{\tilde{\mu}^2}{2}\tilde{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\tilde{\varphi}^4 + \frac{1}{4(4\pi)^2} \left(-\tilde{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right)^2 \ln\left|-\tilde{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right|. \end{aligned} \quad (7.31)$$

En los ejemplos, iremos variando los valores de λ , μ y $\tilde{\Lambda}$. La diferencia entre las representaciones del potencial clásico y efectivo pueden explicarse evaluando la expresión siguiente:

$$\tilde{V}_{eff}(\tilde{\varphi}) - \tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{4(4\pi)^2} \left(-\tilde{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right)^2 \ln\left|-\tilde{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right|. \quad (7.32)$$

Además, las expresiones (7.29) y (7.30) justifican que el valor mínimo del potencial efectivo sea mayor (en valor absoluto) que el del potencial clásico. En todo momento se considerará $\lambda \in [0, 1]$.

Fijémonos en las gráficas de la figura (7.1). En ellas, hemos impuesto $\lambda = 0.4$ y variamos el valor de $\tilde{\mu}$, aunque manteniendo $\tilde{\mu} > 1$. En estas condiciones, cuando $|\tilde{\varphi}|$ crece, se cumple que $\tilde{\varphi}^2\lambda/2 \gg \tilde{\mu}^2$, luego

$$\tilde{V}_{eff}(\tilde{\varphi}) - \tilde{V}(\tilde{\varphi}) \simeq \frac{1}{4(4\pi)^2} \left(\frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right)^2 \ln\left|\frac{\lambda}{2}\tilde{\varphi}^2\right|,$$

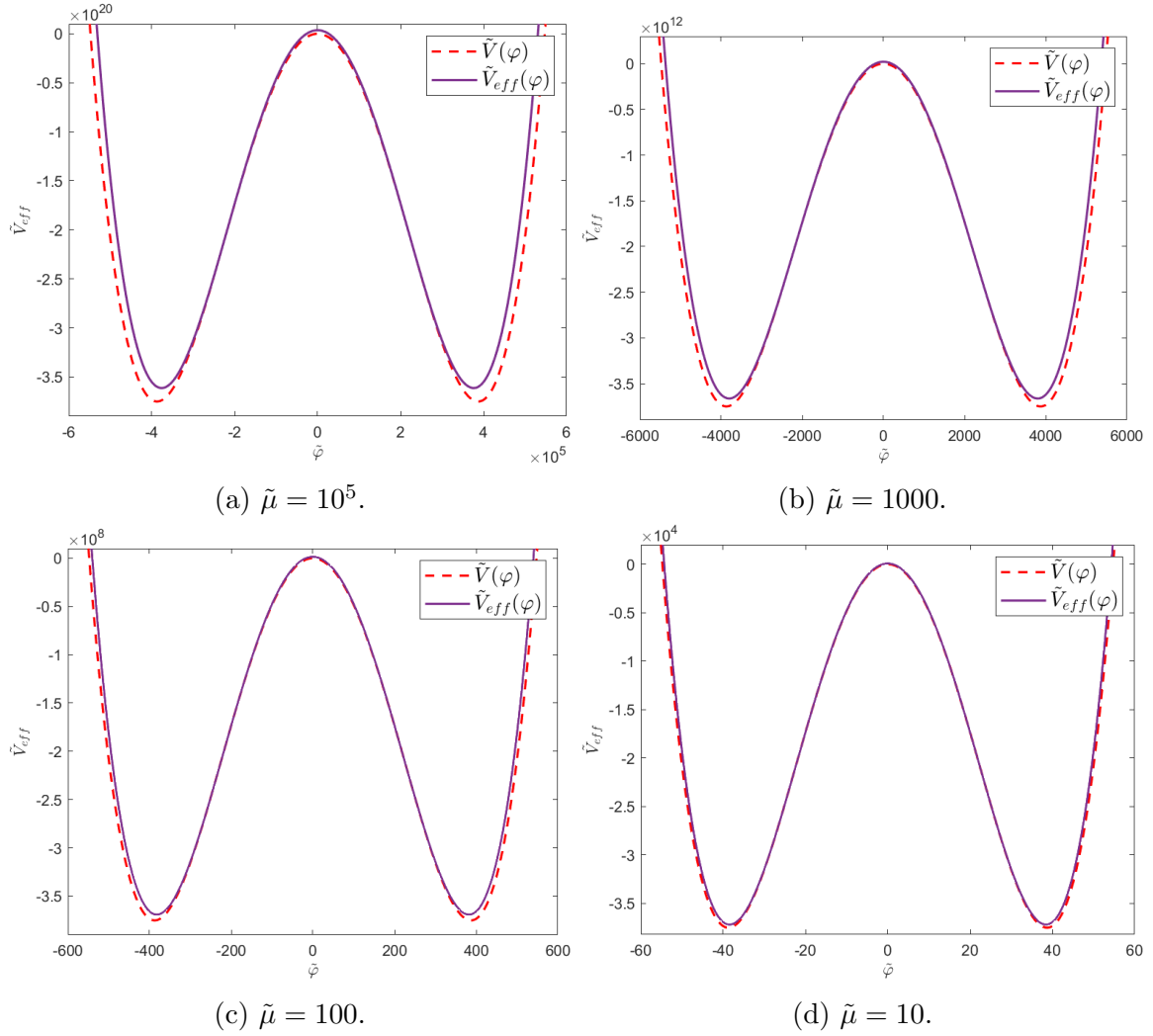


Figura 7.1: Representaciones del potencial (en rojo) y en potencial efectivo (en morado) fijando $\lambda = 0.4$ y variando $\tilde{\mu}$.

y $V_{eff} > V$. El mismo resultado se observa en las gráficas (7.1a) y (7.1b) cuando $\tilde{\varphi} = 0$, ya que $\tilde{\mu}$ es grande y

$$\tilde{V}_{eff}(\tilde{\varphi}) - \tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{\tilde{\mu}^4}{4(4\pi)^2} \ln(\tilde{\mu}^2).$$

En las cuatro gráficas de (7.1), puede verse que hay tramos en los que los potenciales se superponen. Esto ocurre cuando $\tilde{V}_{eff}(\tilde{\varphi}) = \tilde{V}(\tilde{\varphi})$, es decir, si $\tilde{\mu}^2 = \tilde{\varphi}^2 \lambda / 2$. Además, puede verse que según disminuye el valor de $\tilde{\mu}$, los valores que toman los potenciales se aproximan.

Nos fijamos ahora en las gráficas de la figura (7.2), donde se mantiene constante $\tilde{\mu} = 100$ y se varía el valor de λ . En los casos en que $\lambda = 0.9$, imagen (7.2a), y $\lambda = 0.4$, imagen (7.2b), existe una diferencia notable entre los potenciales. Sin embargo, según $\lambda \rightarrow 0$, gráficas (7.2c) y (7.2d), en ambos potenciales domina el sumando $\tilde{\mu}^2 \tilde{\varphi}^2 / 2$ y $V_{eff} \simeq V$, para cualquier valor

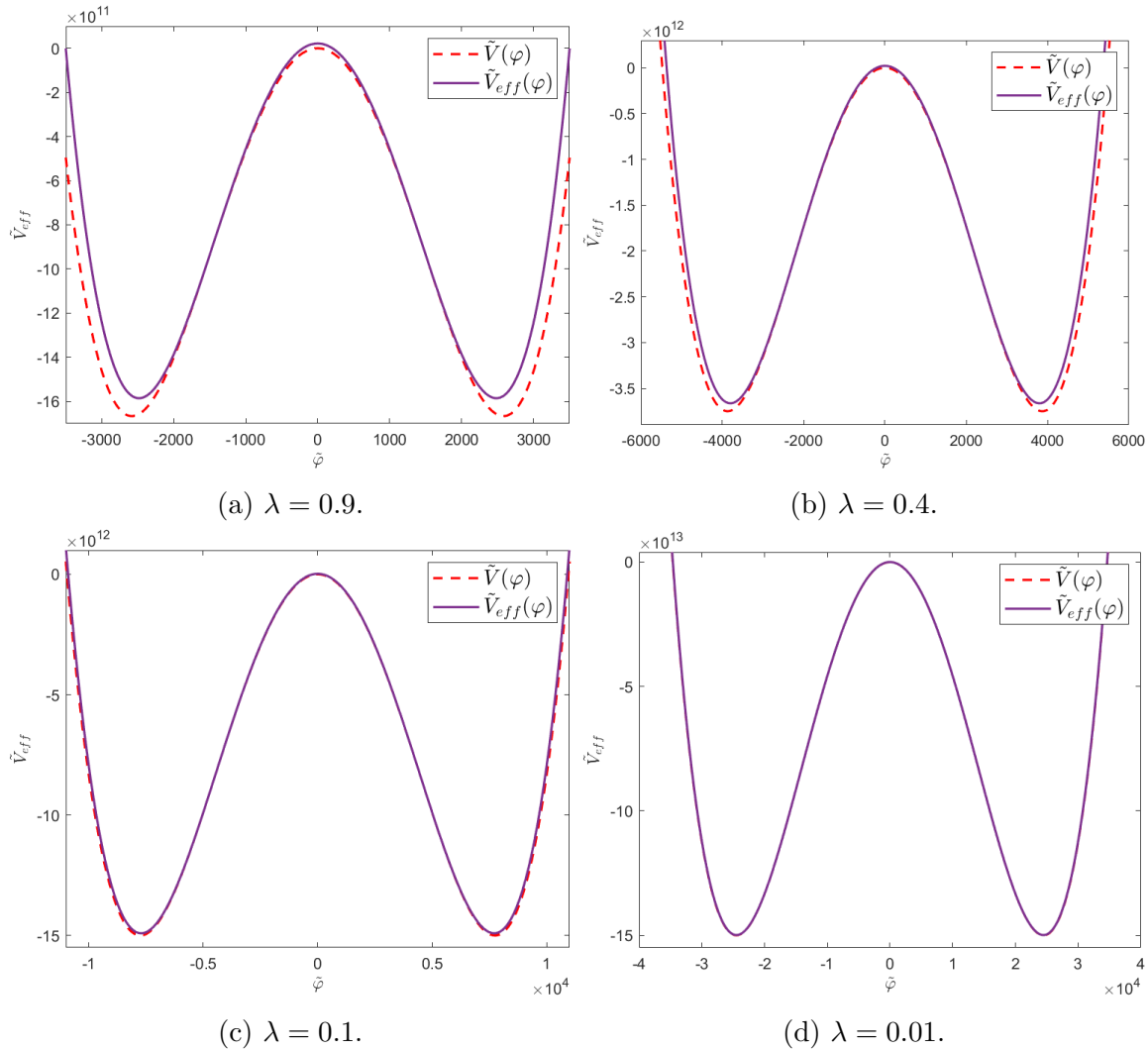


Figura 7.2: Representaciones del potencial (en rojo) y en potencial efectivo (en morado) para ciertos cuando $\tilde{\mu} = 100$ y variamos λ .

de $\tilde{\varphi}$, y se superponen.

Veamos qué ocurre si hacemos que $\mu \rightarrow 0$. Comencemos considerando las gráficas de la figura (7.3). En ellas, hacemos constante el valor de $\tilde{\Lambda}$ y $\lambda = 0.0005$. Como λ es muy pequeño, los potenciales se superponen. Es por esto, que en las gráficas (7.3a) y (7.3c) solo se observa una curva. Sin embargo, si nos acercamos lo suficiente, podemos observar que, si bien el máximo del potencial clásico se mantiene con valor cero, cuando $\tilde{\mu} = 10/\tilde{\Lambda}$ (gráfica (7.3b)) $\tilde{V}_{eff}(\varphi_{\text{máx}}) > 0$ y cuando $\tilde{\mu} = 0.1/\tilde{\Lambda}$ (gráfica (7.3d)) $\tilde{V}_{eff}(\varphi_{\text{máx}}) < 0$.

Por último, si imponemos $\tilde{\mu} = 0$, el potencial clásico tiene la forma

$$\tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{\lambda}{4!} \tilde{\varphi}^4.$$

El potencial clásico pasa a tener un único punto crítico en $\tilde{\varphi} = 0$ que resulta ser un mínimo.

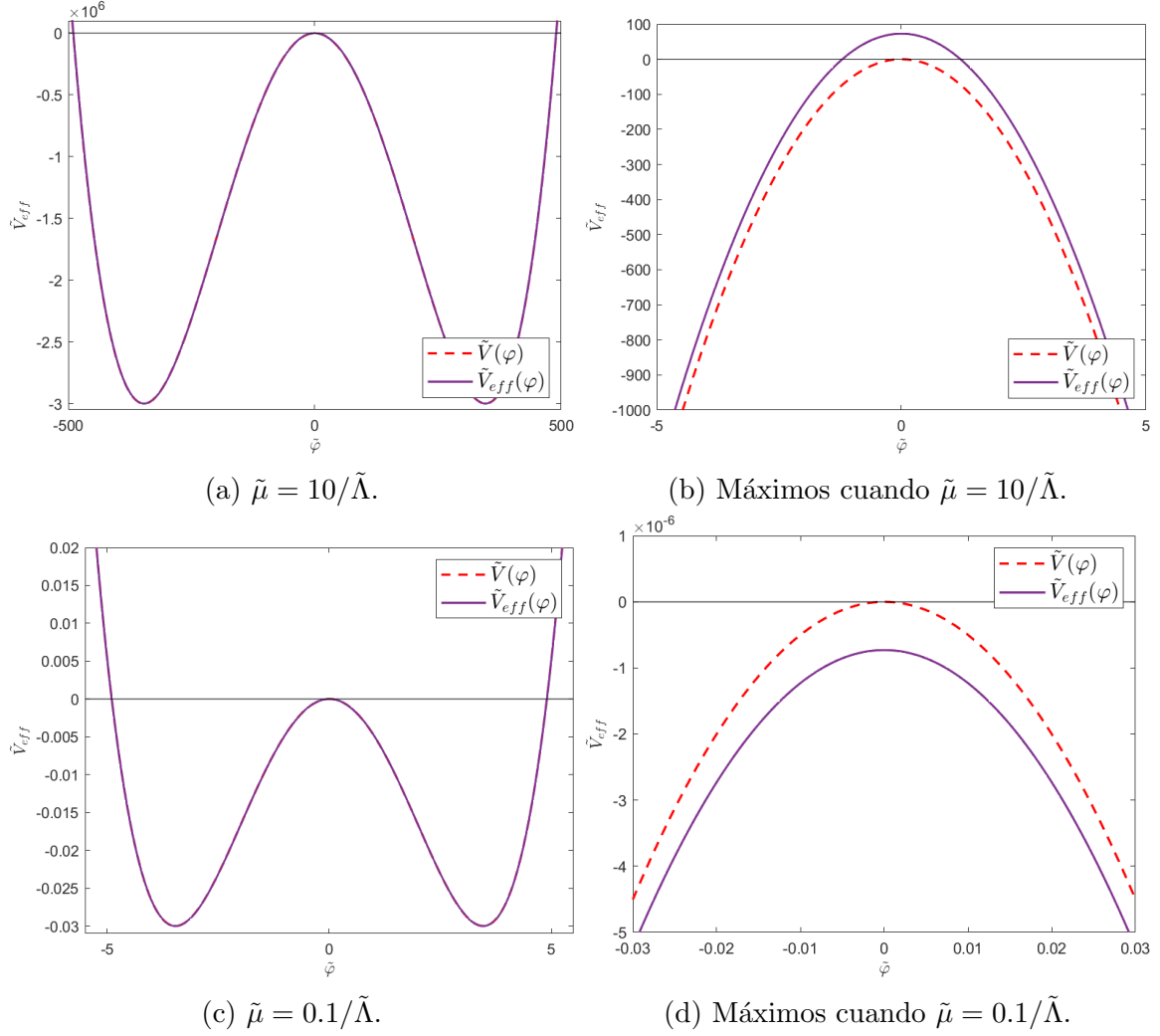


Figura 7.3: Representación de los potenciales clásico y efectivo con $\tilde{\Lambda} = 1$, $\lambda = 0.0005$ y $\mu \rightarrow 0$.

Analíticamente puede hallarse que el potencial efectivo tiene como puntos críticos

$$\tilde{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^c, \quad \text{con } c = - \left(\frac{32\pi^2}{6} + 1 \right) / \lambda,$$

donde es mínimo. Este resultado puede observarse en la gráfica (7.4), en la cual se ha impuesto $\lambda = \pi^5$ y $\tilde{\mu} = 0$. En ella se ve claramente cómo el potencial clásico tiene un mínimo y el efectivo tiene dos.

A este suceso se le conoce como ruptura espontánea de simetría. Al hacer el cambio $m^2 \rightarrow -\mu^2$, el término de masa pasa a ser imaginario. Añadiendo las correcciones cuánticas al potencial, aparece un nuevo término de masa

$$\frac{\tilde{\mu}}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{4} \ln \left| -\tilde{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\varphi}^2 \right|},$$

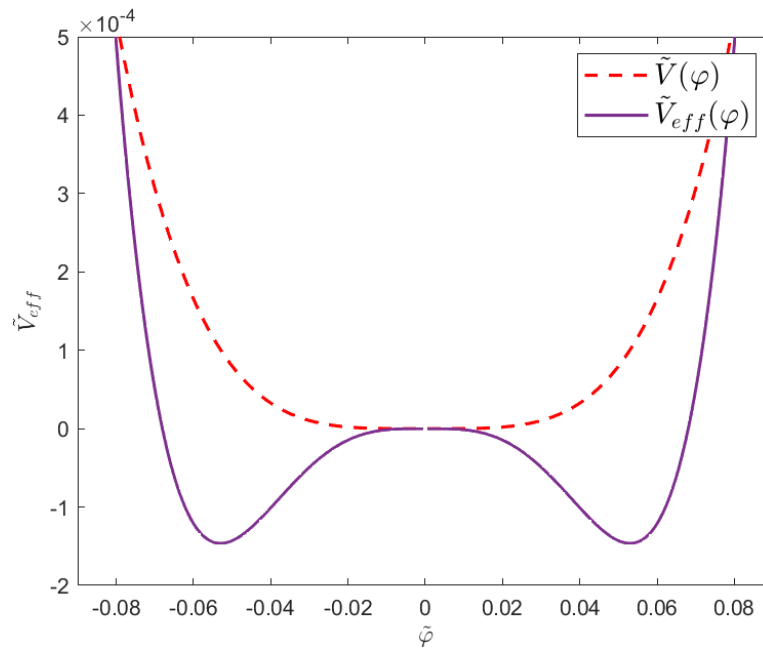


Figura 7.4: Representación de los potenciales clásico y efectivo cuando $\tilde{\Lambda} = 0$, $\lambda = \pi^5$ y $\tilde{\mu} = 0$.

que provoca que cambie el valor de expectación del vacío.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado la Teoría Cuántica de Campos partiendo del experimento de la doble rendija de Young. Se ha comenzado el estudio discretizando el espacio en N variables, cuyo movimiento vino descrito por osciladores armónicos. En el límite al continuo, las variables fueron sustituidas por una función φ llamada campo. El campo asigna un valor a cada punto del espacio-tiempo que representa la perturbación. Se obtuvo la expresión de la integral de camino,

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x \mathcal{L}(\varphi)},$$

que no es más que la suma de las amplitudes de todos los posibles caminos entre un estado inicial y uno final del sistema.

Tomamos un campo escalar libre y al Lagrangiano del sistema y añadimos un término lineal en el campo cuyo coeficiente es la fuente. Como resultado, la fuente provocaba una perturbación, una partícula, en un punto del espacio-tiempo que se propagaba a otro punto del espacio-tiempo y después se aniquilaba. La amplitud de la propagación viene dada por el propagador de Feynman. La partícula resultante de la perturbación no puede ser observada y recibe el nombre de partícula virtual. Estudiando el campo escalar, se obtuvo una expresión para la energía potencial de una sistema en el cual había dos fuentes en dos puntos distintos del espacio. Cada una de las fuentes crea una partícula. Se impuso que ambas partículas tuvieran carga del mismo signo y como consecuencia se obtuvo que una energía potencial negativa: cargas del mismo signo se atraen.

Cuando se buscó estudiar un proceso determinado, se fijó un estados inicial y un estado final del sistema y se describió por medio de una integral de camino. Sin embargo, estas integrales son, en general, complicadas de evaluar. En este punto se introdujeron los diagramas de Feynman, que permiten describir la evolución del sistema y la amplitud del proceso de forma sencilla.

Inicialmente, el objetivo de este trabajo fue dar una descripción completa de la QFT por medio de la integral de camino. No obstante, en algunos casos, se concluyó que el uso de la cuantización canónica facilitaba la comprensión y obtención de resultado. En consecuencia, se dedicó un capítulo al desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos mediante la cuantización canónica y a su relación con la integral de camino.

Por último, se hizo una introducción a la ruptura espontánea de simetría. Se tomó un Lagrangiano simétrico que describía el sistema y se cambió el signo del término de masa, provocando que el lagrangiano del sistema no fuese invariante bajo el cambio $\varphi \rightarrow -\varphi$. Se incluyeron correcciones cuánticas al potencial clásico, dando lugar al llamado potencial efectivo. Gráficamente, se observó, en función de los parámetros, cómo el potencial efectivo aproximaba el potencial clásico. Además, debido a las correcciones cuánticas, cuando se igualó la masa a cero, en el potencial clásico apareció un único mínimo, mientras que en el efectivo aparecieron dos. Estos puntos donde el potencial se hace mínimo se corresponden con el valor esperado del campo en el vacío.

Como dijimos al inicio del trabajo, se buscó hacer una descripción de la Teoría Cuántica de Campos desde unos conocimientos mínimos, para aquellos que no se habían adentrado, todavía, en la materia. El desarrollo de la teoría por medio de la integral de caminos permitió adquirir un conocimiento más general, si bien fue costoso evaluar y entender las ecuaciones en sí mismas. Sin embargo, a través de la cuantización canónica, el desarrollo matemático se volvió más amenos, ya que no difiere en gran medida de la cuantización hecha en los cursos de Mecánica Cuántica. Estudiando a la vez ambos, se obtuvo control de las ecuaciones y del significado físico de la teoría. Además, con la Teoría Cuántica de Campos es posible explicar el comportamiento de las cuasipartículas, como el fonón, estudiado en Física del Estado Sólido y cuyo movimiento se describe también como un oscilador armónico; los resultados que se observan cuando se lleva a cabo el experimento de la cámara de niebla; o desarrollar los modelos que describen las partículas subatómicas, como el Modelo Estándar.

Apéndice A

Ecuación de Euler Lagrange para el campo φ

La acción clásica del sistema con Lagrangiano L es $S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}, t)$. Para esta ecuación debe cumplirse el principio de mínima acción, es decir, $\delta S = 0$ cuando hacemos un cambio muy pequeño en las coordenadas $q \rightarrow q + \delta q$. En este punto tendremos un máximo o un mínimo en la trayectoria del sistema que estamos estudiando.

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \\ &= \int dt \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right] \right).\end{aligned}$$

En el intervalo de integración en el que se cumple el principio de mínima energía llevamos $\delta q = 0$ y se cumplirá también que $\partial L / \partial \dot{q} = 0$. Encontramos así las ecuaciones de Euler-Lagrange en el caso clásico:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Podemos encontrar un resultado equivalente para el caso de campos. Cambiamos lagrangiano, L , por densidad lagrangiana, \mathcal{L} , y coordenadas generalizadas, q , por campos, φ . Notemos que las coordenadas \dot{q} pasan a ser las parciales del campo con respecto a cada una de las coordenadas espacio temporales $\partial_t \varphi$:

$$S = \int dt d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x) \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_t \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \varphi)} \right) = 0.$$

Como ejemplo podemos tomar la acción vista en (3.7),

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \dots \right],$$

y la ecuación de movimiento será

$$(\partial^2 + m^2)\varphi + \frac{g}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi^3 \dots = 0. \quad (\text{A.1})$$

En particular, en el caso de un campo libre, para el que la densidad lagrangiana es $\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2]$, tenemos

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0. \quad (\text{A.2})$$

Apéndice B

Energía potencial de un campo libre

Nuestro objetivo es obtener la ecuación (4.27) resolviendo la siguiente integral:

$$E = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2}$$

Comenzamos realizando algunos cambios de variable: $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $u = \cos \theta$, siendo θ el ángulo que forman \vec{r} y \vec{k} . Aplicamos coordenadas esféricas, por tanto,

$$\begin{aligned} E &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{k^2 + m^2} = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} dk k^2 \left(\int_0^\pi \frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{k^2 + m^2} \sin(\theta) d\theta \right) \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \left(\int_{-1}^{+1} \frac{e^{ikru}}{k^2 + m^2} du \right) = - \frac{1}{r(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2kdk}{k^2 + m^2} \text{sen}(kr) \end{aligned}$$

La función a integrar es una función par. La integral de una función par en un intervalo centrado en el origen es el doble que la misma integral desde 0 hasta el límite superior de integración. Por tanto,

$$\begin{aligned} E &= - \frac{1}{r(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{2kdk}{k^2 + m^2} \text{sen}(kr) \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^2 r} \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{kdk}{k^2 + m^2} e^{ikr} - \int_{-\infty}^\infty \frac{kdk}{k^2 + m^2} e^{-ikr} \right] = + \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kdk}{k^2 + m^2} e^{ikr} \end{aligned}$$

En el segundo paso hemos utilizado la expresión del seno como suma de exponenciales. En el sumando integral que aparece con un signo negativo hacemos un cambio $-k \rightarrow k$ llegando a la suma de dos integrales iguales.

Centrémonos, ahora, en hacer la integral de la función $f(k) = \frac{k}{k^2+m^2}e^{ikr}$. Dicha función posee dos polos en $\pm im$. Como r es positivo, para hacer la integral vamos a considerar el contorno de B.1 tomando a de tal forma que im quede por debajo del arco de la semicircunferencia. Calculamos el residuo de la función en el polo positivo:

$$\text{Res}[f(k), im] = \frac{e^{-mr}}{2}$$

Y por el teorema de los residuos

$$\int_C f(k)dk = 2\pi i \frac{e^{-mr}}{2} = \pi i e^{-mr}$$

El resultado no depende de los límites de integración, podemos hacer a tender a cero y obtendríamos que

$$E = + \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kdk}{k^2+m^2} e^{ikr} = - \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$$

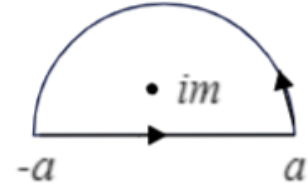


Figura B.1: Contorno para evaluar la integral.

Bibliografía

- [1] Juan Arana Cañedo-Argüelles. El problema de la causalidad en la mecánica cuántica. *Eikasia*, 43, 17-33., 2012.
- [2] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*, 1999.
- [3] Gustavo Burdman. *Lecture Notes: Quantum Field Theory I*. Dept. of Mathematical Physics, University of Sao Paulo's Physics Institute, 2022.
- [4] Ashok Das. *Field theory: a path integral approach*, volume 75. World Scientific, 2006.
- [5] Eberhard Engel and Reiner M Dreizler. *Density functional theory*, chapter Appendix A, pages 403–4012. Springer, 2011.
- [6] John M Howie. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [7] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford university press, 2005.
- [8] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [9] Steven Weinberg. The search for unity: Notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, pages 17–35, 1977.
- [10] Anthony Zee. *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press, 2010.