



Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

---

**EL PROBLEMA DEL CAMINO MÁS  
CORTO MULTICRITERIO**

Marina Álvarez Díaz

Junio 2022

---

Dirigido por  
Irene Mariñas y Susana Montes

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>El problema del camino más corto</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>El problema del camino más corto multicriterio</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Agregación de <i>rankings</i></b>	<b>35</b>
4.1	El método de la cuenta de Borda . . . . .	39
4.2	Propiedades . . . . .	40
4.3	Agregación de <i>rankings</i> en el problema MOSP . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Aplicaciones prácticas</b>	<b>48</b>
5.1	Relación entre criterios . . . . .	50
5.2	Número de criterios . . . . .	58
5.3	Número de iteraciones . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los problemas clásicos de optimización más estudiados es el problema del camino más corto (SPP, por sus siglas en inglés, *Shortest Path Problem*), considerado tradicionalmente como un problema unicriterio. Este problema puede plantearse de diferentes maneras, unas veces se busca el camino más corto de un punto a otro, mientras que otras interesa encontrar el camino más corto de un punto a muchos otros. Para resolver estos problemas existen varios algoritmos y, dependiendo del planteamiento, unos serán más eficientes que otros, como puede verse en ([Glabowski et al., 2013](#)).

En el SPP, a cada arco de un grafo se le asocia un único valor que puede corresponder a una distancia, un tiempo, un coste, etc., y el objetivo es encontrar el camino para el cual el valor total de este criterio es mínimo (aunque se denomina problema del camino más corto, en realidad se busca el camino que minimice el valor del criterio considerado, indiferentemente de

si éste es una distancia o no). Sin embargo, muchas veces un solo criterio es insuficiente para definir la relación de preferencia entre las rutas y es más interesante encontrar el camino que minimiza simultáneamente varios criterios. En este tipo de problemas, denominado problema del camino más corto multicriterio (MOSP, por las siglas del inglés *MultiObjective Shortest Path*), se definen varios criterios en los arcos y, por lo tanto, en los caminos.

Los problemas MOSP aparecen en diversos ámbitos: en sistemas de comunicación, donde puede ser necesario minimizar la consumición de recursos de cada ruta a la par que el coste (Clímaco et al., 2003); en el diseño de rutas de evacuación en situaciones de emergencia, donde es necesario considerar varios criterios como el tráfico, el coste o el estado de las rutas (Brezina et al., 2019); o en la planificación de rutas militares, donde es necesario considerar a la vez el tiempo, la distancia y habilidad para camuflarse (Tarapata, 2003), entre otros. En general es muy utilizado en problemas de transporte (Modesti and Sciomachen, 1998), (Delling et al., 2015).

En problemas de selección de rutas, muchos criterios a minimizar están relacionados con la calidad del servicio (Craveirinha et al., 2007): la cantidad de paquetes perdidos, el tiempo máximo de retraso de los paquetes, la longitud de la ruta o la poca fiabilidad de la ruta, entre otros. Estos criterios pueden estar contrapuestos, por ejemplo, las rutas más largas pueden ser más fiables, por lo que es necesario un planteamiento multicriterio del problema que permita encontrar un equilibrio entre los diferentes criterios.

Además, los problemas MOSP pueden enfocarse de diferentes maneras: pueden tratarse como problemas de programación lineal, construyendo a par-

tir de todos los criterios una función que posteriormente se minimiza (Tarapata, 2003) o pueden resolverse con procesos de jerarquía analítica (AHP, del inglés *Analytic Hierarchy Process*), que dividen los criterios en niveles según su importancia, y realizan comparaciones dos a dos dentro de cada nivel (De Luca, 2014).

Al considerar varios criterios simultáneamente, la solución no suele ser única, sino que existe un conjunto de soluciones óptimas. Un método común para resolver los problemas MOSP es encontrar estos conjuntos de soluciones óptimas, que reciben el nombre de conjuntos de Pareto (Hanusse et al., 2020; Tarapata, 2007).

Estos conjuntos de soluciones óptimas pueden tener un tamaño exponencial con respecto al tamaño de un problema con un único criterio, por lo que es necesario algún procedimiento que permita seleccionar una única solución dentro de ese conjunto. En este trabajo se plantea encontrar la solución única del MOSP a partir de métodos de *ranking*. Con lo cual, el objetivo del mismo es proponer un método para la resolución del problema del camino más corto multicriterio combinando las técnicas desarrolladas hasta ahora basadas en los conjuntos de Pareto, con los métodos de *ranking*.

Para ello, el trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se introducen conceptos básicos de teoría de grafos necesarios para entender el problema del camino más corto unicriterio, así como el algoritmo más habitualmente utilizado para su resolución. En el Capítulo 3 se generaliza el problema del camino más corto al caso multicriterio, para lo cual se introducen los conjuntos de Pareto. En el Capítulo 4 se introducen los *rankings*

y métodos de agregación de *rankings* para la obtención de una única solución del problema MOSP. Una vez propuesto el método, en el Capítulo 5 se aplica dicho método a diferentes ejemplos para estudiar las propiedades de los conjuntos de Pareto y de las soluciones óptimas en función de diferentes parámetros y así poder analizar su comportamiento en diferentes situaciones. Finalmente se concluye con unos comentarios finales sobre el método desarrollado y sus limitaciones, así como posibles líneas futuras de investigación en el Capítulo 6.

## Capítulo 2

# El problema del camino más corto

El problema del camino más corto es, como ya se ha mencionado, uno de los problemas clásicos en optimización de redes. En la práctica tiene aplicaciones muy variadas, como en empresas de transporte y telecomunicaciones, en la administración de proyectos, determinación de rutas, problemas de localización, sustitución de equipos, etc. Es un problema que, siendo uno de los modelos de red más simples, sirve como base para modelos mucho más complejos ([Ahuja et al., 1995](#)).

Este problema se enmarca en la teoría de grafos, siendo éstos configuraciones de nodos y conexiones. Los grafos pueden representar sistemas físicos, como circuitos eléctricos o redes de carreteras, pero también pueden representar interacciones menos tangibles, como pueden ser relaciones sociológicas o

bases de datos. Estos grafos sirven como modelos matemáticos para analizar problemas del mundo real en una gran variedad de campos: física, química, genética, sociología, lingüística, etc.

En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de grafos finitos que serán necesarios para el planteamiento y resolución de los problemas del camino más corto y el camino más corto multicriterio. Más información puede encontrarse en (Gross et al., 2018) y (Pelegri n et al., 1992).

Inicialmente, un **grafo** está formado por un par de conjuntos finitos,  $V$  y  $A$ , tales que  $V$  no es vacío y  $A$  está formado por pares de elementos de  $V$ . Así, a un grafo se le suele representar por  $G = (V, A)$ . A los elementos de  $V$  se les denomina **vértices** y a cada elemento de  $A$ , denotado como  $e = (i, j)$ , se denomina **arco** y se dice que conecta los vértices  $i$  y  $j$  de  $V$ .

Puede haber más de un arco que conecte dos vértices, en tal caso se habla de **arco múltiple** o **multi-arco** para referirse al conjunto de dos o más arcos que conectan los mismos vértices.

Los dos vértices conectados no tienen que ser necesariamente distintos, así, en el caso de que coincidan, se dice que el arco es un **bucle**, es decir, cuando el arco es de la forma  $e = (i, i)$  con  $i \in V$ .

En la figura 2.1 se muestra un ejemplo de arco múltiple y un ejemplo de bucle.

La presencia de este tipo de elementos puede complicar el estudio del



(a) Arco múltiple entre los vértices 1 y 2.

(b) Bucle en el vértice 1.

Figura 2.1: Ejemplos de arco múltiple (izq.) y bucle (dch.).

grafo correspondiente. De hecho la mayoría de las técnicas se desarrollan para grafos sin arcos múltiples y sin bucles. En tal caso se dice que se trabaja con un **grafo simple**. Existen diferentes formas de asociar grafos con bucles o arcos múltiples a un grafo simple, para poder aplicar la metodología habitual. No obstante, dicho procedimiento no es objeto de estudio de este trabajo.

Por definición, los arcos conectan dos vértices y, dependiendo de si esa conexión tiene una dirección o no, se habla de dos tipos de grafos: orientados y no orientados. Para ambos tipos de grafo, se puede ya dar una definición formal de los mismos.

**Definición 2.1.** *Un grafo orientado, grafo dirigido o digrafo  $G = (V, A)$  está formado por dos conjuntos finitos  $V$  y  $A$  con  $V \neq \emptyset$  y  $A \subseteq V \times V$ .*

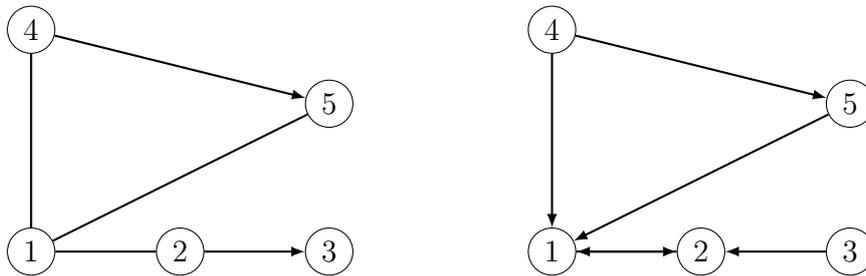
Así pues, en un grafo orientado los **arcos** son pares ordenados  $e = (i, j)$  donde  $i$  recibe el nombre de **vértice inicial** y  $j$  recibe el nombre de **vértice final** del arco  $e$ . Puesto que se trata de pares ordenados, es evidente que el arco  $(i, j)$  es, en general, distinto del arco  $(j, i)$ . Los arcos dirigidos  $e = (i, j)$  se representan gráficamente por  $i \longrightarrow j$ .

Si  $(i, j)$  es un arco  $(i \longrightarrow j)$  se dice que  $j$  es el **sucesor** de  $i$  y se denomina

$\Gamma(i)$  al conjunto de sucesores de  $i$ . Además, se dice que  $i$  es el **antecesor** de  $j$  y se denomina  $\Gamma^-(i)$  al conjunto de antecesores de  $i$ . Un arco se dice **incidente de entrada (salida)** de un vértice  $i$  si tiene a  $i$  como vértice final (inicial).

**Definición 2.2.** Un grafo no orientado o grafo no dirigido  $G = (V, A)$  está formado por dos conjuntos finitos  $V$  y  $A$  con  $V \neq \emptyset$  y  $A \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ , donde  $\mathcal{P}_2(V)$  denota al conjunto formado por los subconjuntos del conjunto potencia de  $V$  de cardinal 2.

En este tipo de grafos los arcos son pares no ordenados de  $V$ , cumpliéndose que  $(i, j) = (j, i)$ . Los arcos no dirigidos reciben también el nombre de **aristas**, se representan gráficamente por  $i - j$  y los vértices  $i, j$  se denominan los **extremos, vértices o nodos** de la arista.



(a) Grafo no orientado.  $G = (V, A^a)$

(b) Grafo orientado.  $G = (V, A^b)$

Figura 2.2: Ejemplos de grafos simples con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

En la figura 2.2 se muestra un ejemplo de dos grafos, uno orientado y otro no orientado, formados por el mismo conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . En el grafo no orientado representado en la figura 2.2a, el conjunto de aristas es  $A^a = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (4, 5)\}$ , mientras que en el grafo orientado representado en la figura 2.2b, el conjunto de arcos viene dado por  $A^b = \{(1, 2), (2, 1), (5, 1), (4, 1), (4, 5), (3, 2)\}$ .

En cualquiera de los dos casos, se denomina **orden** del grafo al cardinal de  $V$ , es decir, al número de vértices del mismo. Se denota por  $o(G)$ . El cardinal de  $A$  deriva el nombre de **tamaño** del grafo y se denota por  $t(G)$ , representando éste el número de arcos o aristas del mismo.

Algunos conceptos que relacionan ambos tipos de grafos son recordados a continuación.

**Definición 2.3.** *Dado un grafo orientado  $G = (V, A)$ , el **grafo subyacente** de  $G$  es un grafo no orientado  $G^s = (V, A^s)$  donde  $A^s$  está formado por los pares no ordenados  $\{i, j\}$  tales que el par ordenado  $(i, j) \in A$  o el par ordenado  $(j, i) \in A$ , es decir,*

$$A^s = \{\{i, j\} : (i, j) \in A \text{ o } (j, i) \in A\}$$

**Definición 2.4.** *Dado un grafo no orientado  $G = (V, A)$ , el **grafo orientado equivalente** de  $G$  es el grafo orientado  $G^o = (V, A^o)$  obtenido a partir de  $G$  considerando cada arista como un par de arcos de sentido opuesto, es decir,*

$$A^o = \bigcup_{\{i, j\} \in A} \{(i, j), (j, i)\}$$

En la figura 2.3 se representa un grafo no orientado  $G = (V, A)$  y su grafo orientado equivalente  $G = (V, A^o)$ .

En este trabajo, los grafos se usarán como herramientas para representar posibles caminos en problemas de optimización. En adelante se supondrán grafos dirigidos simples, que son los comúnmente utilizados para este tipo de problemas. Así pues, se trabajará con grafos orientados finitos, en los que no

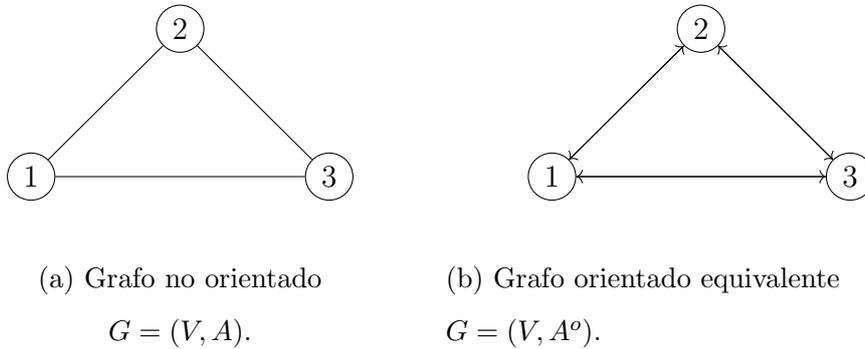


Figura 2.3: Ejemplos de un grafo no orientado,  $G = (V, A)$ , y su grafo orientado equivalente  $G = (V, A^o)$ .

hay ni bucles, ni arcos múltiples y siempre que se habla a partir de ahora de grafo, salvo que se diga lo contrario, se estará refiriendo a este tipo de estructuras.

**Definición 2.5.** En un grafo  $G = (V, A)$ , un **camino** del vértice  $v_0$  al vértice  $v_n$  (denotado  $P_{0n}$ ) es una secuencia alterna de vértices y arcos desde  $v_0$  hasta  $v_n$ :  $P_{0n} = v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  donde  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ . Un **circuito** es un camino en el que los vértices inicial y final coinciden.

Puesto que en los grafos simples sólo hay un arco entre vértices consecutivos, la representación se puede abreviar expresándolo como secuencia de vértices:  $P_{0n} = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ . El camino  $P_{0n}$  también se puede expresar como  $v_0 - v_1 - \dots - v_n$ .

**Definición 2.6.** La **longitud** de un camino  $P_{ij}$  es el número de arcos que lo forman. Si un camino tiene longitud 0, es decir, sólo está formado por un vértice, se denomina **camino trivial**.

Dos caminos  $P_{ij}$  y  $P_{jk}$ , tales que el vértice inicial de  $P_{jk}$  coincide con el

vértice final de  $P_{ij}$ , pueden unirse dando como resultado un camino de  $P_{ik}$  cuya longitud es la suma de las longitudes de los caminos originales. Esta unión se expresa como  $P_{ij} \cup P_{jk}$  o  $P_{ij} \cdot P_{jk}$ .

Algunos tipos de caminos especialmente relevantes son los caminos simples y elementales, los cuales son definidos a continuación.

**Definición 2.7.** *Un camino se dice **simple** si no pasa dos veces por el mismo arco y se dice **elemental** si no pasa dos veces por el mismo vértice.*

Más importante aún es considerar aquellos grafos en los que los caminos entre dos vértices existen. Existen distintas formas de formular matemáticamente esta idea. En concreto, aquí se tratarán dos de ellas, que son las más interesantes desde el punto de vista aplicado.

**Definición 2.8.** *Dado un grafo  $G = (V, A)$ , se dice que es **fuertemente conexo** si dados dos vértices distintos cualesquiera  $i, j \in V$  existe un camino de  $i$  a  $j$  y se dice que es **conexo** si existe un vértice  $i \in V$  tal que existe un camino de  $i$  a  $j$ , para cualquier  $j \in V - \{i\}$ .*

Es evidente que todo grafo fuertemente conexo es conexo, puesto que un grafo fuertemente conexo exige no solo que exista un vértice  $i$  con esa característica, sino que todos los sean. Sin embargo, también es inmediato ver que el recíproco no es cierto. En el caso de un grafo orientado conexo, se puede considerar que el vértice  $i$  es el vértice inicial del mismo.

Otro concepto relevante, especialmente en este trabajo, es el de distancia entre dos vértices.

**Definición 2.9.** La distancia  $d(i, j)$  de un vértice  $i$  a un vértice  $j$  en un grafo  $G$  es, si existe, la longitud del camino más corto  $P_{ij}$  o, en otro caso,  $d(i, j) = \infty$ .

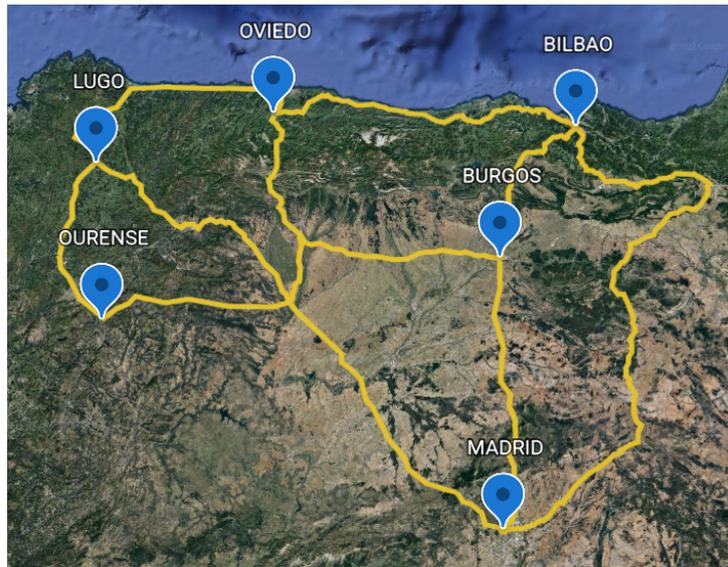


Figura 2.4: Mapa de ciudades y carreteras del norte de España.

Considérese la situación de la figura 5.1, que consiste en un mapa del norte de España en el que se destacan 6 ciudades: *Oviedo*, *Lugo*, *Bilbao*, *Burgos*, *Ourense* y *Madrid*. Estas ciudades están conectadas mediante carreteras, que vienen señalizadas en amarillo. El problema que se plantea es encontrar el camino óptimo para viajar de *Oviedo* a *Madrid*. En primer lugar es necesario sintetizar la información en un grafo dirigido simple. En este caso, a partir del grafo orientado equivalente que se asociaría de forma inmediata a la imagen de la figura 5.1, se hace una simplificación para facilitar su comprensión desde el punto de vista metodológico. Así, se consideran las carreteras en un único sentido, dando lugar al grafo representado en la figura 2.5.

Se ha definido la longitud de un camino como el número de arcos que

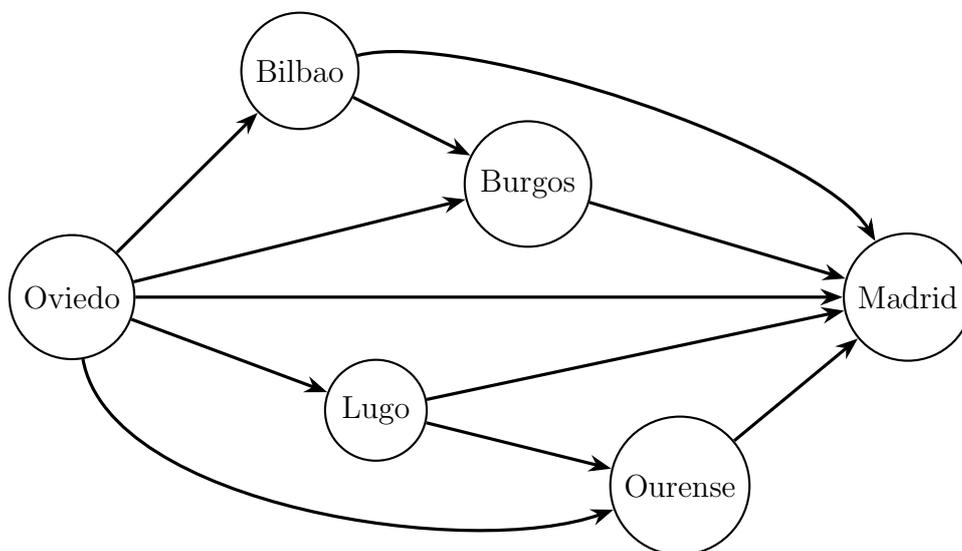


Figura 2.5: Ejemplo de grafo orientado cuyos vértices son ciudades.

lo componen, en cuyo caso se está considerando que todos los arcos tienen el mismo valor. Es decir, tomándose el grafo  $G = (V, A)$  de la figura 2.5, cuyos vértices  $V = \{Oviedo, Burgos, Lugo, Madrid, Ourense, Bilbao\}$  representan 6 ciudades y cuyos arcos  $A$  representan las carreteras que las unen, la longitud del camino *Oviedo-Madrid* sería 1, mientras que la de los caminos *Oviedo-Burgos-Madrid*, *Oviedo-Lugo-Madrid*, *Oviedo-Bilbao-Madrid* y *Oviedo-Ourense-Madrid* sería 2. Por tanto, sería equivalente viajar desde Oviedo a Madrid pasando por Burgos o por Ourense. Sin embargo esto no es así en la vida real y se hace necesario diferenciar el valor de los arcos, para lo cual surge el concepto de peso. Asociado al mismo aparece el concepto de red. Ambos son introducidos a continuación.

**Definición 2.10.** Una red es un conjunto  $R = (V, A, p)$  formado por un grafo  $G = (V, A)$  y una aplicación  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  que a cada arco  $e \in A$  le asigna un peso  $p_e \in \mathbb{R}^n$ .

Puesto que un camino se puede ver como una secuencia de arcos y estos ahora tienen asociado un peso, se podría también valorar el peso conjunto del camino, tal como se puede ver a continuación.

**Definición 2.11.** *Dada una red  $R = (V, A, p)$  y dado un camino  $P_{ij}$  en  $R$  que va de  $i \in V$  a  $j \in V$ , se define el **coste o valor del camino**  $P_{ij}$  como la suma de los pesos de los arcos que lo forman:*

$$p(P_{ij}) = \sum_{e \in P_{ij}} p(e) = p_{i,v_1} + p_{v_1,v_2} + \dots + p_{v_{k-1},v_k} + p_{v_k,j} \quad (2.1)$$

Inicialmente los pesos pueden tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales, indicando costes, longitudes, tiempos, capacidades, etc. Dada la naturaleza de las magnitudes habitualmente representadas, en los casos más habituales en la práctica los pesos son números positivos y como tal van a ser considerados en este trabajo.

En el ejemplo anteriormente considerado respecto al camino de *Oviedo* a *Madrid*, cuyo grafo está representado en la figura 2.5, se puede considerar que los pesos representan la distancia en kilómetros entre los distintos vértices/ciudades, con lo que en este caso  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La red asociada se muestra en la figura 2.6. En este caso, el camino *Oviedo-Burgos-Madrid* tiene un valor de 545 km, mientras que el valor del camino *Oviedo-Lugo-Madrid* es 751 km. Es evidente que esta red parece describir mejor la situación real asociada a este problema.

Cuando se tiene este tipo de grafos, suele ser interesante encontrar el camino de menor valor (CMV) desde un vértice fuente  $s \in V$  al resto de vértices de  $V$ . Este problema también es conocido como “Problema del Camino más

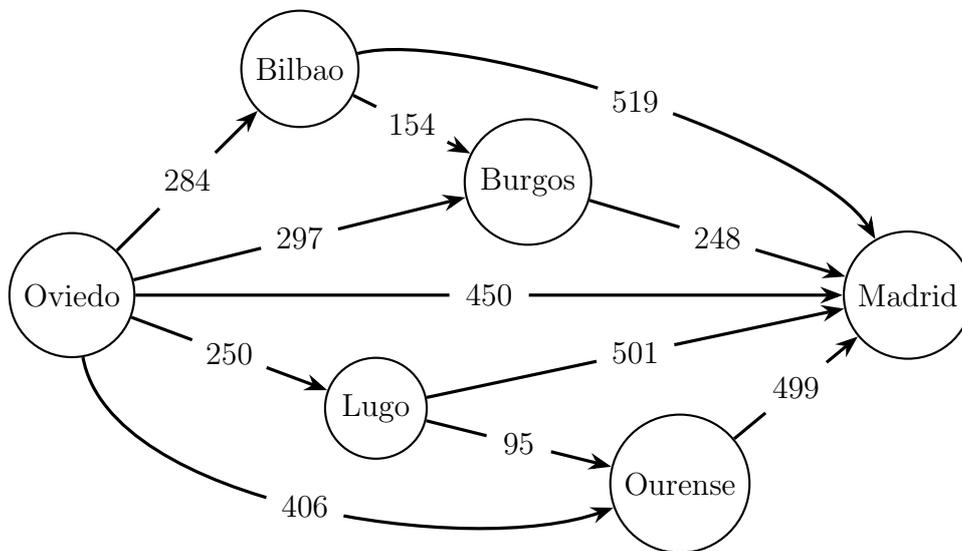


Figura 2.6: Ejemplo de red orientada cuyos vértices son ciudades y los pesos, las distancias entre éstas.

Corto” y es un problema recurrente en muchos ámbitos, como pueden ser las redes sociales, los problemas de transporte, los sistemas de información geográfica, etc. Para resolver este problema existen diversos algoritmos. Se puede encontrar una buena revisión de la historia del problema del camino más corto, junto con los algoritmos clásicos y las aplicaciones en ([Schrijver, 2012](#)).

En general la existencia de un camino de menor valor no está garantizada, incluso en el caso en el que el grafo sea conexo. Sin embargo dicha existencia queda caracterizada bajo ciertas condiciones.

**Teorema 2.1.** *Sea  $R = (V, A, p)$  una red orientada fuertemente y sea  $i$  un vértice cualquiera de  $V$ . Existe un camino de menor valor de  $i$  a cualquier otro vértice  $j$  de  $V$  si, y sólo si, no existen circuitos de valor negativo en  $R$ .*

De este resultado se deduce que si no existen circuitos de valor negativo, es suficiente buscar entre los caminos elementales para encontrar un camino de menor valor.

A la hora de encontrar dichos caminos, en caso de existir, es importante buscar un método que sea eficiente computacionalmente. En el desarrollo del mismo es fundamental el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.** *Sea  $R = (V, A, p)$  una red orientada fuertemente conexa y sea  $P_{rs}$  un camino en  $R$  de menor valor de  $r$  a  $s$ . Todo subcamino  $P_{ri}$  de  $P_{rs}$  es un camino de menor valor de  $r$  a  $i$ , para todo  $i \in P_{rs}$  con  $i \neq r$  y  $j \neq r$ .*

De aquí se deduce que al obtener un camino de menor valor de  $r$  a  $s$ , con el mismo esfuerzo computacional se obtiene también un camino de menor valor de  $r$  a cada vértice intermedio  $i$  de dicho camino. Por lo tanto se puede proponer un procedimiento recurrente para la obtención de los caminos de menor valor desde un vértice dado.

En el caso en que todos los pesos sean números reales positivos, es decir,  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ , puesto que no pueden existir circuitos de valor negativo, se tiene garantizada la existencia de los caminos de menor valor desde un vértice inicial.

Estos caminos pueden calcularse aplicando el algoritmo del camino más corto de Dijkstra ([Dijkstra et al., 1959](#)), que tiene muchas variantes. Originalmente, el algoritmo de Dijkstra consistía en encontrar el camino más corto entre dos nodos dados, pero una variante más común es aquella que encuentra los caminos más cortos de un nodo al resto.

El resultado fundamental en el desarrollo de dicho algoritmo puede verse a continuación.

**Teorema 2.3.** *Sea  $R = (V, A, p)$  una red orientada fuertemente conexa con  $p(e) \geq 0, \forall e \in A$  y sea  $r \in V$  fijado. Supóngase que se tienen unos valores  $D'(i)$  correspondientes a los valores de caminos de  $s$  a  $i$  para cada  $i \in V - \{s\}$  y que existe un conjunto de vértices  $V' \subseteq V - \{s\}$  tal que:*

$$D'(i) = \begin{cases} \text{valor de un CMV de } s \text{ a } i & \text{si } i \in V - V' \\ \text{mín}\{D'(j) + p_{ji} : j \in \Gamma^-(i) \cap (V - V')\} & \text{si } i \in V' \cap \left( \bigcup_{j \in V - V'} \Gamma(j) \right) \end{cases}$$

*Si  $v \in V'$  verifica que  $D'(v) = \text{mín}\{D'(i) : i \in V'\}$ , entonces  $D'(v)$  es el valor de un CMV de  $s$  a  $v$ .*

En el resultado anterior  $V - V'$  representa el conjunto de vértices en los que ya se han encontrados los caminos de menor valor desde  $s$  y  $V'$  es el conjunto de vértices en los que aún no se ha encontrado dicho camino. Este teorema proporciona el método para encontrar los caminos de menor valor para los vértices de  $V'$  buscando entre los sucesores de elementos de  $V - V'$ .

De todo lo anterior se deduce el algoritmo de Dijkstra. En algoritmo 1 puede verse la descripción del pseudocódigo del algoritmo de Dijkstra. Se parte de una red orientada fuertemente conexa  $R = (V, A, p)$  con pesos positivos y de un vértice inicial  $s$  y se obtienen los caminos de valor mínimo de  $s$  al resto de vértices. Para ello, dado un vértice  $r$ , se definen las funciones

$D(i)$  e  $I(i)$ :

$$D(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = r \\ p_{ri} & \text{si } i \in \Gamma(r) \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$I(i) = \begin{cases} r & \text{si } i \in \Gamma(r) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.3)$$

---

**Algorithm 1** Algoritmo Dijkstra CMV

---

**Input:** Red orientada conexa  $R = (V, A, p)$  con  $p_e \geq 0, \forall e \in A$  y vértice inicial  $s$

**Output:** Caminos de valor mínimo de  $s$  al resto de vértices

- 1: Se inicializan  $V' = V - \{s\}$  y  $\Gamma(s)$
- 2: Se definen  $D(i)$  e  $I(i)$  para  $i = 1, \dots, o(R)$
- 3: **while**  $V' \neq \emptyset$  **do**
- 4:   Se busca  $v \in V'$  que minimice  $D(v)$
- 5:   Se actualiza  $V' = V' - \{v\}$
- 6:   Para todo  $j \in \Gamma(v) \cap V'$  se calcula  $t_j = D(v) + p_{v,j}$
- 7:   **if**  $t_j < D(j)$  **then**
- 8:      $D(j) = t_j$
- 9:      $I(j) = v$
- 10:   **end if**
- 11: **end while**

12: Se devuelven los CMV desde  $s$  hasta el resto de vértices

---

A continuación se aplicará este algoritmo al ejemplo de red considerado en la figura 2.6. Las soluciones que se obtienen son los caminos más cortos para

llegar de *Oviedo* al resto de ciudades. En concreto, el problema planteado inicialmente consistía en encontrar la manera óptima (el CMV) de llegar de *Oviedo* a *Madrid*.

- En primer lugar se inicializa el algoritmo considerando  $s = Oviedo$  con lo que  $V' = \{Bilbao, Burgos, Lugo, Ourense, Madrid\}$  y  $\Gamma(s)$  es  $\Gamma(Oviedo) = \{Bilbao, Burgos, Lugo, Ourense, Madrid\}$

	<i>Oviedo</i>	<i>Bilbao</i>	<i>Burgos</i>	<i>Lugo</i>	<i>Ourense</i>	<i>Madrid</i>
<i>D</i>	0	284	297	250	406	450
<i>I</i>	0	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>

- *Lugo* es el vértice de  $V'$  que minimiza  $D$ , por lo que en este segundo paso del algoritmo se obtiene que  $V' = \{Bilbao, Burgos, Ourense, Madrid\}$  y que  $\Gamma(Lugo) = \{Ourense, Madrid\}$ . Por lo tanto, se tiene que  $\Gamma(Lugo) \cap V' = \{Ourense, Madrid\}$  y entonces es necesario recalcular las distancias a *Ourense* y *Madrid* para ver si pasando por *Lugo* esta es menor de lo que se obtenía directamente yendo desde *Oviedo*. Así,

$$D(i) = \begin{cases} t_{Ourense} = D(Lugo) + p_{Lugo-Ourense} = \\ \qquad \qquad \qquad 250 + 95 = 345 < 406 = D(Ourense) \\ t_{Madrid} = D(Lugo) + p_{Lugo-Madrid} = \\ \qquad \qquad \qquad 250 + 501 = 751 \geq 450 = D(Madrid) \end{cases}$$

con lo cual solo deben ser actualizados los valores de la tabla para el vértice *Ourense*, obteniendo:

	<i>Oviedo</i>	<i>Bilbao</i>	<i>Burgos</i>	<i>Lugo</i>	<i>Ourense</i>	<i>Madrid</i>
<i>D</i>	0	284	297	250	345	450
<i>I</i>	0	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>	<i>Oviedo</i>	<i>Lugo</i>	<i>Oviedo</i>

- El vértice que minimiza  $D$  de los que pertenecen a  $V'$  es *Bilbao*. Habría ahora que repetir el procedimiento hasta que  $V' = \emptyset$ . En ninguno de los pasos posteriores se obtienen valores de  $t_j$  inferiores a los de  $D(j)$  con lo que la tabla anterior no sufre modificación alguna y es el resultado final del algoritmo.

Como consecuencia del mismo, se obtienen los caminos de valor mínimo desde *Oviedo* al resto de ciudades. Estos han sido representados en la figura 2.7.

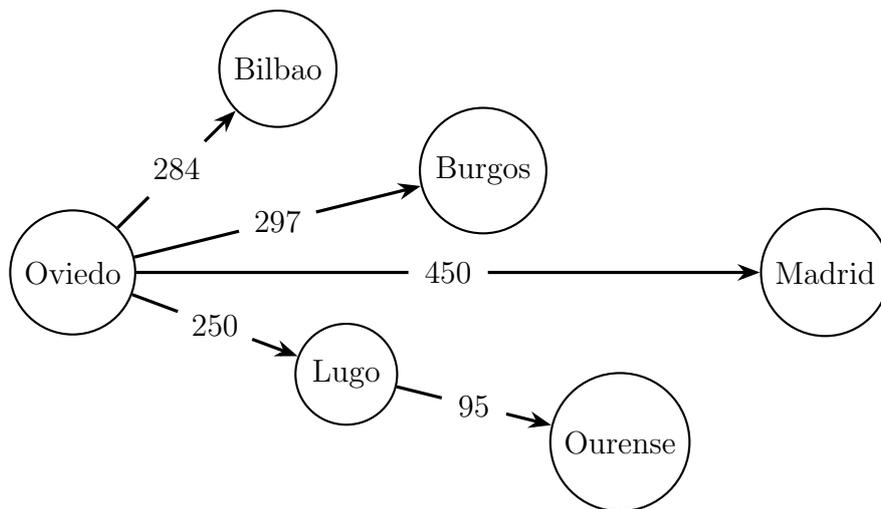


Figura 2.7: CMVs desde Oviedo al resto de ciudades, obtenidos al aplicar el algoritmo de Dijkstra.

Así, se ha mostrado un posible método que permite obtener los caminos de valor mínimo de un vértice al resto de vértices en una red orientada conexa con pesos positivos y se ha aplicado el mismo a un ejemplo donde el criterio considerado para definir los pesos asociados a los distintos arcos era la distancia entre ciudades. En dicho ejemplo se concluye que el camino de menor valor de *Oviedo* a *Madrid* es ir directamente de Oviedo a Madrid, sin

pasar por ninguna de las otras ciudades (*Oviedo – Madrid*), con un valor de 450 km.

Ahora bien, a la hora de considerar el camino óptimo en este viaje, no sólo interesa la distancia a recorrer, sino que también interesan otros factores como puede ser el precio o coste asociado al mismo. A continuación, se considera el mismo problema pero teniendo en cuenta el precio de cada recorrido, que puede ser modelizado mediante una red como la representada en la figura 2.8.

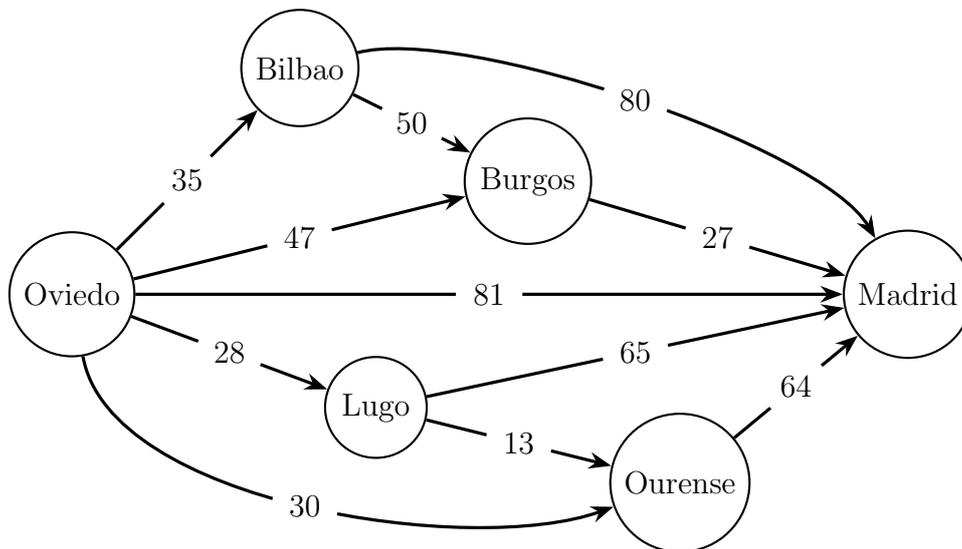


Figura 2.8: Ejemplo de red orientada cuyos vértices son ciudades y los pesos son el precio de viaje entre éstas.

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento del ejemplo anterior, es decir, aplicando el algoritmo de Dijkstra, se llega a la solución representada en la figura 2.9. En ella vienen representados los caminos de menor valor de *Oviedo* al resto de ciudades, donde los pesos se corresponden con precios en euros, es decir, los caminos más baratos. En este caso, el camino óptimo para

viajar de *Oviedo* a *Madrid* es ir de *Oviedo* a *Burgos* y de aquí a *Madrid* (*Oviedo – Burgos – Madrid*), con un precio o coste de 74 euros.

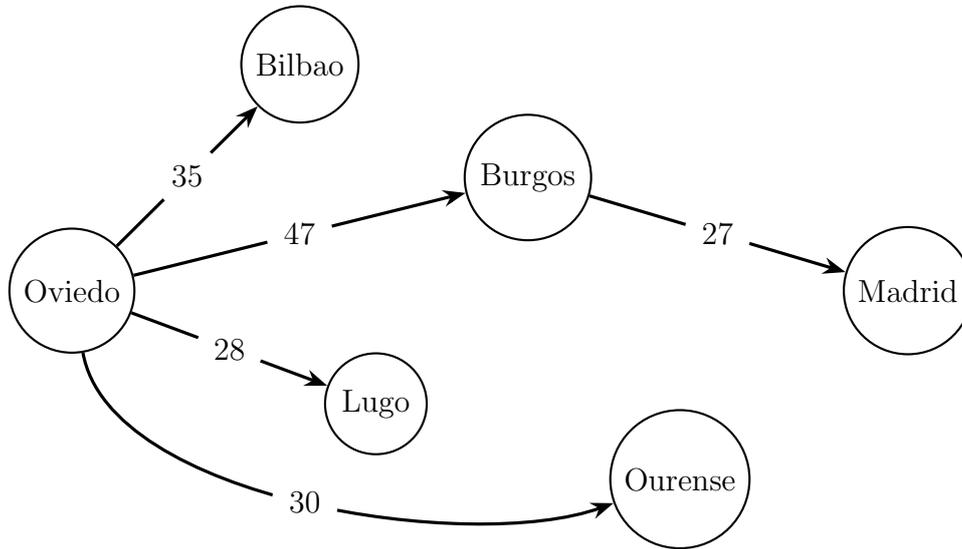


Figura 2.9: Solución del algoritmo Dijkstra para el problema de la figura 2.8.

Como puede verse, los caminos de mínimo valor no son iguales para un criterio que para otro. En el caso de las distancias, el camino de menor valor para llegar de *Oviedo* a *Madrid* era *Oviedo–Madrid*, mientras que en el caso de los precios, el camino de menor valor es *Oviedo–Burgos–Madrid*. Esto es completamente lógico, puesto que no es esperable soluciones iguales en problemas donde las condiciones de partida sean distintas, pudiendo incluso darse el caso de caminos de menor valor respecto a un conjunto de pesos que pasarían a ser los de mayor valor respecto a otro conjunto de pesos distintos, simplemente cambiando por ejemplo el signo de los mismos.

No obstante, en la práctica es muy habitual encontrarse problemas donde no solo hay una característica que afecta al problema, sino que existen varias,

que pueden estar más o menos relacionadas entre sí, pudiendo incluso llegar a ser contrapuestas. Por lo tanto, no suele ser una opción eficiente considerar los distintos criterios de forma independiente, y lo recomendable es trabajar de forma simultánea con todos ellos. Este tipo de problemas dan lugar al problema del camino más corto multicriterio, el cuál se introduce en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# El problema del camino más corto multicriterio

El valor de un camino se mide tradicionalmente en la literatura matemática en términos de un único criterio. Sin embargo, en muchos casos los métodos desarrollados bajo esa premisa no son suficientes para definir de forma realista la preferencia entre rutas. Por ello surge el problema del camino más corto multicriterio (MOSP por las siglas en inglés *Multi-Objective Shortest Path*), donde cada arco tiene pesos correspondientes a varios criterios y, por tanto, los caminos tienen varios valores, uno asociado a cada conjunto de pesos considerado. Los conjuntos de soluciones de estos problemas pueden crecer exponencialmente con el tamaño del problema. En ([Tarapata, 2007](#)) se da una buena revisión de los modelos MOSP, así como la adaptación de los algoritmos comunes para la resolución de estos problemas. Muchos de estos métodos convierten el problema multicriterio en un problema unicriterio

agregando o combinando los diferentes criterios, pero la solución resultante al problema está sujeta a los parámetros establecidos por el usuario (Odu and Charles-Owaba, 2013). Uno de los métodos más populares para resolver los problemas MOSP es la construcción de conjuntos aproximados de Pareto.

Para resolver los problemas MOSP, (Fandel and Gal, 1979) propusieron una generalización del algoritmo de Dijkstra a dos criterios. Este algoritmo fue a su vez generalizado a cualquier número de criterios por (Martins, 1984).

En este capítulo, basado en el trabajo de (Hanusse et al., 2020), se dan una serie de conceptos básicos necesarios para entender el algoritmo utilizado para resolver el problema multicriterio.

En lo que sigue se considera que  $R = (V, A, (p_1, p_2, \dots, p_d))$  es una red orientada conexa de orden  $n$  ( $o(R) = n$ ), tamaño  $m$  ( $t(R) = m$ ) y  $d$  criterios  $p_i$ , denotando por  $s$  un vértice fuente respecto al que la red  $R$  es conexa.

Es muy simple saber cuando un camino es de menor valor que otro respecto a un criterio cualquiera  $p_i$ , pero si se consideran varios criterios, como ya se comentó en el capítulo anterior, puede que no haya un camino mejor que los otros respecto a todos ellos. En caso de existir, éste sería el resultado del MOSP. En otros casos, será necesario conformarse con soluciones parciales. En concreto se puede empezar haciendo comparaciones dos a dos entre los caminos y se dice que uno domina a otro si es mejor respecto a todos los criterios. Más en concreto,

**Definición 3.1.** Sean  $P$  y  $P'$  dos caminos de la red  $R = (V, A, (p_1, p_2, \dots, p_d))$ . Se dice que el camino  $P$  **domina** al camino  $P'$  si para cualquier  $i \in \{1, \dots, d\}$

se tiene que

$$p_i(P) \leq p_i(P')$$

**Definición 3.2.** Dado un conjunto de caminos  $\mathcal{T}$  de la red  $R$ . Un **conjunto de Pareto** de  $\mathcal{T}$  es aquel formado por caminos de  $\mathcal{T}$  que no están dominados por ningún otro camino en  $\mathcal{T}$ .

En caso de que haya varios caminos en  $\mathcal{T}$  con el mismo coste, como máximo uno de ellos estará en el conjunto de Pareto.

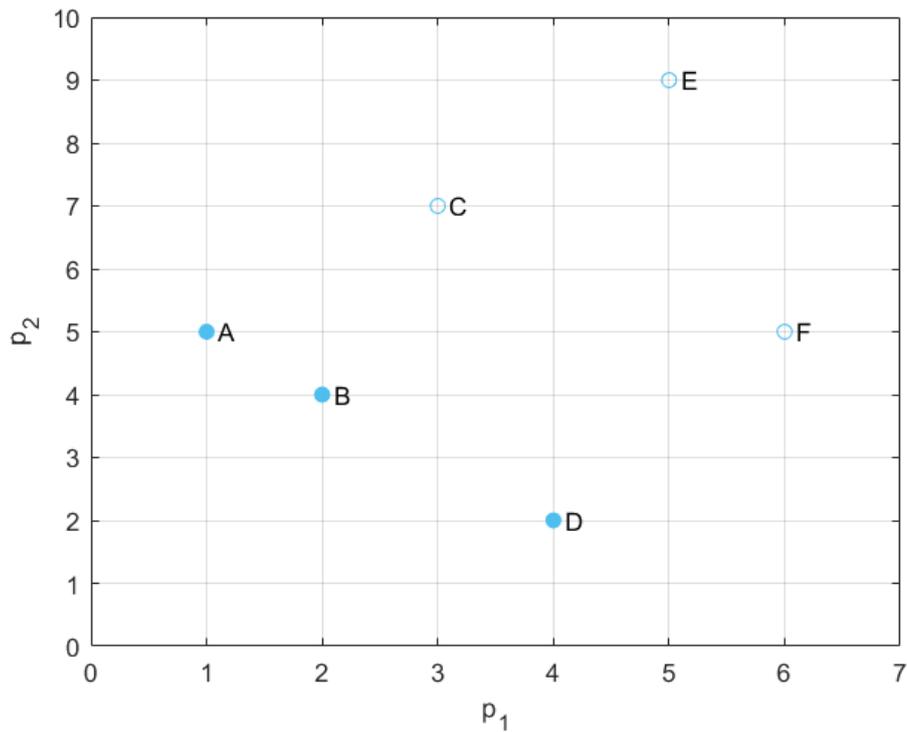


Figura 3.1: Conjunto de Pareto correspondiente a dos criterios,  $p_1$  y  $p_2$ .

En la figura 3.1 se muestra un ejemplo con dos criterios,  $p_1$  y  $p_2$ . Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  se representan en función del valor que tengan

para cada uno de los criterios. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  pertenecen al conjunto de Pareto, también conocido como frontera de Pareto, pues no están dominados por ningún otro punto del conjunto. El punto  $C$  no pertenece al conjunto Pareto porque está dominado al menos por  $B$ , puesto que  $p_1^B = 2 < p_1^C = 3$  y  $p_2^B = 4 < p_2^C = 7$ .

Volviendo ahora al ejemplo de las ciudades, considerado en el capítulo anterior, para viajar de *Oviedo* a *Madrid* interesa elegir el mejor camino teniendo en cuenta los dos criterios a la vez, la distancia de la carretera y el precio de cada ruta. Ahora la aplicación peso se convierte en  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde la primera componente,  $p_1$ , indica la distancia en kilómetros y la segunda componente,  $p_2$ , indica el precio en euros.

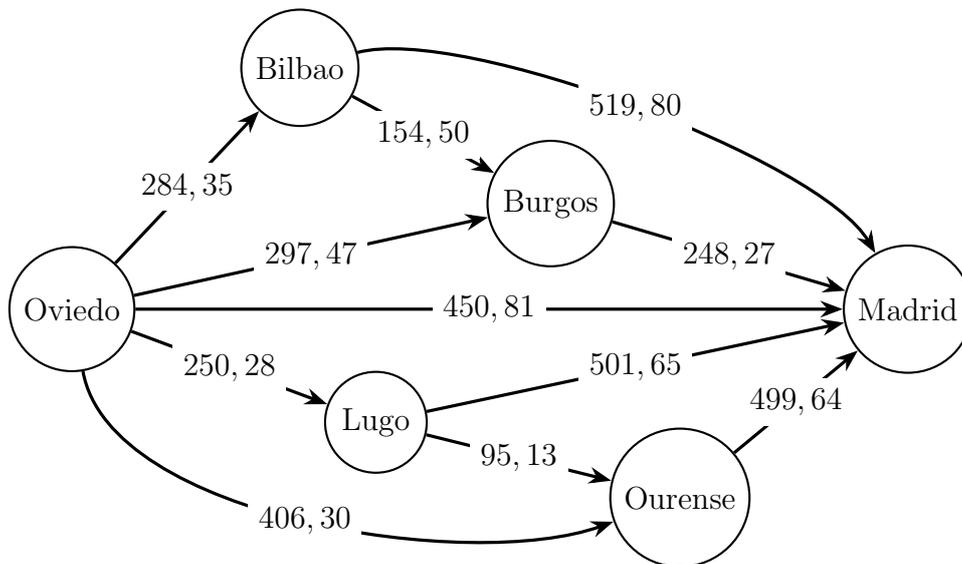


Figura 3.2: Grafo orientado multicriterio cuyos vértices son ciudades y cuyos pesos indican, respectivamente, la distancia y el precio de viaje entre éstas.

Por tanto, el nuevo problema se puede resolver encontrando los caminos

de menor valor de un vértice a otro en una red con varios criterios, en concreto en la red representada en la figura 3.2.

El primer paso para resolver el problema del camino más corto multicriterio consiste en encontrar para cada vértice  $v \in V$  un conjunto de Pareto  $S_v$  del conjunto de todos los caminos de  $s$  a  $v$ . Para resolver este problema se utilizará el algoritmo de Dijkstra generalizado a cualquier número de criterios  $d$  presentado en (Hanusse et al., 2020), al que se denominará Algoritmo Dijkstra MC (MultiCriterio), que se corresponde con el algoritmo 2 aquí presentado. En el mismo la red de partida tiene que ser una red orientada conexa con vértice inicial que será denotado por  $s$  y con  $d$  criterios, es decir,  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ , con lo que cada arco tendrá  $d$  pesos asociados a él. El objetivo del mismo es encontrar los conjuntos de Pareto  $S_v$  asociados a cada vértice  $v$ , es decir, la colección de caminos de  $s$  a  $v$  que no están dominados por ningún otro camino entre esos dos vértices, es decir, para los que existe al menos un criterio de los  $d$  considerados, con respecto al cual cualquier otro camino tiene más valor que los que están en ese conjunto.

Como ejemplo de aplicación de dicho algoritmo, se considera de nuevo el problema de las ciudades, con los dos criterios de distancia y coste considerados en la figura 3.2. Recuérdese también que se estaba considerando que el vértice inicial era *Oviedo*. Se va a detallar a continuación tanto el algoritmo, como su aplicación a este ejemplo concreto.

---

**Algorithm 2** Algoritmo Dijkstra MC

---

**Input:** Red orientada conexa  $R = (V, A, p)$  y vértice inicial  $s$

**Output:** Conjuntos de Pareto  $S_v$  para cada vértice  $u \in V$

```
1: Se inicializa  $T_s = \{\text{camino vacío de } s \text{ a } s\}$  y
2: for  $u \in V$  do
3:    $S_u = \emptyset$ 
4:    $T_u = \emptyset$ 
5: end for
6: while  $\cup_{u \in V} T_u \neq \emptyset$  do
7:   Sea  $P$ , con vértice final  $v$ , el mínimo lexicográfico de  $\cup_{u \in V} T_u$ 
8:    $T_v = T_v - \{P\}$ 
9:    $S_v = S_v \cup \{P\}$ 
10:  for  $(v, w) \in A$  do
11:    if  $P' = P \cdot (v, w)$  no está dominado por un camino en  $T_w$  ni en  $S_w$ 
12:      then
13:        Cualquier camino de  $T_w$  dominado por  $P'$  se quita de  $T_w$  y
14:         $T_w = T_w \cup P'$ 
15:      end if
16:    end for
17:  end while
```

---

Aplicando este algoritmo al ejemplo considerado en la red de la figura 3.2:

- En primer lugar, se inicializa  $T_{Oviedo} = \{\text{camino vacío de } Oviedo \text{ a } Oviedo\}$  y  $T_u = \{\emptyset\}$ ,  $S_u = \{\emptyset\}$  para el resto de vértices  $u$

- Puesto que  $\cup_{u \in V} T_u = T_{Oviedo} \neq \emptyset$ , se toma el mínimo lexicográfico de ese conjunto, que es  $P = \{\text{camino vacío de } Oviedo \text{ a } Oviedo\}$  y se tiene que  $T_{Oviedo} = T_{Oviedo} - P = \emptyset$  y  $S_{Oviedo} = S_{Oviedo} \cup P = \{\text{camino vacío de } Oviedo \text{ a } Oviedo\}$
  
- Ahora se toman los caminos a vértices sucesores de *Oviedo*
  - *Oviedo – Bilbao*, valor (284,35), no está dominado por ningún camino en  $T_{Bilbao} = \emptyset$ , por lo que  $T_{Bilbao} = T_{Bilbao} \cup \{Oviedo - Bilbao\} = \{Oviedo - Bilbao\}$
  - Razonando análogamente, se tiene
 
$$T_{Burgos} = \{Oviedo - Burgos\},$$

$$T_{Madrid} = \{Oviedo - Madrid\},$$

$$T_{Lugo} = \{Oviedo - Lugo\}$$

$$T_{Ourense} = \{Oviedo - Ourense\}$$
  
- De nuevo,  $\cup_{u \in V} T_u = T_{Bilbao} \cup T_{Burgos} \cup T_{Madrid} \cup T_{Lugo} \cup T_{Ourense} \neq \emptyset$ . De este conjunto de caminos, el mínimo lexicográfico es  $\{Oviedo - Lugo\}$ , que tiene un valor (250,28), por lo que  $T_{Lugo} = T_{Lugo} - \{Oviedo - Lugo\} = \emptyset$  y  $S_{Lugo} = S_{Lugo} \cup \{Oviedo - Lugo\} = \{Oviedo - Lugo\}$
  
- A continuación se toman los caminos a vértices sucesores de *Lugo*
  - *Oviedo–Lugo–Madrid*, valor (751,93), está dominado en  $T_{Madrid}$  por el camino *Oviedo–Madrid*, cuyo valor es (450,81), por lo que  $T_{Madrid}$  no cambia
  - *Oviedo – Lugo – Ourense*, valor (345,41), no está dominado por ningún camino de  $T_{Ourense}$  y tampoco domina a ningún camino de ese conjunto, por lo que  $T_{Ourense} = \{Oviedo - Ourense, Oviedo - Lugo - Ourense\}$

- Repitiendo el procedimiento hasta que  $\cup_{u \in V} T_u = \emptyset$ , se llega a los siguientes conjuntos de Pareto
  - $S_{Bilbao} = \{Oviedo - Bilbao\}$
  - $S_{Burgos} = \{Oviedo - Burgos\}$
  - $S_{Lugo} = \{Oviedo - Lugo\}$
  - $S_{Ourense} = \{Oviedo - Ourense, Oviedo - Lugo - Ourense\}$
  - $S_{Madrid} = \{Oviedo - Madrid, Oviedo - Burgos - Madrid\}$

Al resolver el problema multicriterio con este algoritmo, las soluciones obtenidas son conjuntos de Pareto, que son conjuntos de caminos óptimos. En algunos casos estos se corresponden con un solo camino, con lo que la solución es única. No obstante esto no siempre es así. Por ejemplo, para ir de *Oviedo* a *Madrid* hay dos caminos óptimos, *Oviedo - Madrid*, cuyo valor es (450 km, 81 eur) y *Oviedo - Burgos - Madrid*, cuyo valor es (545 km, 74 eur). Estos dos caminos no están dominados por ningún otro y además no son comparables entre sí, puesto que el primero es mejor respecto a la distancia y el segundo respecto al coste.

Los conjuntos de Pareto no siempre son grandes en la práctica, especialmente si los criterios están correlacionados. Sin embargo, cuando el número de criterios crece y algunos están correlacionados negativamente, los tamaños de los conjuntos de Pareto pueden resultar poco prácticos ([Hanusse et al., 2020](#)). Por esta razón, es importante especificar algún tipo de orden entre los caminos contenidos en el conjunto de Pareto, con el objetivo de reducir la dimensión del conjunto de soluciones de forma coherente con el problema en estudio. Para ello, como se verá más adelante, se propone utilizar métodos

de clasificación o *ranking*. No obstante, antes de concluir este capítulo y pasar a analizar estos métodos, se van a hacer algunos comentarios relevantes respecto a los conjuntos de Pareto.

Cabe destacar que en el conjunto de Pareto obtenido mediante el algoritmo modificado de Dijkstra, siempre están incluidas las soluciones que se obtendrían aplicando el algoritmo con cada criterio por separado. En el ejemplo de las ciudades, cuando sólo se tenía en cuenta la distancia, el camino de menor valor entre *Oviedo* y *Madrid* era *Oviedo – Madrid* y cuando sólo se tenían en cuenta los precios, *Oviedo – Burgos – Madrid*. En el caso de considerar los dos criterios a la vez, ambos caminos están incluidos en el conjunto de Pareto solución.

Esto se debe a que, cuando se consideran los criterios por separado, el algoritmo de Dijkstra proporciona el camino de menor valor para ese criterio. Ahora bien, recordando la definición 3.1, un camino  $P$  domina a un camino  $P'$  si  $p_i(P) \leq p_i(P')$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , siendo  $d$  el número de criterios distintos considerados. Es decir, si los criterios son distancia y precio,  $P$  dominará a  $P'$  si la distancia de  $P$  es menor que la de  $P'$  y el precio de  $P$  es menor que el de  $P'$ . Entonces, si para cada criterio por separado se obtuviese un camino de menor valor diferente,  $C$  para la distancia y  $C'$  para el precio,  $C$  tendría menor distancia pero  $C'$  tendría menor precio, y por tanto ninguno podría dominar al otro.

En el algoritmo Dijkstra MC se utiliza un orden lexicográfico, que consiste en seleccionar los caminos del conjunto  $\cup_{u \in V} T_u$  fijándose en el primer elemento del vector peso (es decir, en el primer criterio) tomando el de valor

mínimo y, si hay empates, fijándose en el siguiente elemento y así sucesivamente. Puesto que este orden lexicográfico está asociado al orden en el que se indiquen los criterios, cabe preguntarse si el resultado varía al cambiar de orden los criterios. La respuesta es que no pues, si bien es cierto que al inicio de cada iteración se selecciona un camino atendiendo al orden lexicográfico, posteriormente, antes de finalizar la iteración, se comparan los caminos fijándose en todos sus criterios, por lo que es indiferente el orden en que se estén considerando.

# Capítulo 4

## Agregación de *rankings*

En el problema MOSP se puede considerar que cada criterio proporciona una ordenación en el conjunto de caminos y, más en concreto, en el conjunto Pareto asociado a cada vértice. Se pueden plantear distintas formas de fusionar esa información, planteándose en este trabajo el uso de los métodos de agregación de *rankings* para ello. Estos surgen en la vida real en muchas situaciones en las que es necesario clasificar diferentes alternativas en función de distintos criterios u opiniones. Por ejemplo, en el caso de elecciones a la presidencia, clasificaciones de competiciones deportivas, comparación de la calidad de diferentes universidades o las preferencias a destinos turísticos.

Estas secuencias u ordenaciones reciben el nombre de *rankings* y se utilizan en campos muy diversos como la física, la química, la sociología, la psicología o la lingüística. En este tipo de situaciones no se tiene un solo *ranking*, sino que se tiene un conjunto de ellos (por ejemplo, en el caso de

algún sistema de elecciones a la presidencia, cada votante aporta un *ranking*), por lo que son necesarios métodos de agregación de *rankings* que permitan clasificar las soluciones óptimas.

En el problema del camino más corto multicriterio, cada criterio se puede considerar un votante, utilizando la nomenclatura habitual en *rankings* que se establecerá más adelante, y todos los caminos contenidos en el conjunto de Pareto pueden ser ordenadas de acuerdo a cada criterio. Una vez obtenidas esas ordenaciones, se aplica un método de agregación de *rankings* para determinar la solución única del problema del camino más corto multicriterio. Para ello, en este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de teoría de *rankings* y agregación de los mismos. Para más información, véase (Rico et al., 2021) y (Balinski and Laraki, 2007), entre otros. Toda la metodología considerada será fusionada en el siguiente capítulo, en el que se planteará un nuevo método refinado de encontrar soluciones en un problema MOSP combinando las técnicas que se verán a continuación, con la teoría clásica de modelos de optimización en redes.

**Definición 4.1.** Sea  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  alternativas. Los votantes expresan su orden de preferencia de las alternativas de  $\mathcal{A}$  mediante un *ranking*. Un *ranking* se puede dividir en una relación de orden estricto ( $a_i \succ a_j$ ) y una relación de equivalencia ( $a_i \sim a_j$ ).

Una vez que cada votante ordena el conjunto de alternativas acorde a sus preferencias, surge la necesidad de diseñar ciertos métodos que permitan clasificarlos y obtener conclusiones. Éstos son los llamados métodos de agregación de *rankings*.

**Definición 4.2.** Un perfil de *rankings*,  $\pi_m^n$ , es la lista de todos los *rankings*

expresados por  $m$  votantes en un conjunto de  $n$  alternativas.

Es evidente que en un perfil puede haber *rankings* repetidos, puesto que dos votantes pueden dar lugar a la misma ordenación.

El perfil de *rankings* se expresa como  $m' \leq m$  *rankings* únicos donde a cada  $r_i \in \pi_m^n$  se le asocia un peso  $w_i$ , que es el número de votantes cuya elección se corresponde con el *ranking*  $r_i$ . Por tanto,  $m = \sum_{i=1}^{m'} w_i$ . Es decir, el perfil de *rankings* es el conjunto de todos los *rankings* no repetidos a los cuales se les asocia el número de votantes que han elegido cada uno de ellos.

**Definición 4.3.** Se denomina **matriz de outranking** a la matriz  $\mathcal{O}$  que representa el perfil de *rankings* basándose en la comparación por parejas de todas las alternativas de  $\mathcal{A}$ . Los elementos  $o_{ii}$  de esta matriz son nulos, mientras que  $o_{ij}$  representa el número de veces que  $a_i \succ a_j$  más la mitad del número de veces que  $a_i \sim a_j$ . Por tanto, todos los elementos fuera de la diagonal cumplen que  $o_{ij} + o_{ji} = m$ .

En la tabla 4.1 se muestra un ejemplo de una votación en la que participan 20 votantes, clasificando sus preferencias entre 5 alternativas.

En la parte izquierda se representan las respuestas dados por los 20 votantes, donde puede verse que han dado lugar a 5 ordenaciones distintas, siendo la más frecuente la segunda de ellas y la menos la cuarta. En la parte derecha se representa la matriz de *outranking* asociada. Por ejemplo, para obtener el elemento  $a_{12}$  se cuenta el número de votantes que sitúan  $a_1$  por encima de  $a_2$ . En el primer *ranking* ( $a_5 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2$ ),  $a_1$  está clasificado por encima

Número de votantes	Ranking	$\mathcal{O}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
5	$a_5 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2$	$a_1$	0	13	1	13	8
7	$a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5$	$a_2$	7	0	1	4	11
3	$a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1$	$a_3$	19	19	0	16	15
1	$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$	$a_4$	7	16	4	0	15
4	$a_4 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_2 \succ a_1$	$a_5$	12	9	5	5	0

Tabla 4.1: Perfil de *rankings*  $\pi_{20}^5$  dado por 20 votantes en el conjunto de 5 alternativas  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ .

de  $a_2$  y hay 5 votantes que expresaron este *ranking*. En el segundo *ranking* ( $a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5$ ), expresado por 7 votantes,  $a_1$  también está clasificado por encima de  $a_2$ . En los *rankings* tercero ( $a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1$ ) y quinto ( $a_4 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_2 \succ a_1$ ),  $a_1$  no está por encima de  $a_2$ , por lo que no se tienen en cuenta para este elemento de matriz. Finalmente, el cuarto *ranking* ( $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$ ) también sitúa a  $a_1$  por encima de  $a_2$ . Por tanto, hay  $5 + 7 + 1 = 13$  votantes que clasifican a  $a_1$  por encima de  $a_2$ , de donde  $a_{12} = 13$ . Además, en ningún caso se da  $a_1 \sim a_2$ . De forma análoga se obtendrían el resto de elementos de la matriz  $\mathcal{O}$ .

El problema derivado de ejemplos como el anterior, es como fusionar esta información, dando un único *ranking* final, que respete en la medida de lo posible las opiniones expresadas por los distintos votantes. Con este objetivo surgen las funciones de agregación de *rankings*.

**Definición 4.4.** *Una función de agregación de **rankings** es una función que expresa el perfil de rankings en forma de un único ranking. A este ranking se le suele denominar ranking ganador y no necesariamente coincide con un ranking del perfil de rankings. Se denomina método de agregación de*

*rankings* al proceso de aplicar la función de agregación de ranking a un perfil de rankings.

Existen muchos métodos de agregación de *rankings*, siendo un tema en el que se sigue investigando (véase, por ejemplo [Ding et al. \(2018\)](#); [Gogodze \(2019\)](#); [Lin et al. \(2018\)](#)), pero este trabajo se centra en el método de la cuenta de Borda, por ser uno de los más comúnmente utilizados en la literatura.

## 4.1. El método de la cuenta de Borda

Este método se basa en el cálculo de un valor de cada alternativa. Para ello ordena las alternativas según el número de veces que otra alternativa se encuentra en una posición peor en los *rankings*. Es decir, el valor Borda  $\alpha_{a_i}$  de una alternativa  $a_i$  se calcula como  $\alpha_{a_i} = \sum_{j=1}^n o_{ij}$  donde  $o_{ij}$  es el elemento de la fila  $i$  y la columna  $j$  en la matriz de *outranking*. Posteriormente, las alternativas se clasifican en orden descendente de valor para obtener el *ranking* ganador. Puesto que algunas alternativas pueden tener el mismo valor, es posible que haya empates en el *ranking* ganador.

Por ejemplo, a partir de la votación del ejemplo de la tabla [4.1](#) se obtiene

que:

$$\alpha_{a_1} = 0 + 13 + 1 + 13 + 8 = 35,$$

$$\alpha_{a_2} = 7 + 0 + 1 + 4 + 11 = 23,$$

$$\alpha_{a_3} = 19 + 19 + 0 + 16 + 15 = 69,$$

$$\alpha_{a_4} = 7 + 16 + 4 + 0 + 15 = 42$$

$$\alpha_{a_5} = 12 + 9 + 5 + 5 + 0 = 31$$

Como  $69 > 42 > 35 > 31 > 23$ , el *ranking* ganador es  $a_3 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2$ .

## 4.2. Propiedades

A continuación se va a analizar el comportamiento de este método con respecto a las propiedades más relevantes que se exigen en la teoría de elección social (véase (Felsenthal and Machover, 2012)). Tal como demostró Arrow en su Teorema de Imposibilidad ((Arrow, 1950)), cuando los votantes tienen tres o más alternativas, no es posible diseñar un sistema de votación que permita reflejar las preferencias de los individuos en una preferencia global de la comunidad de modo que al mismo tiempo se cumplan ciertos criterios o propiedades “racionales”. Aún así, la regla o método de Borda es el método o regla de votación que más más próximo se encuentra de cumplir las propiedades idóneas que se han de exigir para que un sistema de votación se considere ideal o perfecto. A continuación se analiza su comportamiento respecto a las principales propiedades deseables.

- Respecto al anonimato: hay un tratamiento igualitario de todos los vo-

tantes. Es evidente que el método de Borda verifica esta propiedad.

- Neutralidad: tratamiento igualitario de las alternativas. Por la propia metodología, donde no se hacen diferencias entre las alternativas, es evidente que esta propiedad también es verificada.
- Respeto a la media: el candidato elegido es el mejor situado, en término medio, en las relaciones de preferencia de los votantes. La verificación de esta propiedad es comentada en (Straffin Jr., 1980) y (Mueller, 1979).

Por ejemplo, si se consideran las preferencias mostradas en la tabla 4.2, se obtiene la matriz de *outranking* de la tabla 4.3.

Número de votantes	Ranking
3	$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5$
1	$a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1$

Tabla 4.2: Perfil de *rankings*  $\pi_4^5$  dado por 4 votantes en el conjunto de 5 alternativas.

$\mathcal{O}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	0	3	3	3	3
$a_2$	1	0	4	4	4
$a_3$	1	0	0	4	4
$a_4$	1	0	0	0	4
$a_5$	1	0	0	0	0

Tabla 4.3: Matriz de *outrankings* asociada a los perfiles de la tabla .

Así, se obtiene que  $\alpha_{a_1} = 12$ ,  $\alpha_{a_2} = 13$ ,  $\alpha_{a_3} = 9$ ,  $\alpha_{a_4} = 5$  y  $\alpha_{a_5} = 1$ , con lo que la alternativa preferida según este criterio es  $a_2$ , puesto que es, en media, la que ha estado mejor situada.

- Criterio de la mayoría: si existe una alternativa que es la mejor para más de la mitad de los votantes, dicha alternativa es elegida como única vencedora. Esta propiedad no es verificada por el método de Borda, como se puede deducir del ejemplo considerado en la propiedad anterior.
  
- Principio de Independencia de Alternativas Irrelevantes: las preferencias individuales de dos alternativas cualesquiera no cambian por la inclusión o interacción de otra alternativa. El método de Borda incumple esta propiedad, como puede comprobarse a continuación. Considérese el ejemplo de la tabla 4.2, donde  $a_2$  está por encima de  $a_5$  en ambas ordenaciones y supóngase que el primer *ranking* decide situar a  $a_3$  por encima de  $a_2$ , obteniéndose el nuevo *ranking*  $a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$ . Entonces el valor de  $\alpha_{a_5}$  sigue siendo 1, pero ahora  $\alpha_{a_2} = 10$  y ya no es la alternativa preferida, por lo que, aunque la posición relativa de  $a_2$  y  $a_5$  no ha variado, la alternativa  $a_3$  ha sido relevante en la configuración final. Éste es el único de los cuatro axiomas de Arrow ([Arrow, 1950](#)) vulnerado por la regla de Borda.
  
- Manipulabilidad: un sistema de votación es manipulable cuando un votante puede mejorar su posición final o salir beneficiado en una votación falseando sus preferencias sobre las alternativas, conociendo las preferencias en del resto de votantes de antemano. Si el último votante (votante estratégico) conociera el perfil de preferencias del resto de votantes, podría modificar sus propias preferencias con el fin de mejorar su posición en la clasificación global. Este es una de las cuestiones más criticadas del método de Borda.
  
- Consistencia: si existen dos grupos de votantes  $N_1$  y  $N_2$  independientes

con  $n$  alternativas comunes que tienen un mismo vencedor  $x_i$ , entonces la unión de los dos grupos de votantes  $N_1 \cup N_2$  tiene la misma alternativa vencedora  $x_i$  al aplicar el mismo método. El método de Borda satisface esta propiedad.

- Optimalidad de Pareto: Si todos los votantes prefieren estrictamente una alternativa  $a_i$  a otra alternativa  $a_j$ , esta última no puede ser vencedora de un sistema de votación. En ese caso, se dice que el sistema de votación satisface el principio débil de Pareto. La regla de Borda selecciona por tanto óptimos paretianos puesto que, no hay otra alternativa que todos los votantes consideren al menos tan preferida como la seleccionada y que al menos un votante considere estrictamente mejor que esta.
- Cercanía al consenso: el método de Borda coincide con la regla de cercanía a la unanimidad, siendo considerado por algunos (véase por ejemplo [Dummett \(1998\)](#)) como el método más equitativo para determinar un resultado a partir de deseos divergentes. Es decir, se considera que se obtiene un consenso obtenido mediante la minimización del desacuerdo.
- Inmunidad a la paradoja de la abstención: Se dice que un sistema de votación es vulnerable a la paradoja de la abstención cuando un votante puede mejorar su posición final u obtener un mejor resultado no participando en el proceso de elección que haciéndolo, es decir absteniéndose de votar. Está probado que no puede darse la paradoja de la abstención si se emplea el método de Borda.

No obstante, cabe destacar que todos los problemas asociados a la cuenta de Borda debido al incumplimiento de algunas de estas propiedades, no son

aplicables en el caso de su uso en el problema MOSP. Tal y como se introduce en la siguiente sección, en ese caso los “votantes” son los criterios, y por tanto estos no podrán decidir qué votar ya que supone una ordenación de los valores de los distintos caminos de forma objetiva.

### 4.3. Agregación de *rankings* en el problema MOSP

Una vez explicado, mediante este sencillo ejemplo, el método de agregación de *rankings* considerado en este trabajo y analizadas sus principales propiedades, se va a ver como aplicar el mismo al problema del MOSP. Dicha aplicación se va a hacer a través del ejemplo de las ciudades, cuya red asociada puede verse en la figura 3.2, donde se consideraban simultáneamente los criterios de distancia y precio. La sencillez de dicho ejemplo, permitirá explicar de forma sencilla el método propuesto.

En el capítulo anterior se vio que el conjunto de Pareto nos daba como solución que el conjunto de caminos óptimos de *Oviedo* a *Madrid* era  $S_{Madrid} = \{Oviedo - Madrid, Oviedo - Burgos - Madrid\}$ . Para obtener el camino óptimo dentro de este conjunto, es necesario aplicar el método de Borda de la siguiente manera:

1. Se considera que los “votantes” son los distintos criterios, es decir, hay tantos votantes como número de criterios. En este ejemplo hay dos criterios: distancia y precio.

2. Se ordenan los caminos atendiendo a cada criterio por separado. Es decir, para el ejemplo de las ciudades se dan dos *rankings* diferentes: uno que clasifica a los caminos en función de la distancia y otro que clasifica a los caminos en función del precio. Puesto que el objetivo es minimizar la distancia y el precio, para todos los criterios se ordenan los caminos de menor a mayor valor.
3. Llamando  $P1$  al camino *Oviedo – Madrid*, cuyo valor es (450 km, 81 eur) y  $P2$  al camino *Oviedo – Burgos – Madrid*, cuyo valor es (545 km, 74 eur), se obtiene el perfil de *rankings* de la tabla 4.4.

Criterio	Ranking		$P1$	$P2$
Distancia	$P1 \succ P2$	$P1$	0	1
Precio	$P2 \succ P1$	$P2$	1	0

Tabla 4.4: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 3.2.

Puesto que el valor de cada alternativa  $\alpha_{P_i}$  es la suma de los elementos de la fila  $P_i$  de la matriz de *outranking*, se obtiene que  $\alpha_{P1} = \alpha_{P2} = 1$ , por lo que hay un empate y no es posible elegir la alternativa óptima. Una posible forma de desempatar en estos casos es asignar a cada criterio un peso o porcentaje que refleje la importancia que se desea dar a cada criterio. Si todos los criterios tienen la misma importancia, el razonamiento es el mismo que se ha empleado hasta ahora. Sin embargo, si en el caso estudiado se le quiere dar un peso del 55 % a la distancia y 45 % al precio, por ejemplo, se modifican el perfil de *rankings* y la matriz de *outranking* de la siguiente manera: puesto que la distancia tiene una importancia del 55 %, se considerará que el *ranking*

$P1 \succ P2$  se repite 55 veces, mientras que el *ranking*  $P2 \succ P1$  se repite 45 veces. Por tanto, el elemento 1,2 de la matriz de *outranking*, que es el número de veces que  $P1$  está por encima de  $P2$  en los *rankings*, pasará a ser 55, como se muestra en la tabla 4.5.

Criterio	Ranking		P1	P2
Distancia: 55 %	$P1 \succ P2$	P1	0	55
Precio: 45 %	$P2 \succ P1$	P2	45	0

Tabla 4.5: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* ponderada correspondientes al ejemplo de la figura 3.2.

Ahora, los valores de cada camino son diferentes, pues  $\alpha_{P1} = 55$  y  $\alpha_{P2} = 45$ , de donde se deduce que el camino óptimo para llegar de *Oviedo* a *Madrid*, dándole una importancia del 55% a la distancia y del 45% al precio, es  $P1 = Oviedo - Madrid$ . Si, por el contrario, se le da una importancia del 45% a la distancia y del 55% al precio, el camino óptimo para llegar de *Oviedo* a *Madrid* será  $P2 = Oviedo - Burgos - Madrid$ .

Si bien estos métodos pueden no tener mucho sentido cuando se tiene sólo dos criterios, pues en este caso es sólo una cuestión de a cuál de los dos se desee dar mayor preferencia, la utilidad de la propuesta podrá ser valorada en problemas donde el número de criterios sea mayor.

Como resumen de la metodología propuesta en este capítulo, los pasos a seguir en la obtención de los caminos de menor valor multicriterio serían:

1. Aplicar el algoritmo Dijkstra MC para obtener el conjunto de soluciones de Pareto.

2. Ordenar los caminos en ese conjunto de Pareto de acuerdo al valor obtenido con los  $d$  criterios considerados.
3. Aplicar el método de agregación de *ranking* (ponderado o no) a las ordenaciones consideradas en el punto anterior para determinar el camino de menor valor de consenso según los distintos criterios considerados.

# Capítulo 5

## Aplicaciones prácticas

Una vez expuesta la propuesta para obtener soluciones óptimas del problema del camino más corto multicriterio, en este capítulo se estudia cómo varían los conjuntos de Pareto y, por tanto, las soluciones, en función del número de criterios y la relación entre los mismos. Esta relación se determina a partir del coeficiente de correlación de Pearson ([Pearson, 1895](#)), por lo que se comenzará con algunas definiciones y ejemplos relacionados con el mismo.

El coeficiente de correlación muestral de Pearson es una medida del grado de relación lineal entre dos conjuntos de datos. Formalmente,

**Definición 5.1.** *Dados  $n$  pares de datos  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ , se define su **coefi-***



la **matriz de correlación**. Teniendo en cuenta además que  $r_{xx} = 1$  y que  $r_{xy} = r_{yx}$ , se tiene que la expresión general de dicha matriz es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1k} & r_{2k} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de correlación asociada al ejemplo anterior, sería:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.9991 & -0.9996 & 0.9820 \\ 0.9991 & 1 & -0.9976 & 0.9731 \\ -0.9996 & -0.9976 & 1 & -0.9868 \\ 0.9820 & 0.9731 & -0.9868 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.1. Relación entre criterios

Lo primero que se estudia es la relación entre los diferentes criterios. Como ya se ha visto, los criterios pueden representar magnitudes muy variadas, como distancia, precio, tiempo, seguridad, tráfico, etc. Estas magnitudes pueden estar relacionadas entre ellas o pueden ser independientes y esto influirá a la hora de encontrar una solución óptima. Por ejemplo, el tiempo necesario para recorrer una carretera será proporcional a la distancia, mientras que la cantidad de tráfico puede ser independiente.

Considérese el ejemplo de la figura 5.2, que consiste en un grafo orientado con 9 vértices y un único criterio. Considérese que el objetivo es encontrar

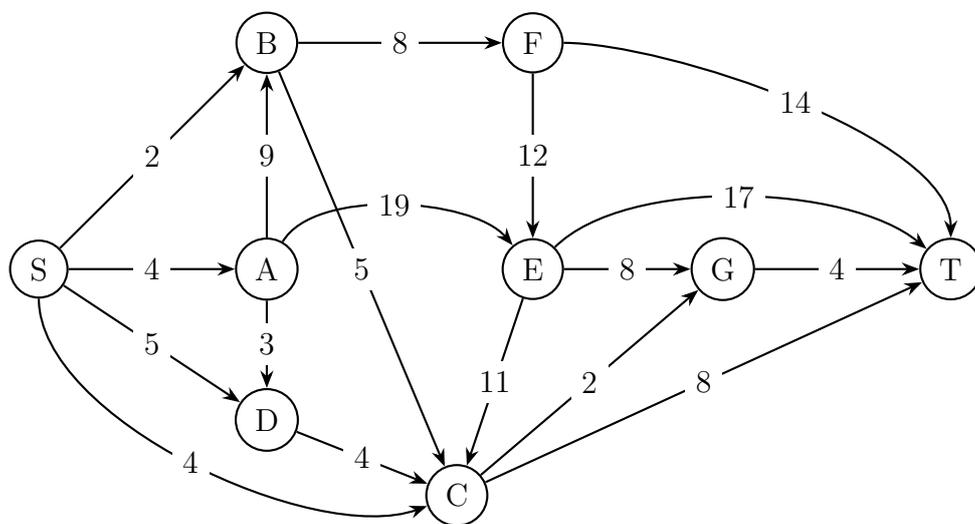


Figura 5.2: Ejemplo de grafo orientado con un criterio.

los caminos cuyo vértice inicial es  $S$  y vértice final  $T$ . Puesto que los pesos de este ejemplo corresponden a un único criterio, el camino de menor valor se obtiene aplicando el algoritmo de Dijkstra y es  $S - C - G - T$ , con un valor de 10.

Ahora se le añade otro criterio, tal como puede verse en la figura 5.3, que tiene un coeficiente de correlación con el primero  $r = 0.486$ , y se estudia el conjunto de caminos óptimos de  $S$  a  $T$ , obtenido mediante el algoritmo Dijkstra MC, que es

$$\{P1 = S - C - G - T (10, 16); P2 = S - C - T (12, 14)\}$$

Como se ha mencionado en el ejemplo de las ciudades, el camino de menor valor obtenido para el primer criterio está incluido en el conjunto de Pareto del problema multicriterio. Además, el camino  $S - C - T$  también es óptimo al añadir el segundo criterio. Para obtener una solución única, se aplica el

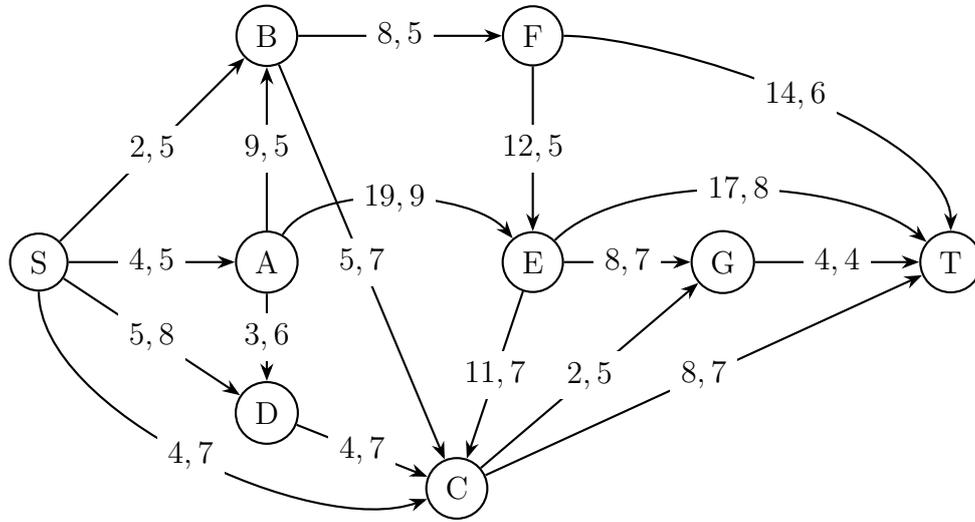


Figura 5.3: Ejemplo de grafo orientado con dos criterios con coeficiente de correlación  $r = 0.486$ .

método de Borda. En la tabla 5.1 se muestran el perfil de *rankings* y la matriz de *outranking* para este problema.

Criterio	Ranking		P1	P2
Primero	$P1 \succ P2$	P1	0	1
Segundo	$P2 \succ P1$	P2	1	0

Tabla 5.1: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 5.3.

Se observa que los valores de ambos caminos coinciden, pues  $\alpha_{P1} = 1 = \alpha_{P2}$ , por lo que hay un empate. Por la definición de conjunto de Pareto, en todos los problemas con dos criterios y dos elementos en el conjunto de Pareto, se producirá un empate al aplicar el método de Borda si los criterios tienen la misma importancia (el mismo peso). La única manera de romper ese empate será asignar un porcentaje de importancia distinto a cada criterio.

En este ejemplo, considerando dos criterios, se ha obtenido un conjunto de Pareto con dos elementos al aplicar el algoritmo Dijkstra MC. Análogamente, en el ejemplo de las ciudades con dos criterios se obtenían dos caminos no dominados. Llegados a este punto, procedería preguntarse si este comportamiento es general y, por tanto, siempre habrá el mismo número de criterios que de caminos.

Para estudiar si se cumple esta propiedad, se considera el ejemplo de la figura 5.4. En él, el coeficiente de correlación entre los dos criterios es  $r = -0.280$ . Además, mientras que los valores del segundo criterio en el ejemplo anterior oscilaban entre 4 y 9, en el ejemplo considerado a continuación los valores del segundo criterio oscilan entre 5 y 45.

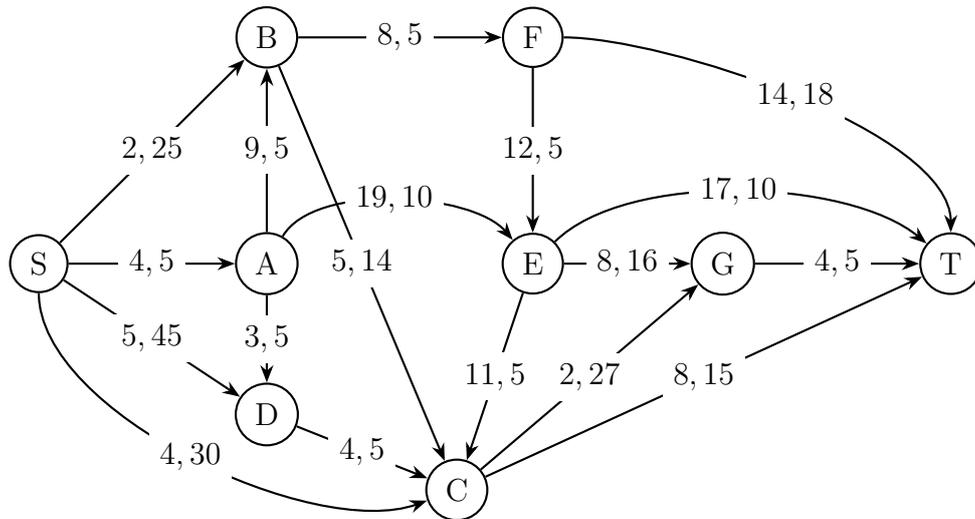


Figura 5.4: Ejemplo de grafo orientado con dos criterios con coeficiente de correlación  $r = -0.280$ .

Si se resuelve el problema unicriterio para los dos criterios, se obtiene que, para el primero, la solución es  $S - C - G - T$  y para el segundo,  $S - A - E - T$ . En el problema multicriterio, el conjunto de Pareto que se obtiene contiene

cuatro elementos, es decir, hay cuatro caminos que no están dominados por ningún otro:

$$\{P1 = S - C - G - T (10, 62); P2 = S - C - T (12, 45);$$

$$P3 = S - A - E - T (40, 25); P4 = S - A - D - C - T (19, 30)\}$$

Por tanto, se comprueba que no necesariamente se obtienen el mismo número de caminos que de criterios, pudiendo ser, como en este caso, superior el cardinal del conjunto de Pareto que el valor del número de criterios  $d$ . Para obtener una única solución, se aplica el método de Borda, como se muestra en la tabla 5.2.

		$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$\alpha$
Criterio	Ranking					
Primero	$P1 \succ P2 \succ P4 \succ P3$	0	1	1	1	3
Segundo	$P3 \succ P4 \succ P2 \succ P1$	1	1	0	1	3
		1	1	1	0	3

Tabla 5.2: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 5.4.

A partir de la matriz de *outranking* se obtiene que  $\alpha_{P1} = 3$ ,  $\alpha_{P2} = 3$ ,  $\alpha_{P3} = 3$  y  $\alpha_{P4} = 3$ , por lo que, considerando que todos los criterios son equivalentes, se produce un empate entre todos los caminos óptimos. Se observa que tanto el camino obtenido para el primer criterio como para el segundo están en el conjunto de Pareto.

Hasta ahora se han estudiado casos donde los dos criterios tienen correlación baja o moderada ( $0.2 < |r| < 0.6$ ). Sin embargo, como se ha mencionado

anteriormente, en situaciones realistas puede haber criterios que estén relacionados, es decir, con correlación muy alta. Considérese, por tanto, el ejemplo de la figura 5.5, donde el segundo criterio es directamente proporcional al primero (aproximadamente el doble), con  $r = 0.971$ .

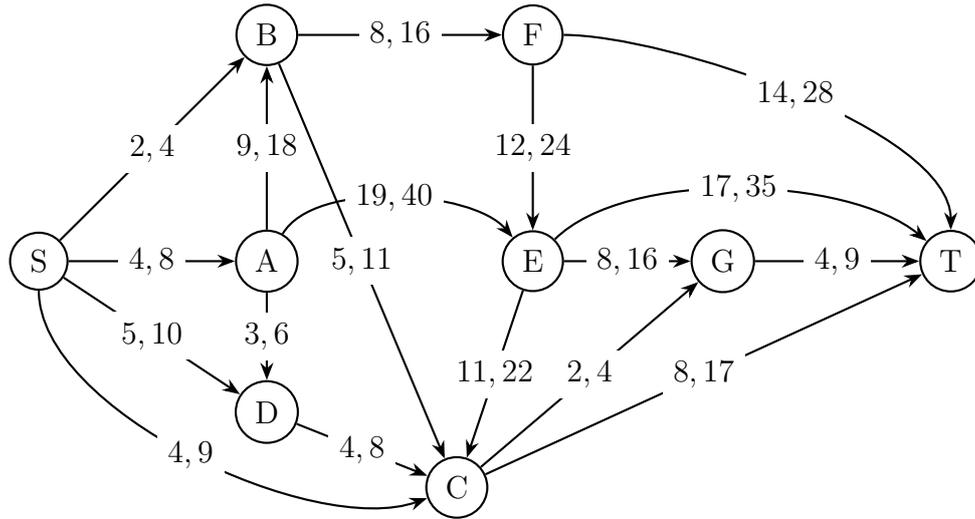


Figura 5.5: Ejemplo de grafo orientado con dos criterios directamente proporcionales.

Si se aplicase el algoritmo de Dijkstra al problema con los dos criterios por separado, en ambos casos se obtendría el mismo camino,  $S - C - G - T$ , aunque con diferentes valores. Al aplicar el algoritmo Dijkstra MC al problema multicriterio, la única solución que se obtiene es  $S - C - G - T$ . Es decir, el camino óptimo es el mismo para el problema unicriterio (con el primer criterio) que para el problema multicriterio. En realidad, en estos casos el segundo criterios no aporta información adicional a la hora de aplicar los algoritmos, pues, aunque los pesos para los dos criterios sean diferentes, el camino de menor valor va a ser el mismo. Por tanto, podría resolverse el problema unicriterio, obteniendo el camino de menor valor con el algoritmo de Dijkstra, y, una vez se conoce este camino, calcular su valor en los dos

critérios.

Sin embargo, no sucede lo mismo cuando los criterios son inversamente proporcionales. En este caso sí varía el conjunto de Pareto del problema multicriterio respecto al camino de menor valor del problema unicriterio. Considérese el ejemplo de la figura 5.6, donde el segundo criterio es inversamente proporcional al primero, pues  $r = -0.976$ .

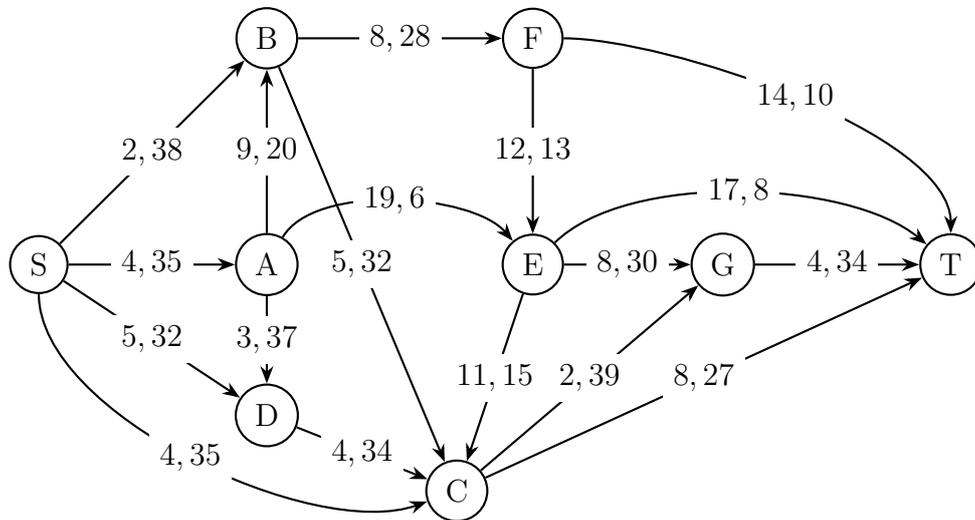


Figura 5.6: Ejemplo de grafo orientado con dos criterios inversamente proporcionales.

Al aplicar el algoritmo de Pareto, los caminos de menor valor que se obtienen son:

$$\{P1 = S - C - G - T (10, 108); P2 = S - C - T (12, 62); \\ P3 = S - A - E - T (40, 49)\}$$

A partir del método de Borda, se obtienen el perfil de *rankings* y la matriz de outranking de la tabla 5.3. Puesto que  $\alpha_{P1} = \alpha_{P2} = \alpha_{P3} = 2$ , se llega a una empate, el cual se resuelve asignando pesos diferentes a cada criterio.

		<i>P1</i>	<i>P2</i>	<i>P3</i>	$\alpha$	
Criterio	Ranking	<i>P1</i>	0	1	1	2
Primero	$P1 \succ P2 \succ P3$	<i>P2</i>	1	0	1	2
Segundo	$P3 \succ P2 \succ P1$	<i>P3</i>	1	1	0	2

Tabla 5.3: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 5.6.

Por tanto, se puede obtener una serie de conclusiones atendiendo a la relación entre los criterios, teniendo en cuenta los ejemplos considerados, junto con otros que se han resuelto, pero que no procede explicar en detalle, puesto que no aportarían nada nuevo al trabajo. Considerando un grafo orientado, del que solamente interesan los caminos desde un vértice inicial  $S$  a un vértice final  $T$  determinados y considerando que hay más de un camino posible de  $S$  a  $T$  (en caso contrario la solución sería siempre ese camino), la experimentación hecha sugiere que:

- Si un criterio es directamente proporcional a otro, el camino óptimo del problema considerando los dos criterios es el mismo que el camino de menor valor del problema considerando cualquiera de los criterios por separado.
- Si un criterio es inversamente proporcional a otro, los caminos de menor valor considerando el problema con ambos criterios por separado serán diferentes. Por tanto, el conjunto de Pareto obtenido al considerar el problema multicriterio tendrá como mínimo esos dos caminos.

## 5.2. Número de criterios

Si bien es cierto que, como se ha concluido en el apartado anterior, el número de soluciones no coincide con el número de criterios, sí que habrá relación entre ambos. Cabe esperar que a medida que aumente el número de criterios aumente el tamaño del conjunto de Pareto, siempre que los criterios no sean directamente proporcionales.

Se partirá del ejemplo de la figura 5.4, cuyo conjunto de Pareto, obtenido en el apartado anterior, contiene a los caminos  $S - C - G - T$ ,  $S - C - T$ ,  $S - A - E - T$  y  $S - A - D - C - T$  y cuya solución óptima es  $S - A - E - T$ .

El primer problema a analizar es el de la figura 5.7. La matriz de correlaciones asociada a los valores de los tres criterios considerados es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0.280 & 0.023 \\ & 1 & -0.176 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, se estudia ahora el resultado obtenido al añadir un tercer criterio cuyo coeficiente de correlación con el primero es  $r_{13} = 0.023$  y con el segundo,  $r_{23} = -0.176$ .

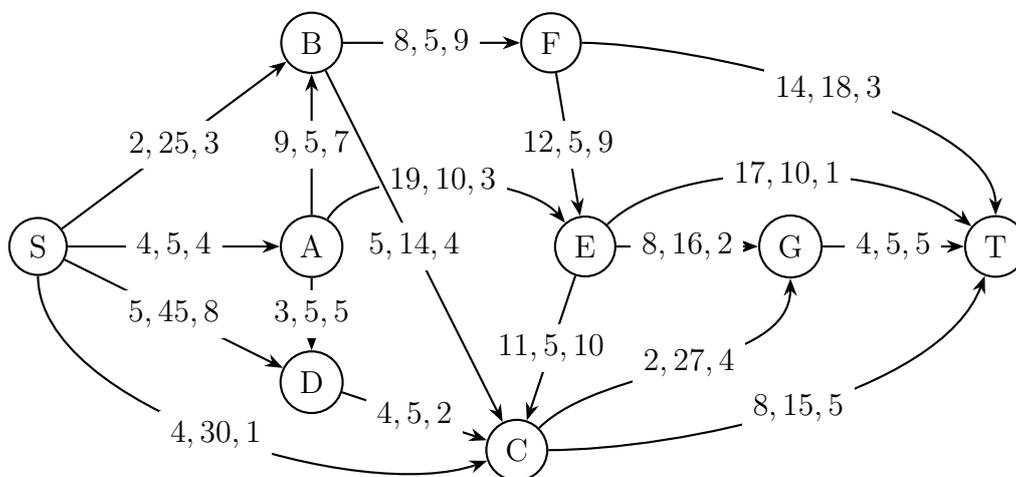


Figura 5.7: Ejemplo de grafo orientado con tres criterios.

A partir del algoritmo Dijkstra MC se obtiene que el conjunto de soluciones no dominadas es

$$\{P1 = S - C - G - T (10, 62, 10); P2 = S - C - T (12, 45, 6);$$

$$P3 = S - A - D - C - T (19, 30, 16); P4 = S - A - E - G - T (35, 36, 14);$$

$$P5 = S - A - E - T (40, 25, 8)\}$$

Todas las soluciones que se habían obtenido para el problema sin el tercer criterio está incluidas en este conjunto de Pareto. Para encontrar la solución óptima única, se aplica el método de Borda. Puesto que el problema ahora tiene tres criterios, hay tres *rankings*, es decir, tres ordenaciones de los caminos, una correspondiente a cada criterio. El perfil de *rankings* y la matriz de *outranking* vienen dados en la tabla 5.4.

El valor más alto de la matriz de *outranking* es  $\alpha_{P2} = 8$ , por lo que el

Criterio	Ranking		<i>P1</i>	<i>P2</i>	<i>P3</i>	<i>P4</i>	<i>P5</i>	$\alpha$
Primero	$P1 \succ P2 \succ P3 \succ P4 \succ P5$	<i>P1</i>	0	1	2	2	1	6
Segundo	$P5 \succ P3 \succ P4 \succ P2 \succ P1$	<i>P2</i>	2	0	2	2	2	8
Tercero	$P2 \succ P5 \succ P1 \succ P4 \succ P3$	<i>P3</i>	1	1	0	2	1	5
		<i>P4</i>	1	1	1	0	1	4
		<i>P5</i>	2	1	2	2	0	7

Tabla 5.4: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 5.7.

camino óptimo es  $P2 : S - C - T$ . Esta solución no es la misma que se obtenía en el mismo problema con los dos primeros criterios.

A continuación se añade un criterio más, como se muestra en la figura 5.8. La matriz de correlaciones asociada es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0.280 & 0.023 & 0.095 \\ & 1 & -0.176 & -0.382 \\ & & 1 & 0.164 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Así, el coeficiente de correlación entre el cuarto criterio y el primero, segundo y tercero es, respectivamente,  $r_{14} = 0.095$ ,  $r_{24} = -0.382$  y  $r_{34} = 0.164$ .

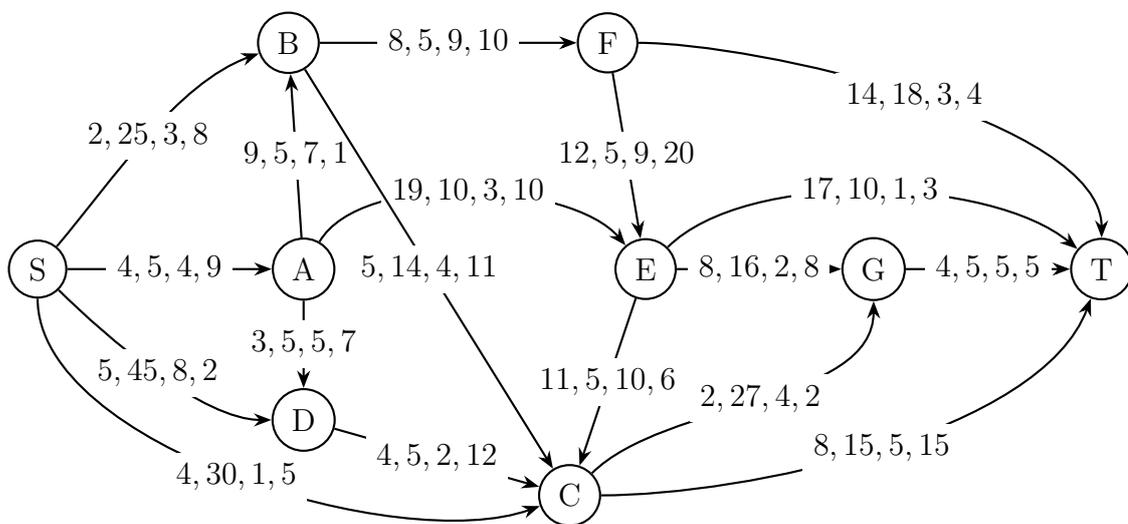


Figura 5.8: Ejemplo de grafo orientado con cuatro criterios.

En este caso, el conjunto de Pareto que se obtiene es

$$\{P1 = S - C - G - T (10, 59, 10, 12); P2 = S - C - T (12, 45, 6, 20);$$

$$P3 = S - A - D - C - T (19, 30, 16, 43);$$

$$P4 = S - A - B - C - T (26, 39, 20, 36);$$

$$P5 = S - A - B - F - T (35, 33, 23, 24);$$

$$P6 = S - A - E - G - T (35, 36, 14, 32);$$

$$P7 = S - A - E - T (40, 25, 8, 22)\}$$

De nuevo, este conjunto incluye a todos los caminos obtenidos en el problema con los tres primeros criterios. Aplicando el método de Borda, tabla 5.5, el camino con valor más alto  $\alpha_{P2} = 17$  es  $P2 : S - C - T$ . Esta solución coincide con la que se obtuvo para el problema con tres criterios.

Por tanto, en el caso en que los criterios no sean directamente proporcio-

nales, se observa que el tamaño del conjunto de Pareto tiende a aumentar con el número de criterios. Sin embargo, no parece existir una relación directa entre el número de criterios y el número de soluciones.

Criterio	Ranking
Primero	$P1 \succ P2 \succ P3 \succ P4 \succ P5 \succ P6 \succ P7$
Segundo	$P7 \succ P3 \succ P5 \succ P6 \succ P4 \succ P2 \succ P1$
Tercero	$P2 \succ P7 \succ P1 \succ P6 \succ P3 \succ P4 \succ P5$
Cuarto	$P1 \succ P2 \succ P7 \succ P5 \succ P6 \succ P4 \succ P3$

	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P5$	$P6$	$P7$	$\alpha$
$P1$	0	2	3	3	3	3	2	16
$P2$	2	0	3	3	3	3	3	17
$P3$	1	1	0	3	3	2	1	11
$P4$	1	1	1	0	2	1	1	7
$P5$	1	1	1	2	0	3	1	9
$P6$	1	1	2	3	1	0	1	9
$P7$	2	1	3	3	3	3	0	15

Tabla 5.5: Perfil de *rankings* y matriz de *outranking* correspondientes al ejemplo de la figura 5.8.

### 5.3. Número de iteraciones

Además del tamaño del conjunto de Pareto, también es interesante estudiar el número de iteraciones que requiere el algoritmo Dijkstra MC para

llegar a dichas soluciones. En la tabla 5.6 se muestra una comparativa del tamaño del conjunto de Pareto y el número de iteraciones para todos los ejemplos multicriterio resueltos en este trabajo.

Número de criterios	Número de caminos en el conjunto de Pareto	Número de iteraciones
2 (ciudades)	2	8
2 ( $r = 0.971$ )	1	8
2 ( $r = 0.486$ )	2	10
2 ( $r = -0.976$ )	3	12
2 ( $r = -0.280$ )	4	18
3	5	18
4	7	24

Tabla 5.6: Comparativa del tamaño del conjunto de Pareto y el número de iteraciones para los ejemplos resueltos.

Por un lado se considera el ejemplo de las ciudades, cuyo grafo está formado por 6 vértices. Para llegar a los dos caminos óptimos del conjunto de Pareto son necesarias 8 iteraciones. El resto de ejemplos son variaciones del mismo grafo, compuesto por 9 vértices. Se observa que, para los casos con 2 criterios, el número de iteraciones varía dependiendo de la relación entre ellos. En el ejemplo de dos criterios proporcionales que, como se ha visto, es equivalente al problema unicriterio, el número de iteraciones necesarias también es 8, mientras que si los criterios son inversamente proporcionales, el número de iteraciones aumenta hasta 12. Además, añadir criterios ha hecho aumentar el tamaño del conjunto de Pareto y el número de iteraciones. Se observa además cierta relación entre el tamaño del conjunto de Pareto y el

número de iteraciones.

Una primera consideración, basada en la experimentación realizada, parece indicar que el número de iteraciones crece con el tamaño del conjunto de Pareto, que a su vez crece con el número de criterios.

Es importante tener en cuenta que estos análisis se han realizado con grafos pequeños (9 nodos, 18 arcos) y pocos criterios, pero en la vida real los problemas a resolver tienen dimensiones mucho mayores (por ejemplo, el problema en [Haial et al., 2021](#)) tiene aproximadamente 2800 nodos y 6 criterios). Para sacar conclusiones más generales sería necesario estudiar la resolución de problemas de este tipo, que a su vez exigirían la programación eficiente del método, lo cual se escapa de los objetivos de este trabajo.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El problema del camino más corto multicriterio aparece con frecuencia en muchos ámbitos, pues permite considerar simultáneamente diferentes criterios que pueden ser contradictorios pero igual de importantes, o simplemente criterios que no están relacionados entre sí. En este trabajo se ha propuesto un método para resolver este tipo de problemas.

El primer paso consiste en encontrar el conjunto de Pareto de caminos óptimos no dominados desde un nodo fuente a un nodo destino. Para obtener este conjunto se ha utilizado el algoritmo Dijkstra MC ([Hanusse et al., 2020](#)), que es una generalización al caso multicriterio del algoritmo de Dijkstra para el problema del camino más corto unicriterio ([Dijkstra et al., 1959](#)).

En el algoritmo Dijkstra MC es necesario aplicar un orden lexicográfico a los arcos, pero se ha comprobado que es independiente del orden en el que

se expresen los criterios.

Para resolver el problema MOSP es necesario otro paso pues, a diferencia de la solución proporcionada por el algoritmo Dijkstra en el problema unicriterio, el conjunto de Pareto puede contener (y es lo más usual) más de un camino. De hecho, su tamaño puede crecer exponencialmente, por lo que es necesario encontrar de entre todas las soluciones del conjunto de Pareto, una única solución óptima.

Por eso, como segundo paso, se propone obtener esta solución única aplicando un método de agregación de *rankings*. Los métodos de agregación de *rankings* se utilizan con frecuencia en ciencias sociales, por ejemplo en elecciones políticas o en clasificaciones deportivas. Sin embargo, no es usual su aplicación para este tipo de problemas.

En este trabajo se utiliza el método de Borda. Para cada criterio, se ordenan los caminos del conjunto de Pareto de menor a mayor valor. Cada una de esas ordenaciones constituye un *ranking*, y a todas ellas se les aplica el método de Borda, que proporciona un único *ranking* ganador. Se considera que la solución óptima del problema MOSP es el camino situado en la primera posición de ese *ranking* ganador. En ocasiones se producen empates al aplicar el método de Borda, es decir, varios caminos pueden quedar en primera posición en el *ranking* ganador, por lo que no será posible en general asegurar la existencia única de solución. En estas situaciones se propone asignar diferente peso a cada criterio para desempatar y llegar a una única solución.

Este método se ha aplicado a varios ejemplos diferentes, y se han observado una serie de propiedades. La primera propiedad que se ha comprobado es que en un problema multicriterio, los caminos de menor valor obtenidos resolviendo el problema unicriterio con los criterios por separado siempre están dentro del conjunto de Pareto del problema MOSP. Además, si dos criterios son directamente proporcionales, coincidirá el camino de menor valor de cada uno de ellos por separado. Por el contrario, si dos criterios son inversamente proporcionales, los caminos de menor valor de cada criterio por separado siempre serán diferentes. También se ha observado que la solución del problema multicriterio no necesariamente coincide con la solución para algunos de los criterios por separado.

Por otro lado, si se aumenta el número de criterios (siendo éstos no proporcionales entre sí), el tamaño del conjunto de Pareto también tiende a aumentar.

Finalmente se ha estudiado el número de iteraciones necesarias del algoritmo Dijkstra MC para resolver los problemas multicriterio y se ha comprobado que éste aumenta con el tamaño del conjunto de Pareto.

Cabe destacar que el algoritmo Dijkstra MC no está implementado y no se ha podido programar, por lo que todos los ejemplos estudiados se han resuelto a mano y, por tanto, no ha podido llevarse a cabo un análisis más exhaustivo.

La metodología propuesta en este trabajo es un primer paso en el estudio de problemas del camino más corto con múltiples criterios aplicando méto-

dos de *ranking*. Se proponen como futuras líneas de investigación un estudio sobre la mejor manera de programar el método, así como de su complejidad computacional. Una vez programado, será posible resolver problemas de tamaños más cercanos a la realidad y, por tanto, podrán obtenerse propiedades más generales tanto de los conjuntos de Pareto como de las soluciones únicas de los problemas multicriterio. Además se podrán estudiar experimentalmente algunas de las propiedades que se han visto para los grafos considerados en este estudio y, por tanto, esto permitirá obtener conclusiones más generales, para las que se intentarán dar resultados generales que permitan asegurar su cumplimiento.

Además, se propone probar y comparar otros métodos de agregación para seleccionar la solución óptima dentro del conjunto de Pareto, como pueden ser métodos de agregación jerárquicos ([Ding et al., 2018](#)) o secuenciales ([Lin et al., 2018](#)).

La metodología desarrollada en este trabajo ha sido aceptada para su presentación en el XXXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa ([Mariñas del Collado et al., 2022](#)) y de ahí se espera que surjan otros problemas abiertos que serán también abordados en el futuro.

# Bibliografía

- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., Orlin, J. B., and Reddy, M. (1995). Applications of network optimization. Handbooks in Operations Research and Management Science, 7:1–83.
- Arrow, K. J. (1950). A difficulty in the concept of social welfare. Journal of political economy, 58(4):328–346.
- Balinski, M. and Laraki, R. (2007). A theory of measuring, electing, and ranking. Proceedings of the National Academy of Sciences, 104(21):8720–8725.
- Brezina, D., Šimák, L., Hudáková, M., and Masár, M. (2019). Application of multicriteria decision-making methods for the optimal evacuation. Transportation Research Procedia, 40:963–969.
- Clímaco, J. C., Craveirinha, J. M., and Pascoal, M. M. (2003). A bicriterion approach for routing problems in multimedia networks. Networks: An International Journal, 41(4):206–220.
- Craveirinha, J., Girão-Silva, R., Clímaco, J., and Martins, L. (2007). A hierarchical multiobjective routing model for mpls networks with two service

- classes. In IFIP Conference on System Modeling and Optimization, pages 196–219. Springer.
- De Luca, S. (2014). Public engagement in strategic transportation planning: An analytic hierarchy process based approach. Transport policy, 33:110–124.
- Delling, D., Pajor, T., and Werneck, R. F. (2015). Round-based public transit routing. Transportation Science, 49(3):591–604.
- Dijkstra, E. W. et al. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numerische mathematik, 1(1):269–271.
- Ding, J., Han, D., Dezert, J., and Yang, Y. (2018). A new hierarchical ranking aggregation method. Information Sciences, 453:168–185.
- Dummett, M. (1998). The borda count and agenda manipulation. Social Choice and Welfare, 15(2):289–296.
- Fandel, G. and Gal, T. (1979). Multiple criteria decision making theory and application. In Proceedings of the Third Conference Hagen/Königswinter, West Germany, August 20–24.
- Felsenthal, D. S. and Machover, M. (2012). Electoral systems: paradoxes, assumptions, and procedures. Springer, Berlín.
- Glabowski, M., Musznicki, B., Nowak, P., and Zwierzykowski, P. (2013). Efficiency evaluation of shortest path algorithms. In Advanced International Conference on Telecommunications, AICT.
- Gogodze, J. (2019). Ranking-theory methods for solving multicriteria decision-making problems. Advances in Operations Research, 2019.

- Gross, J. L., Yellen, J., and Anderson, M. (2018). Graph theory and its applications. Chapman and Hall/CRC.
- Haial, A., Benabbou, L., and Berrado, A. (2021). Designing a transportation-strategy decision-making process for a supply chain: Case of a pharmaceutical supply chain. International Journal of Environmental Research and Public Health, 18(4):2096.
- Hanusse, N., Ilcinkas, D., and Lentz, A. (2020). Framing algorithms for approximate multicriteria shortest paths. In 20th Symposium on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2020), volume 85, pages 11–1.
- Lin, Y.-l., Chakhar, S., and Yang, R. (2018). Sequential rank aggregation method. In 2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), pages 3194–3200. IEEE.
- Mariñas del Collado, I., Alvarez-Diaz, M., and Montes, S. (2022). Camino más corto multicriterio con métodos de ranking. In Actas del XXXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Granada, España, June 7-10.
- Martins, E. Q. V. (1984). On a multicriteria shortest path problem. European Journal of Operational Research, 16(2):236–245.
- Modesti, P. and Sciomachen, A. (1998). A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportation networks. European Journal of Operational Research, 111(3):495–508.
- Mueller, D. (1979). Public Choice. Cambridge University Press, Londres.

- Odu, G. and Charles-Owaba, O. (2013). Review of multi-criteria optimization methods—theory and applications. IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN), 3(10):1–14.
- Pearson, K. (1895). Notes on regression and inheritance in the case of two parents. In Proceedings of the Royal Society of London, volume 58.
- Pelegrín, B., Cánovas, L., and Fernández, P. (1992). Algoritmos en grafos y redes. PPU.
- Rico, N., Vela, C. R., Pérez-Fernández, R., and Díaz, I. (2021). The borda count as an initial threshold for kemeny ranking aggregation. In Joint Proceedings of the 19th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA), the 12th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), and the 11th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP), volume 3. Atlantis Studies in Uncertainty Modelling.
- Schrijver, A. (2012). On the history of the shortest path problem. Documenta Mathematica, 17(1):155–167.
- Straffin Jr., P. (1980). Topics in the Theory of Voting. Birkhauser, Boston.
- Tarapata, Z. (2003). Military route planning in battlefield simulation: effectiveness problems and potential solutions. Journal of Telecommunications and Information technology, 4:47–56.
- Tarapata, Z. M. (2007). Selected multicriteria shortest path problems: An analysis of complexity, models and adaptation of standard algorithms. International Journal of Applied Mathematics & Computer Science, 17(2):269–287.