

Introducción a la integrabilidad



Universidad de Oviedo

Autor: Ander Martin Iribar

Tutor: Patrick Meessen

Facultad: Facultad de Ciencias

Grado: Grado en Física

Año académico: 2021/2022

Índice general

1. Introducción	1
2. Deducción y propiedades de la ecuación KdV	4
2.1. Deducción de la ecuación KdV	4
2.2. Simetrías de la ecuación KdV	11
2.3. Ondas viajeras no dispersivas	11
2.4. Ondas CNoidales	14
2.5. KdV como un sistema hamiltoniano	16
2.6. Unicidad de solución	18
3. Integrabilidad de la ecuación KdV	21
3.1. Cantidades conservadas	21
3.2. La transformada de Miura	24
3.3. La ecuación KdV posee infinitas cantidades conservadas	26
3.4. Integrabilidad del sistema KdV	30
3.5. Ecuaciones de mayor orden jerárquico	34
4. El método de Lax	35
4.1. Intuición: origen de la ecuación de Schrödinger	35
4.2. El par de Lax	36
4.3. Particularización a la ecuación KdV	38
4.4. Construcción alternativa	40
4.5. Derivación de Lenard de la ecuación KdV	41

5. Más propiedades de la ecuación KdV	44
5.1. El parámetro espectral	44
5.2. Involución de las cantidades conservadas	48
6. Soluciones Multi-Solitón	50
6.1. Transformadas de Bäcklund	50
6.2. Teorema de permutabilidad	55
6.3. Transformada de Bäcklund para la ecuación KdV	56
6.4. Soluciones de solitones	60
7. Tratamiento geométrico de la integrabilidad	67
7.1. Geometría simpléctica	67
7.2. Modelos integrables	72
7.3. Enfoque geométrico de la ecuación KdV	77
8. El Retículo de Toda	80
8.1. La ecuación de Toda	80
8.2. Estructura de corchete de Poisson dual	81
8.3. Cantidades conservadas	84
8.4. El tensor de Nijenhuis	85
8.5. La ecuación de Lax	86
9. Formulación de Zakharov-Shabat	89
9.1. Formulación de primer orden	89
9.2. Sistemas integrables no lineales	91
9.2.1. KdV	91
9.2.2. MKdV	92
9.2.3. Ecuación de Schrödinger no lineal (NSE)	92
9.2.4. Ecuación sine-Gordon	93
9.2.5. Sinh-Gordon	93
10. Conclusión y cierre	94
Bibliografía	95

Capítulo 1

Introducción

En el año 1834 el ingeniero y arquitecto escocés John Scott Russell se quedó asombrado por una onda creada por un pequeño barco en el canal poco caudaloso que conecta Falkirk con Edimburgo (véase [1]). Lo que le sorprendió fue la característica no esperada de la onda de no ensancharse, ralentizarse ni aplanarse durante los casi 3 km que la siguió. Además, al detenerse dicho barco, la onda impactó contra el mismo, y después recuperó su forma original. Seguidamente, se siguió transmitiendo como una onda solitaria en el agua. Esta onda solitaria recibe el nombre de solitón o solitón de Russell. Un solitón es una onda no dispersiva y que, consecuentemente, mantiene su forma al moverse. En la siguiente imagen se muestra una onda similar a la que observó Russell.



Figura 1.1: Onda solitaria en el Canal de Unión (1995) [2]

Russell estaba convencido de la gran importancia de esta onda no dispersiva, que constituye un fenómeno completamente anti-intuitivo. ¿Cómo es que el perfil de la onda no cambiaba al desplazarse? No obstante, esta onda no fue estudiada con detenimiento físico ni matemático hasta el año 1895, cuando Dèderik Korteweg y Gustav de Vries trataron de modelarla en base a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.1)$$

Donde u es la amplitud de la onda. Esta ecuación será a la que nos referiremos en todo el trabajo como ecuación Korteweg-De Vries o ecuación KdV.

Fue en el año 1960 cuando este sistema adquirió una gran importancia. Desde entonces, infinidad de técnicas matemáticas han sido desarrolladas motivadas por este ejemplo, entre otros. En particular, fue el método de dispersión inversa el que permitió resolver la ecuación KdV por primera vez. Por desgracia, no tenemos espacio para incluir este método en el trabajo, y vamos a estudiar otros métodos que surgieron más adelante.

Los sistemas integrables han tenido gran relevancia desde los inicios de la mecánica clásica. Los físicos siempre han tratado de encontrar soluciones exactas para los problemas que modelan. No obstante, hasta la llegada de Liouville en el siglo XIX solo se consiguieron resolver ciertos problemas aislados que hoy en día no presentan demasiada complejidad. Liouville introdujo el método de cuadraturas para resolver ecuaciones del movimiento, que consiste en encontrar una primitiva que determine la dinámica del sistema. Sin embargo, fue un siglo más tarde cuando empezaron a surgir métodos sistemáticos para poder realizar esta tarea.

Desde entonces, décadas de estudio sobre sistemas integrables han favorecido el desarrollo de conceptos matemáticos con profundas implicaciones que sirven para unificar varios aspectos de problemas físicos que no guardan ninguna relación aparente. Los desarrollos que han permitido esto son muy técnicos, y trataremos de motivarlos de la misma forma en la que surgieron históricamente: estudiando ejemplos que creen la necesidad de nuevos métodos para ser estudiados en detalle, o particularizando dichos métodos a los mismos y probando que se trata de una formulación equivalente, en su defecto.

El sistema por antonomasia en esta introducción a la integrabilidad va a ser la ecuación Korteweg-De Vries (1.1). Después de realizar su deducción a partir de las ecuaciones de los fluidos con las

condiciones de contorno adecuadas y exigiendo ciertas propiedades para las soluciones, estudiaremos algunas características de este sistema. En particular, lo escribiremos como un sistema hamiltoniano, y presentaremos algunas clases de soluciones notables que posee.

A continuación, demostraremos que es un sistema integrable haciendo uso de una herramienta muy poderosa denominada transformada de Miura, desarrollada precisamente para tratar con el sistema KdV.

Acto seguido, se introducirán otras técnicas sofisticadas tales como el método de Lax o la transformada de Bäcklund, que terminaremos particularizando para nuestra ecuación. Esto servirá para probar la existencia de soluciones multi-soliton, por ejemplo.

El siguiente paso será realizar un tratamiento geométrico de la integrabilidad, donde haciendo uso de la geometría simpléctica caracterizaremos los sistemas integrables desde un punto de vista geométrico. También aplicaremos este enfoque a la ecuación KdV.

Otro sistema que estudiaremos en cierto detalle es el retículo de Toda. Se trata de un sistema finito, a diferencia del sistema KdV, que es un modelo continuo. Para ello, será necesario introducir el tensor de Nijenhuis, cuyos ceros caracterizan la integrabilidad de dicho sistema.

Después, introduciremos la formulación de Zakharov-Shabat, que permite caracterizar la integrabilidad de sistemas no lineales pasando a una ecuación diferencial matricial de primer orden, sin tener que particularizar a ningún sistema en específico.

Adoptaremos la siguiente definición para la integrabilidad

Un sistema hamiltoniano con N grados de libertad ($N < \infty$) es integrable si existen N cantidades conservadas funcionalmente independientes y que se encuentran en involución¹. Si el sistema hamiltoniano en cuestión no tiene un número finito de grados de libertad (la ecuación KdV, por ejemplo), diremos que es integrable si podemos encontrar infinitas cantidades conservadas funcionalmente independientes y que se encuentran en involución.

Estar en involución significa que sus corchetes de Poisson con el Hamiltoniano (y también entre las propias cantidades conservadas) son nulos. Que sean funcionalmente independientes implica que sus diferenciales sean linealmente independientes salvo en un conjunto de medida nula.

¹Por el teorema de Liouville, esta definición de integrabilidad es equivalente a que el sistema se pueda resolver por cuadraturas.

Capítulo 2

Deducción y propiedades de la ecuación KdV

2.1. Deducción de la ecuación KdV

Partimos de las ecuaciones de conservación de la masa de los fluidos.¹

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \vec{f} \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde ρ es la densidad de masa y \vec{v} la velocidad del fluido, mientras que P es la presión interna y \vec{f} es la densidad de fuerza externa.

Asumimos que el líquido es incompresible e irrotacional, obteniendo así las siguientes restricciones:

$$\vec{\nabla} \rho = 0, \quad \partial_t \rho = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

La última condición hace que podamos escribir \vec{v} como el gradiente de un potencial:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.3) en (2.1) se tiene que \vec{v} verifica la ecuación de Laplace.

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (2.4)$$

¹Los pasos que se siguen en esta deducción pueden ser encontrados en [4].

Suponiendo que la fuerza externa es debida a la gravedad, podemos escribir

$$\vec{f} = -\rho g \hat{y} \quad (2.5)$$

Utilicemos la siguiente identidad válida para vectores tridimensionales.

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(v^2) \quad (2.6)$$

Si sustituimos (2.6) en (2.1) obtenemos

$$\vec{\nabla} \left(\partial_t \phi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + gy \right) = 0 \quad (2.7)$$

Observamos que la función sobre la que actúa $\vec{\nabla}$ debe depender únicamente del tiempo, y podemos hacer que el potencial ϕ absorba este término, pues esto no va a afectar a la hora de determinar las velocidades. Así, además de la ecuación (2.4) podemos obtener la siguiente restricción para el potencial:

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{P}{\rho} + gy = \partial_t \phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{P}{\rho} + gy = 0 \quad (2.8)$$

Donde

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \equiv u\hat{x} + v\hat{y} \quad (2.9)$$

Ahora debemos describir la geometría del problema y las condiciones de frontera. Estamos interesados en el flujo irrotacional de este líquido incompresible a través de un canal con una anchura despreciable frente a su longitud, de manera que podemos considerarlo como un sistema unidimensional. Llamamos \hat{x} a esta dirección, así como denotamos por \hat{y} a la dirección perpendicular a la misma. Nótese que estamos ignorando completamente el eje \hat{z} . Realizamos una aproximación de longitud de onda grande, asumiendo que las ondas que queremos estudiar son mucho más largas que la profundidad del agua. Si la profundidad del agua en equilibrio es h , y la longitud característica de dichas ondas es l , asumimos $h \ll l$. De igual manera, si la amplitud característica de las ondas es a , imponemos que $a \ll h$, en aras de modelar este flujo irrotacional, o lo que es lo mismo, evitar cualquier turbulencia en el movimiento. Sean

$$\epsilon \equiv \frac{a}{h}, \quad \delta \equiv \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (2.10)$$

Vamos a considerar estas cantidades como perturbaciones al flujo laminar (el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse y cada partícula de fluido sigue una trayectoria suave), y supondremos que son del mismo orden de magnitud. Aunque esto pueda parecer poco intuitivo debido a que uno de

los términos es un cociente al cuadrado, veremos que únicamente este término cuadrático en $\frac{h}{l}$ es el que aparece en las ecuaciones finales.

De la misma manera, fijamos $y = h$ para la posición vertical de la superficie del agua cuando esta se encuentra en equilibrio, de manera que el fondo del canal se corresponde con $y = 0$. También imponemos que la presión se anule en la superficie y cerca de la misma. Como el fondo está fijado de manera rígida, el agua no puede moverlo, y así llegamos a la siguiente condición de frontera:

$$(\hat{y} \cdot \vec{v})|_{\text{fondo}} = v|_{\text{fondo}} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (2.11)$$

Llamamos $\eta = \eta(x, t)$ a la amplitud de las ondas viajeras, de forma que la superficie del líquido que tiene ondas viajando a través de ella viene descrita por las siguientes ecuaciones²:

$$y|_{\text{superficie}} = h + \eta(x, t) \quad (2.12)$$

$$v|_{\text{superficie}} = \partial_t \eta + \partial_x \eta \frac{dx}{dt}|_{\text{superficie}} \quad (2.13)$$

$$\phi_y|_{\text{superficie}} = \partial_t \eta + \phi_x|_{\text{superficie}} \partial_x \eta \quad (2.14)$$

Particularizando (2.8) para la superficie, si absorbemos el término gh dentro del potencial ϕ , obtenemos la relación:

$$\phi_t|_{\text{superficie}} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)|_{\text{superficie}} + g\eta = 0 \quad (2.15)$$

Antes de obtener la ecuación KdV, tiene cierto interés resolver las ecuaciones anteriores para ondas lineales que sufren la fuerza de la gravedad. Para ello, nos quedamos con los términos lineales de las mismas, con intención de modelar ondas con amplitudes muy pequeñas:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0, \quad \phi_y(x, y = 0) = 0 \quad (2.16)$$

Mientras que en la superficie, las restricciones se convierten en:

$$\partial_t \eta - \partial_y \phi = 0, \quad \partial_t \phi + g\eta = 0 \quad (2.17)$$

Juntando (2.16), (2.17), y derivando respecto al tiempo:

$$\partial_{tt} \phi + g \partial_y \phi = 0 \quad (2.18)$$

²Se usa la notación $f_t = \partial_t f$, $f_x = \partial_x f$, etc.

Al ser la ecuación (2.18) lineal y factorizable, $\phi = Y(y)F(t)$. Es decir,

$$\frac{\partial_{tt}F}{F} = -g\frac{\partial_y Y}{Y} \Rightarrow \partial_{tt}F = \lambda F, \partial_y Y = -g\lambda Y, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

Imponiendo las condiciones de (2.16), se deduce que

$$\phi = 2Ae^{-kh} \cosh(k(y+h)) \sin(kx - \omega t) \quad (2.20)$$

Insertando (2.20) en (2.18), llegamos a una condición para la frecuencia:

$$\omega^2 = gk \tanh(k(y+h))|_{\text{superficie}} = gk \tanh(kh) \quad (2.21)$$

Haciendo uso de la segunda ecuación de (2.17), podemos determinar la amplitud de la onda:

$$\eta = A\sqrt{(2k/g) \sinh(2kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.22)$$

En consecuencia, la amplitud de la onda depende de la longitud de la misma, y existe una relación de dispersión que dice que ω^2 es proporcional a k . La constante de proporcionalidad entre ambas variables es la velocidad, que para longitudes de onda grandes verifica $v = c_0 \equiv \sqrt{gh}$, mientras que para longitudes de onda pequeñas satisface $v \approx \sqrt{g/k} = 2\pi c_0 \sqrt{\lambda/h}$.

Lo importante de todo esto es que el cociente λ/h es el que nos da una idea de cuándo la longitud de onda es grande o pequeña. Recordemos que, como este último cociente resulta de la aproximación a longitud de onda pequeña, las soluciones con mayor longitud de onda tienen mayor velocidad y menor dispersión.

Este ha sido el resultado de quedarnos a primer orden con las ecuaciones generales previas a (2.16). ¿Qué ocurre si consideramos más términos en las mismas? Si volvemos a la ecuación (2.8) y la diferenciamos, el resultado es

$$\phi_{xt} + \phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy} + g\eta_x = u_t + uu_x + vv_x + g\eta_x = 0 \quad (2.23)$$

Si ahora expandimos ϕ en una serie de potencias en y , deducimos que

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x, t) \Rightarrow \phi_y = \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} \phi_n \quad (2.24)$$

Así, la condición (2.11) implica que

$$\phi_1 = 0 \quad (2.25)$$

Por otro lado, introduciendo (2.25) en la ecuación de Laplace, y haciendo uso de la unicidad de la expansión, llegamos a una relación recursiva para los coeficientes:

$$\phi_{n,xx} + (n+2)(n+1)\phi_{n+2} = 0 \quad (2.26)$$

Juntando (2.26) con (2.25), es claro que todos los términos impares de la expansión son nulos, de forma que ya tenemos una fórmula cerrada para ϕ , dada por

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)} \quad (2.27)$$

Donde $f \equiv \phi_0(x, y)$, y $f^{(2m)}$ es la $2m$ -ésima derivada de f respecto a x .

Al estar realizando un tratamiento perturbativo del problema, puede ser útil reescalar las variables para que sean adimensionales. Para la distancia horizontal, el término adimensional será el resultante de realizar el cociente de la distancia con la longitud característica, l . Análogamente, compararemos el tiempo con el cociente entre l y la velocidad lineal, $c_0 \equiv \sqrt{gh}$. Es decir:

$$\bar{x} \equiv \frac{x}{l}, \quad \bar{y} \equiv \frac{y}{h}, \quad \bar{t} \equiv \frac{t}{l/c_0} \quad (2.28)$$

De la misma forma, comparando la amplitud con su máximo a :

$$\bar{\eta} \equiv \frac{\eta}{a}, \quad \bar{\phi} \equiv \frac{h\phi}{alc_0} = \frac{\phi}{\epsilon lc_0} \quad (2.29)$$

Nótese que ahora la superficie se encuentra a una altura $\bar{y} = 1 + \epsilon\bar{\eta}$. En consecuencia,

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{u}{\epsilon c_0} \\ \bar{v} = v \frac{\delta}{\epsilon c_0} \\ \bar{f} = \frac{f}{\epsilon lc_0} \end{cases} \quad (2.30)$$

Con esta notación, se verifica:

$$\bar{\phi} = \bar{f} - \frac{1}{2}(1 + \epsilon\bar{\eta})^2 \delta \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}} + O^2; \quad \bar{u} = \bar{f}_{\bar{x}} - \frac{1}{2} \delta \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + O^2; \quad \bar{v} = -\delta[(1 + \epsilon\bar{\eta}) \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{1}{6} \delta \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + O^2] \quad (2.31)$$

Sustituyendo (2.31) en (2.14):

$$\bar{\phi}_{\bar{y}} = \delta(\bar{\eta}_{\bar{x}} + \epsilon\bar{\eta}_{\bar{x}}\bar{\phi}_{\bar{x}}) \quad (2.32)$$

Juntando (2.32) y (2.27):

$$\bar{\eta}_{\bar{x}} + \epsilon\bar{\eta}_{\bar{x}}\bar{f}_{\bar{x}} + (1 + \epsilon\bar{\eta})\bar{f}_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{1}{6} \delta \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + O^2 = 0 \quad (2.33)$$

De la misma forma, (2.15) se convierte en:

$$\bar{\phi}_t + \frac{1}{2}\epsilon[(\bar{\phi}_x)^2 + (\bar{\phi}_y)^2/\delta] + \bar{\eta} = 0 \quad (2.34)$$

Equivalentemente, al introducir las expansiones:

$$\bar{f}_t - \frac{1}{2}\delta\bar{f}_{x\bar{x}t} + \frac{1}{2}\epsilon(\bar{f}_x)^2 + \bar{\eta} + O^2 = 0 \quad (2.35)$$

Nos preguntamos cómo varía esta ecuación a través del canal. Por tanto, diferenciamos (2.35) respecto a x , y después reescribimos la ecuación resultante y también (2.33) utilizando $\omega \equiv \bar{f}_x$. Al mismo tiempo, como tenemos todas las variables en forma adimensional, vamos a dejar de escribir las barras encima de las mismas de manera explícita, de forma que a partir de ahora x va a ser una variable adimensional, así como el resto de las variables que utilizamos, a menos que se diga lo contrario. Al diferenciar, obtenemos:

$$\omega_t - \frac{1}{2}\delta\omega_{xxt} + \epsilon\omega\omega_x + \eta_x = 0 \quad (2.36)$$

$$\eta_t + \epsilon\omega\eta_x + (1 + \epsilon\eta)\omega_x - \frac{1}{6}\delta\omega_{xxx} = 0 \quad (2.37)$$

Nótese que también hemos dejado de escribir que todas estas ecuaciones son únicamente válidas a segundo orden en ϵ, δ .

Ahora necesitamos resolver (2.36) y (2.37), pero son ecuaciones complicadas, por lo que vamos a ir paso a paso. En primer lugar, tenemos que cerciorarnos de que se satisfacen a orden cero, es decir, si no escribimos los parámetros ϵ, δ :

$$\omega_t + \eta_x = 0 = \omega_x + \eta_t \quad (2.38)$$

Resolviendo el sistema de (2.38), se concluye que

$$\omega_{tt} = \omega_{xx} \quad (2.39)$$

$$\eta_{xx} = \eta_{tt} \quad (2.40)$$

Esto es lo que cabía esperar, a orden cero ω, η tienen que satisfacer ecuaciones de onda con velocidad adimensional igual a la unidad. A continuación, vamos a proponer una solución ω asumiendo que ambas funciones son iguales a orden cero en ϵ, δ , y que las diferencias vienen a partir del primer orden:

$$\omega \equiv \eta + \epsilon F + \delta G + O^2 \quad (2.41)$$

Donde F, G son funciones de x, t . Imponiendo ahora que (2.41) satisfaga (2.39) y (2.40):

$$\eta_t + \eta_x + \epsilon(F_t + \eta\eta_x) + \delta(G_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}) = 0 \quad (2.42)$$

$$\eta_x + \eta_t + \epsilon(F_x + 2\eta\eta_x) + \delta(G_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) = 0 \quad (2.43)$$

Donde hemos ignorado los términos de orden dos o mayor en ϵ, δ . Restando (2.42) a (2.43):

$$\epsilon(F_x - F_t + \eta\eta_x) + \delta(G_x - G_t - \frac{1}{6}\eta_{xxx} + \frac{1}{2}\eta_{xxt}) = 0 \quad (2.44)$$

Observemos ahora que, pese a ser ϵ, δ numéricamente similares, su significado físico es muy distinto, por lo que hay que estudiarlos separadamente. De hecho, esa es la motivación del ansatz (2.41). Esto implica que $\eta_t + \eta_x$ es de orden uno en ϵ, δ . También se verifica $\delta(\eta_x - \eta_t) = \delta(2\eta_x) + O^2$. Por otro lado, ya hemos deducido que $\omega_t + \omega_x = 0$. Imponiendo ahora que $F_x + F_t = O^1, G_x + G_t = O^1$, si juntamos todas las condiciones llegamos a que:

$$F = -\frac{1}{4}\eta^2, G = \frac{1}{3}\eta_{xx} \Rightarrow \omega = \eta - \frac{1}{4}\epsilon\eta^2 + \frac{1}{3}\delta\eta_{xx} + O^2 \quad (2.45)$$

Sustituyendo (2.45) en (2.37):

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\epsilon\eta\eta_x + \frac{1}{6}\delta\eta_{xxx} = 0 \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) es, esencialmente, la ecuación KdV. Podemos, no obstante, hacer un último reescalado para dejarla más manejable.

$$\eta_x + \frac{3}{2}\epsilon\eta\eta_x = \eta_x(1 + \frac{3}{2}\epsilon\eta) = \frac{3}{2}\epsilon\eta_x(\eta + \frac{2}{3\epsilon}) = \frac{3}{2}\epsilon(\eta + \frac{2}{3\epsilon})_x(\eta + \frac{2}{3\epsilon}) \equiv \frac{3}{2}\epsilon\sigma_x\sigma \quad (2.47)$$

Donde $\sigma \equiv \eta + \frac{2}{3\epsilon}$ es la amplitud original de onda trasladada una constante relativamente grande. Así, (2.46) se convierte en

$$\sigma_t + \frac{3}{2}\epsilon\sigma\sigma_x = \frac{1}{6}\delta\sigma_{xxx} \quad (2.48)$$

Tomando ahora

$$\sigma = \rho\frac{\delta}{\epsilon}, t = \frac{\tau}{\delta} \quad (2.49)$$

(2.48) adopta la forma

$$\rho_\tau + \frac{3}{2}\rho\rho_x + \frac{1}{6}\rho_{xxx} = 0 \quad (2.50)$$

Finalmente, definiendo

$$\tau \equiv -6t, \rho \equiv \frac{u}{9} \quad (2.51)$$

La ecuación KdV se puede escribir como

$$\boxed{u_t = uu_x + u_{xxx}} \quad (2.52)$$

Resaltemos que la variable dinámica u no es la que hemos utilizado antes para la componente horizontal de la velocidad, sino que es proporcional a la variable dinámica η que hemos estado utilizando. A continuación, mostraremos algunas soluciones notables que posee este sistema.

2.2. Simetrías de la ecuación KdV

Las simetrías suelen ser útiles para encontrar y clasificar soluciones. La ecuación KdV posee un número infinito numerable de simetrías. El teorema de Noether relaciona cantidades conservadas con simetrías. Nosotros vamos a hallar un número infinito numerable de cantidades conservadas, luego la ecuación KdV tiene un número infinito de simetrías continuas. Ya que las cantidades están en involución, el grupo correspondiente de simetrías es abeliano³. A modo de ejemplo, algunas de ellas son las traslaciones temporales, las traslaciones espaciales, los reescalados y los impulsos:

i) $t \rightarrow t + c_1$

ii) $x \rightarrow x + c_2$

iii) $x \rightarrow cx, t \rightarrow c^3t, u \rightarrow c^{-2}u$

iv) $x \rightarrow x + vt, t \rightarrow t, u \rightarrow u + v$

Notemos que la simetría iv), pese a ser similar a una transformación de Galileo, no lo es. Esto se debe a que u es la altura del agua, pero v se corresponde con una velocidad. La ecuación KdV no tiene invariancia Galileo debido al término de orden tres en derivadas espaciales. En consecuencia, para buscar soluciones de ondas viajeras, no podemos partir de una solución estática y construir más soluciones mediante transformadas ordinarias de Galileo.

2.3. Ondas viajeras no dispersivas

Vamos a estudiar las soluciones de la ecuación KdV correspondientes a ondas viajeras no dispersivas. Es decir, vamos a asumir ahora que

$$u(x, t) = u(x + ct) = f(x + ct) \quad (2.53)$$

³Ignoramos cuál es el grupo de simetrías total de KdV.

siendo c la velocidad de la onda viajera que satisface la ecuación KdV. Es importante notar que la simetría **iv)** de la sección 2.2, que tiene una forma similar a una invariancia bajo transformaciones de Galileo, no permite escoger $c = 0$, obtener una solución estática general, y generar más soluciones a través de la transformada de Galileo.

Insertando (2.53) en (1.1), obtenemos

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.54)$$

Como esta ecuación involucra únicamente derivadas espaciales, podemos fijar $t = 0$. Así, dicha ecuación se convierte en

$$c \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} u^2 - cu = C \quad (2.55)$$

Siendo C una constante. Pero por la condición de frontera de que $u(x, t) = 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$, se concluye $C = 0$. Es decir, tenemos como primitiva que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} u^2 - cu = 0 \quad (2.56)$$

Multiplicando por $u_x = \partial_x u$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{dx} u^2 - c \frac{du}{dx} u = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{c}{2} u^2 = 0 \quad (2.57)$$

Si ahora escogemos la condición

$$\frac{du}{dx} = 0, \text{ para } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.58)$$

podemos encontrar una fórmula cerrada para la solución

$$u(x) = 3c \cdot \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} x = \frac{3c}{\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)} \quad (2.59)$$

Y si recuperamos la variable temporal, obtenemos

$$u(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x + ct) \right)} \quad (2.60)$$

Probando así que la ecuación KdV posee soluciones que son ondas viajeras. En particular, la solución que acabamos de hallar recibe el nombre de solitón de Russell o, simplemente, solitón. A continuación, representamos esta onda para 3 valores distintos de c , fijando $t = 0$. Notemos que si aumenta la velocidad de propagación también aumenta la altura del pico, pero disminuye su anchura. Esta onda no dispersiva es la que observó Russell.

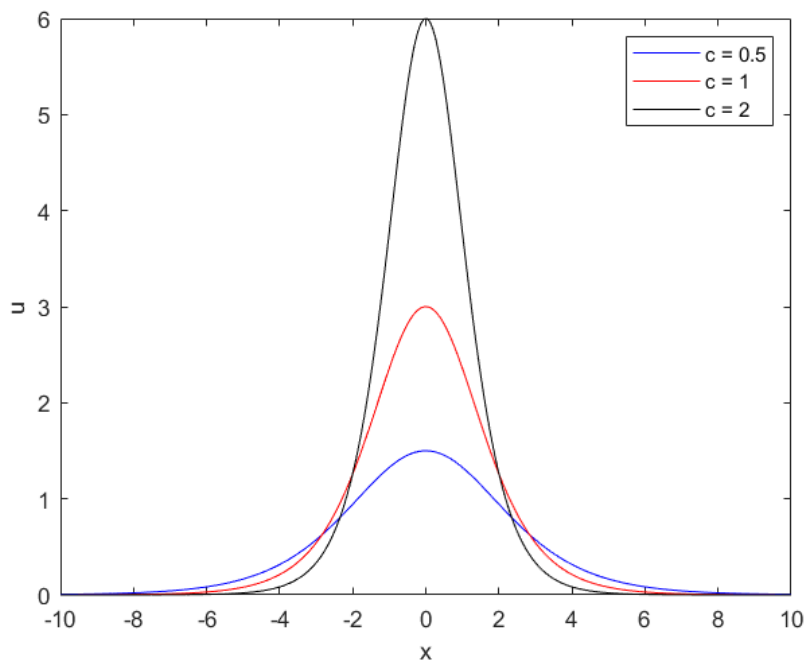


Figura 2.1: Representación del solitón de Russell.

El solitón tiene algunas propiedades interesantes (véase [5, 10]).

i) $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, y además está bastante localizada espacialmente, al tener un decaimiento exponencial.

ii) Dicha onda viaja únicamente hacia la izquierda. De hecho, si cambiamos c por $-c$, la onda que viaja hacia la derecha se volvería oscilante y singular.

iii) La amplitud de la onda es directamente proporcional a su velocidad. Es decir, cuanto más alta sea la onda, más rápido viaja. Esto concuerda con lo que se observa experimentalmente en el caso de las ondas solitarias en el agua.

iv) La onda no se dispersa. Dicho de otro modo, mantiene su forma mientras se mueve. Esta propiedad es la más importante, y concuerda con lo observado por Russell.

Un solitón es una onda no dispersiva y que, consecuentemente, mantiene su forma al moverse. En particular, la solución (2.60) es un solitón. Por tanto, se ha probado que la ecuación KdV posee soluciones que son solitones. Esto último no debería resultar sorprendente, pues se formuló dicha ecuación para describir ondas solitarias observadas en el agua.

Si ahora ignoramos el término no lineal en la ecuación KdV y analizamos la relación de dispersión para

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.61)$$

se tiene que

$$E_k = \omega_k = k^3 \quad (2.62)$$

de forma que para cualquier solución de la ecuación (2.61) obtendríamos que la velocidad de fase es

$$v_f = \frac{E_k}{k} = \frac{\omega_k}{k} = k^2 \quad (2.63)$$

mientras que la velocidad de grupo es

$$v_g = \frac{dE_k}{dk} = \frac{d\omega_k}{dk} = 3k^2 \quad (2.64)$$

Esto implica que si ignoramos el término no lineal de la ecuación KdV las soluciones vuelven a ser dispersivas. En consecuencia, el término no lineal $u \frac{\partial u}{\partial x}$ es el responsable de la naturaleza no dispersiva de los solitones que son solución de la ecuación KdV.

También existen soluciones singulares como

$$u(x, t) = 12 \sqrt{\frac{c}{2}} \coth \left(\sqrt{\frac{c}{2}} (x - ct) \right) \quad (2.65)$$

Esta solución no es físicamente aceptable, porque estamos asumiendo que el fondo es rígido. No obstante, vamos a utilizarla después para construir multisolitones con la transformada de Bäcklund.

2.4. Ondas CNoidales

Estas soluciones se basan en las funciones elípticas de Jacobi (véase [6], por ejemplo), que entre otras cosas sirven para resolver el péndulo físico. Denotamos a estas funciones por $\mathbf{cn}(x|m)$, $\mathbf{sn}(x|m)$ y $\mathbf{dn}(x|m)$, donde $m \in [0, 1]$. Se verifica que $\mathbf{cn}(x + 2K(m)|m) = -\mathbf{cn}(x|m)$, siendo

$$\mathbf{K}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\theta)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - m^2 t^2}} \quad (2.66)$$

la integral elíptica completa de primera especie. Esta función satisface $\mathbf{K}(0) = \pi/2$, $\mathbf{K}(1) = \infty$. Se tiene que $\mathbf{cn}(x|0) = \cos(x)$, $\mathbf{cn}(x|1) = \cosh^{-1}(x)$. Estas funciones elípticas cumplen las siguientes propiedades (véase [7] para más información):

$$\mathbf{sn}^2(x|m) = 1 - \mathbf{cn}^2(x|m) \quad (2.67)$$

$$\mathbf{dn}^2(x|m) = 1 - m^2 \mathbf{sn}^2(x|m) \quad (2.68)$$

$$\partial_x \mathbf{cn}(x|m) = -\mathbf{sn}(x|m) \mathbf{dn}(x|m) \quad (2.69)$$

Así, la siguiente función es solución de la ecuación KdV.

$$u = 12k^2 m^2 \mathbf{cn}^2(k(x + ct)|m) \quad , \quad c = 4k^2(2m^2 - 1) \quad (2.70)$$

A continuación, representamos esta onda CNoidal, para dos valores distintos de m , con $t = 0$, $k = 1$. Al aumentar la velocidad de propagación de la onda (equivalentemente, al aumentar m), el pico es más alto, y la anchura es mayor. La distancia entre dos picos consecutivos es $\lambda(m) = 2\mathbf{K}(m)$. Esto implica que, cuando $m \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow \infty$. Es decir, recuperaríamos una onda solitaria. Por otro lado, para $m \rightarrow 0$ la forma de la onda es sinusoidal.

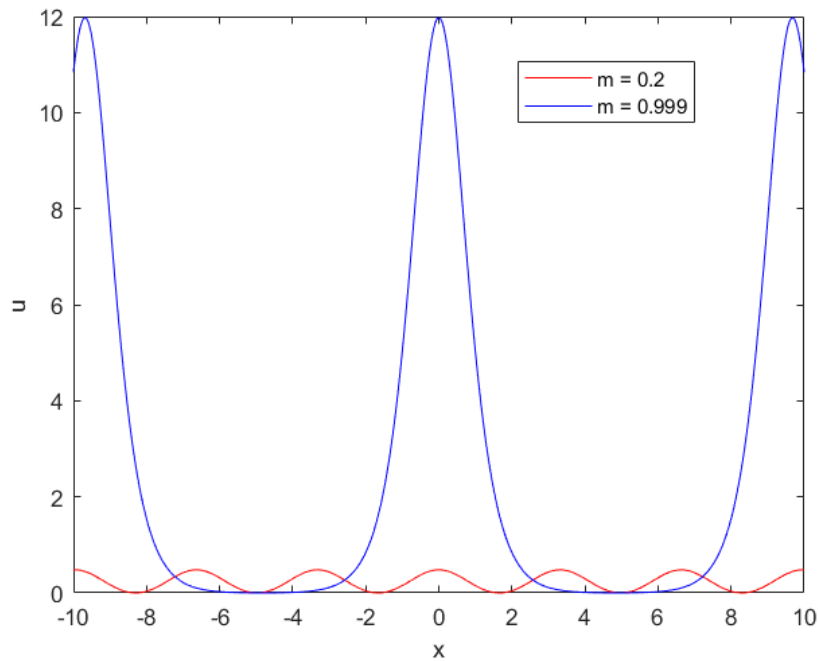


Figura 2.2: Representación de la onda CNoidal dada por (2.70).

2.5. KdV como un sistema hamiltoniano

Recordemos que la ecuación KdV es ⁴

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.71)$$

Las variables $u(x, t)$ pueden ser consideradas como las coordenadas generalizadas del espacio de fases. La ecuación de evolución temporal es de primer orden en el tiempo. Esto último es inherente a las ecuaciones de Hamilton. Para probar que la ecuación de KdV es un sistema Hamiltoniano, debemos encontrar un corchete de Poisson y un Hamiltoniano tal que la ecuación KdV se pueda escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u, H\} \quad (2.72)$$

Para poder definir un corchete de Poisson y un Hamiltoniano adecuados para nuestro sistema, reescribamos (2.71) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.73)$$

Observemos que si escogemos como Hamiltoniano

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.74)$$

tenemos

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = \frac{1}{2} u^2(x) + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (2.75)$$

Donde la derivada funcional se define, para un funcional arbitrario F , como

$$\frac{\delta F(u(x))}{\delta u(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F(u(x) + \epsilon \delta(x - y)) - F(u(x))) \quad (2.76)$$

Definiendo H como en (2.74), la ecuación KdV se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.77)$$

Juntando las ecuaciones (2.72) y (2.77), deducimos que para tener un sistema Hamiltoniano es una condición necesaria:

$$\{u(x), H\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.78)$$

O, equivalentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta H}{\delta u(y)} \{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \quad (2.79)$$

⁴Para demostrar que la ecuación KdV es un sistema hamiltoniano, se siguen los razonamientos expuestos en [5, 8, 9, 10].

Esto implica que el corchete de Poisson en cuestión debe satisfacer

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (2.80)$$

Al ser una derivada distribucional de una delta de Dirac, es necesariamente una aplicación antisimétrica. Es decir, $\{F, G\} = -\{G, F\}$.

Vamos a probar la identidad de Jacobi a continuación. Dados dos funcionales $F(u), G(u)$, si escogemos el corchete de Poisson como el definido en (2.80), esto nos lleva a:

$$\{F(u), G(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \frac{\delta G}{\delta u(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} \quad (2.81)$$

Asumiendo que $u(x, t)$ se anula asintóticamente, suficientemente rápido de forma que $\frac{\delta F}{\delta u(x)}, \frac{\delta G}{\delta u(x)}$ también se hacen cero rápidamente cuando hacemos tender la coordenada espacial a infinito, si integramos por partes, (2.81) se convierte en

$$\{F(u), G(u)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\delta G}{\delta u(x)} \right) \right) \quad (2.82)$$

Como consecuencia de (2.82), se tiene la siguiente identidad:

$$\{H(u), \{F(u), G(u)\}\} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \frac{\delta}{\delta u(x)} \{F(u), G(u)\} \quad (2.83)$$

Teniendo en cuenta que la derivada funcional verifica la regla de la cadena de Leibniz, juntando (2.82) y (2.83), e integrando por partes, llegamos a la siguiente expresión

$$\{H(u), \{F(u), G(u)\}\} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta u(x) \delta u(y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta G}{\delta u(y)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta F}{\delta u(y)} \frac{\delta^2 G}{\delta u(x) \delta u(y)} \right) \quad (2.84)$$

Recordando que la identidad de Jacobi es

$$\{H(u), \{F(u), G(u)\}\} + \{G(u), \{H(u), F(u)\}\} + \{F(u), \{G(u), H(u)\}\} = 0 \quad (2.85)$$

Se concluye que (2.85) es evidente a partir de (2.84). En consecuencia, este corchete de Poisson satisface la identidad de Jacobi. Por tanto, la ecuación KdV es un sistema Hamiltoniano con

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \quad (2.86)$$

y

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (2.87)$$

De forma que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u(x), H\} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.88)$$

De hecho, la ecuación KdV tiene la peculiaridad de que también es un sistema Hamiltoniano con otra elección del corchete de Poisson y con un segundo Hamiltoniano. Por ejemplo, si hubiésemos tomado

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) + u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \delta(x - y) \quad (2.89)$$

y

$$H_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} u^2(x) \quad (2.90)$$

tendríamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \{u(x), H_2\}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\delta H_2}{\delta u(y)} \{u(x), u(y)\}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) + u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \delta(x - y) \\ &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) + u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) u(x) \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{2}{3} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} u \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Es decir, recuperamos la ecuación KdV. Observemos que este corchete de Poisson también es anti-simétrico y también satisface la identidad de Jacobi [5].

2.6. Unicidad de solución

En la sección anterior, hemos probado que la ecuación KdV es un sistema Hamiltoniano. Antes de estudiar la integrabilidad de dicho sistema, demostraremos la unicidad de las soluciones regulares que se anulan en el infinito espacial (condición necesaria para que tengan una energía total finita).

Supongamos que $u(x, t)$, $v(x, t)$ son dos soluciones a la ecuación KdV satisfaciendo las mismas condiciones iniciales⁵. Es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.92)$$

⁵La prueba que presentamos para la unicidad de las soluciones es similar a la que se puede encontrar en [5].

y

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (2.93)$$

con

$$u(x, 0) = v(x, 0) = f(x) \quad (2.94)$$

Restando la ecuación (2.93) a (2.92), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - v) = u \frac{\partial(u - v)}{\partial x} + (u - v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3(u - v)}{\partial x^3} \quad (2.95)$$

Definiendo

$$w = u(x, t) - v(x, t) \quad (2.96)$$

La ecuación (2.95) se convierte en

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (2.97)$$

Recordemos que estamos asumiendo, en todo momento, que u, v se hacen cero para $x \rightarrow \pm\infty$.

Por tanto, si ahora multiplicamos la ecuación (2.97) por w e integramos sobre la variable x , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx w^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.98)$$

Definamos

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} w^2(x, t) \quad (2.99)$$

y

$$m = 2 \cdot \text{máx} \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (2.100)$$

Notemos que $m < \infty$ por ser $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ funciones continuas (alcanzan un máximo en cualquier compacto) y por decaer a cero en el infinito espacial. Juntando las tres ecuaciones anteriores, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq mE(t) \quad (2.101)$$

Y, en consecuencia,

$$E(t) \leq E(0) e^{mt} \quad (2.102)$$

Como por definición es claro que $E(t) \geq 0$, esto implica que si $E(0) = 0$ entonces $E(t) = 0$ también.

Por la ecuación (2.94), tenemos

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = 0 \quad (2.103)$$

Esto implica que

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx w^2(x, 0) = 0 \quad (2.104)$$

Por tanto, siguiendo el razonamiento anterior, $E(t) = 0$.

Por otro lado, como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx w^2(x, t) \quad (2.105)$$

Se tiene que

$$w(x, t) = 0 \quad (2.106)$$

Dicho de otra forma

$$u(x, t) = v(x, t) \quad (2.107)$$

Concluyendo así que, de existir dos soluciones de la ecuación KdV con las mismas condiciones iniciales, ambas son la misma. Por tanto, la ecuación KdV admite una única solución dadas unas condiciones iniciales, siempre y cuando estemos asumiendo que las soluciones se hacen cero en el infinito espacial.

Capítulo 3

Integrabilidad de la ecuación KdV

De momento hemos visto que la ecuación KdV es un sistema Hamiltoniano que admite una única solución que se anule en el infinito espacial si fijamos las condiciones iniciales, y que los solitones son una clase de soluciones que satisfacen dicha ecuación. Ahora probaremos la existencia de infinitas cantidades conservadas que se encuentran en involución, concluyendo así que la ecuación KdV es un sistema integrable ¹.

3.1. Cantidades conservadas

Una cantidad $Q(u)$ se dice conservada si

$$0 = \frac{dQ(u)}{dt} \equiv \{Q(u), H\} \quad (3.1)$$

Representando explícitamente

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u(x, t)) \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) se convierte en

$$\frac{dQ(u)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \rho(u(x, t))}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

Esto implica la existencia de una ecuación de continuidad de la forma

$$\frac{\partial \rho(u(x, t))}{\partial t} + \frac{\partial j(u(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

Así, mientras que las cargas integradas son independientes del tiempo (es decir, son constantes del movimiento), las densidades satisfacen la ecuación de continuidad (3.4).

¹Se pueden consultar pruebas similares a la que realizaremos aquí en [12, 13, 14, 15].

Esto da pie a escribir la ecuación KdV como una ecuación de continuidad, pues

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3.5)$$

Si comparamos (3.4) con (3.5), identificamos

$$\rho_0(u(x, t)) = u(x, t) \quad (3.6)$$

y

$$j_0 = - \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right) \quad (3.7)$$

Si introducimos las ecuaciones (3.6) y (3.7) en (3.2), se deduce que

$$Q_0 = H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_0(u(x, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) \quad (3.8)$$

es una constante del movimiento.

Vamos a redefinir, por motivos que serán aparentes posteriormente,

$$\rho_0(u(x, t)) = 3u(x, t) \quad (3.9)$$

$$H_0 = 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) \quad (3.10)$$

Ahora, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.11)$$

se tiene, multiplicando por u a ambos lados de la igualdad,

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.12)$$

equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (3.13)$$

que es lo mismo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3.14)$$

En consecuencia, deducimos la existencia de una segunda ecuación de continuidad si identificamos

$$\rho_1(u(x, t)) = \frac{1}{2}u^2 \quad (3.15)$$

$$j_1 = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

De esta forma, una segunda constante del movimiento viene dada por

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}(u(x, t))^2 \quad (3.17)$$

Recordando que el Hamiltoniano de la ecuación KdV tiene la forma

$$H_{KdV} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!}u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) \quad (3.18)$$

Este también debe ser una constante del movimiento pues

$$\frac{dH_{KdV}}{dt} = \{H_{KdV}, H_{KdV}\} = 0 \quad (3.19)$$

Por tanto, podemos identificar

$$H_2 = H_{KdV} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!}u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) \quad (3.20)$$

Notemos que, con el corchete de Poisson dado por

$$\{u(x, t), u(y, t)\} = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x - y) \quad (3.21)$$

podemos identificar H_2 con el generador de traslaciones temporales y, en consecuencia, con la energía, pues

$$\{u(x, t), H_2\} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.22)$$

De manera similar, H_1 puede ser identificado con el momento debido a que genera traslaciones espaciales. Es decir,

$$\{u(x, t), H_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \{u(x, t), \frac{1}{2}u^2(y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy u(y, t) \frac{\partial}{\partial x}\delta(x - y) \quad (3.23)$$

o, equivalentemente,

$$\{u(x, t), H_1\} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (3.24)$$

Estas son las únicas cantidades conservadas asociadas a simetrías típicas.

Históricamente, cuando se descubrió una cuarta cantidad conservada, causó mucho interés al no corresponderse a simetrías estándares. Así, cuando Miura encontró 11 cantidades conservadas adicionales [5, 12], la comunidad pensaba que habría infinitas simetrías.

Estas once simetrías fueron construidas por Miura usando fuerza bruta. Desde entonces, se han desarrollado varias técnicas para encontrar simetrías de la ecuación KdV, y vamos a estudiar a continuación una que es simple y elegante.

3.2. La transformada de Miura

La transformada de Miura es un método que permite construir cantidades conservadas de la ecuación KdV de forma sistemática (véase [12, 14, 15]). Para ello, introducimos en primer lugar la ecuación KdV modificada (ecuación MKdV, de ahora en adelante), dada por

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.25)$$

La ecuación MKdV se puede obtener realizando una transformada de Riccati sobre la ecuación KdV. En efecto, sea

$$u(x, t) = v^2(x, t) + i\sqrt{6} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.26) en la ecuación KdV, obtenemos

$$2v \frac{\partial v}{\partial t} + i\sqrt{6} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \left(v^2 + i\sqrt{6} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(2v \frac{\partial v}{\partial x} + i\sqrt{6} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i\sqrt{6} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (3.27)$$

Que es equivalente a

$$\left(2v + i\sqrt{6} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \left(2v + i\sqrt{6} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) prueba que, dada una solución de la ecuación MKdV, podemos construir una solución de la ecuación KdV mediante la transformada de Riccati mostrada en (3.26). Vamos a tratar de relacionar las cantidades conservadas de la ecuación MKdV (que también es integrable [5]) con aquellas de la ecuación KdV.

Observemos que, pese a que la ecuación MKdV se puede obtener a partir de la ecuación KdV, las simetrías de ambos sistemas no son las mismas. Por ejemplo, la ecuación KdV posee una invariancia

similar a la Galileo, mientras que la ecuación MKdV no. Efectivamente, si tomamos la siguiente transformación

$$\begin{cases} t \rightarrow t \\ x \rightarrow x + \frac{3}{2\epsilon}t \\ u \rightarrow u + \frac{3}{2\epsilon^2} \\ v \rightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} \end{cases} \quad (3.29)$$

Se puede comprobar que la ecuación KdV queda invariante, mientras que la MKdV es alterada como sigue

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{6}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{3}{2\epsilon^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v + \frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} \right)^2 \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.30)$$

Es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.31)$$

No obstante, la ecuación (3.31) sugiere que, si variamos el parámetro ϵ introducido en (3.29), podemos parametrizar una familia de ecuaciones en la que tenemos la ecuación de KdV en particular, para $\epsilon = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.32)$$

Recuperando la ecuación KdV para la variable $v(x, t)$. Por otro lado, si hacemos el reescalado $v \rightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v$ en (3.31), y hacemos tender $\epsilon \rightarrow \infty$, recuperamos la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.33)$$

es decir, la ecuación MKdV. Otra forma de comprobar esto es notando que bajo la transformada de Riccati

$$u = v^2 + i\sqrt{6} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.34)$$

tras aplicar (3.29), obtenemos

$$u = \frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.35)$$

De forma que para $\epsilon = 0$ tenemos $u = v$, recuperando la ecuación KdV, y si hacemos $\epsilon \rightarrow \infty$ tras el reescalado $v \rightarrow \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}v$ recuperamos la ecuación MKdV, pues en ese caso

$$u = v^2 + i\sqrt{6}\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.36)$$

3.3. La ecuación KdV posee infinitas cantidades conservadas

Ya estamos en posición de probar que la ecuación KdV posee infinitas cantidades conservadas. Nótese que si $v(x, t)$ es una solución de la ecuación generalizada (3.31), entonces se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (3.37)$$

que se puede reescribir como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^2}{18}v^3 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (3.38)$$

entonces obtenemos una solución de la ecuación KdV a través de la relación

$$u(x, t) = \frac{\epsilon^2}{6}v^2 + v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.39)$$

Además, como la ecuación generalizada (3.38) describe una ecuación de continuidad, podemos asegurar que si identificamos

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(v(x, t)) \quad (3.40)$$

donde

$$\rho(v(x, t)) = v(x, t) \quad (3.41)$$

entonces

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.42)$$

Como $u(x, t)$ está relacionado con $v(x, t)$ mediante (3.39), podemos invertir esta relación, de manera formal, y realizar la siguiente expansión

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n(u(x, t)) \quad (3.43)$$

De las ecuaciones (3.38) y (3.40) se deduce que cada $v_n(u(x, t))$ es una densidad conservada de la ecuación KdV, pues toda potencia de ϵ debe satisfacer, de manera independiente, una ecuación de continuidad.

Cabe destacar que si una cantidad conservada es una derivada total, entonces es una cantidad conservada trivial. Por ello, nos aseguramos de que la expansión de $v(x, t)$ en términos de $u(x, t)$ no sea una derivada total. Para ello, basta con cerciorarse de que sean términos polinómicos en u , pues no se pueden escribir como derivadas totales, debido a que en ese caso $\frac{\partial v}{\partial x}$ incluiría términos de la forma $\frac{\partial u}{\partial x}$. Por tanto, nos preguntamos si

$$u = v + \frac{\epsilon^2}{6} v^2 \quad (3.44)$$

permite que v sea expresado en términos de polinomios en u .

Observemos que, a partir de (3.44),

$$u + \frac{3}{2\epsilon^2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} v \right)^2 \quad (3.45)$$

De forma que

$$v = \frac{3}{\epsilon^2} \left(\left(1 + \frac{2}{3} \epsilon^2 u \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \quad (3.46)$$

Observamos que v posee, efectivamente, términos puramente polinómicos en u y, además, éstos son de potencia par en ϵ .

El siguiente paso es probar que las potencias impares de ϵ en la expansión de v son derivadas totales y, en consecuencia, ignorables. Nótese que v es complejo en general, pese a que u es real. Escribamos $v = y + iz$, siendo y, z ambos reales.

Ahora, como

$$u = v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{6} v^2 \quad (3.47)$$

podemos escribir u en términos de las nuevas variables:

$$u = \left(y - \epsilon \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{6} (y^2 - z^2) \right) + i \left(z + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{3} yz \right) \quad (3.48)$$

Pero como u es real, debemos tener

$$z \left(1 + \frac{\epsilon^2}{3} y \right) = -\epsilon \frac{\partial y}{\partial x} \xrightarrow{\text{es decir}} z = -\frac{3}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(1 + \frac{\epsilon^2}{3} y \right) \quad (3.49)$$

Esto muestra que la parte imaginaria de v es una derivada pura, y que involucra términos que tienen potencias explícitamente impares en ϵ . No obstante, todavía no es claro si no hay potencias impares de ϵ en la parte real de v . Para probar esto, vamos a estudiar las propiedades del escalado de varias cantidades.

Recordando la simetría

$$x \rightarrow cx, t \rightarrow c^3 t, u \rightarrow c^{-2} u \quad (3.50)$$

de la ecuación KdV, y que

$$u(x, t) = \frac{\epsilon^2}{6} v^2 + v + i\epsilon \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.51)$$

se tiene que el comportamiento de escala² de las variables es

$$\begin{cases} [u] = 1 \\ [v] = 1 \\ [x] = -\frac{1}{2} \\ [\epsilon] = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.52)$$

En consecuencia, es claro que cualquier término que tenga potencia impar de ϵ debe tener un número impar de derivadas también, pues v tiene dimensión de escalado de un número entero. No obstante, una derivada debe acarrear un factor i en virtud de la ecuación (3.39) y en consecuencia dicho término ha de ser imaginario. Por el mismo argumento, los términos reales deben ser todos de potencias pares de ϵ . Y el análisis realizado arriba muestra que es la parte real, que es la que tiene potencias pares de ϵ , la que da lugar a cantidades conservadas no triviales.

Ya estamos en condiciones de construir las cantidades conservadas. Sustituyendo la expansión de $v(u)$ de la ecuación (3.43) en la definición de la ecuación (3.39), obtenemos

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{n+2}}{6} \sum_{m=0}^n v_{n-m} v_m \quad (3.53)$$

es decir,

²Con escala nos referimos a las unidades que tiene cada cantidad respecto a una fija. Por ejemplo, $[u] = [\epsilon]^2 \cdot [v^2] = [v] = [\epsilon] \cdot [v] \cdot [x]^{-1}$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \left(v_n + i \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{n-2} v_{n-m-2} v_m \right) \quad \text{con } v_{<0} = 0 \quad (3.54)$$

Como u es independiente de ϵ , comparando términos de orden cero en ϵ se deduce

$$u = v_0 \quad (3.55)$$

Igualando a cero todo lo que depende de ϵ en la ecuación (3.54), obtenemos

$$n > 0 : \quad v_n + i \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{n-2} v_{n-m-2} v_m = 0 \quad (3.56)$$

Esto nos da una relación de recursividad entre las densidades conservadas, lo que permite su construcción. Por ejemplo

$$v_1 + i \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_1 = -i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.57)$$

$$v_2 + i \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{6} v_0^2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{6} u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.58)$$

Procediendo de la misma manera, se pueden obtener

$$v_3 = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3.59)$$

$$v_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3.60)$$

Es claro que podemos seguir construyendo cantidades conservadas de forma recursiva. Se pueden realizar varias observaciones aquí. Ya hemos probado anteriormente que las potencias impares de ϵ dan lugar a términos imaginarios que son derivadas totales. Los términos reales que son coeficientes de las potencias pares de ϵ contienen monomios puros en u y no pueden ser, en consecuencia, derivadas totales. Recordemos, sobre todo, que las cantidades conservadas pueden ser arbitrarias salvo constante multiplicativas y sumas de derivadas totales. Teniendo esto en cuenta, deducimos que

$$\rho_0 = 3v_0 = 3u \quad (3.61)$$

$$\rho_1 = -3v_2 = \frac{1}{2} u^2 + \text{derivadas totales} \quad (3.62)$$

$$\rho_2 = 3v_4 = \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \text{derivadas totales} \quad (3.63)$$

Se deduce que las primeras cantidades conservadas que teníamos no eran más que las tres primeras densidades no triviales en la serie de potencias de ϵ . La cantidad conservada n -ésima viene dada por

$$\rho_n = 3(-1)^n v_{2n} \quad (3.64)$$

de forma que

$$H_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_n = 3(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{2n} \quad (3.65)$$

Notemos que el carácter de escalado de cada v_n se puede calcular de la siguiente manera. Como

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \quad (3.66)$$

deducimos, de la ecuación (3.56), que

$$[v_n] = [v_{n-1}] + \frac{1}{2} \xrightarrow{[v_0]=[u]=1} [v_n] = \frac{n}{2} + 1 \quad (3.67)$$

Como las cantidades conservadas no triviales siguen la identificación $\rho_n \iff v_{2n}$ tenemos que $[\rho_n] = [v_{2n}] = n + 1$

Probando así que existe un número infinito numerable de cantidades conservadas, cada una de ellas siguiendo un escalado con una potencia entera distinta. Se puede probar la unicidad de las cantidades conservadas para cada entero (véase [13, 14, 15]).

Por otro lado, como cada una de las cantidades conservadas que hemos ido construyendo se corresponde con un número entero distinto, de modo que tienen un comportamiento de escala diferente, por lo que es claro que son independientes entre sí.

3.4. Integrabilidad del sistema KdV

Hasta el momento hemos probado que el sistema KdV satisface dos de los tres requisitos de un sistema Hamiltoniano integrable, es decir, hemos probado que existe un número infinito de cantidades conservadas, y también que éstas son independientes entre sí. Queda probar que estas cantidades se encuentran en involución.

Observemos que las siguientes cantidades,

$$H_0 = 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) \quad (3.68)$$

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} u^2(x, t) \quad (3.69)$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (3.70)$$

también llamadas hamiltonianos, satisfacen la ecuación funcional

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_n}{\delta u(x)}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (3.71)$$

Donde D es el operador $\frac{\partial}{\partial x}$. Esta igualdad se puede comprobar como sigue. Asumimos que $H_{-1} = 0$.

Para $n = 1$, dicha ecuación se convierte en

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_0}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \quad (3.72)$$

Si denotamos L.H.S. a la parte de la izquierda de la igualdad y R.H.S. a la parte de la derecha, se verifica que

$$\text{L.H.S.} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) 3\delta(x-y) \Rightarrow \quad (3.73)$$

$$\text{L.H.S.} = \int_{-\infty}^{\infty} dy (D_x u(x)) \delta(x-y) + \frac{2}{3} 3u(x) D_x \delta(x-y) = D_x u(x) \quad (3.74)$$

mientras que

$$\text{R.H.S.} = D \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = D_x u(x) \quad (3.75)$$

por lo que

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (3.76)$$

Para $n = 2$,

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} \quad (3.77)$$

De la misma forma,

$$\text{L.H.S.} = \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) u(x) = D_x^3 u(x) + u(x) D_x u(x) \quad (3.78)$$

mientras que

$$\text{R.H.S.} = D \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} = D_x \left(\frac{1}{2} u^2(x) + D_x^2 u(x) \right) = u(x) D_x u(x) + D_x^3 u(x) \quad (3.79)$$

de forma que para $n = 2$ también se cumple la ecuación (3.71).

Esta relación funcional sugiere que es posible que todas las cantidades conservadas sigan relaciones funcionales recursivas similares. Es decir, que uno puede escoger los hamiltonianos de manera que se cumple la ecuación (3.71) para todo n .

Esta relación se puede probar mediante inducción. Hemos visto que para $n = 0, 1, 2$ es verdad, por lo que el caso base ya está probado. Supongamos que es cierto para $n = m$, y veamos que también se cumple para $n = m + 1$.

Por hipótesis de inducción,

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (D_x u + u D_x) \right) \frac{\delta H_{m-1}}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (3.80)$$

Pero como H_m es una cantidad conservada³,

$$0 = \frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_2\} \quad (3.81)$$

También podemos calcular esto utilizando el segundo corchete de Poisson

$$\frac{dH_m}{dt} = \{H_m, H_1\}_2 \quad (3.82)$$

donde

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \delta(x - y) \quad (3.83)$$

Juntando las ecuaciones anteriores, deducimos

$$\frac{dH_m}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \delta(x - y) \frac{\delta H_1}{\delta u(y)} \quad (3.84)$$

Es decir,

$$\frac{dH_m}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} u(x) \quad (3.85)$$

Como H_m es una cantidad conservada, la integral anterior se debe anular, y en consecuencia el integrando debe ser una derivada total. Esto es posible si y solo si

³el corchete $\{, \}$ fue definido de forma que verifica $\{u(x), u(y)\}_1 = D_x \delta(x - y)$

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta K_m}{\delta u(x)} \quad (3.86)$$

Observamos que K_m debe escalar con una potencia más grande que H_m . Además, K_m se debe conservar, pero como solo hay una cantidad conservada para cada comportamiento de escalado, podemos identificar

$$K_m = H_{m+1} \quad (3.87)$$

y se verifica

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \quad (3.88)$$

De esta manera, queda demostrado que, para todo $n \geq 0$

$$\left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u + u D_x) \right) \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} = D_x \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \quad (3.89)$$

En consecuencia,

$$\{H_n, H_m\}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} D_x \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} = - \int_{\mathbb{R}} dx D_x \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (3.90)$$

es decir,

$$\{H_n, H_m\}_1 = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} \left(D_x^3 + \frac{1}{3} (D_x u(x) + u(x) D_x) \right) \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (3.91)$$

equivalentemente,

$$\{H_n, H_m\}_1 = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u(x)} D_x \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \quad (3.92)$$

que permite concluir, usando la ecuación (3.80), que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_{n-1}, H_{m+1}\} \quad (3.93)$$

Y se puede demostrar, por iteración, que para todo $n, m \geq 0$

$$\{H_n, H_m\}_1 = 0 \quad (3.94)$$

Demostrando que todas las cantidades conservadas se encuentran en involución. De forma similar, se puede demostrar [5] que $\{H_n, H_m\}_2 = 0$.

En conclusión, la ecuación KdV tiene un número infinito de cantidades conservadas no triviales y funcionalmente independientes que se encuentran en involución, por lo que dicho sistema es integrable. ⁴

⁴Además, como la ecuación MKdV tiene las mismas cantidades conservadas, también hemos probado que la ecuación MKdV es integrable.

3.5. Ecuaciones de mayor orden jerárquico

Ya hemos visto en la sección anterior que la ecuación KdV posee un número infinito de cantidades conservadas H_n , con $n \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_n, H_m\}_2 = 0 \quad (3.95)$$

Estas cantidades se encuentran en involución respecto a cualquiera de los dos corchetes de Poisson asociados a la ecuación KdV. También hemos probado en dicha sección que las cantidades conservadas satisfacen la siguiente relación de recursividad:

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} = D \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u(x)} \quad (3.96)$$

Esto explica por qué la ecuación KdV se puede expresar de dos formas equivalentes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u(x), H_1\}_2 = \left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \quad (3.97)$$

$$= D \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} = \{u(x), H_2\}_1 \quad (3.98)$$

Cada una de estas cantidades conservadas puede ser vista como un hamiltoniano, y genera su propia ecuación de evolución (con el parámetro de evolución t_n), dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = \{u(x), H_n\}_2 = \left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \quad (3.99)$$

$$= D \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u(x)} = \{u(x), H_{n+1}\}_1 \quad (3.100)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de orden superior de la jerarquía KdV. De hecho, es evidente que todo sistema integrable debe poseer una estructura jerárquica de ecuaciones de evolución. Es más, como las H_n se encuentran en involución, cada ecuación de dicha jerarquía comparte las mismas cantidades conservadas y es integrable. De esta forma, podemos pensar que la variable dinámica u es función de un número infinito numerable de variables temporales. Es decir,

$$u = u(x, t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) \quad (3.101)$$

donde cada t_n representa un parámetro de evolución relacionado con el hamiltoniano n -ésimo, H_n . Así, para cada ecuación de evolución de la jerarquía, únicamente varía el correspondiente parámetro de evolución, y el resto se mantienen constantes. El hecho de que los hamiltonianos se encuentren en involución implica que los flujos conmutan. Es decir, si hacemos que el sistema evolucione a través de t_n durante un tiempo Δt_n y después a través de t_m durante un tiempo Δt_m , el estado final es el mismo que si lo hubiésemos hecho viceversa.

Capítulo 4

El método de Lax

El método de Lax consiste en simplificar el estudio de una ecuación diferencial no lineal, encontrando un operador lineal cuyos autovalores sean constantes en el tiempo¹. En particular, este método sirve para recuperar las ecuaciones de la jerarquía KdV.

4.1. Intuición: origen de la ecuación de Schrödinger

Antes de entrar de lleno en el estudio formal de la teoría de Lax, parémonos a desarrollar cierta intuición. Se ha visto en la sección 3.2 que la ecuación KdV y la ecuación MKdV están relacionadas mediante una transformada de Riccati, dada por (3.26). Si ahora hacemos uso de la invariancia similar a la de Galileo vista en la sección 2.2 (la simetría iv), podemos definir una relación de Riccati generalizada

$$u(x, t) + 6\lambda = v^2(x, t) + i\sqrt{6} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (4.1)$$

Si u es solución de la ecuación KdV, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (v^2 - 6\lambda) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (4.2)$$

Tal y como hemos visto en la sección 3.2, una solución de la ecuación MKdV nos proporciona una solución de la ecuación KdV a través de la transformada de Riccati (3.26). No obstante, la relación de Riccati no es invertible en general, por lo que el recíproco no tiene por qué ser verdad. Sin embargo, como ambas ecuaciones son integrables y comparten las mismas cantidades conservadas, uno puede intuir que existe una correspondencia uno a uno entre sus soluciones, y preguntarse si en este

¹Los temas tratados en este capítulo están explicados en [5, 16].

caso particular se puede invertir dicha relación de Riccati. La manera más sencilla de hacer esto es linearizar, por lo que definimos

$$v(x, t) = i\sqrt{6} \frac{\psi_x}{\psi} \quad (4.3)$$

Así, (3.26) se convierte en

$$u(x, t) + 6\lambda = -6 \frac{\psi_{xx}}{\psi} \xrightarrow{\text{o bien}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6} u(x, t) + \lambda \right) \psi = 0 \quad (4.4)$$

Por tanto, si conocemos la función ψ podemos invertir la relación de Riccati. Esta ecuación no es más que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y debe cumplirse para todos los valores de t . Además, notemos que como λ , el autovalor de la ecuación de Schrödinger o parámetro espectral, ha sido introducido mediante una transformada similar a la de Galileo, es independiente de t . Esto explica por qué el parámetro espectral es constante en el tiempo.²

La función de onda de Schrödinger ψ puede ser expresada en función de $v(x, t)$ como

$$\psi(x, t) = \exp \left(-\frac{i}{\sqrt{6}} \int^x dx' v(x', t) \right) \quad (4.5)$$

por lo que su evolución temporal es

$$\psi_t = \psi \left(-\frac{i}{\sqrt{6}} \int^x dx' \frac{\partial v(x', t)}{\partial t} \right) \quad (4.6)$$

Se ha visto en la sección 3.2 que la evolución temporal de v viene dada por

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (v^2 - 6\lambda) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \xrightarrow{\text{es decir}} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} v^3 - 6\lambda v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (4.7)$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores, la evolución temporal de ψ se puede expresar como

$$\psi_t = -\frac{i}{\sqrt{6}} \psi \left(\frac{1}{3} v^3(x, t) - 6\lambda v(x, t) + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x} + \mathcal{C} \right) \quad (4.8)$$

Siendo \mathcal{C} una constante. Escribiendo v como en (4.3), deducimos que

$$\psi_t - \psi_{xxx} - \frac{1}{2} u \psi_x + 3\lambda \psi_x = \mathcal{C} \psi \quad (4.9)$$

4.2. El par de Lax

Entremos de lleno con la teoría formal desarrollada por Lax. Dada una ecuación no lineal de evolución temporal, queremos encontrar un operador lineal cuyos autovalores sean constantes bajo dicha evolución.

²Usando el solitón (2,60) la ecuación de Schrödinger correspondiente es el sistema de Pöschl-Teller, que es resoluble analíticamente. El número de estados ligados es finito.

Para entender mejor el problema planteado en el párrafo anterior, vamos a estudiar el caso lineal primero. Es decir, dada una ecuación lineal descrita por un Hamiltoniano H independiente del tiempo, queremos construir operadores cuyos valores esperados no cambien con el tiempo ³. Si un operador A satisface esto, entonces $A(t)$ debe ser igual que $A(0)$ salvo unidades en la imagen de Heisenberg. O lo que es lo mismo,

$$U^\dagger(t)A(t)U(t) = A(0), \text{ donde } U(t) = e^{-iHt} \quad (4.10)$$

es el operador de evolución temporal. Si derivamos respecto a t en ambos lados de la igualdad en (4.10), obtenemos

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i[A(t), H] \quad (4.11)$$

Por otro lado, si definimos el operador anti-hermítico $B = -iH$ se tiene que

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = BU(t), \quad \frac{\partial A(t)}{\partial t} = [B, A(t)] \quad (4.12)$$

A continuación trataremos de imitar este procedimiento para el caso no lineal. Sea

$$L(u(x, t)) = L(t) \quad (4.13)$$

el operador lineal que queremos encontrar. Imponemos que sea hermítico y que sus autovalores sean independientes del tiempo. Por tanto, es condición necesaria que exista un operador unitario $U(t)$ tal que

$$U^\dagger(t)L(t)U(t) = L(0) \quad (4.14)$$

Derivando respecto a t ,

$$\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}L(t)U(t) + U^\dagger(t)\frac{\partial L(t)}{\partial t}U(t) + U^\dagger(t)L(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

La diferencia fundamental respecto al caso lineal es que ahora no conocemos la forma explícita de $U(t)$. Sin embargo, podemos utilizar que $U(t)$ es un operador unitario, es decir

$$U^\dagger(t)U(t) = 1 \quad (4.16)$$

para deducir, derivando respecto a t , que

$$\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}U(t) + U^\dagger(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

³véase [16, 17]

de modo que

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = B(t)U(t) \quad (4.18)$$

para cierto operador antihermítico $B(t)$. Sustituyendo (4.18) en (4.15) se deduce que

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [B(t), L(t)] \quad (4.19)$$

Observamos que $L(t)$ debe satisfacer una relación similar a la del caso lineal. No obstante, en este caso no conocemos la forma explícita de $B(t)$. Sin embargo, sabemos que $L(t)$ es lineal en $u(x, t)$, de modo que la parte a la izquierda de la ecuación (4.19) es un operador multiplicativo proporcional a la evolución temporal de $u(x, t)$. En consecuencia, si queremos que los autovalores de $L(t)$ sean independientes del tiempo, basta con encontrar un par de operadores $B(t), L(t)$ cuyo conmutador sea multiplicativo y proporcional a la evolución de $u(x, t)$.

En dicho caso, los autovalores λ de la ecuación

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \quad (4.20)$$

serían independientes del tiempo. En consecuencia, $\psi(t)$ debe satisfacer

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \quad (4.21)$$

de manera que su evolución verifica

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = B(t)\psi(t) \quad (4.22)$$

Al par de operadores $B(t), L(t)$ se le llama par de Lax, y juega un papel fundamental a la hora de determinar la solución de una ecuación de evolución no lineal.

4.3. Particularización a la ecuación KdV

De la ecuación (4.4) se puede deducir que, para este caso particular,

$$L(t) = D^2 + \frac{1}{6}u(x, t) \quad (4.23)$$

por tanto,

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.24)$$

Este operador es multiplicativo y describe la evolución temporal de u , como cabía esperar. Podemos encontrar $B(t)$ de manera sistemática, observando primero que al ser un operador antihermítico debe ser impar en el número de derivadas. Escogamos la forma más simple para dicho operador

$$B(t) = aD \quad (4.25)$$

donde a es una constante. Entonces,

$$[B(t), L(t)] = \frac{a (Du(x, t))}{6} = \frac{a}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.26)$$

Pese a que el conmutador es un operador multiplicativo, no describe la evolución de $u(x, t)$ bajo el flujo de la ecuación KdV.

La siguiente posibilidad es la más sencilla de $B(t)$ satisfaciendo todas las simetrías del sistema y un comportamiento de escalado homogéneo:

$$B(t) = a_3 D^3 + a_1 (Du + uD) \quad (4.27)$$

donde a_1 y a_3 son constantes.

$$[B(t), L(t)] = \left(\frac{a_3}{a_1} \right) (D^3 u) + \frac{a_1}{3} u (Du) + \left(\frac{a_3}{2} - 4a_1 \right) ((D^2 u) D + (Du) D^2) \quad (4.28)$$

Imponiendo que dicho conmutador sea multiplicativo, se deduce que

$$a_3 = 8a_1 \quad (4.29)$$

de forma que

$$[B(t), L(t)] = \frac{a_1}{3} (u (Du) + (D^3 u)) \quad (4.30)$$

En particular, si escogemos

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

recuperamos la ecuación KdV:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L] \xrightarrow{\text{es decir}} \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (4.32)$$

En este caso, el par de Lax viene dado por

$$L(t) = D^2 + \frac{1}{6}u, \quad B(t) = 4D^3 + \frac{1}{2}(Du + uD) \quad (4.33)$$

Notemos que el operador $B(t)$ solo está definido salvo constante aditiva, pues una constante conmuta con cualquier operador. Así, se obtiene

$$\psi_t + \frac{1}{6}u_x\psi + 4\lambda\psi_x - \frac{1}{3}u\psi_x = \mathcal{C}\psi \quad (4.34)$$

siendo \mathcal{C} una constante.

De hecho, podemos generalizar esta construcción y escoger que $B(t)$ dependa de derivadas de orden superior. Como este operador ha de ser antihermítico, la forma más general con un comportamiento de escala homogéneo se puede representar como

$$B_m(t) = a \left[D^{2m+1} + \sum_{j=1}^m (b_j(u)D^{2j-1} + D^{2j-1}b_j(u)) \right] \quad (4.35)$$

Aquí, a es una constante, y las $b_j(u)$ representan m funcionales arbitrarios de u con un comportamiento de escala específico. También sabemos que $[B_m(t), L(t)]$ es hermítico, por lo que se puede expresar como

$$[B_m(t), L(t)] = \hat{a} K_m(u) + \sum_{j=1}^m D^j C_j(u) D^j \quad (4.36)$$

donde $K_m(u)$ es un operador multiplicativo. Si requerimos que este conmutador sea multiplicativo, obtenemos m condiciones que determinan todos los $b_j(u)$ unívocamente. Escogiendo a, \hat{a} de forma adecuada, la ecuación de Lax nos devuelve la ecuación de orden m de la jerarquía KdV. Es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [B_m(t), L(t)] \iff \frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u(x)} \quad (4.37)$$

4.4. Construcción alternativa

Vamos a presentar, por su elegancia, un método alternativo ⁴ para deducir la forma de los operadores $B_m(t)$. Recordemos que

$$L(t) = D^2 + \frac{1}{6}u \quad (4.38)$$

Podemos definir, formalmente, la raíz cuadrada de este operador mediante una serie de potencias en D^{-1} :

$$L^{\frac{1}{2}}(t) = D + a_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(u) D^{-n} \quad (4.39)$$

donde cada $a_n(u)$ es funcional de u . La forma de dichos funcionales se puede determinar si fijamos el orden hasta el que queremos trabajar, pues bastaría calcular el cuadrado del operador e igualarlo a $L(t)$.

⁴esta deducción se puede encontrar en [5]

Conocida la forma de $L^{\frac{1}{2}}(t)$, podemos calcular $L^{\frac{2m+1}{2}}(t)$ a partir de la relación

$$L^{\frac{2m+1}{2}} = L^m(t)L^{\frac{1}{2}}(t) = \left(D^2 + \frac{1}{6}u\right)^m L^{\frac{1}{2}}(t) \quad (4.40)$$

Esta representación vuelve a ser una serie formal, que contiene tanto potencias positivas como negativas de D . Podemos separar dicha serie formal en una parte que contenga las potencias no negativas y otra que contenga las potencias negativas de D :

$$L^{\frac{2m+1}{2}}(t) = L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t) + L_-^{\frac{2m+1}{2}}(t) \quad (4.41)$$

Por la ecuación (4.40), la derivada de mayor orden contenida en $L^m(t)$ es D^{2m} , por lo que para determinar $L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t)$ de manera precisa necesitamos conocer el coeficiente asociado al término D^{-2m} en la expansión de $L^{\frac{1}{2}}(t)$. Por otro lado, es claro que $L(t)$ conmuta con sus potencias, en particular

$$\left[L^{\frac{2m+1}{2}}(t), L(t)\right] = 0 \quad (4.42)$$

Juntando esta ecuación con la anterior, se deduce que

$$\left[L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t), L(t)\right] = -\left[L_-^{\frac{2m+1}{2}}(t), L(t)\right] \quad (4.43)$$

Pero la parte a la izquierda de la igualdad es un operador derivada de orden no negativo, mientras que la parte a la derecha de la igualdad se corresponde con un operador derivada de orden no positivo. Esto solo es posible si ambos conmutadores son operadores multiplicativos. Es decir, para $m \geq 0$:

$$\left[L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t), L(t)\right] \quad (4.44)$$

es un operador multiplicativo y, en consecuencia, $L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t)$ se puede identificar, salvo constante multiplicativa, con $B_m(t)$. En otras palabras,

$$B_m(t) = \alpha_m L_+^{\frac{2m+1}{2}}(t) \quad (4.45)$$

4.5. Derivación de Lenard de la ecuación KdV

Para entender mejor la relación entre la ecuación de Schrödinger lineal con la jerarquía entera de las ecuaciones KdV, nos preguntamos si esta se puede deducir a partir de la primera. Para ello, es esencial asumir que el parámetro espectral λ es independiente del tiempo. Partimos de la ecuación de Schrödinger,

$$\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda\right)\psi = 0 \quad (4.46)$$

Derivando respecto a t obtenemos

$$\psi_{xxt} + \left(\frac{1}{6}u + \lambda\right) \psi_t + \frac{1}{6}u_t \psi = 0 \quad (4.47)$$

Escogemos que $\psi(x, t)$ esté normalizado a norma unidad para todo valor de t

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi^2(x, t) = 1 \quad (4.48)$$

En consecuencia, si multiplicamos la ecuación (4.47) por $\psi(x, t)$ e integramos en todo el eje x , llegamos a que

$$\int_{\mathbb{R}} dx \left(\psi \psi_{xxt} + \frac{1}{6}u \psi \psi_t + \frac{1}{6}u_t \psi^2 \right) = 0 \quad (4.49)$$

Por otro lado, se deduce de la ecuación (4.46) que

$$\lambda = - \int_{\mathbb{R}} dx \left(\psi \psi_{xx} + \frac{1}{6}u \psi^2 \right) \quad (4.50)$$

y como estamos asumiendo que λ es independiente del tiempo, se tiene que

$$0 = \lambda_t = - \int_{\mathbb{R}} dx \left(\psi_t \psi_{xx} + \psi \psi_{xxt} + \frac{1}{6}u_t \psi^2 + \frac{1}{3}u \psi \psi_t \right) \quad (4.51)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} dx \left(2 \psi \psi_{xxt} + \frac{1}{6}u_t \psi^2 + \frac{1}{3}u \psi \psi_t \right) \quad (4.52)$$

Juntando esta ecuación con (4.49) llegamos a que

$$\int_{\mathbb{R}} dx u_t \psi^2 = 0 \quad (4.53)$$

Esto implica que la forma de $u_t \psi^2$ debe ser

$$u_t \psi^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(u) \psi_x^2 + B(u) \psi \psi_x + C(u) \psi^2 \right) \quad (4.54)$$

En esta ecuación, $A(u)$, $B(u)$ y $C(u)$ son funcionales de u y dependen de λ . Recalquemos que esta es la forma más general posible del integrando, pues cualquier derivada de orden mayor de ψ puede ser reducida utilizando la ecuación de Schrödinger. Si escribimos los términos explícitamente, tenemos que

$$u_t \psi^2 = \left(A_x + B\psi_x^2 \right) + \left(B_x + 2C - 2A \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \right) \psi \psi_x + \left(C_x + B \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \right) \psi^2 \quad (4.55)$$

Comparando ambos lados de la ecuación, obtenemos las condiciones

$$A_x + B = 0, \quad B_x + 2C - 2A \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) = 0, \quad u_t = C_x - B \left(\frac{1}{6}u + \lambda \right) \quad (4.56)$$

Es decir,

$$u_t = \frac{1}{2} \left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) A + 2\lambda D A \quad (4.57)$$

Al ser u_t independiente de λ , debemos hacer que $A(u)$ sea una función de λ que haga desaparecer dicha dependencia. Para ello, expandiremos este funcional en potencias de -4λ

$$A(u) = 2 \sum_{j=0}^n A_j(u) (-4\lambda)^{n-j} \quad (4.58)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior, llegamos a que $A_0 = 1$, y que

$$\left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) A_j = D A_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.59)$$

De manera que

$$u_t = \left(D^3 + \frac{1}{3} (Du + uD) \right) A_n \quad (4.60)$$

Observamos que los funcionales A_j satisfacen la misma relación de recursividad que las cantidades conservadas de la ecuación KdV. Esto nos permite identificar

$$A_j = \frac{\delta H_j}{\delta u(x)} \quad (4.61)$$

Por tanto, hemos recuperado las relaciones funcionales de recursividad de la ecuación KdV, ya vistas en la ecuación (3.80), así como todas las ecuaciones de la jerarquía KdV, pues cada ecuación se corresponde con una forma particular de A donde las funciones coeficiente están completamente determinadas. Esto prueba que toda la jerarquía de ecuaciones se puede obtener a partir de la ecuación de Schrödinger si asumimos que el parámetro espectral sea independiente del tiempo.

Capítulo 5

Más propiedades de la ecuación KdV

En este capítulo vamos a estudiar otras propiedades de la ecuación KdV¹. En primer lugar, trataremos de profundizar en el significado físico del parámetro espectral de la ecuación de Schrödinger. También veremos que el hecho de que las cantidades conservadas están en involución se puede probar mediante el método de Lax.

5.1. El parámetro espectral

Tratemos de entender el significado físico de los autovalores conservados de la ecuación de Schrödinger para el caso de la ecuación KdV. En primer lugar, introducimos una notación compacta para la ecuación KdV

$$u_t = u u_x + u_{xxx} = K(u) \quad (5.1)$$

Además, construimos una familia de soluciones que dependen de un parámetro, pongamos que ϵ . Sea

$$u^{(\epsilon)}(x, 0) = u(x, 0) + \epsilon f(x) \quad (5.2)$$

con $f(x)$ una función regular que se anula asintóticamente. Llamamos $u^{(\epsilon)}(x, t)$ a la solución de la ecuación KdV correspondiente a este valor inicial. En general, esta solución se puede escribir como una serie de potencias en ϵ como sigue:

$$u^{(\epsilon)}(x, t) = u(x, t) + \epsilon v(x, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.3)$$

siendo

$$v(x, t) = \left. \frac{du^{(\epsilon)}(x, t)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (5.4)$$

¹Hemos tomado como referencia el texto [5]

Aunque la notación sea la misma, aquí $v(x, t)$ no es la variable dinámica de la ecuación MKdV. Definamos también

$$M(u) v = \left. \frac{dK(u^{(\epsilon)})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{dK(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (5.5)$$

Claramente, se trata de un funcional lineal en v , y recibe el nombre de derivada de Frechet de $K(u)$. Habitualmente, $M(u)$ es conocido como derivada funcional de $K(u)$. En general, es un operador que involucra derivadas. Por la ecuación (5.1), se tiene que

$$u_t^{(\epsilon)} = K(u^{(\epsilon)}) \quad (5.6)$$

Si derivamos ambos lados de la ecuación respecto a ϵ , y fijamos después $\epsilon = 0$, llegamos a que

$$v_t = M(u) v \quad (5.7)$$

Vamos a introducir la siguiente notación, por simplicidad, para las derivadas funcionales de cantidades conservadas. Dada una cantidad conservada $H_n(u)$, entonces su derivada funcional se obtiene como

$$\left. \frac{dH_n(u^{(\epsilon)})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{dH_n(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = (G_n(u), v) \quad (5.8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx G_n(u(x, t)) v(x, t) \quad (5.9)$$

Esto implica, en particular, que

$$G_n(u(x, t)) = \frac{\delta H_n(u)}{\delta u(x, t)} \quad (5.10)$$

Si identificamos las ecuaciones (3.20) y (5.1), deducimos que

$$K(u) = \frac{\partial G_2(u(x, t))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_2}{\delta u(x, t)} \quad (5.11)$$

Observemos que, como $H_n(u^{(\epsilon)})$ se conserva para todos los valores de ϵ , entonces el producto escalar

$$(G_n(u(x, t)), v(x, t)) \quad (5.12)$$

debe ser independiente del tiempo. En consecuencia, si derivamos dicha cantidad respecto del tiempo y lo igualamos a 0, nos queda que

$$\left(\frac{\partial G_n}{\partial t}, v \right) + \left(G_n, \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.13)$$

Si juntamos esta ecuación con (5.7), tenemos que

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) G_n, v \right) = \left(\frac{\partial G_n}{\partial t}, v \right) + (G_n, M(u) v) = 0 \quad (5.14)$$

Siendo $M^\dagger(u)$ la adjunta de $M(u)$ respecto al producto escalar definido por la integral (es el producto escalar con el que se dota al espacio de Hilbert de funciones L^2).

Observemos que v se trata de una condición inicial arbitraria. En consecuencia, la ecuación anterior es válida para todo v solo si se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) G_n = 0 \quad (5.15)$$

Todas las cantidades conservadas deben satisfacer esta condición. En particular, al ser

$$H_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx u^2(x, t) \quad (5.16)$$

una cantidad conservada, se deduce que

$$G_1 = \frac{\delta H_1}{\delta u(x, t)} = u(x, t) \quad (5.17)$$

satisface

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M^\dagger(u) \right) u = 0 \quad (5.18)$$

Si comparamos esta ecuación con (5.1), vemos que

$$-M^\dagger(u) u = K(u) \quad (5.19)$$

También se puede comprobar esto directamente. A partir de la definición de $K(u)$, se deduce

$$\left. \frac{dK(u + \epsilon v)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = M(u) v \Rightarrow M(u) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} + u_x \quad (5.20)$$

$$\Rightarrow M^\dagger(u) = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - u \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.21)$$

$$\Rightarrow K(u) = -M^\dagger(u) u \quad (5.22)$$

Consideremos el caso particular en el que u es una onda solitaria, es decir

$$u(x, t) = s(x + ct) \quad (5.23)$$

siendo c la velocidad de la onda, que se desplaza hacia la izquierda. Por la discusión anterior, esta solución satisface

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} + M^\dagger(s) \right) s = 0 \quad (5.24)$$

Las derivadas funcionales también verifican, en este caso,

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} + M^\dagger(s) \right) G_n(s) = 0 \quad (5.25)$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, se deduce que las derivadas funcionales de todas las cantidades conservadas de una onda solitaria son proporcionales a dicha onda. Es decir,

$$G_n(s) \propto s \quad (5.26)$$

Otra forma de decir esto es que todas las cantidades conservadas de un solitón deben verificar la siguiente relación de proporcionalidad:

$$H_n(s) \propto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx s^2(x + ct) \quad (5.27)$$

Vayamos ahora con la ecuación de Schrödinger para la familia de potenciales dependientes de un parámetro. Esta ecuación es

$$\psi_{xx}^{(\epsilon)} + \left(\frac{1}{6} u^{(\epsilon)} + \lambda^{(\epsilon)} \right) \psi^{(\epsilon)} = 0 \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{cases} u^{(\epsilon)} = u + \epsilon v + O(\epsilon^2) \\ \psi^{(\epsilon)} = \psi + \epsilon \phi + O(\epsilon^2) \\ \lambda^{(\epsilon)} = \lambda + \epsilon \left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2) \end{cases} \quad (5.29)$$

Notemos que para $\epsilon = 0$ recuperamos la ecuación usual

$$\psi_{xx} + \left(\frac{1}{6} u + \lambda \right) \psi = 0 \quad (5.30)$$

Si derivamos ambos lados de la ecuación (5.28) respecto a ϵ , e imponemos después $\epsilon = 0$, llegamos a que

$$\phi_{xx} + \left(\frac{1}{6} v + \left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \psi + \left(\frac{1}{6} u + \lambda \right) \phi = 0 \quad (5.31)$$

Si tomamos ahora el producto escalar de esta cantidad con ψ , asumimos que esta función de onda está normalizada a la unidad y recordamos que satisface (5.30), se deduce que

$$\left. \frac{d\lambda}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{6} (\psi^2, v) \quad (5.32)$$

Además, teniendo en cuenta la definición de derivada de Frechet, concluimos que

$$\frac{d\lambda}{\delta u(x, t)} = G_\lambda(u) = -\frac{1}{6} \psi^2(u) \quad (5.33)$$

Obsérvese que para una onda solitaria se verifica

$$G_\lambda(s) = -\frac{1}{6} \psi^2(s) \propto s \xrightarrow{\text{es decir}} \psi(s) \propto s^{1/2} \quad (5.34)$$

En otras palabras, si el potencial se trata de una onda solitaria, la autofunción de la ecuación de Schrödinger es proporcional a la raíz cuadrada de la solución de onda solitaria. Si sustituimos la forma funcional de $\psi(s)$ vista en la anterior ecuación en la ecuación de Schrödinger, obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{6} s + \lambda \right) \right) s^{1/2} = 0 \quad (5.35)$$

Si derivamos esta ecuación respecto a x , llegamos a que

$$s_{xxx} + s s_x + 4\lambda s_x = 0 \Rightarrow \left(4\lambda \frac{\partial}{\partial x} - M^\dagger(s) \right) s = 0 \quad (5.36)$$

Al ser s un solitón, también debe satisfacer la ecuación (5.23). Comparando ambas ecuaciones, se concluye que²

$$c = -4\lambda \quad (5.37)$$

Esto da un significado físico al parámetro espectral de la ecuación de Schrödinger. Al ser dicho parámetro espectral proporcional a la velocidad de propagación de la onda solitaria, nos da una idea intuitiva de por qué dicho autovalor se conserva. Recordemos que los solitones mantienen su forma a lo largo del tiempo, y que esta depende de su velocidad. Por tanto, su velocidad de propagación también ha de conservarse. Otra observación interesante es que, como la onda solitaria puede tener infinitas velocidades distintas de propagación, el número de cantidades conservadas de la ecuación KdV también debe ser infinito.

5.2. Involución de las cantidades conservadas

Hemos visto en la sección anterior que los autovalores de la ecuación de Schrödinger se conservan. Aclaremos que, por definición de λ en la ecuación (5.30), λ es un autovalor que depende del potencial u , y por tanto $\lambda = \lambda(u)$. Es por eso que lo que hacemos a continuación tiene sentido. Para probar que se encuentran en involución, recordemos que

$$\frac{\delta \lambda}{\delta u(x, t)} = -\frac{1}{6} \psi^2 \quad (5.38)$$

²Al ser λ un autovalor de la ecuación de Schrödinger correspondiente a una función de onda normalizada, y el potencial decae asintóticamente a 0, $\lambda < 0$, y por tanto $c > 0$, por lo que la onda se desplaza hacia la izquierda.

Los operadores derivada actúan como sigue sobre ψ^2

$$\begin{cases} D(\psi^2) = 2\psi \psi_x \\ D^2(\psi^2) = 2(\psi_x)^2 - \left(\frac{1}{3}u + 2\lambda\right)\psi^2 \\ D^3(\psi^2) = -\left(\frac{4}{3}u + 8\lambda\right)\psi_x \psi - \frac{1}{3}u_x \psi^2 \end{cases} \quad (5.39)$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores, se deduce que

$$\left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right) \frac{\delta\lambda}{\delta u(x,t)} = -4\lambda D \frac{\delta\lambda}{\delta u(x,t)} \quad (5.40)$$

En consecuencia, podemos calcular el corchete de Poisson entre los λ como (suponemos $\lambda_j \neq 0$)

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta\lambda_i}{\delta u(x,t)} D \frac{\delta\lambda_j}{\delta u(x,t)} \quad (5.41)$$

$$= -\frac{1}{4\lambda_j} \int_{\mathbb{R}} dx \left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD)\right) \frac{\delta\lambda_i}{\delta u(x,t)} \frac{\delta\lambda_j}{\delta u(x,t)} \quad (5.42)$$

$$= -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \int_{\mathbb{R}} dx D \frac{\delta\lambda_i}{\delta u(x,t)} \frac{\delta\lambda_j}{\delta u(x,t)} \quad (5.43)$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta\lambda_i}{\delta u(x,t)} D \frac{\delta\lambda_j}{\delta u(x,t)} \quad (5.44)$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \{\lambda_i, \lambda_j\} \quad (5.45)$$

Es decir, si $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$. Y como $\{\lambda_i, \lambda_i\} = 0$, se tiene que todos los corchetes de Poisson son nulos. De esta forma, queda probado que las infinitas cantidades conservadas funcionalmente independientes se encuentran en involución, y que por tanto la ecuación KdV es integrable.

Capítulo 6

Soluciones Multi-Solitón

En capítulos anteriores, hemos probado que la ecuación KdV posee soluciones tipo solitón. Al ser la ecuación KdV no lineal, no podemos sumar dos soluciones de la misma para obtener otra solución. En este capítulo, vamos a describir un método para construir soluciones multi-solitón de la ecuación KdV. Este método se basa en las transformadas de Bäcklund.

6.1. Transformadas de Bäcklund

Consideremos una ecuación diferencial en la variable $u(x, t)$:

$$P(u(x, t)) = 0 \tag{6.1}$$

La transformada de Bäcklund [18, 19, 20] consiste en pasar a una nueva variable $v(x, t)$ que viene determinada por dos ecuaciones de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u(x, t), v(x, t)) \tag{6.2}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(u(x, t), v(x, t)) \tag{6.3}$$

Donde f y g dependen de u, v y sus derivadas, de forma que la ecuación (6.1) representa una condición de integrabilidad para las ecuaciones (6.2), (6.3).

Vamos a trabajar unos ejemplos para entender cómo funciona esta transformación.

i) Ecuación de Liouville

Consideremos la Ecuación de Liouville en dimensión 1+1.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = e^{u(x, t)} \quad (6.4)$$

donde $u(x, t)$ es la variable dinámica. Por simplicidad, definamos

$$x^\pm = t \pm x, \partial_+ = \frac{\partial}{\partial x^+}, \partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-} \quad (6.5)$$

Así, la ecuación de Liouville se convierte en

$$\partial_+ \partial_- u = e^u \quad (6.6)$$

Definimos la siguiente transformada de Bäcklund

$$\partial_+ u = -\partial_+ v + \alpha e^{\frac{1}{2}(u-v)} \quad (6.7)$$

$$\partial_- u = \partial_- v + \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(u+v)} \quad (6.8)$$

siendo α una constante arbitraria. Considerando ahora las derivadas cruzadas en las ecuaciones (6.7) y (6.8), se obtiene

$$\partial_- \partial_+ u = -\partial_- \partial_+ v + e^u \quad (6.9)$$

y

$$\partial_+ \partial_- u = \partial_+ \partial_- v + e^u \quad (6.10)$$

Aplicando el Teorema de Schwarz, las condiciones de integrabilidad son

$$\partial_+ \partial_- u = e^u \quad (6.11)$$

$$\partial_+ \partial_- v = 0 \quad (6.12)$$

Nótese que la ecuación (6.11) es la ecuación de Liouville, mientras que (6.12) no es más que la ecuación de onda cuyas soluciones son conocidas. Por tanto, la transformada de Bäcklund conecta soluciones de la ecuación de Liouville con aquellas de la ecuación de onda.

Para ver exactamente cómo se obtiene la solución, observemos primero que la solución general de la ecuación de onda tiene la forma

$$v(x^+, x^-) = f(x^+) + g(x^-) \quad (6.13)$$

Es decir, es una superposición de una onda que viaja hacia la izquierda con una onda que viaja hacia la derecha. Sustituyendo (6.13) en (6.7) obtenemos

$$\partial_+(u + f) = \alpha e^{\frac{1}{2}(u-f-g)} \quad (6.14)$$

que si notamos que $g(x^-)$ no depende de x^+ , se puede reescribir como

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} \partial_+(u + f - g) = \alpha e^{-f(x^+)} \quad (6.15)$$

Integrando dicha ecuación respecto a x^+ se tiene

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} = \alpha P(x^+) + a(x^-) \quad (6.16)$$

donde $a(x^-)$ es una "constante" de integración, y

$$P(x^+) = -\frac{1}{2} \int_0^{x^+} dx e^{-f(x)} \quad (6.17)$$

Análogamente, se obtiene

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} = \frac{2}{\alpha} Q(x^-) + b(x^+) \quad (6.18)$$

Donde $b(x^+)$ es una "constante" de integración, y

$$Q(x^-) = -\frac{1}{2} \int_0^{x^-} dx e^{-g(x)} \quad (6.19)$$

Comparando (6.18) con (6.16) deducimos que

$$a(x^-) = \frac{2}{\alpha} Q(x^-) \quad (6.20)$$

$$\overline{b(x^+)} = \alpha P(x^+) \quad (6.21)$$

de manera que

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-g)} = \alpha P(x) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-) \quad (6.22)$$

o bien,

$$-\frac{1}{2}(u+f-g) = \log \left(\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-) \right) \quad (6.23)$$

equivalentemente,

$$u(x^+, x^-) = -f(x^+) + g(x^-) - 2 \log \left(\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-) \right) \quad (6.24)$$

ii) Ecuación sine-Gordon

Se trata del ejemplo más antiguo en el que se aplicó esta técnica [21]. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \sin \omega \quad (6.25)$$

En términos de las variables definidas anteriormente nos queda

$$\partial_+ \partial_- \omega = \sin \omega \quad (6.26)$$

En este caso, la transformación de Bäcklund hacia la variable $\omega_1(x^+, x^-)$ viene dada por el par de ecuaciones

$$\partial_+ \omega = \partial_+ \omega_1 + 2a \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega}{2} \right) \quad (6.27)$$

$$\partial_- \omega = -\partial_- \omega_1 - \frac{2}{a} \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2} \right) \quad (6.28)$$

siendo a una constante. Derivando (6.27) respecto a x^- obtenemos que

$$\partial_- \partial_+ \omega = \partial_- \partial_+ \omega_1 - 2 \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2} \right) \quad (6.29)$$

es decir,

$$\partial_- \partial_+ \omega = \partial_- \partial_+ \omega_1 - \sin \omega_1 + \sin \omega \quad (6.30)$$

Análogamente se obtiene

$$\partial_+ \partial_- \omega = -\partial_+ \partial_- \omega_1 + \sin \omega_1 + \sin \omega \quad (6.31)$$

Así, las condiciones de integrabilidad son

$$\partial_+ \partial_- \omega = \sin \omega \quad (6.32)$$

y

$$\partial_+ \partial_- \omega_1 = \sin \omega_1 \quad (6.33)$$

Observamos que tanto ω como ω_1 satisfacen la ecuación sine-Gordon, de manera que, en este caso, la transformación de Bäcklund relaciona una solución de dicha ecuación con otra. Esto es de gran utilidad a la hora de construir las soluciones a la ecuación sine-Gordon si conocemos una solución. Afortunadamente, $\omega = 0$ es una solución. Para este caso, las ecuaciones de Bäcklund son

$$\partial_+ \omega_1 = -2a \sin \frac{\omega_1}{2} \quad (6.34)$$

y

$$\partial_- \omega_1 = -\frac{2}{a} \sin \frac{\omega_1}{2} \quad (6.35)$$

Si definimos

$$\bar{x}^+ = ax^+, \quad \bar{\partial}_+ = \frac{1}{a} \partial_+ \quad (6.36)$$

así como

$$\bar{x}^- = \frac{1}{a} x^-, \quad \bar{\partial}_- = a \partial_- \quad (6.37)$$

se obtiene

$$\bar{\partial}_+ \omega_1 = -2 \sin \frac{\omega_1}{2} = \bar{\partial}_- \omega_1 \quad (6.38)$$

Para determinar la solución explícitamente, notemos que

$$\sec^2\left(\frac{\omega_1}{4}\right) \bar{\partial}_+ \omega_1 = -4 \tan\left(\frac{\omega_1}{4}\right) \quad (6.39)$$

es decir, se tiene que

$$\bar{\partial}_+ \left(\tan \frac{\omega_1}{4} \right) = - \tan \frac{\omega_1}{4} \quad (6.40)$$

Si definimos

$$k = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad (6.41)$$

se tiene que

$$\tan \frac{\omega_1}{4} = C e^{\frac{-2(t+kx)}{\sqrt{1-k^2}}} \quad (6.42)$$

donde C es una constante.

Es decir,

$$\omega_1 = 4 \arctan \left(C \cdot \exp \left(\frac{-2(t+kx)}{\sqrt{1-k^2}} \right) \right) \quad (6.43)$$

Hemos obtenido una solución de la ecuación sine-Gordon a partir de la solución trivial. Siguiendo el mismo procedimiento, se pueden generar soluciones más complicadas. Para ello, cabe destacar que la transformada de Bäcklund satisface el teorema de permutabilidad que veremos en la siguiente sección, que simplifica mucho el problema. Con permutabilidad nos referimos a poder intercambiar el orden en el que se realizan dos transformadas de Bäcklund.

6.2. Teorema de permutabilidad

Este teorema asegura que dos transformadas sucesivas de Bäcklund conmutan [22]. Es decir, que si dos transformadas de Bäcklund con distintos parámetros a_1, a_2 nos llevan de una solución ω_0 a otra solución ω_{12} , entonces es irrelevante el orden en el que se aplican.

Si aplicamos el teorema de Permutabilidad a la ecuación sine-Gordon obtenemos que

$$\partial_+(\omega_1 - \omega_0) = -2a_1 \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} \right) \quad (6.44)$$

$$\partial_+(\omega_{12} - \omega_1) = -2a_2 \sin\left(\frac{\omega_{12} + \omega_1}{2}\right) \quad (6.45)$$

$$\partial_+(\omega_2 - \omega_0) = -2a_2 \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_0}{2}\right) \quad (6.46)$$

$$\partial_+(\omega_{12} - \omega_2) = -2a_1 \sin\left(\frac{\omega_{12} + \omega_2}{2}\right) \quad (6.47)$$

Si ahora sumamos las ecuaciones (6.44), (6.45) por un lado y las ecuaciones (6.46), (6.47) por otro, para después restar un resultado al otro, y operamos con identidades trigonométricas, deducimos que

$$\tan\left(\frac{\omega_{12} - \omega_0}{4}\right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right) \quad (6.48)$$

En otras palabras, el teorema de permutabilidad nos permite construir soluciones de un segundo orden algebraicamente. Además, este proceso se puede llevar a cabo orden por orden, por lo que tras construir la primera solución no debemos utilizar el complicado formalismo de las cuadraturas.

En consecuencia, la transformada de Bäcklund es de gran ayuda para construir soluciones. La dificultad reside, obviamente, en encontrar una transformada de Bäcklund adecuada. Existe un método diseñado por Clairin para construir transformadas de Bäcklund sistemáticamente. No obstante, no siempre es fácil.¹

6.3. Transformada de Bäcklund para la ecuación KdV

Pese a no haberlas mencionado explícitamente, ya hemos estudiado transformadas de Bäcklund para la ecuación KdV: la transformada de Miura y la relación de Riccati (véase la sección 3.2). Recordemos que la transformada generalizada de Miura viene dada por

$$u + 6\lambda = v^2 + i\sqrt{6}v_x \quad (6.49)$$

que se correspondía con la ecuación MKdV generalizada

$$v_t = (v^2 - 6\lambda)v_x + v_{xxx} \quad (6.50)$$

¹Para más información, se puede consultar [23].

Podemos reescribir dichas relaciones de manera que representen una transformada de Bäcklund

$$v_x = -\frac{i}{\sqrt{6}}(u + 6\lambda - v^2) \quad (6.51)$$

$$v_t = -\frac{1}{\sqrt{6}}u_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}u^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda u + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}u_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}uv^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \quad (6.52)$$

Si ahora derivamos (6.51) respecto a t para obtener v_{tx} y derivamos (6.52) respecto a x para obtener v_{xt} , e igualamos ambas expresiones, obtenemos la ecuación KdV como condición de integrabilidad, es decir

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad (6.53)$$

La ecuación que marca la evolución de v es una de las relaciones que definen la transformada de Bäcklund en cuestión, que resulta ser la ecuación MKdV si sustituimos u por la expresión obtenida en (6.51).

En consecuencia, nos encontramos ante una transformada de Bäcklund que conecta una solución de la ecuación KdV con una solución de la ecuación MKdV. También nos podemos preguntar si existe alguna transformada de Bäcklund que conecte una solución de la ecuación KdV con otra. Si existiese dicha transformada, podríamos construir soluciones multi-soliton con ella, a partir de una solución soliton que ya hemos encontrado anteriormente. La respuesta a esta pregunta es que sí existe dicha transformada, y vamos a construirla a continuación.

Sea $\omega(x, t)$ una nueva variable dada por

$$u(x, t) = \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \quad (6.54)$$

Así, la ecuación KdV se puede escribir como

$$\omega_t = \frac{1}{2}\omega_x^2 + \omega_{xxx} \quad (6.55)$$

Notemos que si $v(x, t)$ es una solución de la ecuación MKdV para cierto valor de λ , entonces también lo es $-v(x, t)$ por simetría. Cada una de estas soluciones nos lleva a una única solución de la ecuación KdV. Sean $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, t)$ las soluciones obtenidas a partir de $v(x, t)$ y $-v(x, t)$, respectivamente. Se tiene que

$$v_x = -\frac{i}{\sqrt{6}}(u + 6\lambda - v^2) \quad (6.56)$$

$$-v_x = -\frac{i}{\sqrt{6}}(\bar{u} + 6\lambda - v^2) \quad (6.57)$$

$$v_t = -\frac{i}{\sqrt{6}}u_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}u^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda u + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}u_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}uv^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \quad (6.58)$$

$$-v_t = -\frac{i}{\sqrt{6}}\bar{u}_{xx} - \frac{i}{3\sqrt{6}}\bar{u}^2 + \frac{2i}{\sqrt{6}}\lambda\bar{u} + \frac{24i}{\sqrt{6}}\lambda^2 + \frac{1}{3}\bar{u}_x v + \frac{i}{3\sqrt{6}}\bar{u}v^2 - \frac{4i}{\sqrt{6}}\lambda v^2 \quad (6.59)$$

De forma que

$$v_x = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(u - \bar{u}) \quad (6.60)$$

$$\frac{1}{2}(u + \bar{u}) = v^2 - 6\lambda \quad (6.61)$$

$$v_t = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(u - \bar{u})_{xx} - \frac{i}{4\sqrt{6}}(u^2 - \bar{u}^2) \quad (6.62)$$

Y recordando que $u = \omega_x$ y $\bar{u} = \bar{\omega}_x$, la ecuación (6.60) se convierte en

$$v = -\frac{i}{2\sqrt{6}}(\omega - \bar{\omega}) \quad (6.63)$$

Utilizando esto, tenemos que las ecuaciones (6.60) y (6.62) definen una transformada de Bäcklund entre las variables ω y $\bar{\omega}$ de la siguiente forma

$$(\omega + \bar{\omega})_x = -12\lambda - \frac{1}{12}(\omega - \bar{\omega})^2 \quad (6.64)$$

$$(\omega - \bar{\omega})_t = (\omega - \bar{\omega})_{xxx} + \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})_x(\omega + \bar{\omega})_x \quad (6.65)$$

A partir de la ecuación (6.64), obtenemos las siguientes identidades

$$(\omega + \bar{\omega})_{xx} = -\frac{1}{6}(\omega - \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})_x \quad (6.66)$$

$$(\omega + \bar{\omega})_{xxxx} = -\frac{1}{6}(\omega - \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})_{xxx} - \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})_x(\omega - \bar{\omega})_{xx} \quad (6.67)$$

Derivando (6.64) respecto a t y sustituyendo (6.65) en dicha fórmula:

$$(\omega - \bar{\omega})_{tx} = -\frac{1}{6}(\omega - \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})_{xxx} - \frac{1}{12}(\omega - \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})_x(\omega + \bar{\omega})_x \quad (6.68)$$

Juntando (6.66), (6.67) y (6.68) se deduce que

$$(\omega + \bar{\omega})_{tx} = (\omega + \bar{\omega})_{xxx} + \omega_x\omega_{xx} + \bar{\omega}_x\bar{\omega}_{xx} \quad (6.69)$$

De esta manera, la condición de integrabilidad para la transformada de Bäcklund definida por (6.64) y (6.65) se puede escribir como

$$\omega_{xt} = \omega_{xxx} + \omega_x\omega_{xx} \quad (6.70)$$

Es decir,

$$\omega_t = \frac{1}{2}\omega_x^2 + \omega_{xxx} \quad (6.71)$$

$\bar{\omega}$ también satisface dichas ecuaciones:

$$\bar{\omega}_{xt} = \bar{\omega}_{xxx} + \bar{\omega}_x\bar{\omega}_{xx} \quad (6.72)$$

o bien

$$\bar{\omega}_t = \frac{1}{2}\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_{xxx} \quad (6.73)$$

Concluimos que, por tanto, este conjunto de transformadas de Bäcklund relaciona una solución de la ecuación KdV con otra, y en consecuencia sirve para construir más soluciones de la ecuación KdV. En resumen, para conectar soluciones de la ecuación KdV con soluciones de la ecuación MKdV lo que hemos hecho ha sido partir de una solución u de la ecuación KdV, aplicarle una transformada de Miura, utilizar que la variable v satisface la ecuación MKdV y definir una transformada de Bäcklund con las dos condiciones anteriores para deducir que la condición de integrabilidad es la ecuación KdV. Para conectar soluciones de la ecuación KdV con más soluciones de la misma ecuación, hemos definido otra variable ω , de forma que u sea su derivada respecto a x . Hemos reescrito la ecuación KdV en función de esta nueva variable, y hemos repetido el proceso anterior, teniendo en cuenta que tanto v como $-v$ (que se corresponde con $\bar{\omega}$) son soluciones de la ecuación MKdV, para obtener una transformada de Bäcklund definida en función de $\omega, \bar{\omega}$. Así, hemos relacionado una solución de la ecuación KdV con otra, como pretendíamos.

6.4. Soluciones de solitones

Como sabemos que $u = 0$ es la solución trivial de la ecuación KdV, nos preguntamos si podemos construir alguna solución interesante mediante transformadas de Bäcklund. Para este caso, dichas transformadas devuelven

$$\bar{\omega}_x = -12\lambda - \frac{1}{12}\bar{\omega}^2 \quad (6.74)$$

$$\bar{\omega}_t = \bar{\omega}_{xxx} + \frac{1}{2}\bar{\omega}^2_x \quad (6.75)$$

Observemos que

$$\bar{\omega}_{xxx} = -\frac{1}{6}\bar{\omega}^2_x + \frac{1}{36}\bar{\omega}^2\bar{\omega}_x \quad (6.76)$$

La ecuación de evolución toma la forma

$$\bar{\omega}_t = \frac{1}{3}\bar{\omega}_x \left(\bar{\omega}_x + \frac{1}{12}\bar{\omega}^2 \right) \quad (6.77)$$

Es decir,

$$\bar{\omega}_t = -4\lambda\bar{\omega}_x \Rightarrow \bar{\omega}(x, t) = f(x + ct), \quad c = -4\lambda \quad (6.78)$$

En otras palabras, la solución obtenida a través de una transformada de Bäcklund a partir de la solución nula es una onda viajera con velocidad

$$c = -4\lambda \quad (\lambda < 0) \quad (6.79)$$

Esta onda viaja hacia la izquierda. La podemos reconocer inmediatamente como la solución de un único solitón. De hecho, si resolvemos la ecuación (6.74):

$$\omega(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \tanh \left(\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \right) \quad (6.80)$$

De manera que

$$u(x, t) = -12\lambda \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t) \right) \quad (\lambda < 0) \quad (6.81)$$

Esta solución es justamente el solitón de Russell que hemos construido previamente en la sección 2.3. Esto nos hace pensar que si iteramos con las transformadas de Bäcklund, podemos obtener soluciones multi-solitón.

Ya hemos visto anteriormente que el teorema de permutabilidad juega un papel crucial a la hora de construir soluciones de mayor orden mediante transformadas de Bäcklund. Apliquemos dicho teorema a nuestro caso. Si construimos

$$\omega \rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_{12} \quad \omega \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_{21} \quad (6.82)$$

el teorema de permutabilidad nos garantiza que

$$\omega_{12} = \omega_{21} \quad (6.83)$$

Cuantitativamente, estas transformadas de Bäcklund implican

$$(\omega + \omega_1)_x = -12\lambda_1 - \frac{1}{12}(\omega - \omega_1)^2 \quad (6.84)$$

$$(\omega_1 + \omega_{12})_x = -12\lambda_2 - \frac{1}{12}(\omega_1 - \omega_{12})^2 \quad (6.85)$$

$$(\omega + \omega_2)_x = -12\lambda_2 - \frac{1}{12}(\omega - \omega_2)^2 \quad (6.86)$$

$$(\omega_2 + \omega_{12})_x = -12\lambda_1 - \frac{1}{12}(\omega_2 - \omega_{12})^2 \quad (6.87)$$

Juntando estas expresiones, se obtiene

$$\omega_{12} = \omega - \frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2 - \omega_1} \quad (6.88)$$

Al ser esta expresión simétrica bajo el intercambio de índices, el teorema de permutabilidad implica que (usando $\omega = 0$)

$$u_{12}(x, t) = \frac{\partial \omega_{12}(x, t)}{\partial x} \quad (6.89)$$

Aplicando reiteradamente dicho teorema, se puede probar que, para $n \geq 2$

$$\omega_{(n)} = \omega_{(n-2)} - \frac{144(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\omega'_{(n-1)} - \omega_{(n-1)}} \quad (6.90)$$

donde

$$\omega_{(n)} = \omega_{12\dots n} \quad (6.91)$$

$$\omega'_{(n)} = \omega_{12\dots n-1, n+1} \quad (6.92)$$

y

$$\omega_{(0)} = \omega \quad (6.93)$$

Por ejemplo, para $n = 3$, tenemos

$$\omega_{123} = \omega_1 - \frac{144(\lambda_3 - \lambda_2)}{\omega_{13} - \omega_{12}} \quad (6.94)$$

y como ya hemos calculado las soluciones construidas tras dos pasos anteriormente

$$\omega_{12} = \omega - \frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2 - \omega_1} \quad (6.95)$$

$$\omega_{13} = \omega - \frac{144(\lambda_3 - \lambda_1)}{\omega_3 - \omega_1} \quad (6.96)$$

podemos escribir ω_{123} en términos de soluciones de un único paso

$$\omega_{123} = \frac{\lambda_1\omega_1(\omega_2 - \omega_3) + \lambda_2\omega_2(\omega_3 - \omega_1) + \lambda_3\omega_3(\omega_1 - \omega_2)}{\lambda_1(\omega_2 - \omega_3) + \lambda_2(\omega_3 - \omega_1) + \lambda_3(\omega_1 - \omega_2)} \quad (6.97)$$

Donde claramente observamos una simetría de permutación de índices, tal y como indica el Teorema de la Permutabilidad.

Ya hemos visto que si

$$\omega_{(0)} = \omega = 0 \quad (6.98)$$

entonces, al menos las soluciones de orden uno se corresponden con un único solitón. También hemos visto que las soluciones regulares para la ecuación KdV adquieren la forma

$$\omega(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \tanh\left(\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t)\right) \quad (6.99)$$

No obstante, una solución singular también satisface dicha ecuación, y esta solución tiene la forma

$$\omega^*(x, t) = 12\sqrt{-\lambda} \coth\left(\sqrt{-\lambda}(x - 4\lambda t)\right) \quad (6.100)$$

que a su vez satisface

$$\omega_x^* = -12\lambda - \frac{1}{12}\omega^{*2} \quad (6.101)$$

Resulta que para obtener soluciones regulares al aplicar transformadas de Bäcklund, no necesariamente debemos utilizar siempre soluciones regulares en los pasos intermedios. Por ejemplo, si tomamos

$$\omega_{12} = -\frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2^* - \omega_1} \quad (6.102)$$

con

$$\lambda_1 > \lambda_2 \quad (6.103)$$

entonces el denominador nunca se anula, y por tanto la solución es regular. De hecho, como los λ son negativos, nuestra ordenación implica que mientras λ_1 se puede hacer cero, λ_2 no. En el límite $\lambda_1 = 0$ tendríamos

$$\omega_{12} = \omega_2 \quad (6.104)$$

que es, evidentemente, regular. También es claro que si hubiésemos utilizado la solución regular ω_2 en el paso intermedio, este límite nos habría llevado a una solución singular. Así, observamos que para obtener soluciones regulares, no solo debemos utilizar soluciones singulares en los pasos intermedios, sino que además debemos ordenar los parámetros de las transformaciones de manera específica.

A continuación vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de dos pasos obtenidas a partir de la trivial. Utilizaremos la notación

$$\omega_1 = 12\sqrt{-\lambda_1} \tanh \xi_1 \quad (6.105)$$

$$\omega_2 = 12\sqrt{-\lambda_2} \tanh \xi_2 \quad (6.106)$$

donde

$$\xi_1 = \sqrt{-\lambda_1}(x - 4\lambda_1 t) \quad (6.107)$$

$$\xi_2 = \sqrt{-\lambda_2}(x - 4\lambda_2 t) \quad (6.108)$$

Adicionalmente, sea

$$\tanh \gamma = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} \quad (6.109)$$

A partir de la forma

$$\omega_{12} = -\frac{144(\lambda_2 - \lambda_1)}{\omega_2^* - \omega_1} \quad (6.110)$$

notamos que, si

$$\xi_2 \longrightarrow \pm\infty \quad (6.111)$$

entonces

$$\omega_{12} \longrightarrow \pm 12\sqrt{-\lambda_1} \coth \gamma + 12\sqrt{-\lambda_1} \tanh(\xi_1 \mp \gamma) \quad (6.112)$$

y

$$u_{12} \longrightarrow -12\lambda_1 \operatorname{sech}^2(\xi_1 \mp \gamma) \quad (6.113)$$

Análogamente, si

$$\xi_1 \longrightarrow \pm\infty \quad (6.114)$$

entonces

$$\omega_{12} \longrightarrow \pm 12\sqrt{-\lambda_2} \coth \gamma + 12\sqrt{-\lambda_2} \tanh(\xi_2 \mp \gamma) \quad (6.115)$$

y

$$u_{12} \longrightarrow -12\lambda_2 \operatorname{sech}^2(\xi_2 \mp \gamma) \quad (6.116)$$

En consecuencia, u_{12} es una solución de puramente dos solitones con fases asintóticas $\frac{\gamma}{\sqrt{-\lambda_1}}$ y $\frac{\gamma}{\sqrt{-\lambda_2}}$ respectivamente. Este resultado es muy importante, porque nos dice que a partir de la solución trivial podemos construir soluciones multi-soliton con la aplicación iterada de la transformadas de Bäcklund, aumentando el número de solitones en una unidad en cada paso sucesivo.

Vamos mostrar unas simulaciones que ilustran el comportamiento de 3 solitones. [24]

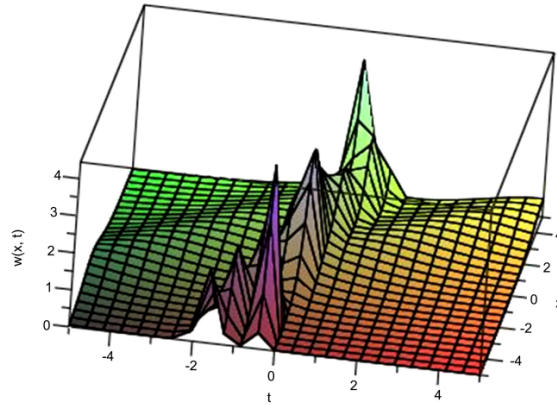


Figura 6.1: Perfil tridimensional de 3 solitones antes de la interacción [24]

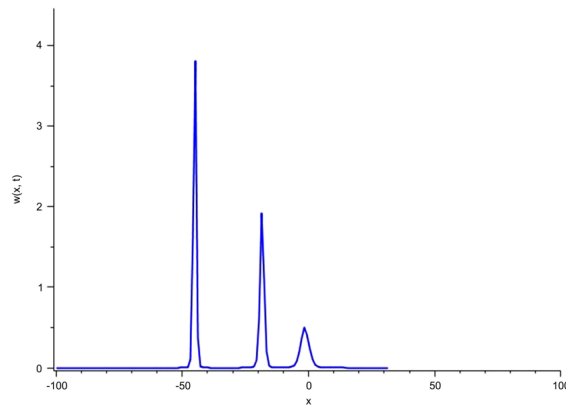


Figura 6.2: Perfil bidimensional de 3 solitones antes de la interacción [24]

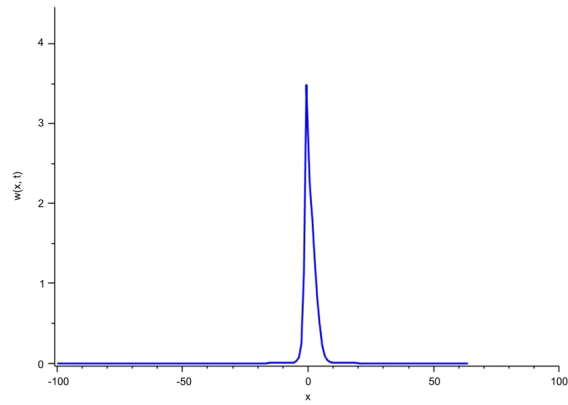


Figura 6.3: Perfil bidimensional de 3 solitones durante la interacción [24]

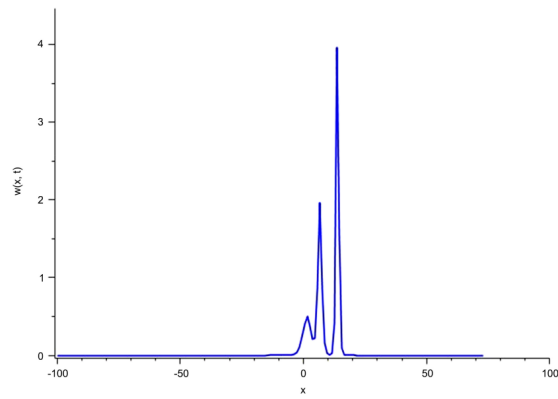


Figura 6.4: Perfil bidimensional de 3 solitones justo después de la interacción [24]

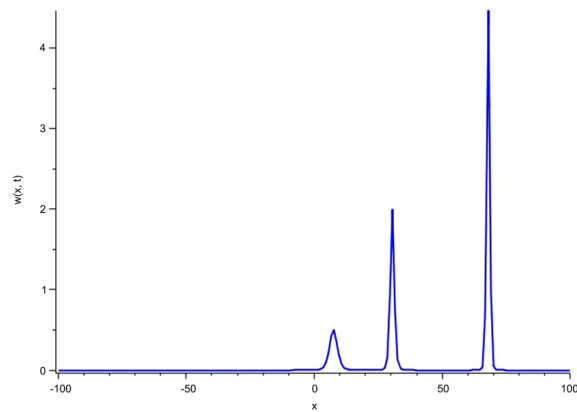


Figura 6.5: Perfil bidimensional de 3 solitones después de la interacción [24]

Observamos en las simulaciones anteriores que el solitón más alto es el más rápido.

Capítulo 7

Tratamiento geométrico de la integrabilidad

El enfoque geométrico de la integrabilidad permite relacionar conceptos que hemos trabajado pero que no parecían tener ninguna conexión ¹. Vamos a empezar con un espacio de fases de dimensión finita, pero después lo extenderemos a la ecuación KdV, que es un sistema continuo.

7.1. Geometría simpléctica

Veamos algunos conceptos básicos de geometría simpléctica. Se puede encontrar más información acerca de su relación con la física en [25]. La mayoría de conceptos que se presentaremos vienen recogidos en [5].

Sea una variedad diferenciable M . Dada una 2-forma² $f \in \Lambda^2 M$, se dice que es no degenerada si, fijado un campo vectorial $W \in TM$, en caso de que para todo campo vectorial $V \in TM$

$$f(V, W) = 0 \tag{7.1}$$

entonces

$$W = 0 \tag{7.2}$$

¹En este capítulo, se tomarán como referencia los siguientes textos: [5, 25, 26, 27].

²La notación habitual para una forma simpléctica suele ser utilizar ω en lugar de f .

Si $f \in \Lambda^2 M$ verifica que su derivada exterior es nula, $df = 0$, entonces decimos que dicha 2-forma es cerrada.

Si $f \in \Lambda^2 M$ es una 2-forma no degenerada y cerrada, la denominamos forma simpléctica. Una variedad M se dice simpléctica si posee una forma simpléctica.

Supongamos ahora que tenemos una variedad simpléctica de dimensión finita con coordenadas generalizadas y^μ . Con respecto a estas coordenadas, podemos escribir V, W, f como

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} = V^\mu \partial_\mu \quad (7.3)$$

$$W = W^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} = W^\mu \partial_\mu \quad (7.4)$$

$$f = \frac{1}{2} f_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu \quad (7.5)$$

Además, utilizando la condición de normalización

$$dy^\mu(\partial_\nu) = (dy^\mu, \partial_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (7.6)$$

deducimos que

$$f(V, W) = V^\mu f_{\mu\nu} W^\nu \quad (7.7)$$

Por ser f no degenerada, el coeficiente antisimétrico $f_{\mu\nu}$ es no singular. En consecuencia, la matriz de coeficientes y por tanto la variedad simpléctica M han de tener dimensión par. Esta propiedad que hemos deducido es cierta para toda variedad simpléctica.

Es más, al ser $f_{\mu\nu}$ no degenerada, podemos garantizar la existencia de su inversa $f^{\mu\nu}$, que a su vez satisface

$$f_{\mu\lambda}(y) f^{\lambda\nu}(y) = \delta_\mu^\nu = f^{\nu\lambda}(y) f_{\lambda\mu}(y) \quad (7.8)$$

Dicha inversa nos permite construir un corchete de Poisson entre dos funciones escalares p, q sobre la variedad como sigue

$$\{p(y), q(y)\} \equiv f^{\mu\nu}(y) \partial_\mu p(y) \partial_\nu q(y) \quad (7.9)$$

donde hemos adoptado el convenio de Einstein para la suma sobre índices repetidos.

Por ser $f^{\mu\nu}$ antisimétrico, también lo es dicho corchete:

$$\{p(y), q(y)\} = -\{q(y), p(y)\} \quad (7.10)$$

A partir de dichas funciones escalares, podemos escribir una clase especial de campos vectoriales, los campos vectoriales hamiltonianos. A cualquier función p , le podemos asociar un campo vectorial X_p mediante la relación

$$X_p(h) = \{p, h\}, \quad \forall h \in C^\infty(M) \quad (7.11)$$

En coordenadas locales, tenemos

$$X_p = f^{\mu\nu} \partial_\mu p \partial_\nu \quad (7.12)$$

que nos permite expresar los corchetes como

$$\{p(y), q(y)\} = -f(X_p, X_q) \quad (7.13)$$

También podemos calcular la contracción de la 3-forma df con tres campos vectoriales hamiltonianos arbitrarios X_p, X_q y X_r de la siguiente manera

$$df(X_p, X_q, X_r) = -\{p, \{q, r\}\} - \{q, \{r, p\}\} - \{r, \{p, q\}\} \quad (7.14)$$

En consecuencia, la identidad de Jacobi para el corchete es equivalente a que $df = 0$, que es precisamente la condición de que la forma sea cerrada, una de las propiedades que satisface una forma simpléctica por definición. Concluimos que una variedad simpléctica M posee un corchete de Poisson natural definido en términos de la inversa de la estructura simpléctica $f \in \Lambda^2 M$.

Observemos que los tensores $f_{\mu\nu}(y)$, $f^{\mu\nu}(y)$ pueden ser vistos como componentes de tensores métricos covariantes y contravariantes en la variedad simpléctica, respectivamente. Esto es consecuencia de que una 2-forma³ lleva dos campos vectoriales a los números reales, es decir

$$f : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.15)$$

Además, $f_{\mu\nu}(y)$, $f^{\mu\nu}(y)$ se transforman como las componentes de un tensor de rango 2:

Partimos de que, por la ecuación (7.9),

³Recordemos que una p -forma es una aplicación multilineal.

$$\{y^\mu, y^\nu\} = f^{\mu\nu}(y) \quad (7.16)$$

Dado un difeomorfismo que actúa como sigue

$$y^\mu \rightarrow \bar{y}^\mu(y) \quad (7.17)$$

y

$$f^{\mu\nu}(y) \rightarrow \bar{f}^{\mu\nu}(\bar{y}) \quad (7.18)$$

tal que

$$\{\bar{y}^\mu, \bar{y}^\nu\} = \bar{f}^{\mu\nu}(\bar{y}) \quad (7.19)$$

Utilizando la ecuación (7.9) deducimos que

$$\bar{f}^{\mu\nu}(\bar{y}) = f^{\lambda\rho}(y) \partial_\lambda \bar{y}^\mu \partial_\rho \bar{y}^\nu \quad (7.20)$$

equivalentemente,

$$\bar{f}^{\mu\nu}(\bar{y}) = f^{\lambda\rho}(y) \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial y^\lambda} \frac{\partial \bar{y}^\nu}{\partial y^\rho} \quad (7.21)$$

que es, justamente, la ley de transformación para las componentes de un tensor contravariante de rango 2. La ley de transformación correspondiente para $f_{\mu\nu}(y)$ también se verifica por ser la inversa de $f^{\mu\nu}(y)$.

Observemos que $f_{\mu\nu}(y)$ y $f^{\mu\nu}(y)$ son las componentes covariante y contravariante de la métrica simpléctica sobre M . Dicho tensor métrico es antisimétrico, en contraposición al tensor métrico de una variedad Riemmaniana, que es simétrico. En consecuencia, la métrica simpléctica no puede ser utilizada para definir distancias. De todas formas, $f^{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ se pueden utilizar para subir o bajar índices. En particular, el contragradiente de una función escalar viene dado por

$$\partial^\mu p(y) = f^{\mu\nu}(y) \partial_\nu p(y) \quad (7.22)$$

dicha cantidad puede ser vista como la componente de un campo Hamiltoniano X_p , que hemos definido en la ecuación (7.12) salvo signo. De hecho, la relación anterior implica que, dada una función

p ,

$$dp = \iota_{X_p} f = f(X_p, -) \quad (7.23)$$

donde ι_Y es la operación estándar de contracción con un vector Y .

En consecuencia, toda isometría sobre una variedad simpléctica está relacionada con un campo vectorial hamiltoniano.

Dado un campo vectorial hamiltoniano X_p , observemos que el flujo viene dado por las ecuaciones de Hamilton, con $p(y)$ jugando el papel del Hamiltoniano:

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, p(y)\} = f^{\mu\nu} \partial_\nu p(y) \quad (7.24)$$

Nótese que, en general, $f_{\mu\nu}(y)$ y $f^{\mu\nu}$ dependen de las coordenadas y^μ . No obstante, si para un sistema existen coordenadas globales tales que $f_{\mu\nu}$ y $f^{\mu\nu}$ adoptan la forma, en términos de bloques $N \times N$ si $\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2N$,

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

y

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

entonces dichas coordenadas se denominan coordenadas canónicas, y el espacio de fases recibe el nombre de espacio de fases canónico. En general, sin embargo, si el sistema no puede ser descrito mediante coordenadas canónicas, entonces $f_{\mu\nu}$ y $f^{\mu\nu}$ dependen de las coordenadas. En dicho caso, el teorema de Darboux nos garantiza la existencia de una base local de coordenadas para las cuales la métrica simpléctica adopta la forma descrita en (7.25) y (7.26).

Para finalizar esta breve discusión, cabe destacar que si C_i, C_j son cantidades conservadas, y $C_i \rightarrow X_{C_i}$ se encuentran en involución, entonces

$$\{C_i, C_j\} = 0 \Rightarrow [X_{C_i}, X_{C_j}] = 0 \quad (7.27)$$

Esta ecuación quiere decir que se pueden encontrar coordenadas C_i tales que

$$X_{C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} \quad (7.28)$$

7.2. Modelos integrables

Las propiedades descritas en la sección anterior son válidas para cualquier variedad simpléctica. Por otro lado, el espacio de fases de un modelo integrable debe corresponderse con una variedad simpléctica muy específica, pues esta debe poseer un corchete de Poisson dual entre otras cosas (véase [5]). Para estudiar las propiedades de una variedad así, vamos a asumir que posee al menos dos formas simplécticas distintas. Cada una de ellas tiene asociado un corchete de Poisson, dando lugar a la estructura de corchete de Poisson dual. Por ejemplo, la ecuación KdV posee los corchetes de Poisson $\{, \}_1$ y $\{, \}_2$. En lo que sigue, utilizaremos una formulación tensorial en lugar de un lenguaje geométrico diferencial.

Una forma de garantizar la existencia de dos estructuras simplécticas distintas es imponer que la misma ecuación dinámica pueda ser descrita por dos Lagrangianos distintos de primer orden. Por ejemplo, sean

$$L_0 = \theta_\mu^{(0)}(y)\dot{y}^\mu - H_0(y) \quad (7.29)$$

y

$$L = \theta_\mu(y)\dot{y}^\mu - H(y) \quad (7.30)$$

dos Lagrangianos describiendo las mismas ecuaciones de Hamilton, con $\mu = 1, 2, \dots, 2N$, $\dot{y}^\mu = \frac{dy^\mu}{dt}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son

$$f_{\mu\nu}(y)\dot{y}^\nu = \partial_\mu H_0(y) \quad (7.31)$$

y

$$F_{\mu\nu}(y)\dot{y}^\nu = \partial_\mu H(y) \quad (7.32)$$

siendo

$$f_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu \theta_\nu^0(y) - \partial_\nu \theta_\mu^0(y) \quad (7.33)$$

y

$$F_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu \theta_\nu(y) - \partial_\nu \theta_\mu(y) \quad (7.34)$$

Así, las dos formas

$$f = \frac{1}{2} f_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu \quad (7.35)$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu \quad (7.36)$$

son cerradas debido a que $f_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ satisfacen automáticamente la identidad de Bianchi

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \quad (7.37)$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (7.38)$$

También son formas no degeneradas debido a que las dos ecuaciones (7.31) y (7.32) describen el mismo sistema dinámico. Así, $f_{\mu\nu}(y)$ y $F_{\mu\nu}$ son dos objetos simplécticos asociados al mismo sistema dinámico. Sean $f^{\mu\nu}(y)$, $F^{\mu\nu}(y)$ sus correspondientes inversas, de manera que

$$f_{\mu\nu}(y) f^{\mu\lambda}(y) = \delta_\mu^\lambda \quad (7.39)$$

$$F_{\mu\nu}(y) F^{\mu\lambda}(y) = \delta_\mu^\lambda \quad (7.40)$$

Cada uno de estos tensores contravariantes tiene asociado un corchete de Poisson, dado por

$$\{p(y), q(y)\}_0 = f^{\mu\nu}(y) \partial_\mu p(y) \partial_\nu q(y) \quad (7.41)$$

$$\{p(y), q(y)\} = F^{\mu\nu}(y) \partial_\mu p(y) \partial_\nu q(y) \quad (7.42)$$

de forma que las ecuaciones (7.31) y (7.32) adquieren forma Hamiltoniana:

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, H_0\}_0 = f^{\mu\nu}(y) \partial_\nu H_0(y) \quad (7.43)$$

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, H\} = F^{\mu\nu}(y) \partial_\nu H(y) \quad (7.44)$$

de donde se deduce que

$$f^{\mu\nu}(y)\partial_\nu H_0(y) = F^{\mu\nu}(y)\partial_\nu H(y) \quad (7.45)$$

Esta relación describe la recursividad con la que hemos ido construyendo las cantidades conservadas de la ecuación KdV. Dadas dos estructuras simplécticas distintas, podemos construir el siguiente tensor (1,1) no trivial

$$S_\mu^\nu(y) = F_{\mu\lambda}(y)f^{\lambda\nu}(y) \quad (7.46)$$

Definimos

$$U_\mu^\nu(y) = \partial_\mu \left(F^{\nu\lambda} \partial_\lambda H(y) \right) \quad (7.47)$$

Juntando las ecuaciones (7.43), (7.44) y (7.47), tras realizar algunas operaciones y aplicando que el tensor $f_{\mu\nu}$ satisface la identidad de Bianchi, se deduce que

$$\frac{df_{\mu\nu}(y)}{dt} = -U_\mu^\lambda(y)f_{\lambda\nu}(y) + U_\nu^\lambda(y)f_{\lambda\mu}(y) \quad (7.48)$$

Análogamente,

$$\frac{dF_{\mu\nu}(y)}{dt} = -U_\mu^\lambda(y)F_{\lambda\nu}(y) + U_\nu^\lambda(y)F_{\lambda\mu}(y) \quad (7.49)$$

Notemos que $f_{\mu\nu}(y)$ y $F_{\mu\nu}(y)$ son dos estructuras simplécticas distintas en la variedad, y que los Hamiltonianos $H_0(y)$ y $H(y)$ generan cada uno su propio flujo.

De la misma forma, las correspondientes ecuaciones para las inversas $f^{\mu\nu}(y)$ y $F^{\mu\nu}(y)$ son

$$\frac{df^{\mu\nu}(y)}{dt} = f^{\mu\lambda}U_\lambda^\nu - f^{\nu\lambda}U_\lambda^\mu \quad (7.50)$$

$$\frac{dF^{\mu\nu}(y)}{dt} = F^{\mu\lambda}U_\lambda^\nu - F^{\nu\lambda}U_\lambda^\mu \quad (7.51)$$

Por otro lado, para el tensor (1,1) $S_\mu^\nu(y)$, construido a partir de tensores que permanecen invariantes en cuanto a forma bajo el flujo Hamiltoniano, se obtiene, juntando las relaciones anteriores, que

$$\frac{dS_\mu^\nu(y)}{dt} = S_\mu^\lambda(y)U_\lambda^\nu(y) - U_\mu^\lambda(y)S_\lambda^\nu(y) \quad (7.52)$$

Escribiendo dicha identidad en notación matricial,

$$\frac{dS(y)}{dt} = [S(y), U(y)] \quad (7.53)$$

La ecuación (7.53) es una ecuación de Lax, y en particular si $S(y)$ es lineal en y , entonces esta ecuación nos da una representación de Lax de las ecuaciones dinámicas originales.

En consecuencia, el tratamiento geométrico de la integrabilidad nos ha proporcionado una manera sistemática de construir operadores de Lax a partir de la estructura de corchete de Poisson dual y de la ecuación del movimiento. Además, la ecuación de Lax no es más que una representación de la invariancia de la forma del tensor natural (1,1) en la variedad bajo los flujos Hamiltonianos.

La ecuación de Lax (7.53) tiene implicaciones profundas. Por ejemplo, si definimos

$$K_0 = \log |\det S| \quad (7.54)$$

$$K_n = \frac{1}{n} \text{Tr}(S^n) \quad , \text{ para } n \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (7.55)$$

y haciendo uso de la identidad

$$\text{Tr} \left(P(s) \frac{dS}{dt} \right) = \text{Tr} (P(s) [S, U]) = 0 \quad (7.56)$$

tenemos que

$$\frac{dK_n}{dt} = 0 \quad (7.57)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Es decir, todas las cantidades K_n construidas arriba son automáticamente constantes del movimiento.

Sin embargo, no todas estas cantidades son funcionalmente independientes. De hecho, como S es una matriz de dimensión $2N \times 2N$, todos los K_n con $n \geq 2N + 1$, así como todos los $(\det S)^n K_{-n}$ con $n \geq 1$ pueden ser expresados como polinomios en K_1, \dots, K_{2N} . Es más, ni siquiera todos los K_1, \dots, K_{2N} pueden ser funcionalmente independientes debido a que tendríamos demasiadas restricciones en el espacio de fases, y no existiría ninguna dinámica en el sistema. Necesitamos únicamente N cantidades conservadas funcionalmente independientes para integrabilidad. Por tanto, vamos a

asumir que en dicho conjunto hay exactamente N elementos verificando que son funcionalmente independientes. Para tener integrabilidad, también necesitamos que dichas cantidades conservadas se encuentren en involución.

En aras de probar que se encuentran en involución, vamos a estudiar más propiedades de la variedad simpléctica. Dado un tensor (1,1) sobre dicha variedad, podemos construir otro (1,2) de manera "natural"

$$N_{\alpha\beta}^{\mu} = -N_{\beta\alpha}^{\mu} = S_{\alpha}^{\lambda}\partial_{\lambda}S_{\beta}^{\mu} - S_{\beta}^{\lambda}\partial_{\lambda}S_{\alpha}^{\mu} - S_{\lambda}^{\mu}(\partial_{\alpha}S_{\beta}^{\lambda} - \partial_{\beta}S_{\alpha}^{\lambda}) \quad (7.58)$$

Este tensor es conocido como el tensor de torsión de Nijenhuis (véase [26]).

Al conocer la evolución temporal de S_{μ}^{ν} , podemos calcular la evolución temporal del tensor de torsión de Nijenhuis como sigue

$$\frac{dN_{\alpha\beta}^{\mu}}{dt} = -U_{\alpha}^{\lambda}N_{\lambda\beta}^{\mu} + U_{\beta}^{\lambda}N_{\lambda\alpha}^{\mu} + U_{\lambda}^{\mu}N_{\alpha\beta}^{\lambda} \quad (7.59)$$

esta identidad es equivalente a afirmar que el tensor de torsión de Nijenhuis es invariante en forma bajo un flujo Hamiltoniano y que, en particular, una torsión nula en un instante sigue siendo nula en todo tiempo.

Observemos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica

$$N_{\alpha\beta}^{\mu} (S^{n-1})_{\mu}^{\beta} = S_{\alpha}^{\lambda}\partial_{\lambda}K_n - \partial_{\alpha}K_{n+1} \quad (7.60)$$

de forma que si dicho tensor se anula, ha de verificarse que

$$S_{\alpha}^{\lambda}\partial_{\lambda}K_n = \partial_{\alpha}K_{n+1} \quad (7.61)$$

es decir,

$$f^{\mu\nu}\partial_{\nu}K_n = F^{\mu\nu}\partial_{\nu}K_{n+1} \quad (7.62)$$

Por tanto, la condición de que el tensor de torsión de Nijenhuis se anule nos da una relación de recursividad entre las cantidades conservadas. A partir de esto, la prueba de que las cantidades conservadas se encuentran en involución es bastante sencilla:

$$\{K_m, K_n\}_0 = f^{\mu\nu}\partial_{\mu}K_m\partial_{\nu}K_n = F^{\mu\nu}\partial_{\mu}K_m\partial_{\nu}K_{n+1} = f^{\mu\nu}\partial_{\mu}K_{m-1}\partial_{\nu}K_{n+1} \quad (7.63)$$

de modo que

$$\{K_m, K_n\}_0 = \{K_{m-1}, K_{n+1}\}_0 \quad (7.64)$$

Asumiendo que $m > n$, si iteramos sobre esta ecuación $m - n$ veces, obtenemos que, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\{K_m, K_n\}_0 = 0 \quad (7.65)$$

De manera similar se puede probar que, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\{K_m, K_n\} = 0 \quad (7.66)$$

Concluimos así que el hecho de que el tensor de torsión de Nijenhuis se anule garantiza la integrabilidad.

7.3. Enfoque geométrico de la ecuación KdV

Vamos a deducir la ecuación de Lax siguiendo el razonamiento anterior [5, 27]. Observemos que el sistema KdV es un modelo continuo, de modo que hay que generalizar la formulación anterior con cuidado. Formalmente, las dos estructuras de Poisson de la ecuación KdV introducidas en la sección 2.5 vienen dadas por

$$F^{\mu\nu} \rightarrow D \quad (7.67)$$

$$f^{\mu\nu} \rightarrow M = D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \quad (7.68)$$

Podemos tratar de entender dichas estructuras utilizando la base de coordenadas donde

$$F(x, y) = \langle y | D | x \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) \quad (7.69)$$

$$f(x, y) = \langle y | M | x \rangle = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) + u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \delta(x - y) \quad (7.70)$$

Con las condiciones de contorno adecuadas, podemos escribir

$$F^{-1}(x, y) = \langle y | D^{-1} | x \rangle = \epsilon(x - y) \quad (7.71)$$

siendo la función escalón alternada

$$\epsilon(x - y) = \theta(x - y) - \frac{1}{2} = -\epsilon(y - x) \quad (7.72)$$

de manera que

$$\frac{\partial \epsilon(x - y)}{\partial x} = \delta(x - y) \quad (7.73)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} dz F(x, z) F^{-1}(z, y) = \delta(x - y) \quad (7.74)$$

Por otro lado, $f^{-1}(x, y)$ no se puede expresar mediante una fórmula cerrada.

Ahora los corchetes de Poisson pasan a ser operadores, y tenemos que encontrar el homólogo de S_{μ}^{ν} . Una opción simple pero eficaz es

$$S(x, y) = \int_{\mathbb{R}} dz F^{-1}(x, z) f(z, y) \quad (7.75)$$

que en el formalismo de operadores adopta la forma

$$S = MD^{-1} = D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}(Du)D^{-1} \quad (7.76)$$

Este es un operador de Lax. Notemos que es lineal en la variable u de la ecuación KdV, pero no es local debido al término D^{-1} .

En este lenguaje, la ecuación KdV se puede escribir como

$$\dot{u} = K(u) = (D^3 u) + u(Du) \quad (7.77)$$

obteniendo el segundo operador de Lax como

$$U = \frac{\delta \dot{u}}{\delta u} = \frac{\delta K(u)}{\delta u} = D^3 + Du \quad (7.78)$$

Y la ecuación de Lax

$$\frac{dS(x, y)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} dz (S(x, z)U(z, y) - U(x, z)S(z, y)) \quad (7.79)$$

toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = [U, S] \quad (7.80)$$

Si calculamos

$$SU = D^5 +^3 + \frac{2}{3}uD^3 + \frac{2}{3}uD^2 + \frac{1}{3}(Du)D^2 + \frac{1}{3}u(Du) \quad (7.81)$$

y

$$US = D^5 + \frac{2}{3}D^3u + \frac{1}{3}D^3(Du)D^{-1} + DuD^2 + \frac{2}{3}Du^2 + \frac{1}{3}Du(Du)D^{-1} \quad (7.82)$$

podemos expresar la ecuación de Lax como

$$\frac{2}{3}\dot{u} + \frac{1}{3}(D\dot{u})D^{-1} = \frac{2}{3}((D^3u) + u(Du)) + \frac{1}{3}(D((D^3u) + u(Du)))D^{-1} \quad (7.83)$$

si comparamos términos a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\dot{u} = (D^3u) + u(Du) \quad (7.84)$$

que es precisamente la ecuación KdV. Así, vemos que el tratamiento geométrico puede extenderse a modelos continuos, por lo menos en el caso KdV.

Capítulo 8

El Retículo de Toda

El principal ejemplo en el que nos hemos centrado, la ecuación KdV, es un modelo continuo. En muchas ocasiones, un sistema de dimensión finita, con un número finito de grados de libertad, es más sencillo de estudiar. Además, el tratamiento geométrico del apartado anterior se centra en sistemas finitos, de modo que vamos a profundizar en ellos ahora. ¹

8.1. La ecuación de Toda

El retículo de Toda (véase [5] o [29]) es un sistema de dimensión finita que describe el movimiento de N masas puntuales en la recta real bajo influencia de una interacción exponencial. Las ecuaciones de Hamilton, en términos de las coordenadas canónicas Q_i y momentos P_i , con $i = 1, 2, \dots, N$, vienen dadas por

$$\dot{Q}_i = P_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_j = e^{-(Q_j - Q_{j-1})} - e^{-(Q_{j+1} - Q_j)}, \text{ para } j = 2, 3, \dots, N-1 \\ \dot{P}_1 = -e^{-(Q_2 - Q_1)} \\ \dot{P}_N = e^{-(Q_N - Q_{N-1})} \end{cases} \quad (8.2)$$

Observamos claramente que la evolución para las coordenadas de momento no es simétrica. Para simetrizarlo un poco, aumentaremos el tamaño del sistema a uno de $N + 2$ masas puntuales con los extremos fijados en el infinito. Es decir, definiremos

¹El material que se trata en este capítulo se puede encontrar en [5, 27, 28, 29].

$$Q_0 = -\infty \quad (8.3)$$

$$Q_{N+1} = \infty \quad (8.4)$$

y las ecuaciones de Hamilton se convierten en

$$\dot{Q}_i = P_i \quad (8.5)$$

$$\dot{P}_i = e^{-(Q_i - Q_{i-1})} - e^{-(Q_{i+1} - Q_i)} \quad (8.6)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$. En lo que sigue, seguiremos tomando como válidas las condiciones de contorno de las ecuaciones (8.3) y (8.4), y trabajaremos con las ecuaciones de Hamilton descritas en (8.5) y (8.6). Observemos también que las coordenadas canónicas no son más que una selección particular de las coordenadas generalizadas y^μ del espacio de fases, ya introducidas anteriormente, y que verifican

$$y^i = Q_i \quad y^{N+i} = P_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (8.7)$$

8.2. Estructura de corchete de Poisson dual

El siguiente paso en el tratamiento geométrico del retículo de Toda es encontrar dos Lagrangianos distintos que den las ecuaciones de Hamilton descritas en (8.5) y (8.6) como sus ecuaciones de Euler-Lagrange. El Lagrangiano canónico de primer orden se puede obtener como

$$L_o = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (P_i \dot{Q}_i - Q_i \dot{P}_i) - H_o(Q, P) = \sum_{\mu=1}^{2N} \theta_\mu^o(y) \dot{y}^\mu - H_o(y) \quad (8.8)$$

Siendo

$$H_o(Q, P) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} P_i^2 + e^{-(Q_{i+1} - Q_i)} \right) \quad (8.9)$$

Así, la estructura simpléctica toma la forma

$$f_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu \theta_\nu^{(o)}(y) - \partial_\nu \theta_\mu^{(o)}(y) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

es decir, tenemos la estructura simpléctica canónica de la variedad, para la que

$$f = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} f_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu = - \sum_{i=1}^N dQ_i \wedge dP_i \quad (8.11)$$

Por otro lado, $f^{\mu\nu}(y)$ se obtiene fácilmente invirtiendo la matriz de (8.10)

$$f^{\mu\nu}(y) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Un segundo Lagrangiano que nos dé las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange se puede obtener como

$$L = \sum_{\mu=1}^{2N} \theta_\mu(y) \dot{y}^\mu - H(y) = \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{1}{2} P_i^2 + e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \right) \dot{Q}_i + \pi_i(P) \dot{P}_i \right) - H(Q, P) \quad (8.13)$$

donde

$$\pi_i(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \epsilon(i-j) P_j \quad (8.14)$$

$$H(P, Q) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{3} P_i^3 + (P_i + P_{i+1}) e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \quad (8.15)$$

Siendo

$$\epsilon(i-j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i = j \\ -1, & \text{si } i < j \end{cases} \quad (8.16)$$

La estructura simpléctica asociada a este Lagrangiano adquiere la siguiente forma matricial en términos de bloques $N \times N$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & E \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

donde los bloques verifican

$$A_{ij} = \delta_{i+1,j} e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} - \delta_{i,j+1} e^{-(Q_{j+1}-Q_j)} \quad (8.18)$$

$$B_{ij} = P_i \delta_{i,j} \quad (8.19)$$

$$E_{ij} = \epsilon(j - i) \quad (8.20)$$

y la forma simpléctica tiene la forma

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} F_{\mu\nu}(y) dy^\mu \wedge dy^\nu \quad (8.21)$$

que es equivalente a

$$F = \sum_{i=1}^N e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} dQ_i \wedge dQ_{i+1} - P_i dQ_i \wedge dP_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \epsilon(j-i) dP_i \wedge dP_j \quad (8.22)$$

Sea el (1,1)-tensor

$$S_\mu^\nu(y) = \sum_{\lambda=1}^{2N} F_{\mu\lambda}(y) f^{\lambda\nu}(y) \quad (8.23)$$

con la forma matricial asociada

$$S_\mu^\nu = \begin{pmatrix} B & A \\ -E & B \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a ambos Lagrangianos coinciden si se verifica

$$\sum_{\nu=1}^{2N} F^{\mu\nu}(y) \partial_\nu H(y) = \sum_{\nu=1}^{2N} f^{\mu\nu}(y) \partial_\nu H_o(y) \quad (8.25)$$

es decir, si

$$\partial_\mu H(y) = \sum_{\lambda=1}^{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} F_{\mu\lambda}(y) f^{\lambda\nu}(y) \partial_\nu H_o(y) \quad (8.26)$$

equivalentemente, si

$$\partial_\mu H(y) = \sum_{\nu=1}^{2N} S_\mu^\nu(y) \partial_\nu H_o(y) \quad (8.27)$$

Se puede comprobar, haciendo uso de las ecuaciones anteriores, que estas identidades sí se satisfacen. Por tanto, hemos probado que las ecuaciones de Toda son compatibles con una estructura

simpléctica dual. Hemos construido dos estructuras simplécticas distintas para el sistema de Toda, así como el (1,1)-tensor $S_\mu^\nu(y)$ asociado a las mismas. Ahora podemos aplicar el tratamiento geométrico estudiado en el capítulo anterior a este caso particular (véase [29]).

8.3. Cantidades conservadas

Ya hemos visto cómo calcular las cantidades conservadas a partir del (1,1)-tensor $S_\mu^\nu(y)$. A modo de ejemplo, calculemos unas pocas:

$$\text{Tr}(S) = 2\text{Tr}(B) = 2 \sum_{i=1}^N P_i \quad (8.28)$$

De forma que

$$H_1 = \frac{1}{2}K_1 = \frac{1}{2}\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^N P_i \quad (8.29)$$

es la primera cantidad conservada. Esta cantidad se corresponde con el momento total del sistema, y su conservación es consecuencia de la invariancia translacional del mismo. Es decir, $Q_i \rightarrow Q_i + a$

A continuación, notemos que

$$\text{Tr}(S^2) = \text{Tr}(2B^2 - (AE + EA)) \quad (8.30)$$

Tras simplificar, obtenemos que

$$H_2 = \frac{1}{2}K_2 = \frac{1}{4}\text{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}P_i^2 + e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} = H_o(Q, P) \quad (8.31)$$

Este Hamiltoniano es el asociado a la primera estructura simpléctica y puede ser considerado como la energía del sistema canónico. Escribamos las dos siguientes cantidades conservadas

$$H_3 = \frac{1}{2}K_3 = \frac{1}{6}\text{Tr}(S^3) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{3}P_i^3 + (P_i + P_{i+1})e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} = H(Q, P) \quad (8.32)$$

$$H_4 = \frac{1}{2}K_4 = \frac{1}{8}\text{Tr}(S^4) \quad (8.33)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{4}P_i^4 + (P_i^2 + P_i P_{i+1} + P_{i+1}^2) e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} + \frac{1}{2}e^{-2(Q_{i+1}-Q_i)} + e^{-(Q_{i+2}-Q_i)} \quad (8.34)$$

Es claro que las cantidades conservadas

$$K_n = \frac{1}{2n} \text{Tr} (S^n) \quad (8.35)$$

involucran, entre otras cosas, términos proporcionales a $\text{Tr} (B^n)$. Estos darían lugar a términos dependientes del momento de las cantidades conservadas, que tendrían la forma

$$\sum_{i=1}^N P_i^n \quad (8.36)$$

para $n = 1, 2, \dots, N$. Es claro que estas cantidades son independientes. Concluimos que de todas las cantidades conservadas únicamente N , por ejemplo (H_1, \dots, H_N) son funcionalmente independientes. Este número es precisamente el número de cantidades conservadas necesarias para probar que el sistema de Toda es integrable (véase [5], [28] o [29]). Por supuesto, también debemos probar que se encuentran en involución, que es lo que haremos a continuación.

8.4. El tensor de Nijenhuis

Tal y como hemos visto en el último capítulo, que se anule el tensor de Nijenhuis asociado a S_μ^ν implica que las cantidades conservadas K_n se encuentran en involución. La forma explícita del tensor de Nijenhuis es, en este caso,

$$N_{\alpha\beta}^\mu = \sum_{\lambda=1}^{2N} S_\alpha^\lambda \partial_\lambda S_\beta^\mu - S_\beta^\lambda \partial_\lambda S_\alpha^\mu - S_\lambda^\mu (\partial_\alpha S_\beta^\lambda - \partial_\beta S_\alpha^\lambda) \quad (8.37)$$

Es obvio por la propia definición que

$$N_{\alpha\beta}^\mu = -N_{\beta\alpha}^\mu \quad (8.38)$$

Para ver si es nulo el tensor de Nijenhuis, vamos a empezar estudiando las componentes $N_{\alpha\beta}^i$, con $i = 1, 2, \dots, N$ y $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2N$. Si representamos estas componentes explícitamente,

$$N_{\alpha\beta}^i = \delta_\beta^i \left(\delta_{\alpha+1}^i e^{-(Q_\alpha - Q_\alpha)} - \delta_{\alpha-1}^i e^{-(Q_\alpha - Q_{\alpha-1})} \right) \quad (8.39)$$

$$- \delta_\alpha^i \left(\delta_{\beta+1}^i e^{-(Q_\beta - Q_\beta)} - \delta_{\beta-1}^i e^{-(Q_\beta - Q_{\beta-1})} \right) \quad (8.40)$$

$$+ \delta_{\alpha, \beta+1} [\epsilon(\beta - i + 1) - \epsilon(\beta - i)] e^{-(Q_{\beta+1} - Q_\beta)} \quad (8.41)$$

$$- \delta_{\alpha+1, \beta} [\epsilon(\alpha - i + 1) - \epsilon(\alpha - i)] e^{-(Q_{\alpha+1} - Q_\alpha)} \quad (8.42)$$

Utilizando la identidad

$$\epsilon(\alpha - i + 1) - \epsilon(\alpha - i) = \delta_{\alpha, i} + \delta_{\alpha, i-1} \quad (8.43)$$

se deduce que todas las componentes con los índices mencionados se anulan, $N_{\alpha\beta}^i = 0$

Si repetimos el desarrollo para las componentes $N_{j+N,k+N}^{i+N}$ con $i, j, k = 1, 2, \dots, N$, vemos que también se anulan

$$N_{j+N,k+N}^{i+N} = P_i \delta_j^i \delta_{jk} - P_i \delta_k^i \delta_j^i - P_i \delta_j^i \delta_{jk} + P_i \delta_k^i \delta_j^i = 0 \quad (8.44)$$

En cuanto a las componentes $N_{j+N,k}^{i+N}$, tenemos que

$$N_{j+N,k}^{i+N} = -\delta_j^i \left(\delta_{k+1}^i e^{-(Q_{k+1}-Q_k)} - \delta_{k-1}^i e^{-(Q_k-Q_{k-1})} \right) \quad (8.45)$$

$$- \delta_{j,k} \left(\delta_{j+1}^i e^{-(Q_{j+1}-Q_j)} - \delta_{j-1}^i e^{-(Q_j-Q_{j-1})} \right) \quad (8.46)$$

$$+ \delta_{k+1}^i [\epsilon(j-k) - \epsilon(j-k-1)] e^{-(Q_{k+1}-Q_k)} \quad (8.47)$$

$$+ \delta_{k-1}^i [\epsilon(j-k) - \epsilon(j-k+1)] e^{-(Q_k-Q_{k-1})} \quad (8.48)$$

Volviendo a utilizar (8.43), se tiene que $N_{j+N,k}^{i+N} = 0$ también.

Finalmente, las componentes $N_{j,k}^{i+N}$ también se anulan:

$$N_{j,k}^{i+N} = (P_j - P_i) \frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\delta_{k+1}^i e^{-(Q_i-Q_{i-1})} - \delta_{k-1}^i e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \right) \quad (8.49)$$

$$- (P_k - P_i) \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\delta_{j+1}^i e^{-(Q_i-Q_{i-1})} - \delta_{j-1}^i e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \right) \quad (8.50)$$

$$= 0 \quad (8.51)$$

Si juntamos que las componentes estudiadas se anulan con la propiedad de antisimetría (8.38), concluimos que el tensor es nulo:

$$N_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad (8.52)$$

Hemos visto en el capítulo anterior que cuando el tensor de Nijenhuis se anula, existe una relación de recursividad para las cantidades conservadas. En este caso, esta relación toma la forma

$$\partial_\mu H_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{2N} S_\mu^\nu \partial_\nu H_n \quad (8.53)$$

La relación de recursividad implica que las cantidades conservadas se encuentran en involución. Así, acabamos de probar que el retículo de Toda es un sistema integrable.

8.5. La ecuación de Lax

Ya hemos visto que la ecuación de Lax juega un papel crucial a la hora de estudiar modelos integrables. En el tratamiento geométrico de los mismos, hemos visto un método sistemático que nos

permite construir operadores de Lax. Para la ecuación de Toda, se verifica (véase [5])

$$U_\mu^\nu(y) = \partial_\mu \left(f^{\nu\lambda} \partial_\lambda H_2(y) \right) = \partial_\mu \left(f^{\nu\lambda} \partial_\lambda H_o(y) \right) \quad (8.54)$$

Al corresponderse $f^{\mu\nu}$ con el corchete de Poisson canónico y ser por tanto constante, tenemos

$$U_\mu^\nu(y) = f^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial_\lambda H_o(y) \quad (8.55)$$

En términos de bloques de tamaño $N \times N$ se tiene

$$U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

Con

$$D_i^j = \left(\delta_i^j - \delta_{i+1}^j \right) e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} + \left(\delta_i^j - \delta_{i-1}^j \right) e^{-(Q_i-Q_{i-1})} \quad (8.57)$$

Así, la representación de Lax de las ecuaciones de Toda

$$\frac{dS}{dt} = [S, U] \quad (8.58)$$

toma la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{dB}{dt} & \frac{dA}{dt} \\ -\frac{dE}{dt} & \frac{dB}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - DE & -[B, D] \\ 0 & ED - A \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

Es decir, basta con estudiar las ecuaciones matriciales

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (8.60)$$

$$\frac{dA}{dt} = -[B, D] \quad (8.61)$$

$$\frac{dB}{dt} = A - DE = \frac{1}{2}[E, D] \quad (8.62)$$

Nótese que (8.60) se verifica trivialmente, por lo que tenemos solo dos ecuaciones matriciales independientes. Si las trabajamos con detalle, obtenemos respectivamente que

$$\dot{Q}_i = P_i \quad (8.63)$$

$$\dot{P}_i = e^{-(Q_i-Q_{i-1})} - e^{-(Q_{i+1}-Q_i)} \quad (8.64)$$

Que no son más que las ecuaciones de Toda obtenidas anteriormente. Con lo cual, ambas formulaciones son equivalentes. También podemos construir las representaciones de Lax para las ecuaciones de mayor orden en la jerarquía KdV. En este caso, el operador de Lax es

$$(U_n)_\mu^\nu = \partial_\mu \left(f^{\nu\lambda} \partial_\lambda H_n \right) = f^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial_\lambda H_n \quad (8.65)$$

Conocemos la forma de este operador porque los hamiltonianos n -ésimos son conocidos. De esta manera, la ecuación de orden n de la jerarquía KdV se puede escribir en el formalismo de Lax como

$$\frac{dS}{dt_n} = [S, U_n] \quad (8.66)$$

La construcción que hemos realizado para los operadores de Lax se basa en el tratamiento geométrico de la ecuación KdV. Debido a esta naturaleza simpléctica, el par de Lax está formado por matrices de dimensión $2N \times 2N$. Este carácter se puede observar en las ecuaciones (8.62) y (8.61). La primera es una ecuación matricial diagonal, y la segunda es antisimétrica. Existen otras representaciones de Lax de este sistema que no tienen origen geométrico. Por ejemplo, el par de Lax convencional de Flaschka y Moser [28] viene dado en términos de matrices de dimensión $N \times N$ y tiene la forma

$$\hat{S}_i^j = \frac{1}{2} \left(P_i \delta_i^j + \delta_{i+1}^j e^{-(Q_{i+1}-Q_i)/2} + \delta_i^{j+1} e^{-(Q_{j+1}-Q_j)/2} \right) \quad (8.67)$$

$$\hat{U}_i^j = \frac{1}{2} \left(\delta_{i+1}^j e^{-(Q_{i+1}-Q_i)/2} + \delta_i^{j+1} e^{-(Q_{j+1}-Q_j)/2} \right) \quad (8.68)$$

Por supuesto, la ecuación de Lax

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = [\hat{S}, \hat{U}] \quad (8.69)$$

contiene la misma física del problema que la formulación dada por (8.1) y (8.2). Separemos el operador de Lax \hat{S} en una parte diagonal y en otra que contenga su información fuera de la diagonal:

$$\hat{S}_i^j = \hat{B}_i^j + \hat{A}_i^j \quad (8.70)$$

$$\hat{B}_i^j = \frac{1}{2} P_i \delta_i^j \quad (8.71)$$

$$\hat{A}_i^j = \frac{1}{2} \left(\delta_{i+1}^j e^{-(Q_{i+1}-Q_i)/2} + \delta_i^{j+1} e^{-(Q_{j+1}-Q_j)/2} \right) \quad (8.72)$$

Notemos que la matriz diagonal \hat{B} se diferencia de B solamente en una constante multiplicativa. La matriz con elementos únicamente fuera de la diagonal, \hat{A} , no obstante, es simétrica, mientras que A es antisimétrica. Esto hace que, pese a que las estructuras parezcan similares, la naturaleza de los operadores sea distinta. Con la descomposición que hemos realizado, podemos separar la ecuación convencional de Lax en dos ecuaciones matriciales de matrices de dimensión $N \times N$:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{B}, \hat{U}] \quad (8.73)$$

$$\frac{d\hat{B}}{dt} = [\hat{A}, \hat{U}] \quad (8.74)$$

Una vez más, pese a que la información física contenida en (8.73) y (8.74) sea la misma que en (8.62) y (8.61), las estructuras vuelven a ser muy diferentes. Por ejemplo, la ecuación (8.73) es una ecuación matricial simétrica, mientras que (8.62) viene definida por una matriz antisimétrica.

Capítulo 9

Formulación de Zakharov-Shabat

Hasta ahora, hemos estudiado esencialmente dos modelos integrables: el modelo continuo de la ecuación KdV y el retículo de Toda de dimensión finita. No obstante, existen muchos otros modelos que también son integrables. La pregunta natural en este punto es si se pueden describir todos estos modelos de manera unificada, y la respuesta es que sí.

Cuando trataban de entender la ecuación de Schrödinger no lineal, que es integrable, Zakharov y Shabat utilizaron un método que más tarde fue generalizado por Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) para describir otros modelos integrables. Este tratamiento hace uso de un operador de Lax que es de primer orden en la derivada $\frac{\partial}{\partial x}$, en contraposición con la formulación de orden 2 que hemos estudiado en el método de Lax¹.

9.1. Formulación de primer orden

En la formulación de primer orden, la ecuación de evolución no lineal se obtiene como la condición de consistencia de un par de ecuaciones. El procedimiento es el siguiente: partiremos de las ecuaciones de Lax, que tienen lugar en una dimensión. Pasaremos a un sistema bidimensional, y escribiremos una ecuación diferencial lineal de primer orden en x y en t . Para ello, usaremos matrices de Pauli, y el sistema que describiremos será totalmente general. Los parámetros que utilizaremos serán arbitrarios. Finalmente, impondremos condiciones de compatibilidad para determinar el par de Lax.

¹Lo esencial de lo que vamos a contar se encuentra en [5], y dicha información se puede ampliar en [28, 30, 31].

Se ha probado en el capítulo 4 que si

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [B(t), L(t)] \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = B(t)\psi(t) \quad (9.3)$$

el parámetro espectral λ es independiente del tiempo. Estudiar la ecuación de Lax como una condición de compatibilidad es bastante útil.

En la formulación de primer orden, nos gustaría que $L(t)$ fuese lineal en $\frac{\partial}{\partial x}$. Vamos a tratar de generalizar las ecuaciones anteriores de la misma forma que lo hicieron Zakharov y Shabat [30], es decir, pasando a ecuaciones matriciales con matrices de dimensión 2×2 . Para ello, vamos a introducir las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Sean

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Se verifican las siguientes identidades

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0, \quad \sigma_3^2 = \mathbb{1}, \quad \sigma_{\pm}\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_{\pm}, \quad \sigma_{\pm}\sigma_{\mp} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \sigma_3) \quad (9.6)$$

Definiendo el espinor ϕ como

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

podemos generalizar las ecuaciones (9.1) y (9.3) como ecuaciones matriciales de primer orden

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (q\sigma_+ + r\sigma_- - i\zeta\sigma_3)\phi \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (P\sigma_+ + Q\sigma_- + R\sigma_3)\phi \quad (9.9)$$

donde las variables dinámicas $q(x, t)$ y $r(x, t)$ no dependen del parámetro espectral ζ , que hemos asumido que es independiente de x y de t . Las funciones coeficiente P, Q, R , por otro lado, dependen de ζ y son funcionales de $q(x, t)$ y $r(x, t)$. Tras calcular las derivadas cruzadas de las ecuaciones (9.8) y (9.9), imponemos que coincidan, y las condiciones para que esto suceda son:

$$R_x = qQ - rP, \quad Q_x = 2rR - 2i\zeta Q, \quad q_t = P_x + 2qR + 2i\zeta P \quad (9.10)$$

Bajo dichas condiciones, las ecuaciones (9.8) y (9.9) definen el par de Lax que buscamos para este sistema bidimensional. Vamos a escribir el par de operadores de manera explícita:

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - q\sigma_+ - r\sigma_- + i\zeta\sigma_3 \quad , \quad B = P\sigma_+ + Q\sigma_- - + R\sigma_3 \quad (9.11)$$

de forma que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L] \quad (9.12)$$

Observemos que, tal y como buscábamos, la ecuación de autovalores de L es una ecuación diferencial de primer orden. El resultado es que disponemos de un marco general con el que podemos decidir si un sistema es integrable, y esto pasa por encontrar variables dinámicas y funciones coeficiente adecuadas, con la forma dada en (9.11), que satisfacen las ecuaciones (9.10).

9.2. Sistemas integrables no lineales

Vamos a tratar de describir varios modelos integrables no lineales de forma unificada, haciendo uso de la formulación anterior. Es decir, trabajaremos con unos ejemplos y trataremos de encontrar dichas variables y coeficientes en los mismos.

9.2.1. KdV

Fijemos $r = 6$. Se deduce

$$R = \frac{1}{12}Q_x - \frac{i\zeta}{6}Q \quad , \quad P = \frac{1}{6}qQ - \frac{1}{72}Q_{xx} + \frac{i\zeta}{36}Q_x \quad (9.13)$$

Por tanto, en virtud de (9.10) se obtiene que

$$q_t = -\frac{1}{72}Q_{xxx} + \frac{1}{3}qQ_x + \frac{1}{6}q_xQ - \frac{\zeta^2}{18}Q_x \quad (9.14)$$

Si además escogemos $q = -\frac{1}{36}u(x, t)$ tenemos que

$$u_t = \frac{1}{2} \left(D^3 + \frac{1}{3}(Du + uD) \right) Q + 2\zeta^2 DQ \quad (9.15)$$

Que no es más que la ecuación encargada de generar la jerarquía del sistema KdV, tal y como hemos visto en la ecuación (4.57) de la sección 4.5. Por tanto, la ecuación KdV es integrable, así como todas las ecuaciones de la jerarquía KdV.

9.2.2. MKdV

Sea $r(x, t) = q(x, t) = -\frac{i}{\sqrt{6}}v(x, t)$. Se deduce

$$P - Q = -i\sqrt{6} \left(\frac{R_x}{v} \right) \quad (9.16)$$

De la misma forma,

$$P + Q = \frac{\sqrt{6}}{2\zeta} \left(\frac{R_x}{v} \right)_x + \frac{2}{\sqrt{6}\zeta} vR \Rightarrow (P + Q)_x = \frac{\sqrt{6}}{2\zeta} \left(\frac{R_x}{v} \right)_{xx} + \frac{2}{\sqrt{6}\zeta} (vR)_x \quad (9.17)$$

Juntándolo todo, se tiene que

$$v_t = \frac{3i}{2\zeta} \left(\frac{R_x}{v} \right)_{xx} + \frac{i}{\zeta} (vR)_x + i\zeta \left(\frac{R_x}{v} \right) \quad (9.18)$$

Tomando ahora

$$R = -i\zeta \left(-4\zeta^2 + \frac{1}{3}v^2(x, t) \right) \quad (9.19)$$

se concluye que

$$v_t = v_{xxx} + v^2v_x \quad (9.20)$$

que es justamente la ecuación MKdV. Por tanto, la ecuación MKdV es integrable.

9.2.3. Ecuación de Schrödinger no lineal (NSE)

Escojamos $q(x, t) = \sqrt{k} \psi^*$, $r(x, t) = \sqrt{k} \psi$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria y $\psi(x, t)$ es una función compleja. Se tiene, entonces, que

$$Q = \frac{k}{|k|} P^* \quad (9.21)$$

Ahora, si tomamos

$$R = 2i\zeta^2 + ik\psi^*\psi \xrightarrow{\text{se deduce}} Q = i\sqrt{k}\psi_x - 2\zeta\sqrt{k}\psi \quad (9.22)$$

Las ecuaciones de evolución, en este caso, es como sigue

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2k|\psi|^2\psi \quad (9.23)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger no lineal. El parámetro k es el encargado de ponderar la fuerza de la interacción no lineal (véase [32]). También queda probado que la NSE es un sistema integrable.

9.2.4. Ecuación sine-Gordon

Sean

$$r(x, t) = -q(x, t) = \frac{1}{2}\omega_x(x, t) \quad , \quad P = Q = \frac{i}{4\zeta} \sin \omega \quad (9.24)$$

Se deduce que

$$R = \frac{i}{4\zeta} \cos \omega \quad (9.25)$$

Así, la ecuación de la evolución es

$$\omega_{xt} = \sin \omega \quad (9.26)$$

Que es justamente la ecuación sine-Gordon. Por tanto, este sistema también es integrable.

9.2.5. Sinh-Gordon

De forma similar, escogemos

$$r(x, t) = q(x, t) = \frac{1}{2}\omega_x(x, t) \quad , \quad Q = -P = \frac{i}{4\zeta} \sinh \omega \quad (9.27)$$

Así, la ecuación del movimiento es

$$\omega_{xt} = \sinh \omega \quad (9.28)$$

es decir, la ecuación sinh-Gordon. En consecuencia, el sistema descrito por la ecuación sinh-Gordon es integrable.

La discusión anterior muestra cómo varios modelos integrables pueden ser descritos de una forma unificada en la formulación de primer orden, la cual implica directamente que son sistemas continuos integrables.

Capítulo 10

Conclusión y cierre

En este trabajo se han estudiado varias propiedades de la ecuación KdV, y se ha demostrado que es integrable utilizando la transformada de Miura.

Posteriormente, se han introducido varios métodos generales que surgieron con el estudio de sistemas integrables. En todo momento, se han aplicado estos métodos a la ecuación KdV, obteniendo así varias formulaciones equivalentes del problema. En particular, el par de Lax, la geometría simpléctica con el tensor de Nijenhuis y la formulación de Zakharov-Shabat permiten describir tres formulaciones equivalentes al problema original KdV.

Por motivos de espacio, no se ha podido abordar el tema de la dispersión inversa (tanto clásica (que se puede estudiar en [5], [33] o [34]) como cuántica (véase [35])).

A continuación, se ha estudiado el retículo de Toda, un sistema con un número finito de grados de libertad. Se ha hecho efectiva la prueba de que se trata de un sistema integrable. No obstante, y otra vez por falta de espacio y tiempo, no hemos podido trabajar el retículo de Toda desde un punto de vista de teoría de grupos (consultar [29] para más información), y nos hemos tenido que conformar con hacerlo desde un enfoque geométrico.

Finalmente, cabe destacar que hoy en día existen numerosos problemas abiertos en este campo, muchos de ellos relacionados con álgebras de Lie, que invitan a un mayor estudio del mismo.

Bibliografía

- [1] J.S. Russell (1844), Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., York 311.
- [2] D. Giovannini (2012) *How a Scottish Naval Engineer And His Horse Discovered Solitons* [imagen online], 15.05.2022, <https://the-gist.org/2012/07/how-a-scottish-naval-engineer-and-his-horse-discovered-solitons/>
- [3] O. Babelon et al. (2003) *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge Univ. Press.
- [4] *The Korteweg-De Vries Equation: A Derivation* , University of Colorado, Boulder
- [5] A. Das (1989) *Integrable Models*, World Scientific.
- [6] M. Abramowitz e I. Stegun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Cambridge University Press
- [7] P.G. Drazin (1977) *On the stability of cnoidal waves*, Quarterly Journal of Mechanics and Appl. Math., 30
- [8] A.C. Newell (1985) *Solitons in Mathematical Physics*, SIAM.
- [9] G.B. Whitham (1974) *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley.
- [10] M. Kruskal (1974) *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser, Springer-Verlag.
- [11] D.J. Korteweg y G. de Vries (1895), Phil. Mag. 39, 422.
- [12] R.M. Miura et al. (1974), Comm. Pure Appl. Math. 27, 97
- [13] A. Das (1988), Phys. Lett. B207, 429.
- [14] R. M. Miura (1968), J. Math. Phys. 9, 1202.

- [15] R. M. Miura, C.S. Gardner y M.D. Kruskal (1968), *J. Math. Phys.* 9, 1204.
- [16] P.D. Lax (1975), *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 141
- [17] P.D. Lax (1968), *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 467
- [18] A.V. Bäcklund (1875), *Lund Univ. Arsskrift* 10.
- [19] A.V. Bäcklund (1876), *Math. Ann.* 9, 297.
- [20] H-H. Chen (1974) *in Bäcklund Transformations*, Ed. A. Dold and B. Eckmann, Springer-Verlag.
- [21] R.K. Dodd y R.K. Bullough (1976) *Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations*, *Roc. R. Soc. Lond.* 351.
- [22] P. Bracken y A.M. Grundland (2000) *On the Bäcklund transformations and the theorem of permutability for the generalized Weierstrass system*, *Inverse Problems*, 16.
- [23] J. Clairin (1902), *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 3 Ser. Suppl. 19.
- [24] H.O. Orapine et al. (2020) *Analytical and Numerical Computations of Multi-Solitons in the Korteweg-de Vries (KdV) Equation.*, *Applied Mathematics* , 11, 511-531.
- [25] W.D. Curtis y F.R. Miller (1985) *Differential Manifolds and Theoretical Physics*, Academic Press.
- [26] A. Nijenhuis (1951), *Indag. Math.* 13, 200
- [27] A. Das y S. Okubo (1989), *Ann. Phys.* 190
- [28] H. Flaschka (1974) *in Dynamical Systems, Theory and Applications*, Ed. J. Moser, Springer-Verlag.
- [29] M. Toda (1981) *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag.
- [30] V.E. Zakharov y A.B. Shabat (1972), *JETP* 34, 62.
- [31] V.E. Zakharov y S.V. Manakov (197), *Theo. Math. Phys.* 19, 551.
- [32] G. Fibich (2015) *The Nonlinear Schrödinger Equation* , Springer

- [33] Z.S. Agranovich y V.A. Marchenko (1963) *The Inverse Problem of Scattering*, Gordon and Breach.
- [34] K. Chadan y P.C. Sabatier (1977) *Inverse Problems in Scattering Theory*, Springer-Verlag.
- [35] E.K. Sklyanin (1992), *Quantum inverse scattering method. Selected topics*, Nankai Lect. on Math. Phys.