



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS. UNIVERSIDAD DE OVIEDO. CURSO 2019-2020

Condensados de polaritones

Pablo González Prieto

CONDENSADOS DE POLARITONES

Pablo González Prieto

Índice

1. Introducción	2
2. Estadística y condensados de Bose-Einstein	3
2.1. Derivación del condensado de Bose-Einstein	3
2.2. Propiedades de superfluidos	5
2.3. Modelo de superfluido	10
2.4. Excitaciones en un superfluido	12
3. Excitones. Polaritones	17
3.1. Excitones	17
3.2. Polaritones	23
3.3. Excitones-polaritones	27
4. Condensación de Bose-Einstein de polaritones	34
4.1. Metodología experimental	35
4.2. Tasas de transición de estados	37
4.3. Propiedades de coherencia	43
4.4. Superfluidez de polaritones	59
5. Conclusiones	68

1. Introducción

En este trabajo se quieren mostrar algunas propiedades de los condensados de Bose-Einstein de excitones-polaritones. Como se describirá a lo largo de la memoria, este es un campo de investigación activo en la actualidad, tanto desde es punto de vista teórico como experimental, lo que ha supuesto una buena motivación para la realización de este trabajo fin de grado. A partir del concepto de condensado de Bose-Einstein, visto en la asignatura de Física Estadística, y conceptos de la asignatura de Física de Estado Sólido, principalmente el uso de curvas de dispersión y la existencia de cuasipartículas en estructuras cristalinas, como por ejemplo los fonones o los huecos; se han tratado algunos de los conceptos físicos asociados con estos sistemas.

De esta manera, la organización de esta memoria es la siguiente:

En el capítulo 2 se presenta el concepto de condensados de Bose-Einstein, centrándose en el caso práctico del HeII superfluido y acabando con el criterio de Landau.

En el capítulo 3 se definen y exploran los conceptos de excitón, que consiste en un electrón y un hueco; polaritón, que es una superposición de fotón y fonón; y excitón-polaritón, que se trata de una superposición del excitón y un fotón.

En el capítulo 4 se tratan los condensados de excitones-polaritones, tratando en orden la metodología experimental, el cálculo de las tasas de transición de estados, las propiedades de coherencia del condensado caracterizadas por las funciones de coherencia, y, por último, la superfluididad de polaritones.

Finalmente se recogen brevemente las conclusiones más importantes en el capítulo 5.

2. Estadística y condensados de Bose-Einstein

2.1. Derivación del condensado de Bose-Einstein

Una manera de obtener la estadística de Bose-Einstein es trabajar con un sistema que consiste en un microestado de un sistema mayor, con los estados del sistema correspondiéndose al número de partículas en dicho estado. Como estamos tratando con bosones, puede haber un número arbitrariamente alto de partículas en cada estado (en contraste con el caso de trabajar con fermiones). Nuestra función de partición Ξ sería[1]:

$$\Xi = \sum_l e^{-\beta(E_l - \mu N_l)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n(\epsilon - \mu)} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)}}, \quad (1)$$

donde $\beta = k_B T^{-1}$; siendo k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura del sistema; ϵ es la energía asociada al estado, E_l y N_l son, respectivamente, la energía total del estado l de nuestro microestado y el número de partículas en el estado l de nuestro microestado; es decir, $E_l = n\epsilon$ y $N_l = n$ para un estado en el que hay n bosones en el microestado con el que trabajamos; y μ es el potencial químico.

Consideramos ahora el número esperado de partículas en dicho estado:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_l N_l P_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n e^{n\beta(\mu - \epsilon)}}{\Xi} = \frac{1}{\Xi} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{nx} = \frac{1}{\Xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{nx} = \frac{1}{\Xi} \frac{d}{dx} \Xi = \frac{d}{dx} \log \Xi = \\ &= \frac{1}{1 - e^x} (-e^x) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} = f_{BE}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x = \beta(\mu - \epsilon)$. Esta expresión recibe el nombre de función de distribución de Bose-Einstein.

Para estudiar la condensación de Bose-Einstein, trabajaremos con un gas ideal formado por bosones; es decir, que se va a asumir que no hay interacciones apreciables entre los bosones en nuestro sistema. Tenemos entonces que la densidad de estados de nuestro gas ideal de Bose-Einstein es:

$$d^6 N = g \frac{d^3 r d^3 \vec{p}}{h^3} \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu\right)} - 1}, \quad (3)$$

donde m es la masa de cada bosón y h es la constante de Plank, y g es la degeneración de un estado con \vec{p} fijo.

Ahora integramos nuestra densidad de estados en las tres coordenadas espaciales y en las dos coordenadas angulares del momento, lo cual es posible debido a la simetría esférica del sistema respecto a \vec{p} :

$$dN_p = g \frac{V}{h^3} \frac{4\pi p^2 dp}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} - 1} \quad (4)$$

Expresamos ahora la densidad de estados en función de la energía:

$$dN_\epsilon = \frac{2\pi gV(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} dE}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (5)$$

Para estudiar la condensación de Bose-Einstein tenemos que comparar el número de partículas en el estado de energía cero con el número de partículas total. Estudiaremos primero el número de bosones en el estado fundamental del sistema, que a temperaturas bajas coincide con el número de bosones del sistema:

$$N \simeq \langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (6)$$

Despejando, tenemos:

$$-\beta\mu = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \simeq \frac{1}{N} \quad (7)$$

De aquí concluimos que el potencial químico y la temperatura son proporcionales a temperaturas bajas:

$$\mu \simeq \frac{-k_B T}{N} \quad (8)$$

Por tanto, podemos asumir potencial químico nulo a partir de ahora. A continuación, hacemos el cálculo del número de estados con energía mayor de cero a $T \neq 0$:

$$N_{\epsilon>0} = \frac{2\pi gV(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{2\pi gV(2mk_B T)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}, \quad (9)$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x = \beta\epsilon$ en la integral. Definimos la temperatura de Bose T_B de tal manera que $N = N_{\epsilon>0}$, es decir, que el número de partículas en nuestro gas es el mismo que el de estados con energía mayor que cero. A partir de esto vemos que la relación entre estas cantidades es:

$$\frac{N}{N_{\epsilon>0}} = \frac{T_B^{3/2}}{T^{3/2}} \quad (10)$$

De aquí llegamos a una expresión para el número de bosones en el estado fundamental:

$$N_{\epsilon=0} = N - N_{\epsilon>0} = N \left(1 - \frac{T^{3/2}}{T_B^{3/2}}\right) \quad (11)$$

Aquí se observa que a temperaturas bajas los bosones se agrupan en el estado fundamental, fenómeno que se denomina condensación de Bose-Einstein. Esto se ve claramente en la figura 1:

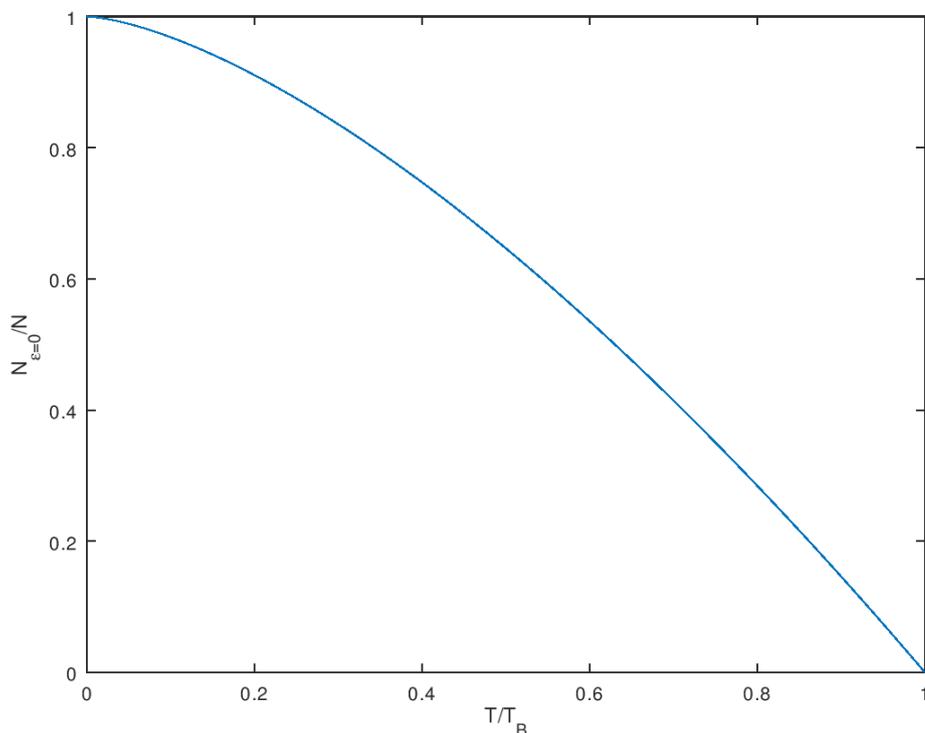


Figura 1: Ocupación del estado fundamental de un gas ideal de Bose-Einstein en función de la temperatura.

Aunque la gráfica indica que no hay partículas en el estado fundamental a temperatura T_B , esto no es correcto ya que hemos hecho aproximaciones para llegar a nuestro resultado. Aun así, es correcto asumir que se da la condensación de Bose-Einstein a temperaturas menores de T_B .

2.2. Propiedades de superfluidos

A continuación, describimos las características fundamentales de un ejemplo de condensación de Bose-Einstein real, como es el de la superfluididad en el ^4He , cuya fase superfluida se denomina He II.

A temperaturas inferiores a 2,17 K, denominada T_λ , el ^4He se encuentra en la fase líquida He II, que es el ejemplo clásico de superfluido, es decir, un fluido con viscosidad nula. La viscosidad es la resistencia que tiene un fluido en movimiento, o equivalentemente, el rozamiento entre capas adyacentes de un fluido. Desde el punto de vista cuantitativo, se caracteriza con el coeficiente de viscosidad μ , que se define como el coeficiente de proporcionalidad en la ecuación siguiente, que describe la fuerza de resistencia experimentada por una placa que se mueve a velocidad constante por la superficie de un fluido:

$$F_R = \mu A \frac{u_0}{h}, \quad (12)$$

donde F_R es la fuerza de resistencia que sufre la placa, A es el área de la placa, u_0 es la velocidad de la placa y h es el nivel del fluido relativo al fondo del recipiente que lo contiene.

Al intentar determinar experimentalmente la viscosidad del He II, algunos resultados muestran que el He II tiene viscosidad nula[3][4][5], mientras que otros resultados muestran que tiene viscosidad no nula[6][7][8]. Un ejemplo de experimento que muestra viscosidad nula consiste en la medida de la velocidad de flujo del He II a través de canales de anchura entre 0,1 y 4 μm [4]. Se observa en la figura 2 que es prácticamente independiente del gradiente de presión a lo largo del canal, lo cual se corresponde con una viscosidad prácticamente nula.

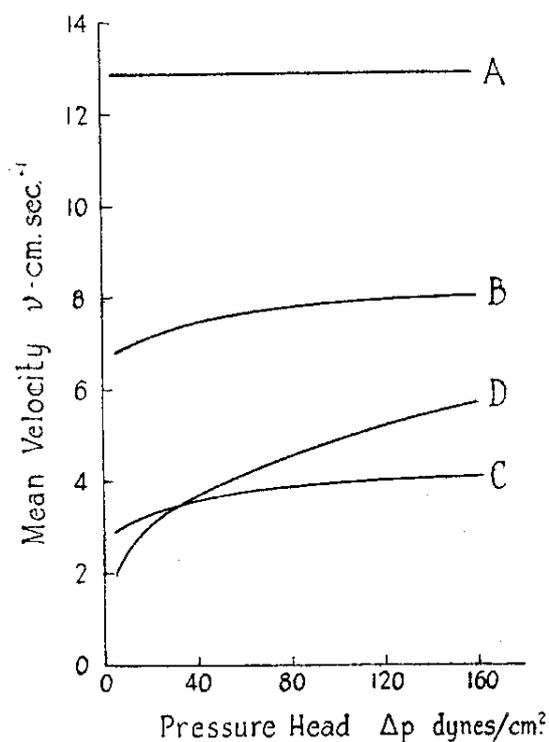


Figura 2: Velocidad de flujo del He II a través de canales de distintas anchuras a 1,2 K (Anchuras de canal: A: $1,2 \times 10^{-7}\text{m}$; B: $7,9 \times 10^{-7}\text{m}$; C: $3,9 \times 10^{-6}\text{m}$; D: $5,0 \times 10^{-5}\text{m}$) (Allen y Misener 1939, Atkins 1952)[3][4]

En contraste, medir la viscosidad del He II con un viscosímetro de rotación nos muestra que esta no es nula, comportándose como un fluido normal, como se ve a continuación:

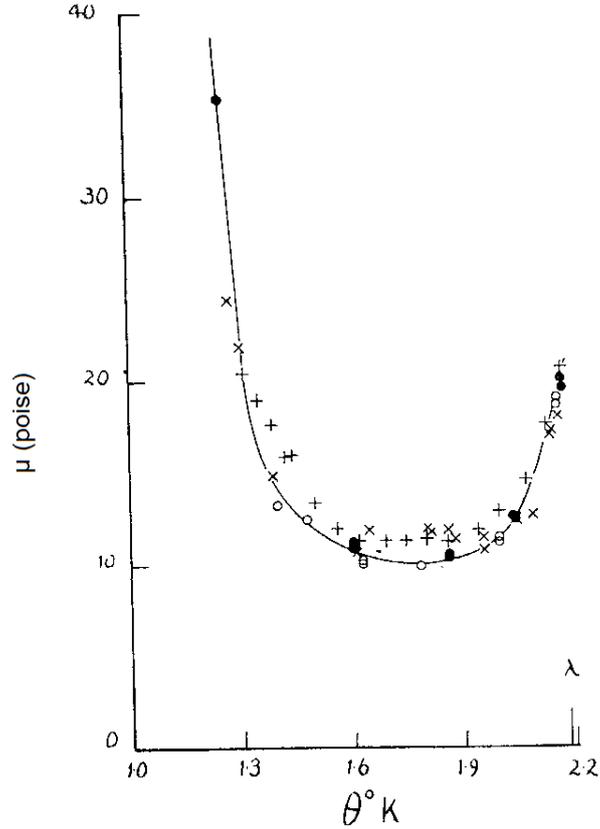


Figura 3: Viscosidad del He II medida en un viscosímetro de rotación (Atkins 1952). La viscosidad está medida en poises.[4]

Esto se puede explicar tratando el He II como una mezcla de dos fluidos, uno un fluido normal con viscosidad ordinaria y el otro un superfluido con viscosidad nula. Estos dos fluidos no se pueden separar físicamente; de hecho no se puede considerar a algunos átomos como pertenecientes al fluido normal y otros al superfluido, ya que todos los átomos de ${}^4\text{He}$ son iguales. Cada uno de estos fluidos tiene una densidad efectiva, siendo ρ_n la densidad del fluido normal y ρ_s la del superfluido. Por tanto, la densidad total ρ del He II sería:

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (13)$$

Las medidas experimentales de Andronikashvili[9], usando un péndulo de torsión que consiste de discos finos con espaciado lo suficientemente pequeño para que todo el fluido ordinario sea arrastrado por los discos, nos muestran no solo que este modelo es válido sino que también nos indica cómo varía la proporción de superfluido en el He II con la temperatura, siendo este casi enteramente superfluido bajo 1 K (figura 4).

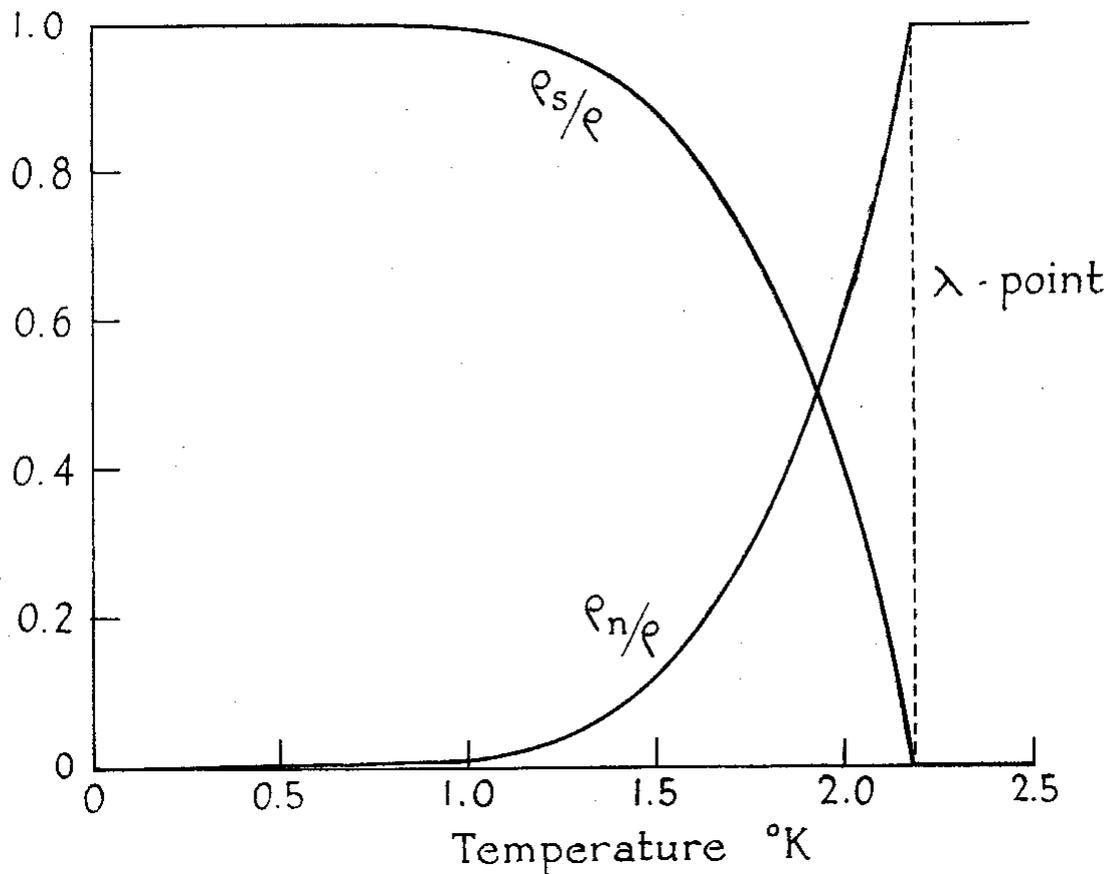


Figura 4: Experimento de Andronikashivi (Atkins 1952)[4].

Otra propiedad del He II como superfluido se manifiesta en la película que cubre la superficie expuesta de un cuerpo parcialmente sumergido en He II, que tiene unos 30 nm de grosor o unas 100 capas atómicas, más grosor que en la mayoría de otros líquidos; de hecho es lo suficientemente gruesa para permitir flujo superfluido a través de la lámina. Esto se traduce en que, al sumergir parcialmente un vaso vacío en He II, este se llena hasta que el nivel de He II dentro del vaso se iguala con el nivel de He II fuera del vaso, aunque el borde del vaso esté por encima de la superficie del líquido. Al subir el vaso este se empieza a vaciar; y, si este se retira, se observan gotas callendo de la base del vaso.

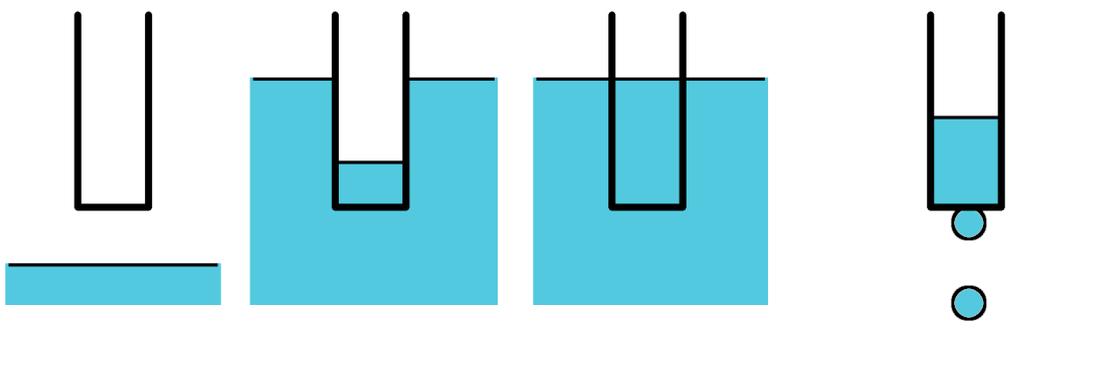


Figura 5: Flujo del He II alrededor de las paredes de un recipiente.

Los primeros experimentos diseñados para medir la conductividad térmica del He II mues-

tran que es muy alta, tendiendo al infinito para pequeñas corrientes de calor. De hecho es imposible establecer un gradiente de temperatura en un volumen del líquido superfluido en condiciones normales. Sin embargo, se puede establecer un gradiente de temperatura entre dos volúmenes de He II que estén conectados por una fuga superfluida, es decir, un canal por el que puede fluir el superfluido pero por el que no puede pasar el fluido normal. Si se aplica calor a un lado de la fuga superfluida, aparece una diferencia de presión entre ambos lados de la fuga (Figura 6). Esto se debe a que el superfluido se mueve de la región de baja temperatura a la de alta temperatura. Como ρ_s/ρ aumenta al decrecer la temperatura (Figura 4), inferimos que el superfluido se mueve a la región de mayor temperatura para reducir el gradiente de temperatura.

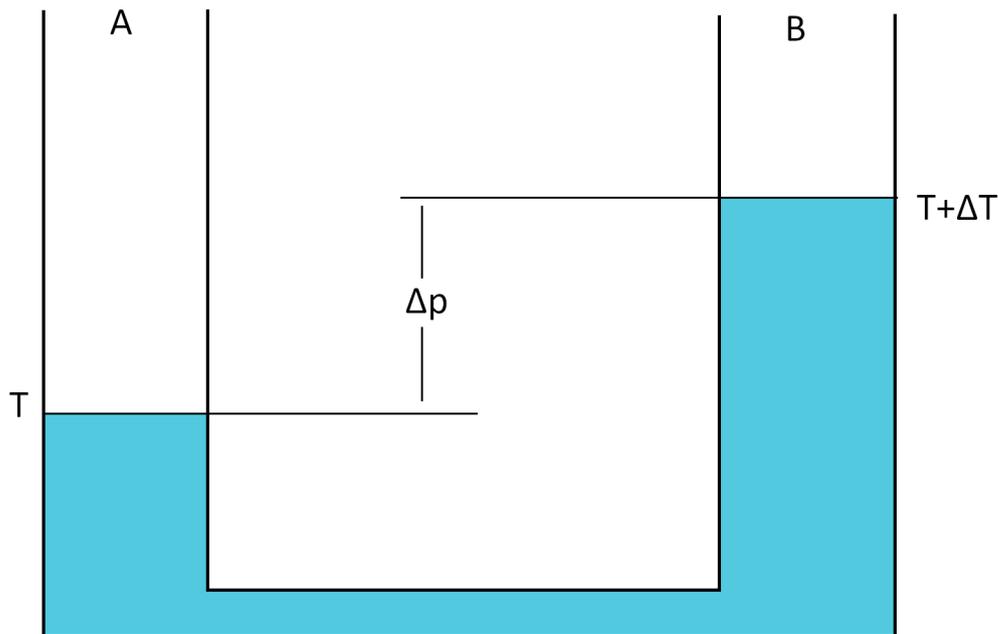


Figura 6: Dos recipientes conectados por una fuga superfluida. La diferencia de temperaturas conlleva una diferencia de presiones

Esto nos muestra que la transmisión de calor en el He II no se puede separar de la transferencia de masa. La aplicación continua de calor a un volumen de He II y su retirada en otro punto del fluido causa convección interna (Figura 7). El fluido normal fluye de la fuente de calor al sumidero mientras que el superfluido fluye en dirección contraria, manteniéndose la densidad total. Se concluye que sólo el fluido normal transmite calor, mientras que el superfluido no transmite calor.

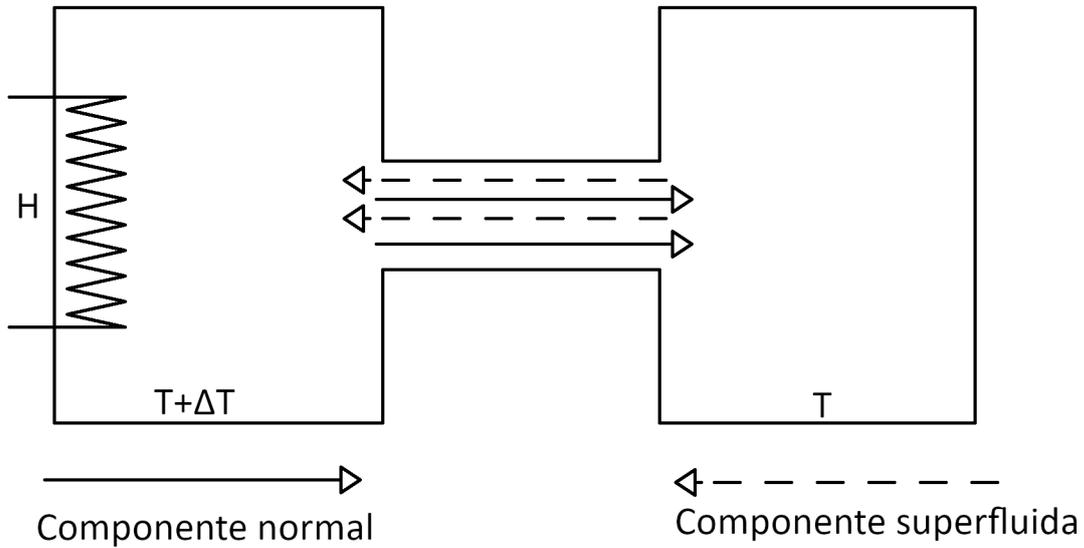


Figura 7: Convección interna en el He II

Por otra parte, cuando se somete el He II a rotación, el fluido normal se comporta de manera esperada, siguiendo rotación de cuerpo sólido; sin embargo, el superfluido tiende a formar vórtices (Figura 8). Así, una serie de líneas de vórtice llenan el fluido, con el superfluido rotando alrededor de cada línea con momento angular cuantizado. De hecho, los vórtices en un superfluido se forman con gran facilidad.

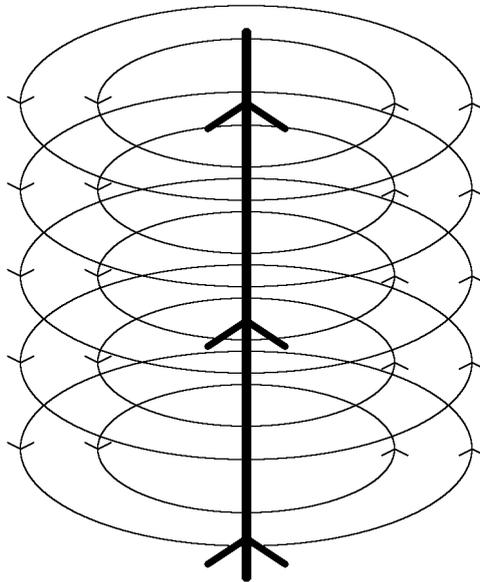


Figura 8: Líneas de vórtice en un superfluido en rotación

2.3. Modelo de superfluido

Se puede asociar el estado fundamental del He II con un superfluido puro. Como el ^4He tiene spin total 0, se comporta como un bosón, y, por tanto, el superfluido puede ser explicado como un condensado de Bose-Einstein. En tal caso, todo el sistema ocuparía un único estado,

incluso si está en movimiento; así que lo primero que se va a hacer es determinar que estados pueden describir el flujo de un superfluido. Se asumirá que, en un estado estable, la función de onda del condensado, esté en reposo o no, se puede escribir de la forma

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 \exp[iS(\vec{r})] \quad (14)$$

donde la fase $S(\vec{r})$ es una función real de la posición.

Hallamos la expresión del momento del condensado aplicando el operador momento:

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi = \vec{p}\psi \quad (15)$$

de donde se sigue que

$$\vec{p} = \hbar\nabla S \quad (16)$$

El momento \vec{p} así obtenido es el momento conjugado, es decir, la coordenada conjugada de la posición \vec{r} en Mecánica Hamiltoniana. En el caso del He II interpretamos este momento como el momento de un átomo del superfluido. Así que, si \vec{v}_s es la velocidad del superfluido, tenemos que

$$\vec{p} = m_4\vec{v}_s \quad (17)$$

donde m_4 es la masa del ^4He .

Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior obtenemos este resultado para la velocidad del superfluido:

$$v_s = \frac{\hbar}{m_4}\nabla S \quad (18)$$

Este resultado nos dice que la velocidad del superfluido es proporcional al gradiente de la fase de la función de onda del condensado. Esto significa que cuando el superfluido está en reposo la fase es constante; y cuando la velocidad del superfluido es constante, la fase varía uniformemente en la dirección de v_s . Concluimos entonces que la fase de la función de onda es coherente en todo el superfluido. Es decir, $S(\vec{r})$ es una función que varía suavemente con \vec{r} , que no tiene cambios abruptos a distancias del orden de la separación entre átomos (excepto cerca del centro de un vórtice). De hecho, este efecto se observa a escalas macroscópicas, lo cual lleva a que todas las partículas del condensado se muevan con la misma velocidad.

Tomando el rotacional de esta expresión obtenemos otra ecuación importante:

$$\nabla \times \vec{v}_s = 0 \quad (19)$$

Esta ecuación es una condición de irrotacionalidad. Lo último que veremos de la función de onda del superfluido es la posible existencia de vórtices en el superfluido. En el caso de que haya un agujero en el superfluido, puede darse que un viaje alrededor del agujero involucre un cambio de un múltiplo de 2π en la fase de la función de onda (esto no causa problemas ya que $e^{2\pi i} = 1$). Esto se corresponde a que el superfluido esté circulando alrededor del agujero con una velocidad angular fija, lo cual implica la existencia de estados de momento angular cuantizados, y, por tanto, justifica la existencia de vórtices en un superfluido (bajo ciertas condiciones).

2.4. Excitaciones en un superfluido

A continuación veremos el espectro de excitación de un superfluido. Se trabajará sustituyendo los átomos del fluido por cuasipartículas para evitar trabajar con las interacciones entre átomos. Como en un líquido se propagan ondas de sonido longitudinales pero no se propagan ondas transversales, el espectro de excitación del He II debería incluir fonones. Las principales características fundamentales de la excitación del He II fueron descritas por primera vez por Landau (1941, 1947) [10][11], como se observa en la figura 9. A energías bajas la curva es una recta correspondiente a la relación de dispersión

$$\varepsilon = C_1 p, \tag{20}$$

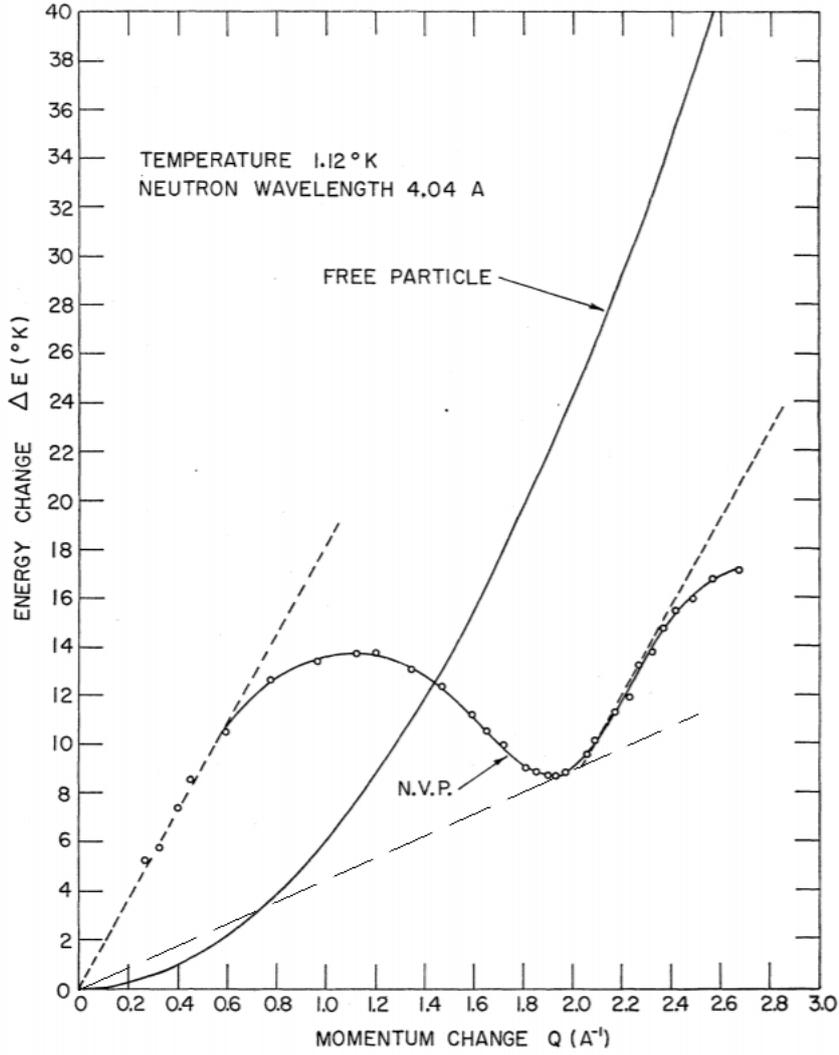


Figura 9: Espectro de fonones y rotones sugerido por Landau (1947)[11]; junto a datos experimentales para el He II (Hensaw y Woods 1961)[14], tomados a presión normal (*normal vapor pressure*, NVP). La parábola representa el espectro de excitación correspondiente a una partícula libre.

donde ε es la energía del fonón, C_1 es la velocidad del sonido en el He II y p es el momento del fonón. A velocidades mayores, el espectro se desvía de la recta, pasando por un máximo y un mínimo. Las excitaciones cercanas a este mínimo se llaman rotones y la relación entre su energía y su momento se puede aproximar como

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu_r}, \quad (21)$$

donde μ_r es la masa efectiva del rotón. La forma del espectro de Landau está confirmada por experimentos de scattering de neutrones[12][13][14], resultando en el espectro que se ve en la figura 9, en el que los parámetros de las ecuaciones (20) y (21) son

$$\begin{aligned} C_1 &= 239 \text{ m s}^{-1} & p_0/\hbar &= 19,1 \text{ nm}^{-1} \\ \Delta/k_B &= 8,65 \text{ K} & \mu_r &= 0,16m_4 \end{aligned}$$

Esto significa que el gas ideal de excitaciones consiste en una mezcla de fonones y rotones. Por tanto, se deben tratar las contribuciones al calor específico por separado. Para el gas de bosones la función de distribución de Bose-Einstein es válida, pero la distribución de rotones incluye el factor $\exp(\Delta/k_B T)$, que al ser mayor que 50 en el rango de temperaturas del He II nos permite aproximar el comportamiento de los rotones por la estadística de Maxwell-Boltzmann. Los números de fonones y rotones son respectivamente[2]

$$N_{ph} = 9,60\pi \left(\frac{k_B T}{h C_1} \right)^3$$

$$N_r = \frac{2p_0^2 (\mu_r k_B T)^{1/2} \exp(-\Delta/k_B T)}{(2\pi)^3/2 \hbar^3}. \quad (22)$$

De la comparación de ambas expresiones, concluimos que a temperaturas por debajo de 0,6 K la mayoría de las excitaciones son fonones, mientras que por encima de 1 K dominan los rotones. De la misma manera podemos hallar los calores específicos de los gases de fonones y rotones a volumen constante:

$$C_{ph} = 0,111\pi^4 k_B N_{ph} / \rho$$

$$C_r = \frac{k_B N_r}{\rho} \left(\frac{\Delta^2}{k_B^2 T^2} + \frac{\Delta}{k_B T} + \frac{3}{4} \right), \quad (23)$$

donde ρ es la densidad total del líquido.

Criterio de Landau

Ahora derivaremos el criterio de Landau para la superfluidez y lo aplicaremos al caso del He II. Supondremos un cuerpo de masa M moviéndose a velocidad \vec{V}_i a través de un volumen de He II en reposo, asumiendo que la temperatura del He II es lo suficientemente baja para que sea prácticamente superfluido puro. Siempre que \vec{V}_i sea lo suficientemente pequeña, el cuerpo no sufrirá rozamiento. Esto cambia cuando se alcanza una velocidad crítica v_L a partir de la cual es posible crear una excitación en el superfluido, lo que causa una pérdida de energía cinética del cuerpo y, por tanto, conlleva que el cuerpo sufra rozamiento a velocidades iguales o superiores a v_L .

Para estimar el valor de v_L , tenemos que hallar el valor mínimo de \vec{V}_i en el que puede aparecer una excitación. Supongamos que la creación de una excitación con momento \vec{p} y energía $\varepsilon(p)$ hace que la velocidad del cuerpo decrezca de \vec{V}_i a \vec{V}_f . Este proceso tiene que cumplir la conservación de la energía

$$\frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} M V_f^2 + \varepsilon(p) \quad (24)$$

y la conservación del momento

$$M \vec{V}_i = M \vec{V}_f + \vec{p}. \quad (25)$$

Despejando V_f y sustituyendo, obtenemos

$$\varepsilon(p) - \vec{p} \cdot \vec{V}_i + p^2/2M = 0. \quad (26)$$

Asumiendo que M es lo suficientemente grande para que el último término de (26) se pueda ignorar, si θ es el ángulo entre \vec{p} y \vec{V}_i , entonces

$$pV_i \cos\theta = \varepsilon(p) \quad (27)$$

y al ser siempre $\cos\theta \leq 1$ se tiene que satisfacer la condición

$$V_i \geq \varepsilon(p)/p \quad (28)$$

para que se creen excitaciones. Por tanto la velocidad crítica es

$$v_L = \left[\frac{\varepsilon(p)}{p} \right]_{min}. \quad (29)$$

Por tanto, la superfluidez ocurre si

$$v_L > 0. \quad (30)$$

Para hallar la velocidad crítica buscamos los extremos de $\frac{\varepsilon(p)}{p}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon(p)}{p} \right]' &= \frac{p\varepsilon'(p) - \varepsilon(p)}{p^2} = 0, \\ p\varepsilon'(p) &= \varepsilon(p), \\ \frac{d\varepsilon(p)}{dp} &= \frac{\varepsilon(p)}{p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Esto ocurre cuando $\varepsilon = mp$, que se corresponde con los puntos en que la gráfica de la energía es tangente a una recta que pasa por el origen en la figura 0.

Hay dos soluciones de esta ecuación en la curva de excitación del He II (Figura 9), una se corresponde con un máximo de $\frac{\varepsilon(p)}{p}$; y por tanto con la parte lineal del espectro

$$v_L = \frac{\varepsilon(p)}{p} = C_1 = 239 \text{ ms}^{-1} \quad (32)$$

y está asociada con la velocidad crítica para la creación de fonones; mientras que la otra solución se corresponde con un mínimo de $\frac{\varepsilon(p)}{p}$. La recta correspondiente a este mínimo es tangente al espectro de excitación del He II en un punto cercano al mínimo correspondiente a los rotones, por tanto se puede aproximar como

$$v_L \simeq \frac{\Delta}{p_0} = 58 \text{ ms}^{-1}. \quad (33)$$

En el caso de una partícula libre, tenemos que $v_L = 0$ (por tener como energía $\varepsilon(p) = Cp^2$, con c constante; como se observa en la figura 9), por lo que no puede haber superfluidez en un sistema con partículas libres. De aquí se concluye que el gap energético Δ , junto con la falta de excitaciones térmicas bajo la curva de Landau, causan la superfluidez del He II.

3. Excitones. Polaritones

3.1. Excitones

Un excitón es una cuasipartícula formada por un electrón y un hueco ligados por la interacción electromagnética. Los excitones se pueden mover a través del cristal que los contiene y por tanto transportar energía, pero no pueden transportar carga al ser eléctricamente neutros. Un excitón se forma cuando el cristal absorbe un fotón con energía menor que el gap energético y por tanto el electrón y el hueco resultantes no son libres.

Ello tiene lugar porque la energía necesaria para formar un excitón es menor que el gap energético entre las bandas de valencia y conducción, ya que el excitón tiene una energía de enlace que varía de 1 meV a 1 eV dependiendo del sólido. Esto se manifiesta en que los espectros de reflectancia y absorción muestran estructuras para energías del fotón ligeramente menores que el gap de energía.

Los excitones pueden ser formados en cualquier cristal aislante. Los excitones son siempre inestables, ya sea por decaimiento en un electrón y hueco libres en el caso de gap indirecto, o por recombinación del electrón y hueco (posible en todo caso). Los excitones pueden formar estructuras más complejas, como por ejemplo un biexcitón a partir de dos excitones.

Los excitones pueden ser formados por absorción de fotones para cualquier frecuencia k para la que $\nabla_k \epsilon_v = \nabla_k \epsilon_c$, es decir, que las bandas de valencia y conducción sean paralelas. En estas condiciones, las velocidades de grupo para electrones y huecos son iguales y estos pueden ser ligados por atracción coulombiana.

La energía de enlace del excitón se puede medir de tres maneras:

- En transiciones ópticas desde la banda de valencia, por la diferencia entre la energía requerida para crear un excitón y la necesaria para crear un electrón libre y un hueco libre.
- En luminiscencia por recombinación, comparando la energía de recombinación de electrón-hueco libres con la correspondiente a la recombinación del excitón.
- Por fotoionización de excitones, para formar electrones y huecos libres. Este experimento requiere una gran concentración de excitones.

Estudiaremos dos casos límite: uno en el que el excitón es pequeño y fuertemente ligado, denominado excitón de Frenkel, y otro en el que el excitón es débilmente ligado, con una distancia de separación entre el electrón y el hueco grande en comparación con el parámetro de red, denominado excitón de Mott-Wannier.

Excitones de Frenkel

En el caso de un excitón fuertemente ligado, el excitón está localizado en un único átomo; aunque el par se pueda mover libremente por el cristal, el hueco se encuentra en el mismo átomo que el electrón. Por tanto, el excitón se puede considerar un estado excitado de un átomo, como se muestra en la figura 10.

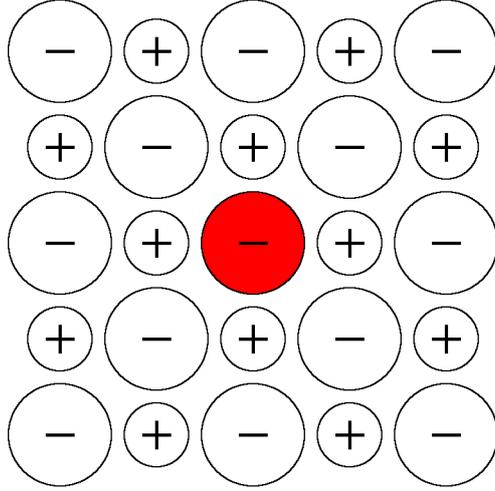


Figura 10: Un excitón de Frenkel localizado en un átomo de un cristal. Un excitón de Frenkel ideal siempre viaja como una onda a través del cristal, pero el electrón y el hueco siempre están cerca uno del otro.

Un ejemplo de excitones de Frenkel es el de los gases nobles en estado cristalino. Por ejemplo, la menor transición atómica significativa del kriptón atómico se corresponde a 9,99 eV; mientras que en el cristal correspondiente la transición es a 10,17 eV. Como el gap energético del cristal es 11,7 eV; la energía del estado fundamental del excitón es de 1,5 eV.

Los estados traslacionales de un excitón de Frenkel toman la forma de ondas. Considérese un cristal de N átomos en una línea o anillo. Si u_j es el estado fundamental del átomo j , el estado fundamental del cristal es

$$\psi_g = u_1 u_2 \dots u_{N-1} u_N, \quad (34)$$

ignorando interacciones entre átomos. Si un átomo j se encuentra en un estado excitado v_j , el sistema es descrito por

$$\varphi_j = u_1 u_2 \dots u_{j-1} v_j u_{j+1} \dots u_{N-1} u_N. \quad (35)$$

Esta función tiene la misma energía que la función φ_l con cualquier otro átomo l excitado. Sin embargo, estas funciones no describen estados estacionarios del sistema. Debido a la interacción entre átomos, los autoestados tienen que tener una forma de onda.

Cuando el hamiltoniano del sistema actúa sobre la función φ_j , obtenemos

$$H\varphi_j = \epsilon\varphi_j + T(\varphi_{j-1} + \varphi_{j+1}), \quad (36)$$

donde ϵ es la energía de excitación del átomo libre y la interacción T mide la tasa de transferencia de la excitación de j a sus vecinos $j-1$ y $j+1$. Las soluciones de esta ecuación son ondas

de Bloch:

$$\psi_k = \sum_j \exp(ijka)\varphi_j, \quad (37)$$

donde a es el parámetro de red del cristal. Para comprobar que ésta es la solución, operamos H en ψ_k :

$$H\psi_k = \sum_j e^{ijka} H\varphi_j = \sum_j e^{ijka} [\epsilon\varphi_j + T(\varphi_{j-1} + \varphi_{j+1})]. \quad (38)$$

Reordenando el lado derecho de la expresión tenemos

$$H\psi_k = \sum_j e^{ijka} [\epsilon + T(e^{ika} + e^{-ika})]\varphi_j = (\epsilon + 2T \cos ka)\psi_k, \quad (39)$$

por tanto los autovalores de energía son

$$E_k = \epsilon + 2T \cos ka, \quad (40)$$

como se representa en la figura 11. Aplicando condiciones de contorno periódicas obtenemos que los posibles valores del vector de onda k son:

$$k = 2\pi s/Na; \quad s = -\frac{1}{2}N, -\frac{1}{2}N + 1, \dots, \frac{1}{2}N - 1, \quad (41)$$

donde N es el número de átomos en la cadena, como ya se definió antes.

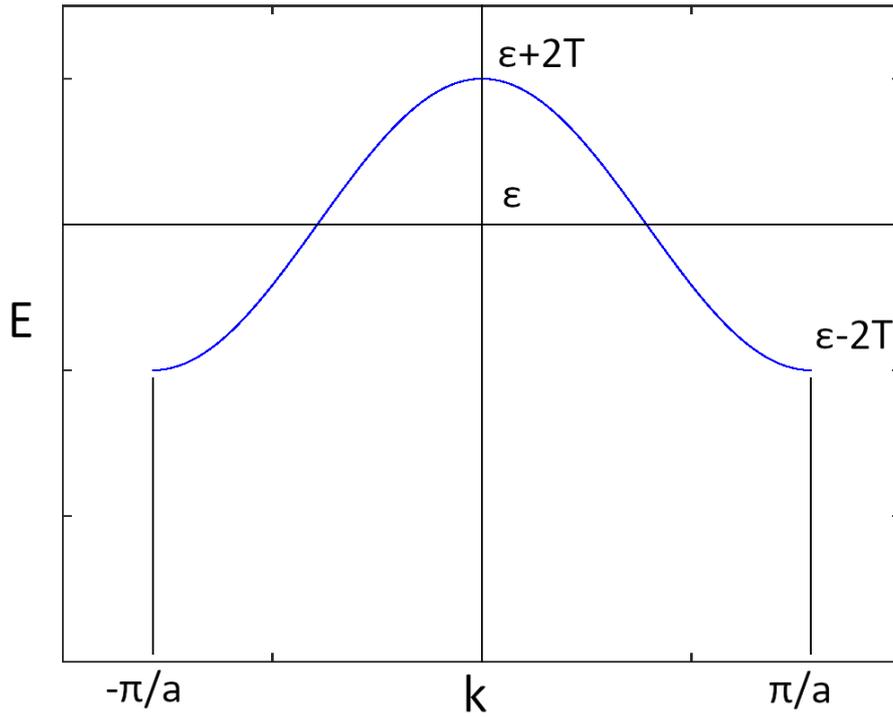


Figura 11: Energía frente a vector de onda para un excitón de Frenkel, calculado con transferencia de energía a primeros vecinos positiva T .

Excitones de Mott-Wannier

Consideremos un electrón en la banda de conducción y un hueco en la banda de valencia, separados una distancia considerable como se muestra en la figura 12. El electrón y el hueco se atraen por el potencial coulombiano (unidades CGS)

$$U(r) = -e^2/\epsilon r, \tag{42}$$

donde r es la distancia entre las partículas y ϵ es la constante dieléctrica del medio (en caso de que la frecuencia del movimiento del excitón sea mayor que las frecuencias de fonones ópticos se considera la constante dieléctrica del vacío). Se encontrarán estados ligados del excitón que tengan energías totales menores que el fondo de la banda de conducción.

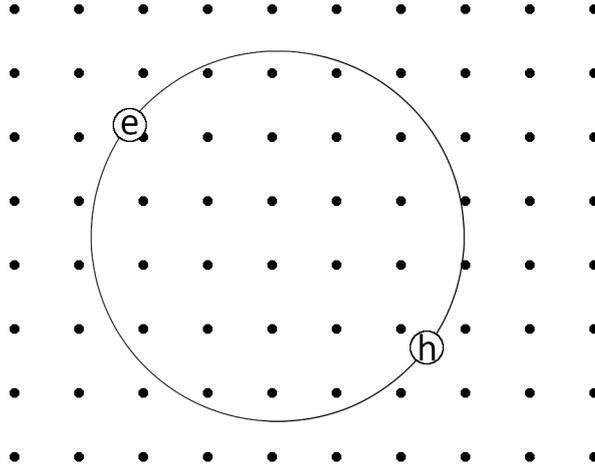


Figura 12: Un excitón de Mott-Wannier. Se observa que la distancia entre el electrón y el hueco es grande en comparación con la constante de red.

Si suponemos que las superficies de energía constantes del electrón y del hueco son esféricas, el sistema es análogo al átomo de hidrógeno. Por tanto, los niveles de energía (relativos a la banda de valencia) son dados por la ecuación de Rydberg:

$$E_n = E_g - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2 n^2}, \quad (43)$$

donde E_g es el gap energético, n es el número cuántico principal y μ es la masa reducida del sistema:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h}, \quad (44)$$

donde m_e y m_h son las masas efectivas del electrón y del hueco.

La energía del estado fundamental del excitón se obtiene al hacer $n = 1$ en la ecuación (43). Este valor se corresponde con la energía de ionización del excitón. Estudios de las líneas de absorción del Cu_2O [18] muestran a baja temperaturas resultados para el espaciado de niveles de excitones que concuerdan con la ecuación de Rydberg (43), con la excepción del estado $n = 1$. Un ajuste empírico a las líneas de la figura 13 se obtiene con la relación $\nu(\text{cm}^{-1}) = 17508 - (800/n^2)$. Tomando $\epsilon = 10$, encontramos que $\mu \simeq 0,7 m_e$ a partir del coeficiente de $1/n^2$. El término constante 17508 cm^{-1} se corresponde a un gap energético $E_g = 2,17 \text{ eV}$.

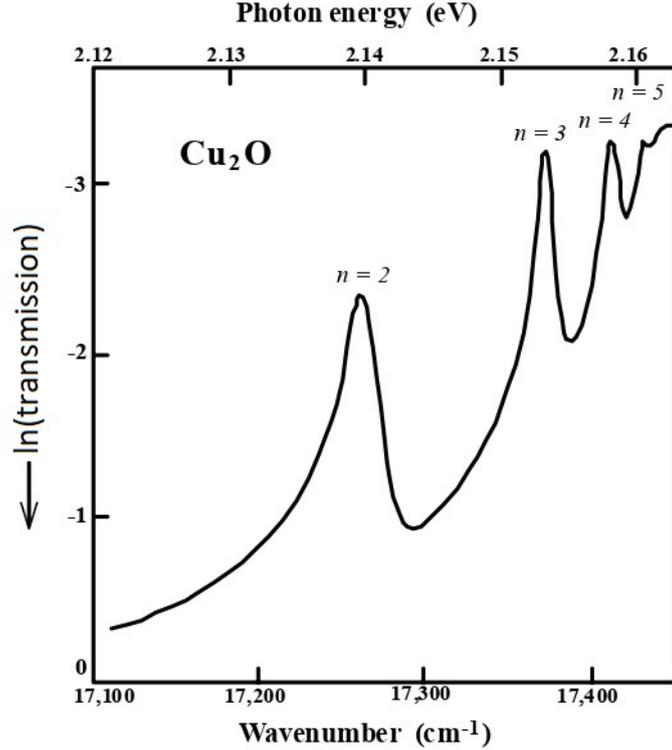


Figura 13: Logaritmo de la transmitancia frente a energía del fotón en Cu_2O a 77 K, mostrando una serie de líneas de excitones. Como el eje vertical está invertido, los picos se corresponden con absorción.[18]

Condensación de excitones a gotas de electrones y huecos (electron-hole drop, EHD)

Una fase condensada de plasma de electrones y huecos se forma en Ge y Si cuando se mantienen a baja temperatura e irradiados por luz. La siguiente secuencia de eventos tiene lugar cuando una gota de electrones y huecos (EHD) se forma en Ge: la absorción de un fotón de energía $\hbar\omega > E_g$ produce un electrón y un hueco libres, con alta eficiencia. Éstos se combinan rápidamente, posiblemente en 1 ns , para formar un excitón. Este excitón decae con la aniquilación del par electrón-hueco con un tiempo de vida de $8 \mu\text{s}$.

Pero en caso de que la concentración de excitones sea lo suficientemente alta, por encima de 10^{13} cm^{-3} ; la mayoría de los excitones se condensan en una gota. El tiempo de vida de la gota es de $40 \mu\text{s}$; aunque en Ge tensado esta puede durar hasta $600 \mu\text{s}$ [15]. Dentro de la gota los excitones se disuelven en un gas de Fermi degenerado de electrones y huecos, con propiedades metálicas; estado predicho por L. V. Keldysh[15]. La energía de ligadura en el Ge es $1,8 \text{ meV}$ relativa a los excitones libres, y la concentración $n = p = 2,57 * 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

Descripción como operador cuántico del excitón de Wannier-Mott

Como el tratamiento posterior del excitón-polaritón trata únicamente con excitones de Wannier-Mott, es conveniente describirlos en los términos mecano-cuánticos usados en dicho desarrollo. Denotando el operador de creación de electrón en la banda de conducción con momento \vec{k} como $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, y al correspondiente operador para un hueco en la banda de conducción como $\hat{b}_{\vec{k}}^\dagger$, tenemos que el operador de creación del excitón de momento (del centro de masas) \vec{K} es

$$\vec{e}_{\vec{K},n}^\dagger = \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\vec{K},\vec{k}-\vec{k}'} \phi_n \left(\frac{m_h \vec{k} - m_e \vec{k}'}{m_e + m_h} \right) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}'}^\dagger, \quad (45)$$

donde $\phi_n(\vec{k})$ es la función de onda del movimiento relativo del electrón y el hueco, que toma la misma forma que el correspondiente a un electrón y un protón en un átomo de hidrógeno; y siendo n el número cuántico del movimiento relativo. Los operadores del excitón obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} \left[\vec{e}_{\vec{K}',n'}, \vec{e}_{\vec{K},n} \right] &= 0, \\ \left[\vec{e}_{\vec{K}',n'}^\dagger, \vec{e}_{\vec{K},n}^\dagger \right] &= 0, \\ \left[\vec{e}_{\vec{K}',n'}, \vec{e}_{\vec{K},n}^\dagger \right] &= \delta_{\vec{K},\vec{K}'} \delta_{n,n'} - O(n_{exc} a_B^3), \end{aligned} \quad (46)$$

donde n_{exc} es la densidad de excitones y a_B es el radio de Bohr del excitón definido como:

$$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_*e^2}. \quad (47)$$

con m_* la masa efectiva del excitón $m_* = (m_e^{-1} + m_h^{-1})^{-1}$

Por tanto, podemos considerar los excitones como bosones cuando el espaciado entre ellos es mucho mayor que su radio de Bohr ($n_{exc} \ll a_B^{-3}$).

3.2. Polaritones

En esta sección se tratará la resonancia entre fotones y fonones ópticos transversos; es decir, la interacción entre ambos cuando las frecuencias y vectores de ondas de ambas ondas son aproximadamente iguales. La región en la que se cruzan las rectas a rayas de las figuras 14 y 15 es la región de resonancia, correspondiéndose las rectas a las relaciones de dispersión para los fotones y los fonones ópticos transversos en ausencia de acoplamiento entre ellos. En realidad, siempre hay acoplamiento implícito en las ecuaciones de Maxwell. El cuanto del campo acoplado de ondas fotón-fonón transverso se llama polaritón.

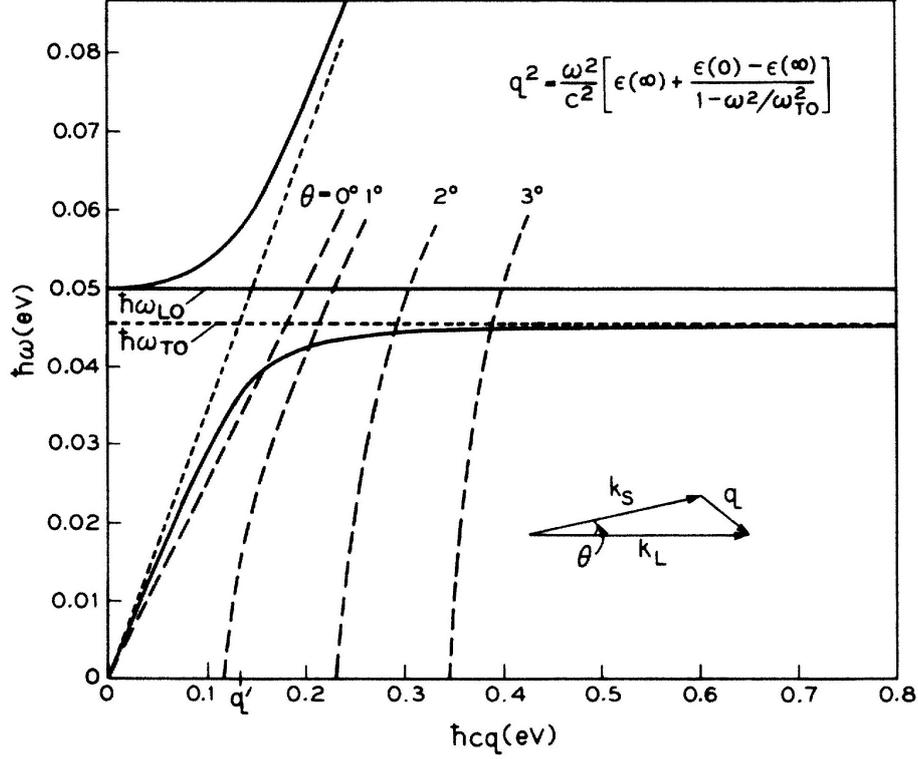


Figura 14: Modos acoplados de fotones y fonones ópticos transversos en un cristal iónico. Las líneas a rayas cortas representan las curvas de dispersión de los fonones y fotones desacoplados, mientras que las líneas sólidas representan las curvas de dispersión de los polaritones. Las líneas a rayas largas indican los valores de energía y vector de onda cinemáticamente posibles para cada ángulo θ , definido en el triángulo en la figura, donde \vec{k}_L y \vec{k}_S son los vectores de onda de la luz láser y la luz tras el *shift* de Stokes, mientras que q es el vector de onda del polaritón afectado por scattering.[16][17]

El acoplamiento del campo eléctrico E del fotón con la polarización dieléctrica P del fonón óptico transversal (OT) es descrito por la ecuación de onda electromagnética:

$$c^2 K^2 E = \omega^2 (E + 4\pi P), \quad (48)$$

donde K denota el módulo del vector de onda.

A bajos vectores de onda, la frecuencia del fonón OT, ω_T , es independiente de K . La polarización es proporcional al desplazamiento de los iones positivos relativo a los iones negativos, tal que la ecuación de movimiento de la polarización es como la de un oscilador y se puede escribir como,

$$-\omega^2 P + \omega_T^2 P = (Nq^2/M)E, \quad (49)$$

con $P = Nqu$, siendo u el desplazamiento de las cargas, N el número de pares de iones de carga efectiva q y M la masa reducida por unidad de volumen. Por simplicidad ignoramos la contribución electrónica a la polarización.

Las ecuaciones (48) y (49) tienen una solución cuando

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - c^2 K^2 & 4\pi\omega^2 \\ Nq^2/M & \omega^2 - \omega_T^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (50)$$

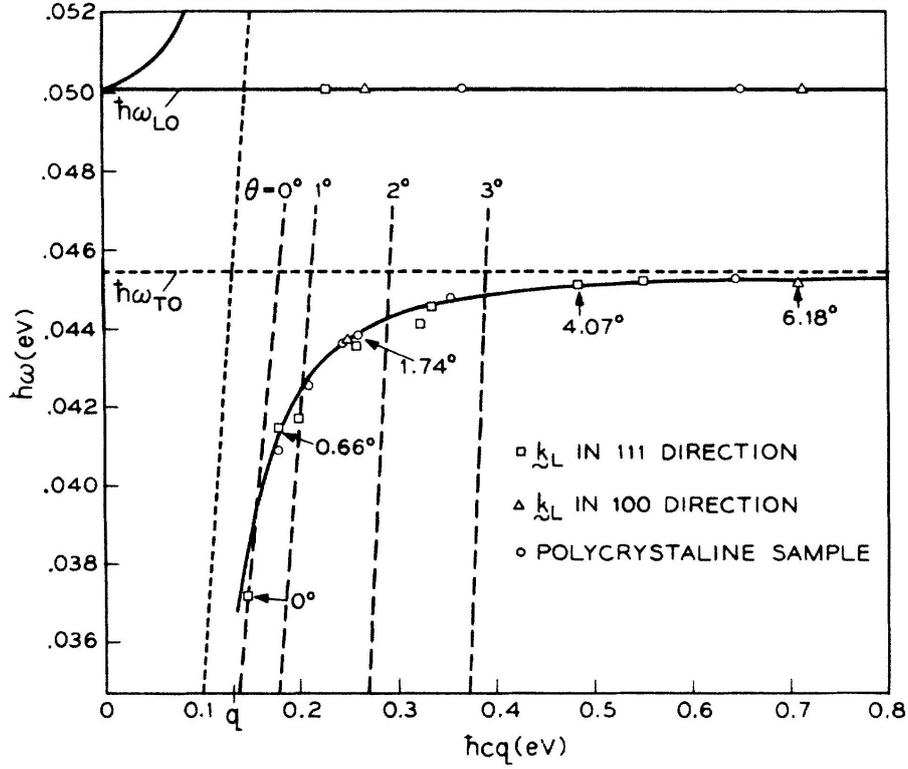


Figura 15: Gráfica de las energías y vectores de onda observados de los polaritones y fonones longitudinales ópticos en GaP. Las curvas de dispersión teóricas se muestran como líneas sólidas. Las curvas de dispersión para los fotones y fonones desacoplados se muestran como líneas a rayas cortas; y los valores de las energías y números de onda cinemáticamente posibles para ciertos ángulos θ se muestran también como líneas a rayas más largas. También se muestran los valores experimentales de θ junto a algunos de los datos.[16][17]

Esto nos da la relación de dispersión del polaritón. A $K = 0$ se tienen dos raíces, $\omega = 0$ correspondiéndose a un fotón y

$$\omega^2 = \omega_T^2 + 4\pi Nq^2/M, \quad (51)$$

para el polaritón. Aquí ω_T es la frecuencia del fonón OT en ausencia de acoplamiento con fotones.

La función dieléctrica obtenida a partir de (48) es:

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi P/E = 1 + \frac{4\pi Nq^2/N}{\omega_T^2 - \omega^2}. \quad (52)$$

Si hay contribución óptica electrónica a la polarización por los núcleos de iones, ésta debería ser incluida. En el rango de frecuencias desde cero hasta el infrarrojo, escribimos

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{4\pi Nq^2/N}{\omega_T^2 - \omega^2}, \quad (53)$$

de acuerdo con la definición de $\epsilon(\infty)$ como la constante dieléctrica óptica, obtenida como el cuadrado del índice de refracción óptico.

Hacemos $\omega = 0$ para obtener la función dieléctrica estática:

$$\epsilon(0) = \epsilon(\infty) + 4\pi Nq^2/M\omega_T^2, \quad (54)$$

que, junto con la ecuación (53), podemos usar para expresar $\epsilon(\omega)$ en función de parámetros accesibles:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + [\epsilon(0) - \epsilon(\infty)] \frac{\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} = \epsilon(\infty) \left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \right)$$

o

$$\epsilon(\omega) = \frac{\omega_T^2 \epsilon(0) - \omega^2 \epsilon(\infty)}{\omega_T^2 - \omega^2} = \epsilon(\infty) \left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \right), \quad (55)$$

donde ω_L es la frecuencia de un fonón longitudinal, usada aquí para simplificar notación, a pesar de no haber fonones longitudinales presentes en este análisis.

El cero de $\epsilon(\omega)$ define la frecuencia ω_L , mientras que su polo define ω_T . En el cero tenemos que

$$\epsilon(\infty)\omega_L^2 = \epsilon(0)\omega_T^2, \quad (56)$$

que al ser escrita como

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon(\infty)} \quad (57)$$

se conoce como la relación de Lyddane-Sachs-Teller o relación LST; y muestra que en presencia de polaritones si $\omega_T \rightarrow 0$ entonces $\epsilon(0) \rightarrow \infty$.

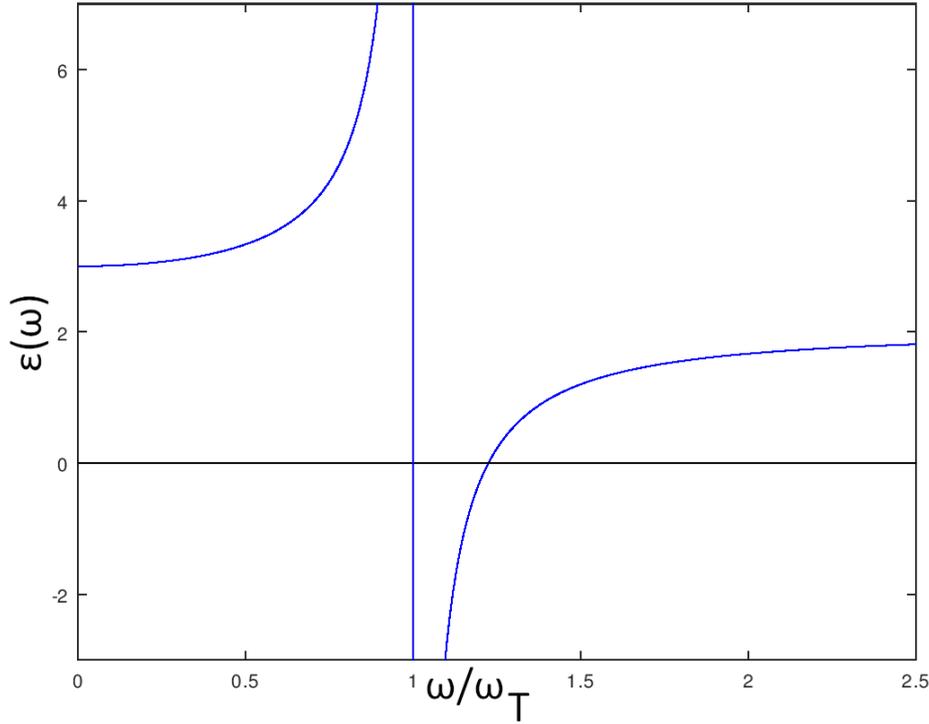


Figura 16: Gráfica de $\epsilon(\omega)$ para $\epsilon(\infty) = 2$ y $\epsilon(0) = 3$. La constante dieléctrica es negativa entre $\omega = \omega_T$ y $\omega = \omega_L = (3/2)^{1/2}\omega_T$. Las ondas electromagnéticas en este rango de frecuencias no se propagan en el medio, sino que son reflejadas en la frontera.

Por último, se observa que los polaritones no se propagan cuando la frecuencia se encuentra entre el polo $\omega = \omega_T$ y el cero $\omega = \omega_L$, ya que $\epsilon < 0$ y por tanto K es imaginaria, por lo que las ondas se atenúan exponencialmente con la distancia.

3.3. Excitones-polaritones

Un excitón-polaritón es un estado de resonancia entre un fotón y un excitón. Para que el cálculo de la masa efectiva del excitón-polaritón tenga sentido, primero se hablará de cómo una microcavidad semiconductor hace la masa efectiva del fotón no nula.

Excitón de pozo cuántico

Para facilitar la interacción entre los fotones y excitones, el experimento se realiza en un pozo cuántico semiconductor. Un pozo cuántico semiconductor consiste en una capa de un semiconductor con espesor comparable con el radio de Bohr del excitón colocada entre dos capas aislantes. De esta manera, el momento del excitón está cuantizado en la dirección de confinamiento. Si solo se considera un nivel, como por ejemplo el de menor energía, los excitones se comportan como cuasipartículas bidimensionales.

Este confinamiento cuántico también modifica la estructura de la banda de valencia y, por tanto, la intensidad y reglas de selección de la transición óptica. En concreto, la conservación del momento en una transición óptica sólo tiene que satisfacerse en el plano del pozo cuántico y no en la dirección del confinamiento. Esto significa que los excitones en un pozo cuántico se acoplan a la luz con el mismo número de onda en el plano k_{\parallel} y números de onda transversos arbitrarios k_{\perp} .

Además, debido al confinamiento, un excitón de pozo cuántico tiene un menor radio de Bohr a_B^{2D} y una mayor energía de enlace, lo cual conlleva una mejora de la constante del oscilador en un factor de $(a_B^{3D}/a_B^{2D})^3$. La desventaja de este método es que se produce una reducción en el solapamiento entre el campo lumínico y el excitón ya que la longitud de coherencia transversa del campo de fotones es mucho mayor que la anchura del pozo cuántico. Por tanto, para conseguir mejor acoplamiento entre el fotón y el excitón, es necesario confinar los fotones en el eje z introduciendo una microcavidad.

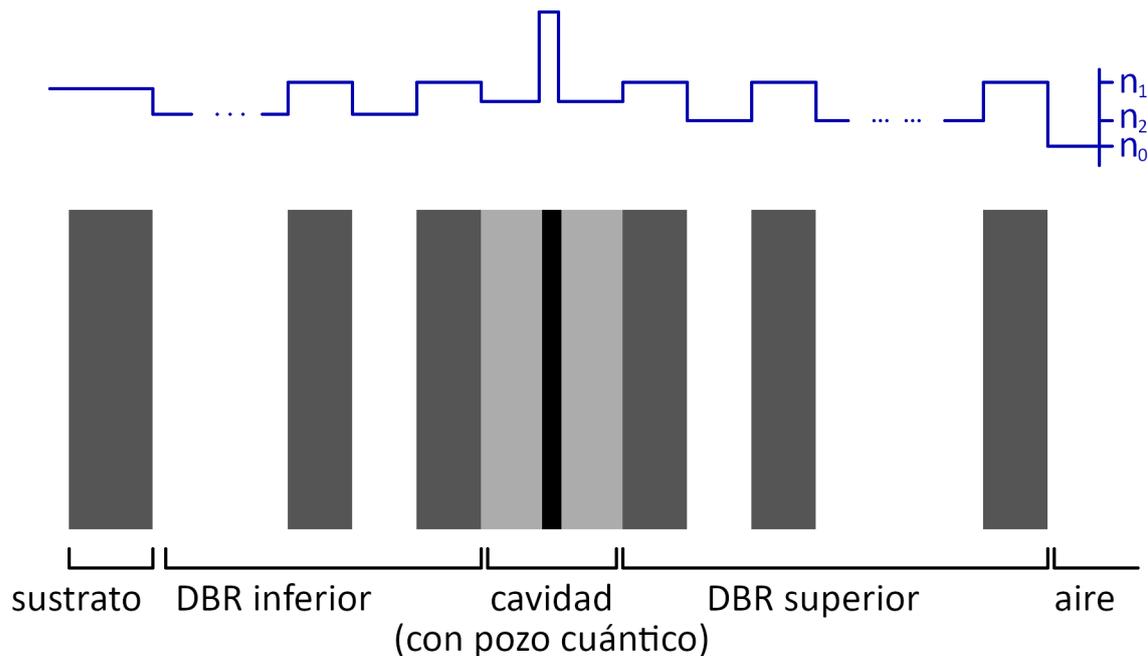


Figura 17: Esbozo de una microcavidad semiconductor.

Microcavidad semiconductor

La estructura de una microcavidad semiconductor, como la mostrada en la figura 17, es una cavidad de anchura $\lambda_c/2$ colocada entre dos reflectores de Bragg (*distributed Bragg reflectors*, DBRs), consistentes en capas alternadas de materiales con alto y bajo índice de refracción y anchura óptica de $\lambda_c/4$. Esta estructura tiene resonancia en λ_c ; siendo la transmitividad T:

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{[1 - \sqrt{R_1 R_2}]^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\phi/2)}, \quad (58)$$

donde R_1 y R_2 son las reflectancias de los DBRs y ϕ el cambio de fase del fotón en cada viaje. El factor de calidad Q, definido como el número medio de viajes que hace el fotón antes de escapar la cavidad, es:

$$Q \doteq \frac{\lambda_c}{\Delta\lambda_c} \simeq \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - (R_1 R_2)^{1/2}}, \quad (59)$$

donde $\Delta\lambda_c$ es la anchura de la resonancia. Una cavidad ideal tiene $Q = \infty$.

La figura 18(a) nos da un ejemplo del espectro de reflexión de una cavidad con $Q \simeq 4000$, mientras que la figura 18(b) nos muestra la distribución de la intensidad de campo $|E(z)|^2$ del modo resonante. El campo se concentra en el centro de la cavidad, aumentando su intensidad en un factor de ~ 20 en comparación con el espacio vacío.

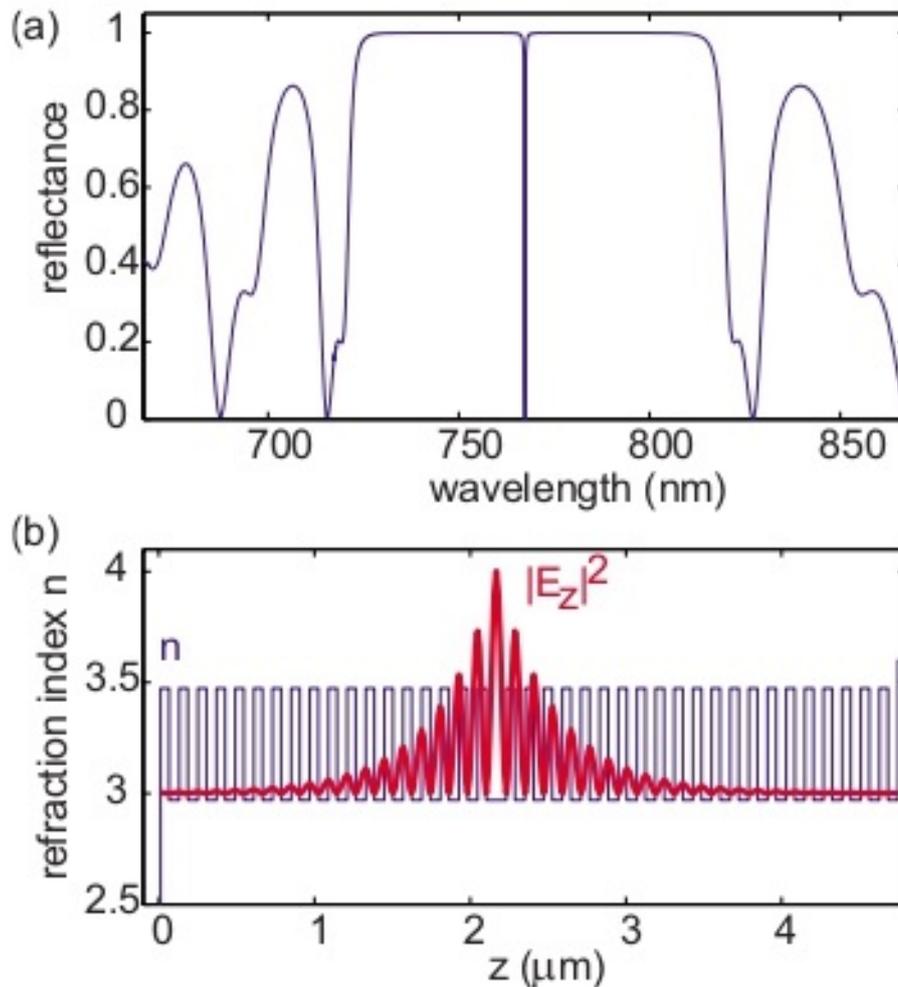


Figura 18: Propiedades de una microcavidad de gran calidad. (a) Reflectancia de una microcavidad vacía. (b) Estructura de la cavidad y distribución de la intensidad $|E_z|^2$ del modo resonante[19].

En estas microcavidades también se da que la longitud efectiva se extiende de manera que[19]

$$L_{eff} = L_c + L_{DBR}$$

$$L_{DBR} \approx \frac{\lambda_c}{2n_c} \frac{n_1 n_2}{|n_1 - n_2|} \quad (60)$$

donde n_1 , n_2 y n_c son los índices de refracción de las capas de los DBRs y de la cavidad, respectivamente, como se muestra en la figura 17.

La razón principal para tener una microcavidad es el confinamiento del campo fotónico a un plano, asumido el x-y por simplicidad. La luz con un ángulo de incidencia θ tiene resonancia en

$\lambda_c/(\cos\theta)$. Por tanto, la cavidad tiene dispersión de energía frente al número de onda en plano k_{\parallel} :

$$E_{cav} = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}, \quad (61)$$

donde $k_{\perp} = n_c(2\pi/\lambda_c)$ y n_c es el índice de refracción. Hay una correspondencia entre el ángulo de incidencia y cada modo de resonancia con el número de onda en el plano:

$$k_{\parallel} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \tan \left[\sin^{-1} \left(\frac{\sin\theta}{n_c} \right) \right] \approx \frac{2\pi}{\lambda_c} \theta \quad (62)$$

cuando $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$. En esta región, tenemos

$$E_{cav} \approx \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} \left(1 + \frac{k_{\parallel}^2}{2k_{\perp}^2} \right) = E_{cav}(k_{\parallel} = 0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{cav}}, \quad (63)$$

donde la masa efectiva del fotón en la cavidad es

$$m_{cav} = \frac{E_{cav}(k_{\parallel} = 0)}{c^2/n_c^2}; \quad (64)$$

que es del orden de $10^{-5}m_e$.

Hamiltoniano

El hamiltoniano de nuestro sistema, teniendo en cuenta interacciones de primer orden entre fotones y excitones, es:

$$\hat{H}_{pol} = \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{exc} + \hat{H}_I = \sum E_{cav}(k_{\parallel}, k_c) \hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + \sum E_{exc}(k_{\parallel}) \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + \sum g_0 (\hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + \hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}} \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger}), \quad (65)$$

donde $\hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger}$ es el operador de creación de fotones con número de onda en plano \mathbf{k}_{\parallel} y número de onda longitudinal $k_c = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ determinado por la resonancia de la cavidad, $\hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger}$ es el operador de creación de excitones con número de onda en el plano \mathbf{k}_{\parallel} , y g_0 es la intensidad de la interacción del dipolo excitón-fotón; que es no nula únicamente entre estados con la misma \mathbf{k}_{\parallel} .

Diagonalizamos este hamiltoniano mediante las transformaciones

$$\hat{P}_{\mathbf{k}_{\parallel}} = X_{\mathbf{k}_{\parallel}} \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + C_{\mathbf{k}_{\parallel}} \hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}}, \quad (66)$$

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}_{\parallel}} = -C_{\mathbf{k}_{\parallel}} \hat{b}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + X_{\mathbf{k}_{\parallel}} \hat{a}_{\mathbf{k}_{\parallel}}. \quad (67)$$

Entonces H_{pol} tiene esta forma:

$$\hat{H}_{pol} = \sum E_{LP}(k_{\parallel}) \hat{P}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} \hat{P}_{\mathbf{k}_{\parallel}} + \sum E_{UP}(k_{\parallel}) \hat{Q}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} \hat{Q}_{\mathbf{k}_{\parallel}}. \quad (68)$$

Aquí $(\hat{P}_{\mathbf{k}_{\parallel}}, \hat{P}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger})$ y $(\hat{Q}_{\mathbf{k}_{\parallel}}, \hat{Q}_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger})$ son los operadores de creación y aniquilación de las cuasi-partículas del sistema; los excitones-polaritones. Concretamente, se corresponden al polaritón inferior (lower polariton, LP) y al polaritón superior (upper polariton, UP) respectivamente; siendo el polaritón inferior aquel con menor energía y el polaritón superior aquel con mayor energía. La fracción de excitón y fotón en cada polaritón es dada por la amplitud al cuadrado de los coeficientes de Hopfield $X_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ y $C_{\mathbf{k}_{\parallel}}$. Satisfacen

$$|X_{\mathbf{k}_{\parallel}}|^2 + |C_{\mathbf{k}_{\parallel}}|^2 = 1. \quad (69)$$

Siendo $\Delta E(k_{\parallel}) = E_{exc}(k_{\parallel}) - E_{cav}(k_{\parallel}, k_c)$; $X_{k_{\parallel}}$ y $C_{k_{\parallel}}$ son dados por

$$|X_{k_{\parallel}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta E(k_{\parallel})}{\sqrt{\Delta E(k_{\parallel})^2 + 4g_0^2}} \right) \quad (70)$$

y

$$|C_{k_{\parallel}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta E(k_{\parallel})}{\sqrt{\Delta E(k_{\parallel})^2 + 4g_0^2}} \right). \quad (71)$$

Para $\Delta E(k_{\parallel}) = 0$, $|X_{k_{\parallel}}|^2 = |C_{k_{\parallel}}|^2 = 1/2$; ambos polaritones son exactamente mitad fotón mitad excitón.

Las energías de los polaritones son:

$$E_{UP,LP}(k_{\parallel}) = \frac{1}{2} [E_{exc} + E_{cav} \pm \sqrt{4g_0^2 + i(E_{exc} - E_{cav})^2}]. \quad (72)$$

Cuando el excitón y el fotón están en resonancia, $E_{exc} = E_{cav}$, y las energías del LP y el UP tienen la separación mínima $E_{UP} - E_{LP} = 2g_0$, generalmente llamada *splitting* de modo habitual. En contraste, cuando $|E_{cav} - E_{exc}| \gg g_0$, los polaritones son indistinguibles de fotones o excitones.

Curvas de dispersión y masa efectiva

Definimos Δ_0 como la diferencia de energía del fotón y el excitón en $k_{\parallel} = 0$,

$$\Delta_0 \doteq E_{cav}(k_{\parallel} = 0) - E_{exc}(k_{\parallel} = 0). \quad (73)$$

Dado Δ_0 , la ecuación (72) nos da las curvas de dispersión de los polaritones. En la región $\hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m_{cav} \ll 2g_0$, las dispersiones son parabólicas:

$$E_{LP,UP}(k_{\parallel}) \simeq E_{LP,UP}(0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{LP,UP}}. \quad (74)$$

La masa efectiva del polaritón es la media armónica ponderada de las masas del excitón y el fotón:

$$\frac{1}{m_{LP}} = \frac{|X_{k_{\parallel}}|^2}{m_{exc}} + \frac{|C_{k_{\parallel}}|^2}{m_{cav}}, \quad (75)$$

$$\frac{1}{m_{UP}} = \frac{|C_{k_{\parallel}}|^2}{m_{exc}} + \frac{|X_{k_{\parallel}}|^2}{m_{cav}}, \quad (76)$$

donde X y C son los coeficientes de Hopfield, m_{exc} es la masa efectiva del excitón y m_{cav} es la masa efectiva del fotón en la cavidad. Como $m_{cav} \ll m_{exc}$,

$$m_{LP}(k_{\parallel \sim 0}) \simeq m_{cav}/|C_{k_{\parallel}}|^2 \sim 10^{-4}m_{exc}, \quad (77)$$

$$m_{UP}(k_{\parallel \sim 0}) \simeq m_{cav}/|X_{k_{\parallel}}|^2. \quad (78)$$

A k_{\parallel} altas donde $E_{cav}(k_{\parallel}) - E_{exc}(k_{\parallel}) \gg g_0$ las dispersiones del LP y el UP convergen respectivamente a las dispersiones del excitón y el fotón. Por tanto, la masa efectiva del LP cambia en cuatro ordenes de magnitud entre $k_{\parallel} \sim 0$ y k_{\parallel} altas. Se muestran ejemplos de la dispersión de los polaritones con Δ_0 en la figura 19.

A partir de este momento, cuando se mencionen polaritones, nos referimos a excitones-polaritones.

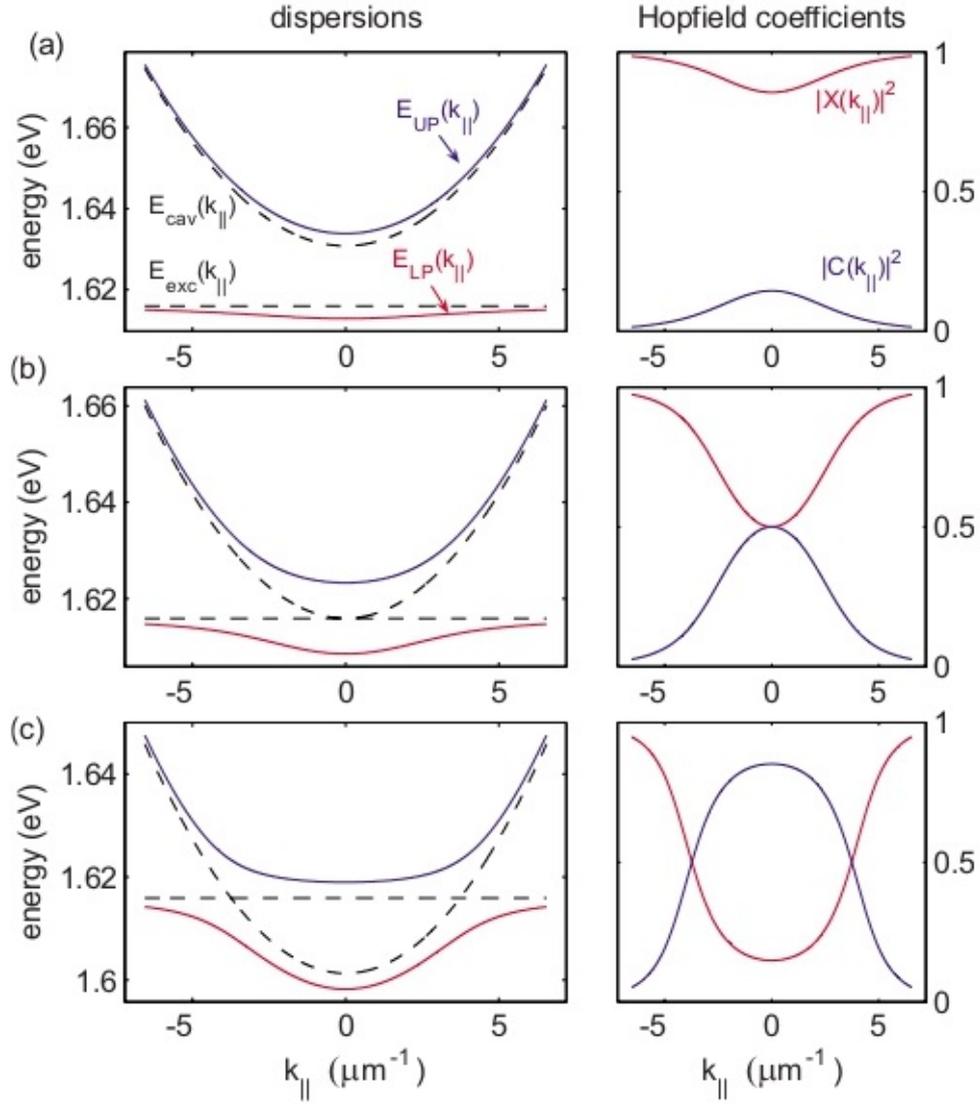


Figura 19: Dispersiones de polaritones junto a sus coeficientes de Hopfield correspondientes para (a) $\Delta_0 = 2g_0$, (b) $\Delta_0 = 0$ y (c) $\Delta_0 = -2g_0$. [19]

4. Condensación de Bose-Einstein de polaritones

Al ser bosones compuestos por componentes tanto fermiónicos como fotónicos, los polaritones constituyen un sistema único para explorar tanto la electrodinámica cuántica en cavidades como la física de muchos cuerpos.

Se han predicho una gran variedad de fases cuánticas para los polaritones, incluyendo condensados de Bose-Einstein (*Bose-Einstein condensate*, BEC), superfluidez y estados de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) y Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)[20]-[25]. La tabla 1 compara los parámetros básicos de los polaritones con excitones en semiconductores y átomos fríos como sistemas bosónicos para el estudio de fases cuánticas. Se observa que los valores de los parámetros de los polaritones son mucho mejores que los del resto de los sistemas, sobre todo en cuanto a la temperatura crítica, abriendo nuevas posibilidades para el estudio de condensados.

TABLA 1: Comparación de parámetros de sistemas en fase BEC.

Sistemas	Gases atómicos	Excitones	Polaritones
Masa efectiva m^*/m_e	10^3	10^{-1}	10^{-3}
Radio de Bohr a_B	10^{-1} Å	10^2 Å	10^2 Å
Espaciado entre partículas $n^{-1/d}$	10^3 Å	10^2 Å	1 μm
Temperatura crítica T_c	1 nK-1 μK	1 mK-1 K	1 K->300 K
Tiempo de termalización / Tiempo de vida	1 ms/1 s ~ 10^{-3}	10 ps/1 ns ~ 10^{-2}	(1-10 ps)/(1-10 ps)=0,1-10

Un sistema uniforme bidimensional de bosones no tiene una transición a un estado BEC a temperaturas no nulas en el límite termodinámico debido a que fluctuaciones térmicas destruyen el orden a grandes distancias[26][27].

Si el gas de Bose se confina en un potencial $U \sim r^\eta$ [28][29], la densidad de estados del sistema se modifica y puede darse un BEC a temperaturas no nulas.

En la práctica, cualquier sistema experimental tiene un tamaño finito y un número de estados finitos para cada partícula. Con niveles discretos de energía ε_i ($i = 1, 2, \dots$) y tamaño $S = L^2$, la condición crítica para un cuasi-BEC en un sistema bidimensional finito se pueda definir como

$$\mu = \varepsilon_1, \quad (79)$$

$$n_c = \frac{1}{S} \sum_{i \geq 2} \frac{1}{e^{\varepsilon_i/k_B T} - 1}, \quad (80)$$

donde μ es el potencial químico y n_c es la densidad bidimensional crítica.

En un pozo bidimensional cuadrado de tamaño L , la condición crítica puede cumplirse a $T_c > 0$, siendo la densidad crítica

$$n_c = \frac{2}{\lambda_T^2} \ln \left(\frac{L}{\lambda_T} \right), \quad (81)$$

donde λ_T es la longitud de onda de de Boglie térmica

$$\lambda_T(T) \doteq \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (82)$$

Si el número de partículas N es lo suficientemente grande y/o la temperatura es lo suficientemente baja, la transición de fase muestra características parecidas a la transición de fase a BEC definida en el límite termodinámico[30].

En adición con esta fase cuasi-BEC, la formación de vórtices da lugar a otra transición de fase que solo se da en un sistema bidimensional: la transición BKT[31]-[34]. A temperaturas bajas, se pueden formar vórtices térmicamente excitados en el sistema que pueden soportar orden local. Así, enfriando más el sistema por debajo de una temperatura crítica T_{BKT} , se forman pares ligados de vórtices que circulan de forma opuesta, que estabilizan la fase a un decaimiento frente a la distancia por ley de potencia y soporta una densidad de superfluido no nula. La temperatura crítica de la transición BKT es[19]

$$k_B T_{KBT} = n_s \frac{\pi\hbar^2}{2m^2}, \quad (83)$$

donde n_s es la densidad del superfluido. La ecuación (83) se puede escribir en términos de la longitud de onda de de Boglie térmica[35];

$$n_s \lambda_T(T_{BKT})^2 = 4. \quad (84)$$

En la mayoría de experimentos, el tamaño del sistema es lo suficientemente pequeño para que la transición al estado cuasi-BEC ocurra a temperaturas superiores que la transición al estado BKT[36].

4.1. Metodología experimental

Un sistema de microcavidad óptimo para un condensado de Bose-Einstein de polaritones consta de lo siguiente: (1) una cavidad de alta calidad, y por tanto mayor tiempo de vida de los fotones y polaritones; (2) grandes secciones transversales del *scattering* polaritón-fotón y polaritón-polaritón, que conlleva termalización eficiente de los polaritones; (3) pequeño radio de Bohr de los excitones y gran energía de enlace, y por tanto una gran densidad de saturación de excitones; y (4) fuerte acoplamiento entre excitones y fotones.

La elección de semiconductor de *gap* directo depende de la tecnología usada para la fabricación del sistema. La mejor calidad tanto del pozo cuántico como de la microcavidad se obtiene mediante crecimiento epitaxial de muestras basadas en $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ (con $0 \leq x \leq 1$), gracias a la gran coincidencia de las constante de red a_{lat} de AlAs y GaAs y la gran diferencia entre

sus *gaps* de energía E_g . A 4K, el GaAs tiene $a_{lat} = 5,64 \text{ \AA}$ y $E_g = 1,519 \text{ eV}$, mientras que el AlAs tiene $a_{lat} = 5,65 \text{ \AA}$ y $E_g = 3,099 \text{ eV}$. Actualmente se suelen crecer pozos cuánticos de GaAs prácticamente libres de tensiones y defectos entre DBRs (*distributed Bragg reflectors*) de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. De esta manera se obtienen estructuras prácticamente sin defectos con más de 30 pares de capas de AlAs y GaAs en los DBRs y un factor de calidad Q por encima de 10^5 [37]. Muchas propiedades de la condensación de polaritones se encontraron por primera vez en sistemas basados en GaAs[38]-[42].

Otra opción popular es el sistema II-IV basado en CdTe, con pozos cuánticos de CdTe y capas de DBR y barrera de $\text{Mg}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}$ y $\text{Mn}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}$. El mayor desacuerdo entre las redes se compensa con una mayor energía de ligadura y mayor constante de oscilador, junto con un mayor contraste entre índices de refracción (y, por tanto, menos capas necesarias en los DBRs). El menor radio de Bohr de los excitones de CdTe permite una mayor densidad de saturación pero reduce el *scattering* de polaritones y fonones acústicos. Esto se traduce en problemas en la relajación del sistema, lo que impidió la condensación en el estado fundamental de LPs en los primeros experimentos[43][44]. Sintonizando el desajuste para facilitar la termalización, Kasprzak *et al.* observaron la condensación de polaritones parcialmente localizada [45].

Más recientemente, ha habido un interés en desarrollar sistemas con alto *gap* energético y bajas constantes de red. En estos materiales, la energía de ligadura y constante del oscilador son lo suficientemente grandes para que un láser de polaritones pueda sobrevivir a más de 300K, operando a longitudes de onda del visible al ultravioleta. Aun así, las técnicas de fabricación para estos materiales no están tan desarrolladas como en el caso de los sistemas basados en GaAs o CdTe, llevando a que estas estructuras tengan una mayor concentración de impurezas y defectos. También es un desafío integrar los pozos cuánticos con las microcavidades debido a la falta de capas de DBR con redes parecidas. Aunque el régimen de acoplamiento fuerte es difícil de alcanzar, hay resultados prometedores en ZnSe[46], GaN[47][48] y ZnO[49][50]. También se ha observado el comportamiento láser de polaritones de GaN a temperatura ambiente[51][52]. Además hay investigación activa en polaritones basados en excitones de Frenkel en materiales orgánicos[53]-[57].

Para obtener un acoplamiento máximo entre excitones y fotones, se prefiere una cavidad corta con un pozo cuántico colocado en el antinodo (o antinodos) del campo en la cavidad. Una cavidad de $\lambda/2$ nos da la mayor amplitud del campo en el centro de la cavidad para una reflectancia de los DBRs dada. Un espesor óptimo del pozo cuántico, normalmente entre 0,5 y 1 radio de Bohr del excitón, lleva a un menor radio de Bohr y una mejor constante del oscilador. Para incrementar el solapamiento entre el campo y los excitones, se pueden usar múltiples pozos cuánticos ligeramente separados o incluso poner pozos cuánticos en los antinodos adyacentes al central, lo cual conlleva una mejora de la intensidad del acoplamiento $g_0 \propto \sqrt{N_{QW}}$. La diferencia en la amplitud del campo E en cada pozo cuántico tiene un efecto parecido al ensanchamiento inhomogéneo del ancho de línea de los excitones del pozo cuántico[58]. Hay otro beneficio importante al usar pozos cuánticos múltiples: un incremento en la densidad de saturación de los LPs, que crece conforme a N/a_B^2 . Cuando g_0 se incrementa hasta ser comparable con la energía de ligadura de un excitón, el efecto de acoplamiento fuerte reduce el radio de Bohr en la rama de los LPs e incrementa la densidad de saturación de los excitones.

Un sistema de microcavidad con una composición y estructura dadas tiene unos parámetros útiles que se pueden ajustar *in situ*: el desajuste Δ de la resonancia de la cavidad desacoplada relativa a la resonancia del excitón del pozo cuántico, la densidad de polaritones y la temperatura de la red cristalina.

Si hacemos que la cavidad sea más estrecha en un lado que en el otro mediante técnicas de crecimiento de muestras especiales, se puede ajustar el valor de Δ a través de la muestra; lo cual cambia las fracciones de excitón y fotón en los LPs, y con ello sus dispersiones y tiempos de vida.

La densidad de polaritones se puede controlar directamente a través de la densidad de excitaciones. Con láseres comerciales se pueden alcanzar densidades más allá del límite de la fase BCS. La dependencia con la densidad de varias propiedades del sistema nos permite hacer estudios sistemáticos sobre la física de sus transiciones de fase.

La temperatura de la reserva de fonones acústicos se puede ajustar mediante una bomba de calor termoeléctrica desde temperaturas criogénicas hasta temperatura ambiente o superior a la ambiente. La temperatura de la red influye en la dinámica de los polaritones. Aun así, los LPs no suelen estar a la misma temperatura de la red, a veces no teniendo siquiera una temperatura bien definida, debido a su corto tiempo de vida.

Desde el punto de vista de la medida, el polaritón de microcavidad es un sistema BEC muy accesible. Hay una correspondencia unívoca entre los polaritones internos con modo k_{\parallel} y los fotones externos con la misma energía y número de onda en el plano[59]. El polaritón interno se acopla al fotón externo a través de su componente fotónico con una tasa de acoplamiento fija. Por tanto, la información sobre los polaritones internos se puede medir directamente mediante los campos fotónicos externos. Al mismo tiempo, debido a las propiedades de la dispersión de los polaritones, los modos con k_{\parallel} y $E_{LP}(k_{\parallel})$ distintos se pueden resolver usando óptica convencional. Por tanto, se estudian los polaritones principalmente a través del campo fotónico externo.

Las propiedades básicas de un sistema de polaritones se pueden caracterizar mediante medidas de reflexión o transmisión usando una fuente de luz débil. Por ejemplo, de un espectro de reflexión medido se pueden extraer las resonancias del sistema de microcavidad, las anchuras de las resonancias y la estructura de bandas de detención. Como la mayoría de microcavidades tienen una longitud que cambia con la posición, una serie de medidas de reflexión en varias posiciones de la muestra revela el anticruce de las energías propias y verifica el acoplamiento fuerte entre los modos de la cavidad y excitón. La dispersión de las resonancias también se puede medir mediante reflexión con resolución en ángulo, aunque la fotoluminiscencia (FL) suele ser más conveniente para este propósito[19].

Los polaritones son excitados, resonante o no resonantemente, mediante bombeo óptico. Cambiando el ángulo de colección de la FL, se encuentran espectros que dependen de k_{\parallel} , que muestran la dispersión de energía-momento y la distribución de los momentos de los polaritones. De manera complementaria, la medida de campo cercano de la superficie de la muestra nos muestra la distribución espacial de los LPs; medidas de óptica cuántica en la FL revelan la estadística cuántica de los LPs; y las medidas por FL con resolución en el tiempo muestran la dinámica y transporte de los LPs[19].

4.2. Tasas de transición de estados

En esta sección se estudiarán las tasas de transición de estados de los polaritones debido tanto a interacción con los fonones como la interacción entre polaritones.

Se estudiará primero el efecto del *scattering* producido por fonones (*phonons* en inglés). La interacción relevante es la interacción entre excitones y fonones acústicos longitudinales debida al acoplamiento con el potencial de deformación del electrón y el hueco D_e y D_h . El hamiltoniano de esta interacción es [60][61]

$$H_w^{LP-ph} = \sum_{\vec{k}, \vec{q}, q_z} X_k^* X_{|\vec{k}+\vec{q}|} \langle k | H_w^{x-ph} | k+q \rangle (c_{\vec{q}, q_z} - c_{-\vec{q}, -q_z}^\dagger) b_{\vec{k}+\vec{q}}^\dagger b_{\vec{k}}, \quad (85)$$

siendo X_k los coeficientes de Hopfield y H_w^{x-ph} el hamiltoniano correspondiente a la interacción entre un excitón y un fonón. Los fonones se toman con vector de onda $q \vec{e}_\parallel + q_z \vec{e}_z$. La función envolvente del excitón de pozo cuántico 1s es

$$\chi(\vec{r}_\parallel, z_e, z_h) = \sqrt{\frac{2}{\pi a_B^2}} e^{-r_\parallel/a_B} f_e(z_e) f_h(z_h), \quad (86)$$

donde a_B es el radio de Bohr bidimensional y $f_{e,h}(z_{e,h})$ son las funciones envolventes de los pozos cuánticos del electrón y hueco. Evaluando el elemento de matriz de interacción excitón-fonón, se encuentra que

$$G(\vec{q}, q_z) = i \sqrt{\frac{\hbar(q^2 + q_z^2)^{1/2}}{2\rho V u}} [D_e I_e^\parallel(q) I_e^z(q_z) - D_h I_h^\parallel(q) I_h^z(q_z)]. \quad (87)$$

Aquí ρ es la densidad, u la velocidad del sonido y V es el volumen de la microcavidad. Las integrales de superposición para el electrón (e) y el hueco (h) son:

$$I_{e,h}^\parallel(q) = \left[1 + \left(\frac{m_{h,e}}{2M} q a_B \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (88)$$

$$I_{e,h}^z(q_z) = \int_0^{L_{QW}} dz f_{e,h}^2(z) e^{iq_z z}, \quad (89)$$

donde L_{QW} es la anchura del pozo cuántico (*quantum well*, QW).

Estas integrales quitan las sumas para $q > a_B^{-1}$ y $q_z > 2\pi/L_{QW}$.

Con este elemento de matriz de interacción, las tasas de transición para los LPs son:

$$W_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}' = \vec{k} - \vec{q}}^{LP-ph} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{q_z} X_k^2 X_{k-q}^2 G(q, q_z) \delta(E_{k-q} - E_k \pm \hbar\omega_{q, q_z}) \left(N_B(\hbar\omega_{q, q_z}) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right), \quad (90)$$

donde $N_B(\hbar\omega_q) = 1/[exp(\hbar\omega_q) - 1]$ es la función de distribución de Bose.

Ahora faltan las interacciones entre polaritones. El Hamiltoniano de interacción LP-LP tiene, en general, esta forma:

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2} U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) \hat{P}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{P}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{P}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}}^\dagger \hat{P}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}, \quad (91)$$

donde $\hat{P}_{\mathbf{k}}$ es el operador de creación de un LP con vector de onda en el plano \mathbf{k} y $U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})$ es la energía potencial del sistema. La dependencia de $U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})$ con \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 y \mathbf{q} puede ignorarse si el intercambio de momento \mathbf{q} es pequeño. En este caso se usará $U_k = U(k, k, 0)$ en su lugar.

Se tratarán dos casos: primero el caso en que el sistema está polarizado en espín y luego el caso en que ambos espines o helicidades estén presentes.

Para un sistema de polaritones con polarización en spin, podemos simplificar y calcular U_k :

$$U_k = \frac{1}{2}\delta E_X + \sqrt{g_0^2 + \frac{\Delta^2}{4}} - \sqrt{g(n)^2 + \frac{(\Delta - \delta E_X)^2}{4}},$$

$$\delta E_X = E_B \frac{n}{n_s}, \quad n_s = \frac{S}{2, 2\pi a_B^*{}^2 |X|^2}, \quad (92)$$

$$g(n) = g_0 \left(1 - \frac{n}{n'_s}\right), \quad n'_s = \frac{S}{4\pi a_B^*{}^2}.$$

Aquí $\Delta = E_{cav}(k) - E_{exc}(k)$ es la separación entre las energías de la cavidad y el excitón a una k dada, E_B es la energía de enlace del excitón, a_B es el radio de Bohr del excitón, $2g_0$ es el splitting de modo normal en $\Delta = 0$, y S es el área del sistema. $|X|^2 = \frac{1}{2}(1 + \Delta/\sqrt{4g_0^2 + \Delta^2})$ es la fracción de excitón en el polaritón. δE_X representa la interacción de intercambio de fermiones repulsiva entre excitones del pozo cuántico con el mismo spin[62][63]. $g(n)$ es el splitting de modo habitual reducido debido al llenado del espacio de fases y interacciones de intercambio de fermiones[64].

Si el sistema de polaritones se compone de dos componentes de distinta helicidad (o espín), la interacción atractiva entre excitones con helicidades (o espines) opuestos juega un papel crucial en la dinámica de relajación. Se ha usado una técnica de mezclado de cuatro ondas con dominio de frecuencias degenerado (*frequency-domain degenerate four-wave mixing*, FD-DFWM) para evaluar las magnitudes relativas del efecto de llenado del espacio y las interacciones atractivas y repulsivas de dos cuerpos entre los excitones. Como se ve en la figura 20(a), un rayo de bombeo excita dos campos fotónicos que se propagan en direcciones opuestas con amplitudes α_1 y α_2 , y un rayo de testeo excita un campo sonda con amplitud α_3 . La conservación de energía y momento tras el *scattering* elástico produce una señal con fase conjugada y amplitud α_4 . El Hamiltoniano de esta interacción tiene tres términos de la forma

$$\hat{H}_n = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + H.c., \quad (93)$$

$$\hat{H}_1 = W(\hat{b}_{4+}^\dagger \hat{b}_{3-}^\dagger \hat{b}_{2+} \hat{b}_{1-} + \hat{b}_{4+}^\dagger \hat{b}_{3-}^\dagger \hat{b}_{2-} \hat{b}_{1+} + \hat{b}_{4-}^\dagger \hat{b}_{3+}^\dagger \hat{b}_{2+} \hat{b}_{1-} + \hat{b}_{4-}^\dagger \hat{b}_{3+}^\dagger \hat{b}_{2-} \hat{b}_{1+}),$$

$$\hat{H}_2 = R \sum_{\sigma=+,-} \hat{b}_{4\sigma}^\dagger \hat{b}_{3\sigma}^\dagger \hat{b}_{2\sigma} \hat{b}_{1\sigma},$$

$$\hat{H}_3 = g\nu \sum_{\sigma=+,-} [\hat{b}_{4\sigma}^\dagger \hat{b}_{3\sigma}^\dagger \hat{b}_{2\sigma} \hat{a}_{1\sigma} + \hat{b}_{4\sigma}^\dagger \hat{a}_{3\sigma}^\dagger \hat{b}_{2\sigma} \hat{a}_{1\sigma}],$$

donde $\sigma = \pm$ representa la componente Z del momento angular, \hat{a}_σ y \hat{b}_σ son los operadores de aniquilación de los fotones de la cavidad y los excitones del pozo cuántico respectivamente y H.c. representa la conjugada hermítica (*Hermitian conjugate*) de los términos anteriores. \hat{H}_1 representa las interacciones atractivas entre dos excitones con espines opuestos ($W < 0$). \hat{H}_2 representa la interacción repulsiva entre dos excitones con el mismo espín. \hat{H}_3 representa la reducción del acoplamiento entre los excitones y los fotones. En presencia de una población de excitones $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$, la intensidad del acoplamiento entre los excitones y los fotones g se reduce a $g(1 - \nu \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle)$, donde $\nu > 0$.

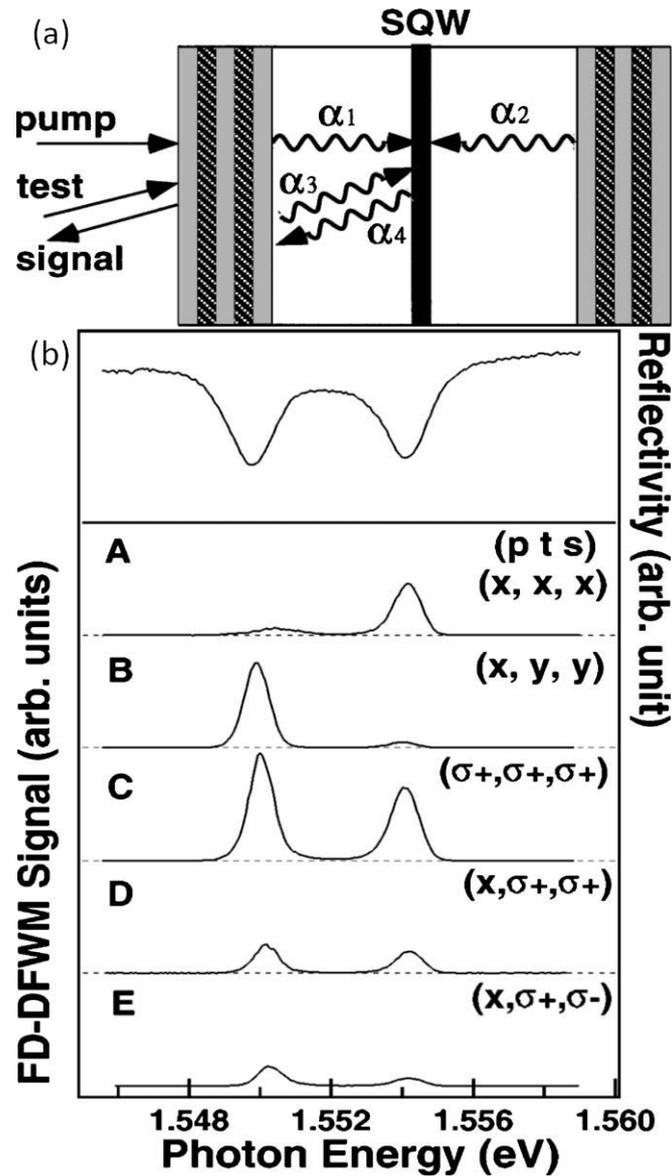


Figura 20: Experimento de mezclado de cuatro ondas. (a) Esquema del experimento. Dos campos iniciales (α_1 y α_2) proporcionados por el rayo de bombeo interfieren elásticamente para dar lugar a dos campos salientes (α_3 y α_4) que conservan la energía y momento. (b) Espectros del FD-DFWM a $\Delta = 0$ para varias configuraciones de polarización.[65]

La figura 20(b) muestra el espectro del DFWM con $\Delta = 0$ para distintas configuraciones de la polarización de los rayos de bombeo(p), testeo(t) y señal(s). Cuando los tres rayos tienen la misma polarización lineal (configuración (A)), se observa una fuerte señal en la resonancia del UP (polaritón superior, *upper polariton*), mientras que se espera que las resonancias de UP y LP sean proporcionales a $|W/4 + (R/2 - g\nu)|^2$ y $|W/4 + (R/2 + g\nu)|^2$ respectivamente. Cuando

el rayo de bombeo tiene una polarización ortogonal a la de los otros dos (como en (B)), aparece una señal fuerte en la resonancia del LP, y se espera que las señales en las resonancias de UP y LP sean proporcionales a $|W/4 - (R/2 - g\nu)|^2$ y $|W/4 - (R/2 + g\nu)|^2$. En (C) y (D) los rayos de testeo y señal tienen la misma helicidad, por lo que sólo hay contribuciones de \hat{H}_2 y \hat{H}_3 . En (E) los dos rayos tienen helicidades opuestas de manera que solo hay que tener en cuenta H_1 . Los datos son consistentes con una teoría microscópica para los coeficientes de la interacción no lineal basada en un Hamiltoniano de electrones y huecos[66].

Para un gas de LPs no polarizado en spin, podemos simplificar aún más el coeficiente de scattering[70]:

$$M \simeq 2 \sum_{k,k'} V_{\vec{k}-\vec{k}'} \varphi_k \varphi_{k'} (\varphi_k^2 - \varphi_{k'} \varphi_{k'}) \simeq 6E_0 \frac{a_B^2}{S}, \quad (94)$$

donde φ_k y E_0 son la función de onda 1s apantallada del excitón y la energía de enlace correspondiente respectivamente. $V_k = 2\pi/\epsilon_0 S k$ es el potencial de Coulomb en 2D y ϵ_0 es la función dieléctrica.

La probabilidad de transición de LPs correspondiente es

$$W_{k,k';k_1,k_2}^{LP-LP} = \frac{\pi}{\hbar} \frac{S^2}{(2\pi)^4} \frac{\Delta E^2 |M|^2 X_k^2 X_{k'}^2 X_{k_1}^2 X_{k_2}^2}{[\partial E(k')/\partial k'^2][\partial E(k_1)/\partial k_1^2][\partial E(k_2)/\partial k_2^2]} R(k, k', k_1, k_2). \quad (95)$$

Se adopta una red de energía uniforme con un espaciado ΔE . Los términos proporcionales a la densidad de estados $\partial E(k')/\partial k'^2$ vienen de cambiar la integración sobre momentos a una suma sobre energías. El término R es dado por

$$R(k, k', k_1, k_2) = \int \frac{dq^2}{\sqrt{[(k+k_1)^2 - q^2][q^2 - (k-k_1)^2][(k'+k_2)^2 - q^2][q^2 - (k'-k_2)^2]}}, \quad (96)$$

donde la integración es en el dominio en el que los cuatro términos bajo la raíz son no negativos. Se asegura la conservación de la energía tomando $E_{k_2} = E_k + E_{k'} - E_{k_1}$ y sumando en $E_{k'}$ y E_{k_1} .

Con estas tasas de transición podemos formular las ecuaciones semiclásicas de Boltzmann para la distribución de polaritones. Este procedimiento ha sido usado en el pasado para describir la cinética de condensación de los excitones[67][68][69] y para describir la relajación de los polaritones de cavidad[70]-[75]; con los trabajos de Cao y Doan mostrando la importancia de un tamaño finito para la cinética de condensación en 2D. Las ecuaciones de Boltzmann para la población de los estados excitados $n_{\vec{k}}(t)$ y la población del estado fundamental $n_0(t)$ son

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\vec{k}} = P_{\vec{k}}(t) - \frac{n_{\vec{k}}}{\tau_{\vec{k}}} + \left. \frac{\partial}{\partial t} n_{\vec{k}} \right|_{LP-LP} + \left. \frac{\partial}{\partial t} n_{\vec{k}} \right|_{LP-ph}; \quad (97)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_0 = -\frac{n_0}{\tau_0} + \left. \frac{\partial}{\partial t} n_0 \right|_{LP-LP} + \left. \frac{\partial}{\partial t} n_0 \right|_{LP-ph}. \quad (98)$$

Nótese que se requiere una ecuación distinta para la población del estado fundamental n_0 por el hecho de que hay una separación entre las energías del estado fundamental y el primer estado excitado por el tamaño finito del sistema. $P_{\vec{k}}$ es la tasa de bombeo dependiente del tiempo y $\tau_{\vec{k}}$ es el tiempo de vida de LPs introducido por Bloch y Marzin[71]. Para pequeños momentos transversos $0 < k < k_{cav} = 8\mu m^{-1}$ se usa $1/\tau_k = C_k^2/\tau_c$ siendo C_k el coeficiente de Hopfield. El tiempo de vida de la cavidad τ_c es de unos picosegundos en la mayoría de los casos. En el rango $k_{cav} < k < k_{rad} = n_{cav}E_{cav}/\hbar c$, usamos el tiempo de vida de excitón τ_x , es decir, $1/\tau_k = 1/\tau_x$, y finalmente para altos momentos $k > k_{rad}$ el tiempo de vida del excitón es infinito, es decir, $1/\tau_k = 0$.

La tasa de scattering LP-fonón es

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k \Big|_{LP-ph} = - \sum_{\vec{k}'} [W_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'}^{LP-ph} n_{\vec{k}} (1 + n_{\vec{k}'}) - W_{\vec{k}' \rightarrow \vec{k}}^{LP-ph} (1 + n_{\vec{k}}) n_{\vec{k}'}]. \quad (99)$$

El scattering entre LPs y fonones proporciona un mecanismo de enfriamiento disipativo para el gas de LPs. Puede reducir el exceso de energía introducido en el LP.

La tasa de scattering entre LPs es

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k \Big|_{LP-LP} = - \sum_{\vec{k}', \vec{k}_1, \vec{k}_2} W_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}_1, \vec{k}_2}^{LP-LP} [n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'} (1 + n_{\vec{k}_1}) (1 + n_{\vec{k}_2}) - n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} (1 + n_{\vec{k}}) (1 + n_{\vec{k}'})], \quad (100)$$

donde $\vec{k}_1 = \vec{k} + \vec{q}$ y $\vec{k}_2 = \vec{k}' - \vec{q}$. Este scattering es relativamente rápido, termalizando el gas de LPs en picosegundos; pero no puede reducir la energía total del gas de LPs; por tanto ambos procesos de scattering tienen sus roles en la cinética de condensación de LPs.

Para estudiar la condensación espontánea, mantenemos la energía de bombeo lo suficientemente alta para evitar la posibilidad de que aumente la diferencia entre las energías de dos LP tras el proceso de scattering[76]. El pulso de bombeo es de la forma

$$P_k(t) = P_k \begin{cases} e^{-2ln[(2t/t_p)^2]} \\ \tanh(t/t_0) \end{cases} \quad (101)$$

donde la primera expresión se corresponde a excitaciones de pulso y la segunda a excitaciones estacionarias; P_k es

$$P_k = P_0 e^{-\hbar^2(k-k_p)^2/2m_{exc}\Delta E}, \quad (102)$$

t_p y t_0 son tiempos característicos de las excitaciones y P_0 la potencia de bombeo para número de onda nulo.

En el caso de pozos cuánticos y microcavidades de GaAs los parámetros usados son $E_0^x = 1,515\text{eV}$, $m_e = 0,067m_0$, $m_h = 0,45m_0$, $a_B = 10\text{nm}$, $g_0 = 5\text{meV}$, $D_e = -8,6\text{eV}$, $D_h = 5,7\text{eV}$, $u = 4,81 \cdot 10^5\text{ cm/s}$ y $\rho = 5,3 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ [60][71][74][77].

Para estos sistemas, los problemas en la relajación de energía presentes en otros sistemas desaparecen para valores de detuning positivos, y aparece degeneración cuántica en el estado de LPs con $k_{\parallel} = 0$ para densidades de excitaciones superiores a un valor P_{th} [42].

4.3. Propiedades de coherencia

En un condensado de Bose-Einstein, una cantidad macroscópica de partículas ocupan un único estado cuántico y manifiestan correlaciones cuánticas en la escala macroscópica. La función de onda del condensado cumple el papel de parámetro de orden al tener su matriz de densidad elementos fuera de la diagonal no nulos[78][79][80], que se pueden medir a través de las funciones de coherencia de primer orden. Las funciones de coherencia de segundo orden y de ordenes superiores caracterizan el estado cuántico y lo distinguen de una mezcla térmica[81][82]. En este apartado se estudiarán las funciones de coherencia de primer y segundo orden de condensados de LPs y las propiedades derivadas del estado cuántico macroscópico.

Empezaremos con la función de coherencia temporal de segundo orden, que en el pasado ha sido usada para estudiar las propiedades de la luz láser. En el caso de polaritones fue medido por primera vez por Deng *et al.*[42] para una microcavidad de GaAs con un tiempo de vida de los fotones de 2 ps. Más recientemente, se han hecho medidas en una microcavidad de GaAs con un tiempo de vida para los LPs de 80 ps por Roumpos *et al.*[83]; y en una microcavidad de CdTe por Kasprzak *et al.*[84]. Los resultados de estas medidas fueron explicados con un modelo basado en una ecuación de Boltzmann y una ecuación maestra por Laussy *et al.*[85][86], que fue luego extendido para llegar a un mejor acuerdo con los experimentos por Doan *et al.*[87]

La ecuación de segundo orden de coherencia temporal $g^{(2)}(\tau)$ se define como sigue[81]:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t) \rangle^2}, \quad (103)$$

donde $\hat{E}^{(-)}(t)$ y $\hat{E}^{(+)}(t)$ son las partes de frecuencia positiva y negativa del operador de campo eléctrico en tiempo t , respectivamente. $g^{(2)}(\tau)$ mide la correlación de intensidad del campo entre tiempo t y tiempo $t + \tau$. Si $\hat{E}(t)$ y $\hat{E}(t + \tau)$ son estacionarios,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t) \rangle^2} = 1. \quad (104)$$

Para un estado con un único modo, la correlación máxima se obtiene en $\tau = 0$; donde se da que:

$$g^{(2)}(0) = 2 \text{ en un estado térmico,}$$

$$g^{(2)}(0) = 1 - 1/n \text{ en el estado } |n\rangle,$$

$g^{(2)}(0) = 1$ para estados coherentes.

Por tanto, las funciones de coherencia de segundo orden normalizadas son independientes de pérdidas lineales entre la fuente y el detector. Es más, aunque luz termal especialmente filtrada puede ser llevada a interferencia tras un interferómetro de Michelson, el valor de $g^{(2)}(0)$ permanece sin cambios. Estas propiedades hacen de $g^{(2)}(0)$ un buen indicador de la naturaleza cuántico-estadística de un estado. Hay que tener cuidado, cuando τ es mucho mayor que el tiempo de coherencia τ_c del campo, $g^{(2)}(\tau)$ decae a 1, haciendo difícil la medida de $g^{(2)}(0)$ para resoluciones en tiempo mucho mayores que τ_c .

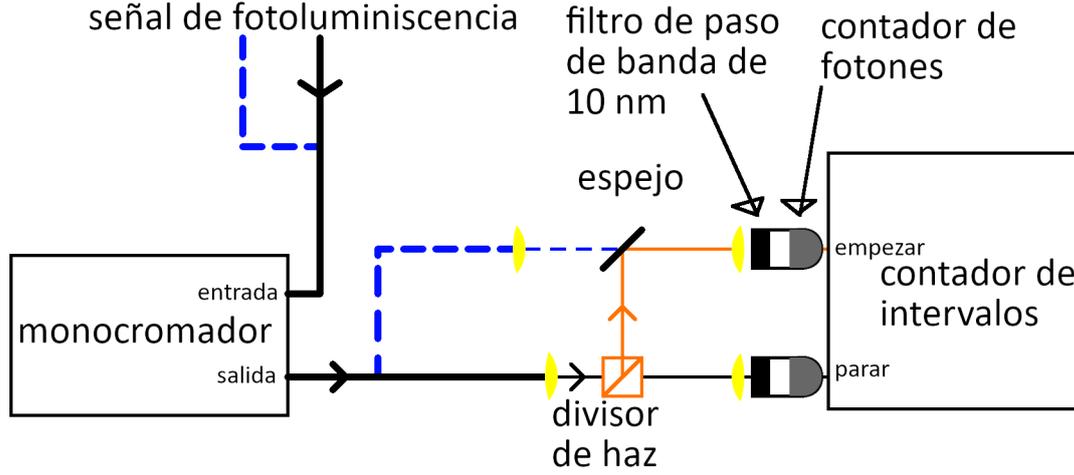


Figura 21: Medida de Hanbury Brown-Twiss usando contadores de fotones. Se muestran los esquemas para medición de autocorrelación (camino sólido) y medición de correlación de dos señales (camino a rayas).

Las primeras medidas de la función de coherencia temporal de segundo orden de un condensado se hicieron por Deng *et al.*[42]. Se usó un interferómetro de Hanbury Brown-Twiss[88], que consta primariamente de un divisor de haz y dos contadores de fotones (ver figura 21). Como en este experimento la dinámica de los polaritones es mucho más rápida que la resolución temporal de los contadores, se mide el área bajo cada pulso, lo que nos da el numerador de la siguiente ecuación:

$$\overline{g^{(2)}(j)} = \frac{\langle n_1(i)n_2(i+j) \rangle_i}{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle}, \quad (105)$$

donde $n_1(i)$ y $n_2(i+j)$ son el número de fotones detectados por los dos contadores de fotones en pulsos i e $i+j$, respectivamente. En el límite de pocos fotones detectados ($n < 0,01$ por pulso en el experimento), $\overline{g^{(2)}(j)}$ aproxima la media temporal de $g^{(2)}(\tau)$ sobre cada pulso. Para $j \neq 0$, las cuentas de coincidencia son tomadas de pulsos adyacentes sin correlación y por tanto $\overline{g^{(2)}(j)} \equiv 1$ para $j \neq 0$. Asumiendo que todos los pulsos tienen las mismas propiedades estadísticas, el área de estos picos en $j \neq 0$ nos da el denominador en la ecuación (105).

El pulso de emisión del estado fundamental de los LP se filtra primero con un monocromador con resolución $\Delta\lambda = 0,1$ nm, resultando en un pulso con un tiempo de coherencia de $\Delta\tau_c = \sqrt{8 \ln 2} \frac{\lambda}{c \Delta\lambda} \sim 4$ ps. Bajo el umbral, la anchura a la mitad del máximo del pulso es aproximadamente 350 ps, mucho mayor que el tiempo de coherencia del pulso (~ 4 ps). Como el valor

medido $\overline{g^{(2)}(0)}$ es una integración de $g^{(2)}(\tau)$ sobre el pulso y $g^{(2)}(\tau) \approx 1$ durante la mayoría del pulso, tenemos que $\overline{g^{(2)}(0)}$ también es cercano a 1 aunque el sistema esté en un estado térmico. Esto es debido a un problema común en los experimentos de Hamnbury Brown-Twiss, que es una falta de resolución en el tiempo.

Al alcanzarse el umbral, la anchura del pulso se acorta a ~ 8 ps, haciéndose comparable con $\Delta\tau_c$. Por tanto $\overline{g^{(2)}(0)}$ se convierte en una buena aproximación de $g^{(2)}(0)$. Aquí se observa amontonamiento de los fotones emitidos, con un valor máximo de $\overline{g^{(2)}(0)}$ de 1,77 en $P/P_{th} \sim 1,1$ (figura(22)). Este efecto, que es oscurecido por el efecto de integración temporal por debajo del umbral, muestra la estimulación del estado final de los bosones. Muy por encima del umbral, la anchura sigue decreciendo, por lo que $\overline{g^{(2)}(0)}$ sigue siendo una buena aproximación de $g^{(2)}(0)$. Como el valor medido en esta región decrece, se observa la formación de coherencia de segundo orden en el sistema, es decir, el gas de polaritones adquiere coherencia macroscópica.

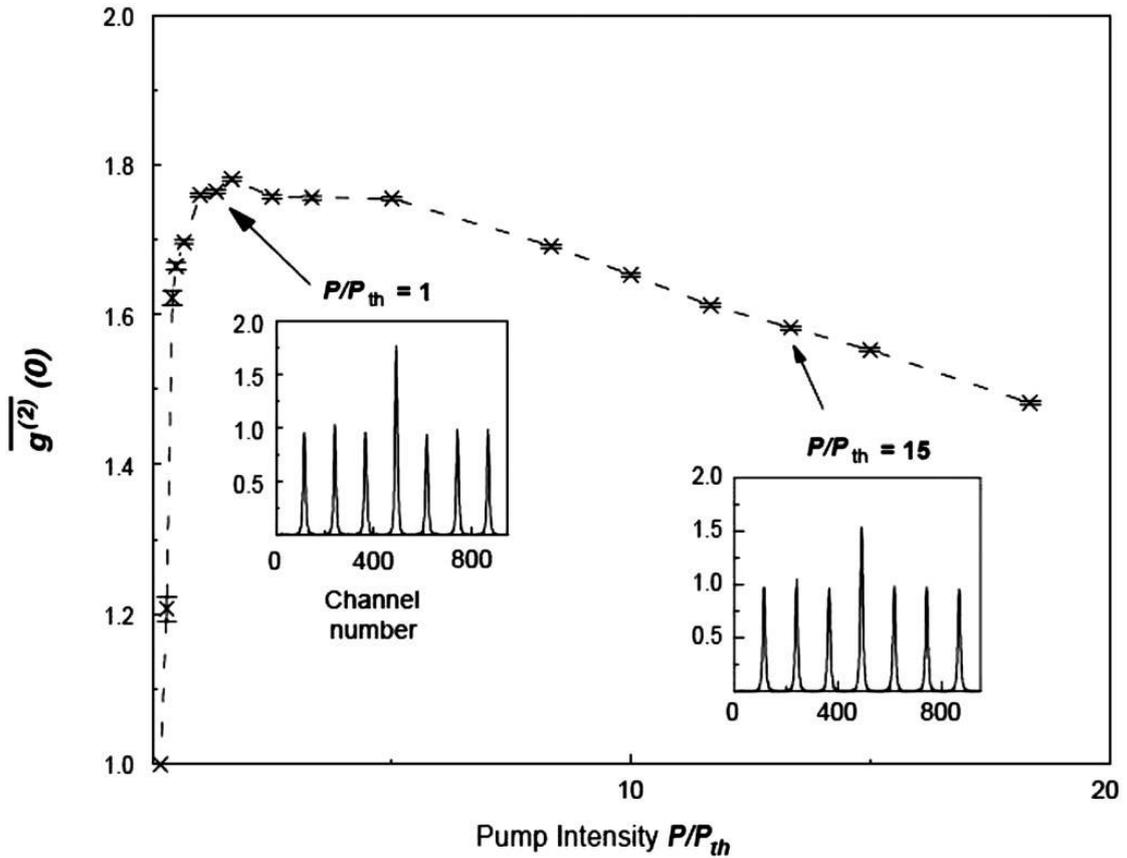


Figura 22: Función de coherencia de segundo orden $\overline{g^{(2)}(0)}$ frente a la intensidad de bombeo P/P_{th} . Los cuadros interiores representan los pulsos medidos a las intensidades de bombeo mostradas, y el experimento se hizo en un sistema basado en GaAs[42].

El valor de $\overline{g^{(2)}(0)}$ decrece muy lentamente al aumentar la densidad, lo cual indica una pequeña fracción de condensado que aumenta gradualmente al aumentar la densidad total de los LPs. Esto es típico en sistemas bidimensionales con interacciones relativamente intensas, donde hay una gran reducción cuántica del condensado. Varios estudios teóricos y numéricos han predicho el mismo comportamiento cualitativo[89][90].

Más recientemente, una medida similar fue llevada a cabo en una microcavidad basada en CdTe[91]. En este experimento, las emisiones del estado fundamental de los LPs, sin filtrar por energía, tienen un tiempo de coherencia de ~ 2 ps por debajo y alrededor del umbral. Fueron

observados valores de $\overline{g^{(2)}}(0)$ cercanos a 1 para densidades de excitaciones desde debajo del umbral P_{th} hasta $\sim P_{th}$. A mayores densidades de excitaciones, $\overline{g^2}(0)$ aumenta significativamente hasta valores mayores que 2 para $P \sim 10P_{th}$.

En el experimento anterior también se midió $g^{(2)}(0)$ bajo excitación de onda quasicontinua (con una duración del pulso de excitación de $\sim 1 \mu s$). En este caso, la resolución temporal está limitada por la de los contadores de fotones, que es de 120 ps. Se midió un ligero amontonamiento con $g_m^{(2)}(0) \sim 1,03$ por debajo y alrededor de P_{th} . Tras corregir por el tiempo de coherencia y resolución del contador de fotones, esta medida se corresponde con un valor real $g^{(2)}(0) \approx 2,8 \pm 1$. No se observa amontonamiento por encima del nivel de ruido para $1,5P_{th}$. lo que muestra un decrecimiento de $g^{(2)}(0)$. Se vuelve a medir $g_m^{(2)}(0) > 1$ para $P > 2,3P_{th}$, de manera consistente con la medida a pulsos.

Usando una ecuación cinética estocástica de Boltzmann y una ecuación maestra, estudiamos la probabilidad de encontrar n LPs en el estado fundamental[87]. La función estadístico-cuántica de correlación $g^{(2)}$ es definida por las correlaciones de los operadores del condensado[81]

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle b_0^\dagger(t)b_0^\dagger(t+\tau)b_0(t+\tau)b_0(t) \rangle}{\langle b_0^\dagger(t+\tau)b_0(t+\tau) \rangle \langle b_0^\dagger(t)b_0(t) \rangle}, \quad (106)$$

donde b_0^\dagger es el operador de creación de LPs.

En la representación numérica para espera cero:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle n_0(n_0-1) \rangle}{\langle n_0 \rangle^2}. \quad (107)$$

La densidad media del condensado $\langle n_0(t) \rangle = \langle b_0^\dagger(t)b_0(t) \rangle$ se determina por una ecuación de Boltzmann que gobierna la cinética de *scattering* desde y hacia el estado fundamental,

$$\frac{\partial \langle n_0 \rangle}{\partial t} = \langle R_{in}(t)[1 + n_0(t)] \rangle - \langle R_{out}(t)n_0(t) \rangle. \quad (108)$$

La tasa hacia el estado es dada por los procesos de *scattering* desde los estados excitados al fundamental mediante scaterings LP-LP y LP-fonón:

$$R_{in} = \sum_{k,k'} w_{0,k;k',k-k'}^{LP-LP} (1 + n_k) n_{k'} n_{k-k'} + \sum_{q,\sigma=\pm 1} w_{0,p\sigma}^{LP-ph} n_q N_{q,-\sigma}. \quad (109)$$

Igualmente, la tasa de salida es dada por:

$$R_{out} = \sum_{k,k'} w_{0,k;k',k-k'}^{LP-LP} n_k (1 + n_{k'}) (1 + n_{k-k'}) + \sum_{q,\sigma=\pm 1} w_{0,p\sigma}^{LP-ph} (1 + n_q) N_{q,-\sigma}. \quad (110)$$

Formalmente, hay que considerar las tasas de intercambio debidas a los procesos de *scattering* $\vec{k}, 0 \rightarrow 0, \vec{k}$; pero estos procesos no dan lugar a cambios en las poblaciones y no deberían incluirse en la cinemática. La ecuación de tasas medias puede ser escrita de esta manera:

$$\frac{\partial \langle n_0 \rangle}{\partial t} = \langle R_{in}(t) \rangle \langle [1 + n_0(t)] \rangle - \langle R_{out}(t) \rangle \langle n_0(t) \rangle. \quad (111)$$

Para calcular los segundos momentos del condensado necesitamos una extensión estocástica de la ecuación cinética del condensado. Hay varias maneras de formular dicha extensión:

- Se puede suplementar la ecuación de Boltzmann para n_0 con fluctuaciones de Langevin con carácter de ruido de disparo[92][93][94]. Los segundos momentos de la densidad son así determinados por los segundos momentos de estas fluctuaciones. Como se sabe a través de teoría láser, las ecuaciones de Langevin pueden ser resueltas aproximadamente por linealización por encima y por debajo del umbral de condensación, pero no hay manera simple de hallar soluciones en toda la banda de densidades.

- También se puede usar la ecuación asociada de Fokker-Plank para calcular la probabilidad de densidades concretas. En equilibrio estacionario, se consigue una solución analítica en términos de una exponencial de un potencial generalizado de Ginzburg-Landau[95]. El cambio de este potencial, que tiene un mínimo en $n = 0$ bajo el umbral y un mínimo en $n \neq 0$ sobre el umbral describe las probabilidades para toda densidad.

En estos dos métodos la densidad se considera continua, aproximación apropiada cuando $n \gg 1$. Como en un condensado de Bose-Einstein la densidad del condensado varía desde valores pequeños de $n \ll 1$ por debajo del umbral a altos valores $n \gg 1$ por encima del umbral esta aproximación no está bien justificada por debajo de y en el umbral donde $n = O(1)$.

- Una tercera posibilidad (y la seguida en este documento) es usar la ecuación maestra de la probabilidad de encontrar n partículas en un estado. Esta ecuación tiene en cuenta la naturaleza discreta del número de partículas condensadas[96] pero ignora la fase del estado condensado.

- Una última posibilidad es tratar la cinética de la función de segundo orden $\langle b_0^\dagger(t) b_0^\dagger(t) b_0(t) b_0(t) \rangle$ [89][90].

Formularemos ahora la ecuación maestra para la probabilidad $W_n(t)$ de hallar n partículas en el condensado a tiempo t . Siendo la tasa de saturación $G_n = R_n^{in}(n+1)$ y la tasa de decaimiento $D_n = R_n^{out}$, tenemos la ecuación maestra

$$\frac{dW_n}{dt} = -(G_n + D_n)W_n + D_{n+1}W_{n+1} + G_{n-1}W_{n-1} = \sum_{m=n-1}^{m=n+1} M_{n,m}W_m. \quad (112)$$

Aquí $M_{n,m}$ es una matriz tridiagonal[95]. Sus elementos son

$$M_{n,n} = -(G_n + D_n), \quad M_{n,n+1} = D_{n+1}, \quad M_{n,n-1} = G_{n-1}. \quad (113)$$

La ecuación de tasas no proporciona toda la información necesaria para construir la ecuación maestra, dado que las tasas de transición solo son conocidas para las medias $\langle n \rangle$ y no para n [96]. Una forma simple para incluir esta corrección[85] es expandir las distribuciones de los estados excitados linealmente alrededor de $\langle n \rangle$ tal que $n_k(n) = \langle n_k \rangle + (\partial n_k / \partial n)(n - \langle n \rangle)$ y estimar

$$\left. \frac{\partial \langle n_k \rangle(n)}{\partial n} \right|_{\langle n \rangle} = \frac{\langle n_k \rangle}{\langle n \rangle - N}, \quad (114)$$

donde N es el número total de polaritones. Esto da el resultado

$$\langle n_k \rangle(n) = \langle n_k \rangle \left(1 + \frac{n - \langle n \rangle}{\langle n \rangle - N} \right). \quad (115)$$

Estos términos de corrección se desvanecen aproximadamente si uno usa la ecuación maestra y $\langle n \rangle = \sum_n n W_n$. Como $\langle n_k \rangle \ll 1$ para todo estado excitado, el *scattering* estimulado hacia esos estados es ignorable y $1 + \langle n_k \rangle \sim \langle n \rangle$. Por tanto las correcciones son como siguen: R_{in}^{LP-ph} tiene un factor de corrección $F(n) = (n - \langle n \rangle) / (\langle n \rangle - N)$, R_{in}^{LP-LP} tiene un factor de corrección $2F(n)$, y R_{out}^{LP-LP} tiene un factor de corrección $F(n)$.

Bajo bombeo estacionario, la solución estacionaria se alcanza cuando las tasas desde y hacia el estado fundamental no cambian con el tiempo. Por tanto, se da que

$$D_n W_n = G_{n-1} W_{n-1}, \quad (116)$$

lo que nos da la solución

$$W_n = \frac{G_{n-1}}{D_n} W_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{G_k}{D_{k+1}} W_0. \quad (117)$$

W_0 se obtiene a partir de la normalización $\sum_n W_n = 1$.

En general, las soluciones estacionarias se obtienen a partir de

$$\sum_{m=n-1}^{m=n+1} M_{n,m} W_m = 0. \quad (118)$$

Siguiendo a Risken (1984)[95], introducimos la razón $S_n = W_{n+1}/W_n$ y reescribimos la ecuación anterior:

$$M_{n,n} + M_{n,n+1}S_n + \frac{M_{n,n-1}}{S_{n-1}} = 0. \quad (119)$$

Cambiando n por $n + 1$, se obtiene

$$S_n = -\frac{M_{n+1,n}}{M_{n+1,n+1} + M_{n+1,n+2}S_{n+1}}. \quad (120)$$

Esta ecuación puede usarse para iteración numérica. Por iteración analítica uno obtiene fracciones para la razón S_n y W_n está dado entonces por

$$W_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} S_k W_0. \quad (121)$$

El valor de W_0 se sigue de la condición de normalización. Se puede empezar la normalización en un valor $N \gg \langle n \rangle$ en que $W_{N+1} = W_{N+2} = \dots = 0$; para que $S_N = 0$. Este procedimiento se puede generalizar para la solución de la ecuación maestra dependiente del tiempo[95].

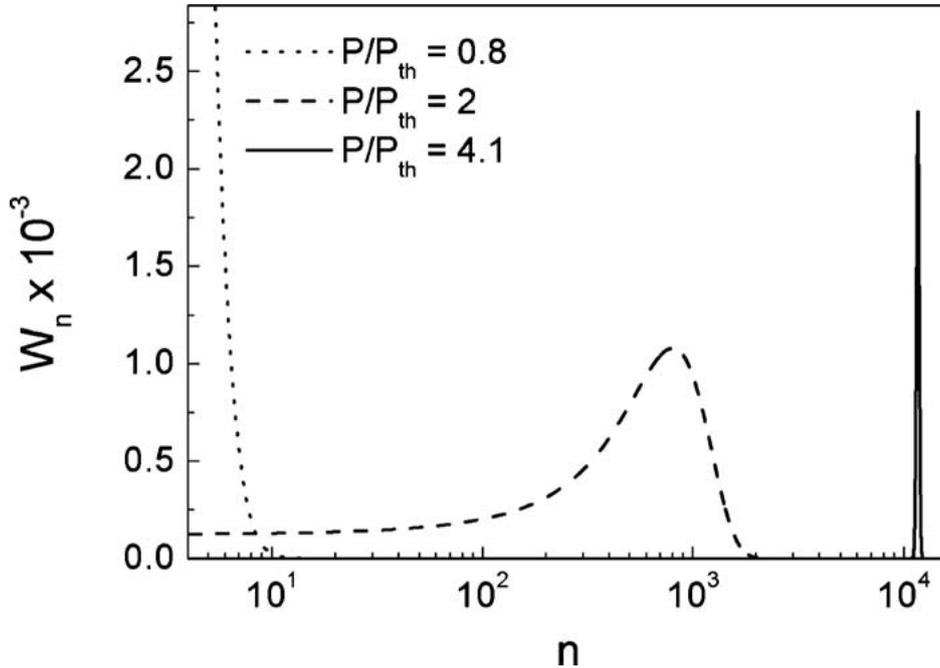


Figura 23: Funciones de distribución W_n calculadas para varias potencias de bombeo normalizadas P/P_{th} [87].

En la figura 23 se muestran las distribuciones de probabilidad estacionarias obtenidas por iteración para tres intensidades de bombeo. Por debajo del umbral, la distribución tiene un máximo en $n = 0$ y decrece monótonamente. Ligeramente por encima del umbral, la distribución tiene un máximo en $\langle n \rangle \gg 1$ pero sigue siendo bastante ancha. Muy por encima del umbral para $P/P_{th} = 4, 1$, la distribución tiene un pico estrecho en un valor de $\langle n \rangle \simeq 10^4$.

Una vez se han calculado todas las W_n , se puede obtener $g^{(2)}(0) = \langle n(n-1) \rangle / \langle n \rangle^2$. Se ve en la figura 24 como el límite térmico con $g^{(2)}(0) = 2$ se conecta de manera continua con $g^{(2)}(0) = 1$. Ello ocurre no en la región del umbral sino alrededor de la región $P \simeq 2P_{th}$. Esto es debido a la aproximación semiclásica, que asume una matriz de densidades diagonal.

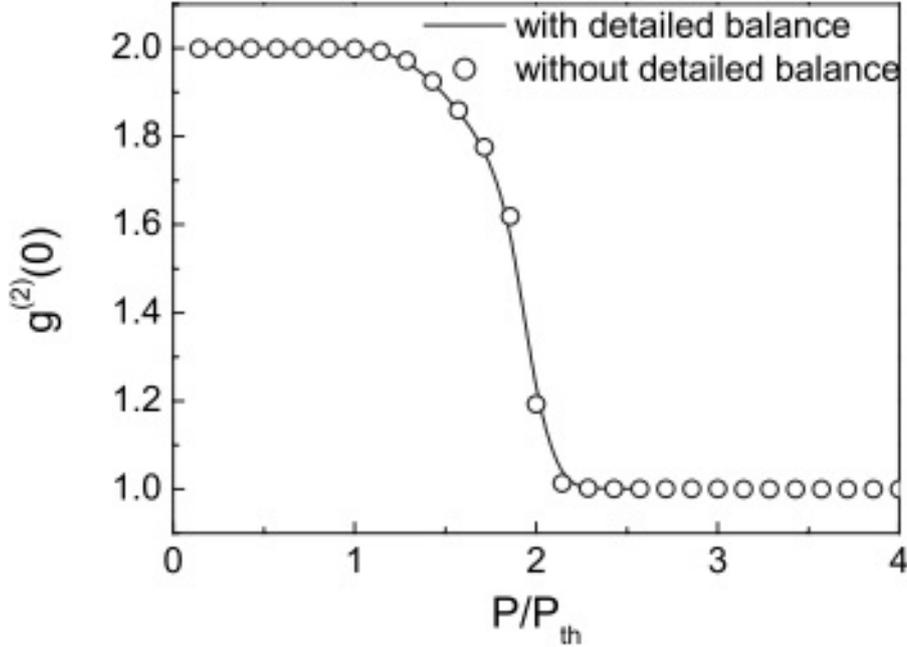


Figura 24: Función de coherencia de segundo orden calculada $g^{(2)}(0)$ frente a potencia de bombeo normalizada P/P_{th} . La línea se obtiene mediante iteración y los círculos mediante la relación de balance detallada[87].

El rápido decaimiento de las correlaciones no se observa en los experimentos, como se muestra en la figura 22[42]. Esto se puede explicar, cualitativamente, teniendo en cuenta que $g^{(2)}(\tau)$ varía como $g^{(2)} = 2e^{(R_{in}-R_{out})\tau}$. Una media sobre los tiempos de espera nos da el resultado $\overline{g^{(2)}}(0) \propto g^{(2)}(0)/(R_{out} - R_{in})$. Cuando la intensidad de bombeo decrece por debajo del umbral, $R_{out} - R_{in}$ aumenta; por tanto, $\overline{g^{(2)}}(0)$ decrece rápidamente por debajo del umbral, como se observa en el experimento con las cavidades de GaAs con tiempo de fluctuación de 2 ps. En experimentos más recientes con mejores microcavidades de GaAs[83], el mínimo de $g^{(2)}$ como función de la intensidad de bombeo parece ocurrir en el umbral, y el rango de correlaciones por encima del límite de Poisson se extiende a un rango mucho más amplio de bombeos. Se han realizado observaciones similares en microcavidades de CdTe[84].

La coherencia temporal de primer orden está caracterizada por la anchura de las líneas de emisión de LPs. Es interesante ver que la anchura sobre el umbral no disminuye según la fórmula de Shallow-Townes sino que vuelve a crecer [97] con el incremento de la densidad de los LPs en el estado fundamental. Este efecto se puede calcular usando las ecuaciones de Langevin para el modelo de Bogoliubov de bosones débilmente interactuantes. La población de LPs en el estado fundamental da lugar a un comportamiento parecido al efecto Kerr que causa un incremento de la anchura de onda[98].

Ahora estudiaremos la coherencia espacial de primer orden, también conocida como orden a largo rango fuera de la diagonal (off-diagonal long-range order, ODLRO); que fue estudiado

por Penrose y Onsager[78], Beliaev[79] y por Yang[80].

El operador de campo de Bose $\Psi(\mathbf{r})$ de un gas ideal se define como

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_i \hat{a}_i e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}} = \frac{a_0 e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{i \neq 0} \hat{a}_i e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}} = \Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_T(\mathbf{r}), \quad (122)$$

donde \mathbf{r} es la posición y \mathbf{p}_i es el momento del estado i . $\Psi_T(\mathbf{r})$ consiste de términos de los estados excitados. En el límite termodinámico $V \rightarrow \infty$, $\Psi_0(\mathbf{r})$ se desvanece para $r > 0$. $\Psi_0(\mathbf{r})$ es el término del estado fundamental. En una fase condensada, a_0 se puede aproximar por una amplitud compleja y $\Psi_0(\mathbf{r})$ tiene una amplitud finita y constante dada por la raíz cuadrada de la fracción de condensado. Por tanto $\Psi(\mathbf{r})$ sirve como el parámetro de orden del condensado.

El término fuera de la diagonal de la primera matriz de densidad reducida de $\Psi(\mathbf{r})$ es

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_0(\mathbf{r}) \rangle + \langle \Psi_T^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_T(\mathbf{r}) \rangle = \frac{N_0}{V} e^{i\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + \frac{1}{V} \sum_{i \neq 0} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle e^{i\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (123)$$

Esta función describe la coherencia de primer orden entre los campos en las posiciones \mathbf{r} y \mathbf{r}' . De nuevo se separa en términos correspondientes al estado fundamental y a los estados excitados respectivamente. Cuando $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, la fase $\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ de los términos correspondientes a estados excitados se vuelve aleatoria, y el sumatorio de estos términos se desvanece cuando $V \rightarrow \infty$. Sin embargo, el término del estado fundamental tiene una amplitud finita y constante con $0 < n_0 \leq n$ en la fase condensada independientemente de la separación $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Por tanto $|\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')| = n_0 = |\Psi_0|^2$ es finita y uniforme incluso sobre distancias macroscópicas. Es decir, ρ_1 tiene un ODLRO; propiedad esencial de un condensado de Bose-Einstein.

En dos dimensiones, las fluctuaciones térmicas de alta longitud de onda de la fase destruyen un orden a grandes distancias en el límite termodinámico [26][27]; pero un cuasi-condensado de Bose-Einstein se puede establecer cuando hay coherencia a través del sistema interactuando con el gas de Bose [99].

La coherencia espacial de los LPs fue estudiada por primera vez por Richard *et al.* [44]. En este experimento se usó una microcavidad basada en CdTe. Por encima de una densidad de excitaciones umbral P_{th} , se observó comportamiento láser de LPs en estados de *bottleneck* con número de onda en el plano $k_{\parallel} = k_{bot}$ y energía $E(k_{bot})$. La transformada de Fourier de la distribución de LPs es uniforme para $P < P_{th}$. Para $P > P_{th}$ aparecen motas, que se relacionan con un incremento en la coherencia espacial entre los emisores de LPs. Al mismo tiempo, la anchura de la línea de emisión a $E(k_{bot})$ se ensancha en k_{\parallel} , y la interferencia en k_{\parallel} fue observada por un interferómetro de Billet. Los resultados de dicha medida se muestran en la figura 25 e indican un incremento en la coherencia espacial.

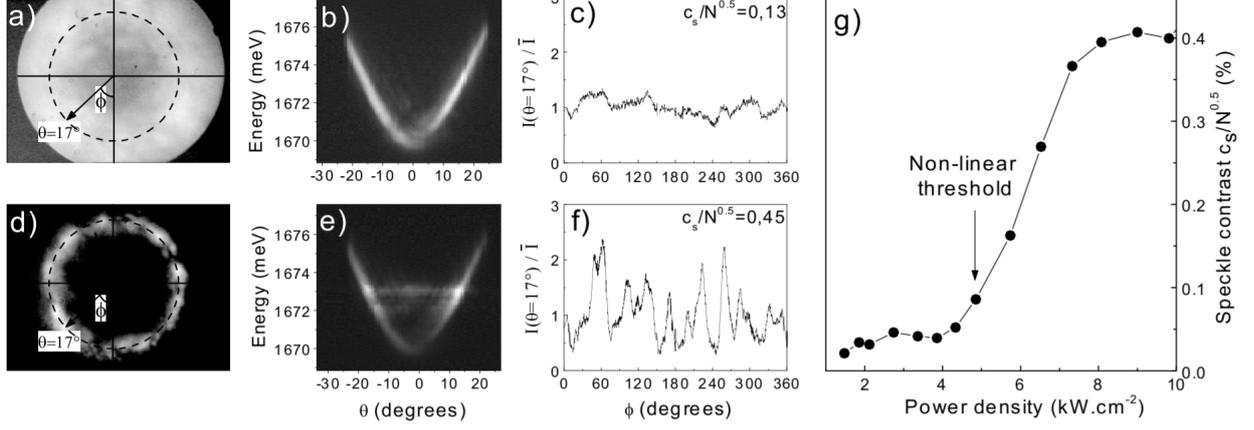


Figura 25: Excitación de campo lejano para dos intensidades de excitación: las dos filas se corresponden con estados por debajo y por encima del umbral de excitación, respectivamente. (a) y (d) muestran la emisión de campo lejano en el plano de Fourier (θ, ϕ) . La circunferencia a puntos muestra el cono de ángulo $\theta = 17$ donde se manifiesta la emisión estimulada. (b) y (e) muestran la emisión en el plano (θ, E) con una escala de grises logarítmica. (c) y (f) muestran el perfil de intensidad frente al ángulo de azimut ϕ para $\theta = 17$. (g) muestra la evolución del grado de coherencia espacial c_s frente a la intensidad de excitación. El umbral para el incremento de coherencia es el mismo que el de emisión estimulada[44].

Más tarde Kasprzak *et al.* [45] midieron directamente la coherencia espacial de un condensado fragmentado. Los LPs se condensaron en el estado $k_{\parallel} \sim 0$ pero en múltiples áreas de $\sim 4 \mu\text{m}$ de diámetro en el punto de excitación de $20 - 30 \mu\text{m}$ de diámetro. Se midió la interferencia entre la fotoluminiscencia de los condensados con un interferómetro de Michelson. Esto da la función de coherencia de primer orden

$$g^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_0) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle}{\sqrt{\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_0) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle}} = \frac{\rho_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 + \mathbf{r})}{\sqrt{\rho_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) \rho_1(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 + \mathbf{r})}}. \quad (124)$$

Tomando dos fragmentos de condensado separados una distancia $r \approx 6 \mu\text{m}$, el valor de $g^{(1)}(r)$ aumenta rápidamente al atravesar el umbral, teniendo un valor de 5% a 8% por debajo del umbral y alcanzando un máximo de 46% en $\simeq 2P_{th}$ (figura 26). Esto verifica que aunque el desorden local causase fragmentación espacial del gas de LPs, los distintos fragmentos tienen la misma fase.

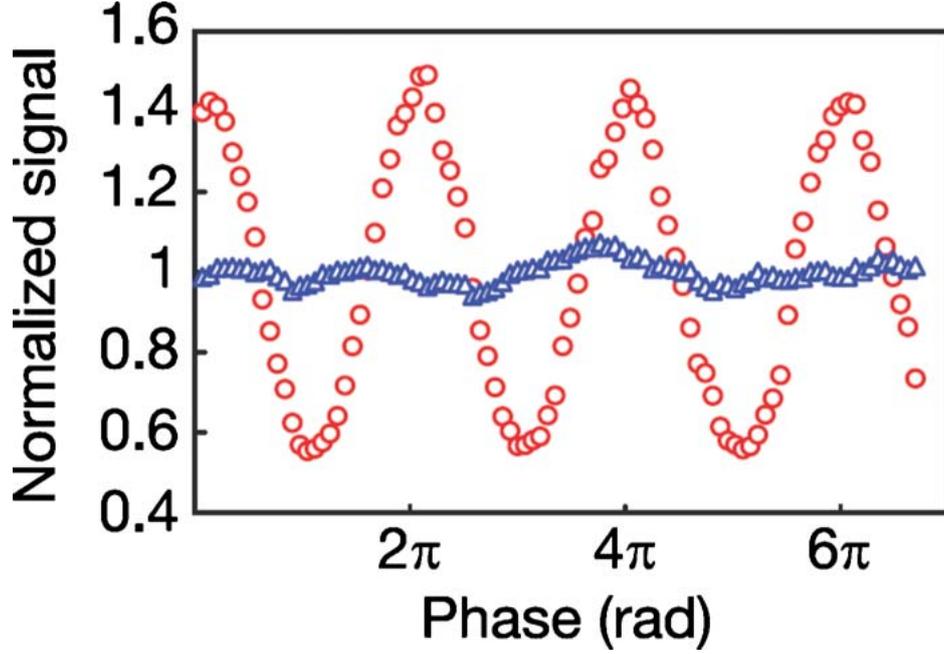


Figura 26: Interferencia entre dos fragmentos de condensado a $\sim 6 \mu\text{m}$ de distancia, medido por debajo (triángulos azules) y por encima (círculos) del umbral, con contrastes del 5% y 46% respectivamente. El eje horizontal representa la fase relativa[45].

Posteriormente, se hizo un estudio más sistemático de la coherencia espacial por Deng *et al.*[39]. Se utilizó una microcavidad basada en GaAs, donde el condensado forma un solo modo espacial. Usando una doble rendija colocada en la imagen del campo cercano de los LPs, se recogió fotoluminiscencia de varias regiones del condensado. Luego, se detectó la interferencia a campo lejano, que consiste de una oscilación cosenoidal con una envoltura senoidal debida a la anchura no nula de las rendijas. La amplitud del coseno se corresponde a $g^{(1)}(r)$, con el valor de r dado por la separación entre rendijas.

Se observó que el valor de $g^{(1)}(r)$ aumenta rápidamente a través del umbral y se satura en $P > 3P_{th}$. El valor máximo de $g^{(1)}(r)$, $\sim 0,8$, se mide en $r = 1,3 \mu\text{m}$, que es aproximadamente la longitud de coherencia intrínseca de un LP. En $r = 8 \mu\text{m}$, que es el tamaño del punto de excitación, $g^{(1)}(r)$ se mantiene por encima de $e^{-\pi}$. Desde $r = 1,3$ hasta $8 \mu\text{m}$, el decaimiento de $g^{(1)}(r)$ se modela bien mediante la transformada de Fourier de la distribución de momentos de los LPs. La longitud de decaimiento en $e^{-\pi}$ de $g^{(1)}(r)$ cuando el LP se encuentra por encima del umbral es alrededor de ocho veces la longitud de onda de De Broglie térmica, como se muestra en la figura 27. Esto demuestra que la coherencia se extiende a un rango mucho mayor que el espaciado medio entre LPs y que la longitud de coherencia intrínseca de LPs. Se mantiene coherencia a través del condensado. Al mismo tiempo, hay una excitación térmica significativa del condensado.

En cuanto a cálculos numéricos de la función de correlación espacial de primer orden, el primer intento es debido a Sarchi y Savona [24][89][100]. Con la cinética de condensación se obtuvieron densidades de condensado que resultaron en un gran ODLRO. Incorporando los efectos de un sistema con muchos cuerpos, usando la aproximación de Popov para calcular la reducción del condensado[101], se puede calcular el valor de $g^{(1)}$ a partir de los $n_k(t)$ y $n_0(t)$ obtenidos a través de las ecuaciones de Boltzmann.

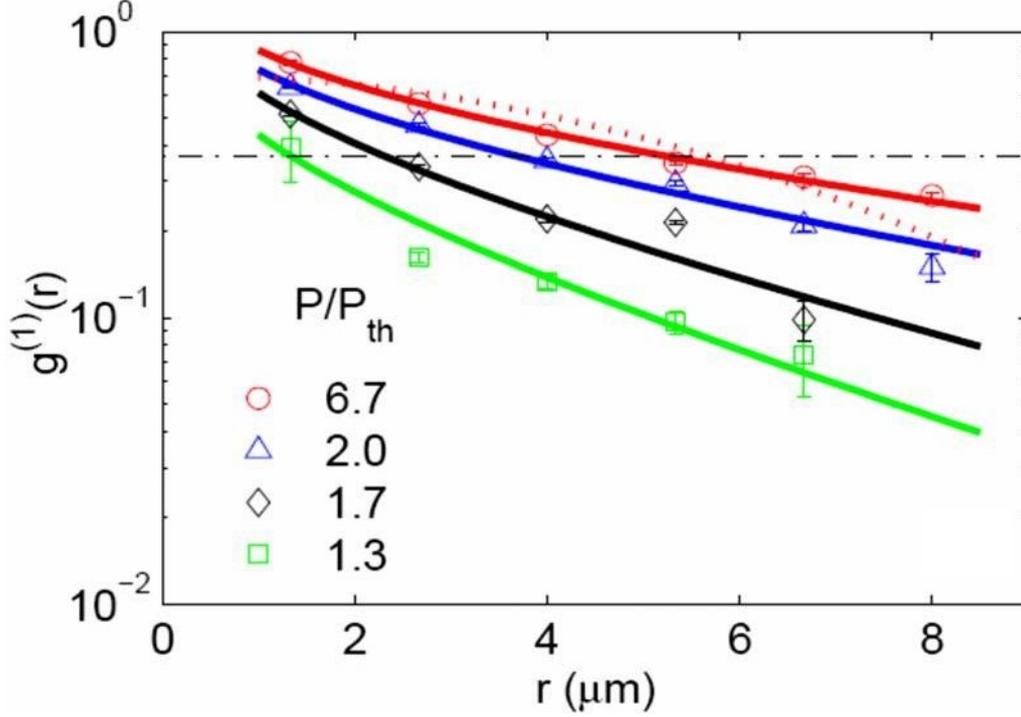


Figura 27: $g^{(1)}(r)$ frente a r para distintas tasas de bombeo P/P_{th} dadas en la leyenda. Los símbolos son valores medidos de $g^{(1)}(r)$ y las líneas solidas son ajustes a la función de Bessel de primera especie modificada, correspondiéndose a la transformada de Fourier bidimensional de la distribución de momentos $\propto k_B T/[E(k) - \mu]$. La línea a rayas a $P/P_{th} = 7$ se ajusta a la transformada de Fourier bidimensional de la distribución de Maxwell-Boltzmann. La recta a puntos y rayas representa $g^{(1)}(r) = 1/e$ [39].

Escribimos la función de coherencia espacial de primer orden en términos del operador de campo de LPs $\psi(\vec{r})$ como

$$g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_2) \rangle}{\langle \psi^\dagger(\vec{r}_1) \rangle \langle \psi(\vec{r}_2) \rangle}. \quad (125)$$

Se puede insertar una expansión de la onda planar

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} \left(b_0 + \sum_{\vec{k}} b_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right), \quad (126)$$

y se encuentra, que en la aproximación de partículas libres,

$$g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{n_0 + \sum_{\vec{k}} n_k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{n_0}. \quad (127)$$

Con las poblaciones calculadas, se puede evaluar la dependencia de $g^{(1)}(r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ con la potencia de bombeo para distintos valores de la distancia r . Se asume un *detuning* de 4 meV y un tamaño del sistema de 100 μm . La figura 28 muestra como el rango de la coherencia

espacial aumenta por encima del umbral. Estos resultados están en excelente acuerdo con el experimento de doble rendija hecho por Deng *et al.* [39] como se muestra en la figura 29.

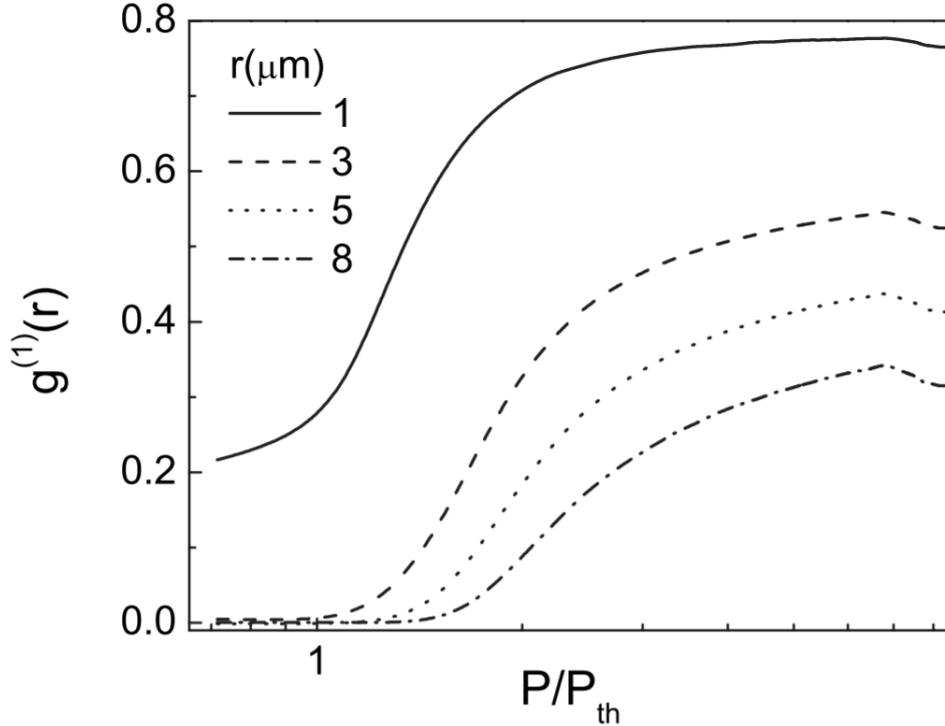


Figura 28: Valores calculados de la función de coherencia de primer orden frente a la intensidad de bombeo normalizada P/P_{th} para varias distancias r dadas[87].

La figura 30 muestra la dependencia de $g^{(1)}(r)$ con la distancia para varios valores de la potencia de bombeo. Se observa un decaimiento aproximadamente exponencial de la función de coherencia. La longitud de coherencia aumenta con la potencia de bombeo, es decir, con la degeneración de los LPs condensados. Las medidas mostradas en la figura 27 se encuentran de nuevo en acuerdo cuantitativo con los valores calculados de la función de coherencia.

La presencia de un condensado con una gran longitud de coherencia cambia la distribución espacial de los LPs de manera característica. Si hay un potencial armónico, la distribución muestra un perfil de Thomas-Fermi y la anchura de la distribución es inversamente proporcional a la anchura en el espacio de momentos. En la ausencia de un potencial de confinamiento en el plano, las propiedades espaciales se gobiernan por dos factores: la distribución espacial debida al perfil del láser de excitación y la extensión finita de la coherencia macroscópica en sistemas bidimensionales[19].

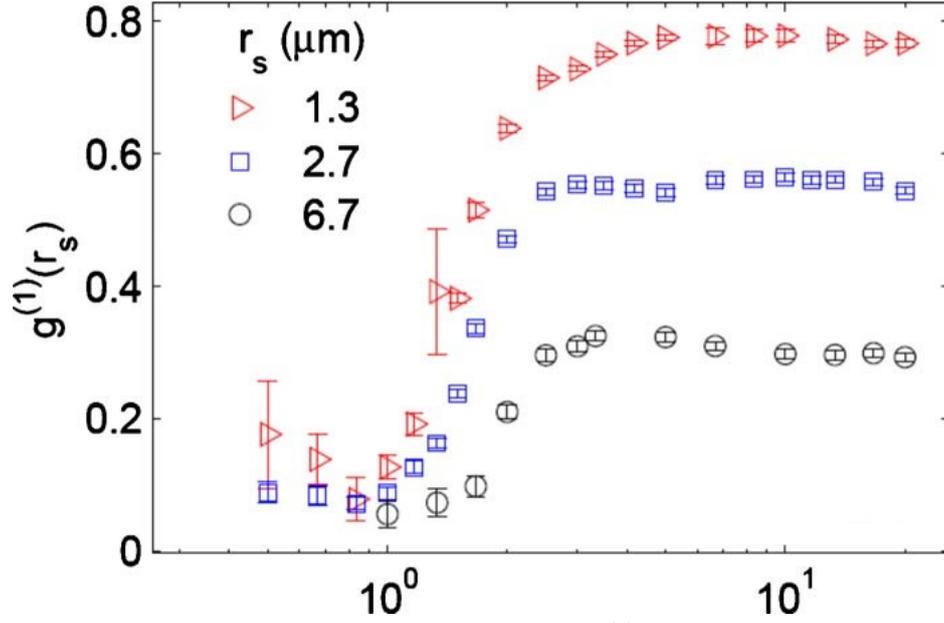


Figura 29: Función de coherencia de primer orden $g^{(1)}(r)$ medida frente a potencia de bombeo normalizada P/P_{th} para varias distancias r [39].

Si el láser de excitación tiene un perfil no uniforme, como por ejemplo una gaussiana con una anchura a media altura de ω_p , el centro del punto llega primero al umbral de degeneración y forma un cuasicondensado con extensión espacial $\omega_c \ll \omega_p$. Suponiendo que la densidad crítica es constante con el tamaño del sistema, ω_c se expresa como

$$\omega_c = \omega_p \sqrt{1 - \log_2 \left(1 + \frac{P_{th}}{P} \right)}. \quad (128)$$

Sin embargo, en dos dimensiones es necesaria una mayor densidad crítica de condensación $n_c(\omega_c)$ para mantener coherencia sobre una mayor área [30]. Este efecto fue observado por primera vez por Deng *et al.* [41]. Se usó una microcavidad planar sin potencial de confinamiento en el plano. El láser de excitación tenía un perfil gaussiano con un tamaño del punto a media altura de $\omega_p \approx 15 \mu\text{m}$. Aunque la emisión de LPs seguía este mismo perfil por debajo del umbral, el tamaño del punto de emisión ω_{FL} disminuyó drásticamente cuando el centro del punto alcanzó la densidad crítica. Para $P > P_{th}$, el incremento de ω_{FL} es mucho más lento que el predicho por la ecuación (128).

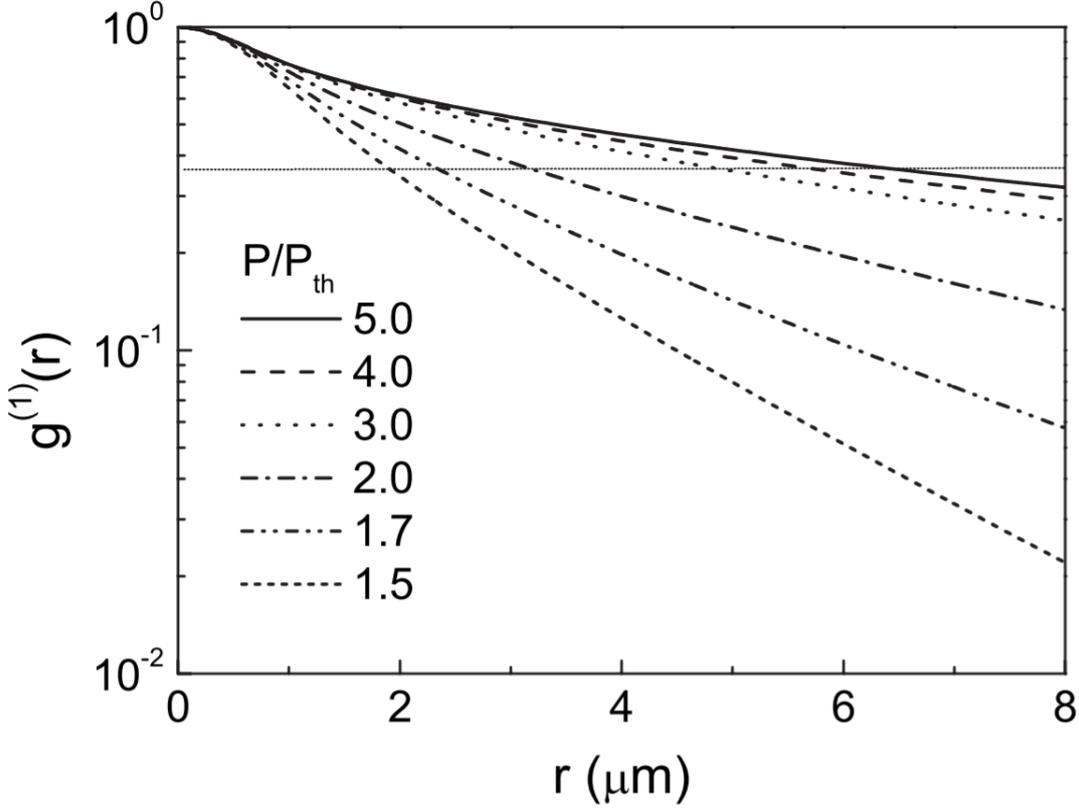


Figura 30: Función de coherencia de primer orden $g^{(1)}(r)$ calculada frente a la distancia r para varias potencias de bombeo normalizadas P/P_{th} [87].

Teniendo en cuenta la dependencia con el tamaño de la densidad crítica, la ecuación (128) se modifica como sigue[39]

$$\omega(P/P_{th}) = \omega_p \sqrt{1 - \log_2 \left(1 + \frac{P_{th} n_c(\omega(P/P_{th}))}{P n_c(\omega_c)} \right)}, \quad (129)$$

donde $\omega_c \doteq \omega(P/P_{th} = 1)$ es la anchura a media altura del condensado cuando aparece por primera vez y se corresponde con el menor tamaño medido. Como un modelo simplificado, se considera n_c para un gas de bosones bidimensional confinado a un tamaño finito $L = 2\omega$, se tiene $n_c(\omega) = (2/\Lambda_T^2) \ln(2\omega/\Lambda_T)$ [30] y, por tanto,

$$\omega(P/P_{th}) = \omega_p \sqrt{1 - \log_2 \left(1 + \frac{P_{th} \ln(2\omega/\Lambda_T)}{P \ln(2\omega_c/\Lambda_T)} \right)}, \quad (130)$$

donde Λ_T es la longitud de onda térmica de de Broglie de los LPs. El aumento medido del tamaño del punto de LPs fue bien descrito por la ecuación (130), como se ve en la figura 31[39].

Para el caso de un laser de fotones, también se observó una reducción en el tamaño del punto en el umbral de laseado[41]. En contraste con el caso de condensación de LPs, el crecimiento del tamaño del punto por encima del umbral es mucho más rápido y se explica bien mediante el modelo de osciladores clásicos locales de la ecuación (128) (figura 31(c)). Esto confirma que en un láser convencional la ganancia es determinada por la densidad local de los pares electrón-hueco con una densidad umbral independiente del tamaño del sistema.

En el mismo estudio, hay múltiples modos transversos en el perfil espacial del láser por encima del umbral (figura 31(b)), como es típico en láseres de emisión superficial con cavidad vertical de gran área. La coherencia en este caso está presente solo en el campo fotónico pero no en el medio electrónico. Sin embargo, en el caso de la condensación de polaritones, el perfil gaussiano se mantiene hasta tasas de bombeo muy altas sin notarse modos transversos múltiples.

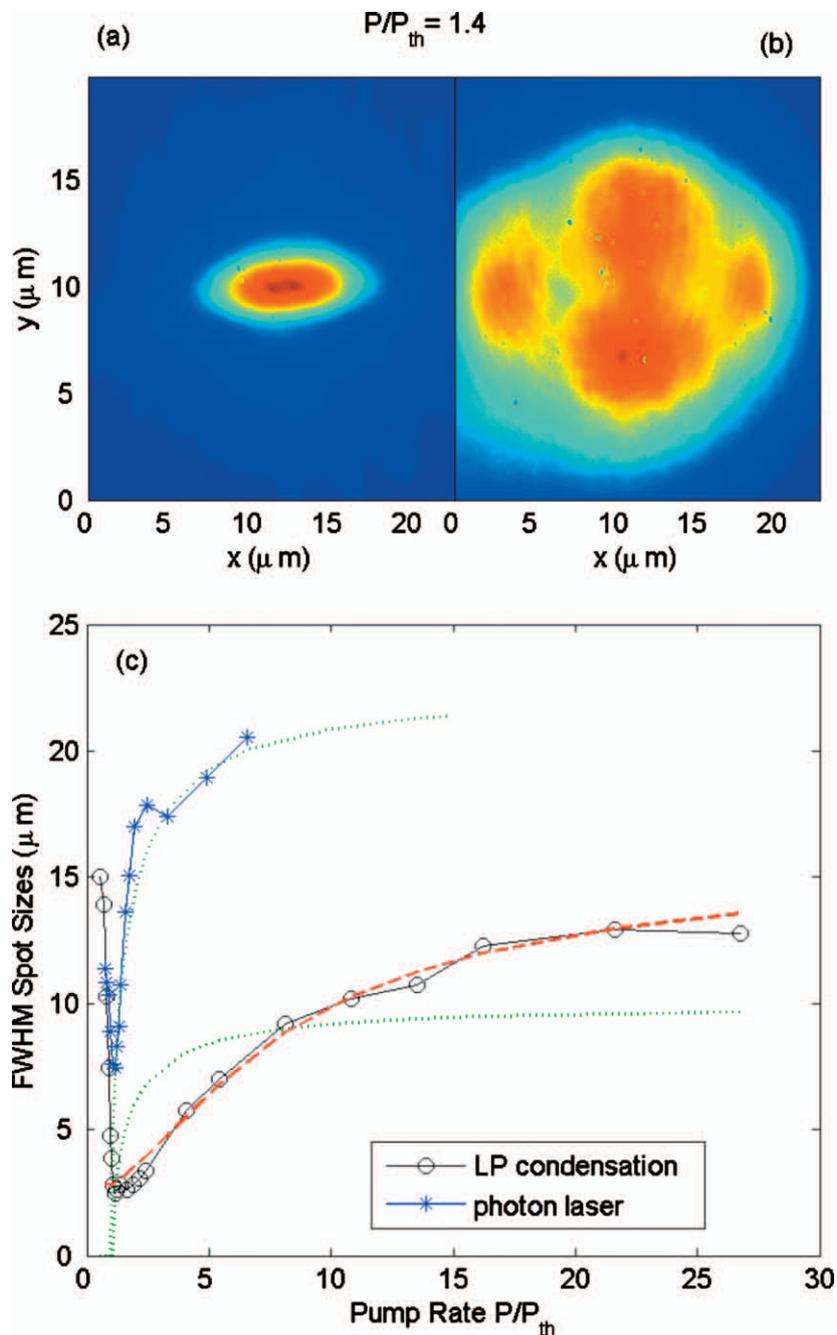


Figura 31: Distribuciones espaciales y tamaños de punto de un láser de polaritones frente a un láser fotónico. (a) y (b) muestran los perfiles espaciales de los LPs y cavidad láser, respectivamente, a 1,4 veces la intensidad de bombeo umbral. (c) Comparación del tamaño del punto frente a la tasa de bombeo para condensados de LPs (círculos) y láser fotónico (estrellas). La línea roja a rayas es un ajuste por la ecuación (129), con $\omega_p = 16,5 \mu\text{m}$ y $\omega_c = 2,8 \mu\text{m}$. Las líneas verdes a puntos son ajustes dados por la ecuación (128) asumiendo un tamaño del punto de bombeo de $\omega_p = 9 \mu\text{m}$ para el condensado de LPs y $\omega_p = 23 \mu\text{m}$ para el láser fotónico[41].

4.4. Superfluididad de polaritones

El Hamiltoniano del condensado de excitones-polaritones expresado en términos del operador de campo de LPs ψ es

$$\hat{H} = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger \nabla \hat{\psi} \right) dr + \frac{1}{2} \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger V(r' - r) \hat{\psi} \hat{\psi} dr' dr, \quad (131)$$

donde $V(r)$ es el potencial de interacción de dos cuerpos. La ecuación de movimiento de Heisenberg de $\hat{\psi}$ es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(r, t) = [\hat{\psi}(r, t), \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \int \hat{\psi}^\dagger(r', t) V(r' - r) \hat{\psi}(r', t) dr' \right] \hat{\psi}(r, t). \quad (132)$$

Si el operador de campo se escribe de la forma

$$\hat{\psi}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p e^{ip \cdot r / \hbar}, \quad (133)$$

donde V es un volumen de cuantización y \hat{a}_p es el operador de aniquilación para el estado de una partícula con momento p ; podemos reescribir el Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{1}{2V} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \sum_q V_q \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}, \quad (134)$$

donde $V_q = \int V(r) \exp[-iq \cdot r / \hbar] dr$ es la transformada de Fourier de $V(r)$.

Desde el punto de vista macroscópico, solo son importantes los momentos pequeños, por lo que podemos considerar el valor de V_q cuando $q = 0$,

$$V_0 = g = \int V(r) dr, \quad (135)$$

para reescribir el Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{g}{2V} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \sum_q \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}. \quad (136)$$

Siguiendo el procedimiento de Bogoliubov, reemplazamos el operador \hat{a}_0 por un número complejo α . La amplitud de campo correspondiente (parámetro de orden) $\psi_0(r, t)$ varía lentamente sobre distancias comparables al rango de la interacción entre partículas, por lo que podemos sustituir r' por r en la ecuación de Heisenberg para obtener la ecuación de Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + g |\psi_0(r, t)|^2 \right) \psi_0(r, t). \quad (137)$$

En un límite de baja temperatura, el número de ocupación para estados excitados con $p \neq 0$ es pequeño pero no nulo. En esta aproximación de primer orden, ignoramos todos los términos del hamiltoniano conteniendo \hat{a}_p y \hat{a}_p^+ con $p \neq 0$. Entonces la energía del estado fundamental es

$$E_0 = \frac{g}{2V} N^2. \quad (138)$$

El potencial químico es dado por

$$U(n) \equiv \frac{\partial E_0}{\partial N} = gn, \quad (139)$$

donde $n = N/V$ es la densidad de partículas.

Sin embargo para estudiar el espectro de excitación y estudiar las fluctuaciones cuánticas es necesaria una mejor aproximación. Usamos la relación de normalización

$$\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p = |\alpha|^2 + \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p = N. \quad (140)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (136), obtenemos un nuevo hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{g}{2V} N^2 + \sum_{p \neq 0} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{1}{2} gn \sum_{p \neq 0} (2\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + \hat{a}_p \hat{a}_{-p}). \quad (141)$$

Este hamiltoniano se puede diagonalizar con la transformación lineal[102]

$$\hat{a}_p = u_p \hat{b}_p + v_{-p}^* \hat{b}_{-p}^+, \quad \hat{a}_p^+ = u_p^* \hat{b}_p^+ + v_{-p} \hat{b}_{-p}. \quad (142)$$

Si los dos coeficientes u_p y v_{-p} satisfacen

$$|u_p|^2 + |v_{-p}|^2 = 1, \quad (143)$$

un nuevo conjunto de operadores \hat{b}_p y \hat{b}_p^+ satisfacen la relación de conmutación bosónica $[\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^+] = \delta_{pp'}$. Para que los términos que no conservan el número de partículas $\hat{b}_p^+ \hat{b}_{-p}^+$ y $\hat{b}_p \hat{b}_{-p}$ en el hamiltoniano se desvanezcan, los coeficientes u_p y v_{-p} tienen que satisfacer

$$\frac{U(n)}{2} (|u_p|^2 + |v_{-p}|^2) + \left(\frac{p^2}{2m} + U(n) \right) u_p v_{-p} = 0. \quad (144)$$

De las ecuaciones (143) y (144) podemos despejar u_p y v_{-p} como sigue:

$$u_p = \sqrt{\frac{p^2/2m + U(n)}{\varepsilon(p)} + \frac{1}{2}}, \quad (145)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{p^2/2m + U(n)}{\varepsilon(p)} - \frac{1}{2}}, \quad (146)$$

donde

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\frac{U(n)}{m}p^2 + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2}. \quad (147)$$

Con esta transformación lineal, el hamiltoniano tiene forma diagonal

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{p \neq 0} \varepsilon(p) \hat{b}_p^+ \hat{b}_p. \quad (148)$$

Aquí $\varepsilon(p)$ es la ley de dispersión de Bogoliubov para las excitaciones elementales del sistema condensado.

Propiedades del superfluido de LPs

La energía de campo medio de LPs a $k = 0$ se corre al azul cuando se incrementa el número de LPs como se muestra en la figura 32. Esto es consecuencia de la interacción repulsiva entre LPs. Podemos calcular este cambio de energía $U(n)$ usando la ecuación (92). Si se asume un tamaño constante para el condensado, esto es mostrado como la línea azul clara en la gráfica. También podemos resolver numéricamente la ecuación de Gross-Piteavskii (ecuación (137)) para incorporar la expansión del condensado debido a interacción repulsiva; mostrado en la figura 32 como puntos rojos. Estos resultados teóricos se comparan con los resultados experimentales (diamantes azules). El modelo solo reproduce los datos experimentales a muy bajas concentraciones de LPs, ya que se basan en bosones que interactúan poco entre sí [62][63][64]. Más recientemente la aproximación de Popov se ha aplicado al sistema de LPs, consiguiéndose un acuerdo cualitativo con los datos experimentales [100]. Esta aproximación se muestra como una línea rosa en la figura 32.

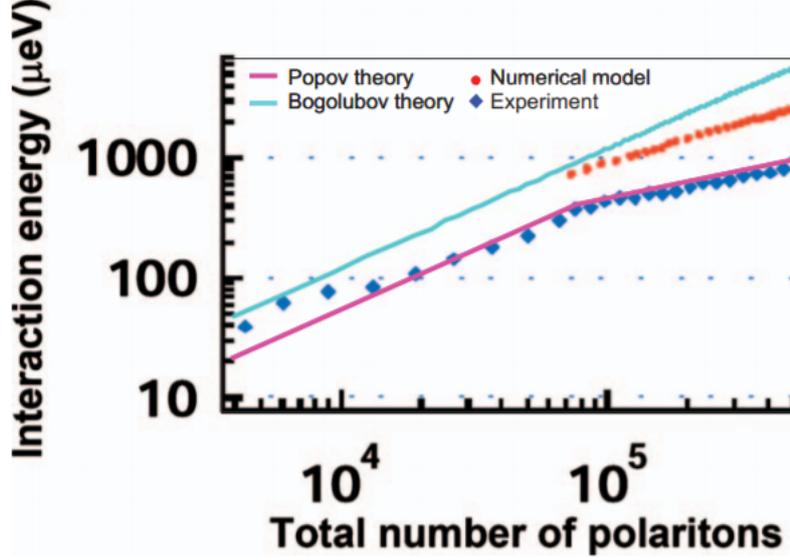


Figura 32: Desplazamiento de la energía de campo medio frente a número total de polaritones. Se muestran los datos experimentales (diamantes azules), los resultados analíticos (línea azul) y numéricos (puntos rojos) basados en la aproximación de Bogoliuov[103]; y la aproximación analítica basada en la aproximación de Popov (línea rosa).

Se puede medir la energía E del estado excitado frente al número de onda en el plano k usando una microcavidad con tiempo de vida de fotones de 80 ps[83]; como se muestra en la figura 33 para una tasa de bombeo $P/P_{th} = 3$. El punto de bombeo tiene $\sim 30 \mu m$ de diámetro. El condensado se forma en un área determinada por el tamaño del punto de bombeo y la tasa de bombeo debido a la limitada difusión lateral y densidad cambiante con la posición de los LPs[39][40]. La figura 33(a) muestra una representación lineal de la luminiscencia; mientras que las figuras 33(b)-33(d) emplean representaciones logarítmicas de la intensidad para magnificar el espectro de excitación. Sobre el umbral, dos cambios drásticos se notan comparados con la distribución cuadrática estándar que se observa bajo el umbral. Una es el corrimiento al azul de la energía del LP en $k = 0$ y la otra es la dispersión lineal en el régimen de bajos momentos $|k\xi|$, donde $\xi = \hbar/\sqrt{2mU(n)}$ es la longitud de amortiguamiento. Así, las líneas blanca y negra en la figura 33(b) representan las relaciones de dispersión cuadráticas $E_{LP} = -U(n) + (\hbar k)^2/2m$ y $E'_{LP} = (\hbar k)^2/2m$ respectivamente, donde m es la masa efectiva del polaritón; y se observa que ninguna puede explicar el resultado experimental. La línea rosa en la figura 33(b) es la energía de excitación de Bogoliuov; que puede ser reescrita como[104][105]

$$E_B = \sqrt{E'_{LP}[E'_{LP} + 2U(n)]} = U(n)\sqrt{(k\xi)^2[(k\xi)^2 + 2]}. \quad (149)$$

La relación de dispersión medida experimentalmente concuerda con el espectro de excitación de Bogoliubov sin necesidad de añadir parámetros.

En este experimento se usó un láser circularmente polarizado para bombear fotones en el condensado; por lo que el condensado preserva la polarización del láser[41][83]. El resultado mostrado en la figura 33(b) se corresponde con la detección de los fotones con la misma polarización que el bombeo (detección cocircular); es decir, ambos grupos de fotones tienen la misma helicidad. Una pequeña cantidad de fotones polarizados cros-circularmente (es decir, con helicidad opuesta a la del bombeo) también ha sido detectada debido a la relajación del spin durante

el proceso de enfriamiento[41][83]. Sin embargo, se observa la dispersión cuadrática estándar, pero con energía ligeramente menor comparada con la del condensado, como se muestra en la figura 33(c). Al incrementar la tasa de bombeo, el número de LPs condensados se incrementa tal que la débil interacción atractiva entre el condensado y los estados excitados con spin opuesto resulta en un ligero corrimiento al rojo comparado con E'_{LP} en la figura 33(c). En la figura 33(d) se representa la detección simultánea de ambos tipos de fotones.

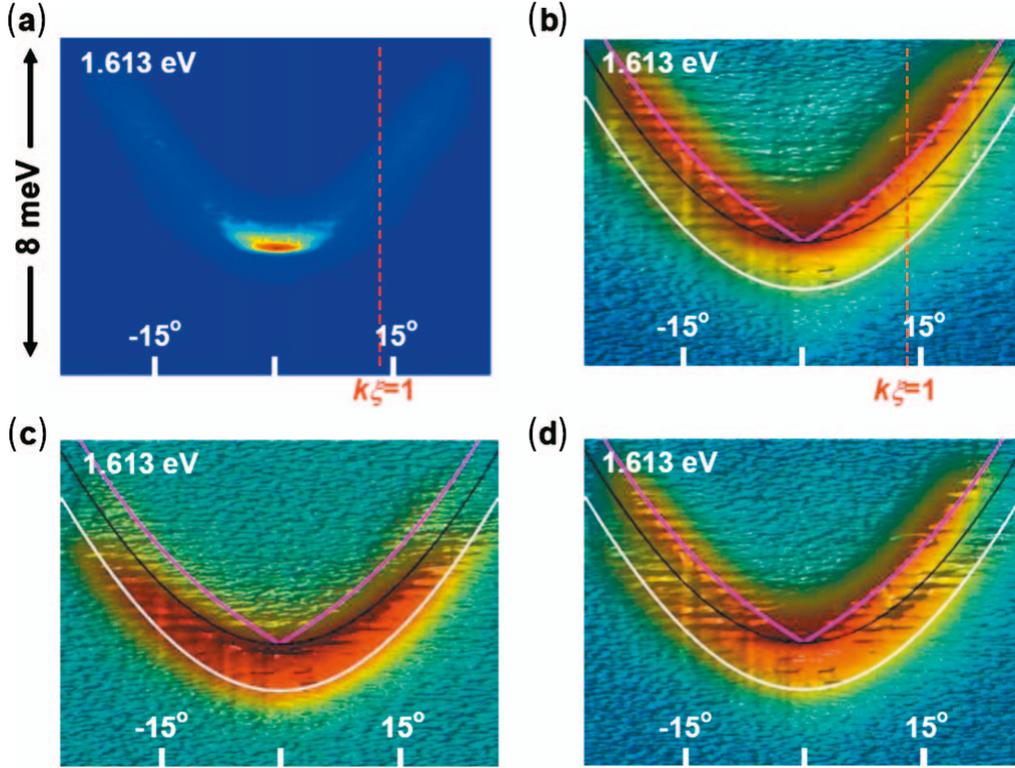


Figura 33: Dependencia del espectro de excitación con la polarización de un sistema condensado. (a) es una representación lineal de la intensidad; mientras que (b)-(d) usan representaciones logarítmicos para magnificar el espectro de excitación. Un rayo circularmente polarizado es incidente con un ángulo de 60° . (a) y (b) muestran la detección fotones con polarización cocircular con el rayo (misma helicidad que el rayo de bombeo), (c) la detección de la polarización crosircular (helicidad opuesta a la del rayo de bombeo), y (d) la detección de una mezcla. Las curvas teóricas representan la energía de excitación de Bogoliubov E_B (línea rosa), la relación de dispersión cuadrática E'_{LP} (línea negra) que empieza en la energía del condensado, y la relación de dispersión de LPs libres E_{LP} (línea blanca), que es determinada experimentalmente con datos tomados a $P = 0,001P_{th}$ [103]

Como se ve en la figura 33(b), el condensado con energía E'_{LP} tiene un número de onda $k \neq 0$, que no concuerda con la ley de dispersión de Bogoliubov (ecuaciones (147) y (148)). Este resultado experimental tiene dos posibles explicaciones. Una opción es la relación de incertidumbre de Heisenberg correspondiente a la posición y momento de las partículas del condensado. La extensión espacial del condensado es determinada por el tamaño del punto de bombeo y la densidad crítica[41]. Se espera que el condensado tenga una incertidumbre del momento Δp cuando se confina en una región finita del espacio. De hecho, el producto medido del tamaño del punto Δx y la dispersión de momentos Δp es cercano al mínimo dado por la relación de Heisenberg, $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, con un factor 2 – 4 cuando es está por encima del umbral[103]. También se ve por la ecuación de Gross-Pitaevskii espacialmente inhomogénea que la densidad de estados para

el espectro de excitación desaparece en un régimen de momentos bajos $|\Delta p| \leq \hbar/2\Delta x$, como se muestra en la figura 34(a), para la cual el condensado con energía E'_{LP} llena el régimen de momentos vacantes[103].

La otra explicación posible es el tiempo de vida finito de las partículas del condensado. Usando una ecuación de Gross-Pitaevskii con términos de ganancia y pérdida de polaritones, se puede encontrar que la dispersión de excitaciones elementales alrededor del condensado se vuelve difusiva, es decir, es plana en un régimen de momentos pequeños y luego crece para alcanzar el espectro de Bogoliubov, como se muestra en la figura 34(b)[106][107]. No se sabe bien cual de estos factores es principalmente responsable por la dispersión plana observada cerca de $k = 0$.

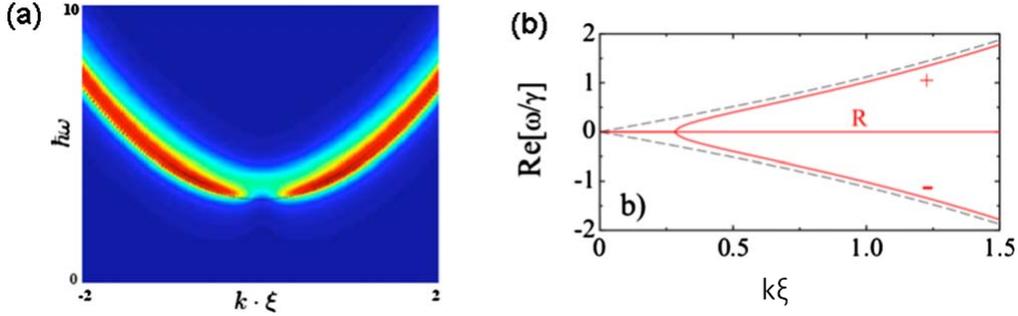


Figura 34: Espectro de excitación de un condensado. (a) Representación de contorno en falso color de la densidad de estados para excitaciones elementales de un condensado de polaritones de tamaño finito[103]. (b) La dispersión de excitaciones elementales de un condensado de polaritones disipativo, mostrándose dos ramas (+ y -)[107].

Como muestra la ecuación (149), la energía de excitación de Bogoliubov normalizada por el *shift* energético de campo medio $E_B/U(n)$ es una función universal del número de onda normalizado por la longitud de curado $k\xi$. En la figura 35(a), esta relación universal (línea verde) es comparada con los resultados experimentales de cuatro sistemas condensados con distintos parámetros. Tanto en el régimen fotónico a $|k\xi| < 1$ como en el régimen de partículas libres a $|k\xi| > 1$ los resultados experimentales están de acuerdo con la curva universal, con la excepción ya mencionada de momentos bajos $|k\xi| \ll 1$; aunque hay una falta de datos en ese régimen. Por otro lado, para una tasa de bombeo muy por debajo del umbral, la dispersión medida es descrita completamente por la dispersión de LPs E_{LP} (línea roja).

La velocidad del sonido deducida del espectro de dispersión fotónico es del orden de 10^8 cm/s y es proporcional a la raíz cuadrada de la población del condensado ($\propto \sqrt{n_0}$) a tasas de bombeo razonables. Este valor es seis órdenes de magnitud más grande que la de los condensados de Bose-Einstein atómicos y cuatro órdenes de magnitud más grande que la del helio ^4He superfluido. Esta enorme diferencia proviene del hecho de que la masa de los LPs es de nueve a diez órdenes de magnitud más pequeña que la masa atómica y que la energía de interacción de LPs es de seis a siete órdenes de magnitud mayor que la energía de interacción atómica. De acuerdo con el criterio de Landau [108], la observación de dispersión lineal en un régimen de momentos bajos es una indicación de superfluidez en el sistema de excitones-polaritones. Se ha encontrado recientemente que la tasa de *scattering* para el condensado de excitones-polaritones en movimiento es drásticamente reprimida cuando la velocidad inicial del sistema es menor que la velocidad crítica del superfluido[109]. También se ha observado que la teoría de Bogoliubov no cuadra con la dispersión de excitaciones elementales a muy altas tasas de bombeo. Esto es un resultado esperado ya que la teoría de Bogoliubov se basa en una aproximación de gas de Bose con pocas interacciones; aproximación que se viola para tasas de bombeo muy por encima del umbral.

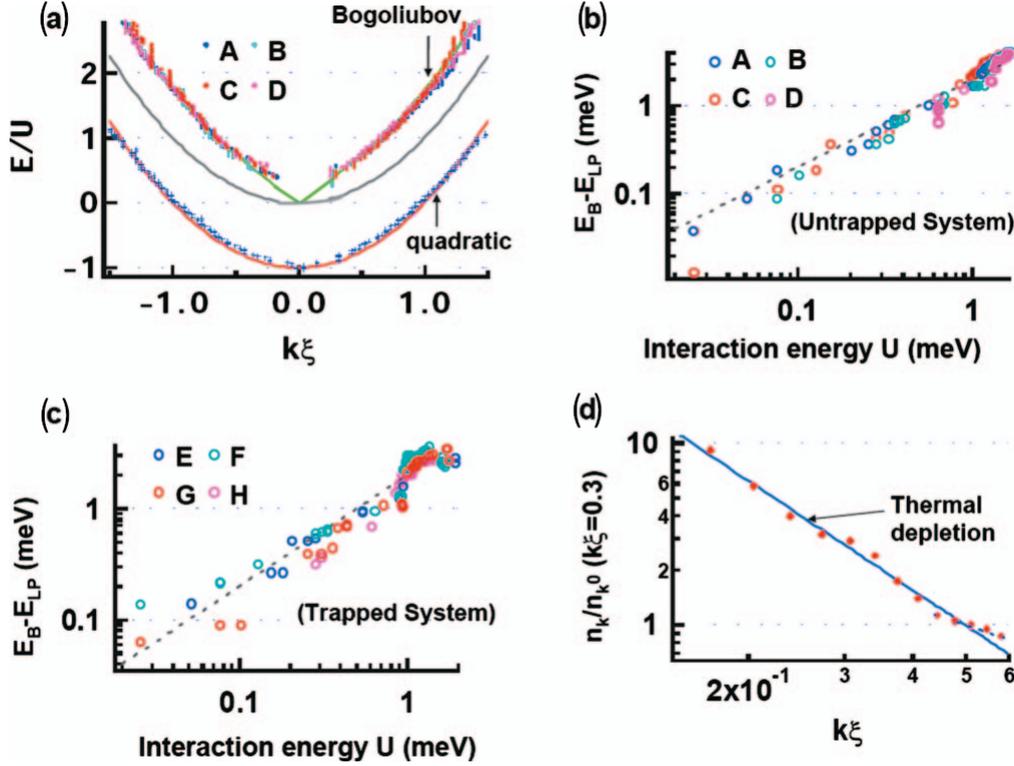


Figura 35: Características universales de excitaciones de Bogoliubov. (a) Energía de excitación normalizada por la energía de interacción $E/U(n)$ como función del número de onda normalizado $k\xi$ para cuatro sistemas condensados no atrapados:

- A (punto azul): $\Delta = 1,41\text{meV}$, $P = 4P_{th}$ ($P_{th} = 6,3\text{mW}$);
- B (punto azul claro): $\Delta = 0,82\text{meV}$, $P = 8P_{th}$ ($P_{th} = 8,2\text{mW}$);
- C (punto rojo): $\Delta = 4,2\text{meV}$, $P = 4P_{th}$ ($P_{th} = 6,4\text{mW}$);
- D (punto rosa): $\Delta = -0,23\text{meV}$, $P = 24P_{th}$ ($P_{th} = 8,2\text{mW}$).

También se incluyen datos experimentales del sistema A muy por debajo del umbral, marcados con cruces azules. Se muestran tres curvas teóricas normalizadas por la energía de interacción: la energía de excitación de Bogoliubov $E_B/U(n)$ (línea verde), la curva de dispersión cuadrática $E'_{LP}/U(n)$ (línea gris), y la dispersión de LPs libres $E_{LP}/U(n)$ (línea roja). (b) y (c) El *shift* de energía $E_B - E_{LP}$ en el régimen de partícula libre ($|k\xi| > 1$) mostrado como función de la energía de interacción $U(n)$. En (b) se muestran los mismos cuatro sistemas que en (a) y en (c) se muestran cuatro sistemas atrapados:

- E (punto azul): $d = 7\mu\text{m}$, $\Delta = 3,3\text{meV}$;
- F (punto azul claro): $d = 7\mu\text{m}$, $\Delta = 2,9\text{meV}$;
- G (punto rojo): $d = 8\mu\text{m}$, $\Delta = 1,6\text{meV}$;
- H (punto rosa): $d = 8\mu\text{m}$, $\Delta = 2,5\text{meV}$.

La línea de rayas representa la predicción teórica $E_B - E_{LP} = 2U(n)$. (d) Distribución de población de LPs normalizada por el valor en $k\xi = 0,3$ para el sistema G a la tasa de bombeo $P = 2P_{th}$ ($P_{th} = 4\text{mW}$). La dependencia teórica con $1/k^2$ para la depleción térmica se muestra con la línea azul y la dependencia con $1/k$ para la depleción cuántica se muestra con la línea de puntos azul. Imagen de Utsunomiya *et al.*, 2008 [103].

En el régimen de partículas libres ($|k\xi| > 1$), la energía de excitación asociada con el condensado es mayor en $2U(n)$ que la energía de un LP con el mismo número de onda. Una diferencia por un factor de 2 entre el desplazamiento de energía de campo medio del condensado y los estados excitados proviene de un intercambio de energía de interacción duplicada entre modos distintos. Este hecho ya se manifestó en la doblez observada en la figura 32. En las figuras 35(b)

y 35(c), esta predicción de la teoría de Bogoliubov es comparada con los resultados para cuatro sistemas condensados distintos no atrapados y atrapados, respectivamente. Los datos experimentales fueron determinados como la diferencia entre la energía de excitación medida con la presencia del condensado y la dispersión cuadrática estándar, que es determinada por datos experimentales tomados con una tasa de bombeo muy por debajo del umbral ($P/P_{th} \ll 1$). Los datos experimentales están de acuerdo con la curva teórica (línea de rayas gris) en ambos casos.

La figura 35(d) muestra la población de excitaciones normalizada n_k/n_k^0 frente al número de onda normalizado $|k\xi|$ para un condensado atrapado, donde n_k^0 es evaluado para $|k\xi| = 0, 3$ por razones de conveniencia. Ese número de ocupación de LPs n_k en el espectro de excitación se puede calcular aplicando la distribución de Bose-Einstein a las cuasipartículas de Bogoliubov y tomando la transformación de Bogoliubov inversa[104],

$$n_k = |v_{-k}|^2 + \frac{|u_k|^2 + |v_{-k}|^2}{\exp(\beta E_B) - 1}, \quad (150)$$

donde

$$u_k, v_{-k} = \pm \left[\frac{(\hbar k)^2/2m + U}{2E_B} \pm \frac{2}{1} \right]^{1/2} \quad (151)$$

y $\beta = 1/k_B T$. Los dos términos en el lado derecho de la ecuación (150) representan las partículas reales (LPs) creadas por la depleción cuántica y la depleción térmica respectivamente. En el sistema condensado de LPs presente, la depleción térmica es mucho más intensa que la depleción cuántica, así que el segundo término domina sobre el primero. En este caso, la población de LPs es dada por $n_k \approx mk_B T / (\hbar k)^2$ para el régimen $|k\xi| \ll 1$, mientras que $n_k \approx (1/2\sqrt{2})/k\xi$ si la depleción cuántica es dominante[104]. La predicción teórica de la dependencia con $1/k^2$ de n_k para la depleción térmica es comparada con los datos experimentales en la figura 35(d), obteniéndose un acuerdo razonable.

Por último, se estudiará la aparición de vórtices cuantizados. En una fase de condensado de Bose-Einstein, los vórtices aparecen cuando un momento angular es transferido al condensado. Sin embargo, un sistema bidimensional de bosones no tiene fase de BEC a temperaturas no nulas; aunque estos sistemas se vuelven superfluidos en la fase BKT (Berezinskii–Kosterlitz–Thouless). Las excitaciones elementales de esta fase superfluida son pares ligados de vórtices con índices opuestos. La transición BKT-fluido normal se identifica con la disociación de los pares de vórtices en vórtices libres[110][111].

Un vórtice cuantizado de LPs fue observado por primera vez en una microcavidad de CdTe. El vórtice parece ser creado durante el proceso de termalización y fue fijado por una fluctuación en el potencial inducida por un defecto en el cristal[112]. Se observó una dirección de rotación fija que se atribuye a la estructura del potencial.

Recientemente, se han observado pares vórtice-antivórtice en una microcavidad de GaAs de tamaño finito[83]. De acuerdo con el análisis numérico de la ecuación de Gross-Pitaevskii, un par vórtice-antivórtice en el orden topológico BKT se mueve en paralelo con una velocidad del sonido de la excitación de Bogoliubov si el sistema es uniforme. Si el sistema bidimensional está confinado a un sistema finito, el par vórtice-antivórtice también está confinado a un micromovimiento dentro de la trampa[113]. El experimento de Roumpos, Hoeffing, et al. (2009)[83] observó este comportamiento. En el experimento, las distribuciones medias de la población $n(r)$, fase

$\phi(r)$, y función de coherencia espacial $g^{(1)}(r)$ se miden simultáneamente con un interferómetro de Michelson. La existencia de un par vórtice-antivórtice se identifica con un decrecimiento de la población, cambio de fase en π y coherencia espacial reducida en la frontera del par. Estos resultados experimentales fueron reproducidos con éxito por el análisis numérico de la ecuación de Gross-Pitaevskii con un término de ganancia y pérdida[19].

5. Conclusiones

En resumen, los aspectos más destacados que se han analizado a lo largo de este trabajo son:

En el capítulo 2 se observó como la fase condensada del helio adquiere propiedades de superfluido debido a la presencia de rotones en el espectro de excitaciones del He II, llevando al criterio de Landau.

En el capítulo 3 hemos visto como la descripción del excitón depende en gran medida de su radio, distinguiéndose primariamente los casos de excitones de Frenkel y de Wannier-Mott.

También se ha visto como se puede usar un pozo cuántico en una microcavidad semiconductor para facilitar la interacción de excitones y fotones, creando excitones-polaritones.

Al inicio del capítulo 4 se ha visto como, aunque no pueda establecerse un autentico condensado de Bose-Einstein en un sistema bidimensional como la microcavidad, pueden darse estados parecidos con una extensión finita, permitiendo el estudio de condensados de polaritones.

También se han explorado las funciones de coherencia como una forma de determinar la existencia de un condensado en los polaritones.

Por último se ha observado la posibilidad de superfluides de los excitones-polaritones, manifestándose tanto en un cambio en la relación de dispersión de los polaritones y en la formación de pares vórtice-antivórtice.

En definitiva, la condensación de polaritones sirve como modelo de un sistema de materia condensada que permite observar fenómenos que serían mucho más difíciles de replicar en otras condiciones. Por ejemplo, trabajar con polaritones permite la condensación de Bose-Einstein a temperaturas más altas que con sistemas superfluidos convencionales.

Referencias

- [1] Apuntes de clase tomados por el autor del TFG de la asignatura de Física Estadística impartida por Juan José García Escudero.
- [2] Tilley, D. R., y Tilley, J., 1990, *Superfluidity and Superconductivity*, 3a edición.
- [3] Allen J. F. y Misener A. D., 1939, *Proc. R. Soc. A* **172**, 467.
- [4] Atkins K R, 1952, *Adv. Phys.* **1**, 169.
- [5] Reppy J. D. y Depatie D., 1964, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 187.
- [6] Kessom W. H. y MacWood G. E., 1938, *Physica* **5**, 737.
- [7] Tough J. T., McCormick W. D., y Dash J. G., 1963, *Phys. Rev.* **132**, 2373.
- [8] Woods A. D. B. y Hollis Hallett A. C., 1963, *Can. J. Phys.* **41**, 596.
- [9] Andronikashvili E. L., 1946, *Zh. eksp. teor. Fiz.* **16**, 780.
- [10] Landau L. D., 1941, *J. Phys., Moscow* **5**, 71.
- [11] Landau L. D., 1947, *J. Phys., Moscow* **11**, 91.
- [12] Palevsky H., Otnes K., y Larsson K. E., 1958, *Phys. Rev.* **112**, 11.
- [13] Yarnell J. L., Arnold G. P., Bendt P. J., y Kerr E. C., 1959, *Phys. Rev.* **113**, 1379.
- [14] Henshaw D. G. y Woods A. D. B., 1961, *Phys. Rev.* **121**, 1266.
- [15] C. D. Jeffries y L. V. Keldysh, 1983, eds *Electron-hole droplets in semiconductors*, North-Holland.
- [16] M. Cardona y P. Y. Yu, *Comprehensive Semiconductor Science and Technology*, **2**, 125.
- [17] C. H. Henry y J. J. Hopfield, 1965, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 964.
- [18] P. W. Baumeister, 1961, *Phys. Rev.* **121**, 359.
- [19] Deng, H., H. Haug, y Y. Yamamoto, 2010, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489.
- [20] Malpuech, G., Y. G. Rubo, F. P. Laussy, P. Bigenwald, y A. V. Kavokin, 2003, *Semicond. Sci. Technol.* **18**, S395.
- [21] Keldysh, L., y A. N. Kozlov, 1968, *Sov. Phys. JETP* **27**, 521.
- [22] Comte, C., y P. Nozières, 1982, *J. Phys. (Francia)* **43**, 1069.
- [23] Littlewood, P. B., P. R. Eastham, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, B. D. Simon, y M. H. Szymanska, 2004, *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, S3597.
- [24] Sarchi, D., y V. Savona, 2006, e-print arXiv:cond-mat/0411084.
- [25] Sarchi, D., y V. Savona, 2007, *Phys. Rev. B* **75**, 115326.
- [26] Mermin, N. D., y H. Wagner, 1966, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133; **17**, 1307(E) (1966).
- [27] Hohenberg, P., 1967, *Phys. Rev.* **158**, 383.
- [28] Bagnato, V., y D. Kleppner, 1991, *Phys. Rev. A* **44**, 7439.

- [29] Griffin, A., D. W. Snoke, y S. Stringari, 1995, *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [30] Ketterle, W., y N. J. van Druten, 1996, *Phys. Rev. A* **54**, 656.
- [31] Berezinskii, V. L., 1971, *Sov. Phys. JETP* **32**, 493.
- [32] Berezinskii, V. L., 1972, *Sov. Phys. JETP* **34**, 610.
- [33] Kosterlitz, J., y D. Thouless, 1972, *J. Phys. C* **5**, L124.
- [34] Kosterlitz, J., y D. Thouless, 1973, *J. Phys. C* **6**, 1181.
- [35] Khalatnikov, I. M., 1965, *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Benjamin, New York).
- [36] Kavokin, A., G. Malpuech, P. G. Lagoudakis, J. J. Baumberg, y K. Kavokin, 2003, *Phys. Status Solidi A* **195**, 579.
- [37] Reitzenstein, S., C. Hofmann, A. Gorbunov, M. Strauss, S. H. Kwon, C. Schneider, A. Löffler, S. Hofling, M. Kamp, y A. Forchel, 2007, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 251109.
- [38] Balili, R., V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer, y K. West, 2007, *Science* **316**, 1007.
- [39] Deng, H., G. Solomon, R. Hey, K. H. Ploog, y Y. Yamamoto, 2007, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 126403.
- [40] Lai, C., N. Kim, S. Utsunomiya, G. Roumpos, H. Deng, M. Fraser, T. Byrnes, P. Recher, N. Kumada, T. Fujisawa, y Y. Yamamoto, 2007, *Nature* (Londres) **450**, 529.
- [41] Deng, H., G. Weihs, D. Snoke, J. Bloch, y Y. Yamamoto, 2003, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **100**, 15318.
- [42] Deng, H., G. Weihs, C. Santori, J. Bloch y Y. Yamamoto, 2002, *Science* **298**, 199.
- [43] Huang, R., Y. Yamamoto, R. André, J. Bleuse, M. Muller, y H. Ulmer-Tuffigo, 2002, *Phys. Rev. B* **65**, 165314
- [44] Richard, M., J. Kasprzak, R. Romestain, R. Andre, y L. S. Dang, 2005, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 187401.
- [45] Kasprzak, J., et al., 2006, *Nature* (Londres) **443**, 409.
- [46] Pawlis, A., A. Khartchenko, O. Husberg, D. J. As, K. Lischka, y D. Schikora, 2002, *Solid State Commun.* **123**, 235.
- [47] Tawara, T., H. Gotoh, T. Akasaka, N. Kobayashi, y T. Saitoh, 2004, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 256402.
- [48] Butte, R., G. Christmann, E. Feltn, J. F. Carlin, M. Mosca, M. Ilegems, y N. Grandjean, 2006, *Phys. Rev. B* **73**, 033315.
- [49] Shimada, R., J. Xie, V. Avrutin, U. Ozgur, y H. Morkoc, 2008, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 011127.
- [50] Chen, J. R., T. C. Lu, Y. C. Wu, S. C. Lin, W. R. Liu, W. F. Hsieh, C. C. Kuo, y C. C. Lee, 2009, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 061103.

- [51] Christopoulos, S., G. B. H. von Hogersthall, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butte, E. Feltin, J. F. Carlin, y N. Grandjean, 2007, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 126405.
- [52] Christmann, G., R. Butte, E. Feltin, J.-F. Carlin, y N. Grandjean, 2008, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 051102.
- [53] Lidzey, D. G., D. D. C. Bradley, M. S. Skolnick, T. Virgili, S. Walker, y D. M. Whittaker, 1998, *Nature* (Londres) **395**, 53.
- [54] Lidzey, D. G., D. D. C. Bradley, T. Virgili, A. Armitage, M. S. Skolnick, y S. Walker, 1999, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3316.
- [55] Schouwink, P., H. V. Berlepsch, L. Dhne, y R. F. Mahrt, 2001, *Chem. Phys. Lett.* **344**, 352.
- [56] Takada, N., T. Kamata, y D. D. C. Bradley, 2003, *Appl. Phys. Lett.* **82**, 1812.
- [57] Kena-Cohen, S., M. Davanco, y S. R. Forrest, 2008, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 116401.
- [58] Pau, S., G. Björk, H. Cao, E. Hanamura, y Y. Yamamoto, 1996, *Solid State Commun.* **98**, 781
- [59] Houdré, R., C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, P. Pellandini, y M. Ilegems, 1994, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2043.
- [60] Pau, S., G. Björk, J. Jacobson, H. Cao, y Y. Yamamoto, 1995, *Phys. Rev. B* **51**, 7090.
- [61] Piermarocchi, C., F. Tassone, V. Savona, A. Quattropani, y P. Schwendimann, 1996, *Phys. Rev. B* **53**, 15834.
- [62] Ciuti, C., V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, y P. Schwendimann, 1998, *Phys. Rev. B* **58**, 7926.
- [63] Rochat, G., C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, y P. Schwendimann, 2000, *Phys. Rev. B* **61**, 13856.
- [64] Schmitt-Rink, S., D. S. Chemla, y D. A. B. Miller, 1985, *Phys. Rev. B* **32**, 6601.
- [65] Kuwata-Gonokami, M., S. Inouye, H. Suzuura, M. Shirane, R. Shimano, T. Someya, y H. Sakaki, 1997, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1341.
- [66] Inoue, J.-i., T. Brandes, y A. Shimizu, 2000, *Phys. Rev. B* **61**, 2863.
- [67] Bányai, L., P. Gartner, O. M. Schmitt, y H. Haug, 2000, *Phys. Rev. B* **61**, 8823
- [68] Tran Thoai, D. B., y H. Haug, 2000, *Solid State Commun.* **115**, 379.
- [69] Bányai, L., y P. Gartner, 2002, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 210404.
- [70] Tassone, F., y Y. Yamamoto, 1999, *Phys. Rev. B* **59**, 10830.
- [71] Bloch, J., y J. Y. Marzin, 1997, *Phys. Rev. B* **56**, 2103.
- [72] Tassone, F., C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, y P. Schwendimann, 1996, *Phys. Rev. B* **53**, R7642.
- [73] Tassone, F., C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, y P. Schwendimann, 1997, *Phys. Rev. B* **56**, 7554.

- [74] Cao, H. T., T. D. Doan, D. Thoai, y H. Haug, 2004, *Phys. Rev. B* **69**, 245325.
- [75] Doan, T. D., C. Huy Thien, D. Thoai, y H. Haug, 2005, *Phys. Rev. B* **72**, 085301.
- [76] Savvidis, P. G., J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, y J. S. Roberts, 2000, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547.
- [77] Bockelmann, U., 1993, *Phys. Rev. B* **48**, 17637.
- [78] Penrose, O., y L. Onsager, 1956, *Phys. Rev.* **104**, 576.
- [79] Beliaev, S. T., 1958, *Sov. Phys. JETP* **34**, 417.
- [80] Yang, C. N., 1962, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694.
- [81] Glauber, R. J., 1963, *Phys. Rev.* **130**, 2529.
- [82] Gardiner, C. W., y P. Zoller, 2000, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, New York).
- [83] Roumpos, G., S. Hoefling, A. Forchel, y Y. Yamamoto, 2009, *APS March Meeting* (no publicado), paper n^o H1600010.
- [84] Kasprzak, J., M. Richard, A. Baas, B. Deveaud, R. André, J. P. Poizat y L. S. Dang, 2008, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 067402.
- [85] Laussy, F. P., G. Malpuech, A. Kavokin, y P. Bigenwald, 2004, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 016402.
- [86] Laussy, F. P., I. A. Shelykh, G. Malpuech, y A. Kavokin, 2006, *Phys. Rev. B* **73**, 035315.
- [87] Doan, T. D., H. T. Cao, D. B. T. Thoai, y H. Haug, 2008, *Phys. Rev. B* **78**, 205306.
- [88] Hanbury Brown, R., y R. Q. Twiss, 1956, *Nature* (Londres) **178**, 1046.
- [89] Sarchi, D., P. Schwendimann, y A. Quattropani, 2008, *Phys. Rev. B* **78**, 073404.
- [90] Schwendimann, P., y A. Quattropani, 2008, *Phys. Rev. B* **77**, 085317.
- [91] Kasprzak, J., M. Richard, A. Baas, B. Deveaud, R. André, J. P. Poizat, y L. S. Dang, 2008, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 067402.
- [92] Haug, H., y H. Haken, 1967, *Z. Phys. A: Hadrons Nucl.* **204**, 262.
- [93] Lax, M., 1967, *IEEE J. Quantum Electron.* **3**, 37.
- [94] Haug, H., 1969, *Phys. Rev.* **184**, 338
- [95] Risken, H., 1984, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications* (Springer, Berlin).
- [96] Carmichael, H. J., 2003, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations, 2nd ed.*(Springer, Berlin).
- [97] Porras, D., y C. Tejedor, 2003, *Phys. Rev. B* **67**, 161310.
- [98] Tassone, F., y Y. Yamamoto, 2000, *Phys. Rev. A* **62**, 063809.
- [99] Lauwers, J., A. Verbeure, y V. A. Zagrebnov, 2003, *J. Phys. A* **36**, L169.
- [100] Sarchi, D., y V. Savona, 2008, *Phys. Rev. B* **77**, 045304
- [101] Shi, H., y A. Griffin, 1998, *Phys. Rep.* **304**, 1.

- [102] Bogoliubov, N. N., 1947, *J. Phys.* (USSR) **11**, 23.
- [103] Utsunomiya, S., L. Tian, G. Roumpos, C. W. Lai, N. Kumada, T. Fujisawa, M. Kuwata-Gonokami, A. Loffler, S. Hofling, A. Forchel, y Y. Yamamoto, 2008, *Nat. Phys.* **4**, 700.
- [104] Pitaevskii, L. P., y S. Stringari, 2003, *Bose Einstein Condensation* (Clarendon, Oxford).
- [105] Ozeri, R., N. Katz, J. Steinhauer, y N. Davidson, 2005, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 187.
- [106] Szymanska, M. H., J. Keeling, y P. B. Littlewood, 2006, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 230602.
- [107] Wouters, M., y I. Carusotto, 2007, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 140402.
- [108] Landau, L. D., y E. M. Lifshitz, 1987, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford).
- [109] Amo, A., D. Sanvitto, F. P. Laussy, D. Ballarini, E. del Valle, M. D. Martin, A. Lemaitre, J. Bloch, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, C. Tejedor, y L. Viña, 2009, *Nature* (London) **457**, 291.
- [110] Hadzibabic, Z., P. Krger, M. Cheneau, B. Battelier, y J. Dalibard, 2006, *Nature* (Londres) **441**, 1118.
- [111] Posazhennikova, A., 2006, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1111.
- [112] Lagoudakis, K. G., M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. André, L. S. Dang, y B. Deveaud-Pledran, 2008, *Nat. Phys.* **4**, 706.
- [113] Fraser, M. D., G. Roumpos, y Y. Yamamoto, 2009, *New J. Phys.* **11**, 113048.

Fuentes

Apuntes de clase tomados por el autor del TFG de la asignatura de Física Estadística impartida por Juan José García Escudero.

Tilley, D. R., y Tilley, J., 1990, *Superfluidity and Superconductivity*, 3a edición.

Kittel, C., 1996, *Introduction to Solid State Physics*, 7a edición.

Deng, H., H. Haug, y Y. Yamamoto, 2010, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489.