



Universidad de Oviedo

Tesis Doctoral

**“SOLUCIONES MULTINIVEL AL PROBLEMA
DE LA FLUOROSCOPIA”**

Área de Tecnología Electrónica

Autor: Oscar Pardo Vaquero

Tutores: Dr. Alberto Martín Pernía

Dr. Juan A. Martín Ramos

*A mi maravillosa esposa,
por su paciencia infinita*

No quiero dejar pasar esta oportunidad sin dar las gracias a todos los que me han apoyado en la realización de esta tesis. Quiero agradecer a mi familia el apoyo recibido durante estos años cuyos ánimos han sido claves. Pero quiero hacer una mención especial al gran apoyo recibido por los tutores de esta tesis Alberto y Juan, sin cuya inestimable ayuda hubiese sido imposible la realización de este trabajo.

PRÓLOGO

En los últimos años, con el desarrollo de la tecnología, se ha hecho evidente la necesidad de fuentes de alimentación diseñadas específicamente para una aplicación concreta. Estas fuentes que alimentan los dispositivos electrónicos, a veces tienen que trabajar en rangos de potencia elevados a una elevada tensión, ya que así lo demanda el funcionamiento del dispositivo al que suministran energía.

En este sentido, los convertidores continua-continua forman parte de un sector industrial de gran desarrollo tecnológico debido en gran parte a las aplicaciones que se derivan de su utilización.

A pesar de su sencillez topológica, los convertidores conmutados presentan una descripción dinámica compleja debida a su naturaleza no lineal, al carácter de tiempo discreto de su control, a la naturaleza de topología variable en el tiempo de su funcionamiento y a la inevitable presencia de incertidumbre en sus parámetros más significativos.

Un buen ejemplo de ello lo podemos consultar en la tesis del Dr. Juan Martín, en la que expone en un excelente trabajo el estudio de un convertidor basado en la topología PRC-LCC en estructura de puente completo, con control de ancho de pulso por fase desplazada y filtro por condensador.

Dicha topología sirve de punto de partida para esta tesis por ser una topología que permite un buen funcionamiento en rangos de potencia que van desde pocos vatios hasta decenas de kilovatios.

Sin embargo, lo que aquí se expone es una mejora en dicha topología, que permitirá el funcionamiento de dicho convertidor de una manera más eficiente en los rangos de trabajo, ofreciendo al diseñador mayores posibilidades de control. Se hará especial énfasis en el rango de trabajo de fluoroscopia, en el que con la solución de la topología que se pretende conseguir, se mejorarán magnitudes que inciden de manera negativa en las pérdidas.

Para ello, se aplicarán técnicas de multinivel en el que se conseguirá un nuevo grado de libertad del sistema, permitiendo así poder hacer un diseño del convertidor para una tensión de entrada que se desee, e incluso hacer el sistema inmune a posibles variaciones de ésta, además de una reducción en las corrientes circulantes en el convertidor de manera importante para bajas potencias. Sin embargo, la inclusión de dicho grado de libertad, llevará ligado un incremento en la complejidad del modelado matemático del sistema.

Para su desarrollo se ha dividido el desarrollo de esta tesis en varios capítulos de forma que resulte sencillo seguir el desarrollo del modelado del convertidor.

En el primer capítulo, se explican brevemente la técnica de multinivel, destacando las ventajas que se pueden derivar de ella aplicadas al convertidor resonante de estudio. Se expondrán pues varias formas de onda que se pueden obtener a la entrada del convertidor y se discutirá las ventajas e inconvenientes de varias de ellas. También se explicará el funcionamiento en zona óptima en este tipo de convertidores, lo que arrojará posibilidades adicionales a la hora de elección de una forma de onda concreta.

Una vez propuesta la nueva topología, en el segundo capítulo se centra en formular las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema, y mediante simplificaciones en los elementos del sistema así como de aproximaciones como es el método promediado en el espacio de estados, se obtendrá un conjunto de ecuaciones similar al original, conservando toda la información promediada de su funcionamiento.

Una vez obtenido el grupo de ecuaciones que determinan el comportamiento del sistema, en el capítulo 3 se obtiene un modelo general en gran señal, que permitirá fijar cualquier punto de trabajo y verificar su comportamiento transitorio. A continuación se validará el modelo comparando los resultados obtenidos en un punto de funcionamiento con los resultados obtenidos mediante software de simulación de circuitos.

En el capítulo 4, derivaremos un nuevo modelo a partir del anterior, para conseguir las ecuaciones que representan el régimen permanente del sistema. Se ha diseñado además un prototipo de laboratorio con el que poder comprobar de forma experimental el funcionamiento del convertidor, y poder comparar con el modelo teórico desarrollado.

Una vez validado el modelo, se generarán ábacos de diversos puntos de funcionamiento que pueden resultar de interés para el diseñador.

Finalmente, en el capítulo 5, se obtendrá un modelo linealizado generalizado, válido de nuevo para cualquier punto de funcionamiento, y de nuevo se validará con el prototipo de laboratorio mediante varias simulaciones reales.

Con el desarrollo de los 5 capítulos anteriores, quedará suficientemente estudiada la topología multinivel propuesta, quedando el capítulo 6 para exponer las conclusiones finales que se derivan de los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta tesis.

LISTA DE SÍMBOLOS

A continuación, se representan una lista de los símbolos que serán utilizados en el desarrollo de esta obra:

$[A]$	Matriz de derivadas parciales de las derivadas de las variables de estado respecto a las variables de estado
a_{ij}	Derivada parcial, respecto a la variable de estado j -ésima, de la derivada de la variable de estado i -ésima. Término a_{ij} de la matriz $[A]$
\hat{a}_{ij}	Versión normalizada de a_{ij}
$[B]$	Matriz de derivadas parciales de las derivadas de las variables de estado respecto a los parámetros de control
b_{ij}	Derivada parcial, respecto a la variable de estado j -ésima, de la derivada de la variable de estado i -ésima. Término b_{ij} de la matriz $[B]$
\hat{b}_{ij}	Versión normalizada de b_{ij}
$[C]$	Matriz de derivadas parciales de las derivadas de las variables de observación respecto a las variables de estado
C	Asociación en serie de C_S y C_P
c_{ij}	Derivada parcial, respecto a la variable de estado j -ésima, de la derivada de la variable de estado i -ésima. Término c_{ij} de la matriz $[C]$
\hat{c}_{ij}	Versión normalizada de c_{ij}
C_f	Condensador de filtrado
C_P	Capacidad del condensador paralelo

C_s	Capacidad del condensador serie
$[D]$	Matriz de derivadas parciales de las derivadas de las variables de observación respecto a los parámetros de control
D_i	Diodo <i>i-ésimo</i> del puente rectificador de salida
d_{ij}	Derivada parcial, respecto a la variable de estado <i>j-ésima</i> , de la derivada de la variable de estado <i>i-ésima</i> . Término d_{ij} de la matriz $[D]$
\hat{d}_{ij}	Versión normalizada de d_{ij}
f	Frecuencia de una señal
\hat{f}	Frecuencia de una señal normalizada
f_P	Frecuencia resonante paralelo
f_S	Frecuencia resonante serie
F_{AB}	función descriptora extendida de la tensión de salida de la etapa inversora
F_{ABkS}	Armónico senoidal de orden <i>k-ésimo de la función descriptora</i> F_A
F_{ABkC}	Armónico cosenoidal de orden <i>k-ésimo de la función descriptora</i> F_A
f_B	Frecuencia base elegida para la normalización
$f_1 \dots f_5$	Ecuaciones diferenciales lineales que representan el sistema
$g_1 \dots g_4$	Ecuaciones que representan las variables de observación

k_{1i}	Coeficiente 1 del método de Runge-kutta
k_{2i}	Coeficiente 2 del método de Runge-kutta
k_{3i}	Coeficiente 3 del método de Runge-kutta
k_{4i}	Coeficiente 4 del método de Runge-kutta
I_B	Corriente base elegida para la normalización
$i_D(t)$	Corriente en el rectificador de salida
$i_L(t)$	Corriente en el tanque resonante
i_{L0}	Corriente en el tanque resonante en régimen permanente
$\hat{i}_L(t)$	Corriente en el tanque resonante normalizada
i_{LA}	Coeficiente senoidal de la corriente resonante
\hat{i}_{LA}	Coeficiente senoidal de la corriente resonante normalizada
i_{LA0}	Coeficiente senoidal de la corriente resonante en régimen permanente
\hat{i}_{LA0}	Coeficiente senoidal de la corriente resonante en régimen permanente normalizada
i_{LB}	Coeficiente cosenoidal de la corriente resonante
\hat{i}_{LB}	Coeficiente cosenoidal de la corriente resonante normalizada
i_{LB0}	Coeficiente cosenoidal de la corriente resonante en régimen permanente

\hat{i}_{LB0}	Coeficiente cosenoidal de la corriente resonante en régimen permanente normalizada
L_m	Inductancia magnetizante
L_s	Inductancia de dispersión serie
P_B	Potencia base elegida para normalización
$[Q(s)]$	Matriz de funciones de transferencia
Q_i	Interruptor i -ésimo de las etapas inversoras
$q_{ij}(s)$	Cada uno de los elementos de la matriz de funciones de transferencia. Representa la función de transferencia de la variable i -ésima con respecto a la variable de observación j -ésima
\hat{R}	Carga normalizada
r	Resistencia en los conductores
\hat{r}	Resistencia en los conductores normalizada
T	Periodo de una señal periódica
t_B	Tiempo base elegido para la normalización
t_i	Tiempo correspondiente a la iteración i -ésima
$\bar{u}(t)$	Vector de excitación
$V_{AB}(t)$	Tensión de salida del inversor
$V_{AB1}(t)$	Primer armónico de la tensión de salida del inversor

V_{ABkC}	Armónico cosenoidal de orden k -ésimo de V_A
V_{AB1C}	Primer armónico cosenoidal de V_A
\hat{V}_{AB1C}	Primer armónico cosenoidal de V_A normalizado
V_{ABkS}	Armónico senoidal de orden k -ésimo de V_A
V_{AB1S}	Primer armónico senoidal de V_A
\hat{V}_{AB1S}	Primer armónico senoidal de V_A normalizado
V_B	Tensión base elegida para la normalización
V_e	Tensión de entrada al convertidor
$V_p(t)$	Tensión en el condensador paralelo C_P
V_{p0}	Tensión en el condensador paralelo C_P en régimen permanente
V_{pA}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P
\hat{V}_{pA}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P normalizado
V_{pA0}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P en régimen permanente
\hat{V}_{pA0}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P en régimen permanente normalizado
V_{pB}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P
\hat{V}_{pB}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P

normalizado

V_{PB0}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P en régimen permanente
\hat{V}_{PB0}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador paralelo C_P en régimen permanente normalizado
$V_S(t)$	Tensión en el condensador serie C_S
V_{S0}	Tensión en el condensador serie C_S en régimen permanente
V_{SA}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador serie C_S
\hat{V}_{SA}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador serie C_S normalizado
V_{SA0}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador serie C_S en régimen permanente
\hat{V}_{SA0}	Coeficiente senoidal de la tensión en el condensador serie C_S en régimen permanente normalizado
V_{SB}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador serie C_S
\hat{V}_{SB}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador serie C_S normalizado
V_{SB0}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador serie C_S en régimen permanente
\hat{V}_{SB0}	Coeficiente cosenoidal de la tensión en el condensador serie C_S en régimen permanente normalizado
$V_x(t)$	Tensión de salida del convertidor

\hat{V}_x	Tensión de salida del convertidor normalizada
V_{x0}	Tensión de salida del convertidor en régimen permanente
\hat{V}_{x0}	Tensión de salida del convertidor en régimen permanente normalizada
V_γ	Caída de tensión en los diodos de los IGBTs del puente inversor
w_i	Parámetro de control <i>i-ésimo</i>
$[\Delta w_i(t)]$	Matriz de incrementos de parámetros de control
$\bar{x}(t)$	Vector de estado
$X_k(s)$	función imagen de $\Delta x_k(t)$
x_{ak}	Termino senoidal del desarrollo de Fourier de orden k
x_{bk}	Termino cosenoidal del desarrollo de Fourier de orden k
$[\Delta x(t)]$	Matriz de incrementos de las variables de estado
$[\Delta \dot{x}(t)]$	Matriz de derivadas temporales de las variables de estado
$\bar{y}(t)$	Vector de observación
$[\Delta y(t)]$	Matriz de incrementos de las variables de observación
Z_B	Impedancia base elegida para la normalización
Z_r	Agrupación y simplificación de términos

\hat{Z}_r	Agrupación y simplificación de términos normalizada
Z_i	Agrupación y simplificación de términos
\hat{Z}_i	Agrupación y simplificación de términos normalizada
α	Relación entre las dos capacitancias de la red resonante
β	Relación entre la capacitancia entre el filtro de salida y la capacitancia resonante
ε	Paso de iteración en el método de Euler
Γ	Relación de transformación del transformador secundario
τ_1	Ciclo de trabajo del inversor principal
τ_{10}	Ciclo de trabajo del inversor principal en régimen permanente
τ_2	Ciclo de trabajo de inversor auxiliar
τ_{20}	Ciclo de trabajo de inversor auxiliar en régimen permanente
θ	<i>Fase</i> en la que la tensión de $V_P(t)$ se queda fija a la tensión de salida
φ_L	<i>Fase</i> entre la tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$ y la corriente resonante $i_L(t)$
φ_{L0}	<i>Fase</i> entre la tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$ y la corriente resonante $i_L(t)$ en régimen permanente
ψ	Ángulo en el que C_P experimenta su carga senoidal
ψ_0	Ángulo en el que C_P experimenta su carga senoidal en régimen permanente

$\hat{\psi}_0$	Ángulo en el que C_P experimenta su carga senoidal en régimen permanente normalizada
μ	Agrupación y simplificación de términos
μ_0	Agrupación y simplificación de términos normalizados
ω	Pulsación
$\hat{\omega}$	Pulsación normalizada
$\hat{\omega}_0$	Pulsación normalizada en régimen permanente
ω_B	Pulsación base elegida para la normalización
ω_0	Pulsación en régimen permanente

ÍNDICE

1 Introducción a los inversores resonantes.....	1.2
1.1 Introducción	1.2
1.2 Topologías Multinivel.....	1.5
1.2.1 Cascaded Converter	1.6
1.3 Topología propuesta.....	1.7
1.3.1 Formas de onda en el inversor	1.11
1.3.1.1 Señal simétrica	1.13
1.3.1.2 Señal asimétrica	1.16
1.3.2 Zona óptima.....	1.18
1.3.3 Señal en modo fluoroscopia.....	1.20
1.4 Ventajas de la topología multinivel	1.23
1.5 Conclusiones	1.24
1.6 Bibliografía.....	1.26
2 Modelado matemático de la topología multinivel.....	2.2
2.1 Introducción	2.2
2.2 Método promediado en el espacio de estados	2.4
2.3 Método promediado generalizado	2.6
2.3.1 Coeficientes de Fourier	2.7
2.3.2 Metodología.....	2.8
2.4 Derivación temporal de las variables de estado	2.11
2.5 Función descriptora extendida	2.12
2.6 Aplicación del modelo al espacio de estados.....	2.17
2.7 Modelado de la topología	2.20
2.7.1 Introducción a la topología resonante multinivel.	2.21
2.7.2 Expresión de estado no lineal	2.26
2.7.3 Aproximación armónica de las variables de estado	2.28

2.7.4 Función descriptora extendida	2.30
2.7.4.1 Etapa inversora asimétrica	2.31
2.7.4.2 Etapa inversora simétrica	2.34
2.7.4.3 Etapa inversora en modo fluoroscopia	2.36
2.7.4.4 Etapa del rectificador de salida	2.37
2.7.4.5 Tensión en el condensador resonante paralelo $V_P(t)$	2.40
2.7.4.6 Otros modos de la tensión en $V_P(t)$	2.43
2.7.4.7 Corriente en el puente rectificador de salida	2.45
2.7.5 Ecuaciones de estado tras su aproximación armónica	2.46
2.8 Normalización	2.51
2.8.1 Ecuación de estado 1	2.53
2.8.2 Ecuación de estado 2	2.55
2.8.3 Ecuación de estado 3	2.56
2.8.4 Ecuación de estado 4	2.57
2.8.5 Ecuación de estado 5	2.57
2.8.6 Ecuaciones de estado normalizadas	2.58
2.9 Conclusiones	2.60
2.10 Bibliografía	2.61
3 Solución numérica del modelo matemático en gran señal	3.2
3.1 Método de Euler	3.3
3.2 Método de Runge-Kutta	3.5
3.3 Aplicación del algoritmo numérico al sistema	3.6
3.4 Resultados experimentales	3.9
3.4.1 Verificación del modelo con programas informáticos	3.9
3.4.1.1 Simulación con tensión simétrica	3.10
3.4.1.2 Simulación con tensión asimétrica	3.13
3.4.1.3 Simulación en modo fluoroscopia	3.15
3.4.1.4 Respuesta a un escalón	3.18
3.5 Conclusiones	3.20

3.6 Bibliografía.....	3.22
4 Régimen permanente de la topología multinivel.....	4.2
4.1 Generalidades.....	4.2
4.2 Formulación del modelo en régimen permanente.....	4.4
4.3 Resolución del sistema.....	4.6
4.4 Solución estática en bucle abierto.....	4.8
4.5 Variables de observación	4.10
4.6 Solución estática normalizada.....	4.11
4.6.1 Normalización del ángulo ψ_0	4.12
4.6.2 Normalización de Z_R	4.12
4.6.3 Normalización de Z_I	4.12
4.6.4 Normalización de i_{LA0}	4.13
4.6.5 Normalización de i_{LB0}	4.13
4.6.6 Normalización de V_{SA0}	4.13
4.6.7 Normalización de V_{SB0}	4.14
4.6.8 Normalización de V_{PA0}	4.14
4.6.9 Normalización de V_{PB0}	4.14
4.6.10 Normalización de V_{x0}	4.14
4.7 Circuito equivalente en régimen permanente	4.15
4.7.1 Potencia en el circuito equivalente.....	4.16
4.8 Validación del modelo	4.17
4.8.1 Validación mediante prototipo	4.17
4.8.1.1 Pruebas con señal simétrica	4.19
4.8.1.2 Pruebas con señal asimétrica.....	4.24
4.8.1.3 Pruebas en modo fluoroscopia	4.29
4.9 Estudio del modelo	4.33
4.9.1 Estudio del modelo con señal simétrica.....	4.34
4.9.1.1 Curvas de isorresistencia.....	4.35

4.9.1.2	Curvas de isopotencia	4.40
4.9.1.3	Curvas de isotensión.....	4.46
4.9.1.4	Curvas de isoángulo	4.52
4.9.2	Estudio del modelo con seña asimétrica.....	4.57
4.9.2.1	Curvas de isorresistencia.....	4.58
4.9.2.2	Curvas de isopotencia	4.62
4.9.2.3	Curvas de isotensión.....	4.67
4.9.2.4	Curvas de isoángulo	4.72
4.9.3	Estudio del modelo en modo fluoroscopia	4.76
4.9.3.1	Curvas de isorresistencia.....	4.77
4.9.3.2	Curvas de isopotencia	4.82
4.9.3.3	Curvas de isotensión.....	4.87
4.9.3.4	Curvas de isoángulo	4.92
4.10	Estudio del modelo en zona óptima	4.95
4.10.1	Modelo con señal simétrica en zona óptima	4.96
4.10.1.1	Curvas de isorresistencia	4.96
4.10.1.2	Curvas de isotensión.....	4.101
4.10.1.3	Curvas de isopotencia.....	4.107
4.10.1.4	Curvas de isoángulo	4.110
4.10.2	Modelo con señal asimétrica en zona óptima	4.115
4.10.2.1	Curvas de isorresistencia	4.115
4.10.2.2	Curvas de isotensión	4.120
4.10.2.3	Curvas de isoángulo	4.126
4.10.3	Modelo en modo fluoroscopia en zona óptima	4.131
4.10.3.1	Curvas de isorresistencia	4.131
4.10.3.2	Curvas de isotensión	4.132
4.10.3.3	Curvas de isopotencia.....	4.133
4.10.3.4	Curvas de isoángulo	4.134
4.11	Conclusiones.....	4.135

4.12 Bibliografía	4.136
5 Solución en pequeña señal de la topología multinivel	5.2
5.1 Generalidades.....	5.2
5.2 Linealización.....	5.2
5.3 Desarrollo en serie del modelo en gran señal.....	5.4
5.4 Desarrollo en serie de las variables de observación	5.6
5.5 Expresión incremental del sistema linalizado.....	5.7
5.6 Expresión final del modelo en pequeña señal	5.9
5.7 Análisis de modelos lineales	5.11
5.7.1 Introducción.....	5.11
5.7.2 Transformada de Laplace.....	5.12
5.7.3 Obtención de funciones de transferencia.....	5.13
5.8 Modelo en pequeña señal de la topología multinivel	5.14
5.8.1 Linealización	5.14
5.8.1.1 Obtención de las ecuaciones diferenciales lineales	5.14
5.8.2 Linealización de las variables de observación.....	5.20
5.8.3 Ecuaciones diferenciales normalizadas	5.25
5.9 Análisis del modelo lineal	5.33
5.9.1 Obtención de las funciones de transferencia	5.33
5.10 Resultados experimentales.....	5.34
5.11 Conclusiones.....	5.43
5.12 Bibliografía	5.44
6 Conclusiones finales	6.2
6.1 Futuros trabajos	6.4

INTRODUCCIÓN A LOS INVERSORES RESONANTES

En el presente capítulo se hace una descripción general de las técnicas multinivel aplicadas a inversores resonantes, y se realiza una descripción general de la topología multinivel que se someterá a estudio.

Se representan las ventajas obtenidas del multinivel y se analizan varias formas de onda válidas en la topología.

Por último, se hace una breve descripción del punto de trabajo en zona óptima de un inversor resonante y se propone una forma de onda de las posibles.

1 Introducción a los inversores resonantes

1.1 Introducción

Los sistemas electrónicos de potencia son ampliamente usados hoy en día para suministrar energía para muy diversas aplicaciones que van desde aplicaciones de computación y comunicaciones, equipos médicos, aplicaciones de control, de transporte, y de alta potencia. Los rangos de potencia asociada a cada aplicación varían desde unos pocos milivatios hasta decenas de megavatios. Estos sistemas típicamente llevan aparejado el uso de dispositivos de conmutación como pueden ser tiristores, MOSFET, diodos... junto con elementos pasivos como son los inductores, condensadores, resistencias, etc.

El análisis y diseño de estos sistemas representa importantes desafíos. El modelado y la simulación son ingredientes esenciales en el proceso de análisis y diseño en electrónica de potencia. Estos modelos pueden ayudar al diseñador a tener un conocimiento profundo del funcionamiento de un circuito. Con este conocimiento, puede, para unas especificaciones dadas, elegir una topología, seleccionar los componentes adecuados, estimar la eficiencia de un circuito, y completar el diseño simulando el peor escenario posible para comprobar la robustez del sistema, y obtener así una solución que sea flexible, modular, y altamente confiable.

Esta tesis se centra en el uso de uno de estos convertidores de potencia muy utilizados en la actualidad: los inversores resonantes en alta frecuencia.

Su desarrollo está basado en el posible diseño de una fuente de alimentación de un equipo que ha de trabajar a alta tensión y con grandes rangos de potencia de salida. En este sentido, se pretende un diseño que sea compacto y que minimice su coste global. Esta fuente de alimentación tiene su aplicación directa en equipos de rayos X que pueden funcionar también en régimen de fluoroscopia.

Para el funcionamiento de una fuente de este tipo en modo de radiodiagnóstico, se necesita una tensión de salida elevada (del orden de 100kV) y una potencia de salida también muy elevada (entre 50kW y 100kW). Estas tensiones son necesarias para

producir la generación de los rayos X. Además la potencia ha de ser regulable pues es el parámetro que controla el alcance de los rayos X.

Sin embargo, estos sistemas han de funcionar también en “modo fluoroscopia”.

La fluoroscopia es una técnica de imagen usada en medicina para obtener imágenes en tiempo real de las estructuras internas de los pacientes mediante un fluoroscopio (Figura 1-1). Es una técnica muy invasiva, pues se somete al paciente a la exposición continuada de los rayos X durante la duración de la prueba. Sin embargo, proporciona unos resultados muy útiles para el médico, pues puede visualizar en tiempo real el sistema interno del paciente.

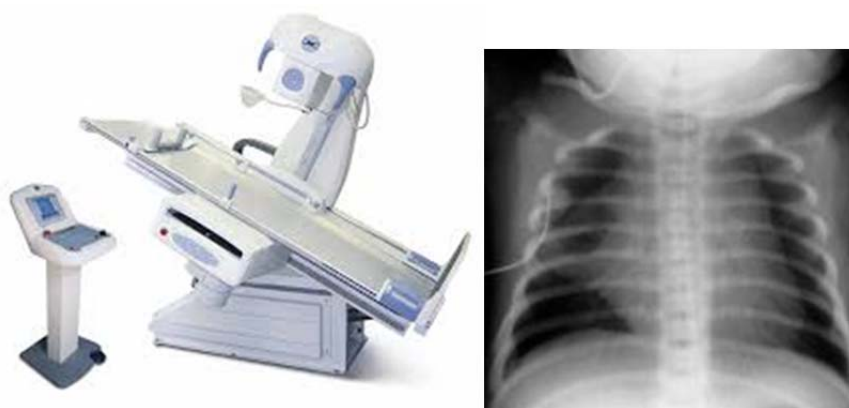


Figura 1-1

A la izquierda un fluoroscopio, y a la derecha una imagen tomada con el equipo

Para conseguir este tipo de imágenes, el equipo debe generar rayos X pero la fuente ha de entregar muy poca potencia comparado con el modo de radiodiagnóstico para limitar al máximo la exposición del paciente a los rayos X. Los rangos típicos de funcionamiento de una fuente de un equipo de este tipo, se puede ver en la Figura 1-2.

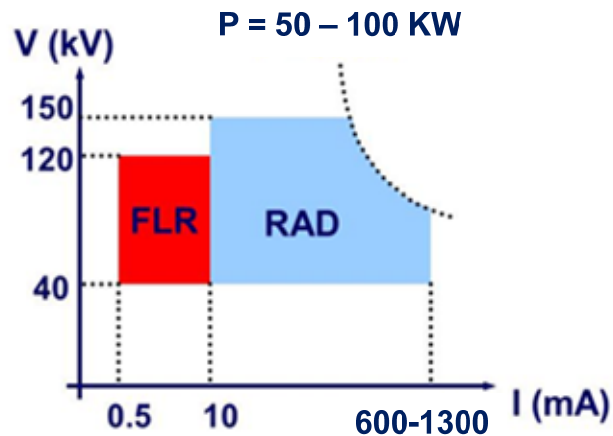


Figura 1-2

Zonas de funcionamiento de un equipo de radiodiagnóstico con modo de fluoroscopia

Las etapas de diseño de una fuente de alimentación de alta tensión de este tipo, se pueden ver en la Figura 1-3.

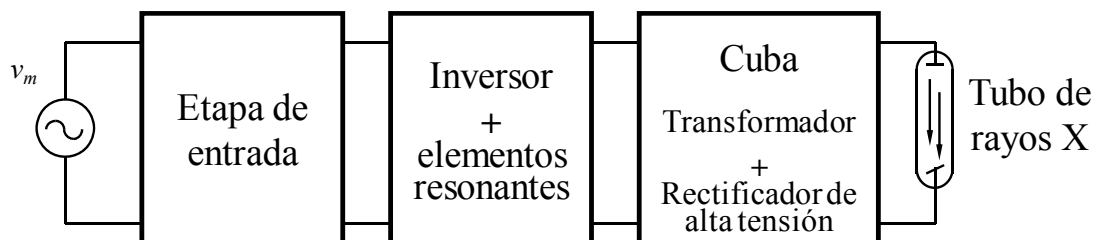


Figura 1-3

Etapas típicas de una fuente de alta tensión

En este tipo de convertidores [1-4], se generan elevadas tensiones de salida con rangos de potencia que también llegan a ser muy elevados. Teniendo esto en cuenta, el diseñador tiene que dimensionar el convertidor completo para ser capaz de dar la máxima potencia de funcionamiento. La consecuencia directa es que el sistema queda claramente sobredimensionado cuando entra en un modo de funcionamiento en el que se necesitan potencias mucho más bajas que la que fueron usadas para el diseño, pero todavía son necesarias altas tensiones de salida. Además existen corrientes elevadas en el tanque resonante incluso a potencias muy bajas necesarias para mantener los niveles de tensión de salida, lo que redundaría en un calentamiento y estrés de los dispositivos de conmutación importantes.

Además, un diseño de estas características se optimiza para una entrada de tensión mínima, como puede ser la tensión rectificada de una red trifásica [5]. Un problema adicional radica en que cuando se producen variaciones de esta tensión, las corrientes se ven muy influenciadas, aumentando su valor rápidamente, y teniendo que ser tenidas en cuenta en todo caso por el diseñador para no dañar los componentes de conmutación. Esto implica un sobredimensionado adicional de dichos componentes, con su asociado sobrecoste adicional.

Por tanto, lo que se pretende en esta tesis es obtener una solución que permita la versatilidad de una fuente que pueda trabajar en los rangos de potencias y tensiones especificados en la Figura 1-2 pero que pueda solventar en cierta medida el problema de las variaciones de tensión a la entrada del sistema, y las elevadas corrientes que circulan en funcionamiento a bajas potencias. En los siguientes epígrafes se propone una topología que intenta solucionar estos problemas.

1.2 Topologías Multinivel

Las topologías multinivel presentan grandes ventajas comparadas con las topologías de convertidores clásicas. Estas ventajas se centran fundamentalmente en la calidad de la señal de salida, y el aumento de la potencia nominal del convertidor. Estas propiedades hacen de los convertidores multinivel muy atractivos en la industria hoy en día, e investigadores en todo el mundo ponen gran empeño intentando mejorar la eficiencia de estas topologías multinivel, así como la simplificación y optimización en los algoritmos de control de las señales de salida, los rizados de las corrientes de carga...

Existen multitud de topologías multinivel [6-11] generalizadas ampliamente en el campo de la electrónica de potencia. De entre todas ellas, se pueden destacar por su gran uso las siguientes:

- Diode-Clamped Converter (DCC)
- Flying Capacitor Converter (FCC)
- Cascaded Converter

De esta lista, vamos a centrarnos en la última por ser la topología usada en nuestro desarrollo.

1.2.1 Cascaded Converter

Una de las principales características de esta topología se encuentra en que diferentes niveles de tensión a la entrada se pueden aplicar de manera que se obtienen diferentes niveles de tensión en la salida. Un diseño típico de dos celdas se muestra en la Figura 1-4.

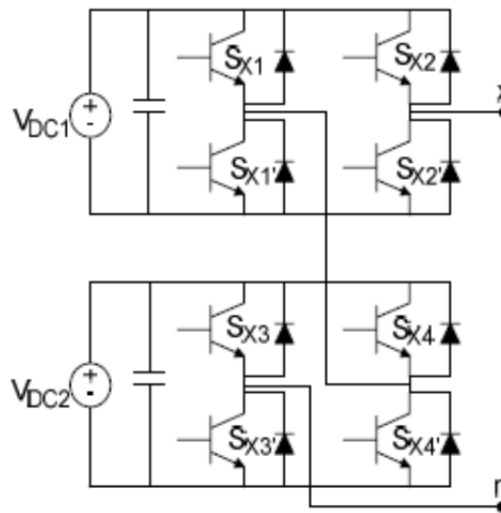


Figura 1-4

Topología típica de un convertidor en cascada de dos celdas

Esta topología tiene una serie de ventajas que se enumeran a continuación:

- Es una topología basada en celdas conectadas unas a otras. Así que su modularidad es importante ya que el controlador puede ser distribuido. Esto hace que la estructura de control sea más sencilla que para otras topologías.
- Existen en el mercado productos finales con esta topología de varias compañías de renombre como ABB o Semikron, por lo que el coste de usar este tipo de convertidores es más bajo comparado con otras topologías que han de ser construidas a mano.

Como puntos negativos tenemos que es una topología que no se aplica a bajas potencias, ya que es necesario suministrar fuentes de tensión aisladas para cada convertidor en puente completo.

Un ejemplo de cómo aplicar esta topología, y el resultado de la tensión de salida se muestra en la Figura 1-5.

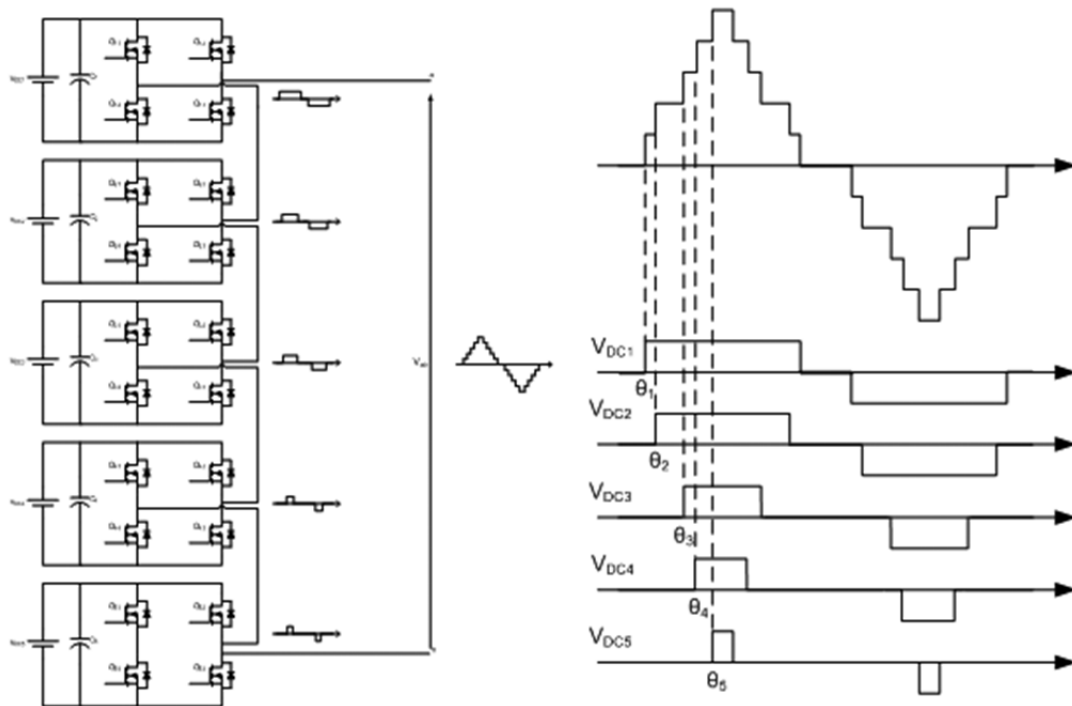


Figura 1-5

Ejemplo de una topología en cascada de 11 niveles y la tensión de salida generada

1.3 Topología propuesta

La topología que hemos elegido se basa en la topología PRC-LCC ampliamente estudiada en [12] por considerar que es una topología que se adapta bien a los rangos de tensión y potencia que se desean obtener.

Sin embargo, con el fin de mejorar esta topología, se ha aplicado las técnicas de multinivel, obteniendo una topología como la mostrada en la Figura 1-6.

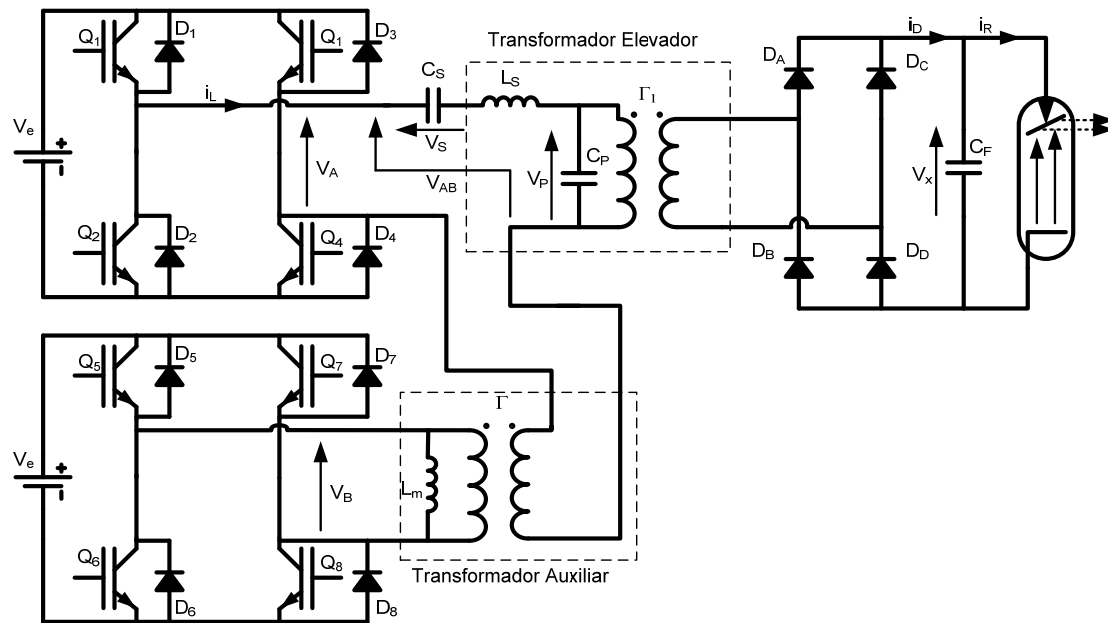


Figura 1-6

Topología multinivel propuesta

Como se aprecia en la figura, se ha añadido una segunda celda en serie con el inversor principal, y se ha aislado su tensión de salida mediante un transformador auxiliar ya que este proporcionará una alta inductancia magnetizante que modificará el circuito resonante como veremos más adelante.

Al introducir un puente adicional la tensión de entrada al tanque resonante se eleva (comparada con un único puente) por lo que el diseño del sistema se puede hacer para una mayor tensión de entrada comparada con la que se han de utilizar si solo tenemos un puente.

La inclusión de esta nueva celda multinivel al circuito permite incluir un nuevo nivel de tensión a la salida del inversor [13], por lo que se obtiene un nuevo grado de libertad que llamaremos ciclo de trabajo auxiliar τ_2 .

La ventaja de esto es que ante variaciones de la tensión de entrada, basta con modificar el ciclo de trabajo auxiliar para mantener el primer armónico cercano a la tensión de entrada de diseño haciendo así el sistema inmune a fluctuaciones en dicha tensión, mientras que en un diseño tradicional de un solo puente, al aumentar la tensión continua

a la entrada conlleva inevitablemente a una elevación de las corrientes circulantes por el convertidor.

Otra ventaja es que al tener un diseño para una tensión de entrada mayor, no son necesarias corrientes tan elevadas como las necesarias en un diseño de un solo puente para poder trabajar en rangos de máxima potencia.

Vamos a ilustrar con un ejemplo las variaciones de corriente que se producen comparando un diseño tradicional con la topología propuesta.

Para ello, tendremos en cuenta una fuente de alimentación que tiene que trabajar en los rangos especificados en Figura 1-2:

- Tensión de salida 50-150kV
- Potencia de salida 1-100kW
- Frecuencia de mínima de 50kHz

Para un diseño tradicional, ha de diseñarse para una tensión de entrada de 400V. El diseño óptimo para un inversor de estas características es el siguiente:

$$C_s=950nF \quad C_p=630nF \quad L_s=10\mu H$$

Los resultados obtenidos respecto a corrientes resonantes para máxima tensión de salida y máxima potencia en simulaciones se pueden ver en la siguiente tabla:

Tensión de entrada V_e	Tensión de salida V_s	Potencia de salida P_s	Corriente resonante i_L	Frecuencia de trabajo f
400V	150kV	100kW	498A	77046Hz
500V	150kV	100kW	506A	78682Hz
600V	150kV	100kW	511A	79856Hz
750V	150kV	100kW	518A	81215Hz

Con la nueva topología propuesta ya no es necesario realizar el diseño para 400V ya que ahora, disponemos de las dos tensiones de los dos inversores y como veremos, podemos

obtener el valor del armónico de la tensión de salida del inversor en un valor que se desee entre 400 y 800V. Por ejemplo, para una tensión de salida del inversor de 750V tenemos el siguiente diseño óptimo:

$$C_s=270nF \quad C_p=180nF \quad L_s=38\mu H$$

Los resultados de corriente resonante se pueden consultar en la siguiente table:

Tensión de entrada V_e	Tensión de salida V_s	Potencia de salida P_s	Corriente resonante i_L	Frecuencia de trabajo f
400V	150kV	100kW	220A	65673Hz
500V	150kV	100kW	224A	68747Hz
600V	150kV	100kW	227A	70700Hz
750V	150kV	100kW	230A	72903Hz

Comparando ambas tablas, se concluye que la corriente circulante por el circuito resonante se reduce a la mitad, e incluso permite trabajar en frecuencias más bajas permitiendo de esta forma elegir dispositivos de potencia más pequeños, y con menor riesgo a sobrecalentamientos. En la siguiente figura, se comparan los resultados entre el diseño tradicional y la topología multinivel:

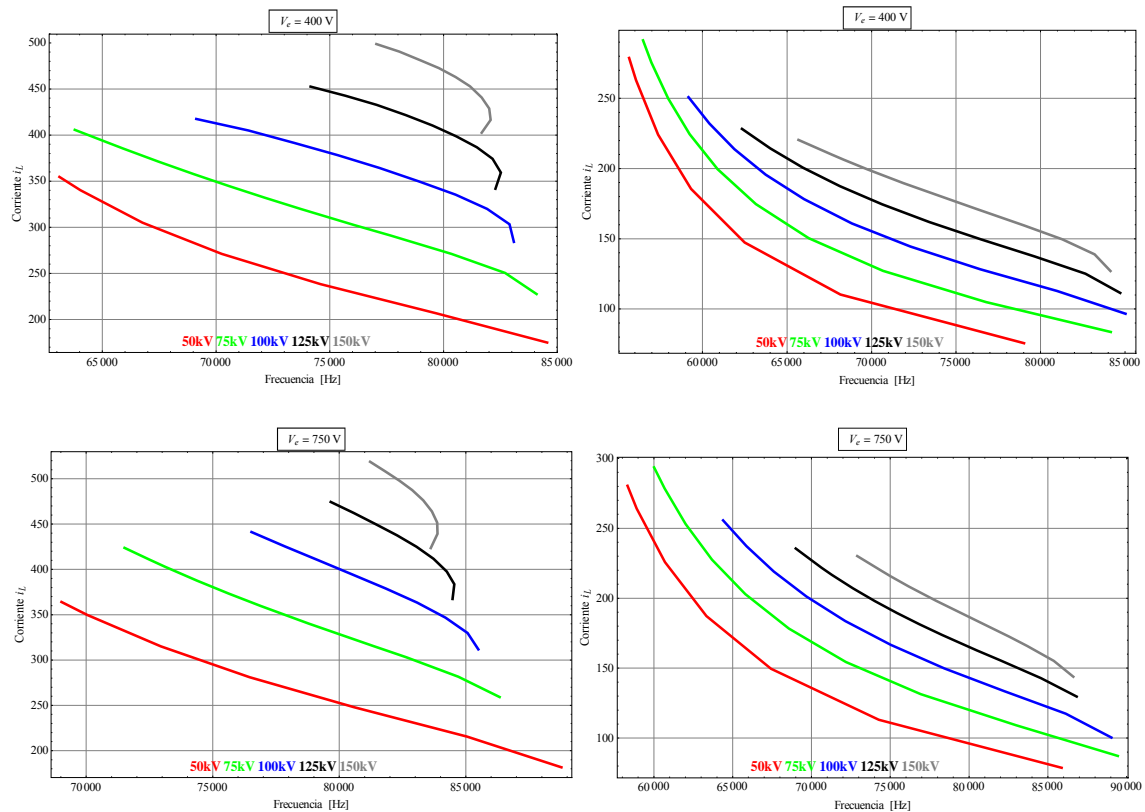


Figura 1-7

Comparación de las corrientes resonantes para diversos puntos de trabajo entre un diseño tradicional (derecha) y la topología multinivel (izquierda)

1.3.1 Formas de onda en el inversor

Gracias a la inclusión de la rama multinivel, se obtiene un ciclo de trabajo auxiliar que permite obtener infinitas formas de onda a la salida del inversor. En la Figura 1-8 se muestran una serie de ejemplos de formas de onda que pueden obtenerse variando el valor de este ciclo de trabajo.

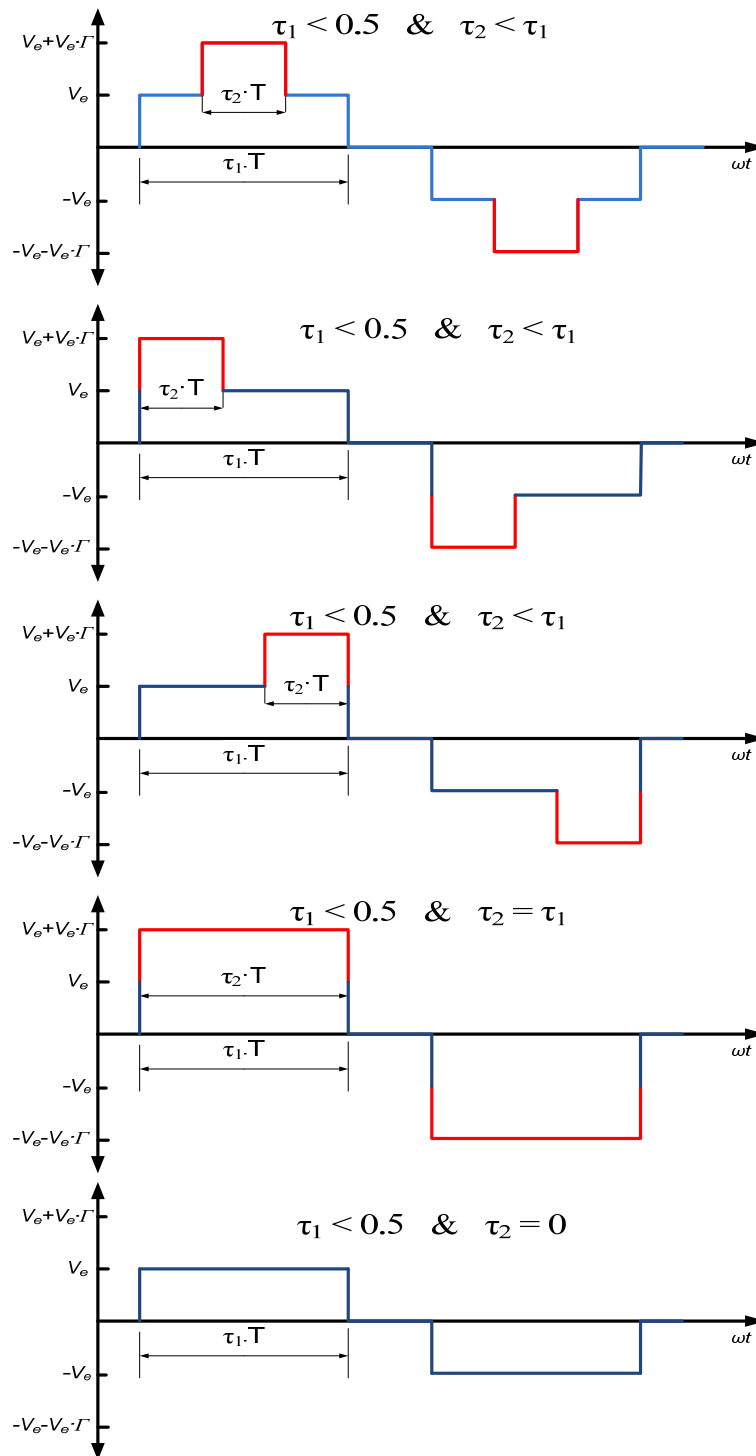


Figura 1-8

Formas de onda para distintos valores del ciclo de trabajo auxiliar

De todas estas formas de onda, estudiaremos las dos primeras por tener características especiales como se verá posteriormente, aparte de la última de ellas por ser el modo en el que funcionará en modo fluroscopía. La primera de ellas la llamaremos *señal simétrica*, por ser simétrica en cada semiciclo, la segunda la llamaremos *señal asimétrica*, y la última la llamaremos *señal en modo fluoroscopia*. A continuación se describen brevemente estos tres tipos de señales.

1.3.1.1 Señal simétrica

La señal simétrica se caracteriza por tener cada semiciclo simétrico respecto a un eje perpendicular. Para conseguir esta forma de onda, los disparos de los interruptores de la rama del inversor auxiliar han de retrasarse desde el inicio de la señal principal una cantidad igual a $\frac{T}{2}(\tau_1 - \tau_2)$

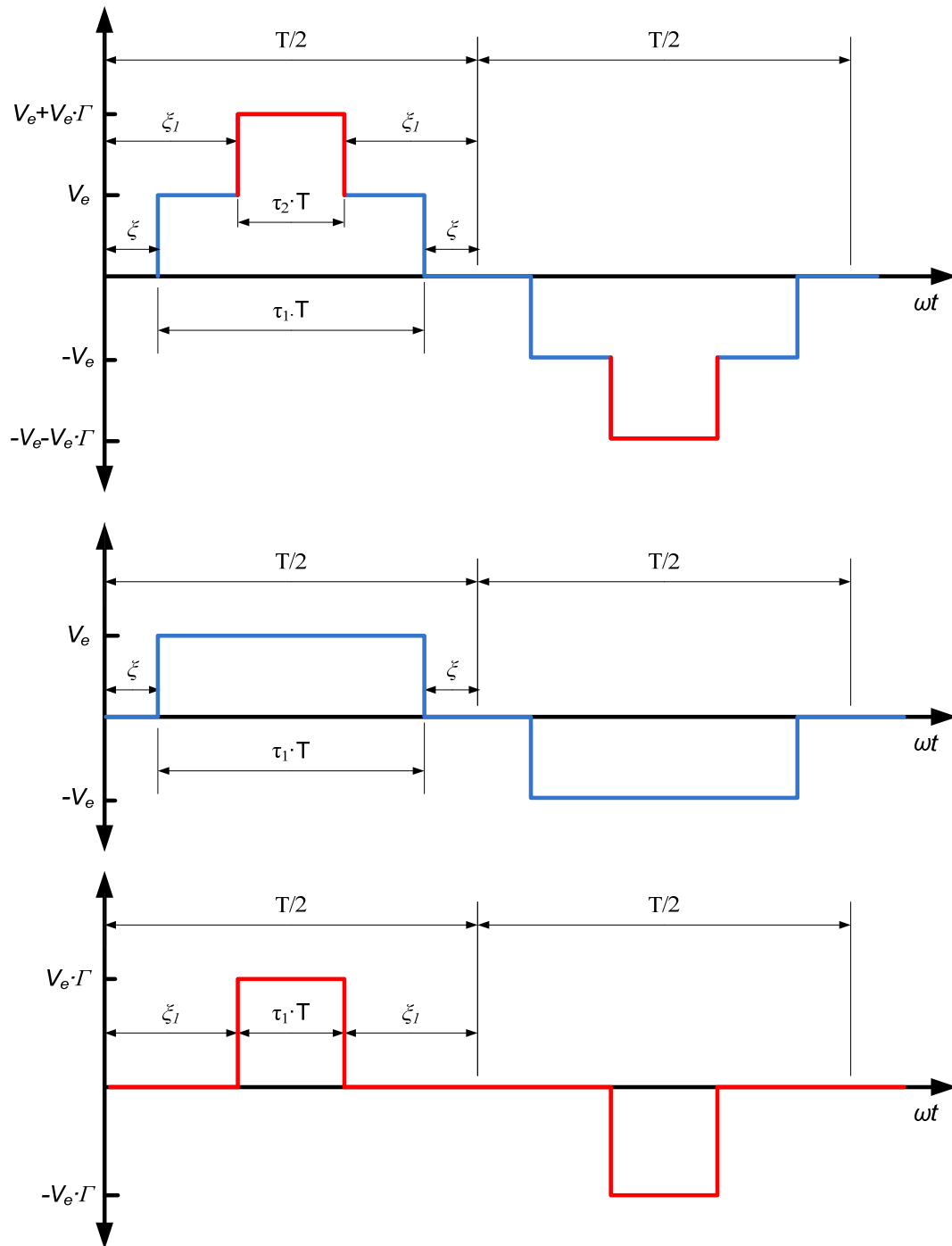


Figura 1-9

Forma de onda simétrica resultado de la composición de las tensiones de cada uno de los inversores

En la siguiente figura se representan los intervalos de disparo de los interruptores para conseguir una forma de onda simétrica.

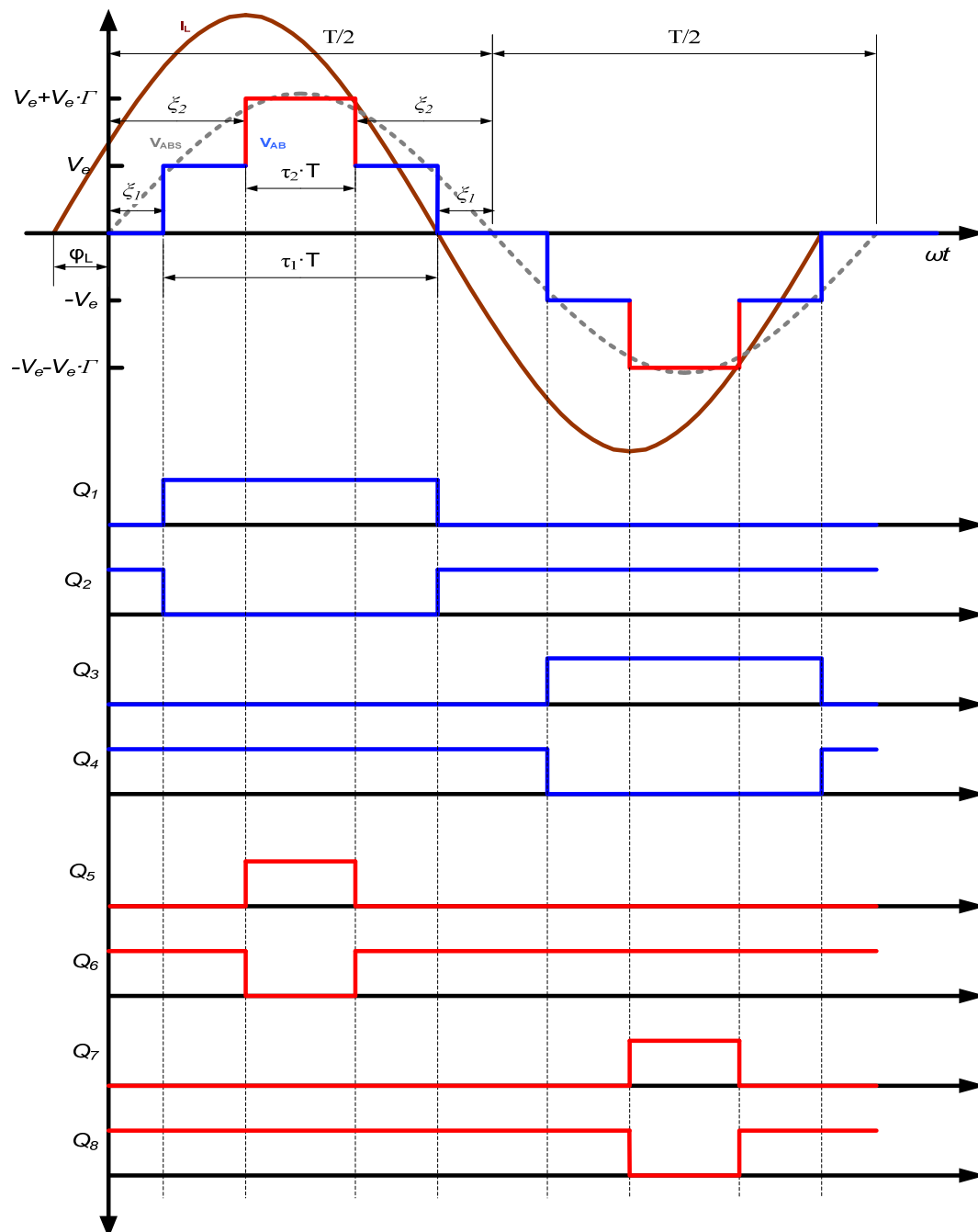


Figura 1-10

Disparos de los interruptores para obtener la señal simétrica

1.3.1.2 Señal asimétrica

La señal asimétrica se caracteriza por tener una forma de onda que no es simétrica respecto un eje perpendicular en cada semiciclo. En los capítulos posteriores se estudiará en mayor profundidad este tipo de forma de onda por ser más compleja que la onda simétrica.

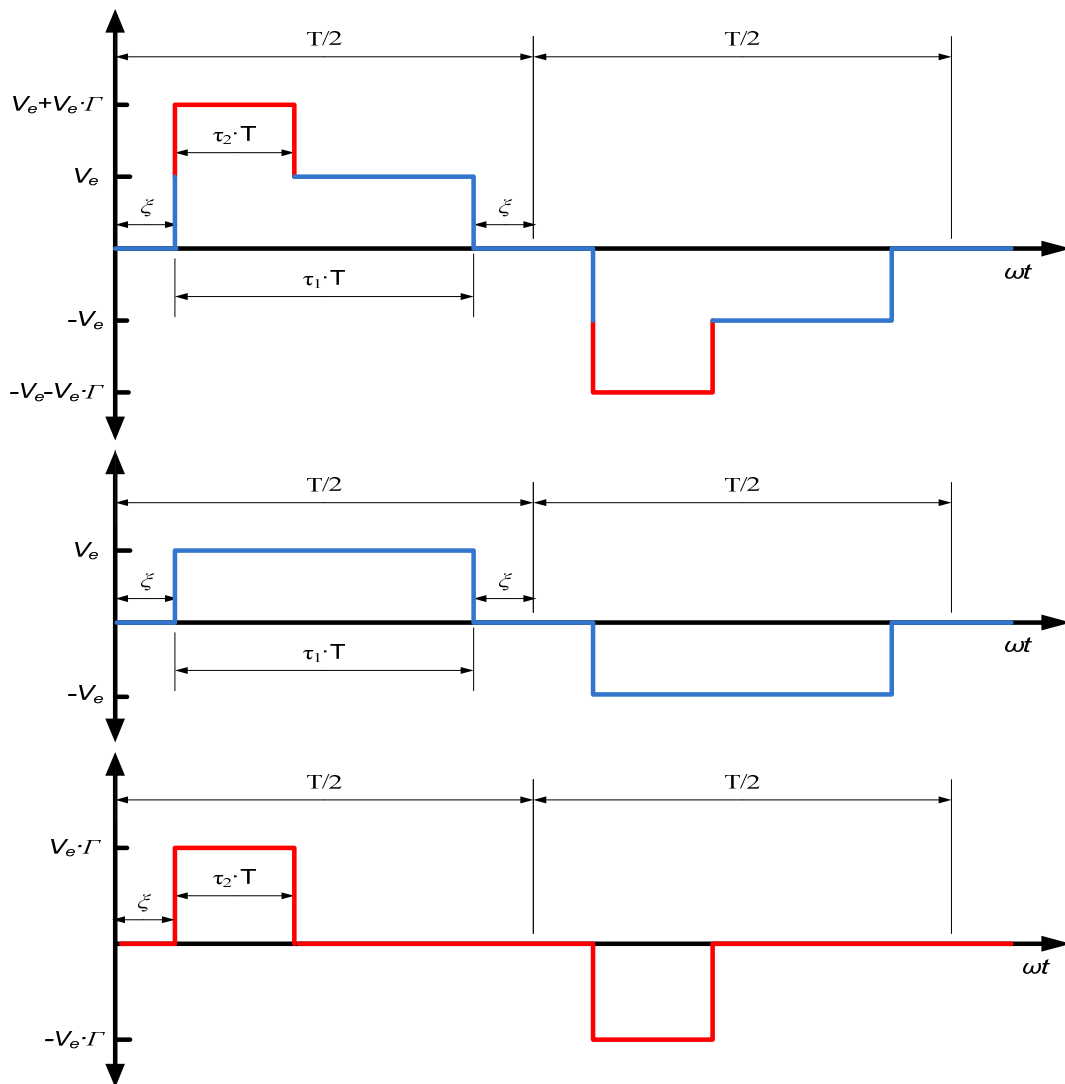


Figura 1-11

Forma de onda simétrica resultado de la composición de las tensiones de cada uno de los inversores

Disparos de los interruptores para obtener la señal simétrica

1.3.2 Zona óptima

Queda claro que en un inversor resonante como el propuesto en este estudio, tiene varios parámetros de entrada que permiten seleccionar casi infinitos puntos de trabajo en el convertidor. Estos parámetros son la frecuencia, y los ciclos de trabajo principal y auxiliar. Aunque también tenemos como parámetros de entrada la tensión de entrada al inversor, y la relación de transformación del transformador auxiliar, éstas vamos a considerar que permanecen constantes.

Queda claro entonces que variando los ciclos de trabajo tal y como se comentó en los epígrafes anteriores, podemos obtener diversas formas de onda a la salida del inversor. La cuestión es si hay algún punto más ventajoso que otro a la hora de funcionar un convertidor de este tipo en base a rendimiento, pérdidas, etc.

Pues bien, como se verá en capítulos posteriores, la señal de salida de los inversores $V_{AB}(t)$ se aproximará por su armónico fundamental como fruto de aplicar la función descriptora para el estudio del circuito por lo que tendrá una forma de tipo senoidal. Esto implica que la corriente que circulará por el circuito también tendrá una forma senoidal, y habrá un cierto desfase entre dichas señales.

Variando los parámetros mencionados f , τ_1 , τ_2 podemos obtener una situación para una señal asimétrica como el caso de la Figura 1-13. De todos los puntos de trabajo posibles, éste representa aquel en el que la corriente resonante pasa por 0 en el punto en el que empiezan a conducir los interruptores de los inversores [14]. En la Figura 1-14 vemos el caso para la señal simétrica.

Se define así la zona óptima, aquella en la que la corriente resonante tiene un desfase ligeramente inductivo con respecto a la tensión de entrada. Esta situación tiene la gran ventaja de minimizar la energía circulante por el convertidor, ya que el producto de dichas magnitudes (corriente resonante y tensión de entrada) no experimenta valores negativos en ningún punto del ciclo, por lo que nunca se produce devolución de energía a la red.

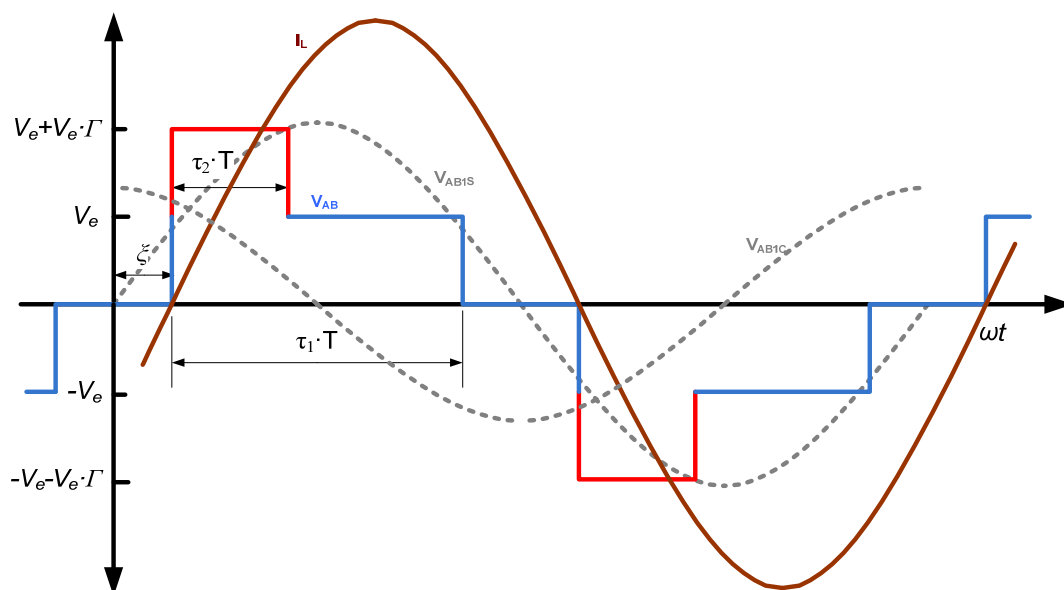


Figura 1-13

Inversor con señal asimétrica trabajando en zona óptima

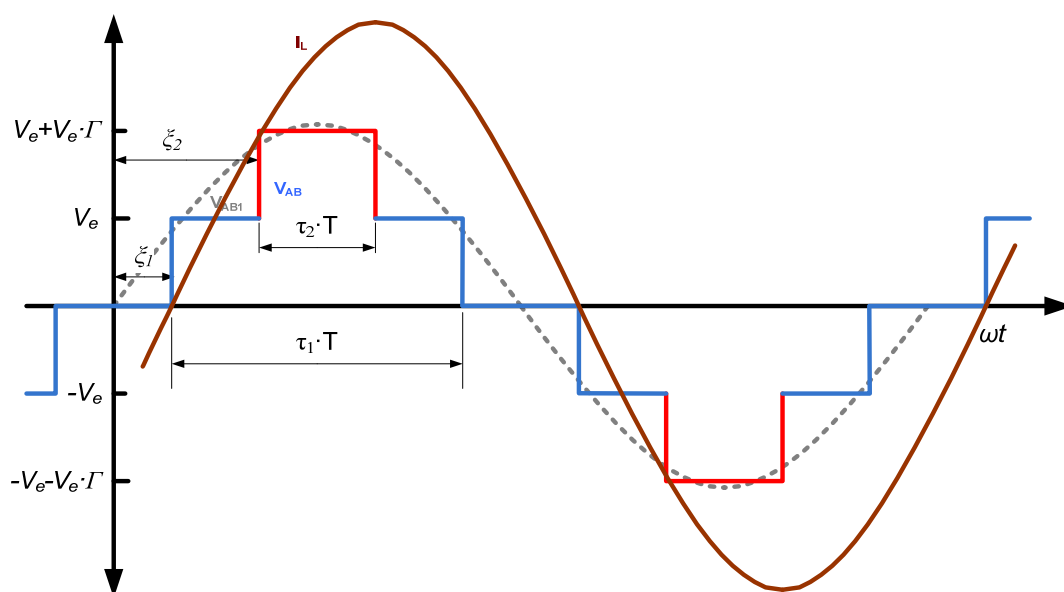


Figura 1-14

Inversor con señal simétrica trabajando en zona óptima

Otra gran ventaja es poder conseguir buenas conmutaciones en los interruptores pues los ciclos de apertura y cierre se producen con valores muy pequeños de corriente y tensión. Basándonos en esta idea, y comparando la Figura 1-13 y Figura 1-14, se puede intuir que es más conveniente la señal asimétrica por tener la conmutación de los dos inversores al mismo tiempo. En la señal asimétrica, la conmutación de los dos inversores se produce en momentos distintos, y en concreto cuando conmuta el inversor auxiliar, tenemos valores positivos de corriente circulando por el inversor, lo que hace que se produzcan mayores esfuerzos en los interruptores y por tanto, mayores pérdidas debido a este efecto. Sin embargo como se verá en capítulos posteriores, la señal simétrica tiene nulos los armónicos de orden impar, lo que simplifica enormemente la formulación matemática del modelo.

1.3.3 Señal en modo fluoroscopia

En las topologías tradicionales el diseño de la topología se establece para ser capaz de dar la máxima potencia requerida en el modo de radiodiagnóstico, lo que implica diseñar el tanque resonante acorde con los valores máximos. Esto implica que cuando se pasa a trabajar en modo fluoroscopia no se puede variar el diseño del tanque, por lo que las corrientes se mantienen en valores muy elevados.

Este modo de trabajo, se consigue desconectando la rama auxiliar multinivel del sistema, lo que equivale a fijar el ciclo de trabajo a 0.

Al dejar de proporcionar señales a los transistores del puente auxiliar la bobina magnetizante del transformador auxiliar se suma a la de dispersión del transformador principal por lo que se aumenta el tanque resonante y se reduce la capacidad de dar potencia, lo que conlleva a una reducción de las corrientes por el puente principal.

Por tanto, la señal en este modo es una señal cuadrada similar a la señal simétrica, pero eliminando la parte influenciada por el inversor auxiliar. En la siguiente figura se representa su forma, así como la lógica de disparo de los elementos de conmutación del inversor.

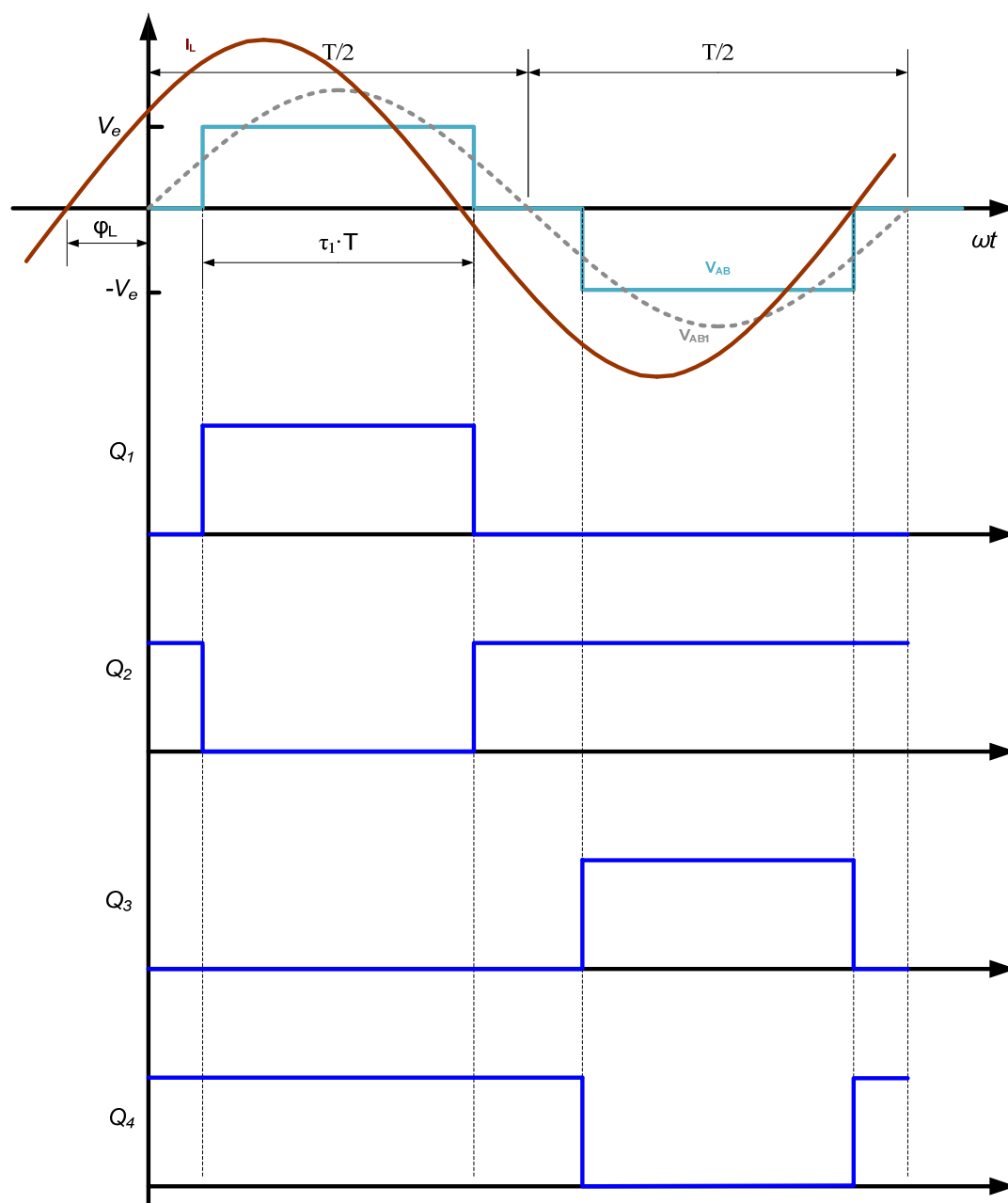


Figura 1-15

Señal en modo fluoroscopia

Volviendo al ejemplo de epígrafe 1.3 vamos a exponer algunos resultados para comparar las corrientes resonantes entre el diseño tradicional y la topología multinivel.

Los requerimientos para el funcionamiento en fluoroscopia son los siguientes:

- Tensión de salida 50-120kV
- Potencia de salida 1.2kW max.

Para el diseño tradicional, los componentes reactivos no van a cambiar. En modo fluoroscopia, la potencia de salida es mucho más baja que en modo de radiodiagnóstico. Los resultados los podemos ver en la siguiente tabla:

Tensión de entrada V_e	Tensión de salida V_s	Potencia de salida P_s	Corriente resonante i_L	Frecuencia de trabajo f
400V	120kV	1200W	309A	80582Hz
750V	120kV	1200W	310A	81149Hz

Para el caso de la topología multinivel propuesta trabajando en fluoroscopia, la inductancia magnetizante del transformador auxiliar pasa a formar parte de la inductancia total del sistema. Por ejemplo, para una inductancia magnetizante $L_m=50\mu H$ los resultados se pueden consultar en la siguiente tabla:

Tensión de entrada V_e	Tensión de salida V_s	Potencia de salida P_s	Corriente resonante i_L	Frecuencia de trabajo f
400V	120kV	1200W	60A	53760Hz
750V	120kV	1200W	61A	54565Hz

Al igual que en el modo de radiodiagnóstico, se observa una fuerte reducción de la corriente resonante. En el diseño tradicional se han de mantener los valores altos de corriente para poder proporcionar la tensión de salida requerida aun en baja potencia de salida. Esto es especialmente importante en este modo, ya que se pueden requerir periodos largos de funcionamiento, lo que implica sobrecalentamientos en caso de

corrientes elevadas que pueden dañar el sistema. En el caso de la topología multinivel, se modifica la inductancia total del sistema, lo que permite dar la potencia requerida con menores corrientes resonantes y a unas frecuencias mucho más bajas que el diseño tradicional.

1.4 Ventajas de la topología multinivel

La topología multinivel propuesta en esta Tesis, supone una mejora con respecto a la topología PRC-LCC tradicional en el caso de trabajar con rangos de potencia muy diferentes. Como se podrá comprobar en el siguiente capítulo, los circuitos equivalentes del modo de radiodiagnóstico y modo fluoroscopia del sistema multinivel son los representados en la Figura 1-16.

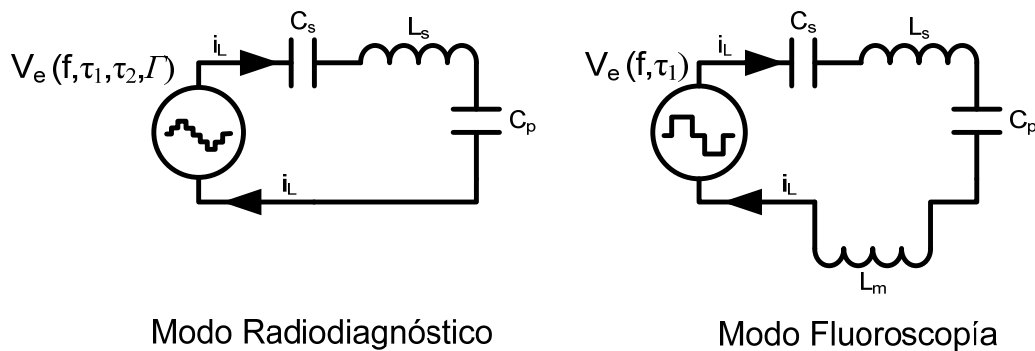


Figura 1-16

Circuitos equivalentes de la topología multinivel en los dos modos de funcionamiento del convertidor

Las ventajas con respecto a una topología PRC-LCC tradicional como la descrita en [8] son las siguientes:

- En un análisis del circuito equivalente en modo de radiodiagnóstico, tenemos una fuente de alimentación con señal simétrica o asimétrica que genera la tensión que se aplica en el convertidor. Esto implica que mediante un control adecuado del ciclo de trabajo auxiliar se puede conseguir un sistema que sea independiente de las fluctuaciones de la tensión de red a la que esté conectada la

fuelle, no condicionando así el dimensionado del convertidor en base a los valores más desfavorables de dichas fluctuaciones. En la topología PRC-LCC, al tener un solo puente inversor, hace que sea muy sensible a estas fluctuaciones, por lo que el dimensionado del sistema sí que está condicionado al punto más desfavorable de tensión de entrada, lo que implica que en una sobretensión en dicha tensión, el sistema se ve seriamente perjudicado por el aumento notable de las corrientes circulantes.

- Al poder realizar el diseño a tensiones de entrada mayores que en una topología tradicional, se pueden alcanzar los rangos de potencia requeridos con menores corrientes circulantes, lo que repercutirá directamente en los elementos de conmutación.
- En el análisis del circuito equivalente en el modo fluoroscopia, vemos que el transformador auxiliar se puede diseñar para que su inductancia magnetizante tenga un valor que pueda interesarnos en el diseño. De esta manera, interesa tener una inductancia grande, pues implica que la inductancia total del sistema crece acorde con este valor ($L_s + L_m$). Esto implica que la corriente en el tanque resonante se reduce drásticamente (es función del valor de L_m) aun manteniendo los valores de salida deseados; en la topología tradicional, al tener el diseño fijado para el modo de trabajo de radiodiagnóstico, cuando se desea trabajar en rangos de potencia de fluoroscopia se obtienen corrientes resonantes similares a las que se tienen en el modo de radiodiagnóstico las cuales son muy elevadas pero con la desventaja ahora, de que en este modo de funcionamiento, el convertidor con seguridad estará funcionando un tiempo mucho más largo que en el modo de radiodiagnóstico, lo que implica un desgaste y calentamiento de los elementos de conmutación importantes. Por tanto, si se reducen esas corrientes en el modo de fluoroscopia la ventaja es evidente.

1.5 Conclusiones

Durante el desarrollo de estos epígrafes, hemos expuesto una topología multinivel basada en un convertidor resonante paralelo con condensador de filtro. Hemos expuesto

las ventajas de aplicar técnicas de multinivel a una topología como ésta, y hemos visto que podemos aumentar los grados de libertad del sistema con cada rama adicional que se incluya. En este caso, hemos aumentado el grado de libertad en uno, con la inclusión del ciclo de trabajo auxiliar lo que nos va a permitir obtener una serie de ventajas con respecto a los diseños de topologías tradicionales:

- Con la inclusión de la nueva celda, se varía el nivel de tensión de entrada al sistema, lo que nos permite diseñar la topología para tensiones de entrada más altas con una consecuente reducción en las corrientes circulantes. Además nos permite mantener el valor de tensión de entrada de diseño ante fluctuaciones de ésta con sólo variar el ciclo de trabajo.
- En el momento en el que dejamos de alimentar la nueva rama inversora, la inductancia del transformador magnetizante se suma a la inductancia de dispersión del transformador principal, lo que redundará en una menor capacidad de dar potencia, y por tanto, unas corrientes circulantes menores, lo que benefician de manera importante en los elementos de conmutación.
- El juego con el inicio del ciclo auxiliar, permite obtener varias formas de onda a la salida de la etapa inversora.

Hemos visto las formas de onda más típicas que se pueden obtener variando el ciclo de trabajo, y de todas ellas nos hemos fijado en dos de ellas que son la señal simétrica y la señal asimétrica.

A continuación hemos comentado brevemente el modo de funcionamiento en zona óptima y hemos expuesto algunas ventajas e inconvenientes de elegir una señal simétrica o una asimétrica.

Por último, hemos comparado las ventajas obtenidas con la topología multinivel en contraste con un diseño tradicional como la topología PRC-LCC.

En el próximo capítulo obtendremos el modelado matemático de dicha topología, obteniendo la aproximación de las señales simétrica y asimétrica en el inversor para que el diseñador pueda utilizar una u otra.

1.6 Bibliografía

- [1] *J.A. Sabaté, M.M. Jovanovic, F.C. Lee, R.T. Gean.* “Analysis and Design-Optimization of LCC Resonant Inverter for High-Frequency AC Distributed Power System”. IEEE Trans. On Industrial Electronics, vol. 42 n°1 pag. 63-71, Febrero 1995.
- [2] *R. Casanueva, C. Brañas, F.J. Azcondo, F.J. Díaz,* “Teaching resonant converters: Properties and applications for variable loads” IEEE Trans. On Industrial Electronics Vol. 57 n°10, pp 3355-3363, Oct 2010.
- [3] *Cho, K.A.; Ahn, S.H.; Ok, S.B.; Ryoo, H.J.; Jang, S.R.; Rim, G.H.,* “Design of LCC resonant converter for renewable energy systems with wide-range input voltage”, Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC), 2012 7th International, vol.2, pp.1221,1228, June 2012.
- [4] *Demetriades, G.D.; Ranstad, P.; Sadarangari, C.,* “Three elements resonant converter: the LCC topology by using MATLAB”, Power Electronics Specialists Conference, vol.2, pp.1077-1083, 2000.
- [5] *Martin-Ramos, J.A.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Nuño, F.; Martinez, J.A.,* “Power Supply for a High-Voltage Application”, Power Electronics, IEEE Transactions, vol.23, n°.4, pp.1608,1619, July 2008.
- [6] *J.I. León,* “Multilevel Converters: Topologies, Modelling, Space Vector Modulation Techniques and Optimisations”, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 2006.
- [7] *Jagdish Kumar,* “THD Analysis for Different Levels of Cascade Multilevel Inverters for Industrial Applications”, International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, Volume 2, Issue 10, October 2012.
- [8] *Zeng, R.; Xu, L.; Yao, L.; Williams, B.W.,* “Design and Operation of a Hybrid Modular Multilevel Converter”, Power Electronics, IEEE Transactions, vol.30, n°3, pp.1137-1146, March 2015.

-
- [9] *Kenzelmann, S.; Rufer, A.; Dujic, D.; Canales, F.; de Novaes, Y.R.*, “Isolated DC/DC Structure Based on Modular Multilevel Converter”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.30, nº.1, pp.89,98, Jan. 2015.
- [10] *Goetz, S.M.; Peterchev, A.V.; Weyh, T.*, “Modular Multilevel Converter with Series and Parallel Module Connectivity: Topology and Control”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.30, nº.1, pp.203-215, Jan. 2015.
- [11] *Debnath, S.; Jiangchao Qin; Bahrani, B.; Saeedifard, M.; Barbosa, P.*, “Operation, Control, and Applications of the Modular Multilevel Converter: A Review”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.30, nº.1, pp.37,53, Jan. 2015.
- [12] *Juan A. Martín*. “Aportación al diseño de convertidores continua-continua para alta tensión de salida basados en la topología resonante PRC-LCC”. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 2001.
- [13] *Nami, A.; Jiaqi Liang; Dijkhuizen, F.; Demetriades, G.D.*, “Modular Multilevel Converters for HVDC Applications: Review on Converter Cells and Functionalities”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.30, nº.1, pp.18-36, Jan. 2015.
- [14] *Martin-Ramos, J.A.; Villegas Saiz, P.J.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Martinez, J.A.*, “Optimal Control of a High-Voltage Power Supply Based on the PRC-LCC Topology With a Capacitor as Output Filter”, *Industry Applications, IEEE Transactions*, vol. 49, nº5, pp.2323-2329, Sept.-Oct. 2013.

MODELADO MATEMÁTICO DE LA TOPOLOGÍA MULTINIVEL.

En el presente capítulo se desarrolla un modelo matemático, en gran señal, de la topología multinivel propuesta usando para ello las teorías de modelado promediado generalizado en el espacio de estados y de la función descriptora generalizada.

A continuación se analizan las formas de onda de un convertidor genérico basado en esta topología y se desarrollan una serie de simplificaciones que derivan en una formulación sencilla de la topología.

Finalmente, se generalizan un conjunto de ecuaciones diferenciales con las que será posible estudiar la evolución temporal de las variables de estado representativas del sistema

2 Modelado matemático de la topología multinivel

2.1 Introducción

El modelado se basa en la aplicación de técnicas matemáticas para la representación del comportamiento físico de un sistema. En ingeniería, esta técnica constituye un prerequisite básico en el diseño de casi todas las estrategias de control válidas para un sistema (fenómeno físico) dado. De ahí que resulte deseable que las expresiones matemáticas tengan una forma lo más simple posible, y también un sentido físico que ayude a su diseño. Sin embargo, los sistemas reales suelen ser complicados, y su análisis detallado lleva fácilmente a formulaciones realmente complejas [1-4]. Para evitar esto, lo habitual es acudir a aproximaciones en las que el modelo, aun perdiendo detalle, sigue describiendo el comportamiento preponderante del sistema físico, lo que se logra obviando fenómenos de poca importancia aunque complicados. Estas aproximaciones pueden tener un doble sentido:

- Por un lado, se puede simplificar las ecuaciones que describen cada componente del sistema. Por ejemplo, podemos fijarnos el funcionamiento de un transformador real, y por otro lado tener en cuenta un modelo simplificado del mismo muy utilizado cuando se analizan los sistemas que lo incluyen, con cualquiera de los circuitos de la Figura 2-1.

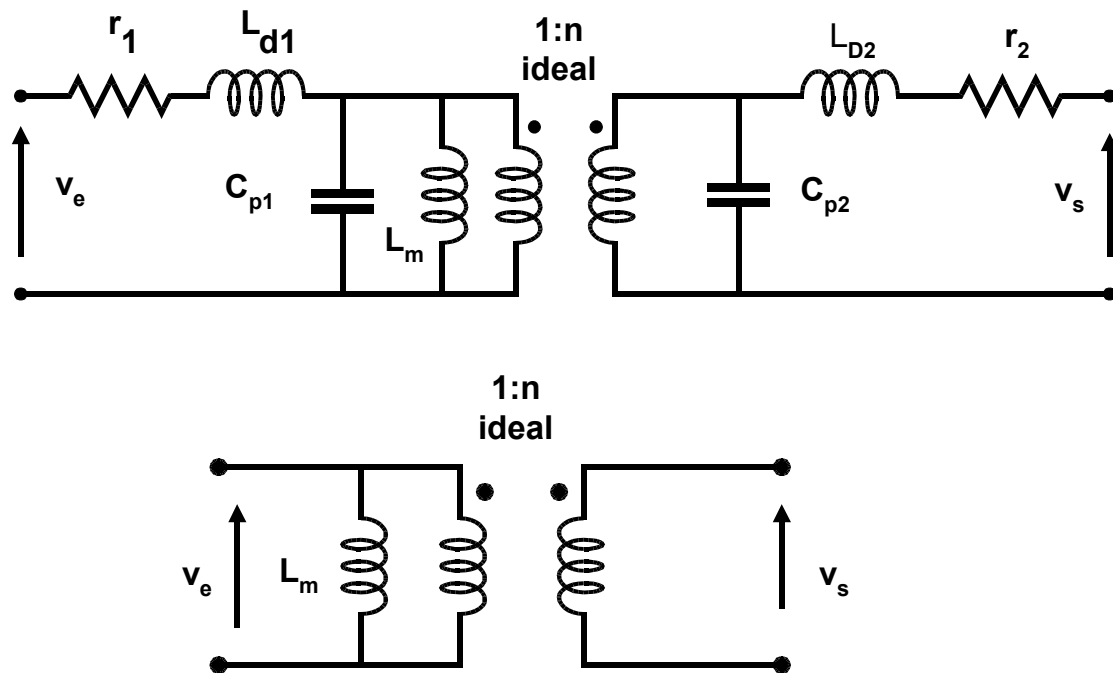


Figura 2-1

Ejemplos de circuitos simplificados para modelizar un transformador real

- Por otro, se puede simplificar la respuesta del propio sistema, despreciándose ciertos aspectos que por tanto no se modelan. Un ejemplo de esta aproximación consiste en despreciar términos armónicos de orden superior en una tensión que sigue una evolución periódica.

El estudio de convertidores conmutados ha recibido considerable atención durante los últimos 30 años. Se han desarrollado diferentes métodos de modelado matemático. De entre ellos, cabe hacer especial mención a dos de ellos, cuya aceptación ha sido ampliamente extendida: la aproximación mediante *el método de la corriente inyectada* y la aproximación mediante *el método promediado del espacio de estados* [5-8]. Ambos proporcionan, obviamente, el mismo resultado a la hora de estudiar las propiedades de transferencia de un convertidor sencillo, aunque pueda preferirse expresar el resultado final en una u otra forma. El camino elegido en este capítulo se centrará, sin embargo, en el *método promediado del espacio de estados*, porque es el más fácil de aplicar para el análisis de estructuras complejas de convertidores [5].

2.2 Método promediado en el espacio de estados

La descripción en el espacio de estados de sistemas dinámicos constituye una de las bases de la teoría de control moderna [6-7]. El método promediado del espacio de estados hace uso de esta descripción para obtener las ecuaciones promediadas de pequeña señal de convertidores conmutados con modulación del ancho de pulso (PWM). Las ventajas del método promediado en el espacio de estados residen en dos pilares:

- La generalidad de sus resultados: siempre que se pueda establecer la formulación completa del sistema a analizar, puede obtenerse un modelo promediado.
- Su mayor sencillez a la hora de analizar convertidores de estructuras más complejas.

La descripción del espacio de estados es una manera sencilla de escribir las diferentes ecuaciones diferenciales que describen un sistema. Para un comportamiento cualquiera, las derivadas de las variables de estado se expresan como combinaciones de las entradas independientes del sistema y de las propias variables de estado. Las variables de estado de un sistema suelen estar relacionadas físicamente con el almacenamiento de energía. En un circuito convertidor, las variables de estado se corresponden con las corrientes de las inductancias y las tensiones de los condensadores. De este modo, en un instante cualquiera, las variables de estado dependen de la situación previa del sistema, más que de los valores que en ese momento tengan las entradas del mismo. El modelado del sistema empieza entonces con la formulación de las ecuaciones y la identificación de las variables de estado. Para resolver estas ecuaciones diferenciales, los valores iniciales de las variables de estado cobran una gran importancia, por lo que deben ser conocidas. De este modo si se conoce el estado de un sistema, o lo que es lo mismo, los valores de las variables de estado en un instante determinado t_0 , y además se conoce la evolución de las entradas desde dicho instante t_0 , entonces, será posible resolver las ecuaciones de estado del sistema para predecir las formas de onda del mismo en cualquier instante de tiempo futuro.

Pese a todo esto, el método promediado en el espacio de estados sólo puede aplicarse a un conjunto limitado de convertidores. Una de las condiciones necesarias que deben cumplirse para que su empleo esté justificado, comprende la necesidad de un bajo valor de rizado en corrientes y tensiones, para que éste sea despreciable con respecto a los valores medios respectivos. Esta restricción conlleva que en un análisis armónico por serie de Fourier de cualquiera de las formas de onda del convertidor, el término de continua debe prevalecer sobre el resto para que este método pueda ser aplicado. Esto es así porque las variables de estado van a ser promediadas, por lo que van a ser aproximadas durante todo el periodo por su valor medio, como se aprecia en la Figura 2-2. Por tanto este método no puede ser aplicado en convertidores en los que existan rizados importantes, como ocurre en los convertidores resonantes en los que las corrientes y tensiones en los elementos reactivos son senoidales, y en algunos casos sin componente de continua prevaleciente. La razón es obvia, la información sobre la evolución de una corriente o tensión senoidal se pierde si sólo se considera su valor medio que es nulo en cualquier caso.

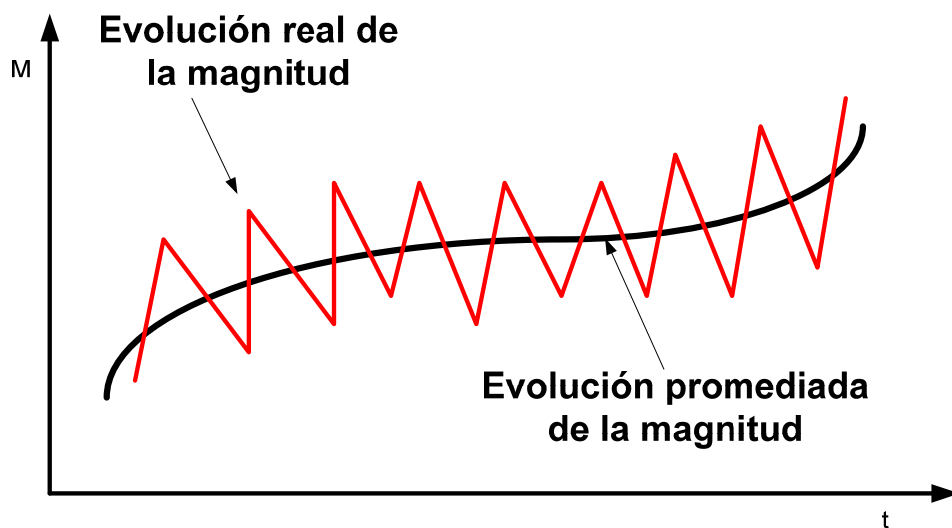


Figura 2-2

Aproximación de una magnitud de bajo rizado mediante el método de modelado promediado.

2.3 Método promediado generalizado

Para el modelado de convertidores que tengan altos rizados se han desarrollado varias técnicas alternativas como es el método de promediado generalizado en el espacio de estados [8]. Este último consiste en emplear el desarrollo en serie de Fourier para representar las evoluciones temporales de las variables de estado del circuito. Es decir, para una variable de estado determinada $x(t)$, el método utiliza como variables de estado los coeficientes del desarrollo armónico de Fourier de $x(\tau)$ con $\tau \in (t-T, t)$. El orden del modelo obtenido dependerá del número de coeficientes de Fourier considerados para aproximar la variable $x(t)$. Por ejemplo, si solamente se considera la componente de continua el modelo obtenido será el mismo que en el caso del modelo tradicional del espacio de estados promediado.

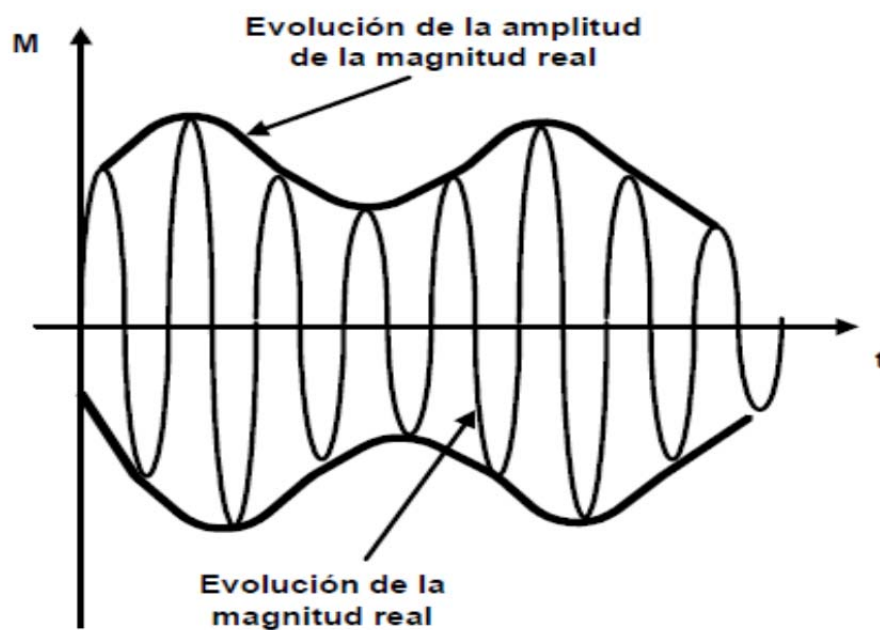


Figura 2-3

Aproximación de una magnitud senoidal por medio del método de modelado promediado generalizado.

Por otra parte, en el caso particular de convertidores con formas de onda senoidales, el coeficiente del desarrollo armónico más importante debe ser el de la frecuencia fundamental, que se corresponderá con la frecuencia de conmutación. De esta forma, cada corriente y/o tensión se verá representada en cada periodo por su primer armónico, en sus términos senoidal y cosenoidal, los cuales, expresan la amplitud y desfase de la señal correspondiente. Así, si se conocen para todas las variables de estado, las amplitudes y desfases en un instante de tiempo determinado t_0 y la evolución de las entradas a partir de dicho instante, el modelo debe poder determinar el valor de estas amplitudes y desfases en todos los momentos subsiguientes. De esta manera, el conjunto de amplitudes resultante del cálculo proporciona una estimación de la evolución temporal de la envolvente de las variables de estado, debiendo tener en cuenta que dichas variables de estado son senoides desfasadas (Figura 2-3). Es decir, en un periodo determinado, el modelo promediado generalizado en el espacio de estados renuncia a conocer el valor de las variables de estado en todos los instantes de tiempo, a cambio de obtener desfase relativo respecto al origen del periodo y su amplitud. Resulta evidente que en esto no hay pérdida significativa de información.

2.3.1 Coeficientes de Fourier

Antes de comenzar con la metodología de estudio dinámico de convertidores resonantes conviene recordar brevemente los conceptos básicos correspondientes a las series de Fourier, ya que constituyen la base del método de modelado.

La expresión (2-1) representa el desarrollo en serie de Fourier en su forma trigonométrica para señales periódicas:

$$\frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \quad (2-1)$$

Donde a_k y b_k son los coeficientes de la serie de Fourier, k es el orden de dichos coeficientes, y ω es la pulsación, relacionada con el período T de la función que será aproximada por dicho desarrollo.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2-2)$$

Supongamos que $x(t)$ es una función periódica, continua a trozos y acotada, que en un periodo tiene un número finito de máximos y mínimos locales y un número finito de discontinuidades. Entonces si se cumplen las condiciones de Dirichlet podemos asegurar que la función $x(t)$ es igual a la suma de los coeficientes de Fourier para cualquier punto en el que $x(t)$ sea continua.

Las condiciones de Dirichlet son:

- $x(t)$ debe tener un número finito de extremos en un intervalo dado.
- $x(t)$ Debe tener un número finito de discontinuidades en un intervalo dado.
- $x(t)$ debe ser integrable en un periodo completo
- $x(t)$ debe estar acotada

$$x(t) = \frac{x_{b0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [x_{ak} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + x_{bk} \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \quad (2-3)$$

En los puntos de discontinuidad, la suma de las series trigonométricas es igual a la media aritmética de los límites de la función a ambos lados.

Los coeficientes de la expresión (2-3) son calculados de la siguiente forma:

$$x_{ak} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega t) dt \quad (2-4)$$

$$x_{bk} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega t) dt \quad (2-5)$$

2.3.2 Metodología

Para aplicar el método promediado en el espacio de estados, las variables de estado han de ser aproximadas por su desarrollo en serie de Fourier según (2-3). Siendo $x(t)$ se

considerará periódica en el intervalo $(t-T, t)$, donde T es normalmente el periodo de conmutación. Sin embargo, dado que las formas de onda presentarán en general un comportamiento dinámico, la misma variable de estado será ligeramente diferente si el periodo de cálculo es desplazado una cantidad diferencial en tiempo τ . Es decir, lo que implica el análisis armónico de Fourier para la función $x(t+\tau)$ en el intervalo $(t+\tau-T, t+\tau)$ en general tendrá diferente análisis de Fourier que $x(t)$ en el intervalo $(t-T, t)$ porque la forma de onda podrá ser diferente en ambos intervalos.

Por lo tanto, se puede concluir que los coeficientes de Fourier variarán en tiempo, siendo de hecho variables con éste.

Entonces para aplicar el análisis dinámico a las variables, el periodo $(t-T, t)$ se desplaza con el tiempo, lo que implica la obtención de nuevos coeficientes de Fourier para cada variable de estado. Seleccionando un paso tan pequeño como se desee (Figura 2-4), los coeficientes de Fourier en cualquier variable de estado formarán una función que describe la evolución de la variable de estado original. Así, cualquier variable de estado original $x(t)$ se podrá transformar en una o varias series de Fourier con coeficientes dependientes del tiempo aplicando (2-3) – (2-5). De estos coeficientes es posible la reconstrucción de la evolución de las variables de estado. La precisión de la aproximación sugerida depende del número de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier elegido. Cuanto mayor sea el orden de los coeficientes considerados, mayor será la precisión obtenida, pero llevará consigo un aumento considerable en la complejidad del modelo.

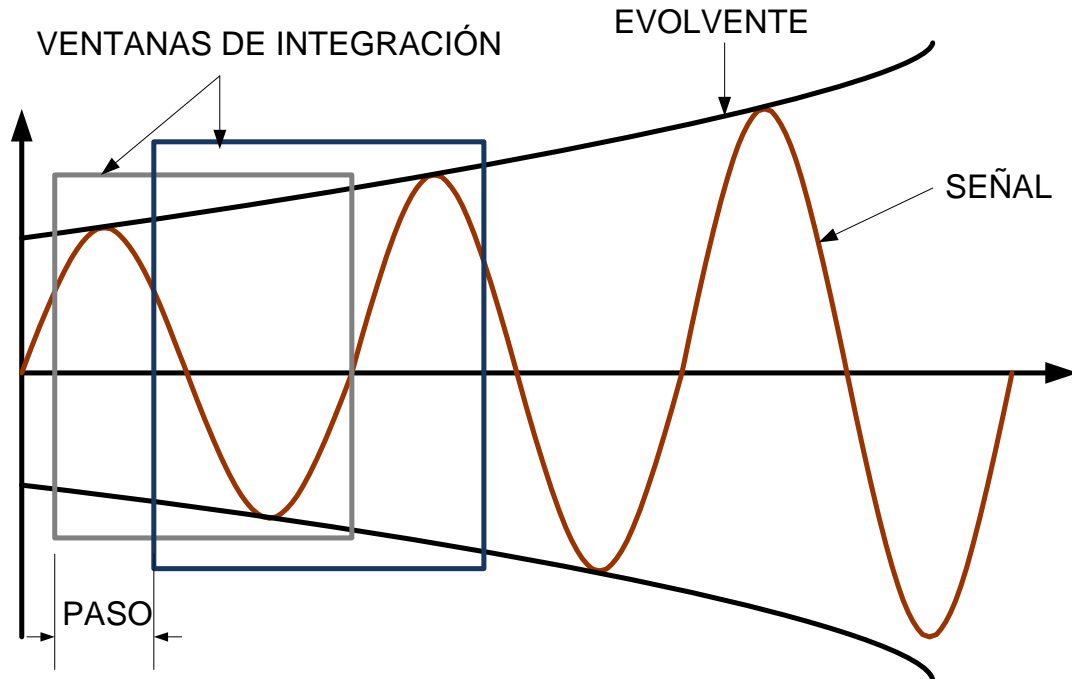


Figura 2-4

Dos periodos consecutivos analizados. El paso entre ellos se define por el usuario del método.

Los coeficientes de Fourier son diferentes para cada ventana de integración seleccionada.

La amplitud, y por tanto, la importancia de los armónicos, generalmente disminuyen con su orden debido a que las variables de estado son continuas en el tiempo (son magnitudes con energía almacenada). Además la acción de filtrado de los convertidores resonantes también reduce la presencia de armónicos de orden alto. Así, es bastante razonable el empleo únicamente de bajos órdenes de armónicos en las aproximaciones. De hecho, el primer armónico (cuando el valor medio de la variable es nulo) es suficiente para convertidores resonantes CC – CC.

En cualquier caso, los coeficientes de Fourier son dependientes del tiempo. Este hecho permite el modelado dinámico del convertidor, el cual se consigue mediante la variación dinámica de los coeficientes de Fourier. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esta variación es lenta en comparación con la longitud del periodo.

2.4 Derivación temporal de las variables de estado

Volviendo de nuevo al sistema descriptivo en el espacio de estados, es bastante común encontrar la derivación de las variables de estado con respecto al tiempo en las ecuaciones de estado. Por lo tanto, es necesario calcular la derivada respecto al tiempo de los coeficientes de Fourier cuando se aplique el método generalizado promediado en el espacio de estados. A partir la expresión (2-3), es posible obtener la expresión (2-6):

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{x_{b0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [x_{ak} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + x_{bk} \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \right] \quad (2-6)$$

Recordando la derivada de un producto:

$$\begin{aligned} \frac{d[x(t)]}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{x_{b0}}{2} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d(x_{ak})}{dt} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + x_{ak} \cdot \frac{d}{dt} \sin(k \cdot \omega t) + \frac{d(x_{bk})}{dt} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + x_{bk} \cdot \frac{d}{dt} \cos(k \cdot \omega t) \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

La cual puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d[x(t)]}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d(x_{b0})}{dt} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d(x_{ak})}{dt} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + x_{ak} \cdot k\omega \cos(k \cdot \omega t) + \frac{d(x_{bk})}{dt} \cdot \cos(k \cdot \omega t) - x_{bk} \cdot k\omega \sin(k \cdot \omega t) \right] \end{aligned} \quad (2-8)$$

Y agrupando términos:

$$\begin{aligned} \frac{d[x(t)]}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d(x_{b0})}{dt} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{d(x_{ak})}{dt} - x_{bk} \cdot k\omega \right) \cdot \sin(k \cdot \omega t) + \left(\frac{d(x_{bk})}{dt} + x_{ak} \cdot k\omega \right) \cos(k \cdot \omega t) \right] \end{aligned} \quad (2-9)$$

Cuando la serie de Fourier es reducida a su valor medio, tenemos:

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d[x_{b0}(t)]}{dt} \quad (2-10)$$

Y si el desarrollo en serie de Fourier se reduce solamente a su armónico fundamental:

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = \left(\frac{d(x_{a1})}{dt} - x_{b1} \cdot \omega \right) \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{d(x_{b1})}{dt} + x_{a1} \cdot \omega \right) \cos(\omega t) \quad (2-11)$$

En el paso entre (2-7) y (2-8) la frecuencia de conmutación, y por tanto la pulsación ω , se han considerado independientes del tiempo (constantes). En caso de que la frecuencia de conmutación fuera variable, como normalmente ocurre en convertidores resonantes, (2-8), (2-9) y (2-11) serían solamente aproximaciones. La expresión exacta de derivación sería mucho más complicada en este caso. Sin embargo, para variaciones lentas en $\omega(t)$, estas ecuaciones constituyen una aproximación válida para las derivadas. En términos prácticos, la precisión del método generalizado tiene como pilar el que se va a asumir que la frecuencia de conmutación no variará significativamente con respecto al periodo siguiente, lo cual es bastante razonable de asumir.

2.5 Función descriptora extendida

En los párrafos previos de este capítulo, se han considerado variables de estado aproximadas por sus coeficientes de Fourier. Las restantes formas de onda deben ser expresadas en función de estas variables de estado, o más concretamente, como una función de los coeficientes de Fourier de las variables de estado $x_{ak} - x_{bk}$. Sin embargo, en muchos casos no es tan sencillo de obtener una expresión explícita para todas las formas de onda, y algunas de ellas tendrán que ser aproximadas. Una buena aproximación se puede conseguir empleando la función descriptora extendida. Antes de hacer una introducción de dicha función, es aconsejable hacer una revisión más simple al concepto de función descriptora.

La función descriptora se usa en igualación armónica bajo las condiciones permanentes o en oscilaciones transitorias en sistemas no lineales. Se aplica cuando un bloque no lineal con una sola entrada y una sola salida se excita por una onda senoidal. En este caso, la señal de salida será en general, una señal senoidal de la misma frecuencia que la original, aparte de más armónicos de orden superior. Sin embargo, si el bloque no lineal es parte de un sistema cuyo comportamiento general es similar a un filtro paso-bajos, los armónicos de esta salida son atenuados por el resto del sistema. En este caso la salida del bloque no lineal se puede aproximar por su armónico fundamental consiguiendo una buena precisión. La amplitud de esta componente fundamental será, en general, dependiente con la amplitud de la señal de entrada. Esta situación se escenifica en la expresión (2-12). Se puede suponer que el bloque $N[]$ presenta un comportamiento no lineal en la entrada $x(t)$. La salida será una función de la entrada:

$$y(t) = N[x(t)] \quad (2-12)$$

La función descriptiva se aplica solamente cuando la entrada se puede considerar senoidal:

$$x(t) \cong X \cdot \sin(\omega t) \quad (2-13)$$

En la expresión anterior, si la no linealidad del bloque $N[]$ no es demasiado grande, el contenido en armónicos de la salida es suficientemente pequeño, o el resto del sistema presenta un comportamiento de filtro paso bajo, la salida $y(t)$ se puede aproximar por una señal senoidal. En ese caso, los armónicos de orden superior son suficientemente atenuados.

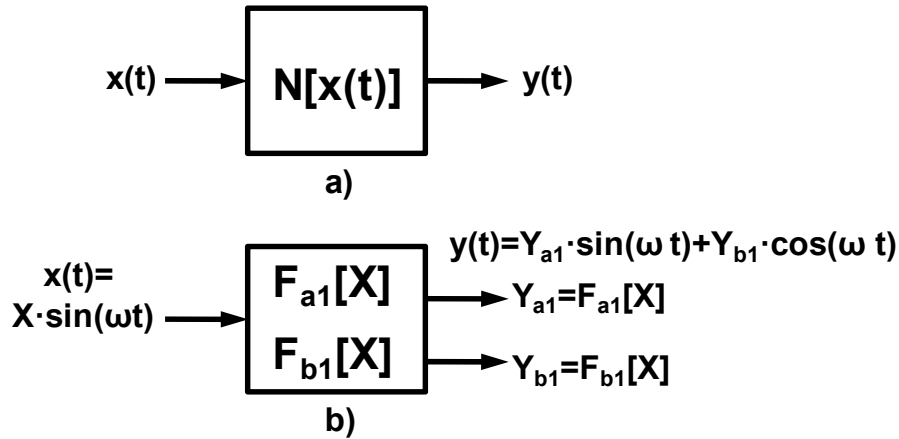


Figura 2-5

Función descriptora aplicada sobre un sistema no lineal donde todos los armónicos de la señal de entrada excepto el fundamental, son suficientemente atenuados

En esta línea, la función descriptora caracterizará la señal de salida $y(t)$ en base al comportamiento del armónico fundamental. En general, este armónico no estará en fase con la señal de entrada (2-14) .

$$y(t) \cong Y_a \cdot \sin(\omega t) + Y_b \cdot \cos(\omega t) \quad (2-14)$$

Aplicando el concepto de función descriptora a la señal senoidal de entrada, y sabiendo que la salida debe tener la misma frecuencia, la expresión (2-14) puede ser reformulada. En la expresión (2-15) la función descriptora original $N[\]$ se ha sustituido por dos funciones descriptoras F_{a1} y F_{b1} las cuales representan la función para calcular las amplitudes de los armónicos de salida desde sus homólogos a la entrada.

$$y(t) \cong N[x(t)] = N[X \cdot \sin(\omega t)] = F_{a1}(X) \cdot \sin(\omega t) + F_{b1}(X) \cdot \cos(\omega t) \quad (2-15)$$

Según la expresión (2-15), $F_{a1}(X)$ y $F_{b1}(X)$ son funciones, generalmente no lineales, las cuales dependen de la amplitud de entrada X . Al igual que en el método promediado generalizado en el espacio de estados, la rápida evolución temporal de un periodo de la señal de salida se aproxima por dos valores que pueden ser asimilados a la amplitud y la fase y cuya variación es significativamente más lenta que un periodo.

En el caso de varias entradas y salidas en un bloque no lineal, es necesario una versión extendida de la función descriptora: la función descriptora extendida.

En la Figura 2-6a se representa un bloque no lineal con “ n ” entradas y “ m ” salidas. Hay una función descriptora, $N_j [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, por cada salida la cual depende en general de las entradas.

Para aplicar el concepto de función descriptora extendida, cada entrada y cada salida se aproximan por su desarrollo en serie de Fourier tomando suficientes armónicos. En general, las entradas tendrán una forma como en la expresión (2-16) y las salidas como en la expresión (2-17).

$$x_i(t) = \frac{X_{ib0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [X_{iak} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + X_{ibk} \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \quad (2-16)$$

$$y_j(t) = \frac{Y_{jb0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [Y_{jak} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + Y_{jbk} \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \quad (2-17)$$

Donde, por ejemplo, Y_{jak} y Y_{jbk} están relacionados con el coeficiente del armónico de orden k -ésimo para la salida j -ésima.

Por lo tanto, para aplicar el proceso, cada entrada $x_i(t)$ de la Figura 2-6a será sustituida por un número infinito de coeficientes como en (2-16). Al mismo tiempo, el número de salidas del bloque puede crecer enormemente cuando se sustituye cada salida $y_j(t)$ por una serie de infinitos coeficientes. Las funciones descriptoras se incrementan de igual forma para las salidas. Este proceso se expone para algunos términos de una salida genérica $y_j(t)$ en la Figura 2-6b.

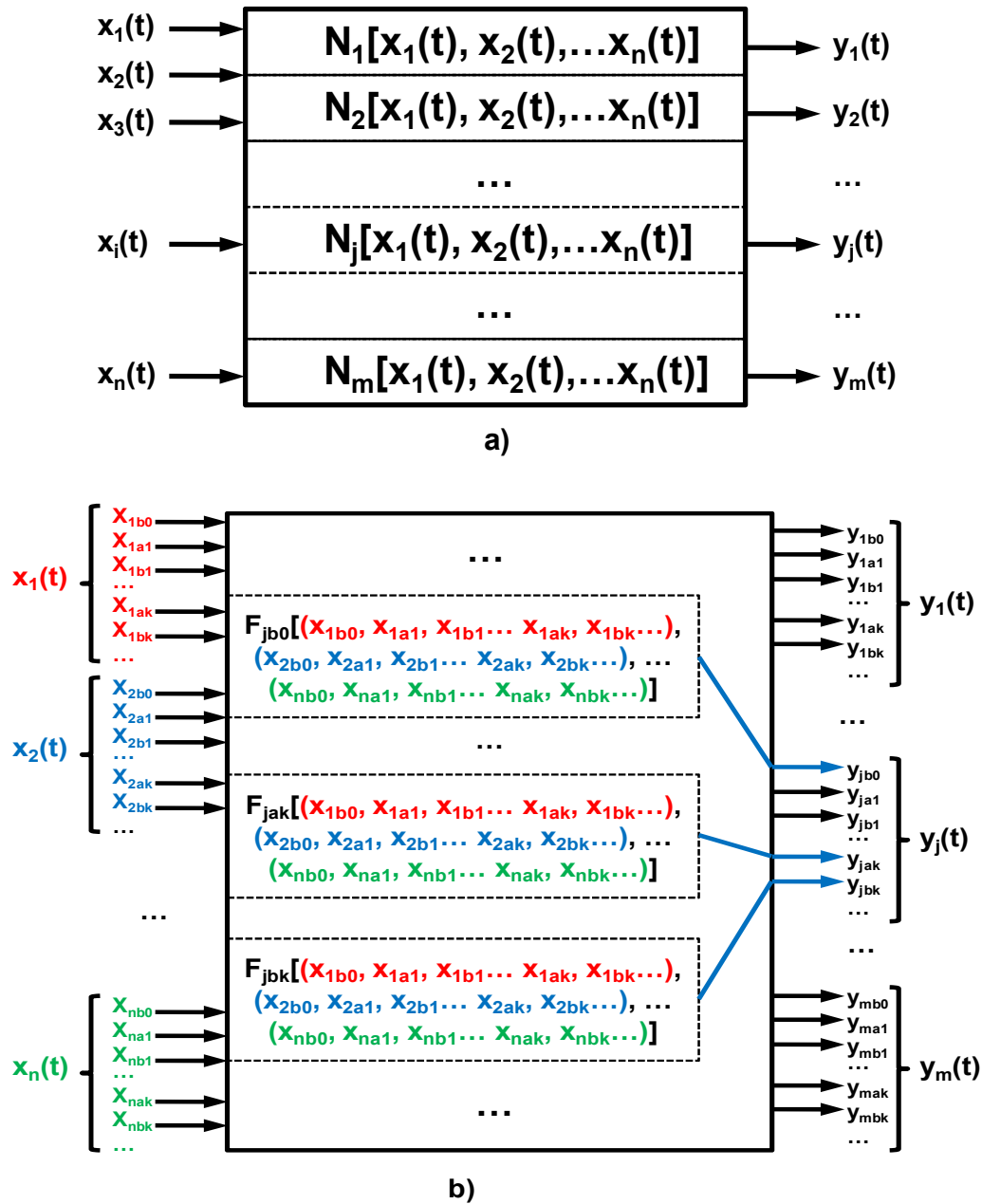


Figura 2-6

a) Sistema multientrada y multisalida

b) Concepto de función descriptora extendida aplicada al armónico fundamental y a los armónicos de orden k -ésimo para la salida j -ésima

La función no lineal, $F_{jak}[(X_{1b0}, X_{1a1}, X_{1b1} \dots X_{1ak}, X_{1bk} \dots), \dots (X_{nb0}, X_{na1}, X_{nb1} \dots X_{nak}, X_{nbk} \dots)]$, describe la relación entre todos los coeficientes de Fourier de las entradas, y la parte senoidal del armónico k -ésimo de la salida j -ésima. $F_{jbk}[(X_{1b0}, X_{1a1}, X_{1b1} \dots X_{1ak}, X_{1bk} \dots), \dots (X_{nb0}, X_{na1}, X_{nb1} \dots X_{nak}, X_{nbk} \dots)]$, describe la relación entre todos los coeficientes de Fourier de las entradas, y la parte cosenoidal del armónico k -ésimo de la salida j -ésima. En general, varios coeficientes de Fourier de las entradas (X_{iak}, X_{ibk}) y algunos de las funciones descriptoras (F_{jak} y F_{jbk}) son nulos y pueden despreciarse. El modelo se puede simplificar enormemente gracias a esto.

Por otro lado, las funciones F_{jak} y F_{jbk} se han descrito como dependientes de las entradas de los bloques no lineales. En general, estas entradas son, o pueden ser descritas como función de:

- Los coeficientes armónicos de las variables de estado.
- Los coeficientes armónicos de las variables de entrada al convertidor.
- Las variables de control.

Así, las funciones F_{jak} y F_{jbk} se pueden también expresar como funciones de los tres puntos anteriores. En resumen, para modelizar un convertidor CC - CC, los estados no lineales (bloques), deben ser identificados, sus entradas han de ser expresadas adecuadamente y la se debe aplicar la función descriptora extendida.

2.6 Aplicación del modelo al espacio de estados

En la mayoría de los casos, el modelo de un convertidor en el espacio de estado se podrá definir por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= f\{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \\ \bar{y}(t) &= g\{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \end{aligned} \tag{2-18}$$

Donde $\bar{x}(t)$ es el vector de estado, $\bar{u}(t)$ es el vector de excitación, e $\bar{y}(t)$ es el vector de observación también conocido como vector de variables de salida. Las funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ pueden ser también no lineales.

Para obtener el modelo de un convertidor, se aplica la aproximación por series de Fourier sobre (2-18). De esta manera, se obtiene (2-19) para el armónico k -ésimo.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d}{dt} \bar{x} \right\rangle_{ak} &= \langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak} \\
 \left\langle \frac{d}{dt} \bar{x} \right\rangle_{bk} &= \langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk} \\
 \langle \bar{y} \rangle_{ak} &= \langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak} \\
 \langle \bar{y} \rangle_{bk} &= \langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk}
 \end{aligned} \tag{2-19}$$

Siendo $\left\langle \frac{d}{dt} \bar{x} \right\rangle_{ak}$, $\langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak}$, $\langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak}$ and $\langle \bar{y} \rangle_{ak}$ el armónico senoidal de Fourier de orden k -ésimo para la derivada de $\bar{x}(t)$, $f(\bar{x}, \bar{u})$, $g(\bar{x}, \bar{u})$ y $\bar{y}(t)$ respectivamente. Los términos con el subíndice “ b ” en lugar de “ a ” tienen el mismo significado pero para los coeficientes cosenoidales.

Obviamente, (2-9) puede aplicarse en (2-19), transformando el modelo en (2-20):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \bar{x} \rangle_{ak} &= k\omega \langle \bar{x} \rangle_{bk} + \langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak} \\
 \frac{d}{dt} \langle \bar{x} \rangle_{bk} &= -k\omega \langle \bar{x} \rangle_{ak} + \langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk} \\
 \langle \bar{y} \rangle_{ak} &= \langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak} \\
 \langle \bar{y} \rangle_{bk} &= \langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk}
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

Como paso final para obtener el modelo, es necesario obtener los coeficientes de Fourier de $\langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak}$, $\langle f(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk}$, $\langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{ak}$ y $\langle g(\bar{x}, \bar{u}) \rangle_{bk}$ como una función de

los coeficientes de Fourier de las variables de estado $\langle \bar{x} \rangle_{ak} - \langle \bar{x} \rangle_{bk}$ y de excitación $\langle \bar{u} \rangle_{ak} - \langle \bar{u} \rangle_{bk}$. Esto es posible gracias a la función descriptora extendida.

Es muy importante considerar solamente aquellos coeficientes de Fourier necesarios en el modelo para capturar la esencia del comportamiento del sistema. Por ejemplo, en un convertidor CC - CC con bajo rizado de corriente y tensión es viable sólo el uso de coeficientes en CC de los desarrollos en serie de Fourier, habiendo modelado así el sistema para bajas frecuencias. Sin embargo, en un convertidor resonante trabajando cerca de la frecuencia de resonancia tendrá, en ciertas partes, corrientes senoidales y tensiones con baja distorsión armónica. En estas partes el armónico de primer orden puede ser suficiente para el modelado.

2.7 Modelado de la topología

En esta sección se aplican las herramientas y procedimientos descritos en este capítulo para obtener un modelo matemático de la topología resonante multinivel. El punto de partida es el circuito básico el cual define la topología. Un diagrama de bloques se muestra en la Figura 2-7. El primer objetivo será obtener un conjunto de ecuaciones que describan de forma precisa el comportamiento de este circuito básico. Tras ello, dicho grupo de ecuaciones será simplificado mediante el método promediado generalizado en el espacio de estados y la función descriptora extendida, obteniendo así un grupo de ecuaciones mucho más simple que el anterior y el cual reflejará el comportamiento más importante del convertidor y así, al mismo tiempo, será más sencillo de manejar.

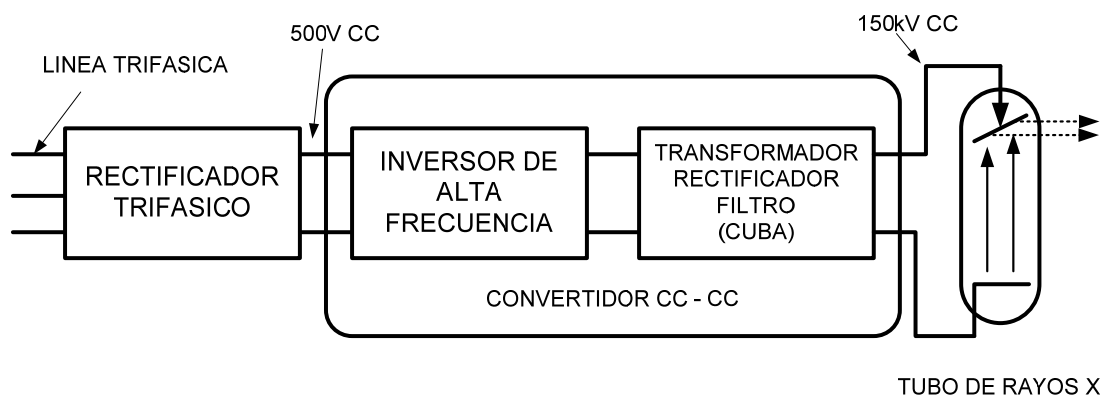


Figura 2-7

Típico diagrama de bloques para convertidores CC-CC basados en topologías resonantes

2.7.1 Introducción a la topología resonante multinivel.

El circuito básico de la topología resonante multinivel se muestra en la Figura 2-8. Como se propuso en el capítulo previo, este estudio propone el uso de esta topología para fuentes de alta tensión (hasta cientos de kV) y alta potencia (hasta 100kW). Comparando con la Figura 2-7, es obvio que se han hecho varias simplificaciones en la Figura 2-8. Una de ellas está relacionada con el modelo del transformador, ha sido aproximado por su circuito equivalente de transformador ideal, su inductancia de dispersión y su condensador parásito entre devanados. Uno de los logros de esta topología es precisamente el uso de estos elementos parásitos en el modelo del transformador.

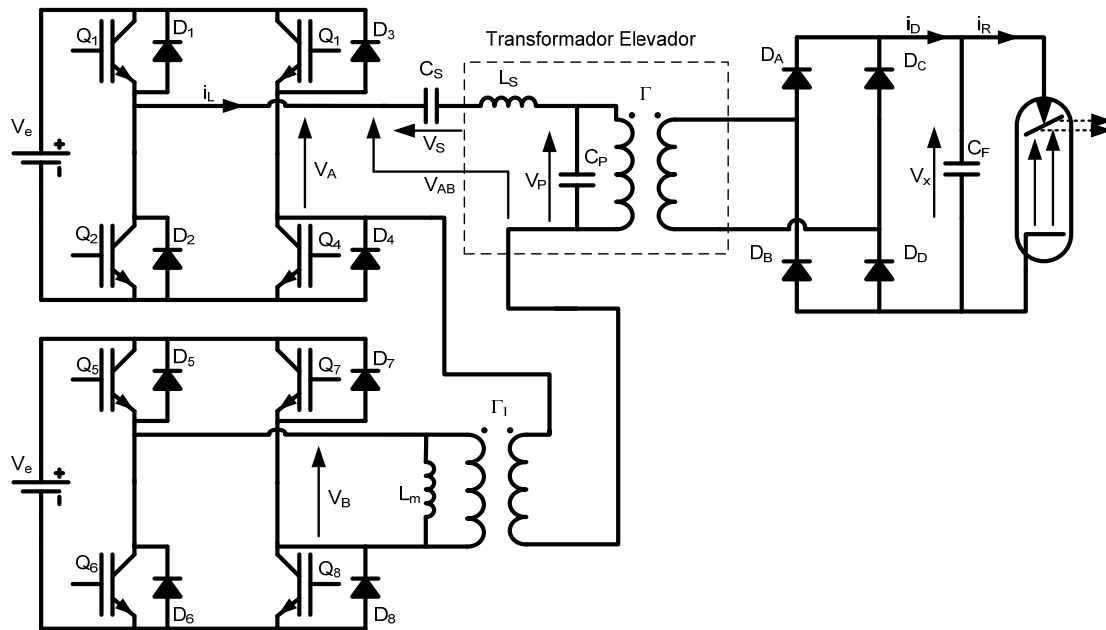


Figura 2-8

Topología multinivel propuesta a estudio

Para el modelado matemático de esta topología, se deben conocer sus formas de onda. En la Figura 2-8 se puede consultar el nombre de las principales señales que intervienen en la topología. En la Figura 2-9 se representan algunas de estas formas de onda. La corriente $i_L(t)$, la tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$, las tensiones en los

condensadores C_S y C_P ($V_S(t)$ y $V_P(t)$), y la corriente en el rectificador de salida $i_D(t)$, con el propósito de ser estudiadas.

En la Figura 2-9 se puede ver, que a pesar de la forma de la tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$, las corrientes y tensiones en la red resonantes son básicamente de forma senoidal con un bajo contenido en armónicos. En particular, el proceso de modelado puede asumir fácilmente que la corriente resonante $i_L(t)$, y la tensión del condensador serie $V_S(t)$ pueden ser aproximados por su primer armónico.

Por otro lado, se observan las formas de onda de la corriente y tensión en el rectificador de salida. Así, la tensión de salida $V_x(t)$ se puede considerar constante para un ciclo de conmutación, aproximándose por su valor medio. En este sentido, el condensador C_f se calcula para conseguir este comportamiento.

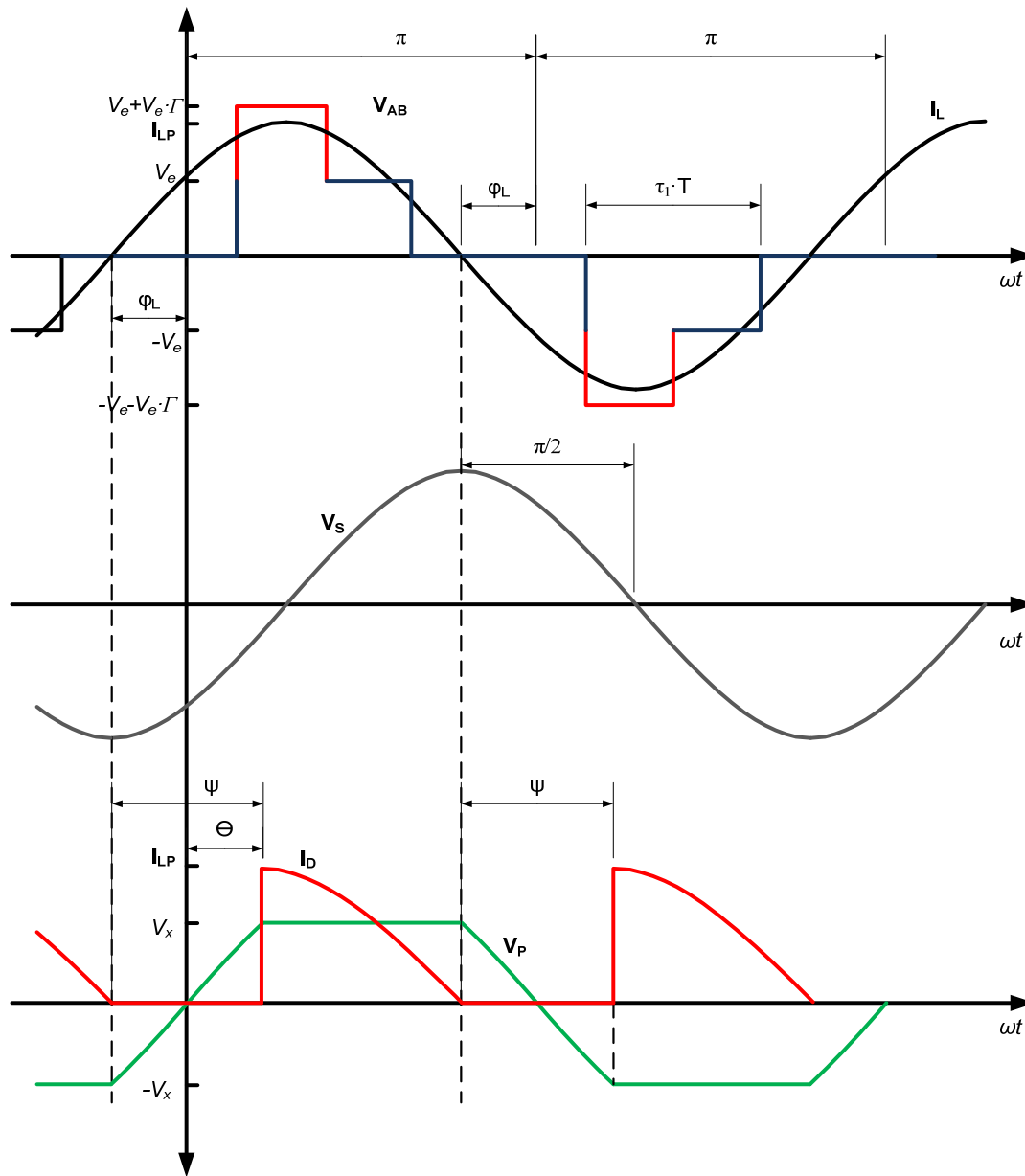


Figura 2-9

Principales formas de onda en la topología multinivel

La evolución de la tensión en C_p merece una atención especial. Como primera aproximación $V_P(t)$ se puede asimilar a una forma de onda senoidal limitada por la tensión de salida referida a primario. En el desarrollo que sigue de $V_P(t)$, se tomará como punto de partida cuando su tensión es igual a $-V_x$.

En este punto, los condensadores C_P y C_f se conectan en paralelo por medio de los diodos D_2 y D_3 , los cuales están en conducción. Esta situación se refleja en la Figura 2-10b. La tensión en los dos condensadores solo difiere en la caída de tensión en los diodos, y se cargan a la misma frecuencia. Ya que el condensador de filtro tiene que tener varios órdenes de magnitud por encima de C_P , se puede estimar que la corriente $i_L(t)$ pasa enteramente por el puente rectificador, mientras que el condensador resonante no recibe ninguna. Debido al alto valor de C_f , el valor de tensión de salida V_x permanece prácticamente constante, y así se limita a $-V_x$.

Esta situación continúa hasta que la corriente resonante no cambia de signo. Cuando $i_L(t)$ pasa a positivo, los diodos D_2 y D_3 se cortan como se ve en la Figura 2-10c. Como resultado, toda la corriente resonante pasa por C_P . Como $i_L(t)$ es positiva, el condensador se descarga y se carga con la tensión opuesta. Los diodos D_1 y D_4 no pueden conducir en este estado, ya que la tensión en el condensador es negativa menor que V_x . Si $i_L(t)$ se considera completamente senoidal, el cambio en C_P será cosenoidal como muestran las ecuaciones (2-21)-(2-23).

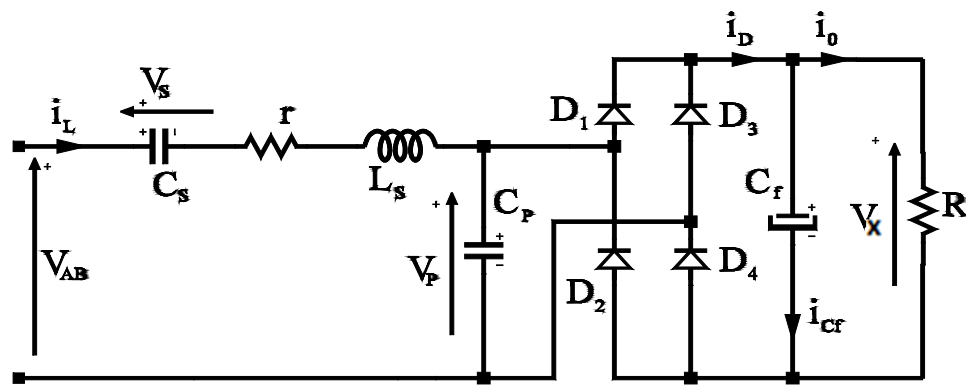
$$V_P(t) = V_P(t_0) + \frac{1}{C_P} \cdot \int_{t_0}^t i_L(t) \cdot dt \quad (2-21)$$

De acuerdo con la Figura 2-9, i_L es la amplitud de $i_L(t)$, y φ es su fase. También se sabe que V_x es el valor inicial de tensión en el condensador:

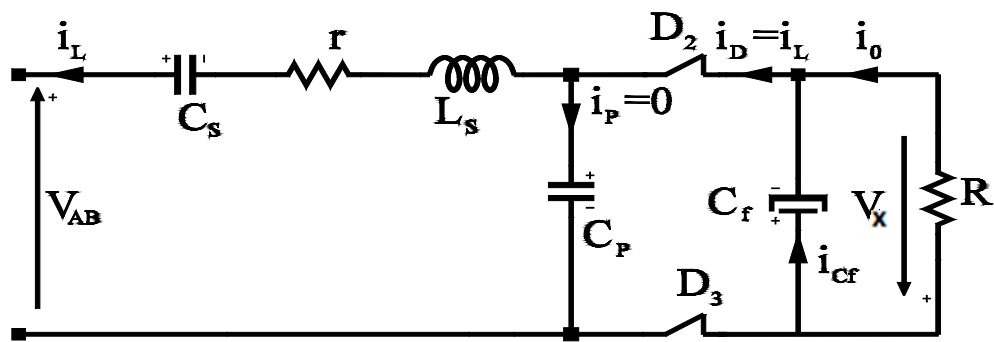
$$V_P(t) = -V_x + \frac{1}{C_P} \cdot \int_{t_0}^t i_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot dt = -V_x + \frac{i_L}{C_P \omega} \cdot [\cos(\omega \cdot t_0 + \varphi) - \cos(\omega \cdot t + \varphi)] \quad (2-22)$$

t_0 es el instante donde C_P empieza a cargarse. Esto significa que $\omega \cdot t_0 + \varphi = 0$ (Figura 2-10), por lo que:

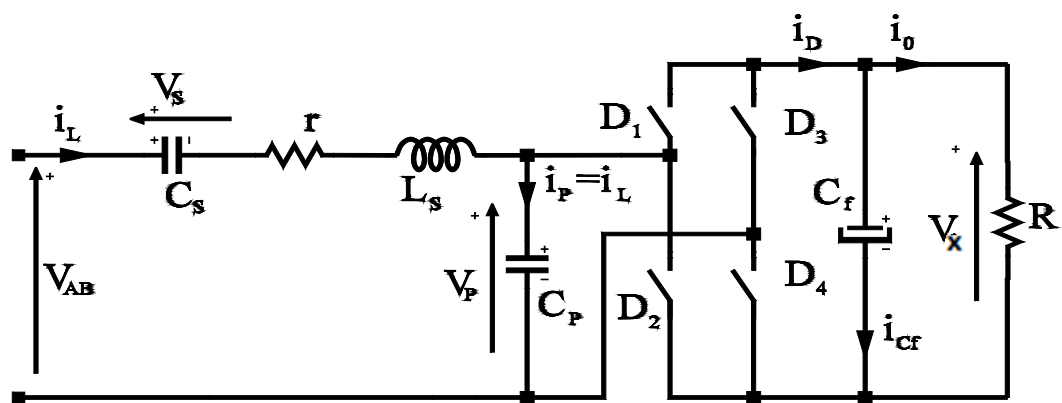
$$V_P(t) = -V_x + \frac{i_L}{C_P \omega} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t + \varphi)] \quad (2-23)$$



(a)



(b)



(c)

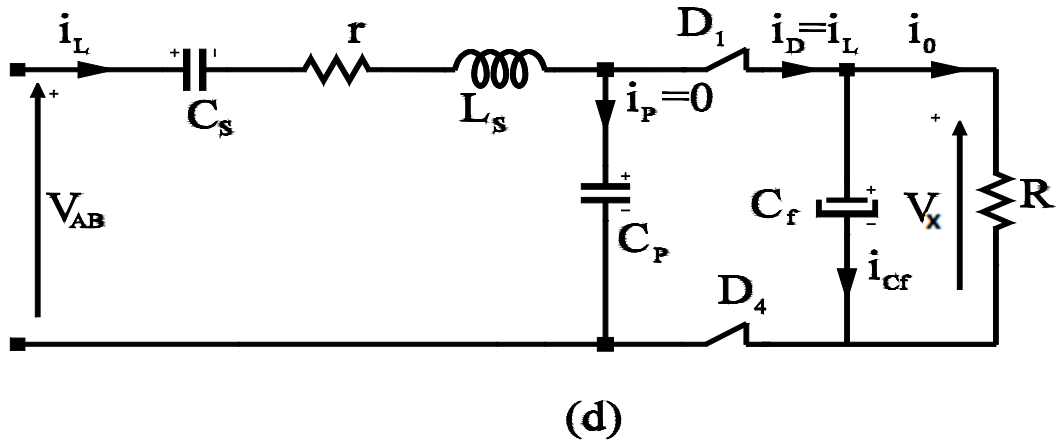


Figura 2-10

Secuencia de los diodos rectificadores durante la mitad de un periodo.

Los diodos D_1 y D_4 conducirán justo cuando $V_p(t)$ alcance el valor de la tensión de salida V_x (Figura 2-10d). En ese momento, $V_p(t)$ alcanza el valor de la tensión de salida de nuevo y permanece fijada a ese valor mientras la corriente mantenga su signo.

El cambio entre $+V_x$ y $-V_x$ que se produce en la segunda mitad del periodo es similar. Solo los signos de la corriente y de la tensión experimentan cambio.

En Figura 2-9, φ es la fase entre la tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$, y el primer armónico de la corriente $i_L(t)$. φ será positiva cuando la corriente dirija el primer armónico de $V_{AB}(t)$, como se ve en la Figura 2-9. θ es la fase en la que la tensión de $V_p(t)$ se queda fija a la tensión de salida, y ψ es el ángulo en el que C_P experimenta su carga senoidal. De la Figura 2-9, se puede deducir que:

$$\psi = \varphi + \theta \quad (2-24)$$

2.7.2 Expresión de estado no lineal

Analizando la topología multinivel de la Figura 2-8 y realizando algunas simplificaciones, obtenemos los circuitos equivalentes de la topología en los modos de funcionamiento de radiodiagnóstico y fluoroscopia.

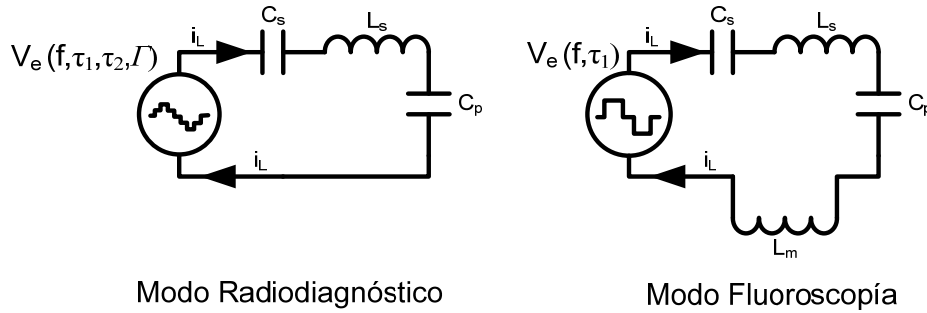


Figura 2-11

Circuitos equivalentes de la topología multinivel en los dos modos de funcionamiento del sistema

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito básico de la topología de la Figura 2-11 en modo de radiodiagnóstico y teniendo en consideración la topología de la Figura 2-8 se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento del sistema:

$$V_{AB}(t) = V_s(t) + V_P(t) + L_s \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + r \cdot i_L(t) \quad (2-25)$$

$$C_s \cdot \frac{dV_s(t)}{dt} = i_L(t) \quad (2-26)$$

$$i_D = C_f \frac{dV_x(t)}{dt} + \frac{V_x(t)}{R} \quad (2-27)$$

Del mismo modo, si aplicamos Kirchoff al circuito equivalente de la Figura 2-11 en modo fluoroscopia, obtenemos las mismas ecuaciones anteriores, con la salvedad que ahora la inductancia serie del transformador principal, se ve aumentada por la puesta en serie de la inductancia magnetizante del transformador auxiliar, lo que implica que eligiendo un correcto diseño del transformador auxiliar, podemos modificar la inductancia total del sistema en modo fluoroscopia para que de esta forma, se pueda reducir la corriente total que circula por el tanque resonante. La expresión (2-25) queda de la forma:

$$V_{AB}(t) = V_S(t) + V_P(t) + (L_S + L_m) \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + r \cdot i_L(t) \quad (2-28)$$

El grupo de ecuaciones (2-25)-(2-28) representan la topología en el espacio de estados. En estas ecuaciones, las variables de estado son las que almacenan energía, como son la corriente resonante $i_L(t)$, la tensión en el condensador serie $V_S(t)$, y la tensión en el condensador filtro $V_x(t)$. Sin embargo, la tensión en el condensador paralelo $V_P(t)$ no se considera variable de estado. De hecho, su valor se limita dos veces en cada periodo a la tensión del condensador filtro C_f la cual es mayor, y almacena mucha menos energía que dicho condensador. Por esto, la energía almacenada en él es despreciable. Así pues, el vector de estado se representa en (2-29).

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_S(t) \\ V_x(t) \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Sin embargo, esta primera representación del espacio de estados muestra un aspecto poco adecuado para obtener resultados de modelado. Por un lado, los parámetros de regulación, es decir, los ciclos de trabajo τ_1 y τ_2 , y la frecuencia de conmutación ω , están explícitos, aunque implícitamente contenidos en $V_{AB}(t)$. Por otro, y teniendo presente el examen previo acerca de las formas de onda en el convertidor, puede observarse que la formulación matemática de la propia tensión de salida del inversor $V_{AB}(t)$, la tensión del condensador paralelo $V_P(t)$, y de la corriente a través del puente rectificador de salida $i_D(t)$, no resultan obvias lo que dificulta el análisis.

2.7.3 Aproximación armónica de las variables de estado

Como se vio en el epígrafe 2.7.1, las variables de estado $i_L(t)$ y $V_S(t)$ se definen principalmente por su componente fundamental de su serie de Fourier correspondiente. Su contenido en armónicos de orden superior es muy pequeño y su valor medio es nulo. Así, dichas variables se pueden aproximar con precisión por su primer armónico del desarrollo en serie de Fourier:

$$i_L(t) \approx i_{LA} \cdot \sin(\omega \cdot t) + i_{LB} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2-30)$$

$$V_S(t) \approx V_{SA} \cdot \sin(\omega \cdot t) + V_{SB} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2-31)$$

En base a (2-4) y (2-5) los coeficientes de Fourier se calculan para $k=1$:

$$i_{LA} = \frac{2}{T} \int_0^T i_L(t) \cdot \sin(\omega t) dt \quad (2-32)$$

$$i_{LB} = \frac{2}{T} \int_0^T i_L(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (2-33)$$

$$V_{SA} = \frac{2}{T} \int_0^T V_S(t) \cdot \sin(\omega t) dt \quad (2-34)$$

$$V_{SB} = \frac{2}{T} \int_0^T V_S(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (2-35)$$

Hemos dicho que la corriente resonante $i_L(t)$ se puede expresar como $i_L(t) \approx i_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$.

Comparando esta expresión con (2-30) y desarrollando términos, obtenemos:

$$i_L(t) \approx i_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = i_L \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t) + i_L \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2-36)$$

Identificando términos entre (2-30) y (2-36):

$$i_{LA} = i_L \cdot \cos(\varphi) \quad (2-37)$$

$$i_{LB} = i_L \cdot \sin(\varphi) \quad (2-38)$$

Dividiendo (2-37) entre (2-38) y despejando φ :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{i_{LB}}{i_{LA}}\right) \quad (2-39)$$

Elevando al cuadrado (2-37) y (2-38) y sumándolas, obtenemos una expresión para i_L :

$$i_L = +\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2} \quad (2-40)$$

Por lo tanto, una vez que hemos asumido que la corriente resonante se aproxima con precisión por su armónico senoidal de primer orden, es fácil obtener su amplitud y fase del análisis de Fourier. Este proceso podría aplicarse también a $V_S(t)$.

Con respecto a la tercera variable de estado $V_x(t)$, se admite que se puede aproximar con suficiente precisión a una señal continua: su rizado se puede despreciar y su variación en comparación con un periodo de conmutación es lenta. En otras palabras, esta señal se puede aproximar por su valor medio V_x a lo largo de un periodo, siendo despreciable su contenido en armónicos. De esta manera, de se deduce (2-41)

$$V_x(t) \approx \frac{V_{xB}}{2} = V_x \quad (2-41)$$

Donde V_{xB} se calcula usando (2-5) con $k=0$. Así, V_x se define como su valor medio:

$$V_x = \frac{1}{T} \int_0^T V_x(t) dt \quad (2-42)$$

2.7.4 Función descriptora extendida

Ateniéndose a la (2-8), resulta evidente que en la topología propuesta existen dos etapas no lineales. La primera originada por el comportamiento de los diodos del puente rectificador de salida y los condensadores C_P y C_f , y la otra causada por el modo de operación del rectificador de entrada, el filtro y el inversor.

Estas no linealidades en la topología se trasladan al sistema de ecuaciones que lo representa en el espacio de estados. Pero no sólo eso, sino que además, los esfuerzos eléctricos relacionados con las no linealidades ($V_{AB}(t)$, $i_D(t)$ y $V_P(t)$) no pueden expresarse matemáticamente más que como ellos mismos, apareciendo como incógnitas extra. Debe buscarse una representación más sencilla del sistema, una representación en la que las ecuaciones de estado seguirán siendo probablemente no lineales, pero en la

que aparezcan completamente expresadas en función de variables de estado (i_L , V_s , V_x) y de las variables de entrada (V_e , τ_1 y τ_2 , f). Para ello es preciso encontrar una relación que ligue las magnitudes referidas.

Esta relación no es fácil de definir de forma exacta. No obstante, los términos no lineales de las ecuaciones pueden aproximarse por los términos de sus componentes armónicas, y empleando el concepto de función descriptora extendida, es posible expresar estos a su vez en función únicamente de variables de estado, variables de entrada o parámetros de control.

2.7.4.1 Etapa inversora asimétrica

El rectificador de entrada, el filtro de entrada y el inversor PWM generan la señal $V_{AB}(t)$. Esta forma de onda representada en la Figura 2-12 excita la red resonante del convertidor. La forma de onda se regula con los ciclos de trabajo τ_1 y τ_2 , y la tensión de entrada V_e . Estos parámetros componen entradas en el bloque de la función descriptora extendida la cual proporciona la variable de salida $V_{AB}(t)$. Un esquema de esto se representa en la Figura 2-13 donde F_{ABkS} and F_{ABkC} son los armónicos de orden k -ésimo de la serie de Fourier para la función descriptora F_{AB} la cual representa tres entradas y una sola salida $V_{AB}(t)$. Este es un caso particular de la Figura 2-6b la cual se representa en la Figura 2-13. Con ayuda de la (2-15), la expresión se transforma en (2-43).

$$V_{AB}(t) = \frac{F_{AB0}(\tau_1, \tau_2, V_e)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [F_{ABkS}(\tau_1, \tau_2, V_e) \cdot \sin(k \cdot \omega t) + F_{ABkC}(\tau_1, \tau_2, V_e) \cdot \cos(k \cdot \omega t)] \quad (2-43)$$

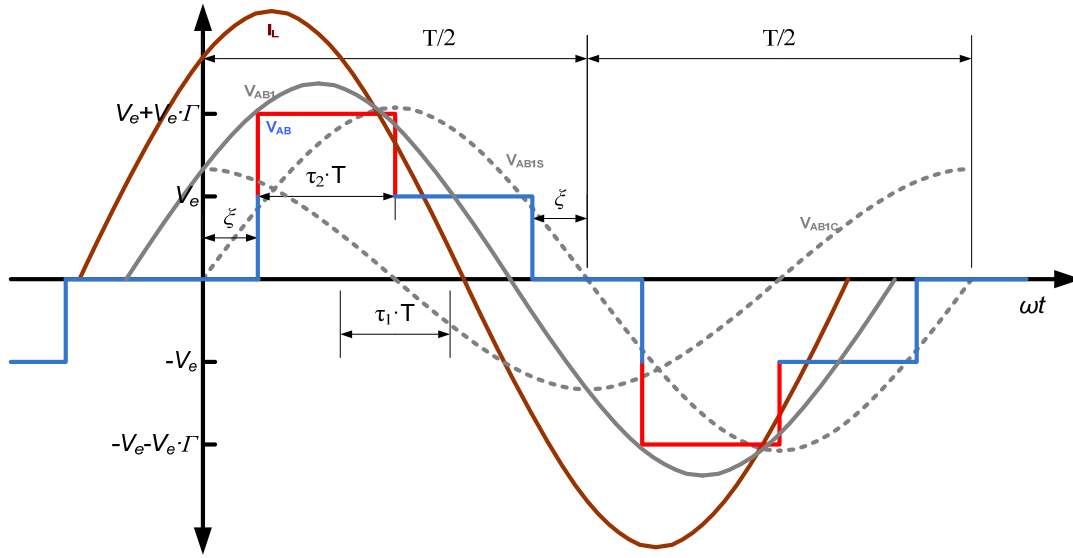


Figura 2-12

Forma de onda del inversor de salida y representación de su primer armónico

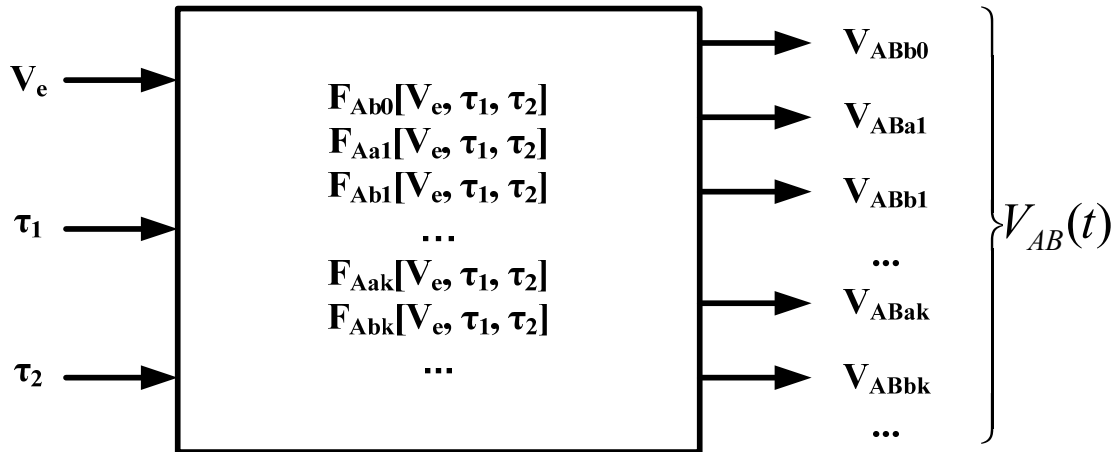


Figura 2-13

Función descriptora extendida aplicada al inversor

El modelo verá incrementada su precisión y complejidad con el número de términos de la serie de Fourier considerados. Como compromiso entre estos factores, y ya que el orden de los armónicos considerados de las variables de estado es siempre uno o menor,

sólo se considera el término fundamental en (2-43), esto es, la tensión de salida del inversor se aplica a la red resonante pasa-banda, donde sólo el primer armónico tiene un efecto significativo, ya que la forma senoidal de la corriente lo confirma. Así, (2-43) se reduce a (2-44).

$$V_{AB}(t) \approx F_{AB1S}(\tau_1, \tau_2, \Gamma, V_e) \cdot \sin(\omega t) + F_{AB1C}(\tau_1, \tau_2, \Gamma, V_e) \cdot \cos(\omega t) \quad (2-44)$$

Ahora, los coeficientes de la función descriptora extendida F_A se pueden calcular por medio de un análisis de Fourier a la forma de onda no lineal. Según (2-44):

$$F_{ABkS} = \frac{2}{T} \int_0^T V_{AB}(t) \sin(k\omega t) dt \quad (2-45)$$

$$F_{ABkC} = \frac{2}{T} \int_0^T V_{AB}(t) \cos(k\omega t) dt \quad (2-46)$$

Con la información de la Figura 2-12 y manipulando términos:

$$\begin{aligned} F_{ABkS} &= \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\tau_2 T} (V_e + V_e \Gamma) \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi + \tau_2 T}^{\xi + \tau_1 T} V_e \sin(k\omega t) dt \\ &+ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi}^{\frac{T}{2} + \tau_2 T} - (V_e + V_e \Gamma) \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi + \frac{T}{2} + \tau_2 T}^{\frac{T}{2} + \xi + \tau_1 T} - V_e \sin(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned} F_{ABkC} &= \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\tau_2 T} (V_e + V_e \Gamma) \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi + \tau_2 T}^{\xi + \tau_1 T} V_e \cos(k\omega t) dt \\ &+ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi}^{\frac{T}{2} + \tau_2 T} - (V_e + V_e \Gamma) \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi + \frac{T}{2} + \tau_2 T}^{\frac{T}{2} + \xi + \tau_1 T} - V_e \cos(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (2-48)$$

Resolviendo, obtenemos que:

$$F_{ABkS} = \frac{2V_e}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \left[(1 + \Gamma) \sin(k\pi(\tau_1 - 1)) + \sin(k\pi(\tau_1 + 1)) + \Gamma \sin(k\pi(\tau_1 - 1 + 2\tau_2)) \right] \quad (2-49)$$

$$F_{ABkC} = \frac{2V_e}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \left[(1 + \Gamma) \cos(k\pi(\tau_1 - 1)) - \cos(k\pi(\tau_1 + 1)) - \Gamma \cos(k\pi(\tau_1 - 1 + 2\tau_2)) \right] \quad (2-50)$$

Y particularizando para el primer armónico, tenemos que:

$$F_{AB1S} = \frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) \quad (2-51)$$

$$F_{AB1C} = -\frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) \quad (2-52)$$

Y de las expresiones (2-49) y (2-50) se puede deducir que los términos k -ésimos pares son nulos.

2.7.4.2 Etapa inversora simétrica

La señal de entrada $V_{AB}(t)$ puede tener varias formas, debido a la posibilidad de juego de los ciclos de trabajo τ_1 y τ_2 . Vamos a exponer el desarrollo de Fourier para el caso de la Figura 2-14, de tal forma que el diseñador de convertidores podría elegir una forma de onda u otra, sin más que cambiar los términos obtenidos para la etapa inversora por unos u otros.

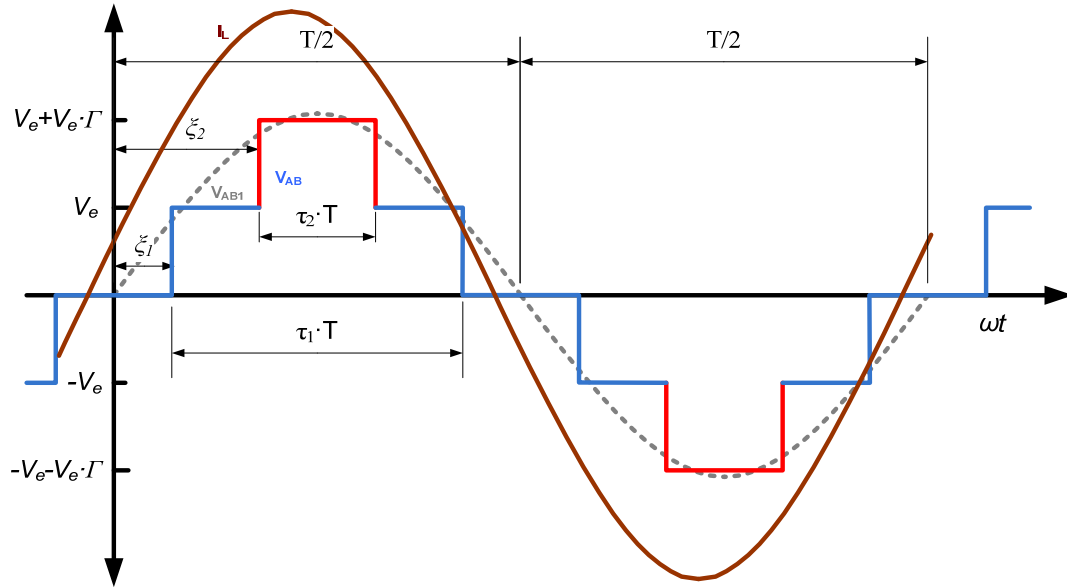


Figura 2-14

Forma alternativa simétrica del inversor de entrada y representación de su armónico principal

Como ya dijimos, la señal de entrada $V_{AB}(t)$ se puede aproximar por:

$$V_{AB}(t) \approx F_{AB1S}(\tau_1, \tau_2, \Gamma, V_e) \cdot \sin(\omega t) + F_{AB1C}(\tau_1, \tau_2, \Gamma, V_e) \cdot \cos(\omega t) \quad (2-53)$$

De la Figura 2-14 establecemos las integrales que representan los términos del desarrollo en serie de Fourier:

$$\begin{aligned} F_{ABKS} = & \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\xi_1} V_e \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \tau_2 T} (V_e + V_e \cdot \Gamma) \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi_1 + \tau_2 T}^{\xi + \tau_1 T} V_e \sin(k\omega t) dt \\ & + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi}^{\frac{T}{2} + \xi_1} -V_e \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi_1}^{\frac{T}{2} + \xi_1 + \tau_2 T} -(V_e + V_e \cdot \Gamma) \sin(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi_1 + \tau_2 T}^{\frac{T}{2} + \xi + \tau_1 T} -V_e \sin(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (2-54)$$

$$\begin{aligned} F_{ABKC} = & \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\xi_1} V_e \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \tau_2 T} (V_e + V_e \cdot \Gamma) \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\xi_1 + \tau_2 T}^{\xi + \tau_1 T} V_e \cos(k\omega t) dt \\ & + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi}^{\frac{T}{2} + \xi_1} -V_e \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi_1}^{\frac{T}{2} + \xi_1 + \tau_2 T} -(V_e + V_e \cdot \Gamma) \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2} + \xi_1 + \tau_2 T}^{\frac{T}{2} + \xi + \tau_1 T} -V_e \cos(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (2-55)$$

Resolviendo las integrales con ayuda de software matemático simbólico, tenemos:

$$F_{ABkS} = \frac{2V_e}{k\pi} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \right) \left(\sin(k\pi\tau_1) + \Gamma \sin(k\pi\tau_2) \right) \quad (2-56)$$

$$F_{ABkC} = 0 \quad (2-57)$$

Y particularizando para $k=1$ obtenemos:

$$F_{AB1S} = \frac{4V_e}{\pi} \left(\sin(\pi\tau_1) + \Gamma \sin(\pi\tau_2) \right) \quad (2-58)$$

$$F_{AB1C} = 0 \quad (2-59)$$

Como podemos ver a tenor de los resultados, la forma de onda estudiada tiene los términos cosenoidales todos nulos.

2.7.4.3 Etapa inversora en modo fluoroscopia

Para obtener la aproximación armónica en este caso, basta coger la formulación de una de las señales anteriores e igualar el ciclo de trabajo auxiliar a 0, que equivale a desconectar dicha etapa. En este momento, y atendiendo al circuito equivalente de la Figura 1-16 en modo fluoroscopia, obtenemos que:

$$F_{ABkS} = \frac{2V_e}{k\pi} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \right) \left(\sin(k\pi\tau_1) \right) \quad (2-60)$$

$$F_{ABkC} = 0 \quad (2-61)$$

Y particularizando para $k=1$ obtenemos:

$$F_{AB1S} = \frac{4V_e}{\pi} \left(\sin(\pi\tau_1) \right) \quad (2-62)$$

$$F_{AB1C} = 0 \quad (2-63)$$

2.7.4.4 Etapa del rectificador de salida

La etapa del rectificador de salida presenta un comportamiento no lineal lo que afecta a las corrientes por C_P y por el conjunto condensador filtro-carga y también sus tensiones. En consecuencia, la función descriptora extendida se debe aplicar a esta etapa. En este caso, hay dos variables de salida del bloque rectificador: $V_P(t)$ e $i_D(t)$, porque son las variables de esta etapa que se incluyen en la expresión de estado. Las entradas del bloque son dos variables de estado: $i_L(t)$ y $V_x(t)$. Del epígrafe 2.7.1 se deduce que el tiempo de conducción de los diodos rectificadores se determina por la relación entre estas dos magnitudes, y obviamente, estos tiempos de conducción fijan la forma y valor de las señales $V_P(t)$ e $i_D(t)$. Esta situación se describe en la Figura 2-15.

En el epígrafe 2.7.3 las variables de estado se aproximaron por sus coeficientes de la serie de Fourier. En particular, se discutió la idoneidad de aproximar $i_L(t)$ por su primer armónico, y $V_x(t)$ por su valor medio. En la Figura 2-16 las entradas de la Figura 2-15 se han sustituido siguiendo este criterio.

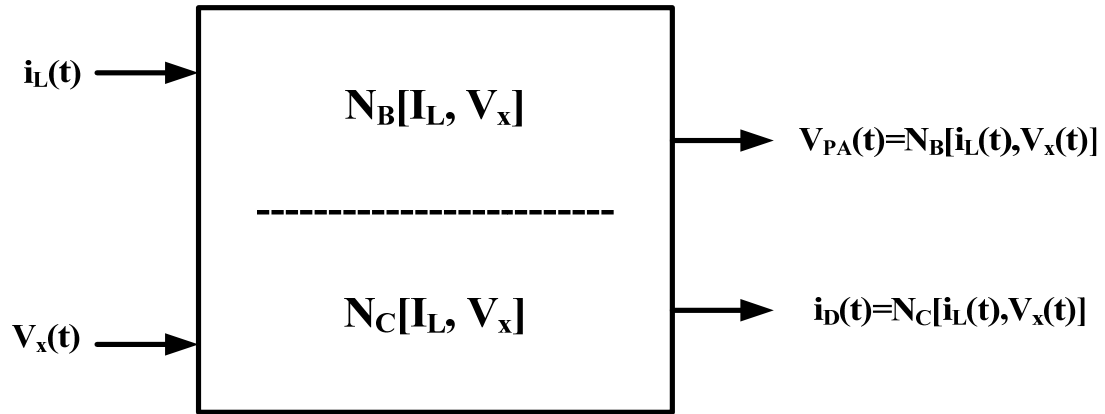


Figura 2-15

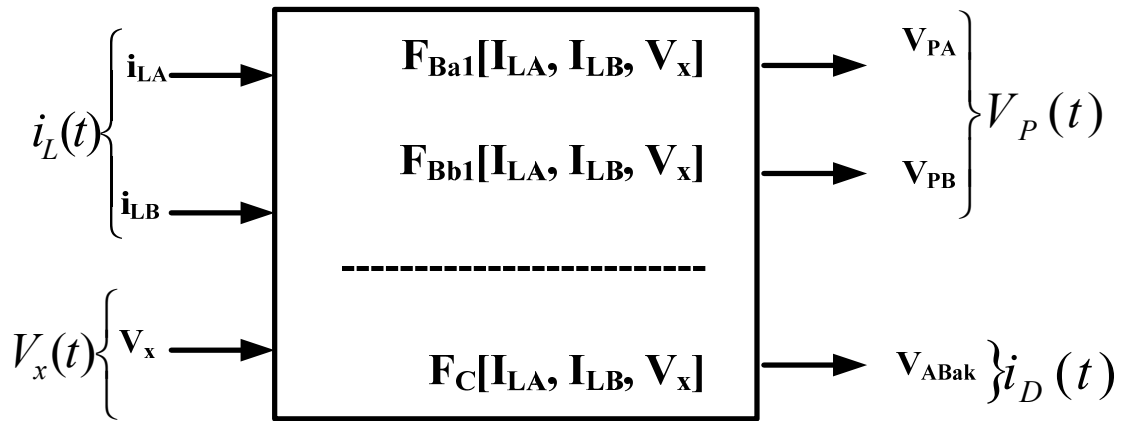


Figura 2-16

Aplicando la función descriptora extendida a la etapa rectificadora

Por supuesto que las salidas de la etapa rectificadora se pueden aproximar por su desarrollo infinito de Fourier. Sin embargo, se debe hacer una simplificación en el número de términos a tener en cuenta. Las ecuaciones de estado discutidas en el epígrafe 2.7.2 de la topología suministran un circuito equivalente mucho más sencillo, como se aprecia en la Figura 2-17. En ella, las etapas no lineales se han sustituido por sus efectos sobre el resto del circuito, o en otras palabras, por sus salidas.

Del análisis de las formas de onda de la corriente y tensión desarrolladas en 2.7.1, se puede deducir que el primer armónico a la frecuencia de conmutación es la componente principal de todas las corrientes y tensiones de la red resonante (izquierda de la Figura 2-17). Como consecuencia, las variables de estado que aparecen en esta red son $i_L(t)$ y

$V_S(t)$ las cuales fueron aproximadas por su primer armónico (2-30) y (2-31), y la función descriptora empleada para formular $V_{AB}(t)$ se aproximó también por su primer armónico (2-44). Por lo tanto, es perfectamente válido para aproximar $V_P(t)$ por su primer armónico también (2-64).

$$V_P(t) \cong V_{PA} \cdot \sin(\omega t) + V_{PB} \cdot \cos(\omega t) \quad (2-64)$$

Por otro lado, la segunda variable de salida del bloque no lineal (rectificador de salida), $i_D(t)$, sólo aparece en una de las ecuaciones de estado (2-27). Así, está matemáticamente relacionada con la variable de estado $V_x(t)$. Esta variable de estado está fuera de la etapa del rectificador de salida, como se ve en la derecha de la Figura 2-17. Especial atención merece de nuevo el análisis llevado a cabo en 2.7.1. El termino más importante de Fourier para $V_x(t)$ es su valor medio, o componente DC. Por lo tanto, $i_D(t)$ se debería aproximar por su componente de continua.

$$i_D(t) \cong i_D \quad (2-65)$$

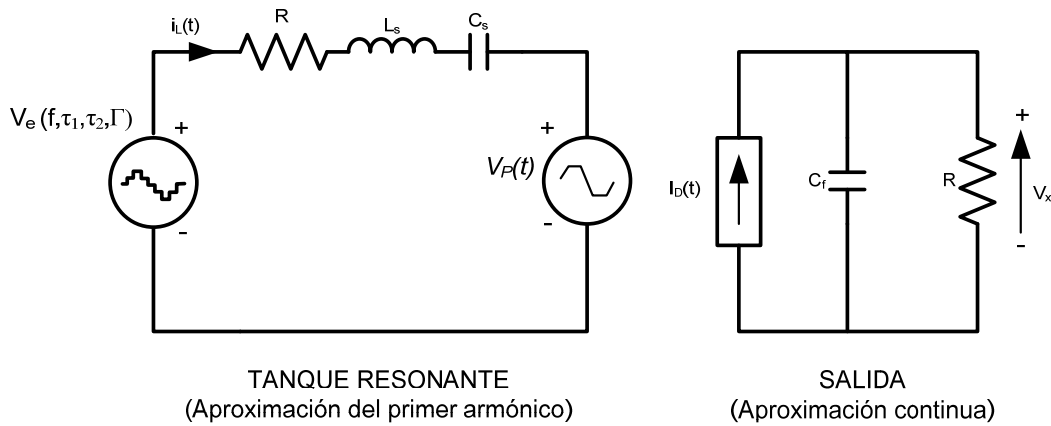


Figura 2-17

Circuito equivalente simplificado para la topología multinivel, después de aplicar la función descriptora extendida al puente rectificador de salida y a la etapa inversora

Una vez se ha seleccionado la aproximación por armónicos, se pueden calcular las funciones descriptoras.

2.7.4.5 Tensión en el condensador resonante paralelo $V_P(t)$

En la Figura 2-18 se representa de nuevo la evolución de $V_P(t)$. Además, (2-21) la evolución de $V_P(t)$ cuando cambia de un valor límite a otro. Con la ayuda de ambos resultados, obtenemos la expresión de $V_P(t)$ en (2-66). Esta expresión pertenece a $N_B[i_L(t), V_x(t)]$ en la Figura 2-15.

$$\begin{aligned}
 V_P(t) &= -V_x + \frac{1}{C_P} \int_{-\varphi}^t i_L(t) dt & 0 < \omega \cdot t \leq \theta \\
 V_P(t) &= V_x & \theta < \omega \cdot t \leq \pi - \varphi \\
 V_P(t) &= V_x + \frac{1}{C_P} \int_{\pi-\varphi}^t i_L(t) dt & \pi - \varphi < \omega \cdot t \leq \pi + \theta \\
 V_P(t) &= -V_x & \pi + \theta < \omega \cdot t \leq 2\pi - \varphi \\
 V_P(t) &= -V_x + \frac{1}{C_P} \int_{2\pi-\varphi}^t i_L(t) dt & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t \leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{2-66}$$

Aproximando las variables de estado por su armónico principal como se muestra en (2-30) y (2-31), la integral en (2-66) toma una forma mucho mas simple (2-67), la cual puede resolverse fácilmente.

$$\begin{aligned}
 V_P(t) &\cong -V_x + \frac{1}{C_P} \int_{-\varphi}^t [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt & 0 < \omega \cdot t \leq \theta \\
 V_P(t) &\cong V_x & \theta < \omega \cdot t \leq \pi - \varphi \\
 V_P(t) &\cong V_x + \frac{1}{C_P} \int_{\pi-\varphi}^t [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt & \pi - \varphi < \omega \cdot t \leq \pi + \theta \\
 V_P(t) &\cong -V_x & \pi + \theta < \omega \cdot t \leq 2\pi - \varphi \\
 V_P(t) &\cong -V_x + \frac{1}{C_P} \int_{2\pi-\varphi}^t [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t \leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{2-67}$$

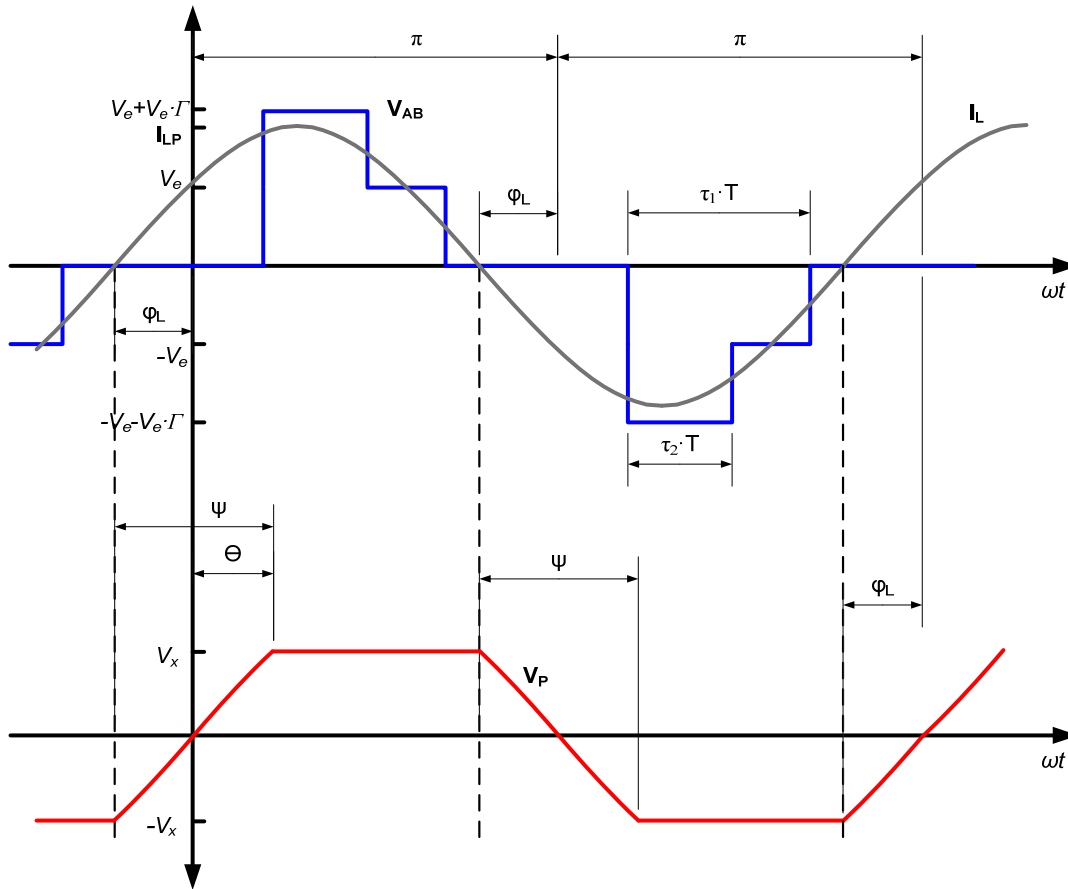


Figura 2-18

Corriente resonante $i_L(t)$ y tensión en el condensador paralelo $V_P(t)$

Operando (2-67) se obtiene (2-68):

$$\begin{aligned}
 V_P(t) &= -V_x + \frac{i_{LA} \cdot [\cos(\varphi) - \cos(\omega \cdot t)] + i_{LB} \cdot [\sin(\varphi) + \sin(\omega \cdot t)]}{C_P \cdot \omega} & 0 < \omega \cdot t \leq \theta \\
 V_P(t) &= V_x & \theta < \omega \cdot t \leq \pi - \varphi \\
 V_P(t) &= V_x - \frac{i_{LA} \cdot [\cos(\varphi) + \cos(\omega \cdot t)] - i_{LB} \cdot [-\sin(\varphi) + \sin(\omega \cdot t)]}{C_P \cdot \omega} & \pi - \varphi < \omega \cdot t \leq \pi + \theta \\
 V_P(t) &= -V_x & \pi + \theta < \omega \cdot t \leq 2\pi - \varphi \\
 V_P(t) &= -V_x + \frac{i_{LA} \cdot [\cos(\varphi) - \cos(\omega \cdot t)] + i_{LB} \cdot [\sin(\varphi) + \sin(\omega \cdot t)]}{C_P \cdot \omega} & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t \leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned} \quad (2-68)$$

Usando los conceptos de i_L y φ , los cuales son la amplitud y la fase respectivamente del primer armónico de $i_L(t)$, (2-68) es equivalente a (2-69).

$$\begin{aligned}
V_p(t) &= -V_x + \frac{i_L}{C_p \cdot \omega} [1 - \cos(\omega \cdot t + \varphi)] & 0 < \omega \cdot t \leq \theta \\
V_p(t) &= V_x & \theta < \omega \cdot t \leq \pi - \varphi \\
V_p(t) &= V_x - \frac{i_L}{C_p \cdot \omega} [1 + \cos(\omega \cdot t + \varphi)] & \pi - \varphi < \omega \cdot t \leq \pi + \theta \\
V_p(t) &= -V_x & \pi + \theta < \omega \cdot t \leq 2\pi - \varphi \\
V_p(t) &= -V_x + \frac{i_L}{C_p \cdot \omega} [1 - \cos(\omega \cdot t + \varphi)] & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t \leq 2 \cdot \pi
\end{aligned} \tag{2-69}$$

Fijándonos de nuevo en la Figura 2-18 y en concreto en el intervalo $0 \leq \omega \cdot t \leq \theta$ en (2-66), se puede deducir que si el valor de tiempo superior en la integración se fija igual al final del intervalo, $V_p(\theta/\omega) = V_{0avg}$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}
V_p\left(\frac{\theta}{\omega}\right) &\cong -V_x + \frac{1}{C_p} \int_{-\varphi}^{\theta} [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt = V_x \Rightarrow \\
2V_x &= \frac{-i_{LA} [\cos(\theta) - \cos(-\varphi)] + i_{LB} [\sin(\theta) - \sin(-\varphi)]}{C_p \omega}
\end{aligned} \tag{2-70}$$

Teniendo en mente (2-36):

$$\begin{aligned}
2V_x &= \frac{-i_L [\cos(\varphi) \cos(\theta) - \cos^2(\varphi)] + i_L [\sin(\varphi) \sin(\theta) + \sin^2(\varphi)]}{C_p \omega} \Rightarrow \\
2V_x &= \frac{i_L - i_L \cos(\varphi + \theta)}{C_p \omega} \Rightarrow V_x = \frac{i_L - i_L \cos(\psi)}{2C_p \omega}
\end{aligned} \tag{2-71}$$

Ahora, sustituimos V_x en (2-69). Resolviendo la expresión y agrupando términos, obtenemos expresiones para los armónicos principales de $V_p(t)$:

$$\begin{aligned}
V_{PA} = F_{Ca1}(i_L, V_x) &= \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot [\psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi)]}{\pi \cdot C_p \omega} \\
V_{PB} = F_{Cb1}(i_L, V_x) &= \frac{-i_{LA} \cdot [\psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi)] + i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega}
\end{aligned} \tag{2-72}$$

La aproximación armónica de $V_p(t)$ se puede expresar uniendo (2-72) como:

$$V_p = \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} \cdot \sin(\omega t) + \frac{-i_{LA} \cdot \mu(\psi) + i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} \cdot \cos(\omega t) \quad (2-73)$$

Donde:

$$\mu(\psi) = \psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \quad (2-74)$$

Aunque $\psi(t)$ no es una variable de estado, se puede expresar como función de variables de estado obteniendo la expresión (2-75) de operar en (2-71) y (2-36). $\psi(t)$ y $\mu(\psi)$ son simplificaciones para obtener (2-73).

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2C_p \omega \cdot V_x}{i_L} = 1 - \frac{2C_p \omega \cdot V_x}{\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (2-75)$$

2.7.4.6 Otros modos de la tensión en $V_p(t)$

$V_p(t)$ tiene siempre la misma forma de onda. No obstante, su formulación puede diferir dependiendo de su fase. En la Figura 2-19 se presenta una situación diferente de la representada en la Figura 2-18. En este caso $V_p(t)$ es igual a $V_x(t)$ en el origen de fases.

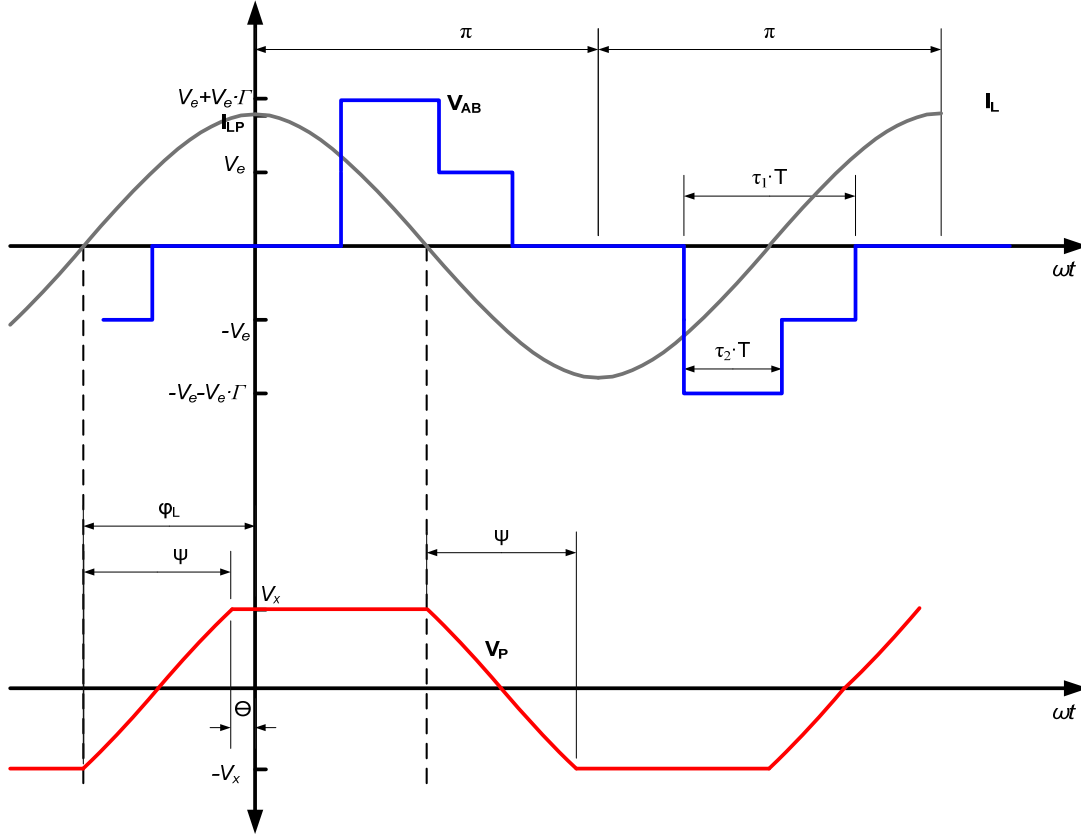


Figura 2-19

Corriente resonante $i_L(t)$ y tensión en el condensador paralelo $V_P(t)$ con una fase diferente.

En este caso θ es negativo.

$$\begin{aligned}
 V_P(t) &\cong V_x & 0 < \omega \cdot t &\leq \pi - \varphi \\
 V_P(t) &\cong V_x + \frac{1}{C_P} \int_{\pi - \varphi}^t [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt & \pi - \varphi < \omega \cdot t &\leq \pi + \theta \\
 V_P(t) &\cong -V_x & \pi + \theta < \omega \cdot t &\leq 2\pi - \varphi \\
 V_P(t) &\cong -V_x + \frac{1}{C_P} \int_{2\pi - \varphi}^t [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] dt & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t &\leq 2 \cdot \pi + \theta \\
 V_P(t) &\cong V_x & 2\pi + \theta < \omega \cdot t &\leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{2-76}$$

Sin embargo, el resultado de la función descriptora es el mismo que en (2-66).

Un tercer modo de operación para $V_P(t)$ se representa en la Figura 2-20. De nuevo se vuelve a obtener el mismo resultado de la función descriptora que en los casos anteriores.

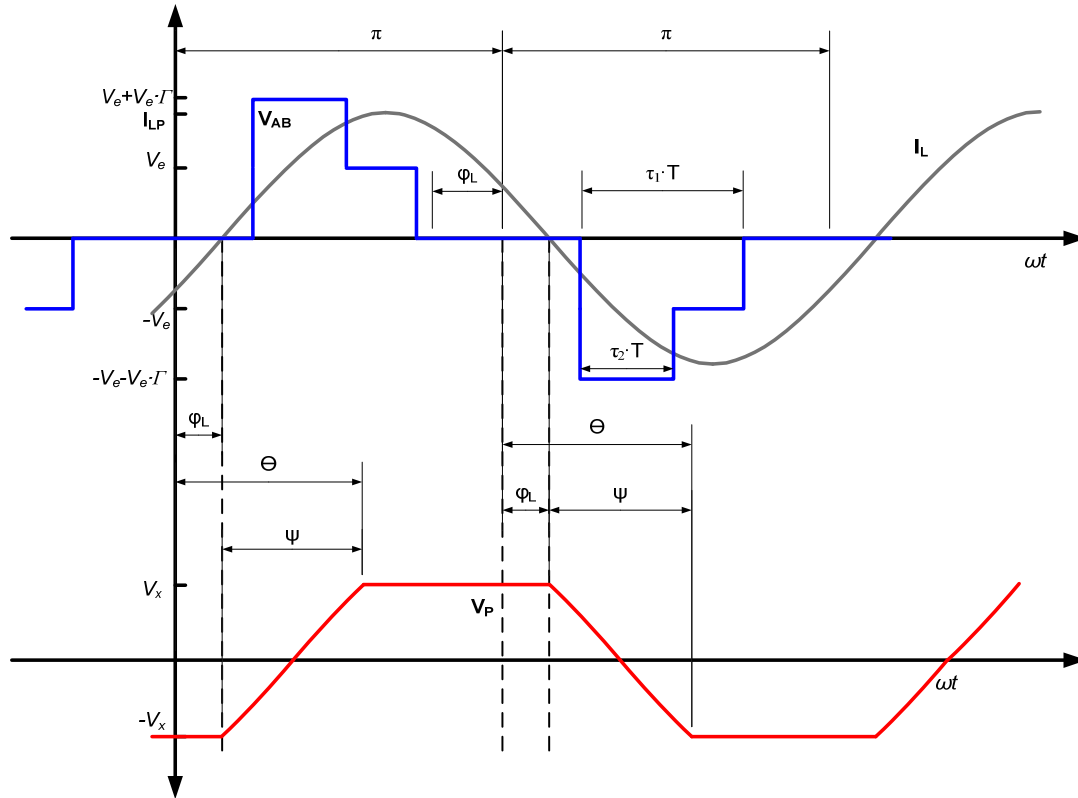


Figura 2-20

Corriente resonante $i_L(t)$ y tensión en el condensador paralelo $V_P(t)$ con una fase diferente. En este caso φ es negativa.

2.7.4.7 Corriente en el puente rectificador de salida

Como ya se dijo, la función descriptora relaciona $F_C(i_{LA}, i_{LB}, V_x)$ los valores medios de $i_D(t)$ y la aproximación en armónicos de las variables de estado $i_{LA}(t)$, $i_{LB}(t)$ y $V_x(t)$. En Figura 2-9 la se representa $i_D(t)$, y en (2-77) la descripción de su modelo matemático.

$$\begin{aligned}
 i_D(t) &= 0 & 0 < \omega \cdot t &\leq \theta \\
 i_D(t) &= i_L(t) & \theta < \omega \cdot t &\leq \pi - \varphi \\
 i_D(t) &= 0 & \pi - \varphi < \omega \cdot t &\leq \pi + \theta \\
 i_D(t) &= -i_L(t) & \pi + \theta < \omega \cdot t &\leq 2\pi - \varphi \\
 i_D(t) &= 0 & 2\pi - \varphi < \omega \cdot t &\leq 2 \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{2-77}$$

Para esta función, el coeficiente en serie de Fourier de continua se obtiene de manera sencilla. Antes de nada, las variables de estado se deben aproximar por sus desarrollos en serie de Fourier. El resultado se obtiene en (2-78).

$$\begin{aligned}
 i_D(t) &= F_C(i_L, V_x) = \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{\theta}{\omega}}^{\frac{\pi-\varphi}{\omega}} i_L(t) \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{\theta+\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi-\varphi}{\omega}} -i_L(t) \cdot dt = \\
 &= \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{\theta}{\omega}}^{\frac{\pi-\varphi}{\omega}} [i_{LA} \sin(\omega t) + i_{LB} \cos(\omega t)] \cdot dt = \frac{i_L}{\pi} \cdot [1 + \cos(\psi)]
 \end{aligned} \tag{2-78}$$

2.7.5 Ecuaciones de estado tras su aproximación armónica

La descripción matemática de la topología en el espacio de estados fue deducida en el epígrafe 2.7.2 y expresadas en (2-25)-(2-27). Estas ecuaciones se muestran de nuevo aquí:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L_S} [V_{AB}(t) - V_S(t) - V_P(t) - r \cdot i_L(t)] \tag{2-79}$$

$$\frac{dV_S(t)}{dt} = \frac{1}{C_S} i_L(t) \tag{2-80}$$

$$\frac{dV_x(t)}{dt} = \frac{1}{C_f} i_D - \frac{V_x}{C_f R} \tag{2-81}$$

Las seis variables representadas en (2-25)-(2-27) fueron sustituidas por sus aproximaciones en armónicos en los siguientes epígrafes. Se muestra un resumen de las expresiones obtenidas:

$$i_L(t) \approx i_{LA} \cdot \sin(\omega \cdot t) + i_{LB} \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{2-82}$$

$$V_S(t) \approx V_{SA} \cdot \sin(\omega \cdot t) + V_{SB} \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{2-83}$$

$$V_x(t) \approx V_x \tag{2-84}$$

$$V_{AB}(t) \cong \frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) \sin(\omega t) - \frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) \cos(\omega t) \quad (2-85)$$

$$V_p(t) = \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} \cdot \sin(\omega t) + \frac{-i_{LA} \cdot \mu(\psi) + i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} \cdot \cos(\omega t) \quad (2-86)$$

$$i_D(t) \cong \frac{i_L}{\pi} \cdot [1 + \cos(\psi)] \quad (2-87)$$

Un estudio de cómo obtener las derivadas de las variables de estado fue tratado en el epígrafe 2.4.

En particular, se obtuvo una aproximación de su variable de estado usando solamente su término fundamental y se dedujo la expresión (2-11). El mismo procedimiento se puede seguir para obtener las derivadas de $i_L(t)$ y de $V_S(t)$, obteniendo los resultados mostrados en (2-88) y (2-89).

$$\begin{aligned} \frac{d(i_L(t))}{dt} &\approx \frac{d}{dt} [i_{LA}(t)] \cdot \sin(\omega t) + i_{LA}(t) \cdot \omega \cos(\omega t) + \frac{d}{dt} [i_{LB}(t)] \cdot \cos(\omega t) - i_{LB}(t) \cdot \omega \sin(\omega t) = \\ &\left[\frac{di_{LA}(t)}{dt} - \omega \cdot i_{LB}(t) \right] \cdot \sin(\omega t) + \left[\omega \cdot i_{LA}(t) + \frac{di_{LB}(t)}{dt} \right] \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2-88)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(V_S(t))}{dt} &\approx \frac{d}{dt} [V_{SA}(t)] \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot V_{SA}(t) \cdot \cos(\omega t) + \frac{d}{dt} [V_{SB}(t)] \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot V_{SB}(t) \cdot \sin(\omega t) : \\ &\left[\frac{dV_{SA}(t)}{dt} - \omega \cdot V_{SB}(t) \right] \cdot \sin(\omega t) + \left[\omega \cdot V_{SA}(t) + \frac{dV_{SB}(t)}{dt} \right] \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2-89)$$

Cuando una variable de estado se aproxima por su valor medio, la expresión de su derivada es mucho más sencilla. Para la tensión de salida $V_x(t)$, se obtiene (2-90)

$$\frac{dV_x(t)}{dt} \approx \frac{dV_x}{dt} \quad (2-90)$$

Ahora, todas estas aproximaciones se introducen en las ecuaciones de estado (2-25)-(2-27) para simplificar las expresiones y el número de variables que las formas. Empezando con (2-26) obtenemos:

$$\left[\frac{dV_{SA}(t)}{dt} - \omega \cdot V_{SB}(t) \right] \cdot \sin(\omega t) + \left[\omega \cdot V_{SA}(t) + \frac{dV_{SB}(t)}{dt} \right] \cdot \cos(\omega t) = \frac{i_{LA} \cdot \sin(\omega t)}{C_S} + \frac{i_{LB} \cdot \cos(\omega t)}{C_S} \quad (2-91)$$

Esta expresión se puede dividir en su termino senoidal y cosenoidal. Ambos terminos deben ser independientes, por lo que se obtienen dos nuevas ecuaciones representadas en (2-92) y (2-93).

$$\left[\frac{dV_{SA}(t)}{dt} - \omega \cdot V_{SB}(t) \right] \cdot \sin(\omega t) = \frac{i_{LA} \cdot \sin(\omega t)}{C_S} \Rightarrow \frac{dV_{SA}(t)}{dt} = \frac{i_{LA}}{C_S} + \omega \cdot V_{SB}(t) \quad (2-92)$$

$$\left[\omega \cdot V_{SA}(t) + \frac{dV_{SB}(t)}{dt} \right] \cdot \cos(\omega t) = \frac{i_{LB} \cdot \cos(\omega t)}{C_S} \Rightarrow \frac{dV_{SB}(t)}{dt} = \frac{i_{LB}}{C_S} - \omega \cdot V_{SA}(t) \quad (2-93)$$

Procediendo de la misma forma en (2-25), obtenemos lo siguiente:

$$\left[\frac{di_{LA}(t)}{dt} - \omega \cdot i_{LB}(t) \right] = \frac{1}{L_S} \left[\frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi \tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) - V_{SA} - \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LA} \right] \quad (2-94)$$

Y su forma cosenoidal se simplifica como sigue:

$$\left[\frac{di_{LB}(t)}{dt} + \omega \cdot i_{LA}(t) \right] = \frac{1}{L_S} \left[-\frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\cos(\pi \tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) - V_{SB} - \frac{i_{LB} \cdot \sin^2(\psi) - i_{LA} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LB} \right] \quad (2-95)$$

Finalmente, en (2-27) en la que las variables fueron aproximadas por su valor medio, los términos senoidales y cosenoidales no aparecen. Así, la expresión se transforma como sigue:

$$\frac{dV_x(t)}{dt} = \frac{i_L}{\pi C_f} [1 + \cos(\psi)] - \frac{V_x}{C_f R} \quad (2-96)$$

Originalmente, las ecuaciones que representaban el espacio de estados eran tres (2-25)-(2-27). En estas ecuaciones había tres variables de estado $i_L(t)$, $V_S(t)$, $V_x(t)$ y otras tres variables $V_{AB}(t)$, $i_D(t)$, $V_P(t)$. Después de aplicar las aproximaciones por Fourier y calcular sus derivadas hemos obtenido un nuevo sistema de ecuaciones de variables de estado. El número se ha ampliado a cinco $i_{LA}(t)$, $i_{LB}(t)$, $V_{SA}(t)$, $V_{SB}(t)$, $V_x(t)$. Estas cinco variables son los coeficientes de Fourier de las ecuaciones originales. El sistema queda pues con estas cinco variables de estado y las cinco ecuaciones en las que se puede encontrar una solución.

Las ecuaciones son:

$$\frac{di_{LA}(t)}{dt} = \frac{1}{L_S} \left[\frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + \frac{L_S \omega \cdot i_{LB} - V_{SA} - \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LA}}{\pi \cdot C_p \omega} \right] \quad (2-97)$$

$$\frac{di_{LB}(t)}{dt} = \frac{1}{L_S} \left[-\frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) - \frac{L_S \omega \cdot i_{LA} - V_{SB} + \frac{i_{LA} \cdot \mu - i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LB}}{\pi \cdot C_p \omega} \right] \quad (2-98)$$

$$\frac{dV_{SA}(t)}{dt} = \frac{1}{C_S} [i_{LA} + C_S \omega \cdot V_{SB}(t)] \quad (2-99)$$

$$\frac{dV_{SB}(t)}{dt} = \frac{1}{C_S} [i_{LB} - C_S \omega \cdot V_{SA}(t)] \quad (2-100)$$

$$\frac{dV_x(t)}{dt} = \frac{1}{C_f} \left[\frac{i_L}{\pi} [1 + \cos(\psi)] - \frac{V_x}{R} \right] \quad (2-101)$$

El nuevo vector de estado se queda como:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} i_{LA} \\ i_{LB} \\ V_{SA} \\ V_{SB} \\ V_x \end{bmatrix} \quad (2-102)$$

Por otro lado, estas ecuaciones no son lineales. Hay raíces cuadradas en los términos de corriente (i_L) y ψ es una función lineal dependiente de $i_{LA}(t)$, $i_{LB}(t)$ y $V_x(t)$.

Una vez que las ecuaciones han sido formuladas, se debería identificar las variables que un diseñador de convertidores le gustaría conocer, lo que llamamos las variables de observación, que no son exactamente las variables de estado. Sin embargo, las variables de observación se pueden obtener fácilmente de ellas. En particular, tenemos las siguientes:

Fase entre la corriente resonante y la tensión de salida del inversor:

$$\varphi = A \tan \left(\frac{i_{LB}}{i_{LA}} \right) \quad (2-103)$$

Amplitud de la corriente resonante:

$$i_L = +\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2} \quad (2-104)$$

Amplitud de la tensión en el condensador serie:

$$V_S = +\sqrt{V_{SA}^2 + V_{SB}^2} \quad (2-105)$$

Tensión de salida:

$$V_x(t) \approx \frac{V_{0x}}{2} = V_x \quad (2-106)$$

El vector de variables de observación:

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} \varphi \\ i_L \\ V_S \\ V_x \end{bmatrix} \quad (2-107)$$

2.8 Normalización

Con el objetivo de hacer una generalización de la solución matemática de las ecuaciones de estado, procedemos a normalizar las ecuaciones. Con ello sólo es necesario resolver el sistema normalizado una vez, y puede luego ser aplicado a cualquier convertidor en particular [9-10]. Los valores base de normalización son:

Tensión base:

$$V_B = V_e \quad (2-108)$$

Impedancia base:

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_S}{C}} \quad (2-109)$$

Corriente base:

$$I_B = \frac{V_B}{Z_B} \quad (2-110)$$

Frecuencia base:

$$f_B = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_S \cdot C}} \quad (2-111)$$

Donde C es la asociación en serie de C_S y C_P :

$$C = \frac{C_S \cdot C_P}{C_S + C_P} \quad (2-112)$$

Así, la normalización base para la tensión U_B , es la tensión de entrada al convertidor y la frecuencia base es la frecuencia de resonancia paralelo del circuito L_S - C_S - C_P . En este último caso, seleccionando una frecuencia base, se obtiene un tiempo base y una pulsación base ya que están relacionadas implícitamente.

$$t_B = \frac{1}{f_B} = 2\pi \cdot \sqrt{L_S \cdot C} \quad (2-113)$$

$$\omega_B = 2\pi \cdot f_B = \frac{1}{\sqrt{L_S \cdot C}} \quad (2-114)$$

Tiene también interés definir la relación entre las dos capacitancias de la red resonante. Esta relación se expresa como:

$$\alpha = \frac{C}{C_P} = \frac{C_S}{C_S + C_P} \quad (2-115)$$

La cual puede reescribirse como:

$$1 - \alpha = \frac{C}{C_S} = \frac{C_P}{C_S + C_P} \quad (2-116)$$

De igual forma, el parámetro β representa la relación entre la capacitancia entre el filtro de salida y la capacitancia resonante:

$$\beta = \frac{C}{C_f} \quad (2-117)$$

Para normalizar el sistema, es necesario obtener algunos resultados intermedios previos.

De (2-109)-(2-111) se conoce que:

$$\frac{Z_B}{L_S} = \sqrt{\frac{L_S}{C}} \cdot \frac{1}{L_S} = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L_S}} = \omega_B = 2 \cdot \pi \cdot f_B \quad (2-118)$$

$$\omega_B Z_B = \sqrt{\frac{L_S}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C \cdot L_S}} = \frac{1}{C} \quad (2-119)$$

De (2-113):

$$\frac{1}{L_S \cdot f_B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L_S}}{L_S} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{C}{L_S}} = \frac{2 \cdot \pi}{Z_B} \quad (2-120)$$

$$\frac{1}{C_S \cdot f_B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L_S}}{C_S} = (1 - \alpha) \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L_S}}{C} = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \alpha) \sqrt{\frac{L_S}{C}} = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \alpha) Z_B \quad (2-121)$$

2.8.1 Ecuación de estado 1

Para normalizar la primera expresión de estado, se debe multiplicar por el tiempo base y dividir por la corriente base a ambos lados de la expresión.

$$\frac{t_B}{I_B} \frac{di_{LA}(t)}{dt} = \frac{t_B}{I_B} \frac{1}{L_S} \left[\frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi \tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + L_S \omega \cdot i_{LB} - V_{SA} - \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LA} \right] \Rightarrow$$

La corriente, tensión y tiempo están normalizadas. Agrupando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}_{LA}(t)}{d\hat{t}} &= \left[\frac{t_B}{I_B \cdot L_S} \cdot \frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + \right. \\ &\quad \left. \frac{t_B}{I_B \cdot L_S} L_S \omega \cdot i_{LB} - \frac{t_B}{I_B \cdot L_S} V_{SA} - \frac{t_B}{I_B \cdot L_S} \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - \frac{t_B}{I_B \cdot L_S} r \cdot i_{LA} \right] \Rightarrow \\ \frac{d\hat{i}_{LA}(t)}{d\hat{t}} &= \left[\frac{2t_B Z_B}{L_S \pi} \frac{V_e}{V_B} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + \right. \\ &\quad \left. t_B \omega \cdot \frac{i_{LB}}{I_B} - \frac{t_B Z_B}{L_S} \frac{V_{SA}}{V_B} - \frac{t_B}{L_S} \frac{\frac{i_{LA}}{I_B} \cdot \sin^2(\psi) + \frac{i_{LB}}{I_B} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - \frac{t_B}{L_S} r \cdot \frac{i_{LA}}{I_B} \right] \Rightarrow \\ \frac{d\hat{i}_{LA}(t)}{d\hat{t}} &= \left[\frac{2t_B Z_B}{L_S \pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + \right. \\ &\quad \left. t_B \omega \cdot \hat{i}_{LB} - \frac{t_B Z_B}{L_S} \hat{V}_{SA} - \frac{t_B}{L_S \pi \cdot C_p \omega} (\hat{i}_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + \hat{i}_{LB} \cdot \mu) - \frac{t_B}{L_S} r \cdot \hat{i}_{LA} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las simplificaciones consideradas en (2-108)-(2-121):

$$\frac{2t_B Z_B}{L_S \pi} = \frac{2\sqrt{\frac{L_s}{C}}}{L_S \pi \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}} = 4$$

$$t_B \omega \cdot \hat{i}_{LB} = \frac{\hat{\omega} \omega_B}{f_B} \cdot \hat{i}_{LB} = \frac{1}{\frac{\sqrt{L_s C}}{1}} \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LB} = 2\pi \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LB}$$

$$\frac{t_B Z_B}{L_S} \hat{V}_{SA} = \frac{2\pi\sqrt{L_s C} \sqrt{\frac{L_s}{C}}}{L_s} = 2\pi$$

$$\frac{t_B}{L_S \pi \cdot C_p \omega} = \frac{2\pi\sqrt{L_s C}}{L_S \pi \cdot C_p \hat{\omega} \omega_B} = \frac{2\alpha}{\hat{\omega}}$$

$$\frac{t_B}{L_S} r \cdot \hat{i}_{LA} = \frac{2\pi\sqrt{L_s C}}{L_s} r \cdot \hat{i}_{LA} = 2\pi \sqrt{\frac{C}{L_s}} r \cdot \hat{i}_{LA} = 2\pi \frac{r}{Z_B} \cdot \hat{i}_{LA} = 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LA}$$

Finalmente, sustituyendo obtenemos que:

$$\frac{d\hat{i}_{LA}(t)}{d\hat{t}} = \left[\begin{aligned} &4((2 + \Gamma)\text{Sin}(\pi\tau_1) - \Gamma\text{Sin}(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + 2\pi \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LB} \\ &- 2\pi \cdot \hat{V}_{SA} - \frac{2\alpha}{\hat{\omega}} (\hat{i}_{LA} \cdot \text{Sin}^2(\psi) + \hat{i}_{LB} \cdot \mu) - 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LA} \end{aligned} \right] \quad (2-122)$$

2.8.2 Ecuación de estado 2

Esta expresión se debe operar de la misma forma que la expresión 1, empezando por multiplicar por el tiempo base y dividiendo por la corriente base en ambos lados de la expresión.

$$\frac{t_B}{I_B} \frac{di_{LB}(t)}{dt} = \left[\begin{aligned} &-\frac{t_B}{I_B L_S} \frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\text{Cos}(\pi\tau_1) + \text{Cos}(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) \\ &-\frac{t_B}{I_B L_S} L_S \omega \cdot i_{LA} - \frac{t_B}{I_B L_S} V_{SB} + \frac{t_B}{I_B L_S} \frac{i_{LA} \cdot \mu - i_{LB} \cdot \text{Sin}^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} - \frac{t_B}{I_B L_S} r \cdot i_{LB} \end{aligned} \right] \Rightarrow$$

Agrupando términos:

$$\frac{d\hat{i}_{LB}(t)}{d\hat{t}} = \left[\begin{aligned} &-\frac{t_B}{I_B L_S} \frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\text{Cos}(\pi\tau_1) + \text{Cos}(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) - \\ &\frac{t_B}{I_B L_S} L_S \omega \cdot i_{LA} - \frac{t_B}{I_B L_S} V_{SB} + \frac{t_B}{I_B L_S} \frac{i_{LA} \cdot \mu - i_{LB} \cdot \text{Sin}^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} - \frac{t_B}{I_B L_S} r \cdot i_{LB} \end{aligned} \right] \Rightarrow$$

De nuevo, usando las simplificaciones representadas en las expresiones (2-108)-(2-121):

$$\frac{t_B}{I_B L_S} \frac{2\Gamma V_e}{\pi} = \frac{2\Gamma V_e}{\pi} \frac{2\pi \sqrt{L_S C} \sqrt{\frac{L_S}{C}}}{V_B L_S} = 4\Gamma$$

$$\frac{t_B}{I_B L_S} L_S \omega \cdot i_{LA} = 2\pi \sqrt{L_S C} \hat{\omega} \omega_B \hat{i}_{LA} = 2\pi \cdot \hat{\omega} \hat{i}_{LA}$$

$$\frac{t_B}{I_B L_S} V_{SB} = \frac{t_B Z_B}{L_S} \hat{V}_{SB} = \frac{2\pi \sqrt{L_S C} \sqrt{\frac{L_S}{C}}}{L_S} \hat{V}_{SB} = 2\pi \cdot \hat{V}_{SB}$$

$$\frac{t_B}{I_B L_S} \frac{i_{LA} \cdot \mu - i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} =$$

$$\frac{t_B}{L_S \pi \cdot C_p \hat{\omega} \omega_B} (\hat{i}_{LA} \cdot \mu - \hat{i}_{LB} \cdot \sin^2(\psi)) = 2\alpha (\hat{i}_{LA} \cdot \mu - \hat{i}_{LB} \cdot \sin^2(\psi))$$

$$\frac{t_B}{I_B L_S} r \cdot i_{LB} = \frac{t_B}{L_S} r \cdot \hat{i}_{LB} = \frac{2\pi \sqrt{L_S C}}{L_S} r \cdot \hat{i}_{LB} = \frac{2\pi \cdot r}{Z_B} \cdot \hat{i}_{LB} = 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LB}$$

Sustituyendo estos resultados, finalmente obtenemos:

$$\frac{d\hat{i}_{LB}(t)}{d\hat{t}} = \left[-4\Gamma(\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1-\tau_1+2\tau_2))) - \right. \\ \left. 2\pi \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LA} - 2\pi \cdot \hat{V}_{SB} + 2\alpha (\hat{i}_{LA} \cdot \mu - \hat{i}_{LB} \cdot \sin^2(\psi)) - 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LB} \right] \quad (2-123)$$

2.8.3 Ecuación de estado 3

En este caso, como tenemos la derivada de la tensión con respecto al tiempo, se multiplica por el tiempo base y se divide por la tensión base a ambos lados de la expresión.

$$\frac{t_B}{U_B} \frac{dV_{SA}(t)}{dt} = \frac{t_B}{C_S} \left[i_{LA} \cdot \frac{1}{U_B} + C_S \cdot \omega \frac{V_{SB}(t)}{U_B} \right] \Rightarrow$$

La corriente, tensión y tiempo están normalizadas. t_B se transforma usando (2-113) para expresarse como el inverso de la frecuencia.

$$\frac{d\hat{V}_{SA}(t)}{d\hat{t}} = i_{LA} \cdot \frac{1}{U_B \cdot C_S f_B} + \frac{\omega}{f_B} \cdot \hat{V}_{SB}(t) \Rightarrow$$

C_S y f_B se pueden sustituir usando (2-121). La frecuencia base se convierte en ω_B .

$$\frac{d\hat{V}_{SA}(t)}{d\hat{t}} = i_{LA} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (1-\alpha) Z_B}{U_B} + 2 \cdot \pi \frac{\omega}{\omega_B} \cdot \hat{V}_{SB}(t) \Rightarrow$$

Ahora, Z_B dividido por U_B es el inverso de i_{LA} normalizadas.

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_{SA}(t)}{d\hat{t}} = (1-\alpha) \cdot \hat{i}_{LA} + \hat{\omega} \cdot \hat{V}_{SB}(t) \quad (2-124)$$

2.8.4 Ecuación de estado 4

Como en el caso anterior, la expresión se multiplica por el tiempo base y se divide por la tensión base a ambos lados de la expresión.

$$\frac{t_B}{U_B} \frac{dV_{SB}(t)}{dt} = \frac{t_B}{C_S} \left[i_{LB} \cdot \frac{1}{U_B} - C_S \cdot \omega \frac{V_{SA}(t)}{U_B} \right] \Rightarrow$$

La corriente, tensión y tiempo están normalizadas. t_B se transforma usando (2-113) para expresarse como el inverso de la frecuencia.

$$\frac{d\hat{V}_{SB}(t)}{dt} = i_{LB} \cdot \frac{1}{U_B \cdot C_S f_B} - \frac{\omega}{f_B} \cdot \hat{V}_{SA}(t) \Rightarrow$$

C_S y f_B se pueden sustituir usando (2-121). La frecuencia base se convierte en ω_B .

$$\frac{d\hat{V}_{SB}(t)}{dt} = i_{LB} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (1-\alpha) Z_B}{U_B} - 2 \cdot \pi \frac{\omega}{\omega_B} \cdot \hat{V}_{SA}(t) \Rightarrow$$

Ahora, término Z_B dividido por U_B es el inverso de i_{LB} normalizadas.

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_{SB}(t)}{dt} = (1-\alpha) \cdot \hat{i}_{LB} - \hat{\omega} \cdot \hat{V}_{SA}(t) \quad (2-125)$$

2.8.5 Ecuación de estado 5

Como tenemos la derivada de la tensión en la expresión, se multiplica por el tiempo base y se divide por la tensión base a ambos lados de la expresión.

$$\frac{t_B}{U_B} \frac{dV_x(t)}{dt} = \frac{t_B}{C_f} \left[\frac{i_L}{\pi} [1 + \cos(\psi)] \cdot \frac{1}{U_B} - \frac{V_x}{R \cdot U_B} \right] \Rightarrow$$

Tenemos que la tensión y tiempo están normalizados en la izquierda de la expresión. En la parte derecha, t_B se transforma usando (2-113) para obtener el inverso de la frecuencia. C_f se sustituye según (2-117).

$$\frac{d\hat{V}_x(t)}{dt} = \frac{i_L}{\pi} [1 + \cos(\psi)] \cdot \frac{\beta}{U_B \cdot C \cdot f_B} - \frac{\beta \cdot \hat{V}_x}{R \cdot C \cdot f_B} \Rightarrow$$

C se puede transformar en C_S teniendo en cuenta (2-115).

$$\frac{d\hat{V}_x(t)}{d\hat{t}} = \frac{i_L}{\pi} [1 + \cos(\psi)] \cdot \frac{\beta}{U_B \cdot (1-\alpha) C_S \cdot f_B} - \frac{\beta \cdot \hat{V}_x}{R \cdot (1-\alpha) C_S \cdot f_B} \Rightarrow$$

C_S y f_B se pueden sustituir usando (2-121).

$$\frac{d\hat{V}_x(t)}{d\hat{t}} = \frac{i_L}{\pi} [1 + \cos(\psi)] 2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot \frac{Z_B}{U_B} - 2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot \frac{Z_B}{R} \hat{V}_x \Rightarrow$$

Ahora, Z_B dividido por U_B es el inverso de i_L normalizadas. También se normaliza R .

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_x(t)}{d\hat{t}} = \frac{\beta}{\pi} [1 + \cos(\psi)] \hat{i}_L - \frac{\beta}{R} \hat{V}_x \quad (2-126)$$

2.8.6 Ecuaciones de estado normalizadas

Reuniendo las ecuaciones de estado normalizadas obtenidas en los epígrafes anteriores, obtenemos:

$$\frac{d\hat{i}_{LA}(t)}{d\hat{t}} = \left[\begin{aligned} &4((2 + \Gamma) \sin(\pi \tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + 2\pi \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LB} \\ &- 2\pi \cdot \hat{V}_{SA} - \frac{2\alpha}{\hat{\omega}} (\hat{i}_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + \hat{i}_{LB} \cdot \mu) - 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LA} \end{aligned} \right]$$

$$\frac{d\hat{i}_{LB}(t)}{d\hat{t}} = \left[\begin{aligned} &-4\Gamma(\cos(\pi \tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) - \\ &2\pi \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{i}_{LA} - 2\pi \cdot \hat{V}_{SB} + 2\alpha(\hat{i}_{LA} \cdot \mu - \hat{i}_{LB} \cdot \sin^2(\psi)) - 2\pi \cdot \hat{r} \cdot \hat{i}_{LB} \end{aligned} \right]$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_{SA}(t)}{d\hat{t}} = (1-\alpha) \cdot \hat{i}_{LA} + \hat{\omega} \cdot \hat{V}_{SB}(t) \quad (2-127)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_{SB}(t)}{d\hat{t}} = (1-\alpha) \cdot \hat{i}_{LB} - \hat{\omega} \cdot \hat{V}_{SA}(t)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{d\hat{V}_x(t)}{d\hat{t}} = \frac{\beta}{\pi} [1 + \cos(\psi)] \hat{i}_L - \frac{\beta}{R} \hat{V}_x$$

Para interpretar estas ecuaciones se deben tener en consideración algunas relaciones:

$$\hat{i}_L = \frac{\sqrt{\hat{i}_{LA}^2 + \hat{i}_{LB}^2}}{I_B} = \sqrt{\hat{i}_{LA}^2 + \hat{i}_{LB}^2} \quad (2-128)$$

$$\mu(\psi) = \psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \quad (2-129)$$

La definición de ψ , como una función de magnitudes normalizadas, se puede deducir como sigue. Lo primero que hacer es transformar cualquier tensión y corriente a sus formas normalizadas, multiplicando por la magnitud apropiada.

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2C_P \omega \cdot V_x}{i_L} = 1 - \frac{2C_P (\hat{\omega} \cdot \omega_B) \cdot (\hat{V}_x \cdot U_B)}{\hat{i}_L \cdot I_B} \Rightarrow$$

Ahora, C_P se sustituye en base a (2-116) y U_B se divide por I_B y se sustituye por Z_B .

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2\hat{\omega} \hat{V}_x}{\hat{i}_L} \frac{C}{\alpha} \omega_B Z_B \Rightarrow$$

Considerando (2-119), la definición de ψ como función de magnitudes normalizadas se representa en (2-130).

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2\hat{\omega} \hat{V}_x}{\alpha \cdot \hat{i}_L} \quad (2-130)$$

Obviamente, el vector de variables de estado normalizadas tiene la siguiente forma:

$$\vec{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{i}_{LA} \\ \hat{i}_{LB} \\ \hat{V}_{SA} \\ \hat{V}_{SB} \\ \hat{V}_x \end{bmatrix} \quad (2-131)$$

2.9 Conclusiones

En los primeros epígrafes del presente capítulo, se han descrito brevemente las técnicas más utilizadas hoy en día para la modelización matemática de topologías resonantes. Se han presentado los principios de modelado en el espacio de estados y en particular, se ha puesto especial atención en la descripción del método promediado generalizado y en la función descriptora extendida.

Seguidamente se ha detallado cuidadosamente su aplicación a la topología multinivel. En consecuencia, se han seleccionado las variables del modelo, y se ha discutido el grado de sus aproximaciones armónicas, se han identificado las etapas no lineales de la topología y se ha usado la función descriptora extendida en ellas cuando ha sido necesario. Como resultado, se ha obtenido un sistema de cinco ecuaciones no lineales con cinco variables de estado para la topología multinivel propuesta. Estas ecuaciones representan un modelo en gran señal de la topología, de las cuales se puede buscar una solución fácilmente mediante la integración por métodos numéricos. Finalmente se ha normalizado este modelo, dando lugar al modelo normalizado de la topología y a la normalización de sus variables de estado.

2.10 Bibliografía

- [1] *Chin-Yuan Hsu; Jian-Ting Lai; Ming-Che Lin; Ming-Kai Yang; Ming-Jyun Li; Ren-Wei Huang*, “The design and implementation of LLC resonant half-bridge converter with natural interleaved power-factor-correction,” *Power Electronics and Drive Systems (PEDS*, pp.246-255, Dec. 2011.
- [2] *M.G. Kim, J.H. Lee, J.H. Ko, M.J. Youn*. “A Discrete Time Domain Modeling and Analysis of Controlled Parallel Resonant Converter”. *IEEE Proceedings of PESC’91*. pp 730-736.
- [3] *Zahid, Z.U.; Lai, J.-S.J.; Huang, X.K.; Madiwale, S.; Hou, J.*, “Damping impact on dynamic analysis of LLC resonant converter”, *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, pp.2834-2841, March 2014.
- [4] *Zhiyu Cao; Nzeugang, F.H.; Junbing Tao; Frohleke, N.; Bocker, J.*, “Novel dynamical modeling for series-parallel resonant converter”, *Industrial Electronics (ISIE)*, *IEEE International Symposium*, pp.414,419, May 2012.
- [5] *Juan A. Martín*. “Aportación al diseño de convertidores continua-continua para alta tensión de salida basados en la topología resonante PRC-LCC”. *Tesis Doctoral*. Universidad de Oviedo 2001.
- [6] *J.A. Sabaté, M.M. Jovanovic, F.C. Lee, R.T. Gean*. “Analysis and Design-Optimization of LCC Resonant Inverter for High-Frequency AC Distributed Power System”. *IEEE Trans. On Industrial Electronics*, vol. 42 n°1 pag. 63-71, Febrero 1995.
- [7] *Branas, C.; Azcondo, F.J.; Casanueva, R.; Diaz, F.J.*, “L-C_p approximation of a phase-controlled LC_sC_p resonant converter to study the dynamic response as a LED lamp driver”, *Industry Applications Society Annual Meeting (IAS)*, 2012 IEEE, pp.1-6, Oct. 2012.

- [8] *Sanders, S.R.; Noworolski, J.M.; Liu, X.Z.; Verghese, George C.*, “Generalized averaging method for power conversion circuits”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.6, nº2, pp.251-259, Apr 1991.

- [9] *Martin-Ramos, J.A.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Nuño, F.; Martinez, J.A.*, “Power Supply for a High-Voltage Application”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.23, nº4, pp.1608-1619, July 2008.

- [10] *R. Casanueva, C. Brañas, F.J. Azcondo, F.J. Díaz*, “Teaching resonant converters: Properties and applications for variable loads” *IEEE Trans. On Industrial Electronics* Vol. 57 nº10, pp 3355-3363, Oct 2010.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO MATEMÁTICO EN GRAN SEÑAL.

En el capítulo anterior se han presentado las ecuaciones diferenciales que modelizan el sistema multinivel propuesto. Estas ecuaciones no tienen solución analítica, por lo que se ha de buscar un método matemático numérico para su resolución.

En este capítulo, se expondrán varios métodos matemáticos para su resolución, y los resultados de aplicarlos se contrastarán para dar validez al modelo propuesto.

3 Solución numérica del modelo matemático en gran señal

En general cuando un diseñador afronta un nuevo diseño de un convertidor, se encuentra con la necesidad de obtener un sistema de regulación para el convertidor. Normalmente se acude a técnicas de linealización utilizando modelos de pequeña señal alrededor de puntos de funcionamiento, para poder conocer la respuesta a variaciones pequeñas en las señales de entrada.

Este tipo de técnicas a menudo presentan precisión suficiente para el diseño del bucle de regulación del sistema, siempre y cuando las variaciones de las señales de entrada estén contenidas en ciertos márgenes pequeños de variación.

El problema es que no en pocas ocasiones, las señales de entrada e incluso el valor de la carga de salida pueden tener variaciones substanciales en sus valores, de forma que el sistema pasa de un punto de funcionamiento a otro con características diferentes, teniendo variaciones importantes en los transitorios de las señales desde un punto a otro. El diseñador a menudo necesita acotar estas variaciones importantes en el transitorio para poder dimensionar los elementos del sistema de forma que no se sobrepase ningún límite que pueda poner en riesgo la integridad de los elementos que componen el convertidor.

En este sentido, el modelado en gran señal es la herramienta adecuada para predecir correctamente las respuestas transitorias y comprobar la estabilidad en una región de operación determinada [1-3]. En este capítulo se propone un modelo con estas características para la topología multinivel. De esta forma se adquiere la capacidad de predecir la respuesta transitoria y el comportamiento en régimen permanente de los convertidores basados en esta disposición de elementos. El hecho de que el modelo es válido para todos los modos de funcionamiento del convertidor, lo hace idóneo para el estudio de cualquier respuesta transitoria, incluso con simulaciones no lineales en bucle cerrado.

En el capítulo anterior se ha propuesto un modelo matemático que representa, en el espacio de estados, la topología multinivel propuesta. Este modelo contiene la información suficiente para describir el comportamiento de cualquier convertidor

basado en esta disposición de componentes bajo cualesquiera condiciones, ya sean de estabilidad o de evolución transitoria.

Para obtener dicha información, debe considerarse que el modelo está constituido por un grupo de ecuaciones diferenciales de primer orden, dependientes del tiempo y no lineales, lo que proporciona una descripción del sistema continua en el tiempo [4-6]. Este grupo de ecuaciones diferenciales no pueden ser resueltas de forma analítica aplicando ningún método existente, por lo que se recurre a métodos aproximados de integración numérica.

Éstos permiten obtener conjuntos de puntos de las soluciones, que posteriormente pueden ajustarse por cualquier método algebraico (interpolación, regresión...) a la curva que mejor los contenga. Dicha curva será una solución aproximada de la expresión diferencial.

Los métodos numéricos más comunes para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales son el método de Euler y el método de Runge –Kutta [7]. Para aplicarlos, debe tomarse un instante de tiempo inicial t_0 , siendo necesario conocer los valores iniciales de las variables de estado $x_i(t_0)$, y la evolución de las entradas (entre las cuales se incluyen los parámetros de control f, τ_1, τ_2) durante cualquier instante de tiempo posterior. Entonces, es posible evaluar el valor de las variables de estado en un instante de tiempo t_1 , muy próximo a t_0 .

3.1 Método de Euler

El método de Euler uno de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones más simple. Se basa en la expresión:

$$x_i(t_{n+1}) \approx x_i(t_n) + \varepsilon \left. \frac{dx_i(t)}{dt} \right|_{t_n} \quad (3-1)$$

Donde $\varepsilon = t_{n+1} - t_n$. La expresión (3-1) es simplemente el desarrollo en serie de Taylor de la variable de estado, truncada en su primer término. El error en esta aproximación es

del orden de ε^2 por lo que cuanto menor sea ε mayor será la precisión de la aproximación.

Para realizar el cálculo asociado de (3-1), se parte de que se puede determinar la derivada de cualquier variable de estado en el instante inicial. En efecto, estos términos aparecen en las ecuaciones diferenciales que describen el modelo en el espacio de estados, y constituyen las únicas incógnitas en el inicio, pues como ya se dijo, en ese momento se conoce el valor de las variables de estado, las entradas y los parámetros de control. Con todos estos datos es muy sencillo utilizar (3-1) para hallar el valor de todas las variables de estado en el instante ε , $x_i(\varepsilon)$.

Una vez que se conocen todas las entradas y aproximadamente todas las variables de estado en el instante ε , puede utilizarse ese momento, junto con el desarrollo truncado de Taylor, como partida para determinar el valor de las variables de estado en el instante 2ε . Siguiendo iterativamente el proceso es posible resolver en el tiempo, de forma aproximada, el sistema de ecuaciones del modelo en gran señal.

Este método de integración numérica tiene implícito un error que será pequeño si las dos curvas de la figura Figura 3-1 están próximas, lo que ocurrirá cuando el error en cada variable calculada es pequeño. Puede estimarse que el error en cada paso es del orden de ε^2 , mientras que el número de pasos requerido para llegar a un instante específico es del orden ε^{-1} . El error acumulado en el valor que proporciona el modelo para el instante final que se definió, debe ser por tanto del orden de ε . De aquí que haciendo ε suficientemente pequeño, pueda calcularse la solución con el grado de precisión que se quiera. Se puede afirmar que el conocimiento del estado inicial y de la evolución de las señales de control, basta para calcular la evolución de las variables de estado. Sin embargo, existen métodos numéricos que ofrecen mayor precisión sin necesidad de aumentar el número de iteraciones para llegar a una solución, aunque conllevan mayor tiempo de computación. Uno de estos métodos se comenta en el epígrafe siguiente.

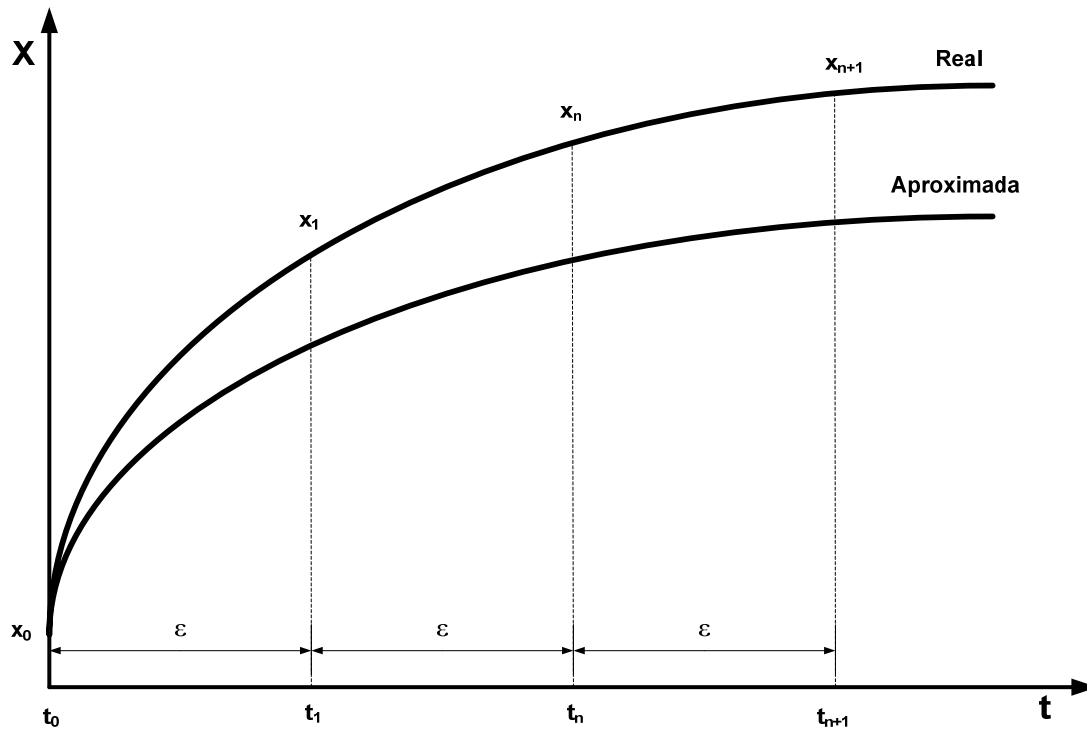


Figura 3-1

Diferencias entre la forma de onda real y aproximada mediante métodos numéricos

3.2 Método de Runge-Kutta

Este método numérico de resolución de ecuaciones es el que mejor precisión genera. Consiste en determinar constantes aproximadas equivalentes al desarrollo en serie de Taylor de orden 4 para la variable de estado x_i en el instante t_n . Para que tal proposición se cumpla, los términos k_i deben ser múltiplos de constantes de $\frac{dx(t)}{dt}$ en puntos escogidos. Las expresiones toman la siguiente forma:

$$x_i(t_{n+1}) \approx x_i(t_n) + a \cdot k_1 + b \cdot k_2 + c \cdot k_3 + d \cdot k_4 \quad (3-2)$$

$$x_i(t_{n+1}) \approx x_i(t_n) + \frac{1}{6}(k_{1i} + b_2 \cdot k_{2i} + 2 \cdot k_{3i} + k_{4i}) \quad (3-3)$$

Quedando los coeficientes como:

$$k_{1i} = \varepsilon \left. \frac{dx_i(t)}{dt} \right|_{t_n} \quad (3-4)$$

$$k_{2i} = \varepsilon \left. \frac{d \left[x_i(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot k_{1i} \right]}{dt} \right|_{t_n + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (3-5)$$

$$k_{3i} = \varepsilon \left. \frac{d \left[x_i(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot k_{2i} \right]}{dt} \right|_{t_n + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (3-6)$$

$$k_{4i} = \varepsilon \left. \frac{d \left[x_i(t) + \varepsilon \cdot k_{3i} \right]}{dt} \right|_{t_n + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (3-7)$$

Con este método de cálculo el error acumulado es de orden ε^4 , como se desprende de emplear un algoritmo equivalente al polinomio de Taylor de orden cuatro. El precio por esta mejora se cifra en la necesidad de evaluar cada una de las variables de estado cuatro veces distintas en cada paso.

3.3 Aplicación del algoritmo numérico al sistema

Hemos dicho en epígrafes anteriores, que para poder aplicar un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales, es necesario previamente conocer en un instante dado las condiciones iniciales de las variables de estado $i_{LA}(t_0)$, $i_{LB}(t_0)$, $V_{SA}(t_0)$, $V_{SB}(t_0)$, $V_x(t_0)$ que serán el punto de partida a partir del cual empezará la simulación, así como los parámetros de control que regirán el comportamiento del sistema V_{AB} , f , τ_1 , τ_2 .

Hay que tener en cuenta que cuando se hicieron las simplificaciones pertinentes para la obtención del modelo, se consideró el valor de la frecuencia como constante, lo que

implica que para su validez ésta debiera mantener constante. No obstante, se puede considerar el modelo válido si la frecuencia varía con una variación suficientemente lenta como para poder considerarla constante en un cierto periodo de tiempo.

Es necesario además tener presente alguna particularidad que se puede presentar en el transcurso de la simulación como pueden ser puntos de indeterminación producidos en general por divisiones por un término nulo.

Por ejemplo, recordemos la expresión siguiente:

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2C_p \omega \cdot (V_x + 2V_\gamma)}{\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}}$$

Esta expresión tiene una ligera variación respecto a la original obtenida en el capítulo anterior, y se basa en la inclusión de la tensión de caída en los diodos ya que de esta forma, se ayuda a la convergencia del sistema reflejando un sistema más acorde con la realidad.

Otro problema adicional es que cuando la corriente $i_L(t)$ se anula por su condición de senoidal, se produce una indeterminación. Para evitar este tipo de problemas es necesario comprender el funcionamiento del sistema multinivel. Se sabe que el rectificador de salida conduce un tiempo concreto en cada periodo, y que dicho tiempo viene representado por el valor que adquiera $\psi(t)$ en cada momento. Si $\psi(t)$ vale 0, el rectificador conduce todo el periodo, y si por el contrario vale π no conduce ni un instante. Precisamente esto es lo que pasa si la corriente resonante es demasiado pequeña para conseguir que la capacidad paralelo alcance el valor de la tensión de salida cuando este se mantiene alto.

En la siguiente figura se muestra el diagrama de flujo que representa el proceso iterativo de cálculo del sistema:

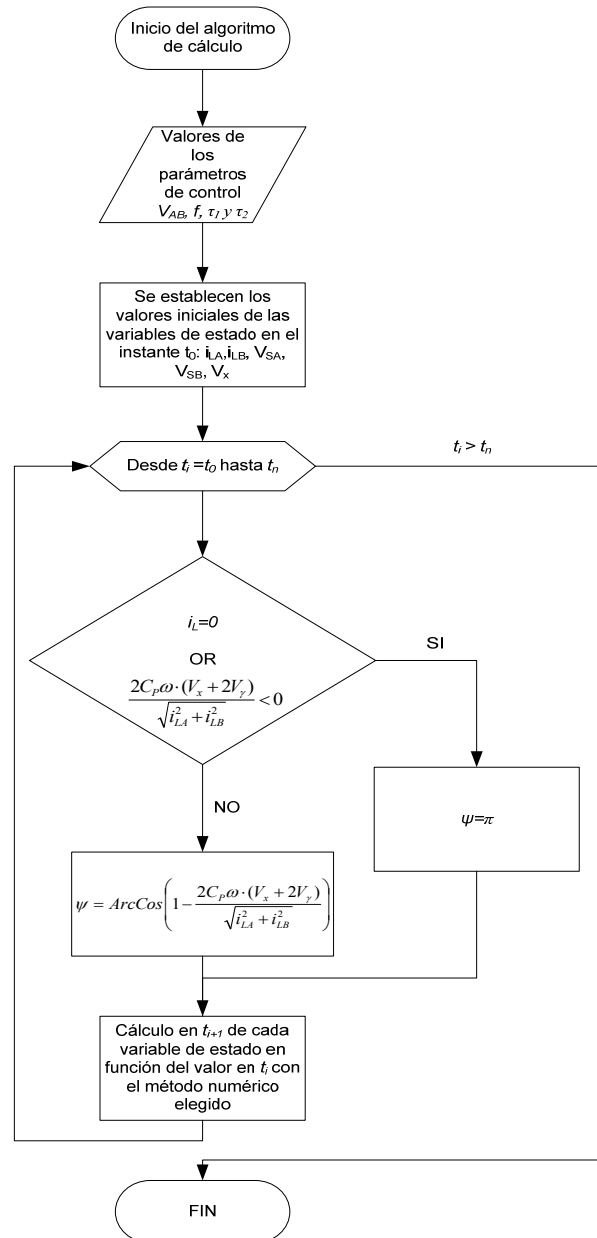


Figura 3-2

Diagrama de flujo del proceso de resolución del sistema de ecuaciones diferenciales aplicando un método numérico

3.4 Resultados experimentales

Una vez planteado un modelo que representa un sistema, se ha de dar validez al mismo. Hay diversas formas de validar un sistema como puede ser la aplicación de programas informáticos de reconocido prestigio en la resolución de un circuito, o la construcción en laboratorio de un prototipo que permita la lectura directa de las señales deseadas. Para la validación del modelo en gran señal hemos elegido la primera de ellas, utilizando el programa PSIM y comparando los resultados con nuestro sistema.

En posteriores capítulos se mostrará un prototipo real de laboratorio que nos permitirá evaluar resultados en régimen permanente y compararlos con nuestro modelo simplificado. Este prototipo estará a una escala de 1:10 para que las magnitudes no tengan valores tan elevados, con lo que la potencia obtenida será de 1:100, y no se incluirá el transformador de alta tensión para trabajar con tensiones más bajas. También se han usado valores de cargas bajos para no trabajar con potencias muy elevadas.

Las simulaciones con el paquete informático se hacen con los valores también a escala 1:10 para poder comparar los diferentes resultados que se obtienen con los obtenidos con el prototipo de laboratorio de los capítulos siguientes.

3.4.1 Verificación del modelo con programas informáticos

La verificación del modelo con programas informáticos se ha llevado a cabo evaluando varias variables de estado como son la corriente resonante $i_L(t)$, la tensión en el condensador serie $V_s(t)$, y la tensión de salida $V_x(t)$. Las simulaciones se han hecho eligiendo como punto inicial la situación en la que el sistema se encuentra apagado, ya que en estas condiciones se conocen perfectamente los valores de dichas variables de estado. Se han simulado a su vez varias distribuciones de señal de salida del grupo multinivel de inversores, como son la forma de onda simétrica, la forma de onda asimétrica, y el modo de fluoroscopia en la que se desconecta el inversor auxiliar.

3.4.1.1 Simulación con tensión simétrica

Recordemos que este es el caso en que se configuran los disparos de los IGBTs de tal forma que se obtiene una señal simétrica en cada semiciclo como la representada en la Figura 3-3.

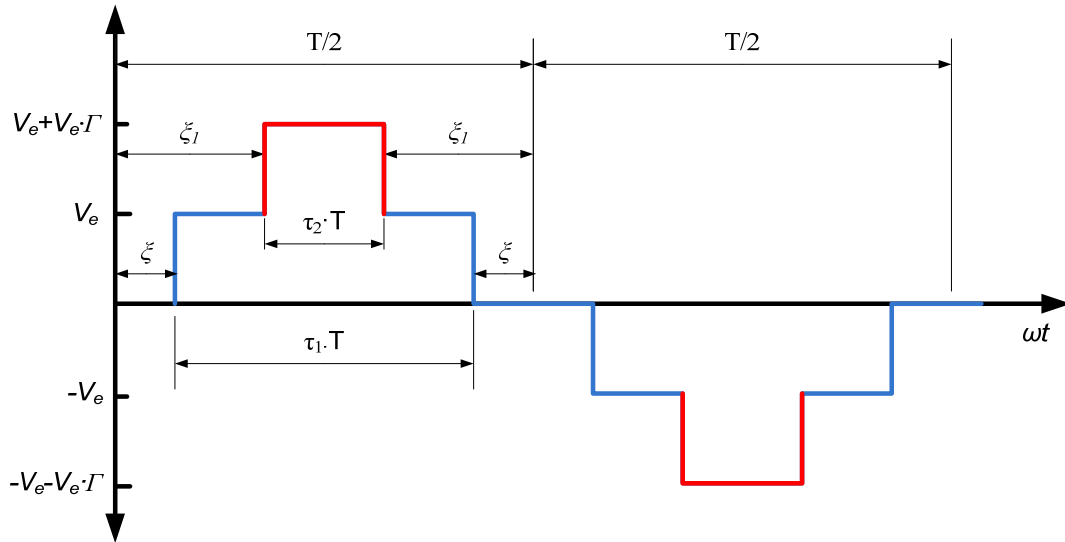


Figura 3-3

Tensión de salida del inversor generando una señal simétrica

Para la simulación, hemos escogido los parámetros recogidos en la siguiente tabla:

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_l=0.281554$	$\tau_2=0.1$	$Step=10^{-7}s$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$	$R=6.4\Omega$	$t=1ms$	$C_F=29\mu F$

Los resultados de las simulaciones se resumen en las siguientes figuras. Nótese como en la comparación con una solución obtenida con un software de simulación de circuitos, la solución del sistema obtenida se corresponde con la envolvente de la señal real. Esto es el resultado de las simplificaciones del capítulo anterior. Sin embargo, a pesar de una pérdida de información en el resultado, podemos afirmar que se conserva la información importante, pues nos permite obtener resultados de los valores de pico en los transitorios iniciales.

Esto es particularmente interesante para poder obtener valores máximos alcanzados y permitir al diseñador en base a esos resultados hacer el cálculo constructivo de la topología multinivel con el suficiente margen de seguridad para que ningún elemento sufra un deterioro. Todas las simulaciones tienen una tensión de entrada de 40V simulando así con escala 1:10 el valor típico de la tensión de red.

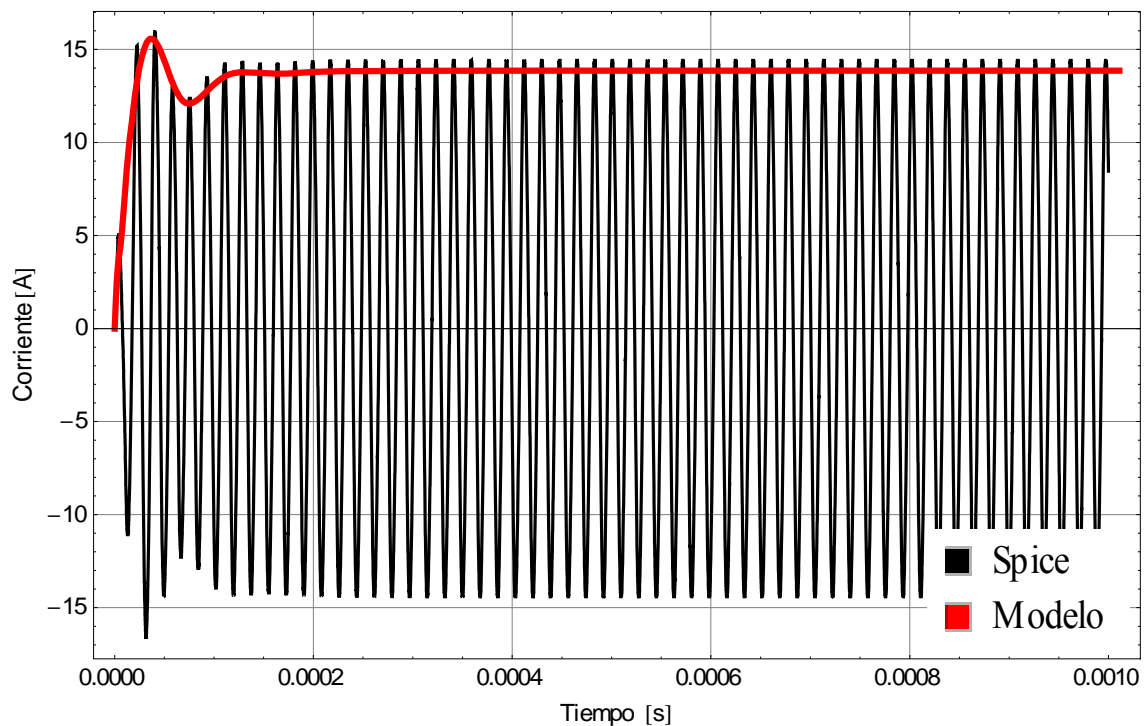


Figura 3-4

Evolución transitoria de la corriente resonante $I_L(t)$

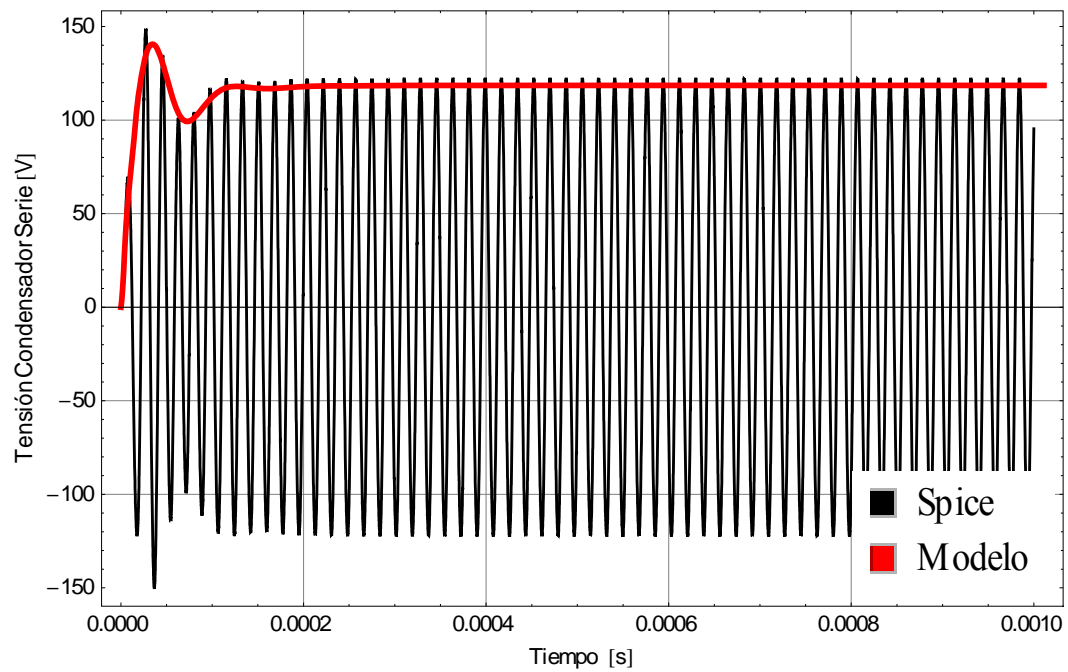


Figura 3-5

Evolución transitoria de la tensión en el condensador serie $V_s(t)$

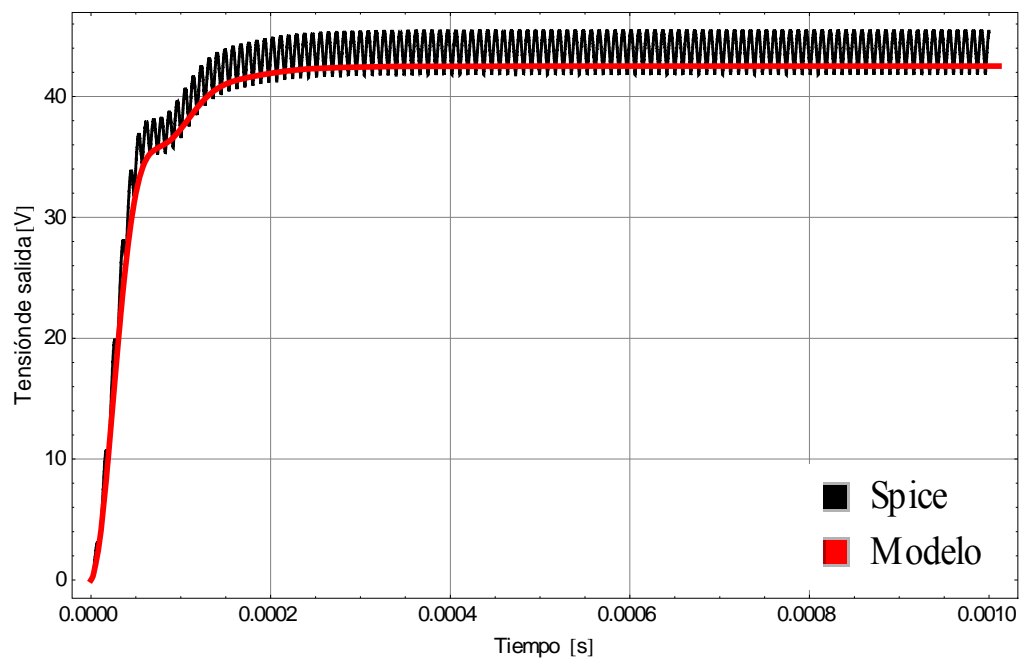


Figura 3-6

Evolución transitoria de la tensión de salida $V_x(t)$

3.4.1.2 Simulación con tensión asimétrica

Recordemos que la señal asimétrica se consigue haciendo coincidir el disparo en ambos puentes inversores, obteniendo una forma de onda que no es simétrica en cada semiciclo como la representada en la Figura 3-7.

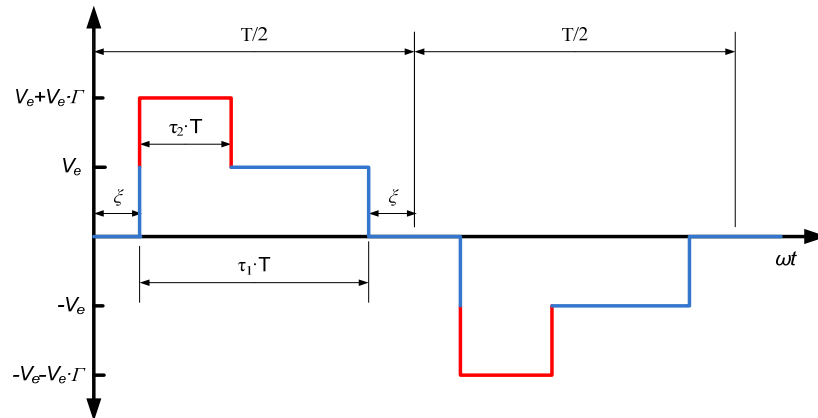


Figura 3-7

Tensión de salida del inversor generando una señal asimétrica

Para este caso, hemos escogido como parámetros los mismos que en el caso de la señal simétrica, representados en la tabla siguiente:

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_1=0.281554$	$\tau_2=0.1$	$Step=10^{-7}s$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$	$R=6.4\Omega$	$t=1ms$	$C_F=29\mu F$

Los resultados se muestran en las figuras siguientes.

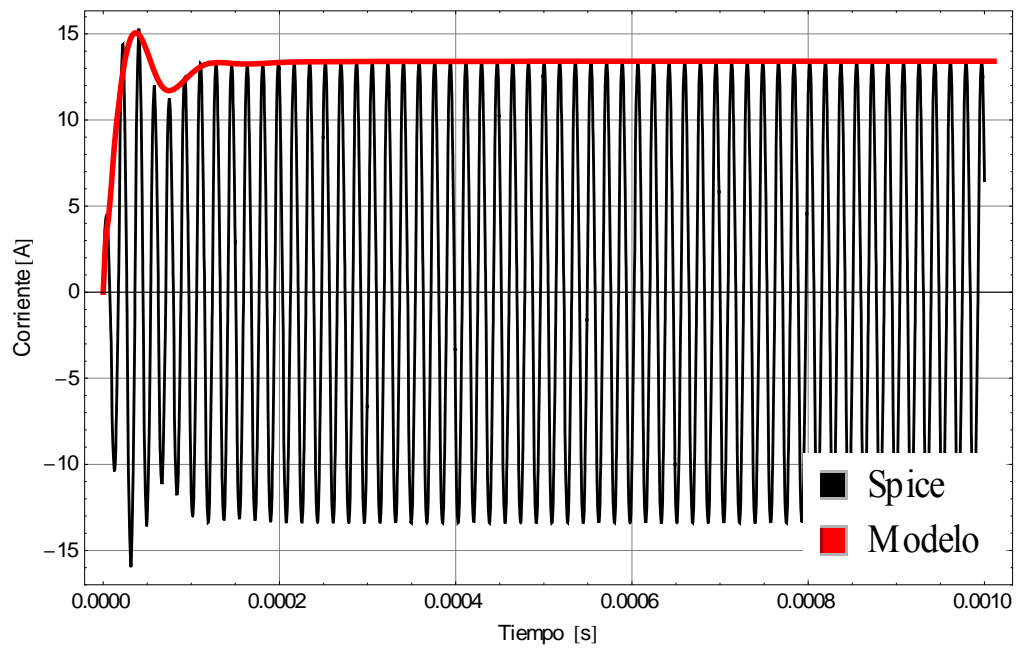


Figura 3-8

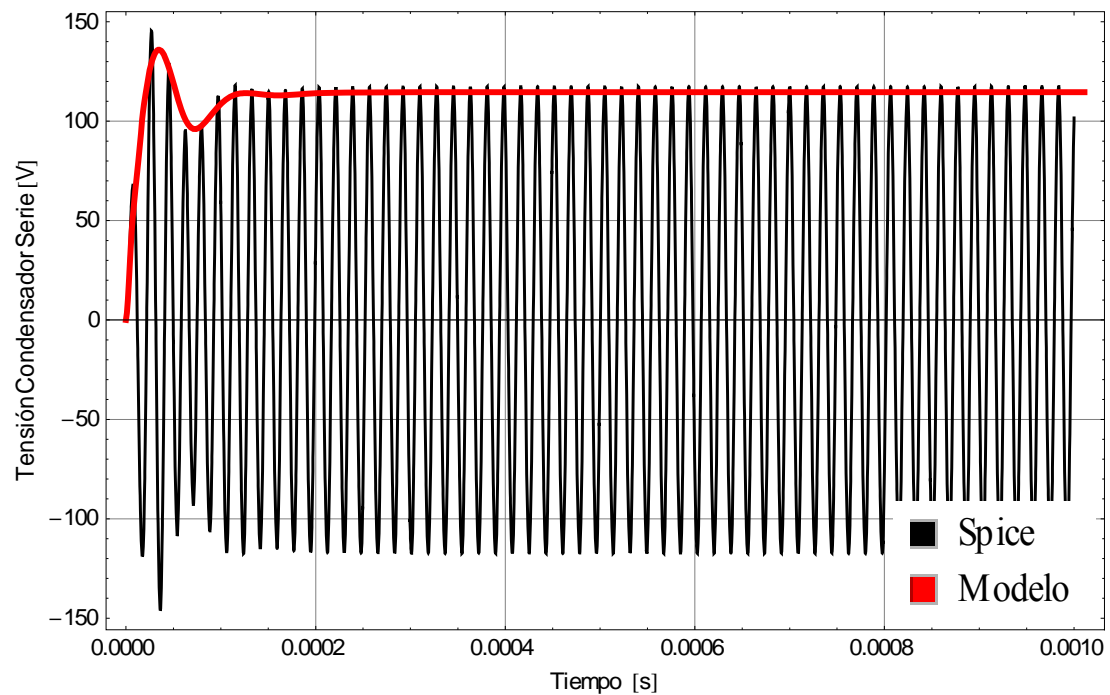
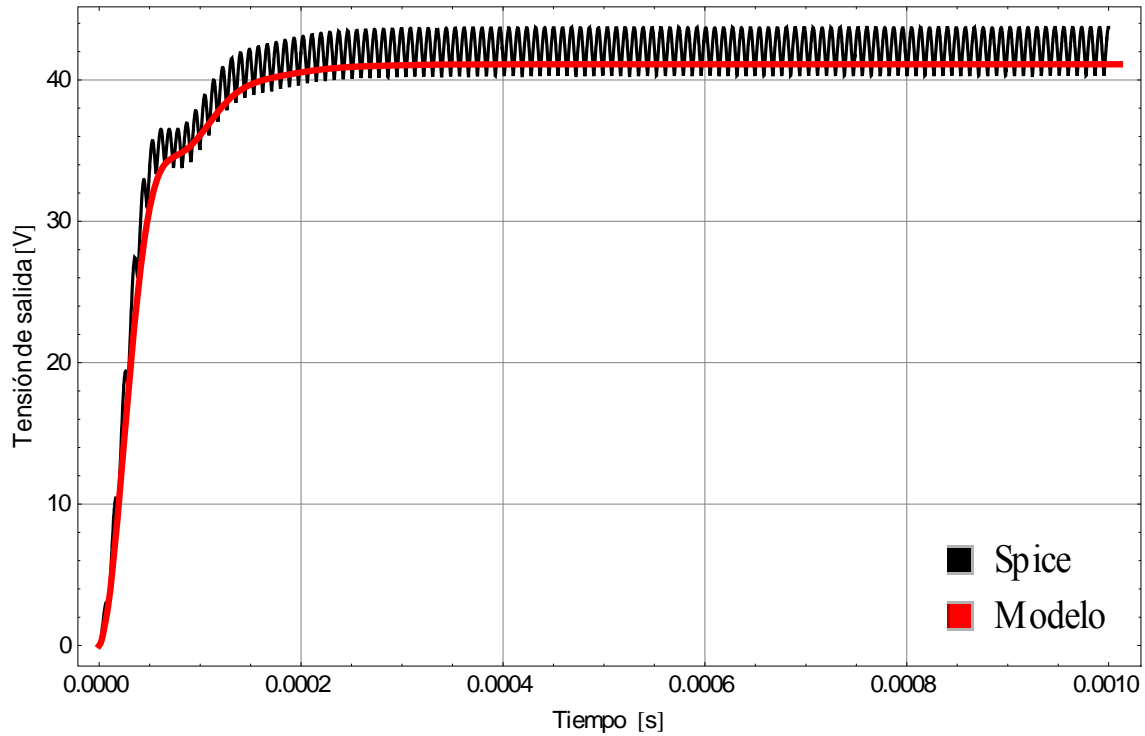
Evolución transitoria de la corriente resonante $I_L(t)$ 

Figura 3-9

Evolución transitoria de la tensión en el condensador serie $V_s(t)$

**Figura 3-10**

Evolución transitoria de la tensión de salida $V_x(t)$

3.4.1.3 Simulación en modo fluoroscopia

Este modo se obtiene desactivando el inversor auxiliar del sistema. Para las simulaciones basta con fijar el ciclo de trabajo del inversor auxiliar a 0.

De esta forma aparece reflejada en serie la inductancia magnetizante del transformador, aumentándose la impedancia base por lo que la corriente de entrada al tanque resonante se reduce notablemente, que en los casos anteriores quedaba enmascarada por estar en paralelo la tensión de entrada al inversor. La forma de onda a la salida del inversor es la representada en la Figura 3-11.

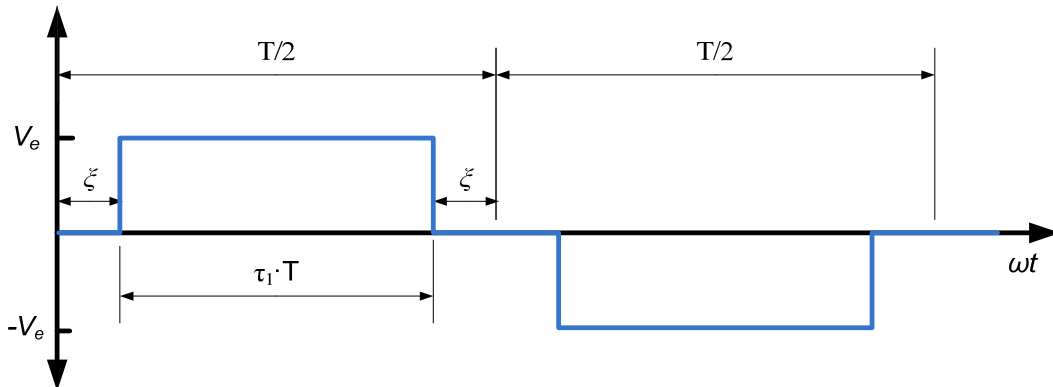


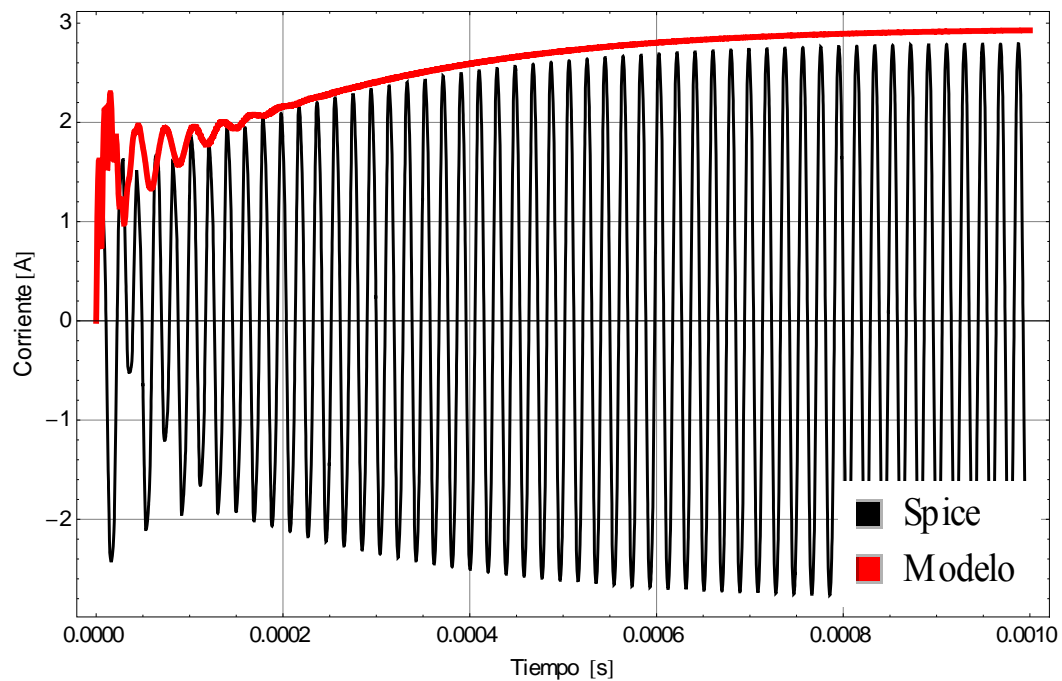
Figura 3-11

Tensión de salida con el inversor auxiliar desconectado

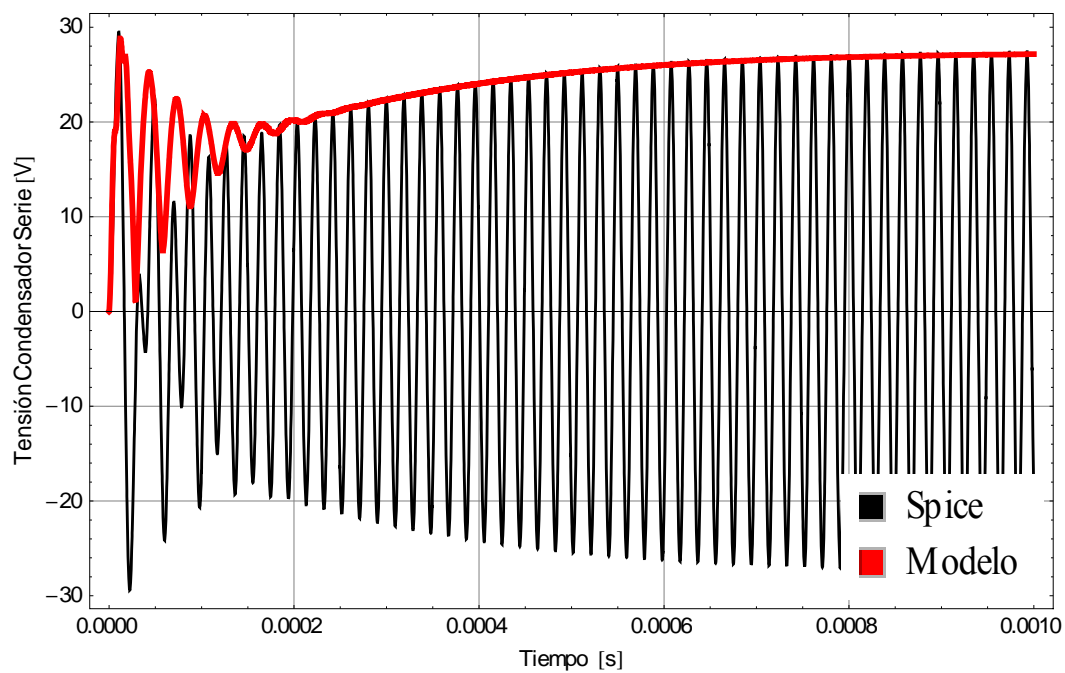
Los parámetros de esta simulación se muestran en la siguiente tabla, y los resultados en los gráficos siguientes:

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=52\text{ kHz}$	$\tau_1=0.25$	$\tau_2=0$	$Step=10^{-7}s$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$	$R=6.4\Omega$	$t=1ms$	$C_F=29\mu F$

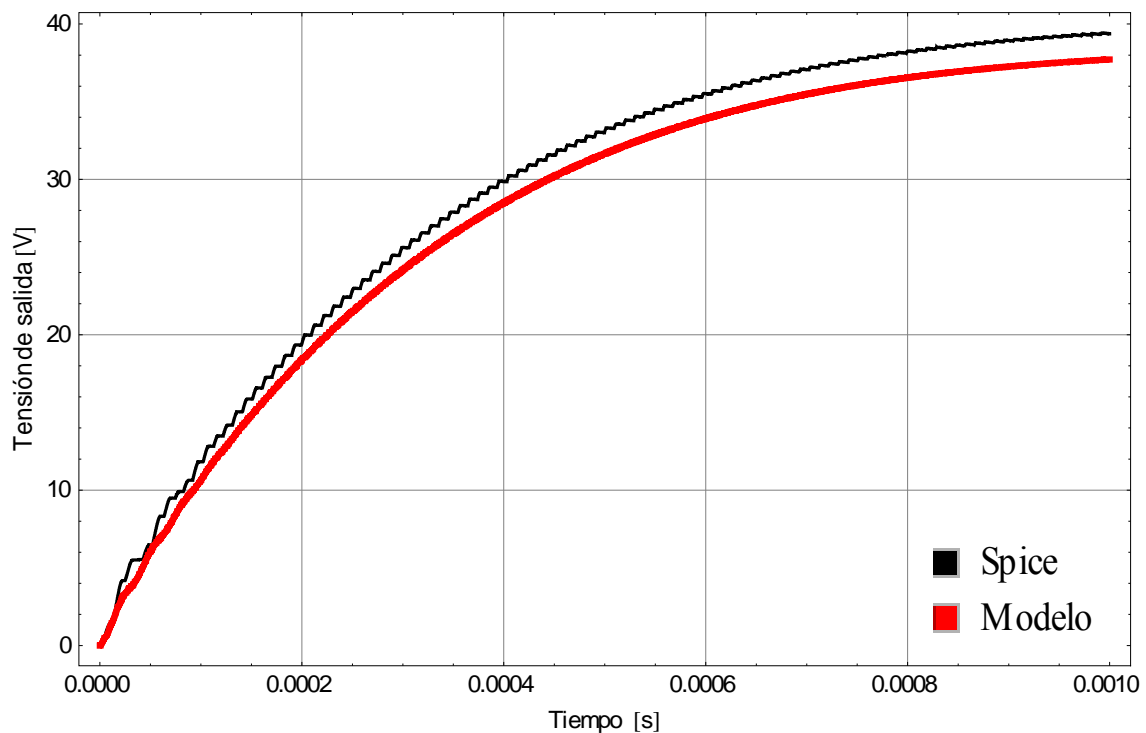
Los resultados pueden verse en las siguientes figuras:

**Figura 3-12**

Evolución transitoria de la corriente resonante $I_L(t)$

**Figura 3-13**

Evolución transitoria de la tensión en el condensador serie $V_s(t)$

**Figura 3-14**

Evolución transitoria de la tensión de salida $V_x(t)$

3.4.1.4 Respuesta a un escalón

Para validar la robustez del sistema, se ha simulado a una escala 1:10 una brusca variación en la tensión de entrada a los inversores pasando de 40V a 80V y observando su respuesta. Esto representaría una variación en la tensión de red en la que se produce una importante sobretensión. Los resultados de las simulaciones se representan en las siguientes figuras.

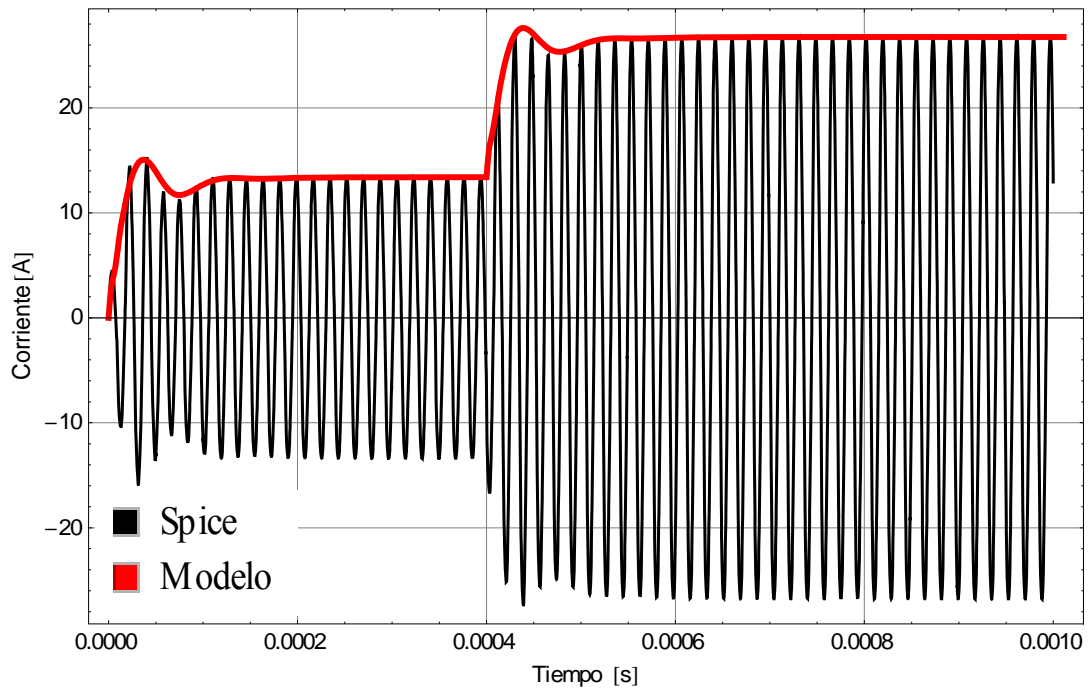


Figura 3-15

Evolución transitoria de la corriente resonante $I_L(t)$ tras un escalón

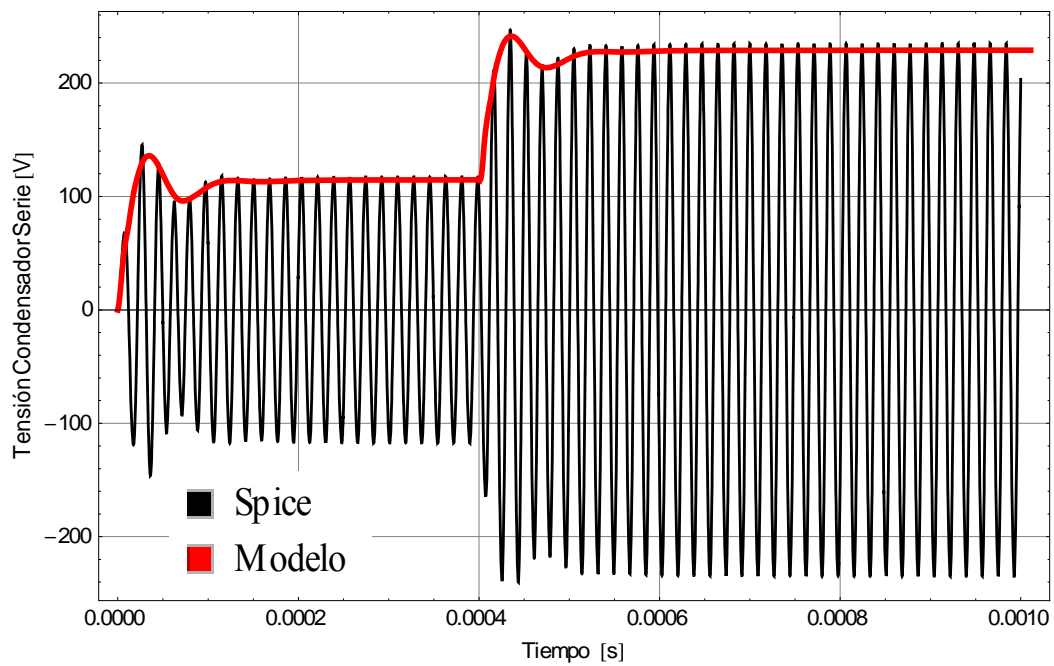
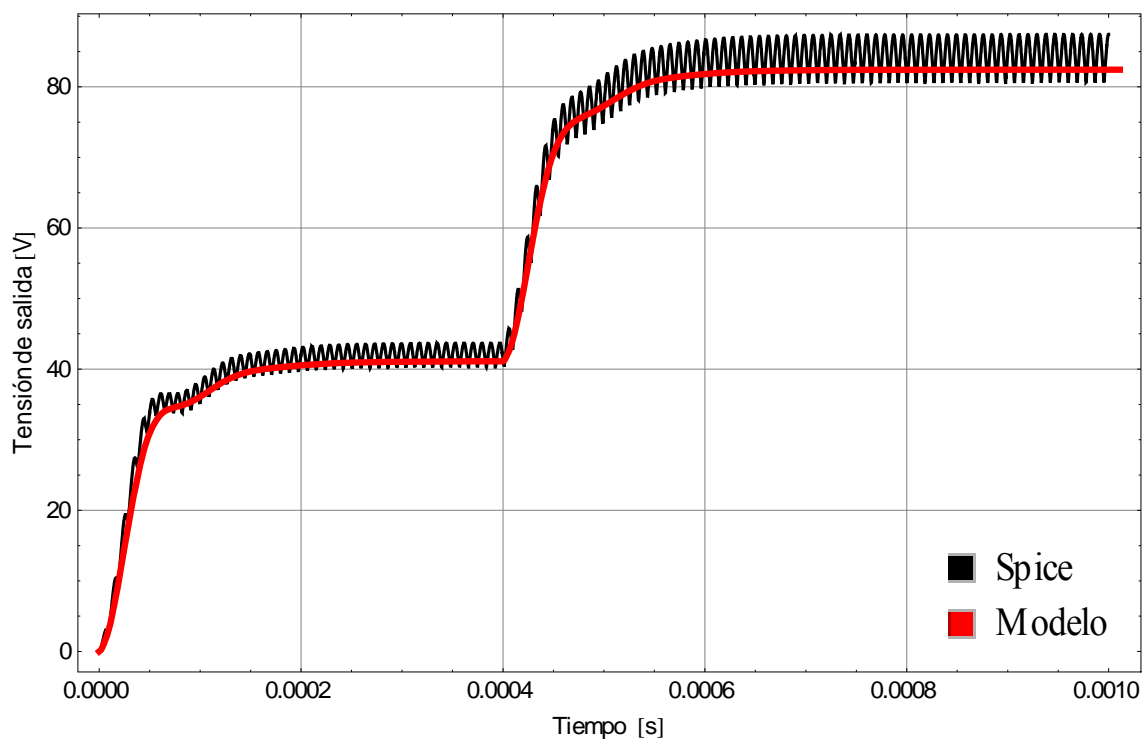


Figura 3-16

Evolución transitoria de la tensión en el condensador serie $V_s(t)$ tras un escalón

**Figura 3-17**

Evolución transitoria de la tensión de salida $V_x(t)$ tras un escalón

3.5 Conclusiones

En este capítulo se han mostrado diversas técnicas de resolución de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en las que es inviable su resolución analítica, teniendo que recurrir por ello a técnicas numéricas.

Una de las más utilizadas en este tipo de cálculo numérico es el método de Runge-Kutta que se ha aplicado a nuestro sistema, permitiendo obtener un grupo de puntos que representan la evolución temporal promediada de las señales a estudio. Es importante destacar, que pese a que el resultado es una señal promediada (evolvente de la señal real), contiene suficiente información como para permitir al diseñador tener en cuenta los valores máximos y mínimos alcanzados en el transitorio de una señal, permitiendo así llevar a cabo el dimensionado de los elementos electrónicos sin que se excedan límites peligrosos que pudieran dañar dichos elementos.

Una vez obtenido este modelo, se ha validado mediante el software informático PSIM, que valida los resultados del modelo en para distintas formas de onda a la entrada al convertidor.

En el siguiente capítulo obtendremos una formulación para el modelado del régimen permanente de la topología multinivel propuesta.

3.6 Bibliografía

- [1] *Agarwal, V.; Belaguli, V.K.; Bhat, A.K.S.*, “Large signal analysis using discrete time domain modeling for LCC-Type parallel resonant converter operating in discontinuous current mode”, *Electrical and Computer Engineering*, pp.80-83 vol.1, Sep 1993.
- [2] *Manli Hu; Froehleke, N.; Peters, W.; Boecker, J.*, “Multi-objective optimization of LCC resonant converter applied in VLF HV generator”, *IECON*, pp.1456-1461, Nov. 2011.
- [3] *Tangtang Guo; Chi Zhang; Lei Chang; Jun Liu; Jin Du; Xiangning He*, “Large-signal modeling of LCC resonant converter operating in discontinuous current mode applied to electrostatic precipitators”, *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, pp.2629-2635, March 2013.
- [4] *Branas, C.; Azcondo, F.J.; Casanueva, R.; Diaz, F.J.*, “L-C_p approximation of a phase-controlled LC_sC_p resonant converter to study the dynamic response as a LED lamp driver”, *Industry Applications Society Annual Meeting (IAS)*, 2012 IEEE, pp.1-6, Oct. 2012.
- [5] *Gavin, S.; Carpita, M.; Ecoeur, P.; Biner, H.-P.; Paolone, M.; Louokdom, E.T.*, “A digitally controlled 125 kVdc, 30kW power supply with an LCC resonant converter working at variable DC-link voltage: Full scale prototype test results”, *Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2014)*, pp.1-6, April 2014.
- [6] *Zhiyu Cao; Nzeugang, F.H.; Junbing Tao; Frohleke, N.; Bocker, J.*, “Novel dynamical modeling for series-parallel resonant converter”, *Industrial Electronics (ISIE)*, *IEEE International Symposium*, pp.414,419, May 2012.
- [7] *Juan A. Martín*. “Aportación al diseño de convertidores continua-continua para alta tensión de salida basados en la topología resonante PRC-LCC”. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 2001.

RÉGIMEN PERMANENTE DE LA TOPOLOGÍA MULTINIVEL

Cuando se propone un modelo en gran señal de un sistema dinámico de una topología de potencia, el estado en régimen permanente consiste en el final de la respuesta transitoria del mismo, por lo que su cálculo está implícito en la resolución del transitorio. Este capítulo se centra en la obtención de un modelo en régimen permanente a partir del modelo en gran señal.

4 Régimen permanente de la topología multinivel

4.1 Generalidades

Uno de los pasos más útiles en el diseño de un modelo es la obtención de la solución en régimen permanente para conocer el comportamiento del sistema cuando se somete a una excitación de control periódica. Un convertidor conmutado de potencia es solamente un circuito electrónico con una estructura simple en la que el bucle abierto se representa en la Figura 4-1 [1]. En él, la potencia se transfiere desde el primario a la carga conectada en el secundario. El ajuste de la fuente de alimentación se regula con el control de varios parámetros como son la frecuencia, o los ciclos de trabajo de los inversores primario y auxiliar.

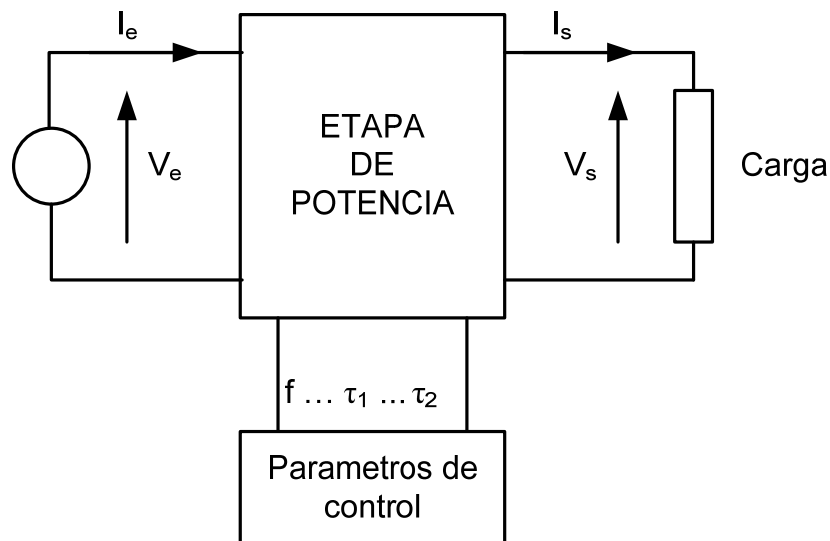


Figura 4-1

Estructura de un convertidor de tensión

Por otro lado, el objetivo en un convertidor de potencia es más ambicioso que la mera transferencia de potencia [2]. Es bastante común la imposición de restricciones adicionales a las magnitudes eléctricas en la salida, o en la entrada (mantenerlas constantes, por ejemplo). Para conseguir este resultado, es necesario el ajuste continuo de los parámetros de control. Como consecuencia, se plantea una nueva cuestión: ¿Qué

valores de los parámetros de control son los adecuados para obtener las formas de onda requeridas en determinadas zonas del convertidor?

En este sentido es de gran valor disponer de un modelo matemático sencillo a modo de herramienta que permita responder a todas estas cuestiones de una manera rápida. Sin embargo, el estudio de convertidores conmutados de potencia no es sencillo en general. Sus etapas de potencia están formadas por semiconductores (principalmente transistores y diodos) cuyo estado varía de forma discreta [3]. En general, un semiconductor en una etapa de potencia se comporta prácticamente siempre como un interruptor que abre y cierra de forma periódica. Cada vez que el semiconductor conmuta, el comportamiento electrónico cambia completamente. Por lo tanto, la etapa de potencia se puede imaginar como una sucesión de circuitos periódica. En todos estos circuitos toma lugar la evolución transitoria de tensiones y corrientes teniendo un circuito influencia en el siguiente.

El régimen permanente se caracteriza por las siguientes reglas:

- Hay varios circuitos transitorios, pero todos ellos se repiten en el mismo orden
- Cualquier circuito transitorio dura el mismo tiempo.
- Las condiciones iniciales y finales de cada circuito, junto con su evolución intermedia, son siempre las mismas.

Este tipo de operación solo ocurre cuando el convertidor ha conmutado suficiente tiempo y todas las magnitudes se han convertido en periódicas. Esto es lo que se quiere en el modo de operación de un convertidor conmutado [4-7]. Si cualquiera de estas condiciones no se conoce, se dice que la etapa de potencia está en régimen transitorio. Como su nombre indica, un régimen transitorio solo existe durante un periodo de tiempo pequeño entre dos regímenes permanentes, siendo por ejemplo el inicio del convertidor uno de esos estados.

El objetivo pues es intentar conocer el comportamiento del convertidor bajo ciertas condiciones de control (y de forma opuesta, conocer las condiciones de control para establecer el funcionamiento del convertidor). Esto se resuelve conociendo la respuesta en régimen permanente de la topología.

Para conocer la respuesta estática de un convertidor conmutado es enteramente posible realizar un cálculo exacto, tomando como datos de partida las condiciones de un punto de funcionamiento conocido, por ejemplo el de apagado. Conociendo los instantes de conmutación de los interruptores, se pueden deducir los sucesivos circuitos equivalentes que surgen y resolver las ecuaciones diferenciales en las que las condiciones finales de unos son las iniciales de las otras [8]. Se puede llegar así, a través del cálculo múltiple de transitorios, a aquellos que constituyen el régimen permanente. Sin embargo, esta forma de proceder es muy laboriosa para obtener resultados que suelen ser poco generalizables. Para evitar esto se suele acudir a cierto tipo de aproximaciones.

La descripción en el espacio de estados de la topología que se realizó en el capítulo anterior, proporciona un modelo más sencillo que genera los mismos resultados. En concreto, dicho modelo describe el comportamiento en régimen permanente de la topología mediante un único sistema de ecuaciones que puede resolverse de manera aproximada por métodos algebraicos, como podremos comprobar en los siguientes epígrafes.

Se ha elegido el grupo de ecuaciones diferenciales de la señal asimétrica por ser ésta más compleja que el desarrollo de la señal simétrica, aparte de que pasar de esta solución a la otra es sencilla siendo suficiente hacer alguna simplificación algebraica en las ecuaciones.

4.2 Formulación del modelo en régimen permanente

En las ecuaciones diferenciales formuladas en capítulos anteriores, se proporcionó una descripción suficientemente aproximada del modelo en gran señal de la topología multinivel propuesta. Un modelo en gran señal, tras una perturbación permite ver la evolución de las señales eléctricas de un circuito desde su estado inicial (antes de la perturbación) hasta el final (cuando el transitorio se ha desvanecido). Esto implica que el modelo en gran señal lleva implícita la información de régimen permanente, pues los mencionados estado inicial y final deben corresponderse con dos estados de equilibrio [9-10]. Podría pues determinarse el funcionamiento en régimen estacionario, para

cualquier valor en los parámetros de la topología, realizando un análisis en gran señal desde el arranque del convertidor hasta el final del transitorio. Sin embargo, disponiendo de las ecuaciones diferenciales que rigen el funcionamiento de un sistema, es más simple y rápido de obtener. En condiciones de régimen permanente ninguna magnitud varía excepto el tiempo, y en consecuencia la derivada de cualquier variable debe ser nula, por lo que es suficiente con igualar los términos diferenciales a 0.

Con esta condición, y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales (2-97)-(2-101) obtenidas en el capítulo 2 del sistema que modela la topología, obtenemos que:

$$0 = \frac{1}{L_s} \left[\frac{2V_e}{\pi} [(2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_{10}) - \Gamma \sin(\pi(\tau_{10} - 2\tau_{20}))] + L_s \omega_0 \cdot i_{LB0} - V_{SA0} - \frac{i_{LA0} \cdot \sin^2(\psi_0) + i_{LB0} \cdot \mu_0}{\pi \cdot C_p \omega_0} - r \cdot i_{LA0} \right] \quad (4-1)$$

$$0 = \frac{1}{L_s} \left[-\frac{2\Gamma V_e}{\pi} [\cos(\pi\tau_{10}) + \cos(\pi(1 - \tau_{10} + 2\tau_{20}))] - L_s \omega_0 \cdot i_{LA0} - V_{SB0} + \frac{i_{LA0} \cdot \mu_0 - i_{LB0} \cdot \sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_p \omega_0} - r \cdot i_{LB0} \right] \quad (4-2)$$

$$0 = \frac{1}{C_s} [i_{LA0} + C_s \omega_0 \cdot V_{SB0}] \quad (4-3)$$

$$0 = \frac{1}{C_s} [i_{LB0} - C_s \omega_0 \cdot V_{SA0}] \quad (4-4)$$

$$0 = \frac{1}{C_f} \left[\frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] - \frac{V_{x0}}{R} \right] \quad (4-5)$$

Donde el subíndice “0” se emplea para indicar que las variables se están calculando en condiciones de régimen permanente.

Este conjunto de ecuaciones ha de completarse con las siguientes expresiones:

$$\mu_0 = \psi_0 - \sin(\psi_0) \cdot \cos(\psi_0) \quad (4-6)$$

$$\cos(\psi_0) = 1 - \frac{2C_p\omega_0 \cdot V_{x0}}{\sqrt{i_{LA0}^2 + i_{LB0}^2}} \quad (4-7)$$

4.3 Resolución del sistema

El conjunto de ecuaciones anteriores pueden manipularse algebraicamente de forma que se pueda hallar el valor de todas las variables. Considérense como datos de partida para su resolución los siguientes:

- Dimensión de los componentes de la etapa de potencia.
- Amplitud de la tensión de entrada.
- Valor de la resistencia de carga.
- Valor de los parámetros de control del inversor: frecuencia y ciclos de trabajo.

Se puede llegar a obtener una solución a este sistema de forma analítica, de la siguiente forma.

De la expresión (4-5), obtenemos:

$$V_{x0} = R \frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] \quad (4-8)$$

Y de la expresión (4-7), obtenemos:

$$V_{x0} = \frac{i_{L0}}{2C_p\omega_0} (1 - \cos(\psi_0)) \quad (4-9)$$

Igualando las dos expresiones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} R \frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] &= \frac{i_{L0}}{2C_p\omega_0} (1 - \cos(\psi_0)) \Rightarrow \\ 2C_p\omega_0 R [1 + \cos(\psi_0)] &= \pi [1 - \cos(\psi_0)] \Rightarrow (2C_p\omega_0 R + \pi) \cos(\psi_0) = (\pi - 2C_p\omega_0 R) \Rightarrow \\ \cos(\psi_0) &= \frac{\pi - 2RC_p\omega_0}{\pi + 2RC_p\omega_0} \end{aligned} \quad (4-10)$$

Esta expresión es muy importante, porque proporciona una manera muy sencilla de calcular ψ_0 , conociendo únicamente la frecuencia de conmutación y la resistencia de carga conectada. Como se indicó previamente, éstas deben ser datos para poder estimar corrientes y tensiones en todo el circuito. Se consigue así el punto de partida para poder despejar el resto de variables, que se expresarán dependientes de este ángulo. Despejando V_{SA0} de (4-3) y V_{SB0} de (4-4) y sustituyendo en (4-1) y (4-2) respectivamente y reagrupando términos:

$$\frac{2V_e}{\pi} [(2 + \Gamma)\sin(\pi\tau_{10}) - \Gamma\sin(\pi(\tau_{10} - 2\tau_{20}))] = \left[\frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_p \omega_0} + r \right] i_{LA0} - \left[L_s \omega_0 - \frac{1}{C_s \omega_0} - \frac{\mu}{\pi \cdot C_p \omega_0} \right] i_{LB0} \quad (4-11)$$

$$\frac{2\Gamma V_e}{\pi} [\cos(\pi\tau_{10}) + \cos(\pi(1 - \tau_{10} + 2\tau_{20}))] = - \left[L_s \omega_0 - \frac{1}{C_s \omega_0} - \frac{\mu_0}{\pi \cdot C_p \omega_0} \right] i_{LA0} - \left[\frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_p \omega_0} + r \right] i_{LB0} \quad (4-12)$$

Haciendo las siguientes sustituciones para obtener términos más manejables:

$$V_{AB1S}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = \frac{2V_e}{\pi} [(2 + \Gamma)\sin(\pi\tau_{10}) - \Gamma\sin(\pi(\tau_{10} - 2\tau_{20}))] \quad (4-13)$$

$$V_{AB1C}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = \frac{2\Gamma V_e}{\pi} [\cos(\pi\tau_{10}) + \cos(\pi(1 - \tau_{10} + 2\tau_{20}))] \quad (4-14)$$

$$Z_R = r + \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_p \omega_0} \quad (4-15)$$

$$Z_I = L_s \omega_0 - \frac{1}{C_s \omega_0} - \frac{\mu_0}{\pi \cdot C_p \omega_0} \quad (4-16)$$

Obtenemos entonces:

$$V_{AB1S}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = Z_R i_{LA0} - Z_I i_{LB0} \quad (4-17)$$

$$V_{AB1C}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = -Z_I i_{LA0} - Z_R i_{LB0} \quad (4-18)$$

Y despejando i_{LA0} y i_{LB0} obtenemos:

$$i_{LA0} = \frac{-V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2} \quad (4-19)$$

$$i_{LB0} = -\frac{V_{AB1S}Z_I + V_{AB1C}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2} \quad (4-20)$$

La amplitud del primer armónico de la corriente resonante se puede calcular fácilmente a partir de las expresiones anteriores:

$$i_{L0} = \sqrt{\frac{V_{AB1S}^2 + V_{AB1C}^2}{Z_R^2 + Z_I^2}} \quad (4-21)$$

4.4 Solución estática en bucle abierto

Reordenando un poco el conjunto anterior de ecuaciones, obtenemos una solución completa a la topología en régimen permanente para la topología multinivel.

$$\cos(\psi_0) = \frac{\pi - 2RC_p\omega_0}{\pi + 2RC_p\omega_0} \quad (4-22)$$

$$V_{AB1S}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = \frac{2V_e}{\pi} [(2 + \Gamma)\sin(\pi\tau_{10}) - \Gamma\sin(\pi(\tau_{10} - 2\tau_{20}))] \quad (4-23)$$

$$V_{AB1C}(V_e, \tau_{10}, \tau_{20}, \Gamma) = \frac{2\Gamma V_e}{\pi} [\cos(\pi\tau_{10}) + \cos(\pi(1 - \tau_{10} + 2\tau_{20}))] \quad (4-24)$$

$$Z_R = r + \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_p\omega_0} \quad (4-25)$$

$$Z_I = L_s\omega_0 - \frac{1}{C_s\omega_0} - \frac{\mu_0}{\pi \cdot C_p\omega_0} \quad (4-26)$$

$$i_{LA0} = \frac{-V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2} \quad (4-27)$$

$$i_{LB0} = -\frac{V_{AB1S}Z_I + V_{AB1C}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2} \quad (4-28)$$

$$V_{SA0} = \frac{i_{LB0}}{C_s \omega_0} \quad (4-29)$$

$$V_{SB0} = \frac{-i_{LA0}}{C_s \omega_0} \quad (4-30)$$

$$V_{x0} = R \frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] \quad (4-31)$$

$$V_{PA0} = \frac{i_{LA0} \sin^2(\psi_0) + i_{LB0} \mu_0}{\pi C_p \omega_0} \quad (4-32)$$

$$V_{PB0} = \frac{-i_{LA0} \mu_0 + i_{LB0} \sin^2(\psi_0)}{\pi C_p \omega_0} \quad (4-33)$$

Todas las ecuaciones anteriores, proporcionan la solución al modelo estático de la topología multinivel.

Si se conocen los elementos del circuito C_s , C_p , L_s y R y los parámetros de control V_e , ω_0 , τ_1 , τ_2 el modelo estático obtenido destaca por su sencillez. Las ecuaciones anteriores pueden resolverse sin más que sustituir los parámetros conocidos. Sin embargo, si los datos de partida son diferentes puede que la solución del sistema se complique lo suficiente como para tener que acudir a una solución iterativa.

4.5 Variables de observación

Una vez obtenido el valor estático de las variables de estado, es posible determinar el valor de las variables de observación del circuito. Recordando el vector de observación definido anteriormente, pueden obtenerse las siguientes magnitudes:

- Ángulo de desfase entre la tensión de salida del inversor y la corriente resonante

$$\varphi_{L0} = \text{ArcTan}\left(\frac{i_{LB0}}{i_{LA0}}\right) = \text{ArcTan}\left(\frac{-\frac{V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2}}{\frac{-V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\varphi_{L0} = \text{ArcTan}\left(-\frac{V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{-V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}\right) \quad (4-34)$$

- Corriente resonante:

$$i_{L0} = \sqrt{\frac{(V_{AB1S}Z_I + V_{AB1C}Z_R)^2 + (V_{AB1C}Z_I - V_{AB1S}Z_R)^2}{(Z_I^2 + Z_R^2)^2}} \quad (4-35)$$

- Amplitud de la tensión en el condensador serie:

$$V_{S0} = \sqrt{V_{SA0}^2 + V_{SB0}^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}V_e}{\omega_0 C_s} \sqrt{\frac{1 + \Gamma + \Gamma^2 - (1 + \Gamma)\cos(2\pi\tau_1) + \Gamma\cos(2\pi(\tau_1 - \tau_2)) - \Gamma(1 + \Gamma)\cos(2\pi\tau_2)}{Z_I^2 + Z_R^2}} \quad (4-36)$$

- Tensión de salida del convertidor

$$V_{x0} = R \frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] \quad (4-37)$$

Con estas ecuaciones, queda perfectamente definido el comportamiento del convertidor. En cualquier caso, el que se hayan destacado las señales eléctricas precedentes no significa que no puedan evaluarse otras.

4.6 Solución estática normalizada

A partir de las ecuaciones obtenidas en epígrafes anteriores, se pueden obtener las expresiones equivalentes obtenidas al aplicar la normalización a dichas expresiones siguiendo el mismo procedimiento que en epígrafe 2.8. Recordemos los parámetros base de la normalización:

$$V_B = V_e \quad (4-38)$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_S}{C}} \quad (4-39)$$

$$I_B = \frac{V_B}{Z_B} \quad (4-40)$$

$$f_B = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_S \cdot C}} \quad (4-41)$$

$$C = \frac{C_S \cdot C_P}{C_S + C_P} \quad (4-42)$$

$$t_B = \frac{1}{f_B} = 2\pi \cdot \sqrt{L_S \cdot C} \quad (4-43)$$

$$\omega_B = 2\pi \cdot f_B = \frac{1}{\sqrt{L_S \cdot C}} \quad (4-44)$$

$$\alpha = \frac{C}{C_P} = \frac{C_S}{C_S + C_P} \quad (4-45)$$

$$\beta = \frac{C}{C_f} \quad (4-46)$$

4.6.1 Normalización del ángulo ψ_0

$$\cos(\psi_0) = \frac{\pi - 2RC_P\omega_0}{\pi + 2RC_P\omega_0} = \frac{\pi - 2(\hat{R} \cdot Z_B)C_P(\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B)}{\pi + 2(\hat{R} \cdot Z_B)C_P(\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B)} = \frac{\pi - 2\hat{\omega}_0 C_P \hat{R} \frac{1}{\alpha C_P}}{\pi + 2\hat{\omega}_0 C_P \hat{R} \frac{1}{\alpha C_P}} \Rightarrow$$

$$\cos(\hat{\psi}_0) = \frac{\alpha\pi - 2\hat{\omega}_0 \hat{R}}{\alpha\pi + 2\hat{\omega}_0 \hat{R}} \quad (4-47)$$

4.6.2 Normalización de Z_R

$$Z_R = r + \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_P \omega_0} = \hat{r} \cdot Z_B + \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_P (\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B)} = Z_B \left(\hat{r} + \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi \cdot C_P (\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B) Z_B} \right) \Rightarrow$$

$$Z_R = Z_B \left(\hat{r} + \frac{\alpha \sin^2(\psi_0)}{\pi \hat{\omega}_0} \right) \Rightarrow$$

$$\hat{Z}_R = \frac{Z_R}{Z_B} = \hat{r} + \frac{\alpha \sin^2(\psi_0)}{\pi \hat{\omega}_0} \quad (4-48)$$

4.6.3 Normalización de Z_I

$$\begin{aligned} Z_I &= L_S \omega_0 - \frac{1}{C_S \omega_0} - \frac{\mu_0}{\pi \cdot C_P \omega_0} = L_S (\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B) - \frac{1}{C_S (\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B)} - \frac{\mu_0}{\pi \cdot C_P (\hat{\omega}_0 \cdot \omega_B)} \\ &= Z_B \frac{\pi L_S C_P C_S \hat{\omega}_0^2 \omega_B^2 - \pi C_P - \mu_0 C_S}{\pi C_P C_S \hat{\omega}_0 (Z_B \cdot \omega_B)} = Z_B \frac{\pi L_S C_P C_S \hat{\omega}_0^2 \frac{1}{L_S C} - \pi C_P - \mu_0 C_S}{\pi C_P C_S \hat{\omega}_0 \frac{1}{C}} = \\ &= Z_B \frac{\pi \hat{\omega}_0^2 - \pi \frac{C}{C_S} - \mu_0 \frac{C}{C_P}}{\pi \hat{\omega}_0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{Z}_I = \frac{Z_I}{Z_B} = \frac{\pi \hat{\omega}_0^2 - \pi(1-\alpha) - \alpha \mu_0}{\pi \hat{\omega}_0} \quad (4-49)$$

4.6.4 Normalización de i_{LA0}

$$i_{LA0} = \frac{-V_{AB1C}Z_I + V_{AB1S}Z_R}{Z_I^2 + Z_R^2} = \frac{U_B Z_B}{Z_B^2} \frac{-\hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} \Rightarrow$$

$$\hat{i}_{LA0} = \frac{i_{LA0}}{I_B} = \frac{U_B}{I_B Z_B} \frac{-\hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} = \frac{-\hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} \quad (4-50)$$

4.6.5 Normalización de i_{LB0}

$$i_{LB0} = -\frac{V_{AB1S}Z_I + V_{AB1C}Z_R}{Z_I^2 + Z_R^2} = -\frac{U_B Z_B}{Z_B^2} \frac{\hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} \Rightarrow$$

$$\hat{i}_{LB0} = \frac{i_{LB0}}{I_B} = -\frac{U_B}{I_B Z_B} \frac{\hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} = -\frac{\hat{V}_{AB1S}\hat{Z}_I + \hat{V}_{AB1C}\hat{Z}_R}{\hat{Z}_I^2 + \hat{Z}_R^2} \quad (4-51)$$

4.6.6 Normalización de V_{SA0}

$$V_{SA0} = \frac{i_{LB0}}{C_S \omega_0} = \frac{\hat{i}_{LB0} I_B}{C_S \hat{\omega}_0 \omega_B} = \frac{\hat{i}_{LB0} I_B}{\frac{C}{1-\alpha} \hat{\omega}_0 \frac{1}{\sqrt{L_S C}}} = \frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LB0} I_B}{\hat{\omega}_0 \sqrt{\frac{C}{L_S}}} = \frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LB0}}{\hat{\omega}_0} I_B Z_B \Rightarrow$$

$$\hat{V}_{SA0} = \frac{V_{SA0}}{U_B} = \frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LB0}}{\hat{\omega}_0} \quad (4-52)$$

4.6.7 Normalización de V_{SB0}

$$V_{SB0} = \frac{i_{LA0}}{C_S \omega_0} = \frac{\hat{i}_{LA0} I_B}{C_S \hat{\omega}_0 \omega_B} = \frac{\hat{i}_{LA0} I_B}{\frac{C}{1-\alpha} \hat{\omega}_0 \frac{1}{\sqrt{L_S C}}} = \frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LA0} I_B}{\hat{\omega}_0 \sqrt{\frac{C}{L_S}}} = \frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LA0}}{\hat{\omega}_0} I_B Z_B \Rightarrow$$

$$\hat{V}_{SB0} = \frac{V_{SB0}}{U_B} = -\frac{(1-\alpha) \hat{i}_{LA0}}{\hat{\omega}_0} \quad (4-53)$$

4.6.8 Normalización de V_{PA0}

$$V_{PA0} = \frac{\hat{i}_{LA0} I_B \sin^2(\psi_0) + \hat{i}_{LB0} I_B \mu_0}{\pi C_p \hat{\omega}_0 \omega_B} = \frac{U_B}{\pi C_p \omega_B Z_B} \frac{\hat{i}_{LA0} \sin^2(\psi_0) + \hat{i}_{LB0} \mu_0}{\hat{\omega}_0} =$$

$$\frac{U_B \alpha}{\pi} \frac{\hat{i}_{LA0} \sin^2(\psi_0) + \hat{i}_{LB0} \mu_0}{\hat{\omega}_0} \Rightarrow$$

$$\hat{V}_{PA0} = \frac{V_{PA0}}{U_B} = \alpha \frac{\hat{i}_{LA0} \sin^2(\psi_0) + \hat{i}_{LB0} \mu_0}{\pi \hat{\omega}_0} \quad (4-54)$$

4.6.9 Normalización de V_{PB0}

$$V_{PB0} = \frac{-\hat{i}_{LA0} I_B + \hat{i}_{LB0} I_B \sin^2(\psi_0)}{\pi C_p \hat{\omega}_0 \omega_B} = \frac{U_B}{\pi C_p \omega_B Z_B} \frac{-\hat{i}_{LA0} \mu_0 + \hat{i}_{LB0} \sin^2(\psi_0)}{\hat{\omega}_0} =$$

$$\frac{U_B \alpha}{\pi} \frac{-\hat{i}_{LA0} \mu_0 + \hat{i}_{LB0} \sin^2(\psi_0)}{\hat{\omega}_0} \Rightarrow$$

$$\hat{V}_{PB0} = \frac{V_{PB0}}{U_B} = \alpha \frac{-\hat{i}_{LA0} \mu_0 + \hat{i}_{LB0} \sin^2(\psi_0)}{\pi \hat{\omega}_0} \quad (4-55)$$

4.6.10 Normalización de V_{x0}

$$V_{x0} = R \frac{i_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] = \hat{R} Z_B \frac{\hat{i}_{L0} I_B}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] \Rightarrow$$

$$\hat{V}_{x0} = \hat{R} \frac{\hat{i}_{L0}}{\pi} [1 + \cos(\psi_0)] \quad (4-56)$$

4.7 Circuito equivalente en régimen permanente

En los epígrafes anteriores se ha deducido un modelo para la topología en estudio en régimen permanente. Haciendo un análisis rigurosos de las ecuaciones resultantes de la solución del régimen permanente se puede obtener un circuito equivalente como el representando en la Figura 4-2. Este circuito se divide en dos partes. La primera parte modeliza el comportamiento del tanque resonante, donde la aproximación del primer armónico es suficiente para describir con precisión las formas de onda en el circuito resonante (i_L , V_s , V_p y V_{AB}). De esta parte del circuito aplicando las leyes de Kirchoff, se pueden obtener las ecuaciones (4-22)-(4-33). La segunda parte está relacionada con la salida (referida a primario) donde el valor medio es suficiente para representar las formas de onda después del rectificador de salida (V_0 , i_D). La expresión (4-37) se obtiene de esta parte del circuito.

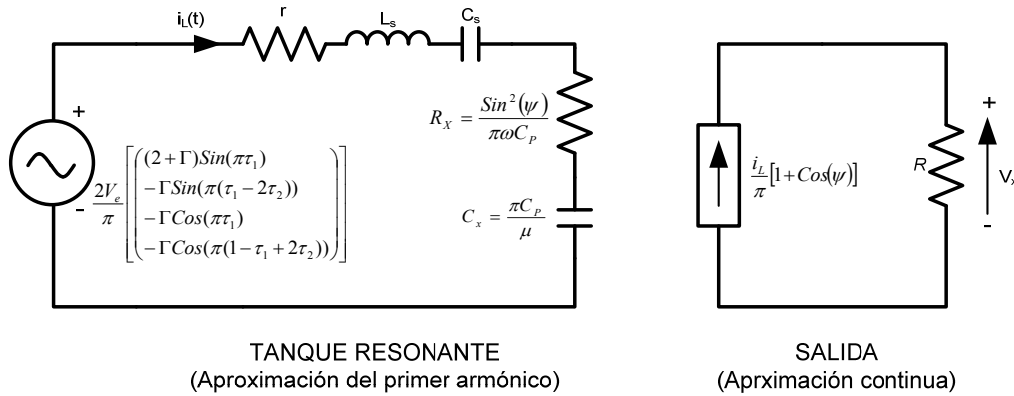


Figura 4-2

Circuito equivalente para la topología multinivel en régimen permanente

4.7.1 Potencia en el circuito equivalente

Vamos a calcular la potencia disipada en R_x en el circuito de la Figura 4-2:

$$P_{RX} = R_x (i_{L0}^2) = \frac{\sin^2(\psi_0)}{\pi C_p \omega_0} \left(\frac{i_{L0}}{\sqrt{2}} \right)^2 = i_{L0}^2 \frac{1 - \cos^2(\psi_0)}{2\pi C_p \omega_0} \quad (4-57)$$

Y calculando ahora la potencia total de salida en el convertidor, tenemos que:

$$P_0 = \left(\frac{V_{x0}^2}{R} \right) = i_{L0}^2 \frac{R[1 + \cos(\psi_0)]^2}{\pi} \quad (4-58)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4-22) y aplicando expresiones trigonométricas, obtenemos que:

$$\cos(\psi_0) = \frac{\pi - 2RC_p\omega_0}{\pi + 2RC_p\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos^2(\psi_0) = \frac{8\pi C_p \omega_0 R}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} \\ 1 + \cos^2(\psi_0) = \frac{4\pi^2}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} \end{cases} \quad (4-59)$$

Para demostrar la validez del circuito equivalente, la potencia disipada en R_x debe ser igual a la potencia del convertidor P_0 . Vemos entonces que:

$$P_{RX} = i_{L0}^2 \frac{1 - \cos^2(\psi_0)}{2\pi C_p \omega_0} = \frac{i_{L0}^2}{2\pi C_p \omega_0} \cdot \frac{8\pi C_p \omega_0 R}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} = \frac{4i_{L0}^2 R}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} \quad (4-60)$$

$$P_0 = i_{L0}^2 \frac{R[1 + \cos(\psi_0)]^2}{\pi} = \frac{i_{L0}^2 R}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} = \frac{4i_{L0}^2 R}{(\pi + 2C_p \omega_0 R)^2} \quad (4-61)$$

Como podemos comprobar, las expresiones (4-60) y (4-61) son iguales.

4.8 Validación del modelo

4.8.1 Validación mediante prototipo

Tras haber realizado una validación mediante software informático de simulación de circuitos en el capítulo anterior para el modelo en gran señal, se ha construido un pequeño prototipo a escala para simulación y validación de situaciones reales, que permitan afianzar el desarrollo elegido en régimen permanente.

El montaje del prototipo se puede ver en la Figura 4-3.

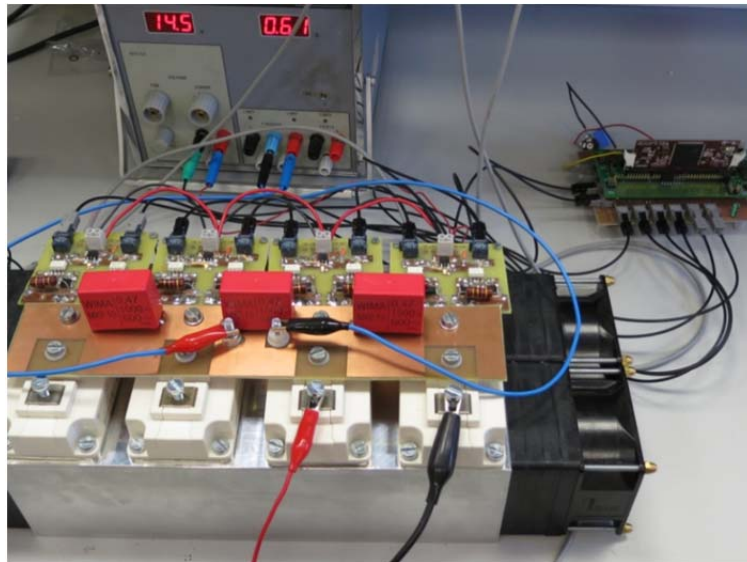
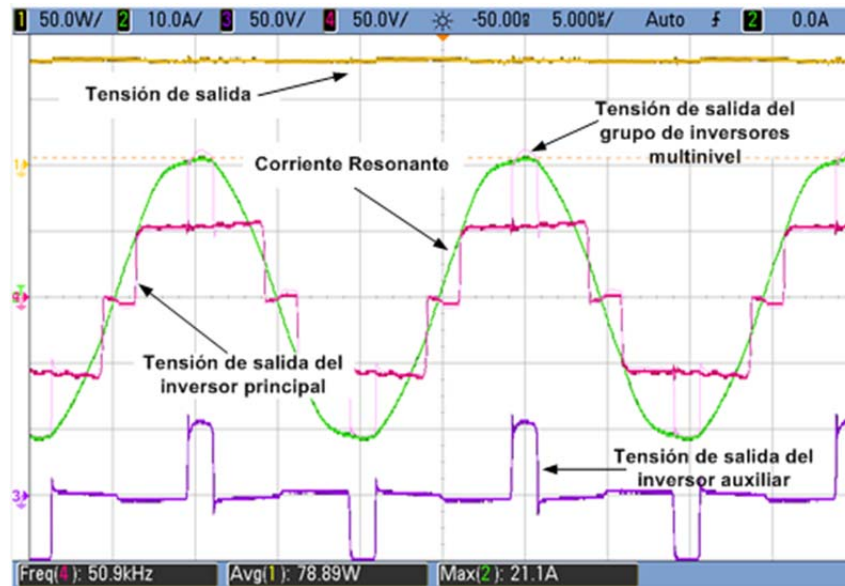


Figura 4-3

Prototipo de laboratorio del inversor multinivel

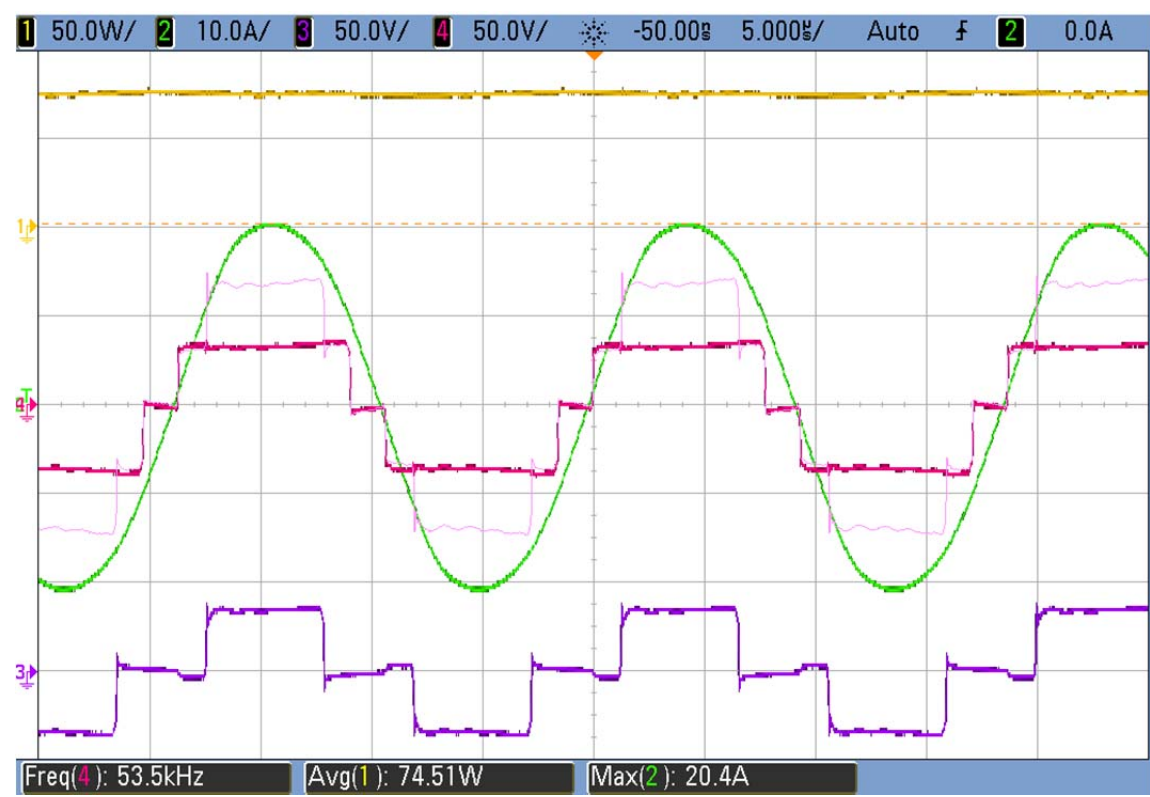
En la Figura 4-4 se describe un ejemplo de los colores y señales que se han capturado en el osciloscopio de forma que sea más sencillo interpretar los resultados.

**Figura 4-4*****Ejemplo de señales recogidas con el osciloscopio en una prueba***

En los siguientes epígrafes se muestran diversos puntos de funcionamiento en para una señal simétrica, asimétrica y modo fluoroscopia explicados en capítulos anteriores. Estos experimentos se han contrastado con los valores teóricos calculados mediante el modelo matemático para verificar su bondad.

4.8.1.1 Pruebas con señal simétrica

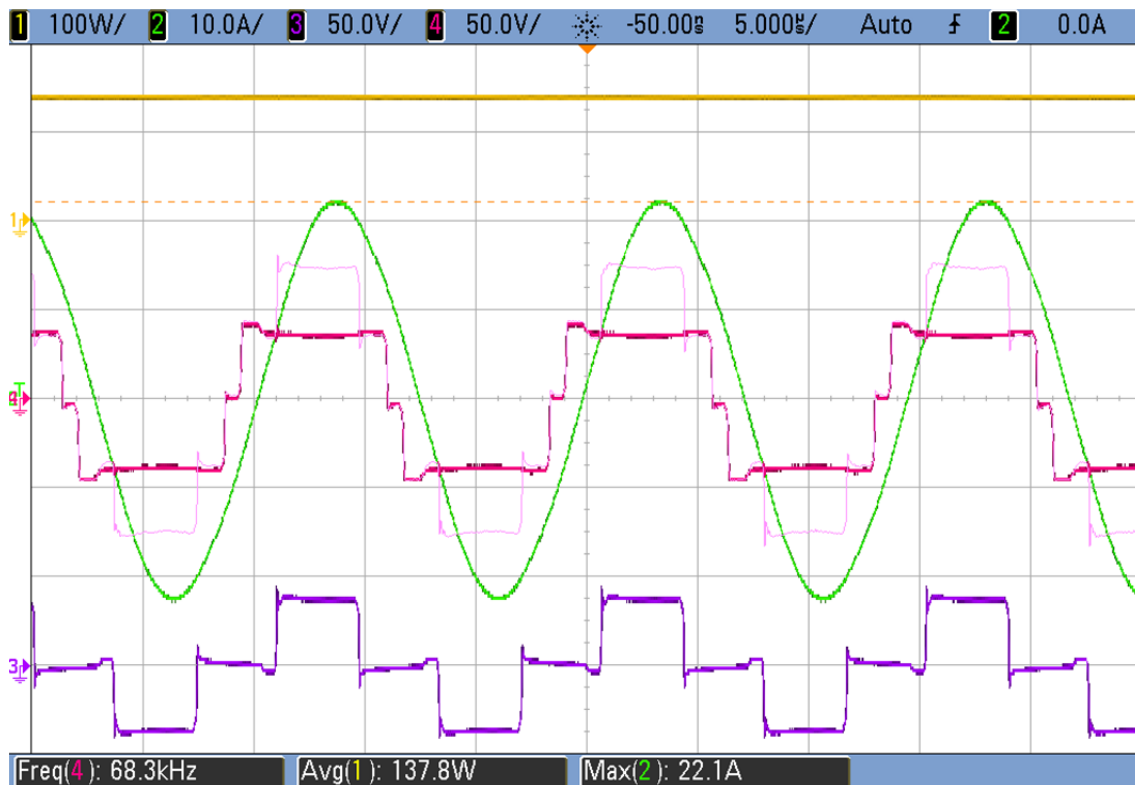
PARAMETROS DE CONTROL				
$f\!=\!57240\text{ Hz}$	$\tau_1\!=\!0.2982$		$\tau_2\!=\!0.2$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s\!=\!38\mu H$	$C_s\!=\!330nF$	$C_p\!=\!220nF$	$L_m\!=\!125\,\mu H$	$C_F\!=\!29\mu F$
OTROS				
$V_e\!=\!40V$	$\Gamma\!=\!1$		$R\!=\!7.5\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x\!=\!74.5V$	$I_L\!=\!20.4A$	$P_w\!=\!740W$	$Error\!=\!1.3\%$	
$V_x\!=\!75V$	$I_L\!=\!19.6A$	$P_w\!=\!750W$		



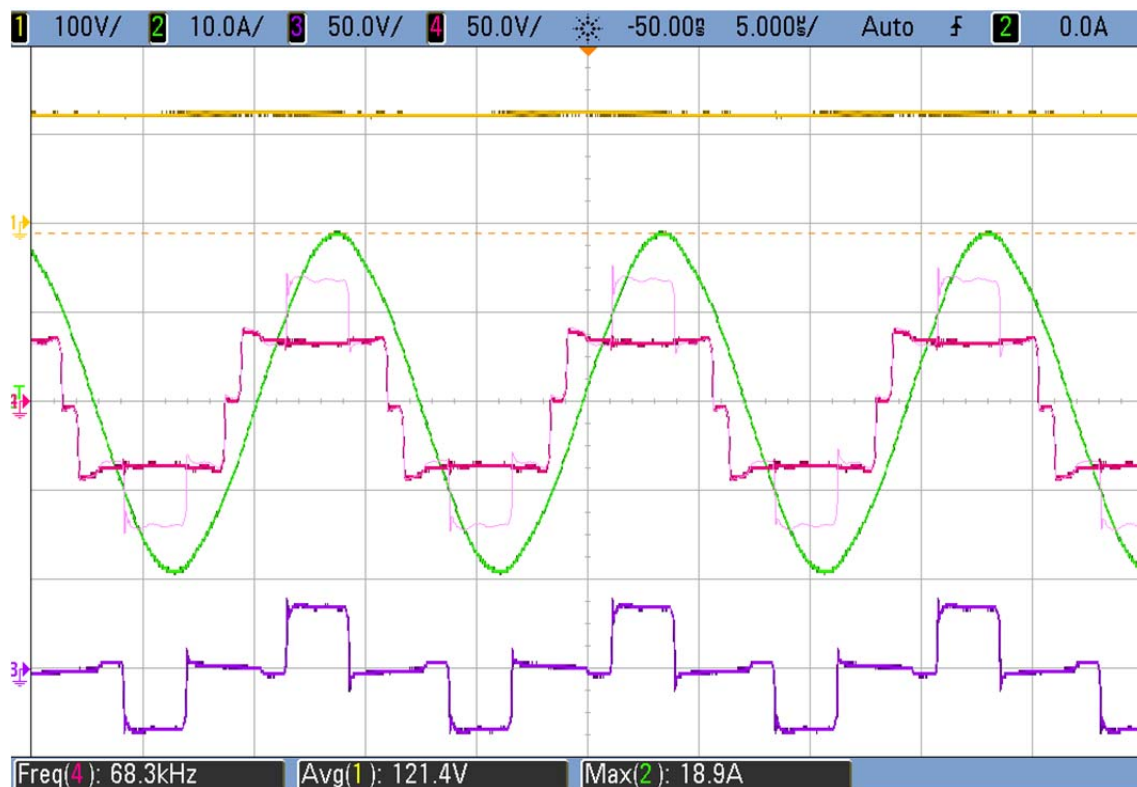
4.20

4 Régimen permanente de la topología multinivel

PARAMETROS DE CONTROL				
$f\!=\!69210\text{ Hz}$	$\tau_1\!=\!0.351$		$\tau_2\!=\!0.2$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s\!=\!38\mu H$	$C_s\!=\!330nF$	$C_p\!=\!220nF$	$L_m\!=\!125\ \mu H$	$C_F\!=\!29\mu F$
OTROS				
$V_e\!=\!40V$	$\Gamma\!=\!1$		$R\!=\!15\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x\!=\!137.8V$	$I_L\!=\!22.1A$	$P_w\!=\!1265W$	$Error\!=\!3.9\%$	
$V_x\!=\!135V$	$I_L\!=\!21.3A$	$P_w\!=\!1215W$		



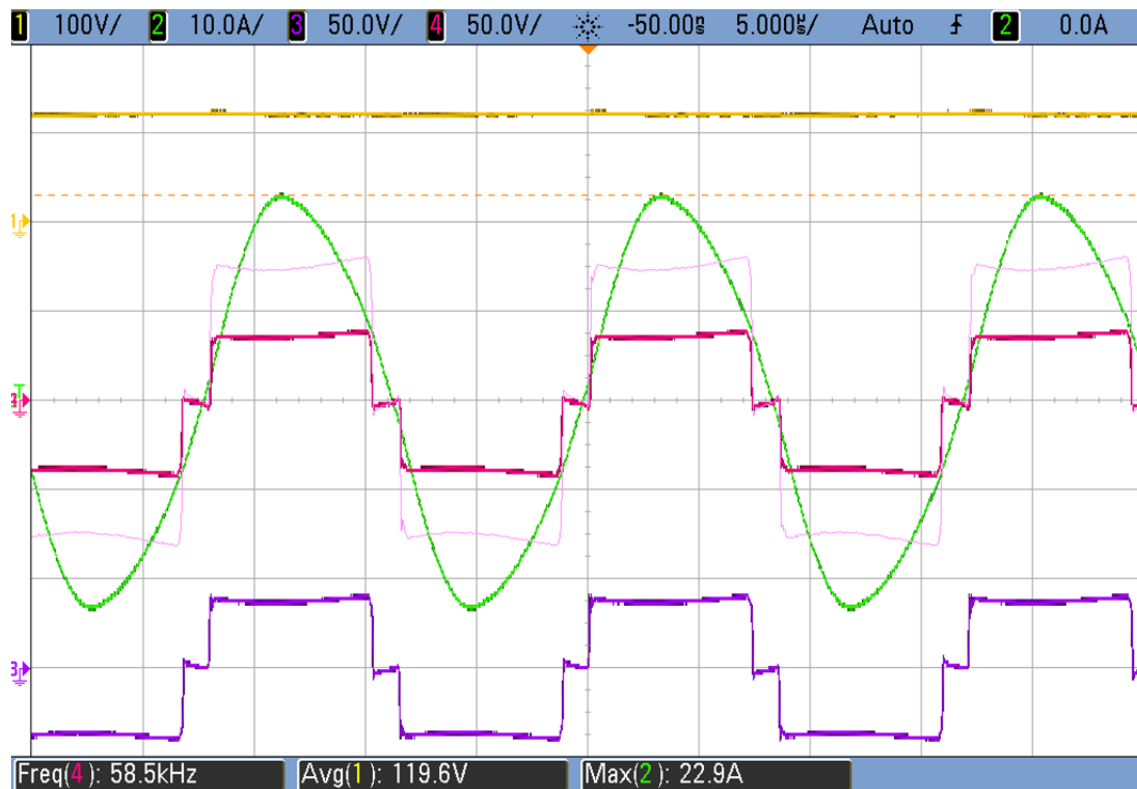
PARAMETROS DE CONTROL				
$f=69210\text{ Hz}$	$\tau_1=0.2916$		$\tau_2= 0.2$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=30\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=121.4V$	$I_L=18.9A$	$P_w=491W$	$Error=2.3\%$	
$V_x=120V$	$I_L=17.75A$	$P_w=479.7W$		



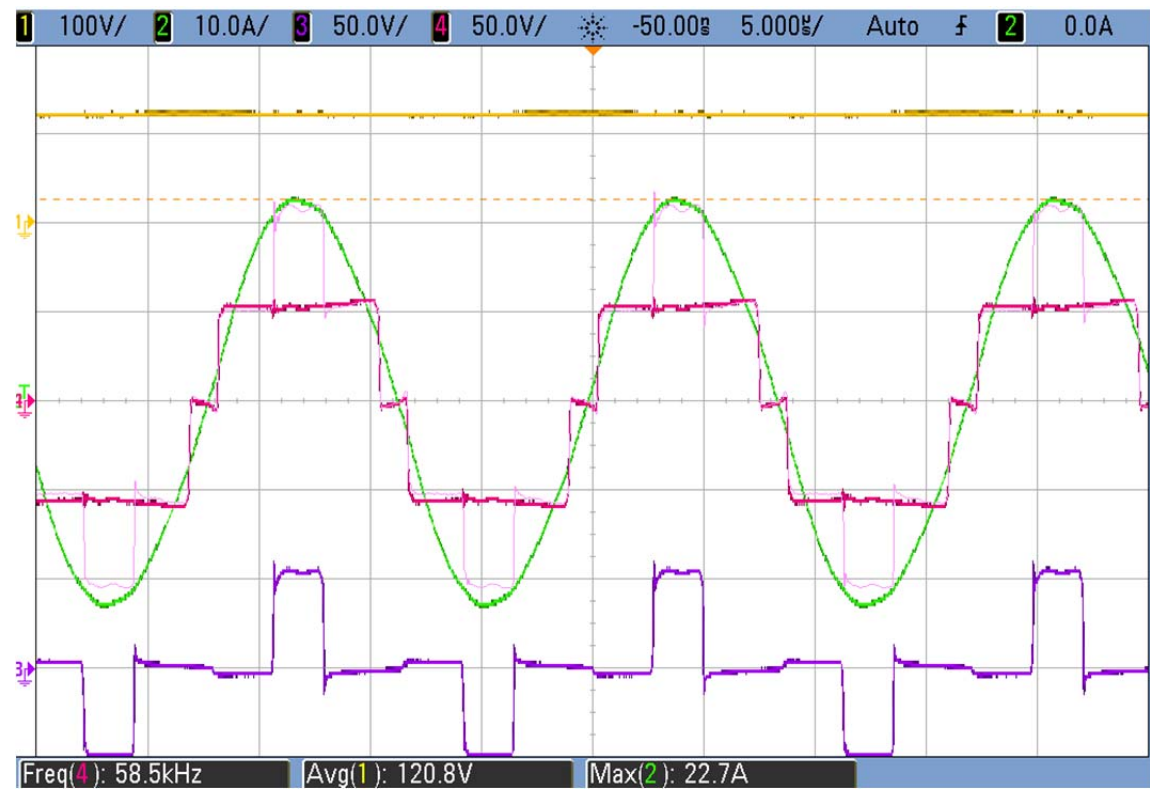
4.22

4 Régimen permanente de la topología multinivel

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=59620\text{ Hz}$	$\tau_1=0.42$		$\tau_2= 0.4$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=15\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=119.6V$	$I_L=22.9A$	$P_w=953.6W$	$Error=0.4\%$	
$V_x=120V$	$I_L=22.4A$	$P_w=959.8W$		

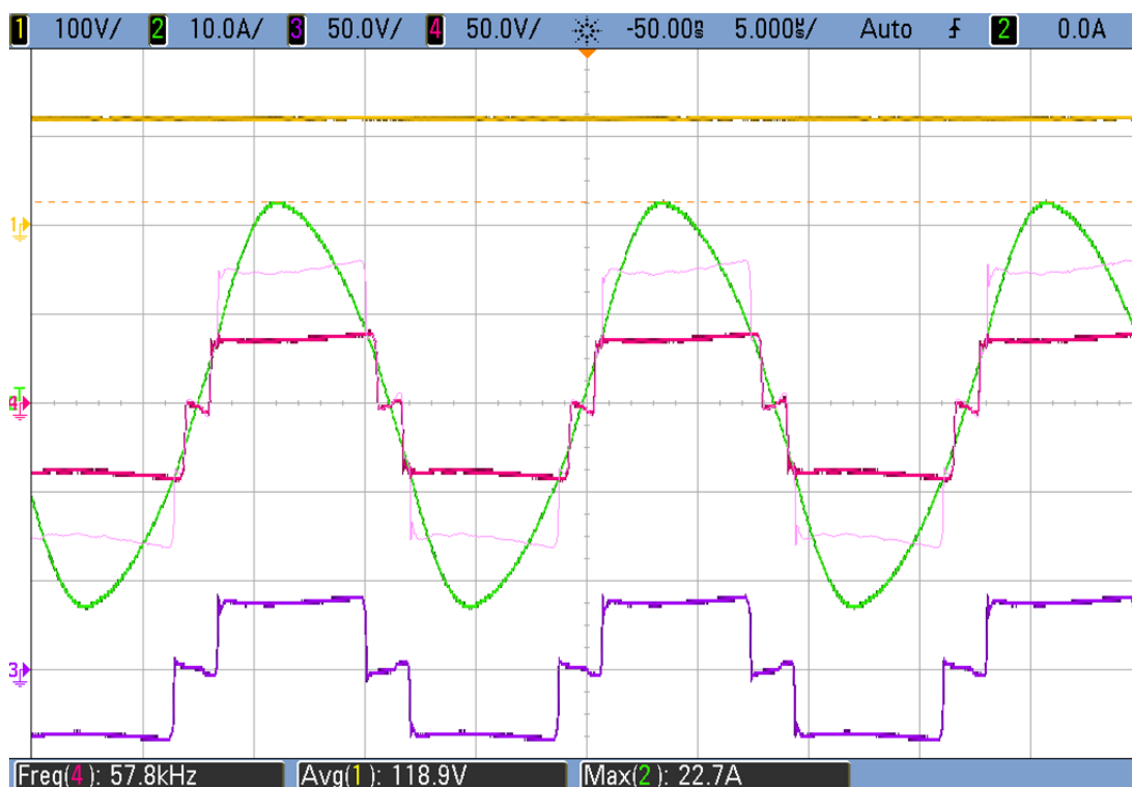


PARAMETROS DE CONTROL				
$f=59120\text{ Hz}$	$\tau_1=0.42$		$\tau_2=0.13$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=60V$	$\Gamma=1$		$R=15\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=120.8V$	$I_L=22.7A$	$P_w=972.8W$	$Error=1.2\%$	
$V_x=120.1V$	$I_L=22.2A$	$P_w=961.6W$		

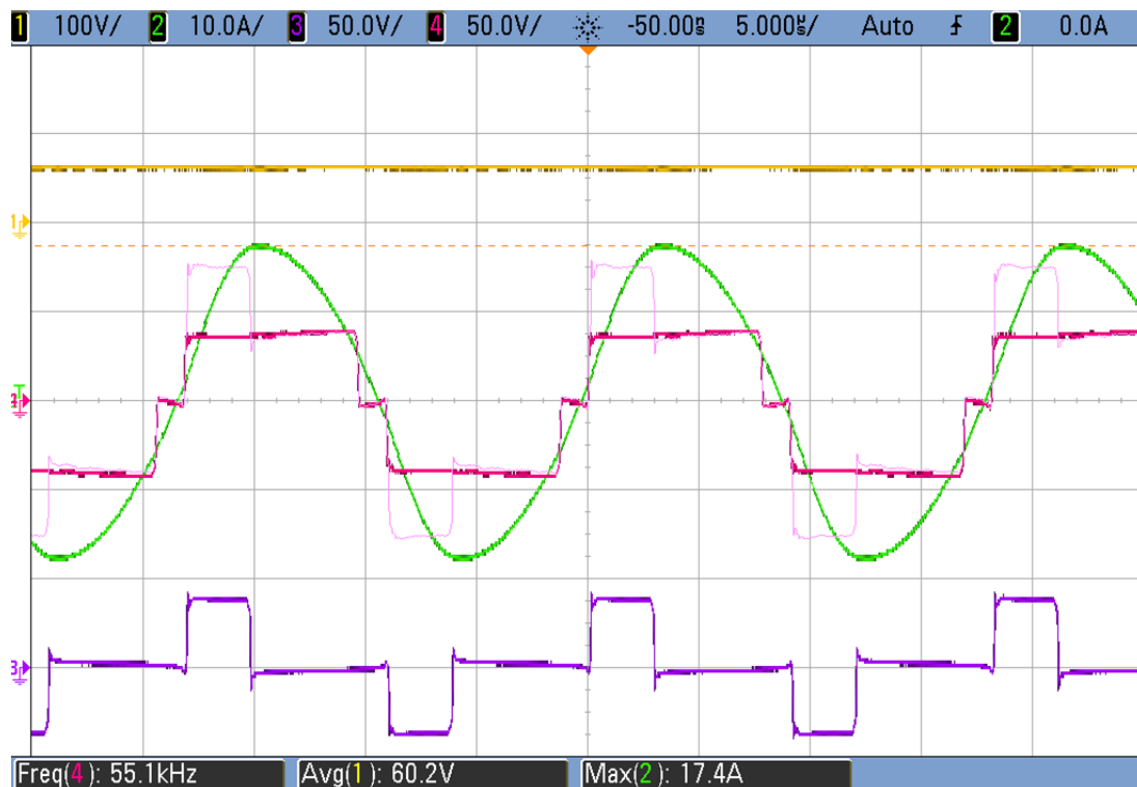


4.8.1.2 Pruebas con señal asimétrica

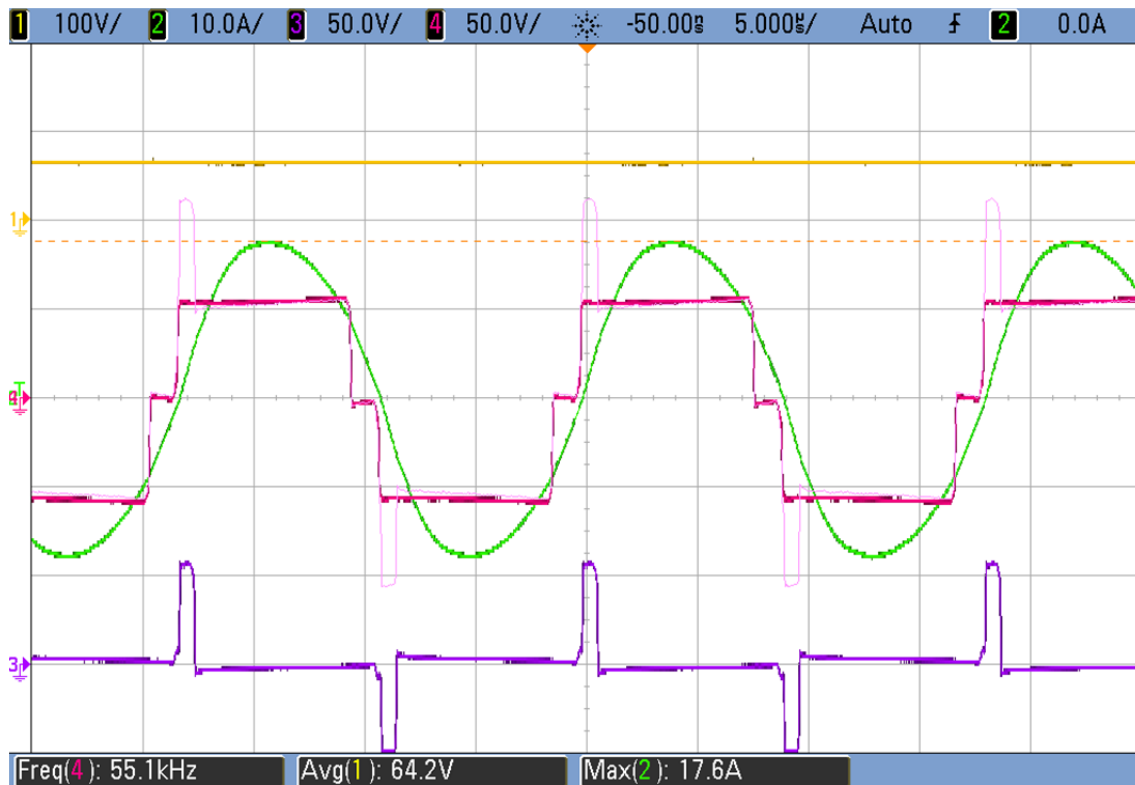
PARAMETROS DE CONTROL				
$f=57640\text{ Hz}$	$\tau_1=0.426$		$\tau_2=0.3$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\text{ }\mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=15\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=118.9V$	$I_L=22.7A$	$P_w=942.4W$	$Error=1.5\%$	
$V_x=119.8V$	$I_L=22.1A$	$P_w=956.8W$		



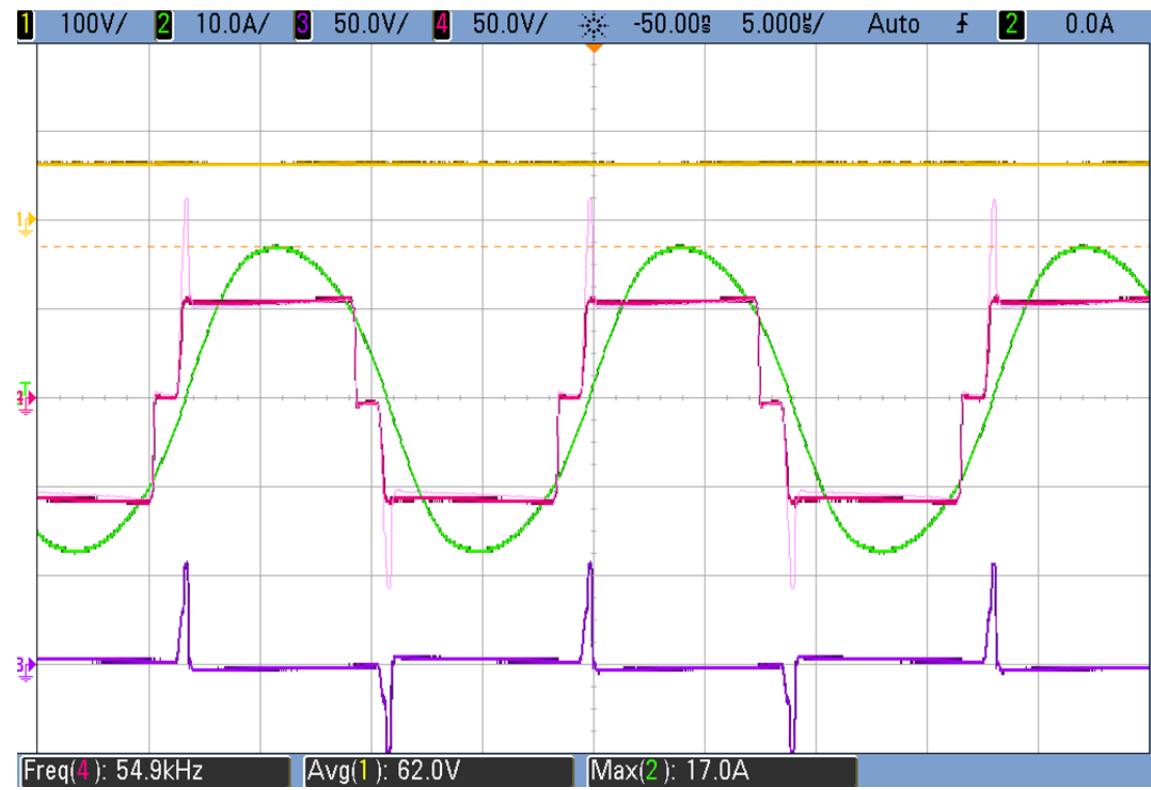
PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56620\text{ Hz}$	$\tau_1=0.28$		$\tau_2= 0.1$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=7.5\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=60.2V$	$I_L=17.4A$	$P_w=483.2W$	$Error=0.7\%$	
$V_x=59.98V$	$I_L=17.25A$	$P_w=479.6W$		



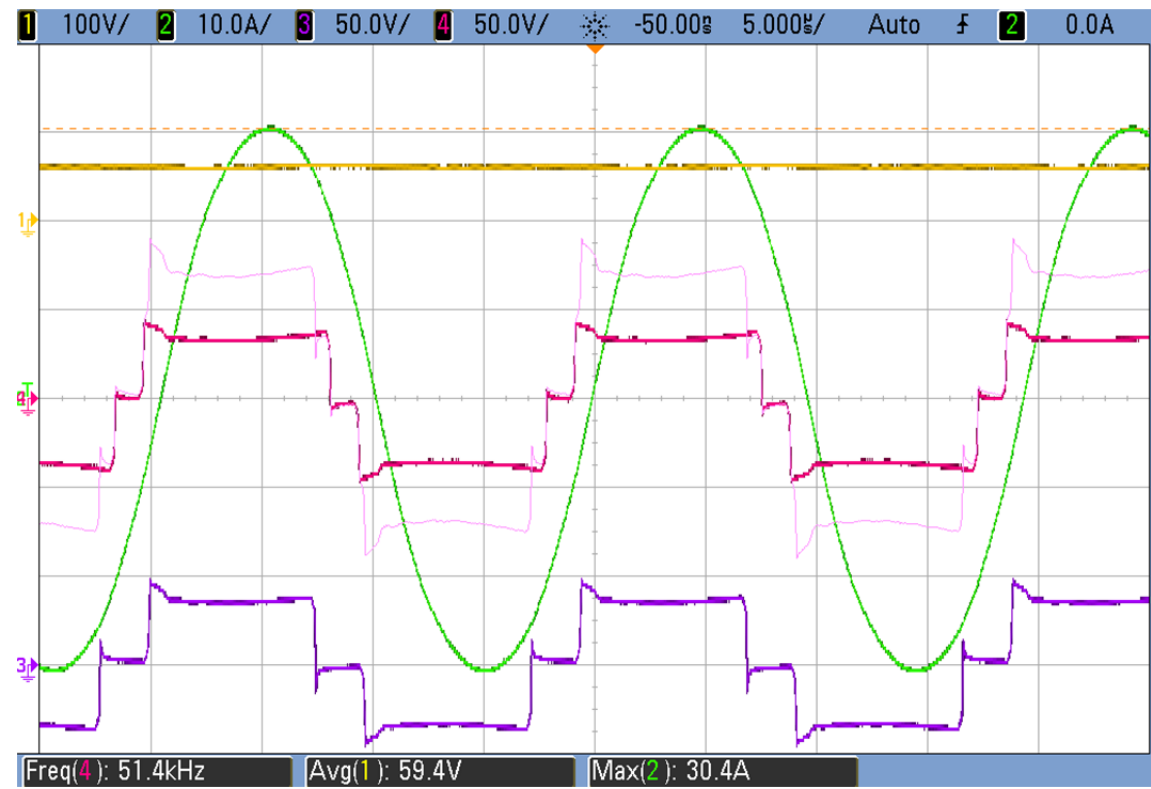
PARAMETROS DE CONTROL				
$f\!=\!56620\text{ Hz}$	$\tau_1\!=\!0.43$		$\tau_2\!=\!0.04$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s\!=\!38\mu H$	$C_s\!=\!330nF$	$C_p\!=\!220nF$	$L_m\!=\!125\,\mu H$	$C_F\!=\!29\mu F$
OTROS				
$V_e\!=\!60V$	$\Gamma\!=\!1$		$R\!=\!7.5\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x\!=\!64.2V$	$I_L\!=\!17.6A$	$P_w\!=\!549.5W$	$Error\!=\!5.5\%$	
$V_x\!=\!62.4V$	$I_L\!=\!17.9A$	$P_w\!=\!519.1W$		



PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56620\text{ Hz}$	$\tau_1=0.43$		$\tau_2= 0.02$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=60V$	$\Gamma=1$		$R=7.5\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=62\text{ V}$	$I_L=17A$	$P_w=512.5W$	$Error=6.9\%$	
$V_x=59.8V$	$I_L=17.6A$	$P_w=476.8W$		

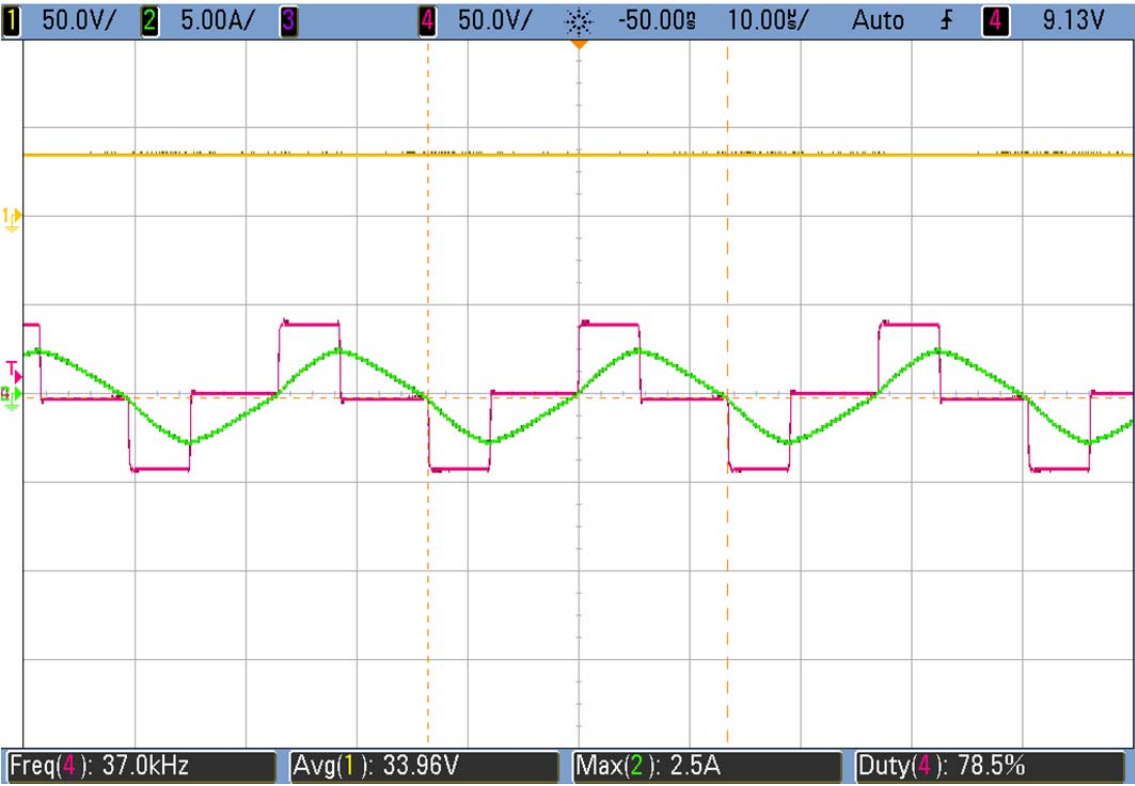


PARAMETROS DE CONTROL				
$f\!=\!56620\text{ Hz}$	$\tau_1\!=\!0.28$		$\tau_2\!=\!0.2$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s\!=\!38\mu H$	$C_s\!=\!330nF$	$C_p\!=\!220nF$	$L_m\!=\!125\ \mu H$	$C_F\!=\!29\mu F$
OTROS				
$V_e\!=\!40V$	$\Gamma\!=\!1$		$R\!=\!3.75\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x\!=\!59.4V$	$I_L\!=\!30.4A$	$P_w\!=\!940.8W$	$Error\!=\!2\%$	
$V_x\!=\!60V$	$I_L\!=\!29.39A$	$P_w\!=\!960.3\text{ W}$		



4.8.1.3 Pruebas en modo fluoroscopia

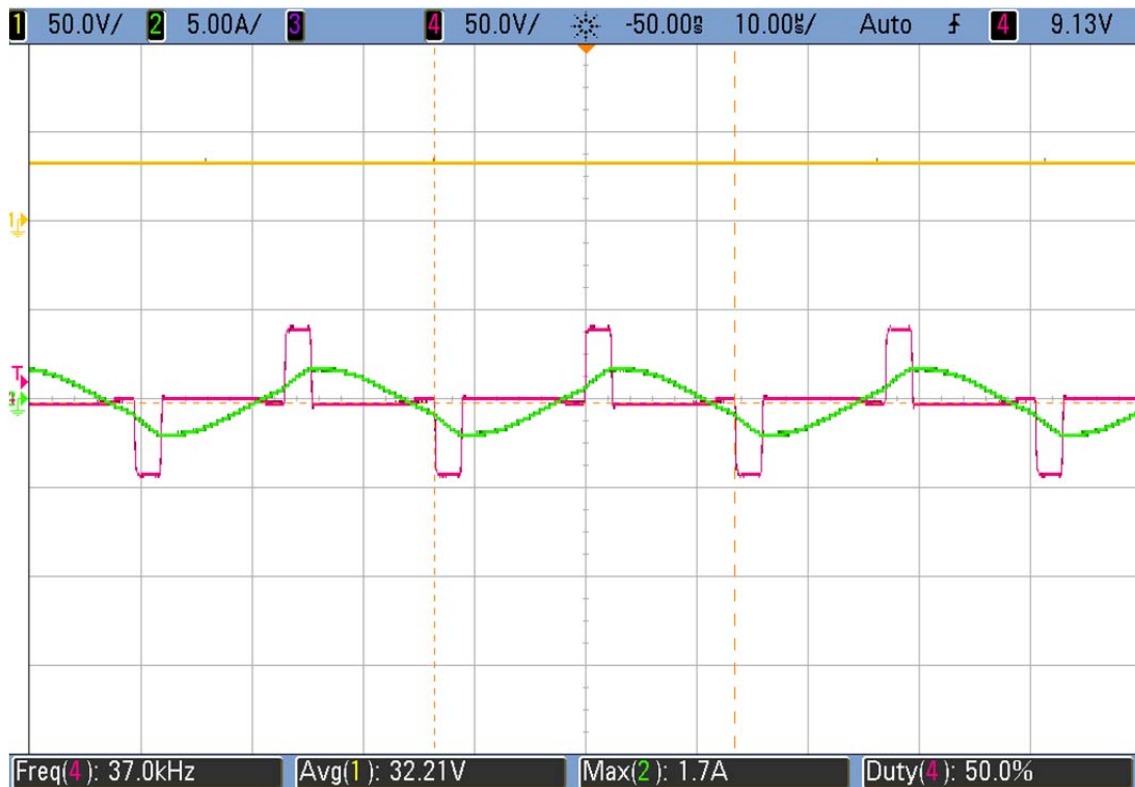
PARAMETROS DE CONTROL				
$f=37290\text{ Hz}$	$\tau_1=0.14$		$\tau_2= 0$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=100\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=33.9V$	$I_L=2.5A$	$P_w=11.49W$	$Error=10\%$	
$V_x=32V$	$I_L=2.15A$	$P_w=10.24W$		



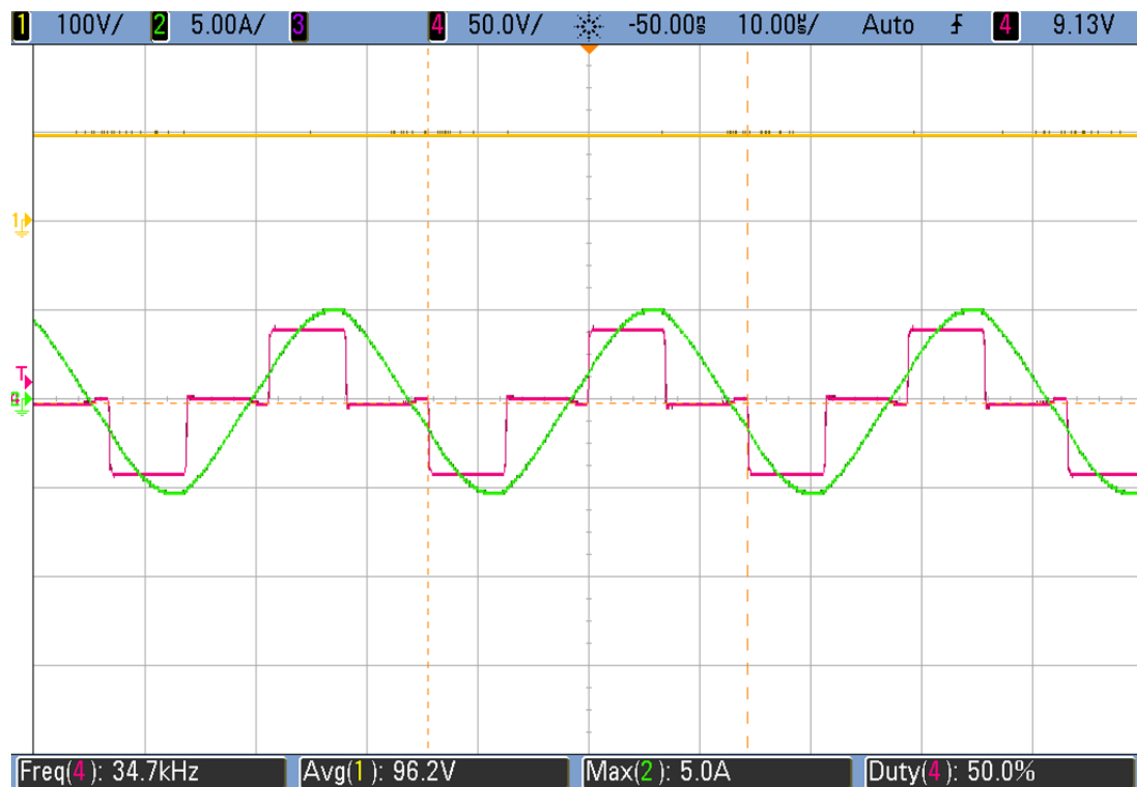
4.30

4 Régimen permanente de la topología multinivel

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=36730\text{ Hz}$	$\tau_1=0.052$		$\tau_2=0$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\ \mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=1000\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=32.21V$	$I_L=1.7A$	$P_w=1.037W$	$Error=2\%$	
$V_x=31.89V$	$I_L=1.66A$	$P_w=1.01W$		



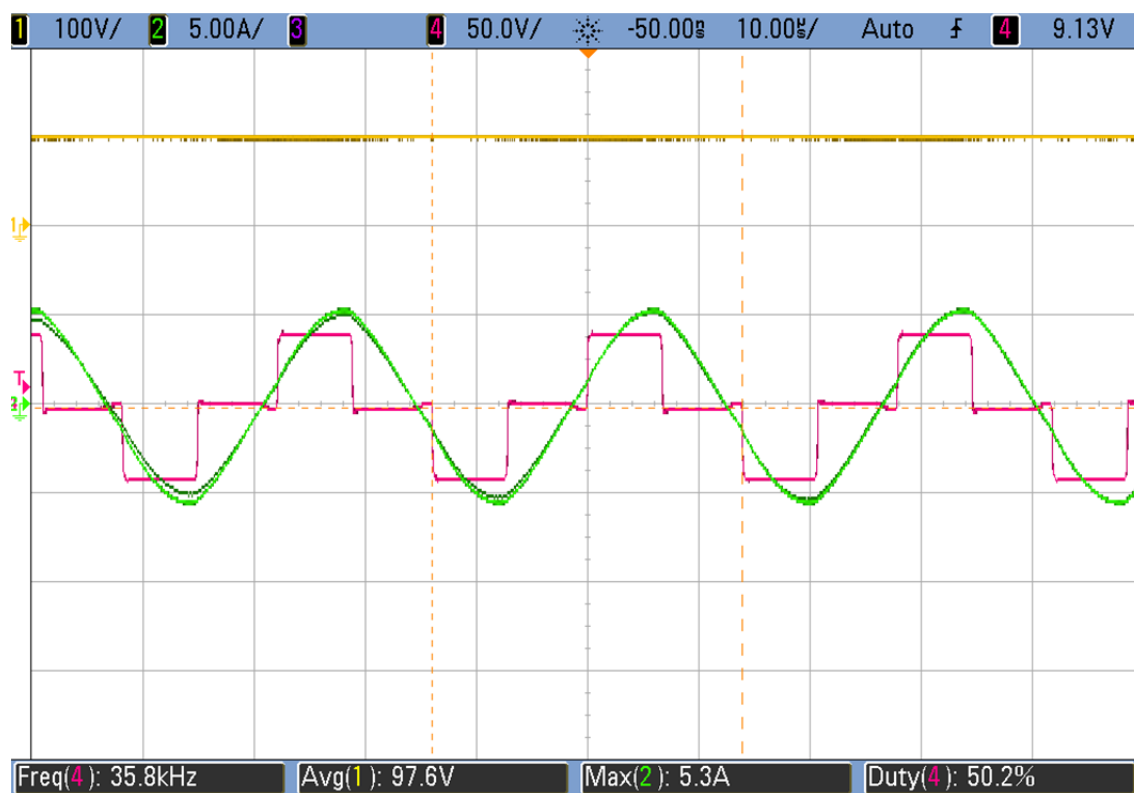
PARAMETROS DE CONTROL				
$f=34820\text{ Hz}$	$\tau_1=0.093$		$\tau_2=0$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\text{ }\mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=1000\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=96.2V$	$I_L=5A$	$P_w=9.25W$	$Error=1.2\%$	
$V_x=95.6V$	$I_L=4.86A$	$P_w=9.13W$		



4.32

4 Régimen permanente de la topología multinivel

PARAMETROS DE CONTROL				
$f=35530\text{ Hz}$	$\tau_1=0.08$		$\tau_2=0$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$L_m=125\text{ }\mu H$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=40V$	$\Gamma=1$		$R=1400\Omega$	
RESULTADOS REAL/MODELO				
$V_x=97.6V$	$I_L=5.3A$	$P_w=6.8W$	$Error=3.3\%$	
$V_x=95.96V$	$I_L=4.8A$	$P_w=6.57W$		



4.9 Estudio del modelo

Una vez que se han validado experimentalmente los resultados mediante el prototipo de laboratorio en comparación con el modelo teórico, se proponen varias representaciones a modo de ábacos las cuales el diseñador puede considerar de utilidad. Aunque bien es cierto que, una vez obtenido el modelo, el diseñador puede obtener sus propios gráficos que representan zonas de trabajo específicas que pueden resultar más ventajosas que las aquí expuestas. El sistema multinivel propuesto, al tener tres parámetros de control como son la frecuencia y los ciclos de trabajo primario y auxiliar, dispone de 3 grados de libertad que hacen que los puntos de trabajo de funcionamiento del inversor sean innumerables. A continuación se representan algunos de ellos sometidos a ciertas restricciones ya que se considera que pueden ser de mayor interés como son las curvas de isopotencia (puntos de funcionamiento con valores de igual potencia de salida), isotensión (puntos de funcionamiento con valores de igual tensión de salida), isoresistencia (puntos de funcionamiento con valores de resistencia de carga constantes), e isoángulo (puntos de funcionamiento con valores de ángulo de fase entre corriente resonante y tensión de entrada constantes). No obstante, el modelo permite obtener cualesquiera gráficos que el diseñador pueda necesitar. Se proponen al igual que la mayoría de los capítulos de esta obra, gráficos específicas para señales de salida del inversor simétrica, asimétrica y en modo fluoroscopia. Así mismo, las gráficas representadas están normalizadas.

4.9.1 Estudio del modelo con señal simétrica

A continuación se representan ábacos para el caso de señal de salida de los inversores con forma simétrica, representando las siguientes gráficas:

- Curvas de isorresistencia: Curvas para diferentes valores de resistencia de carga en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isopotencia: Curvas para diferentes valores de potencia de salida en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isotensión: Curvas para diferentes valores de tensión de salida en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la potencia de salida de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isoángulo: Curvas para diferentes valores de ángulo de fase en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y potencia de salida.

4.9.1.1 Curvas de isorresistencia

En estas curvas podemos obtener información del comportamiento del sistema mediante las variaciones que necesariamente se producen en la carga a la que se entrega la potencia.

En los gráficos podemos observar que las magnitudes todas son crecientes conforme se aumenta el ciclo de trabajo principal. Esto es lógico pues al aumentar dicho ciclo, consecuentemente también hay que aumentar el auxiliar por no poder ser éste menor que el principal. Esto hace que la tensión entregada al circuito sea mayor lo que obviamente se traduce en un aumento de magnitudes como corriente resonante o la tensión en el condensador serie, así como la potencia entregada. También se observa que para valores de carga crecientes, el punto de resonancia se desplaza consecuentemente, ya que varía la configuración de la red resonante RLC. Conforme nos acercamos a la frecuencia resonante normalizada, las magnitudes alcanzan su valor máximo.

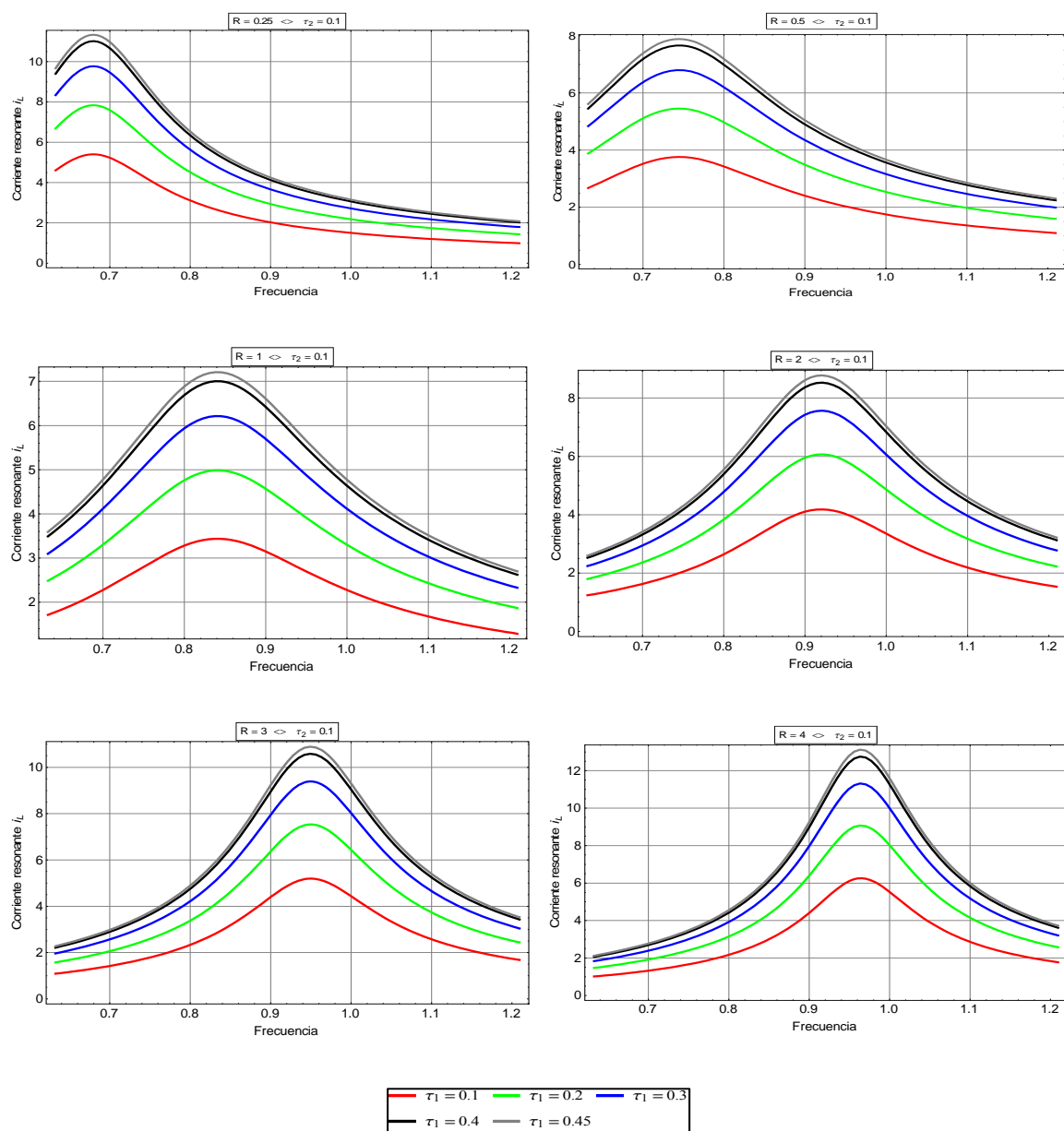


Figura 4-5

Corriente resonante para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

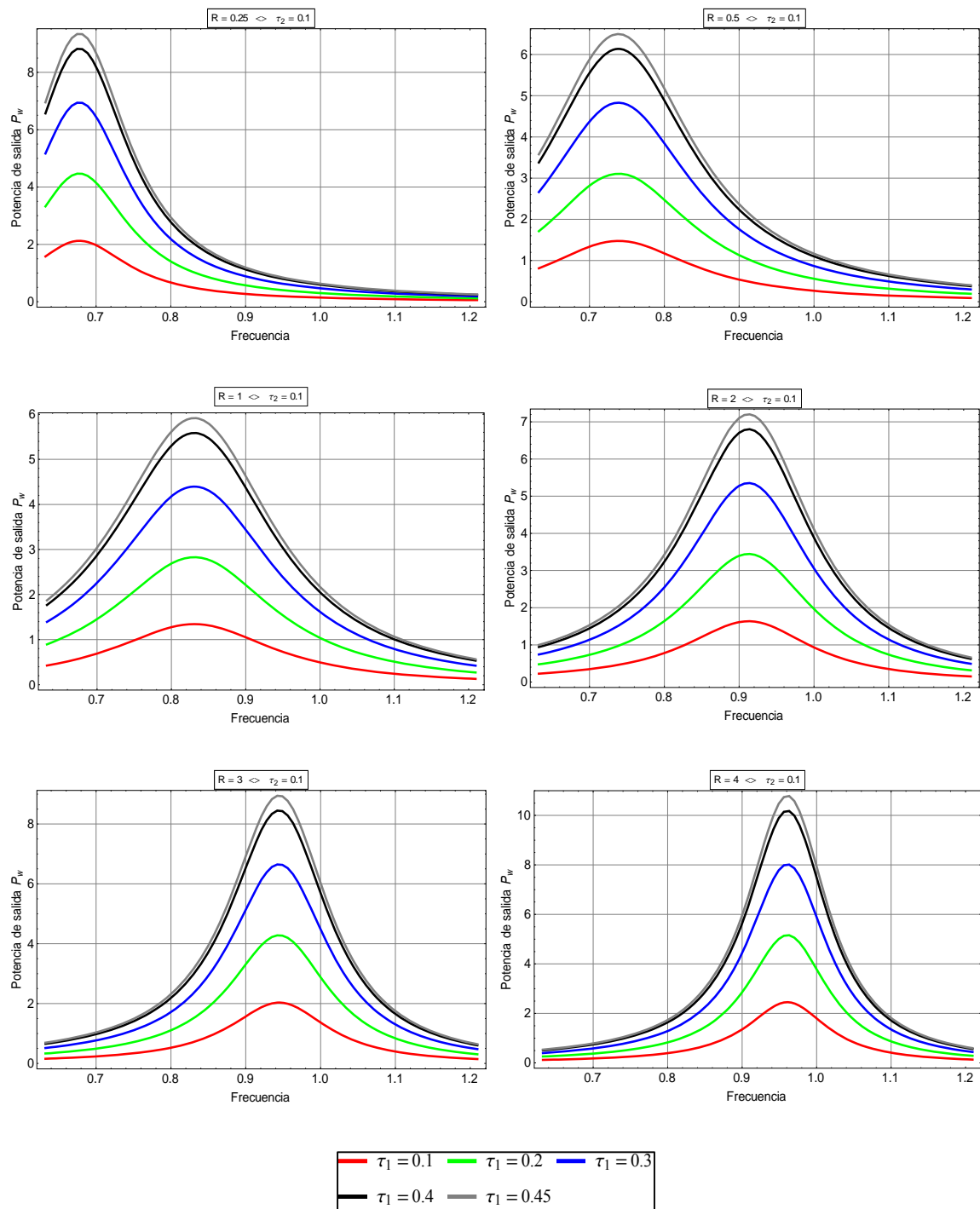


Figura 4-6

Potencia de salida para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

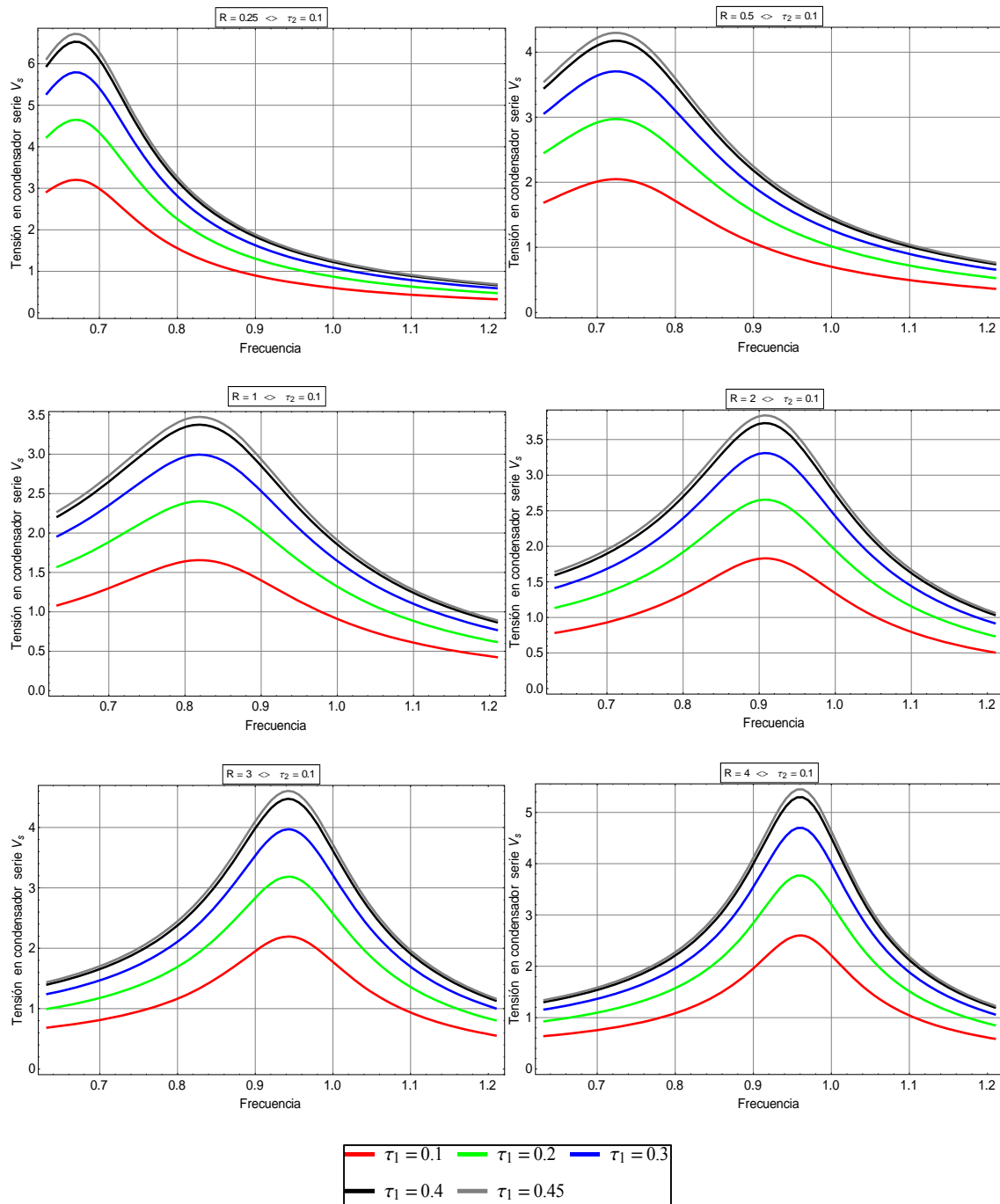


Figura 4-7

Tensión en condensador serie para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

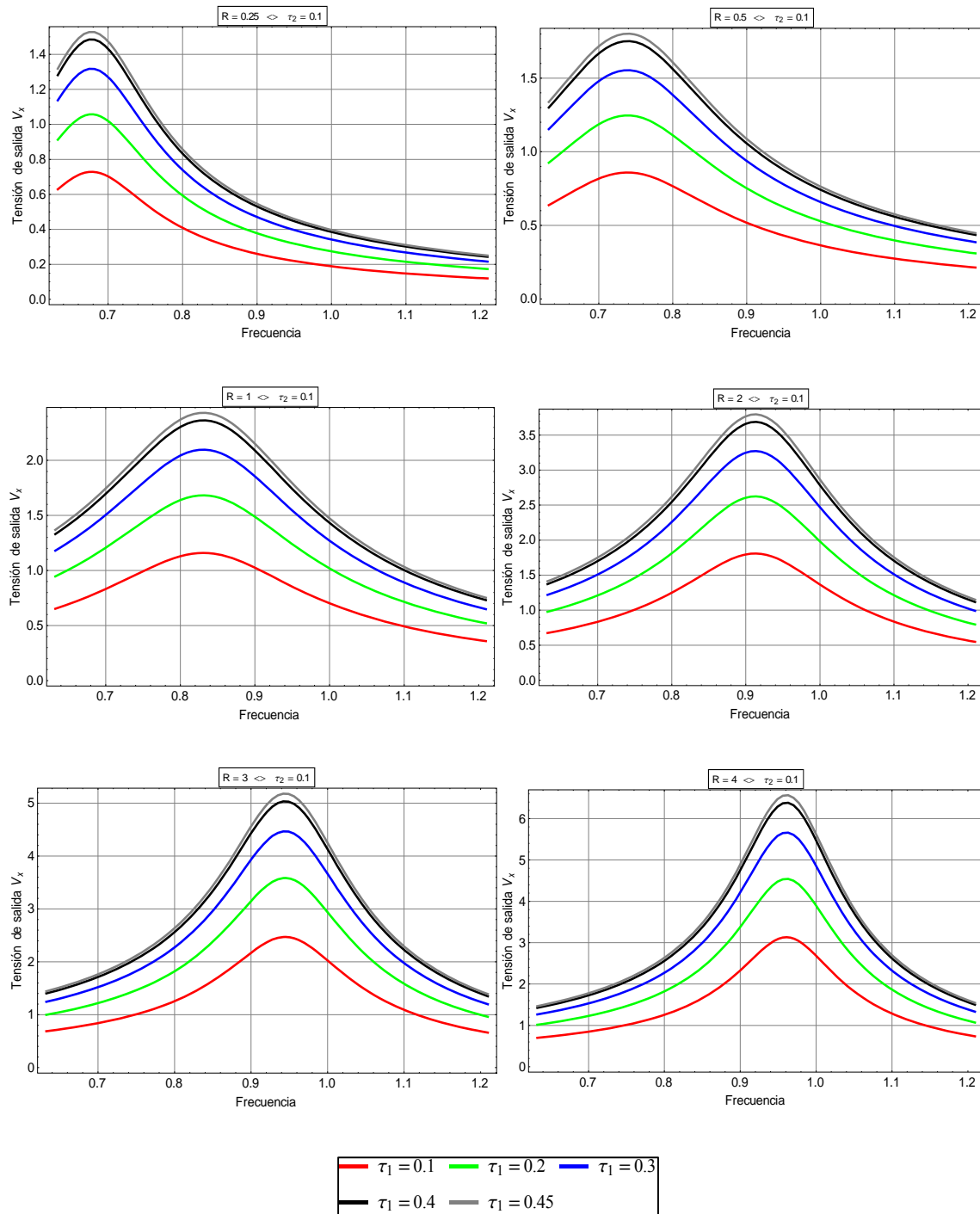


Figura 4-8

Tensión de salida para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

4.9.1.2 Curvas de isopotencia

La potencia es un parámetro crítico en una fuente de alimentación de estas características, pues su relación es directa con la cantidad de energía que se transmite al paciente en la generación de los rayos X, por lo que es vital conocer el comportamiento del sistema para entregar en todo momento la mínima potencia necesaria para obtener nuestro propósito.

En los gráficos observamos que podemos obtener los mismos resultados de potencia para el mismo valor de ciclo de trabajo a dos frecuencias distintas. También se observa cómo se obtiene una una relación lineal en la corriente resonante para diferentes valores de tensión de salida: esto es lógico pues para una potencia fija y tensión de salida fija, la relación con la corriente tiene un comportamiento completamente lineal creciente.

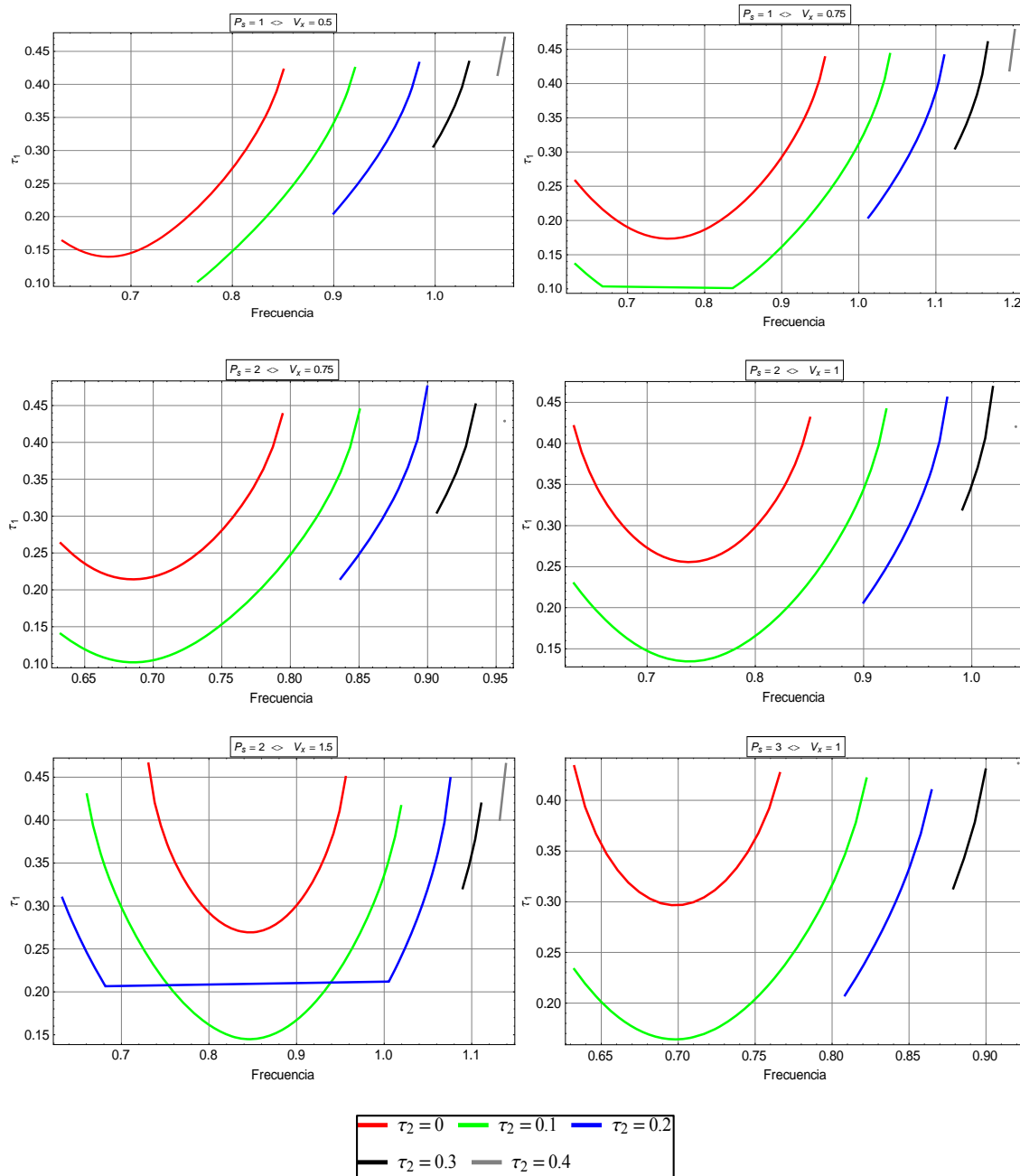


Figura 4-9

Ciclo de trabajo principal para diferentes valores de potencia de salida y tensión de salida en función del ciclo de trabajo auxiliar

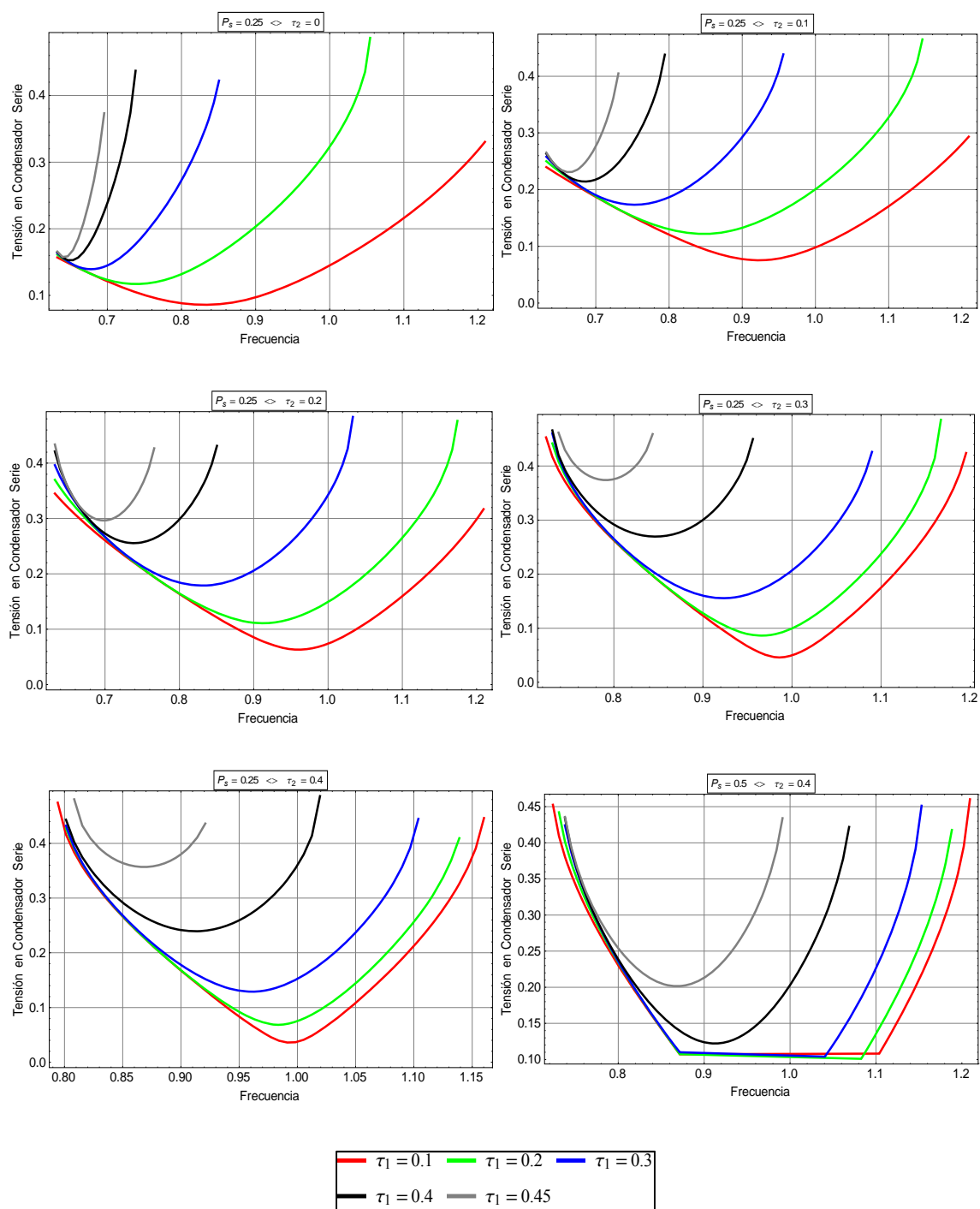


Figura 4-10

Tensión en condensador serie para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

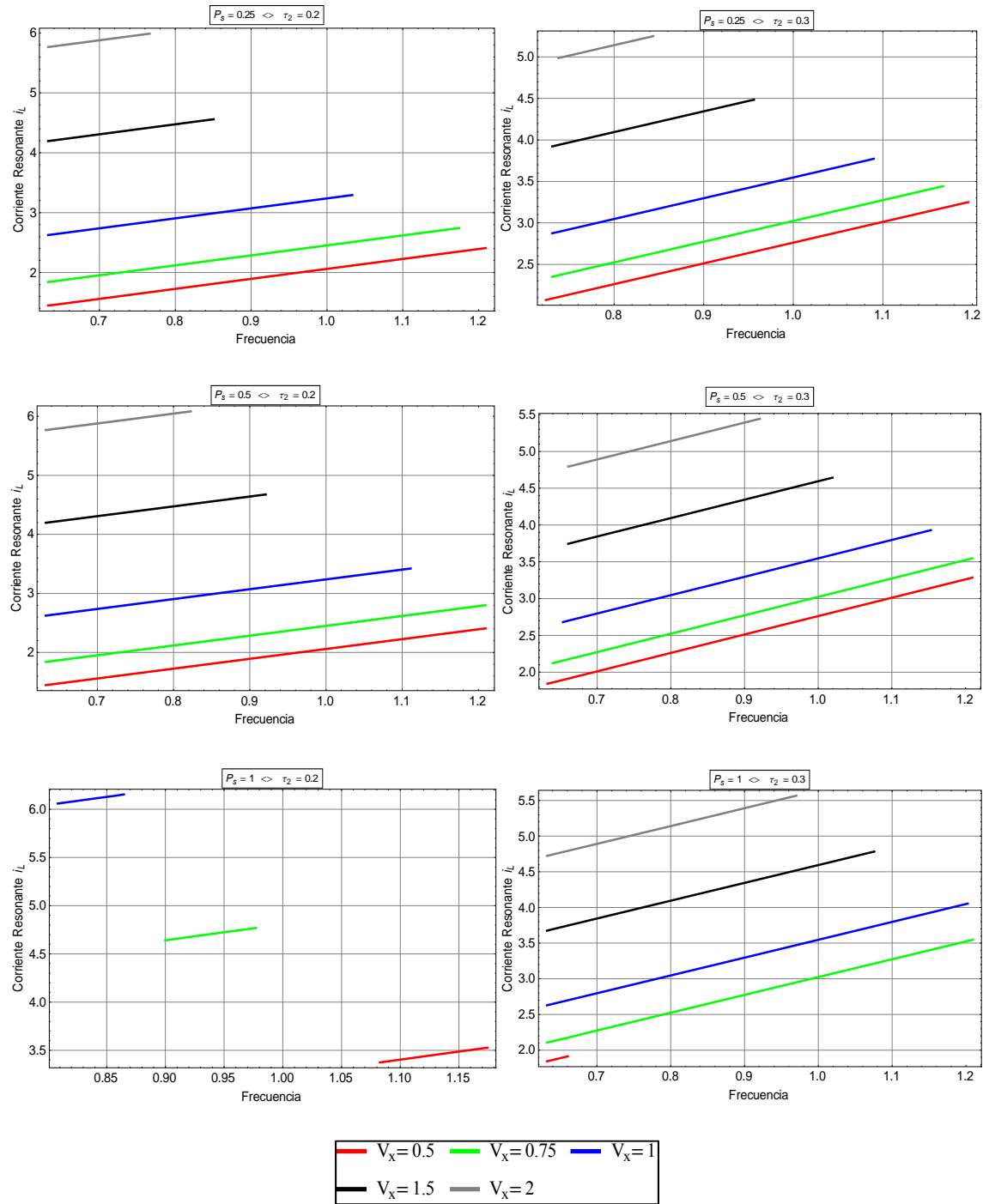


Figura 4-11

Corriente resonante para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

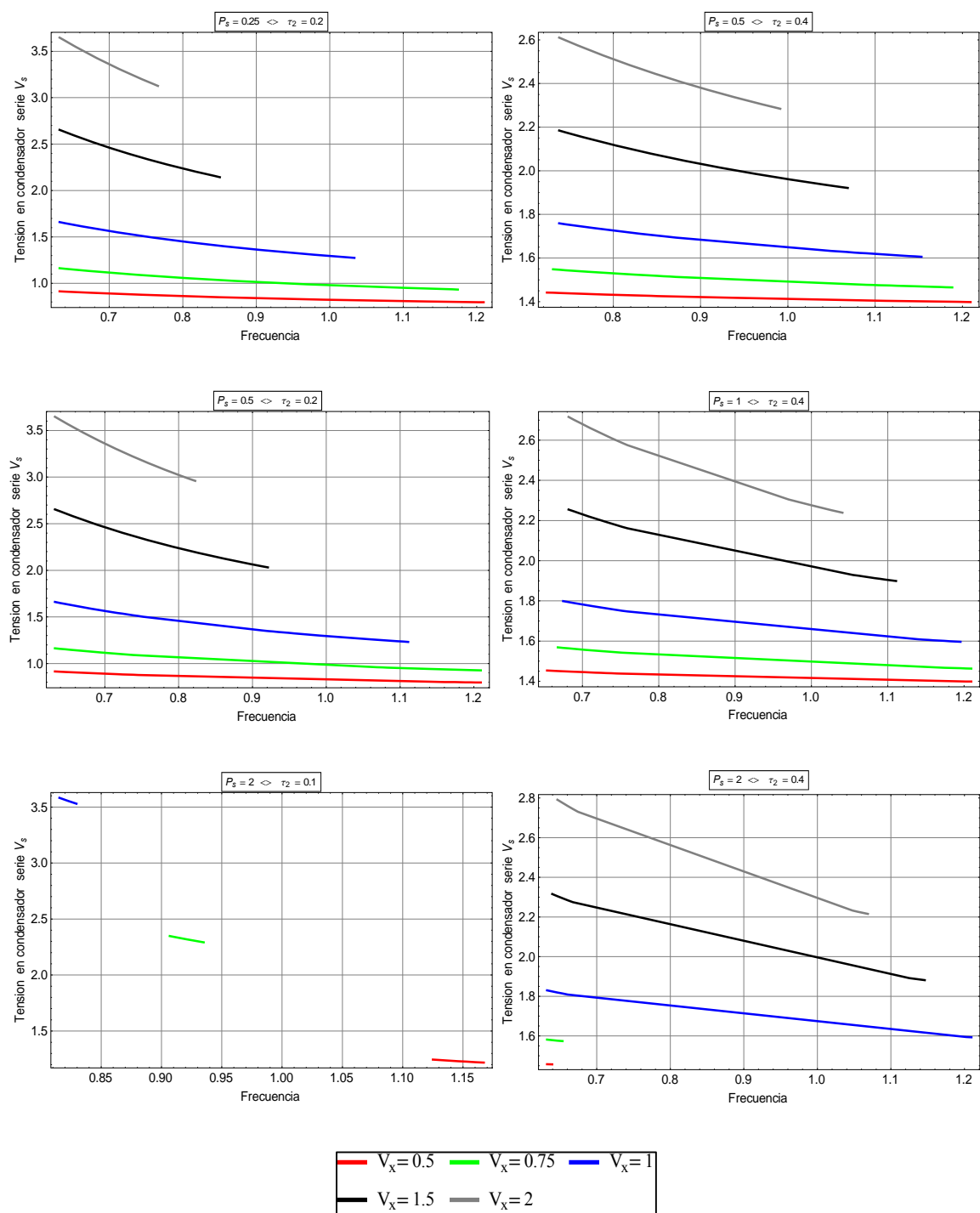


Figura 4-12

Tensión en condensador serie para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

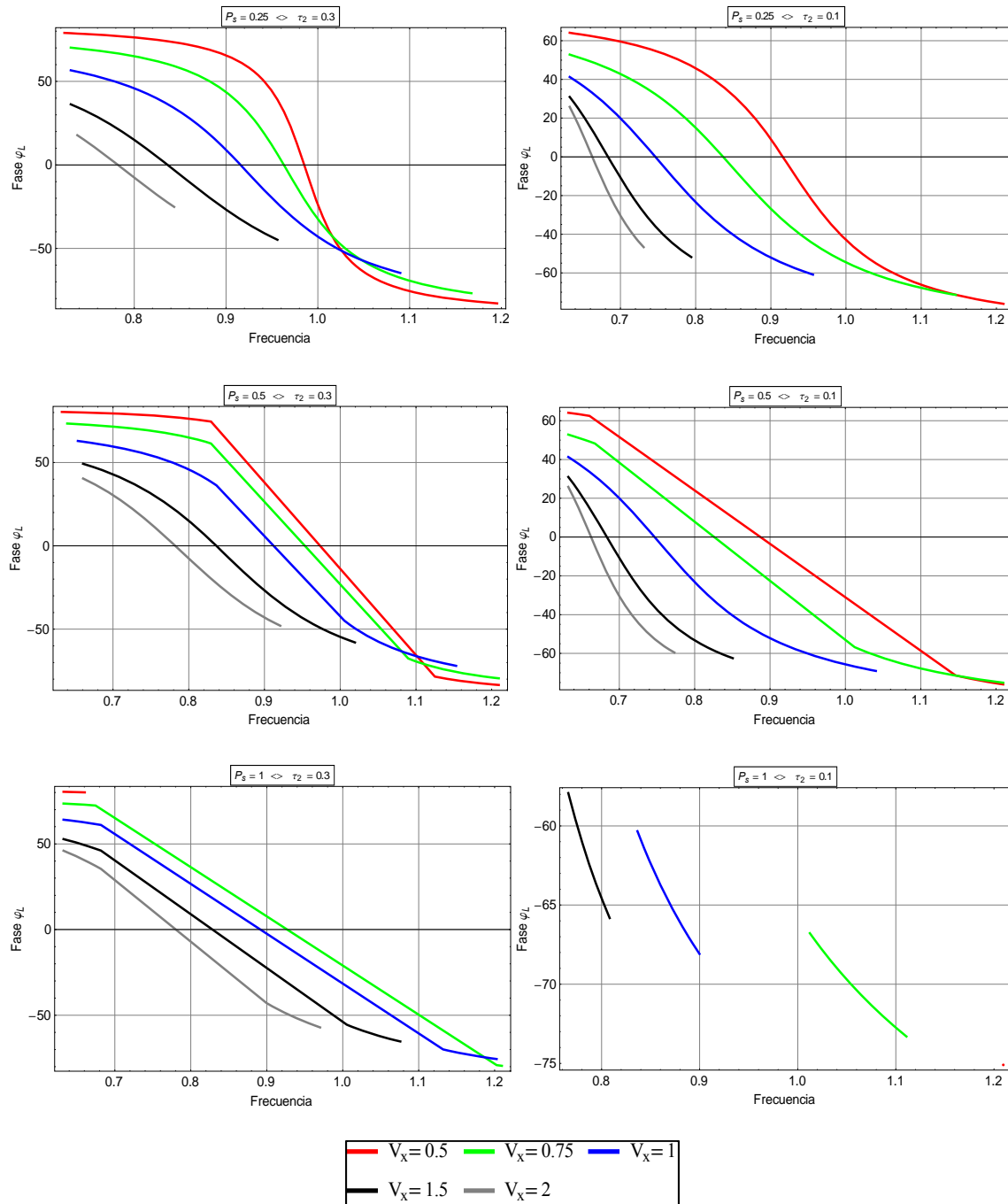


Figura 4-13

Fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

4.9.1.3 Curvas de isotensión

Las curvas de isotensión representan información valiosa pues representan la relación que ha de darse entre los diferentes parámetros de control para obtener la tensión de salida deseada en cada momento.

En los gráficos para todas las magnitudes se observa que se alcanzan valores máximos a frecuencias más bajas que la frecuencia base, en torno a 0.7. Luego tienen un comportamiento decreciente. Esto indica que hay un valor mínimo de frecuencia que no debe alcanzarse para obtener un comportamiento estable del sistema.

Cabe destacar el comportamiento que se produce a mayores valores de ciclo de trabajo auxiliar, ya que se produce un acercamiento de las gráficas, indicando que apenas hay variación en el comportamiento de las magnitudes para valores altos de ciclos de trabajo, independientemente de la tensión de salida a la que se desee trabajar. Esto conlleva a un cuidadoso diseño del control ya que pequeñas variaciones de éstos, cambian el punto de trabajo del sistema.

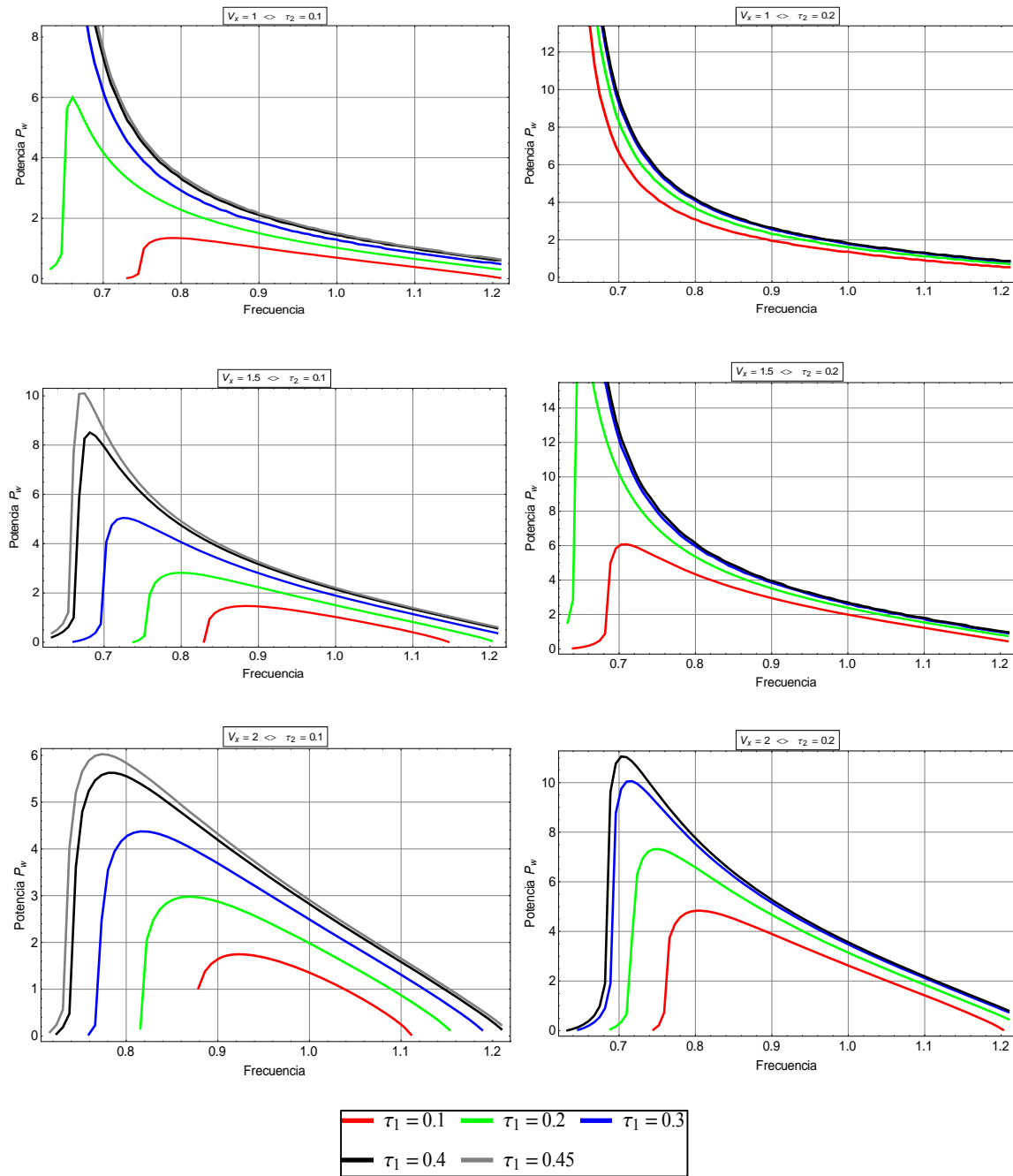


Figura 4-14

Potencia de salida para diferentes valores de tensión de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

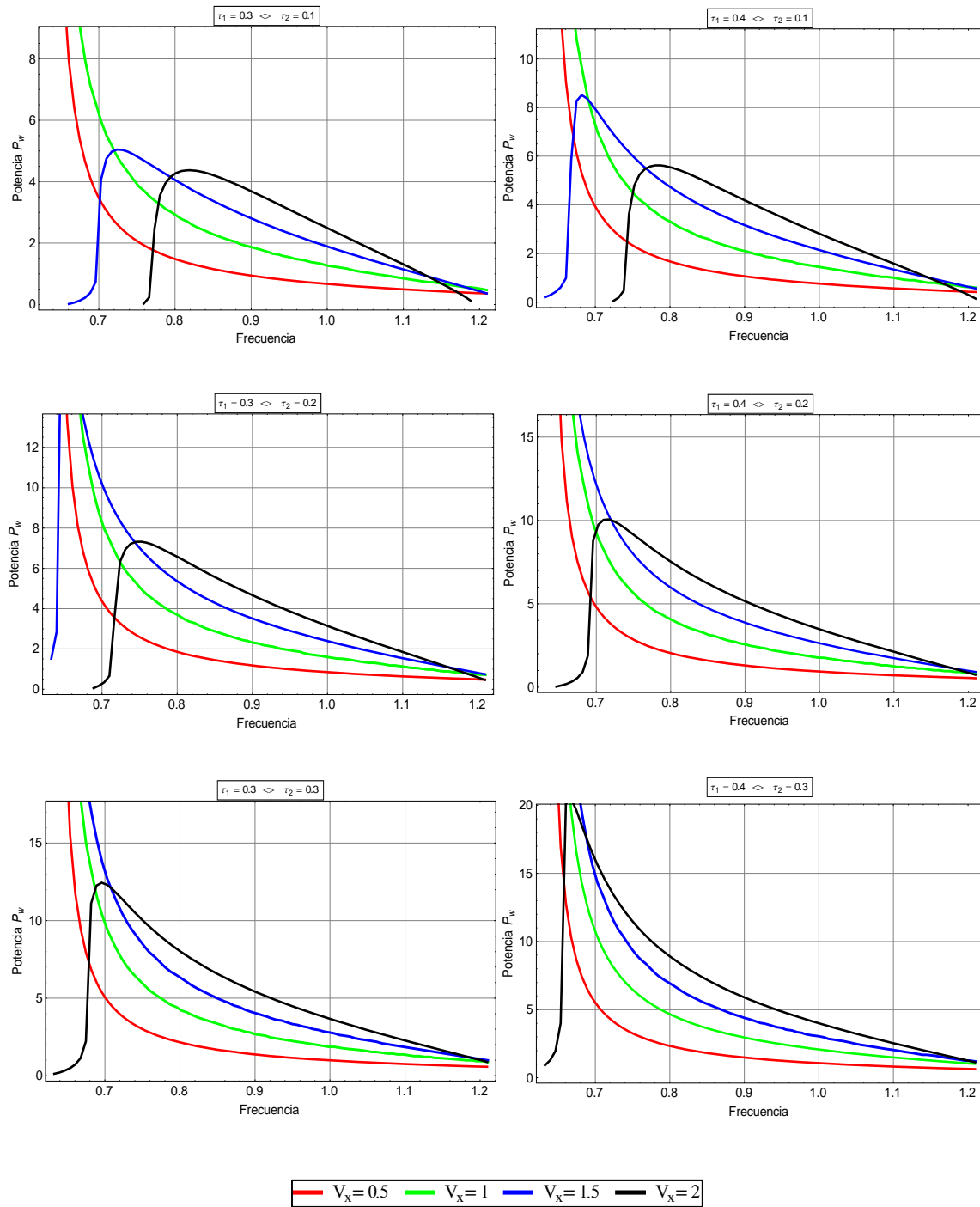


Figura 4-15

Potencia de salida para diferentes valores de tensión de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

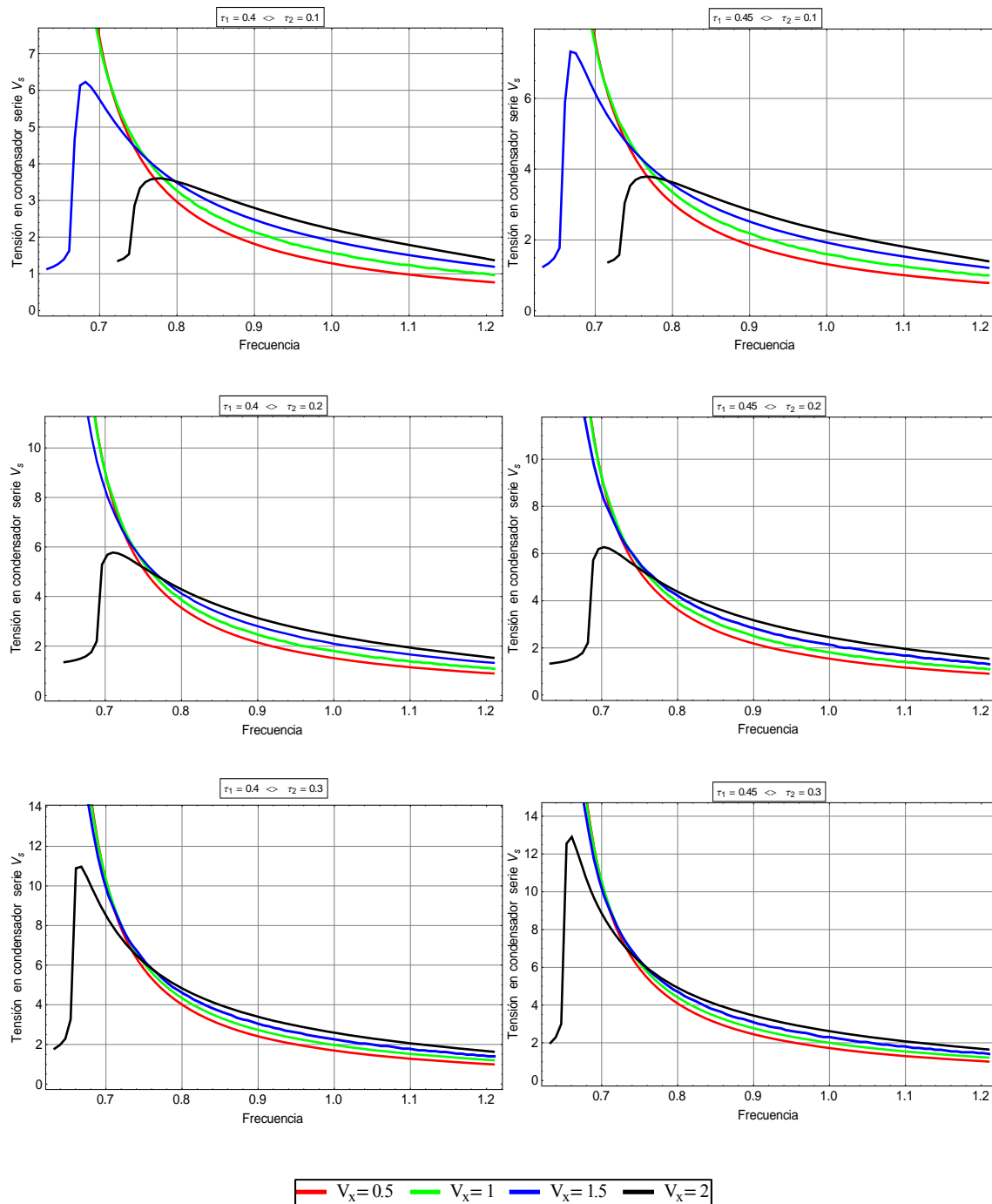


Figura 4-16

Tensión en el condensador serie para diferentes valores de tensión de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

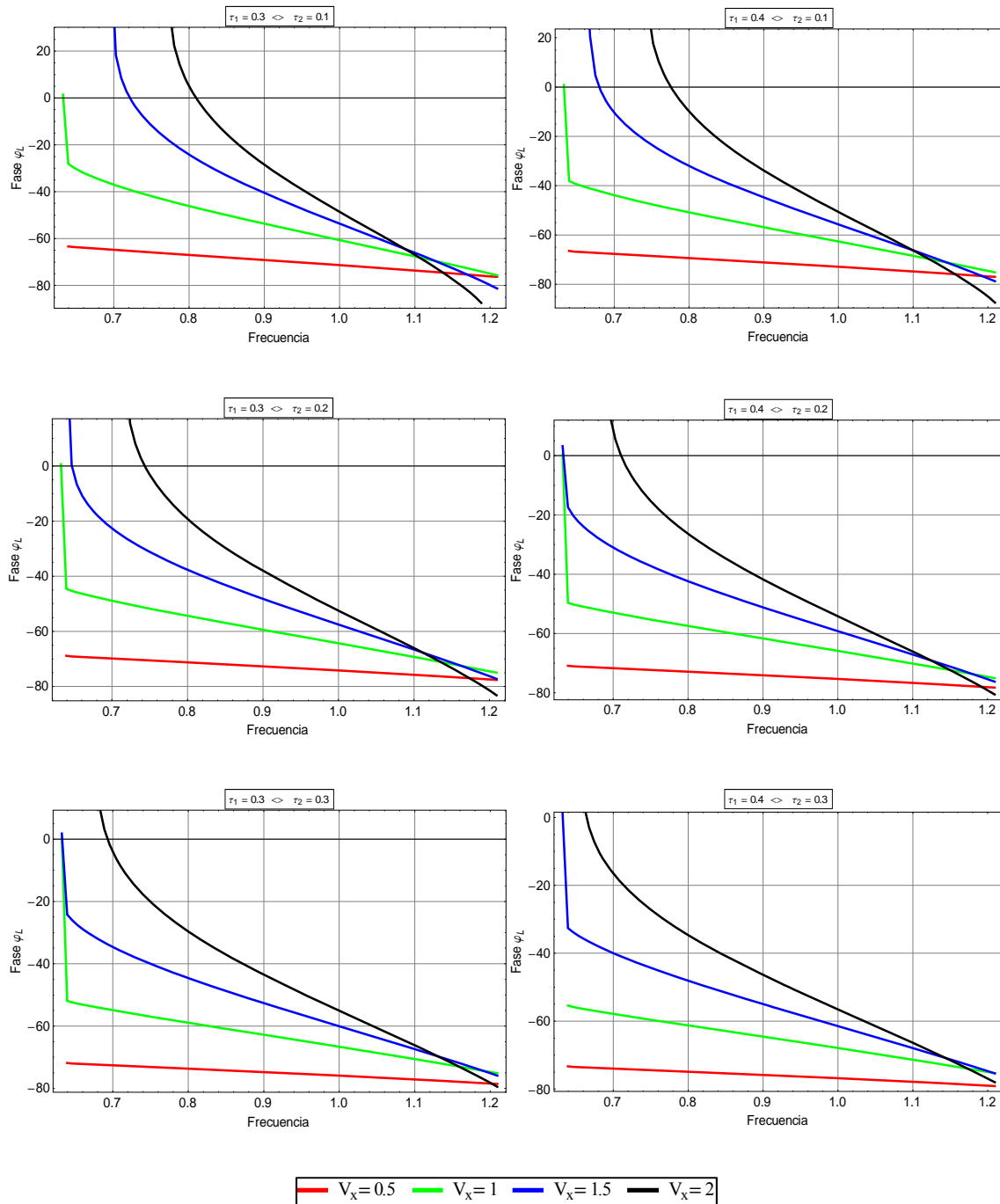


Figura 4-17

Fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

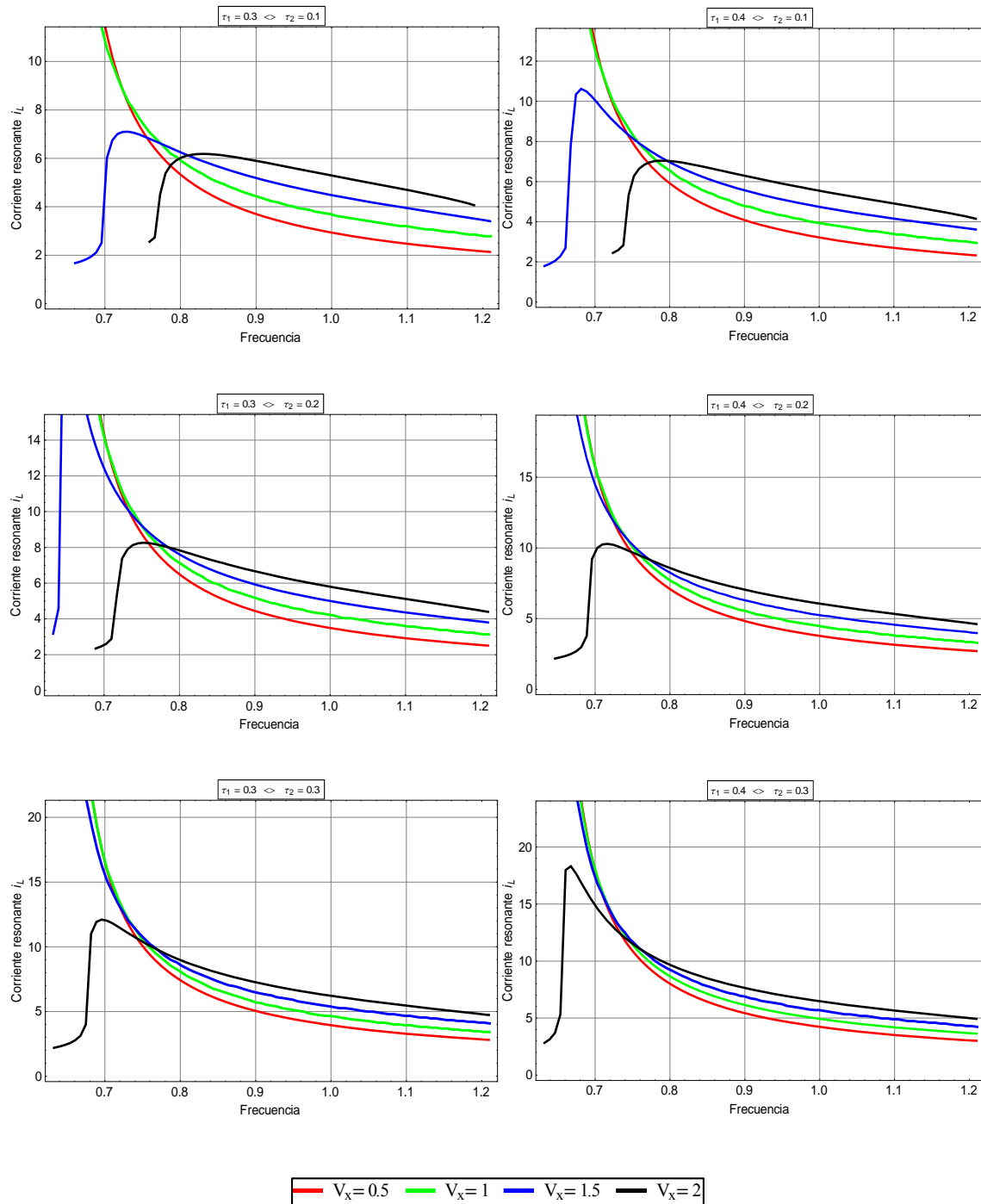


Figura 4-18

Corriente resonante para diferentes valores ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

4.9.1.4 Curvas de isoángulo

En la mayor parte de diseños, el inversor se implementa mediante el uso de dispositivos de conmutación como son los IGBTs debido a que resultan óptimos para trabajar con grandes esfuerzos eléctricos. Sin embargo, a fin de forzar al mínimo estos elementos se desea trabajar en la descrita zona óptima para que el impacto en estos dispositivos sea mínimo. Esto se traduce en que el ángulo de fase entre la tensión de entrada y la corriente resonante se encuentra con un desfase concreto. En este caso, las curvas de isoángulo proporcionan una gran información al diseñador, pues representan los puntos de trabajo en los que dicho ángulo se mantiene constante.

En los gráficos observamos que el comportamiento es bastante variable en función de los parámetros de control establecidos. De nuevo esto es especialmente destacable para el diseñador del control del convertidor, pues ante un cambio en las condiciones de trabajo del sistema, se producirán cambios importantes en el ángulo de fase que habrá que conducir de nuevo hacia un valor deseado para minimizar los esfuerzos eléctricos.

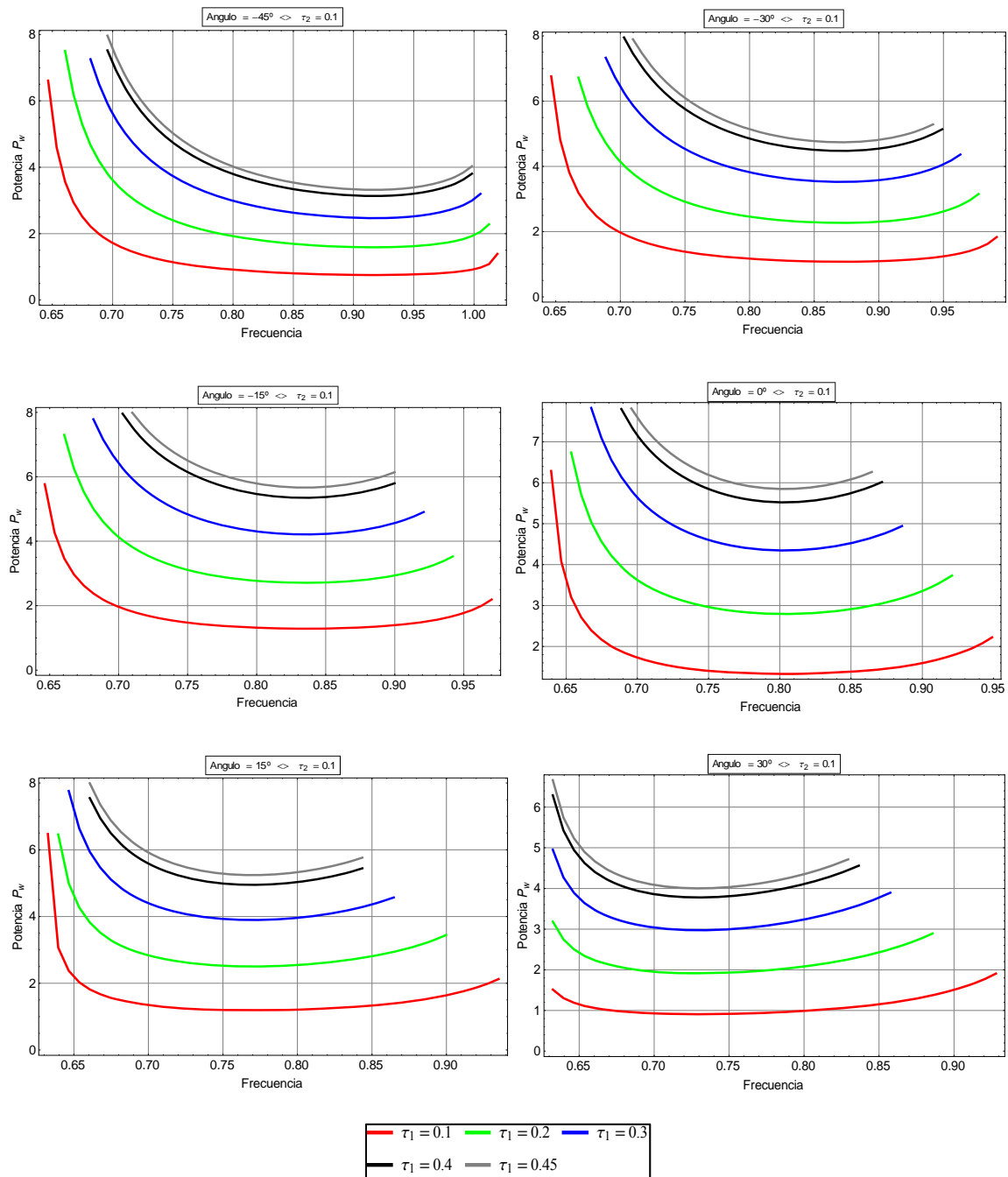


Figura 4-19

Potencia de salida para diferentes valores de ángulo de fase y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

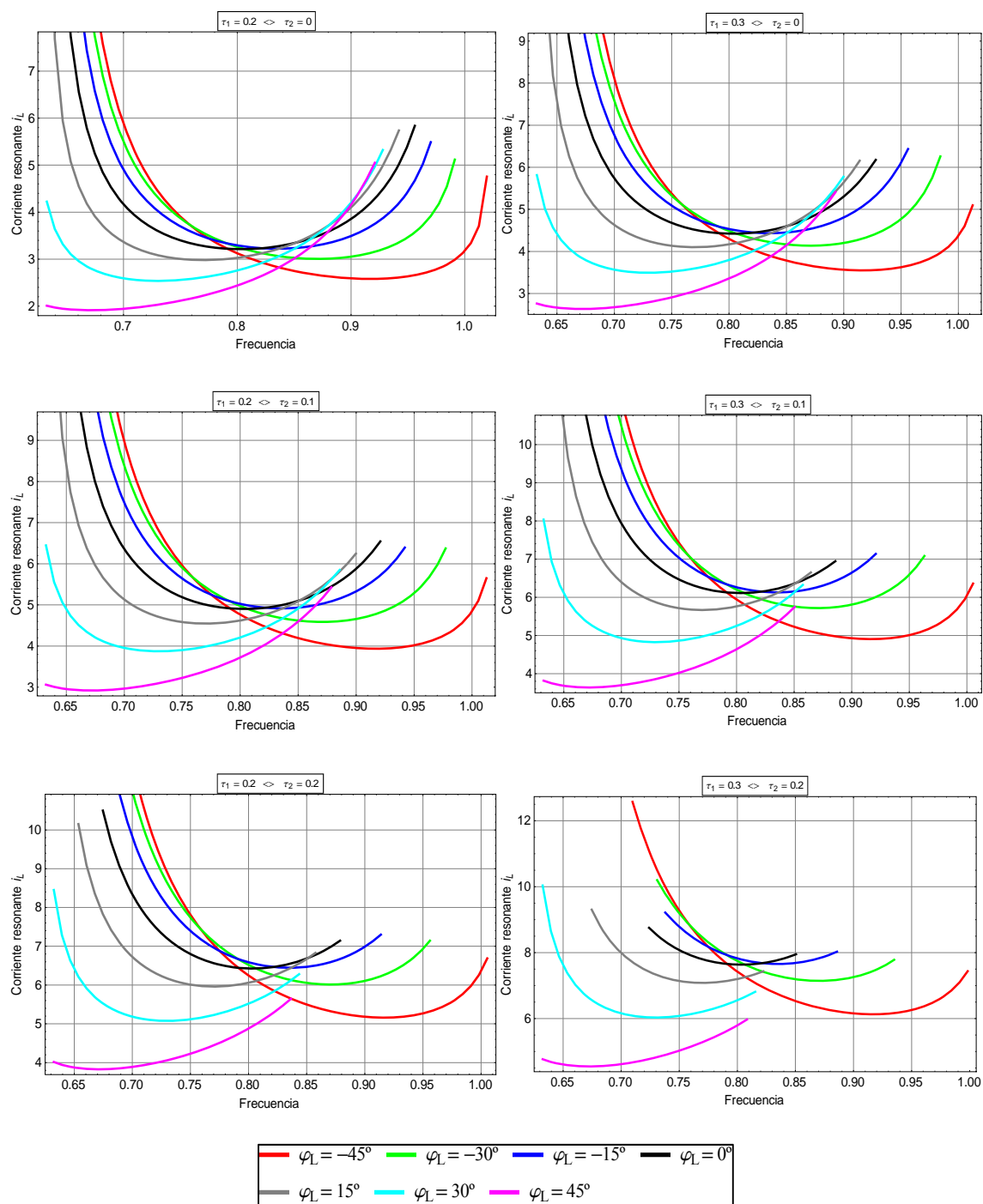


Figura 4-20

Corriente resonante para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

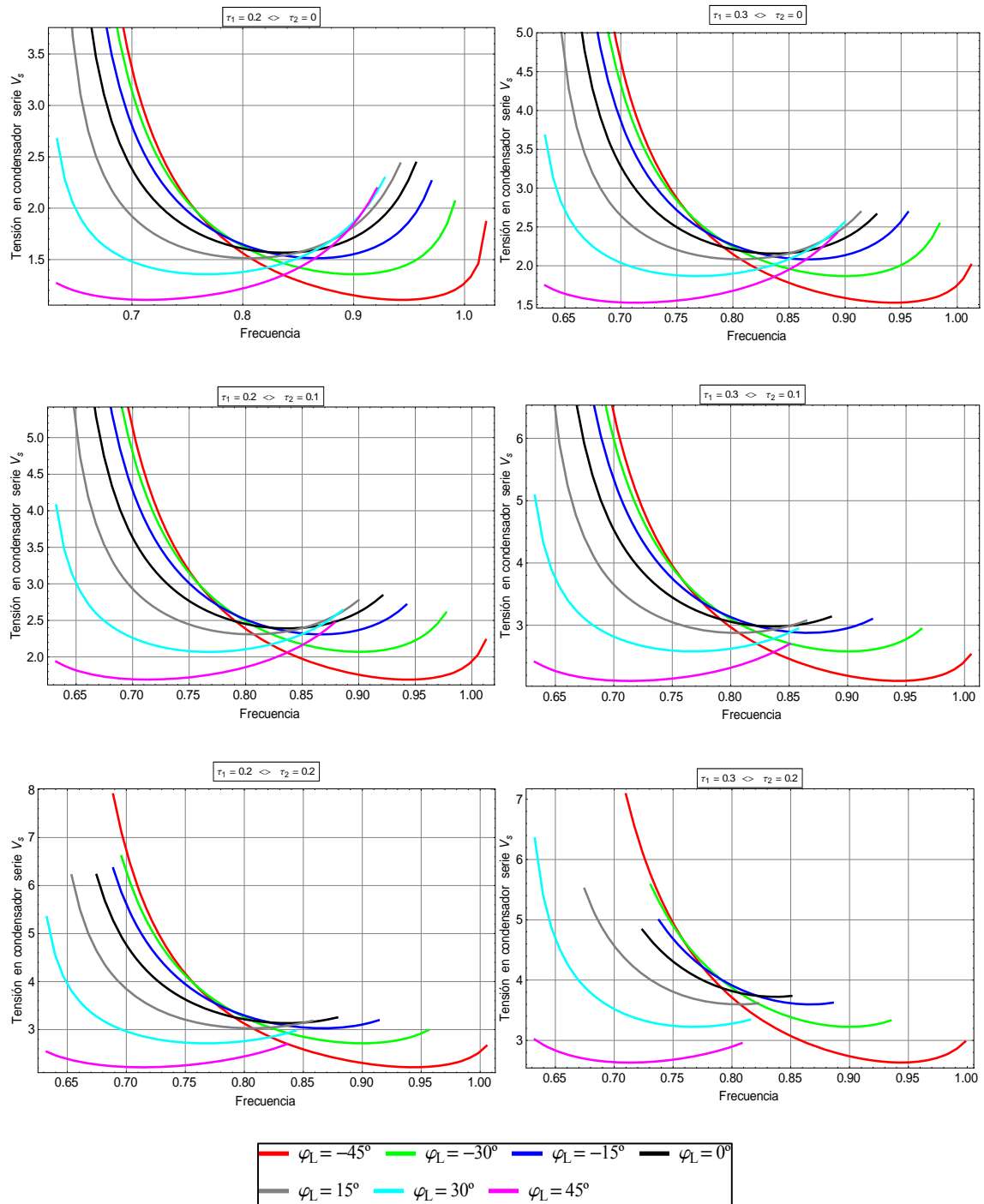


Figura 4-21

Tensión en condensador serie para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

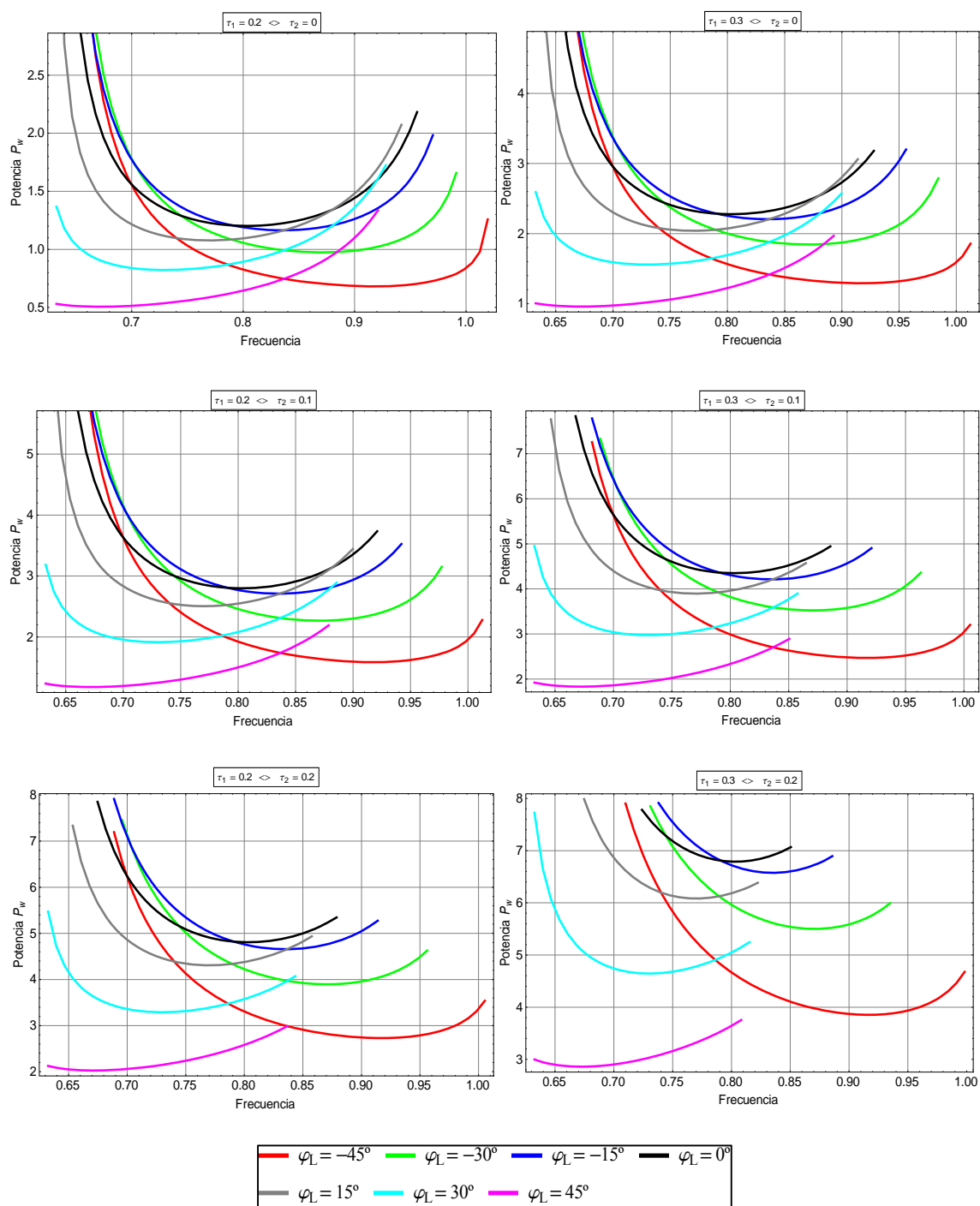


Figura 4-22

Potencia de salida para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

4.9.2 Estudio del modelo con seña asimétrica

A continuación se representan ábacos para el caso de señal de salida de los inversores con forma asimétrica, representando las siguientes gráficas:

- Curvas de isorresistencia: Curvas para diferentes valores de resistencia de carga en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isopotencia: Curvas para diferentes valores de potencia de salida en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isotensión: Curvas para diferentes valores de tensión de salida en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la potencia de salida de salida, tensión en el condensador serie y ángulo de fase.
- Curvas de isoángulo: Curvas para diferentes valores de ángulo de fase en función de varios parámetros como son los ciclos de trabajo principal y auxiliar, la tensión de salida, tensión en el condensador serie y potencia de salida.

Cabe destacar que dichas gráficas son muy similares a las homólogas en el caso de señal de salida del inversor simétrica, ya que la diferencia radica en la influencia del armónico cosenoidal de primer orden considerado en el modelado. Sin embargo, entre la señal simétrica y asimétrica sólo se produce un desfase del área del ciclo de trabajo auxiliar, pero no una variación del área total que alberga la forma de onda resultante, por lo que la variación de valores máximos de potencia y tensión no debieran verse afectados.

4.9.2.1 Curvas de isorresistencia

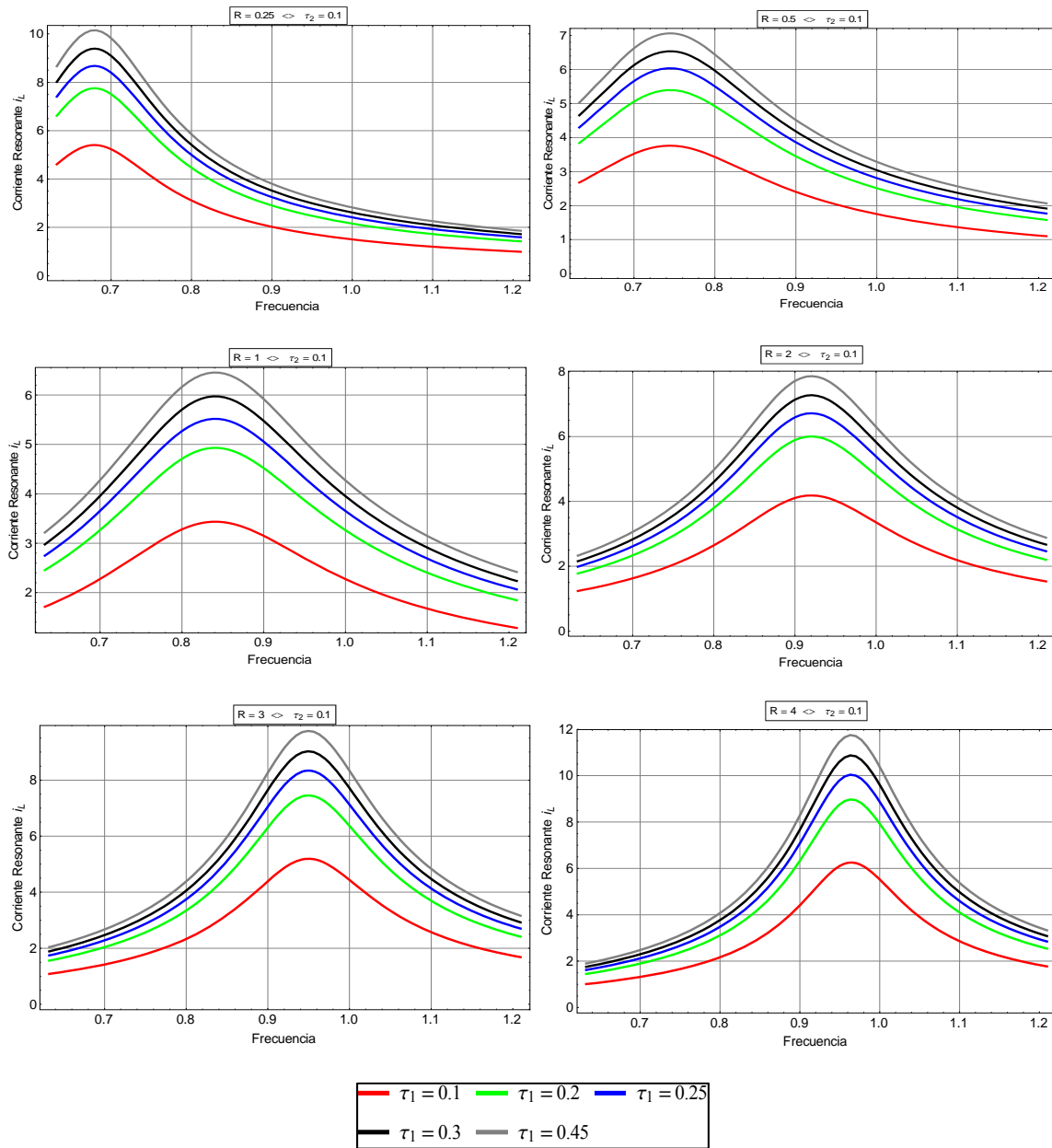


Figura 4-23

Corriente resonante para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

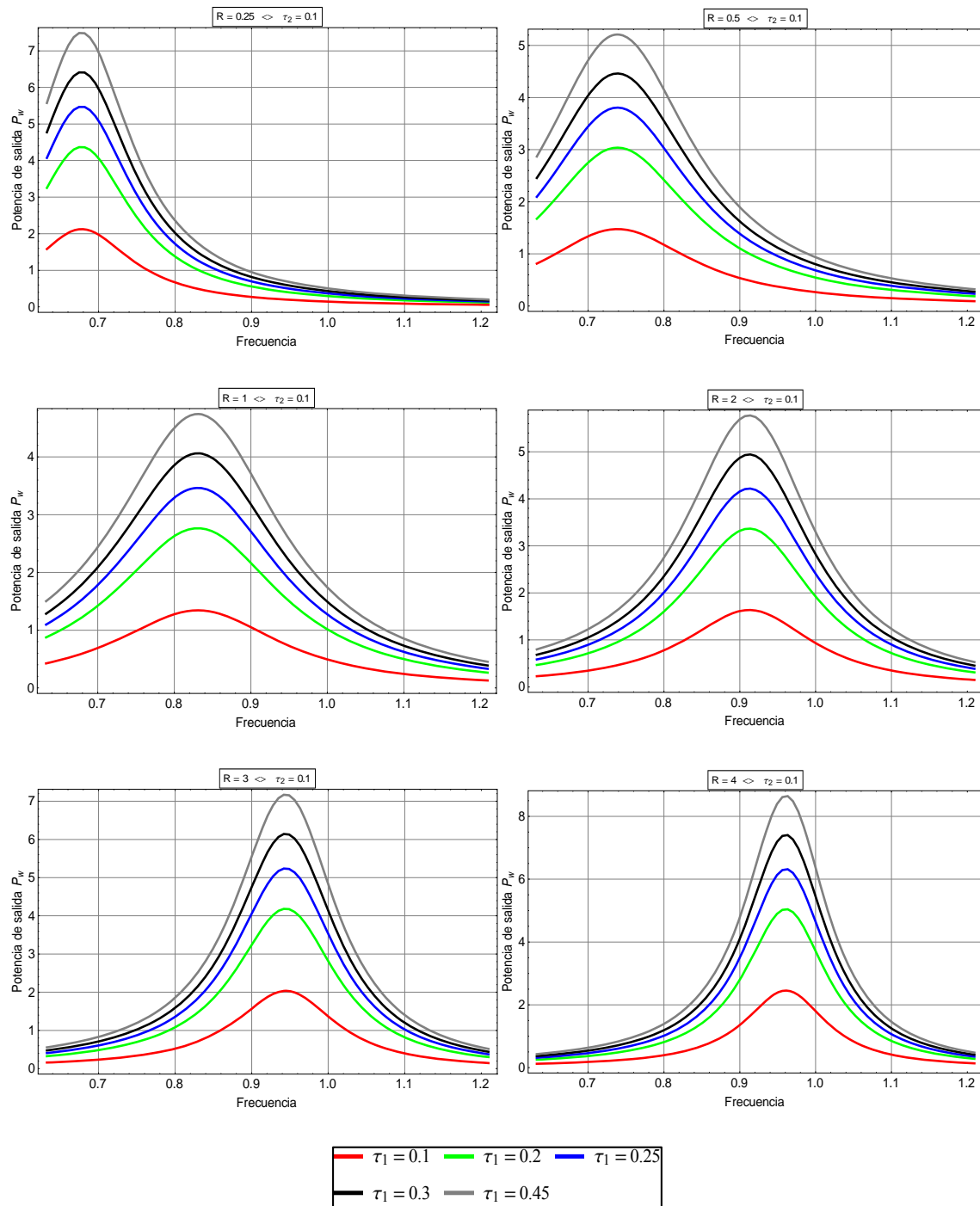


Figura 4-24

Potencia de salida para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

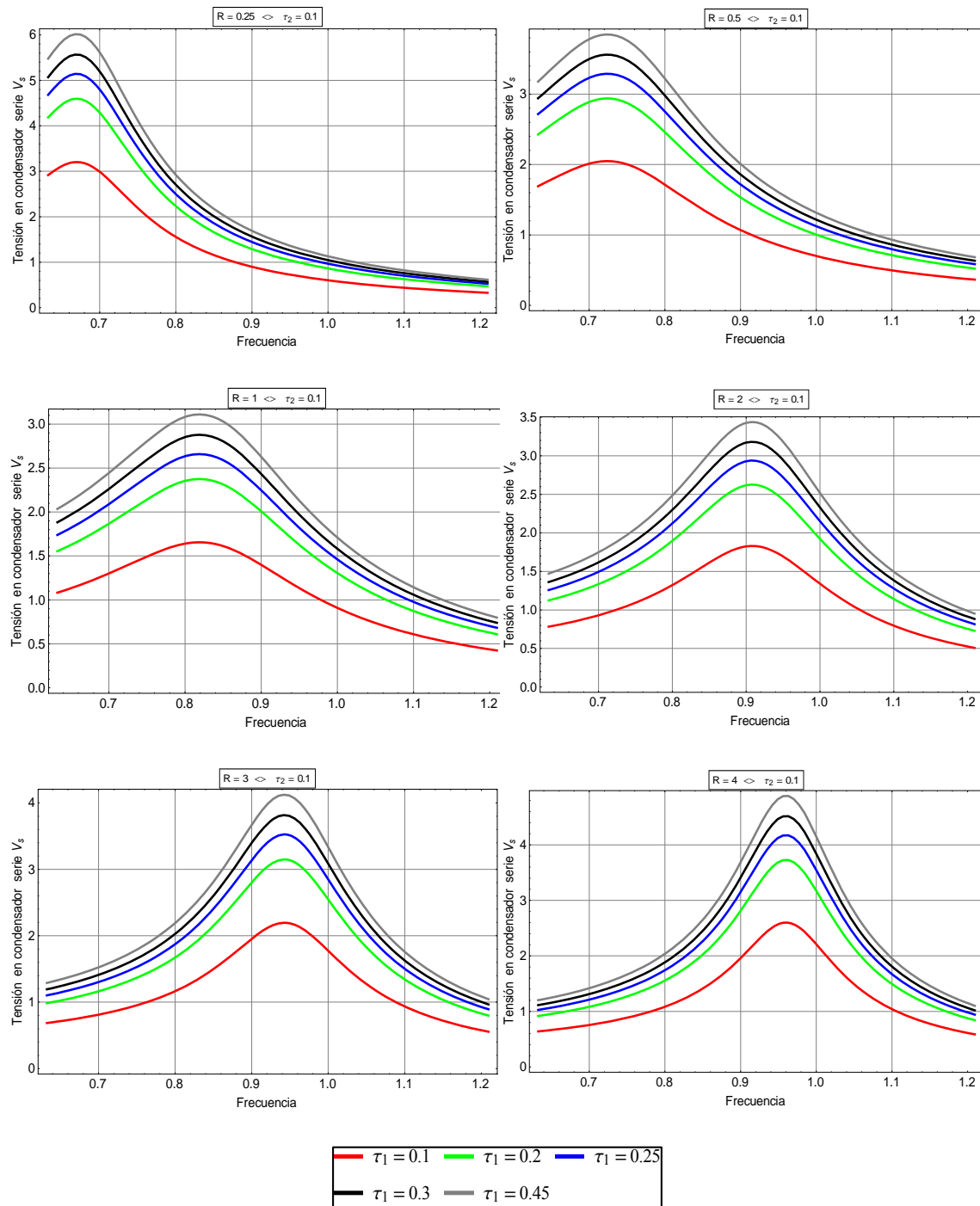


Figura 4-25

Tensión en el condensador serie para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

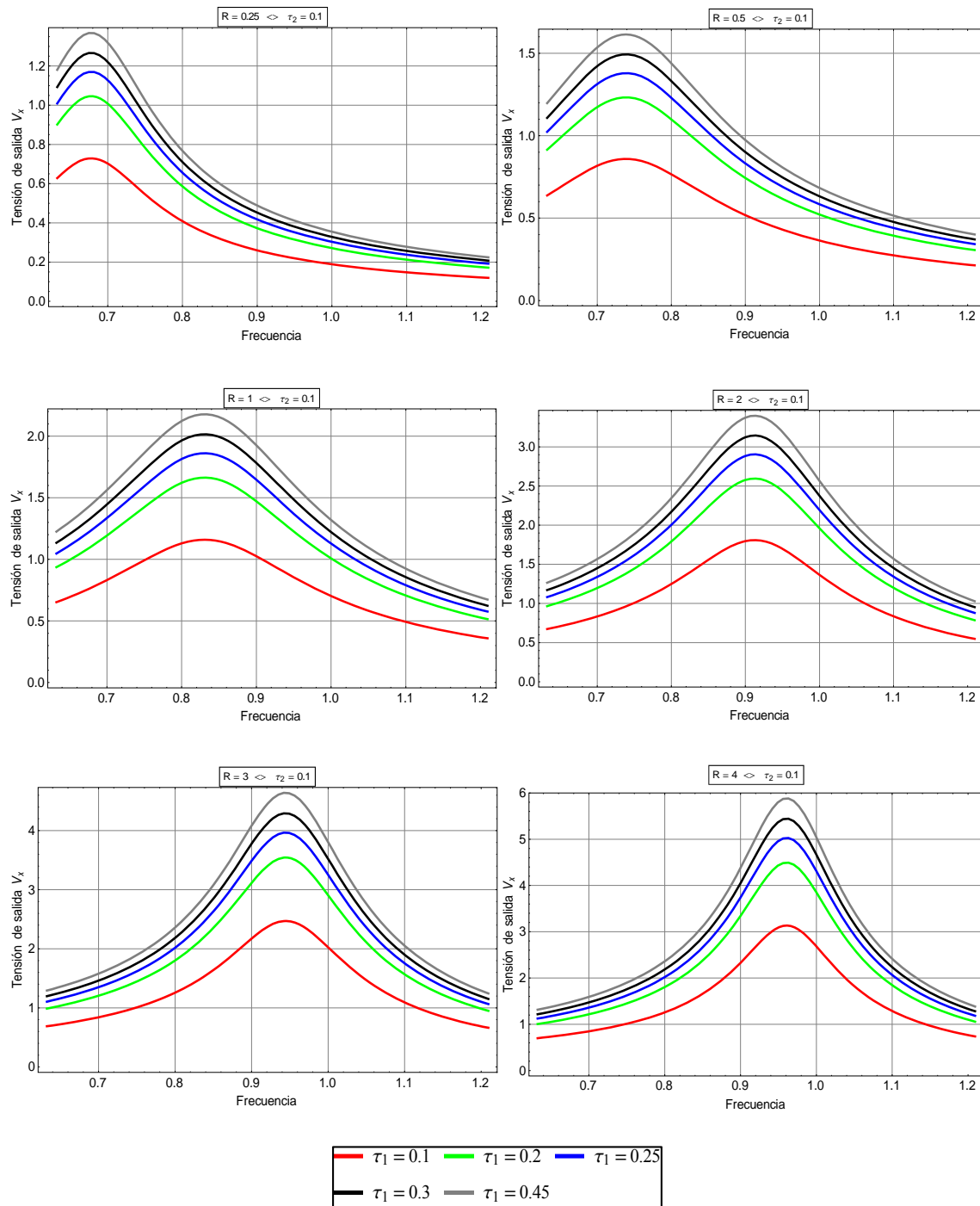


Figura 4-26

Tensión de salida para diferentes valores de resistencia de carga y ciclo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

4.9.2.2 Curvas de isotencia

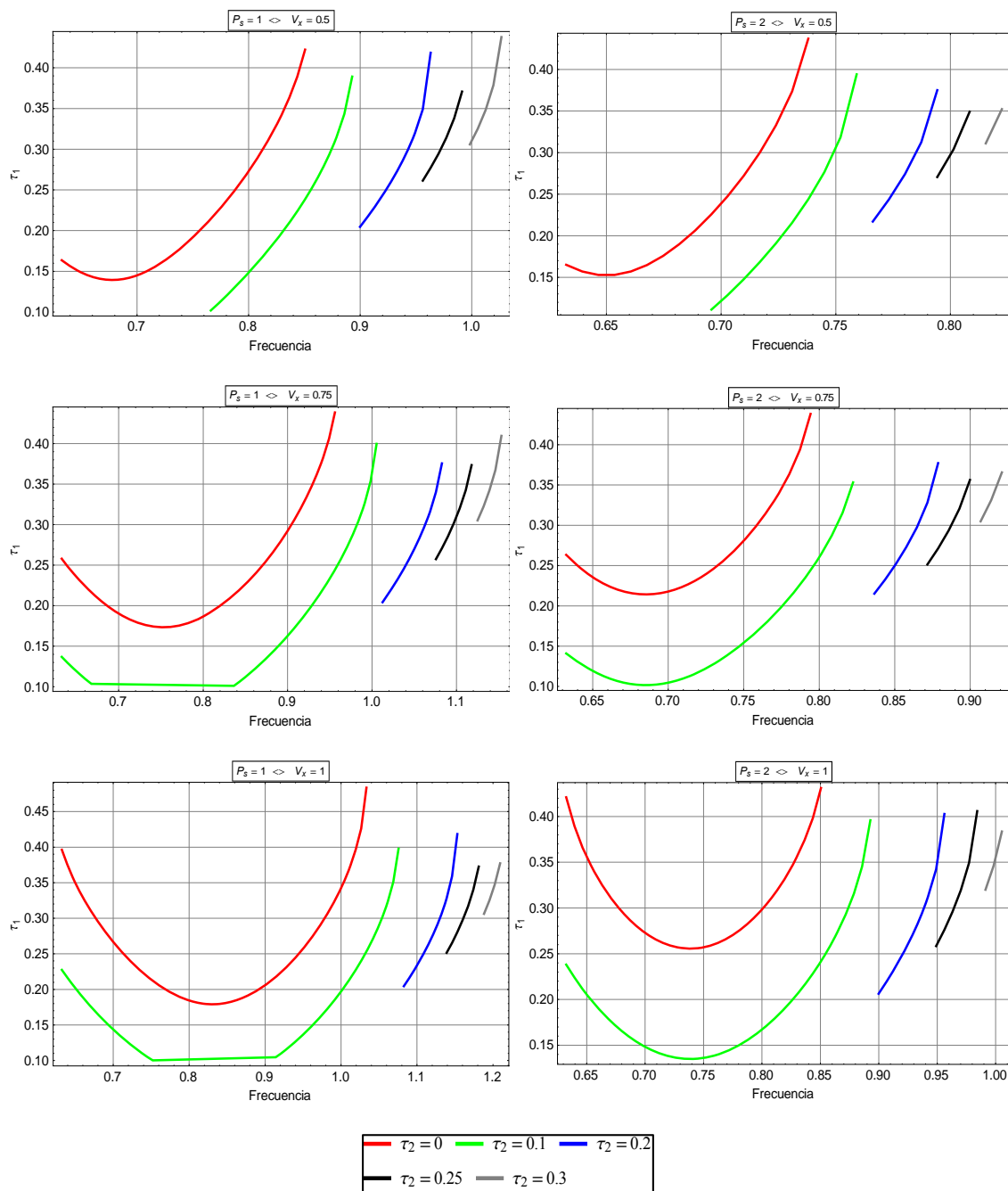


Figura 4-27

Ciclo de trabajo principal para diferentes valores de potencia de salida y tensión de salida en función del ciclo de trabajo auxiliar

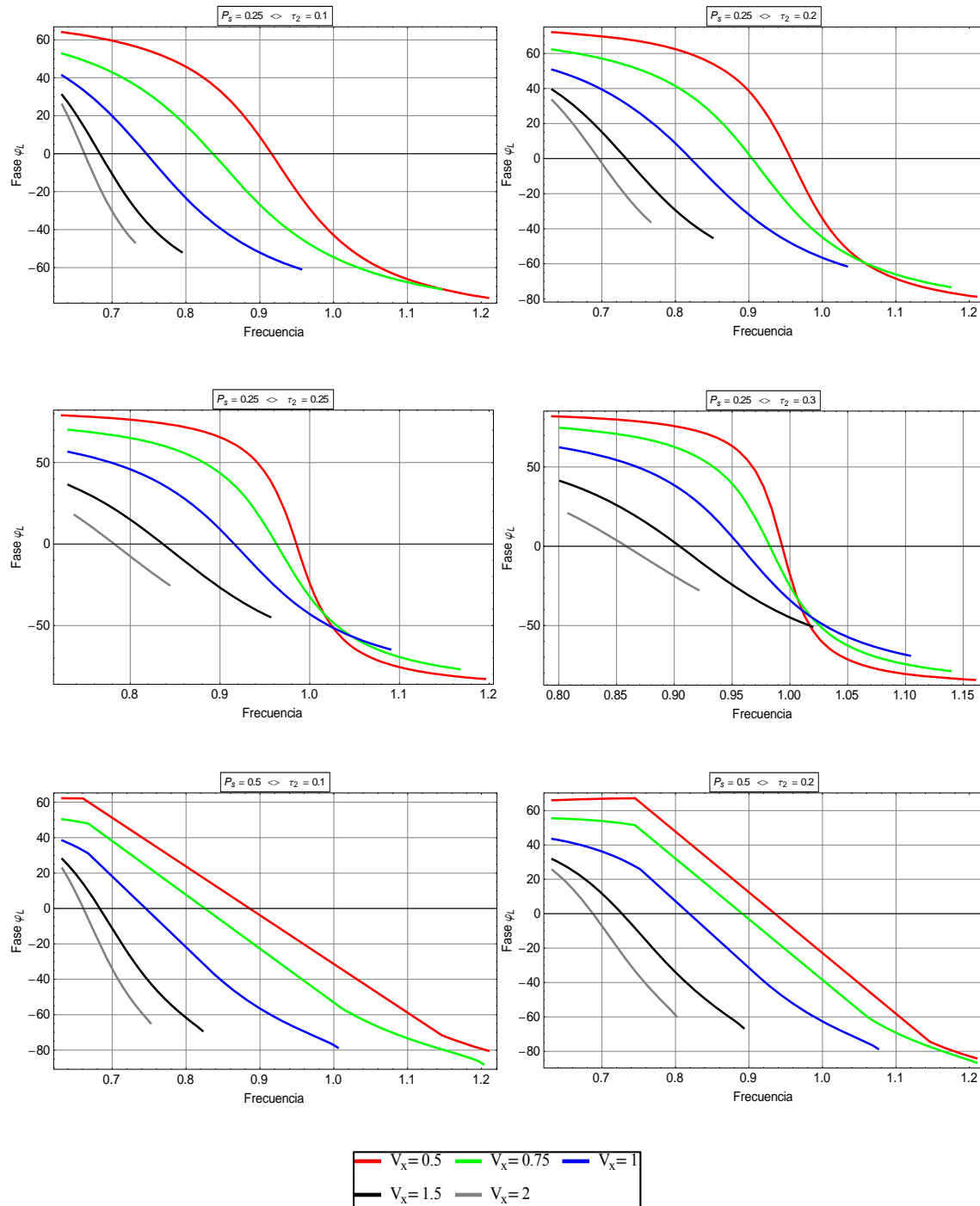


Figura 4-28

Ángulo de fase entre la corriente y la tensión de entrada para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

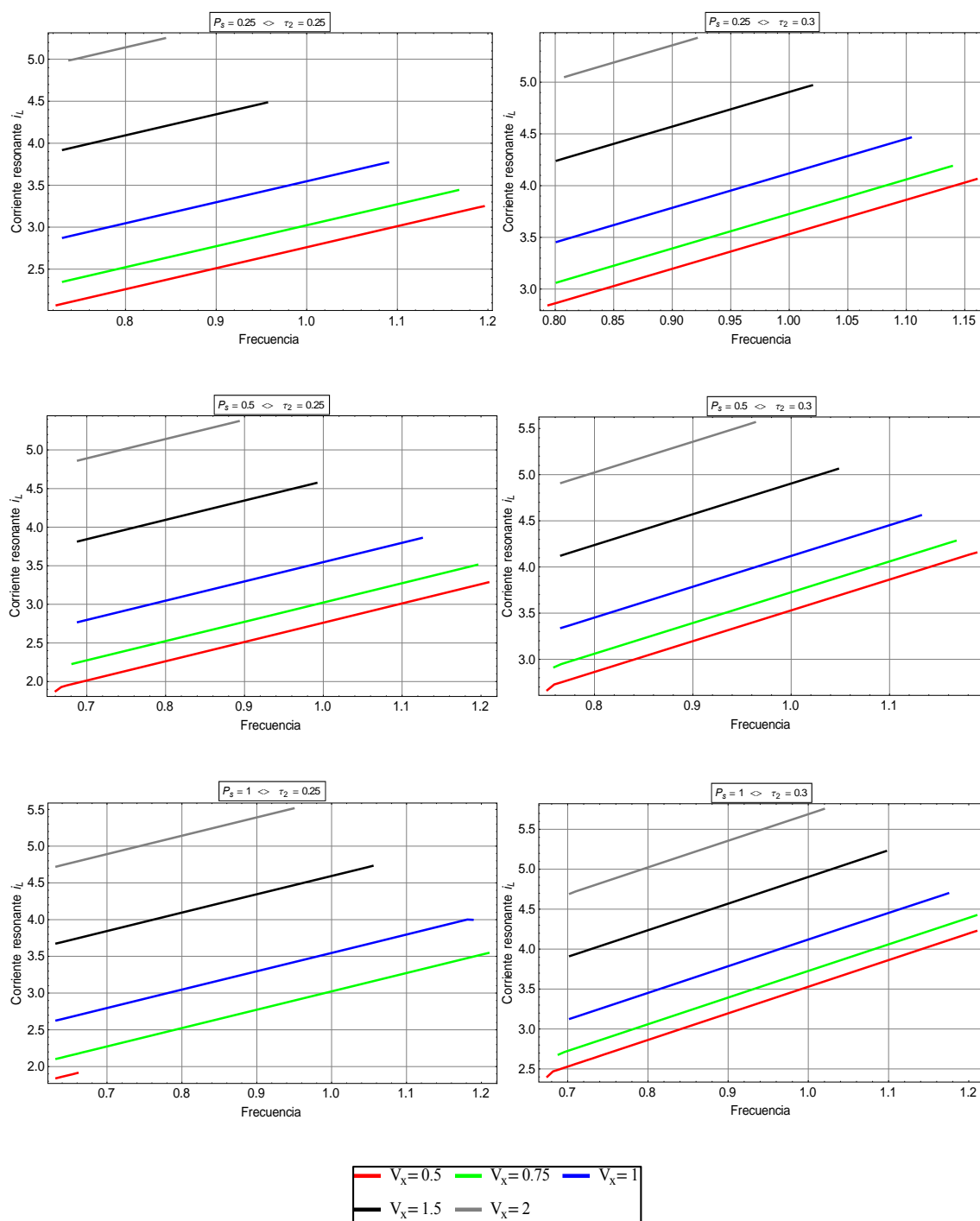


Figura 4-29

Corriente resonante para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

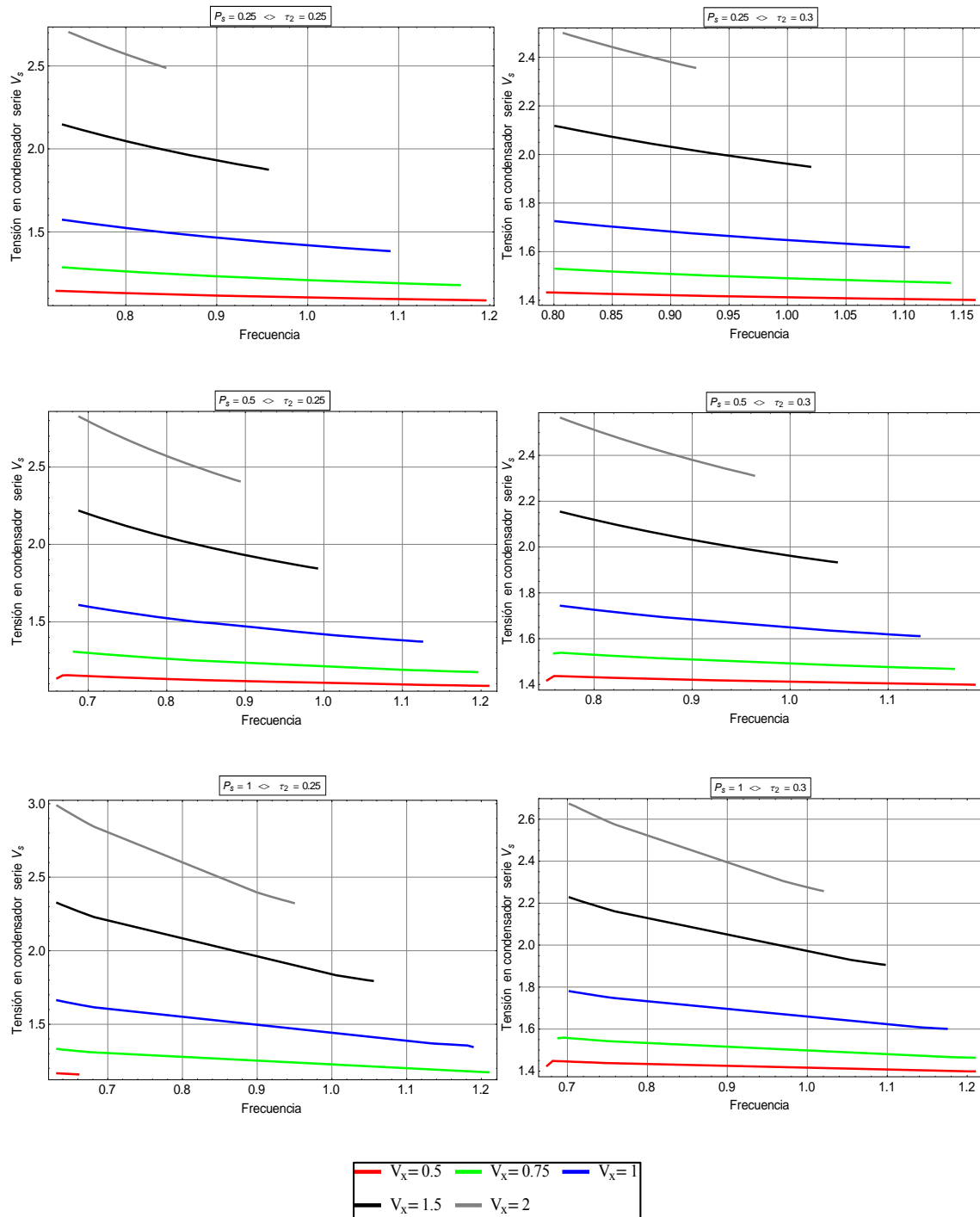


Figura 4-30

Tensión en condensador serie para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

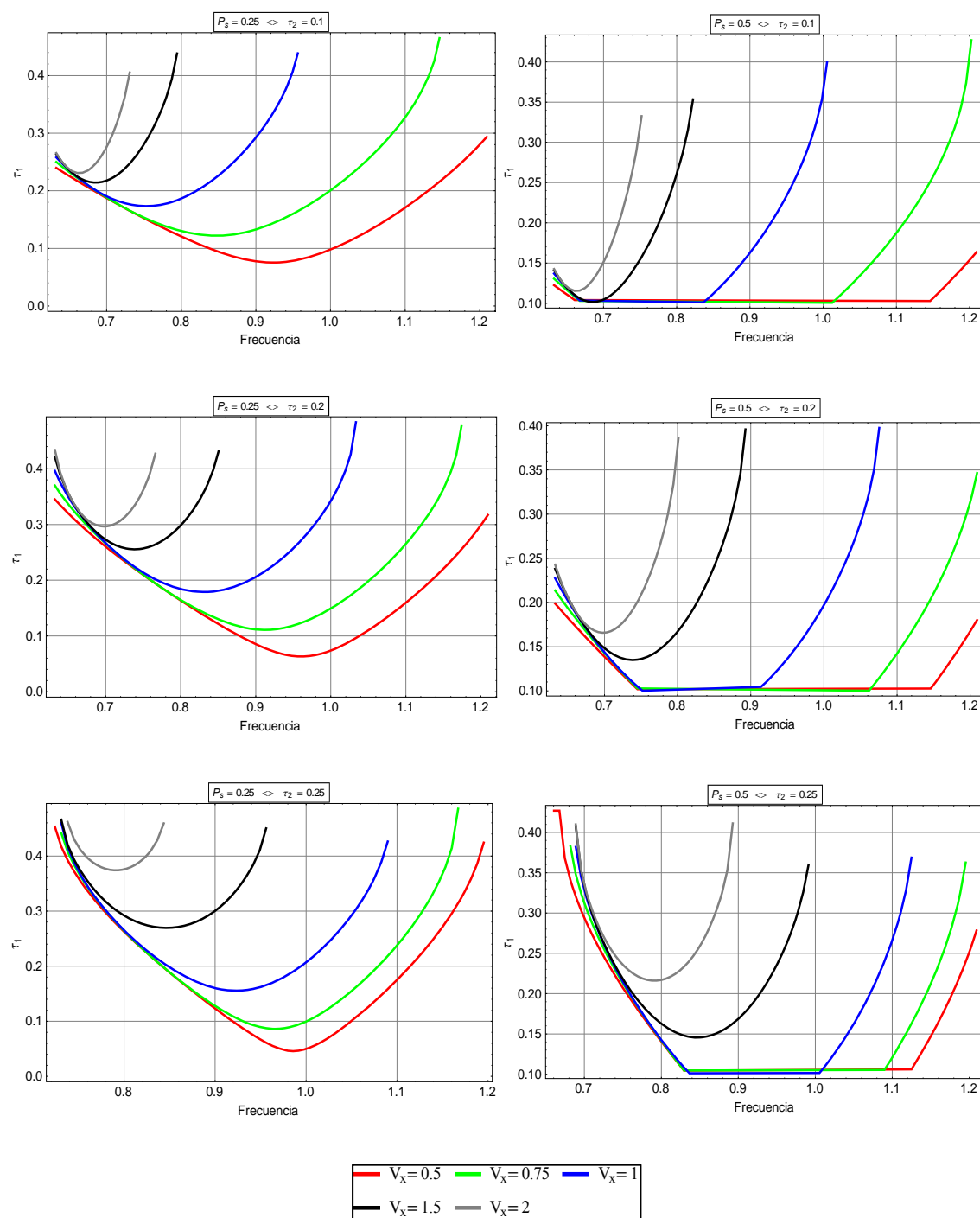


Figura 4-31

Ciclo de trabajo principal para diferentes valores de potencia de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

4.9.2.3 Curvas de isotensión

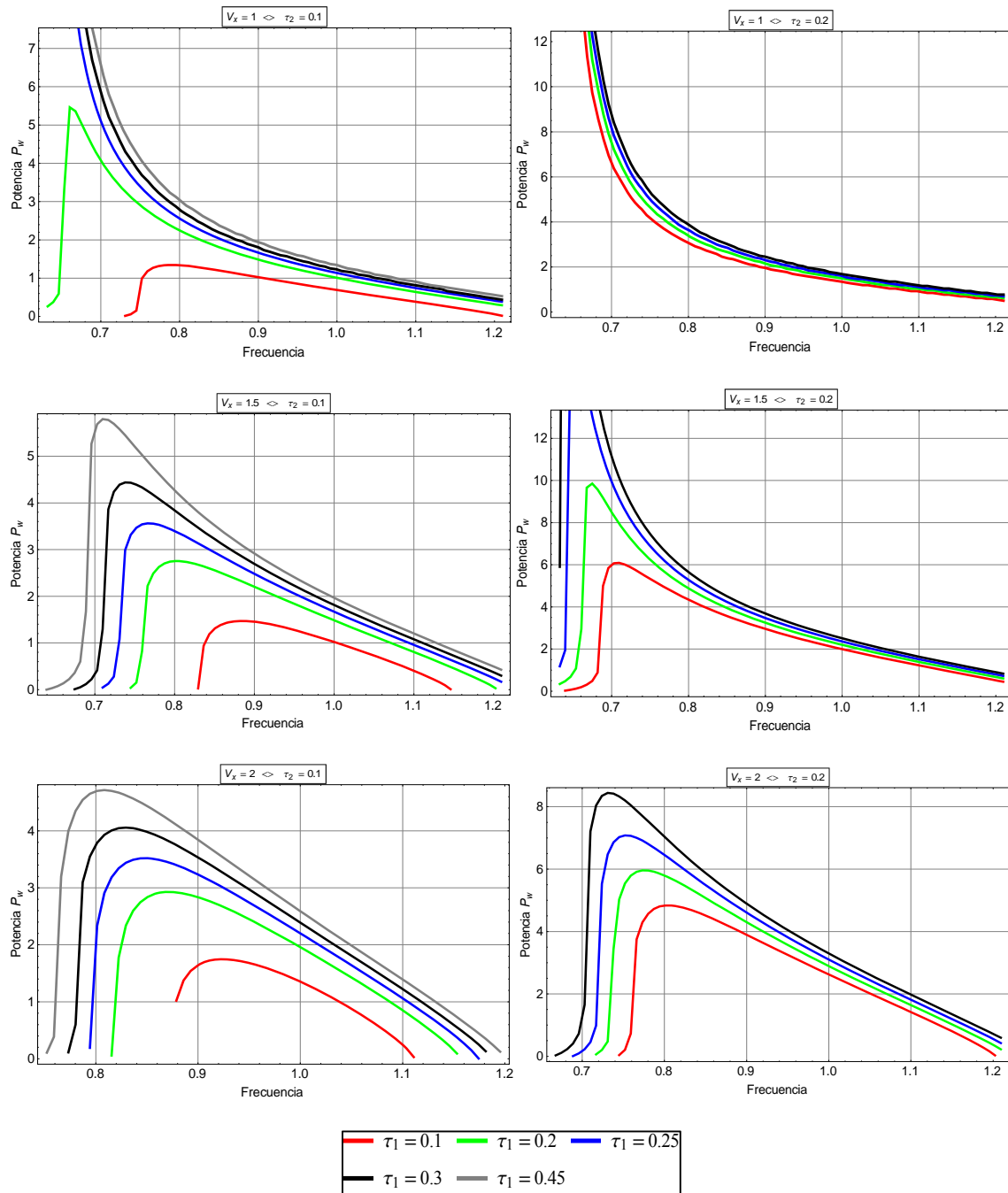


Figura 4-32

Potencia de salida para diferentes valores de tensión de salida y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

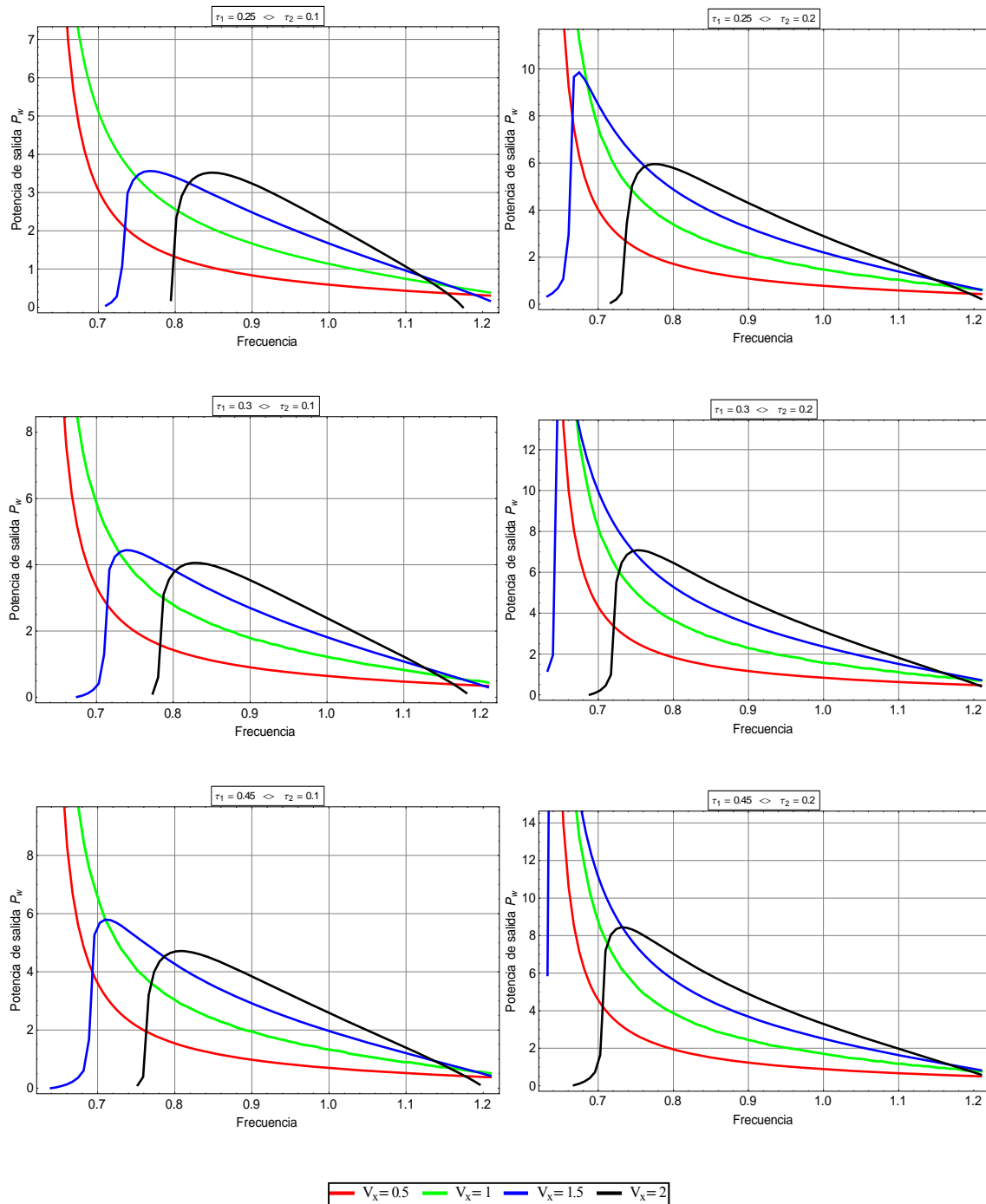


Figura 4-33

Potencia de salida para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

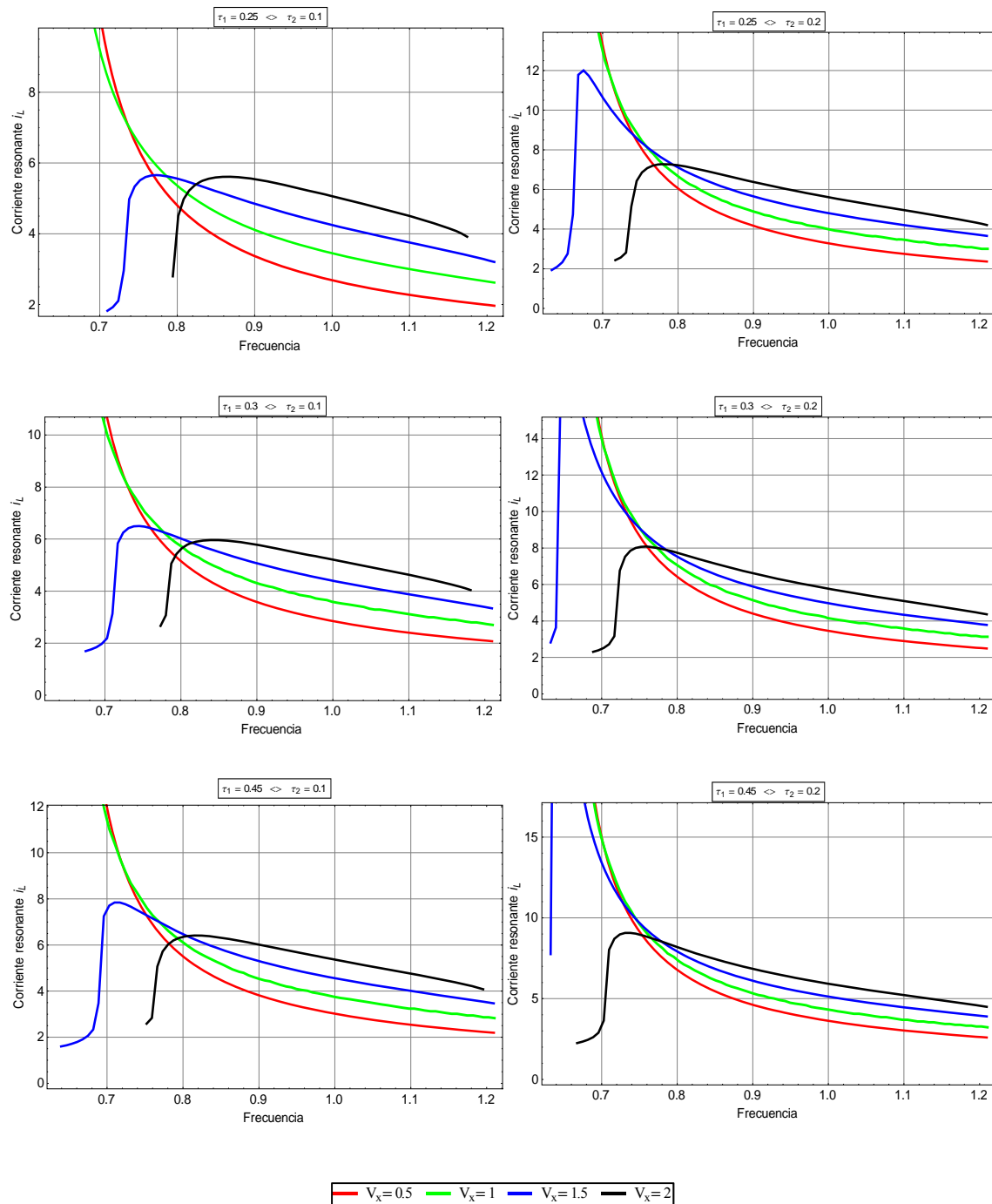


Figura 4-34

Corriente resonante para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

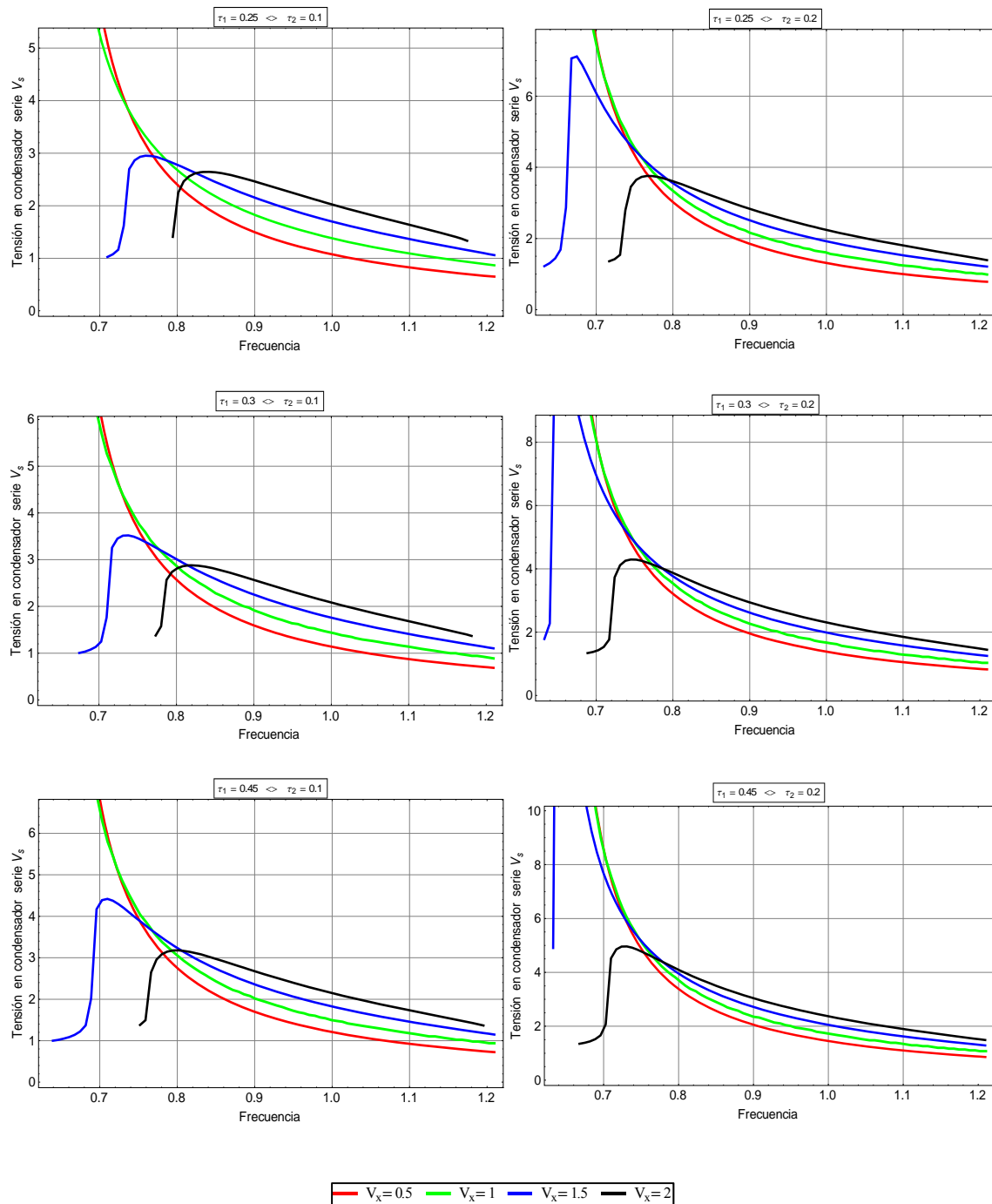


Figura 4-35

Tensión en condensador serie para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

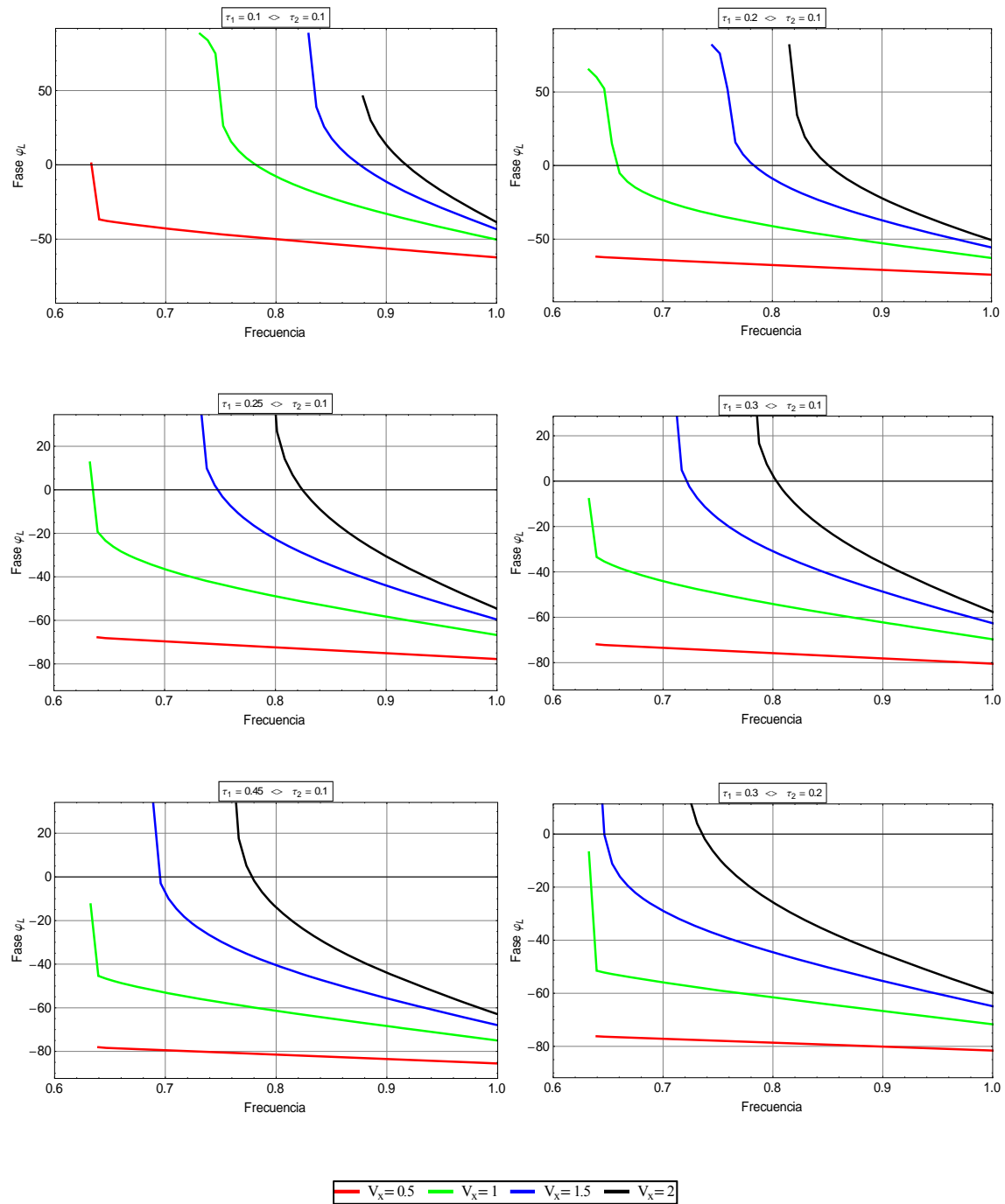


Figura 4-36

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función de la tensión de salida

4.9.2.4 Curvas de isoángulo

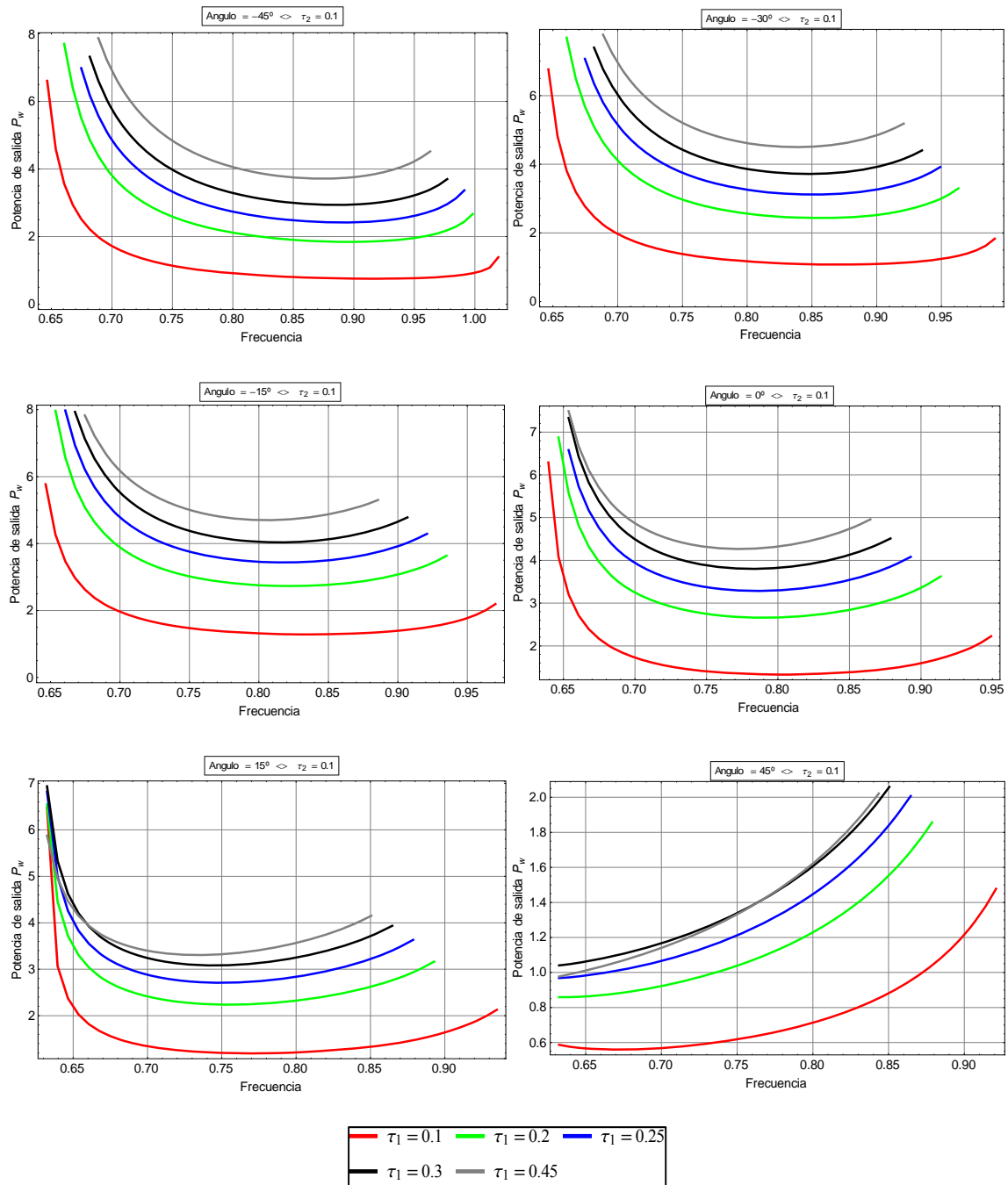


Figura 4-37

Potencia de salida para diferentes valores de ángulo de fase y ciclo de trabajo auxiliar en función del ciclo de trabajo principal

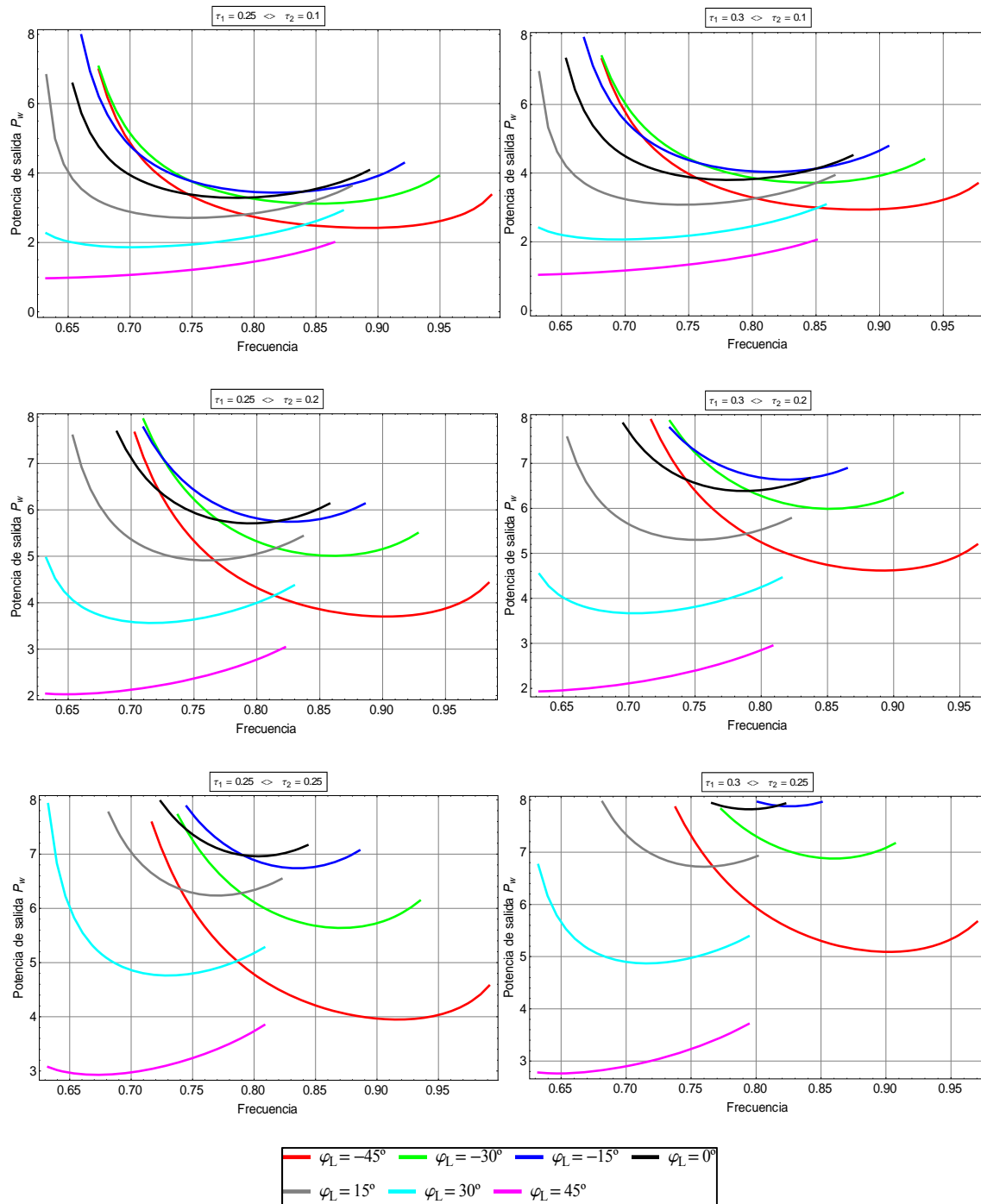


Figura 4-38

Potencia de salida para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

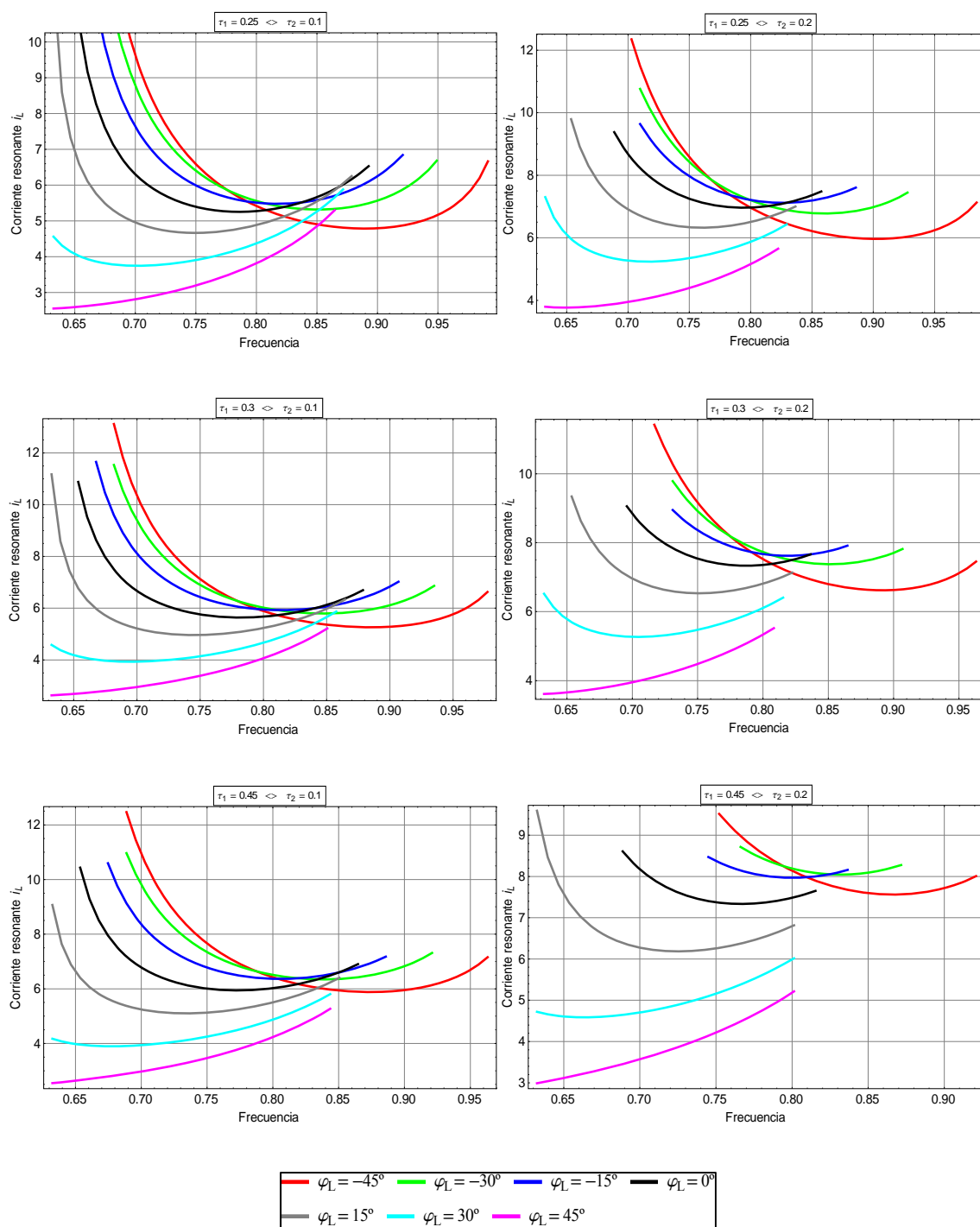


Figura 4-39

Corriente resonante para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

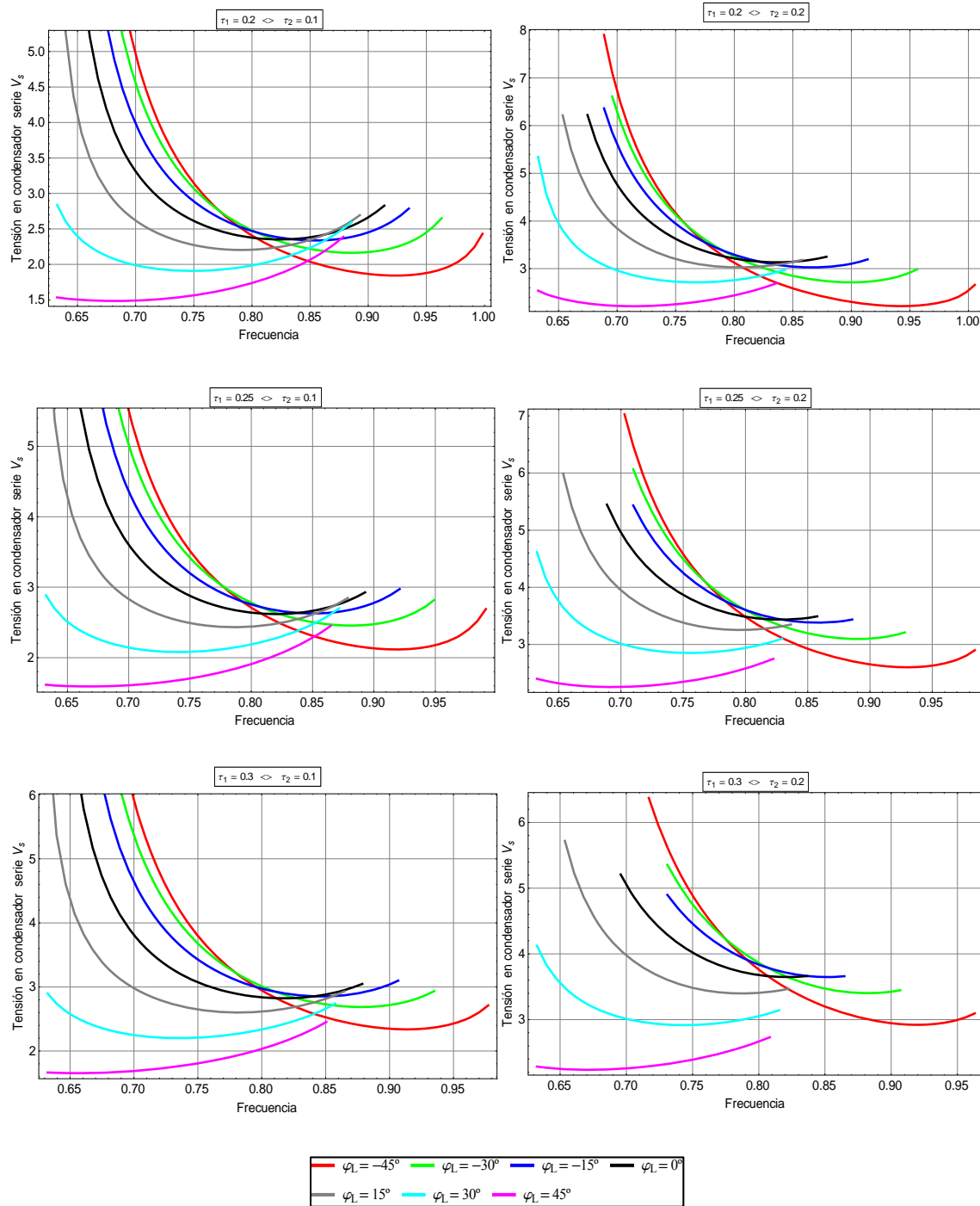


Figura 4-40

Tensión en condensador serie para diferentes valores de ciclo de trabajo principal y auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

4.9.3 Estudio del modelo en modo fluoroscopia

En el modo de fluoroscopia, recordemos que desactivamos la rama del inversor auxiliar, eliminando así un grado de libertad correspondiente al ciclo de trabajo auxiliar, a la par de que se refleja en el circuito la inductancia magnetizante del transformador auxiliar que modifica la inductancia total del convertidor. En este caso, las gráficas son muy similares a los anteriores modos de funcionamiento, ya que en los casos anteriores siempre representábamos un punto con un valor fijado del ciclo de trabajo auxiliar para facilitar su representación. En este caso, en el modelo propuesto basta con fijar el ciclo de trabajo auxiliar a 0.

4.9.3.1 Curvas de isorresistencia

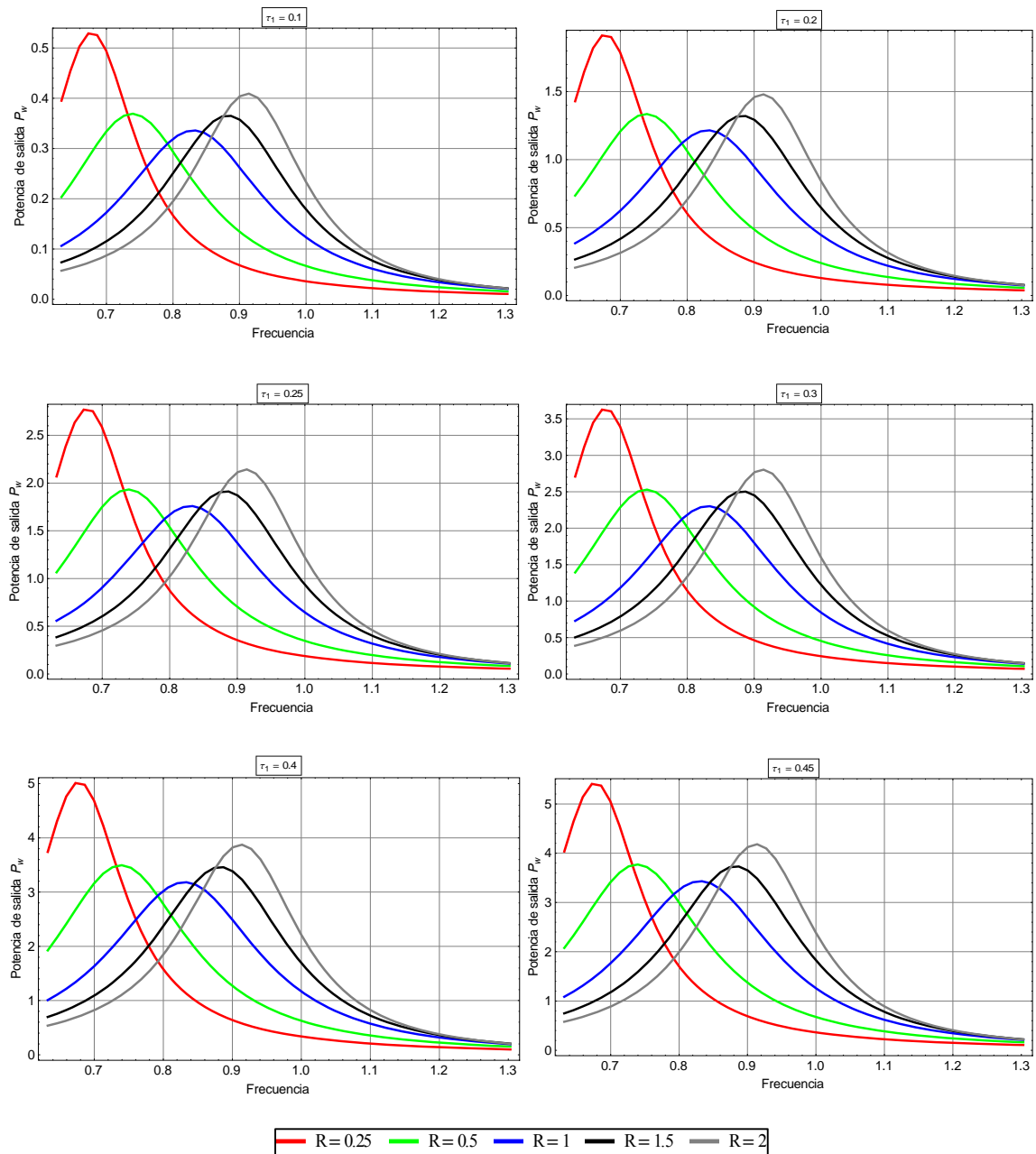


Figura 4-41

Potencia de salida para diferentes valores de ciclo de trabajo en función de la carga

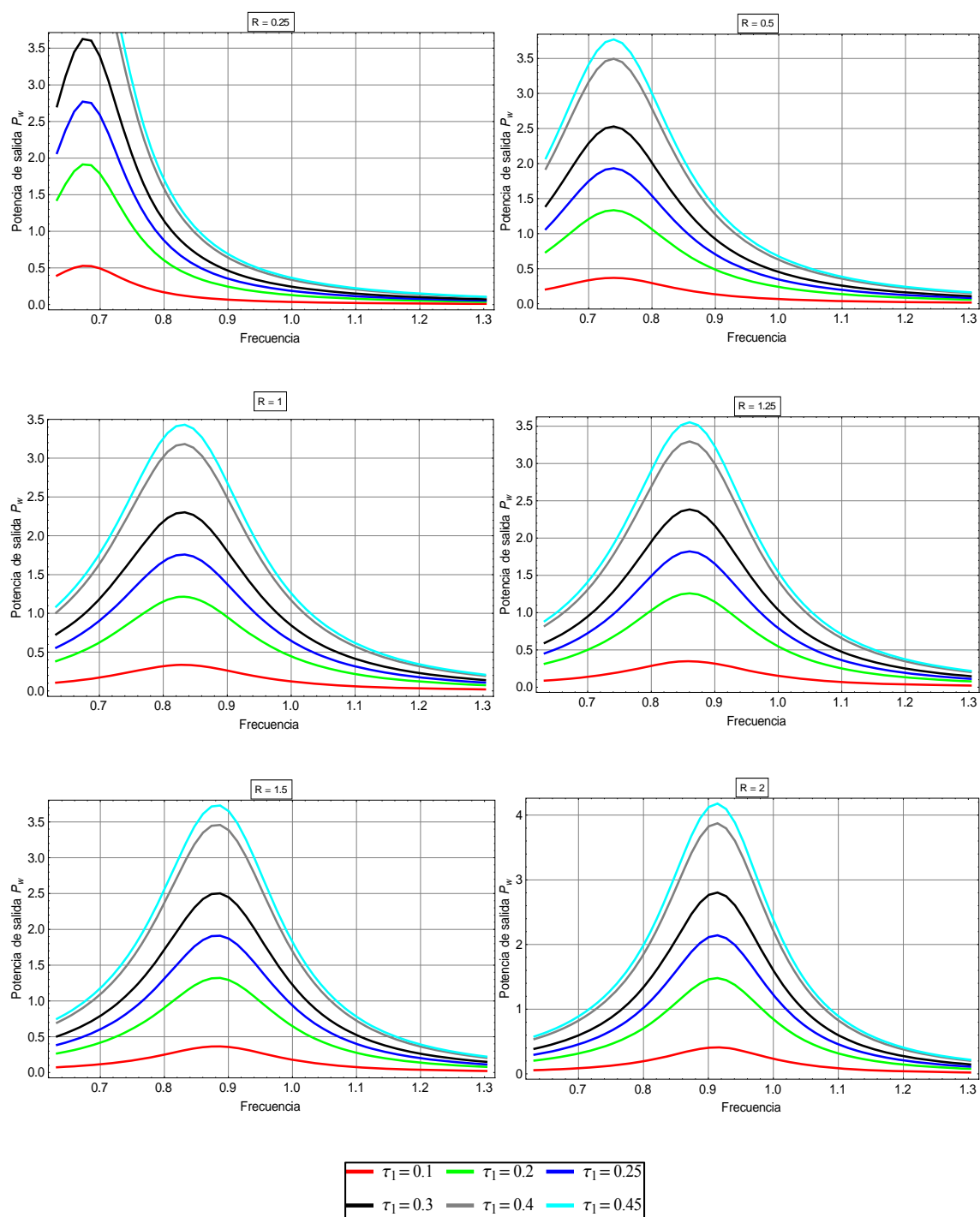


Figura 4-42

Potencia de salida para diferentes valores de carga en función del ciclo de trabajo

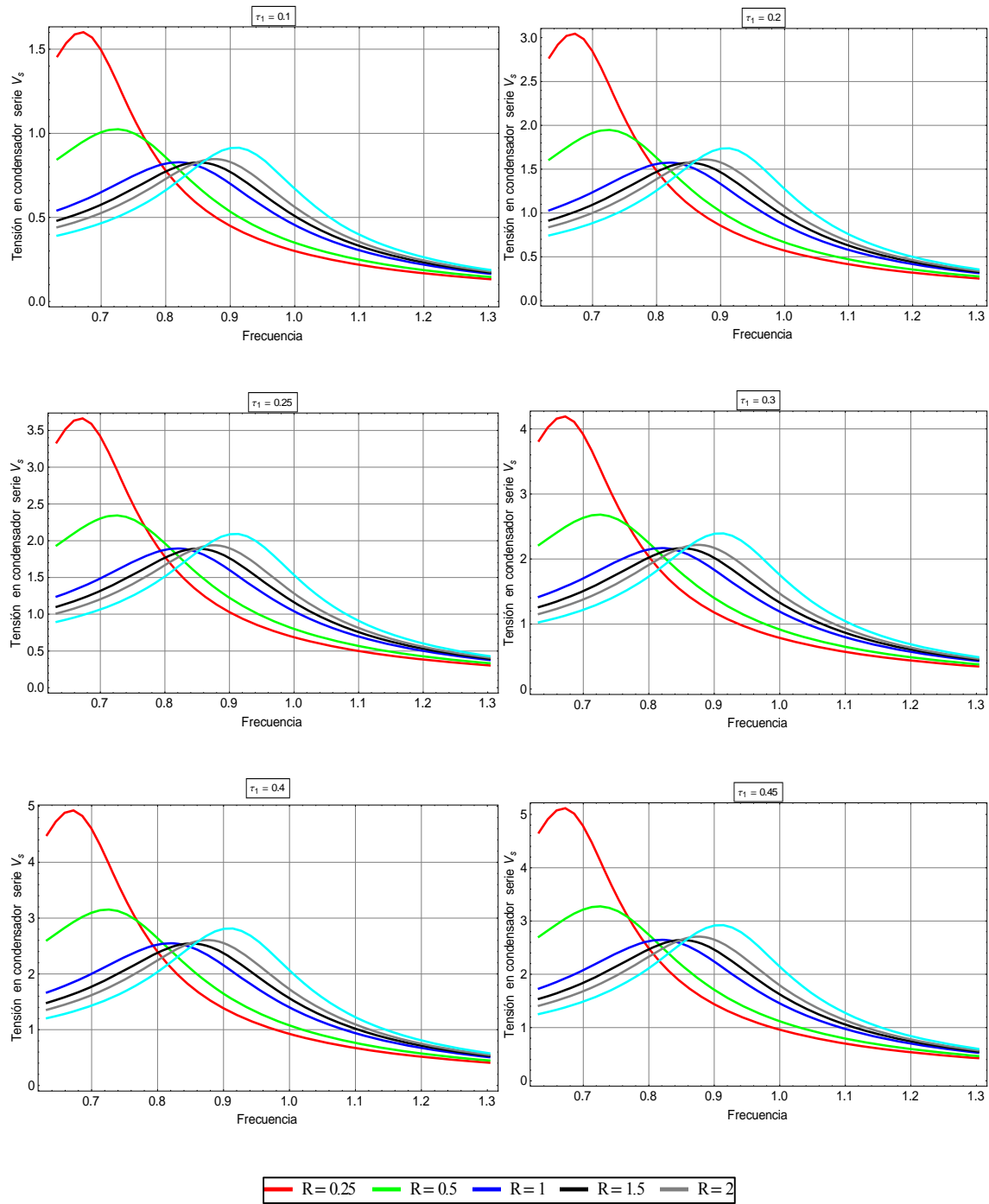


Figura 4-43

Tensión en condensador serie para diferentes valores ciclo de trabajo en función de la carga

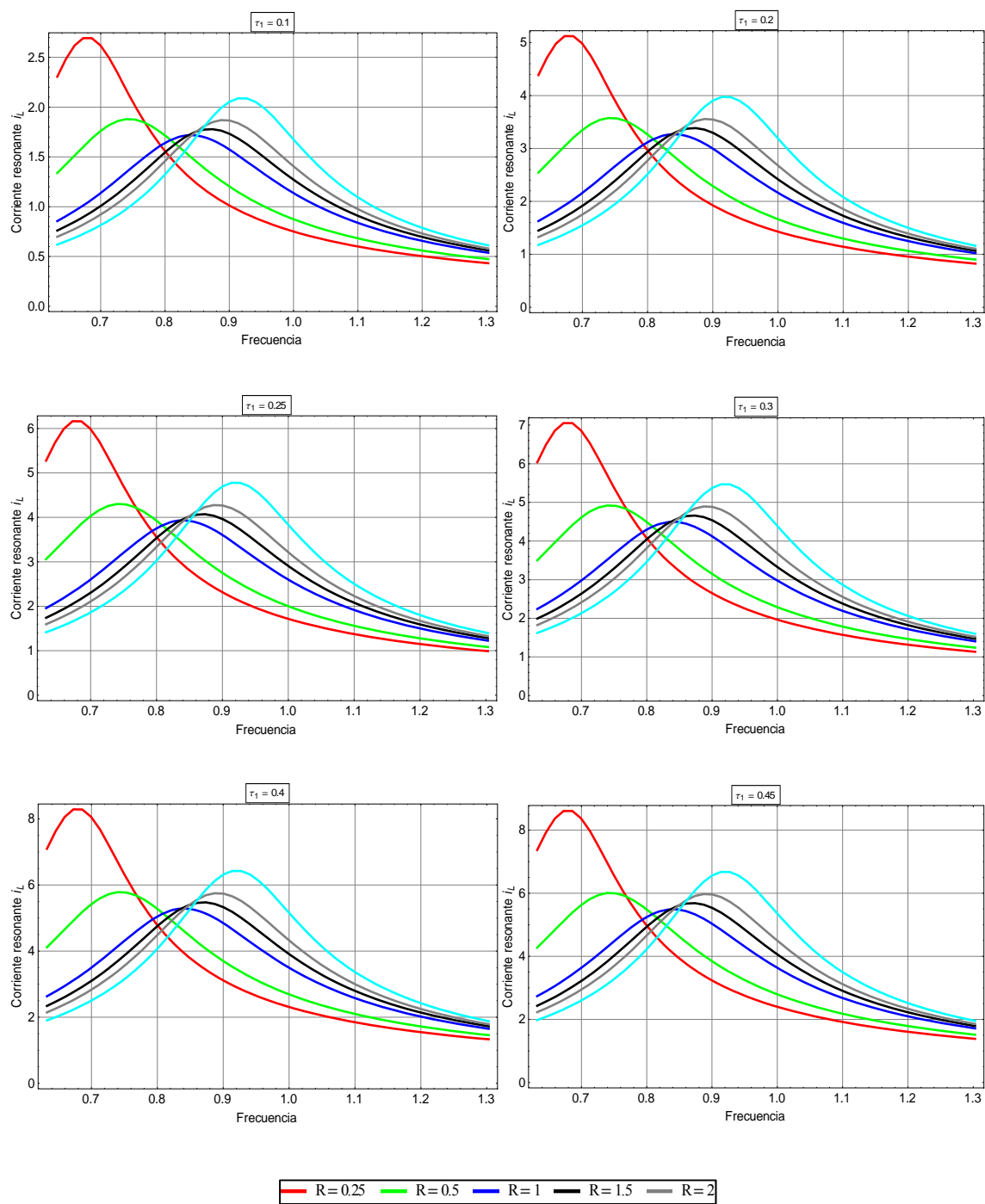


Figura 4-44

Corriente resonante para diferentes valores ciclo de trabajo en función de la carga

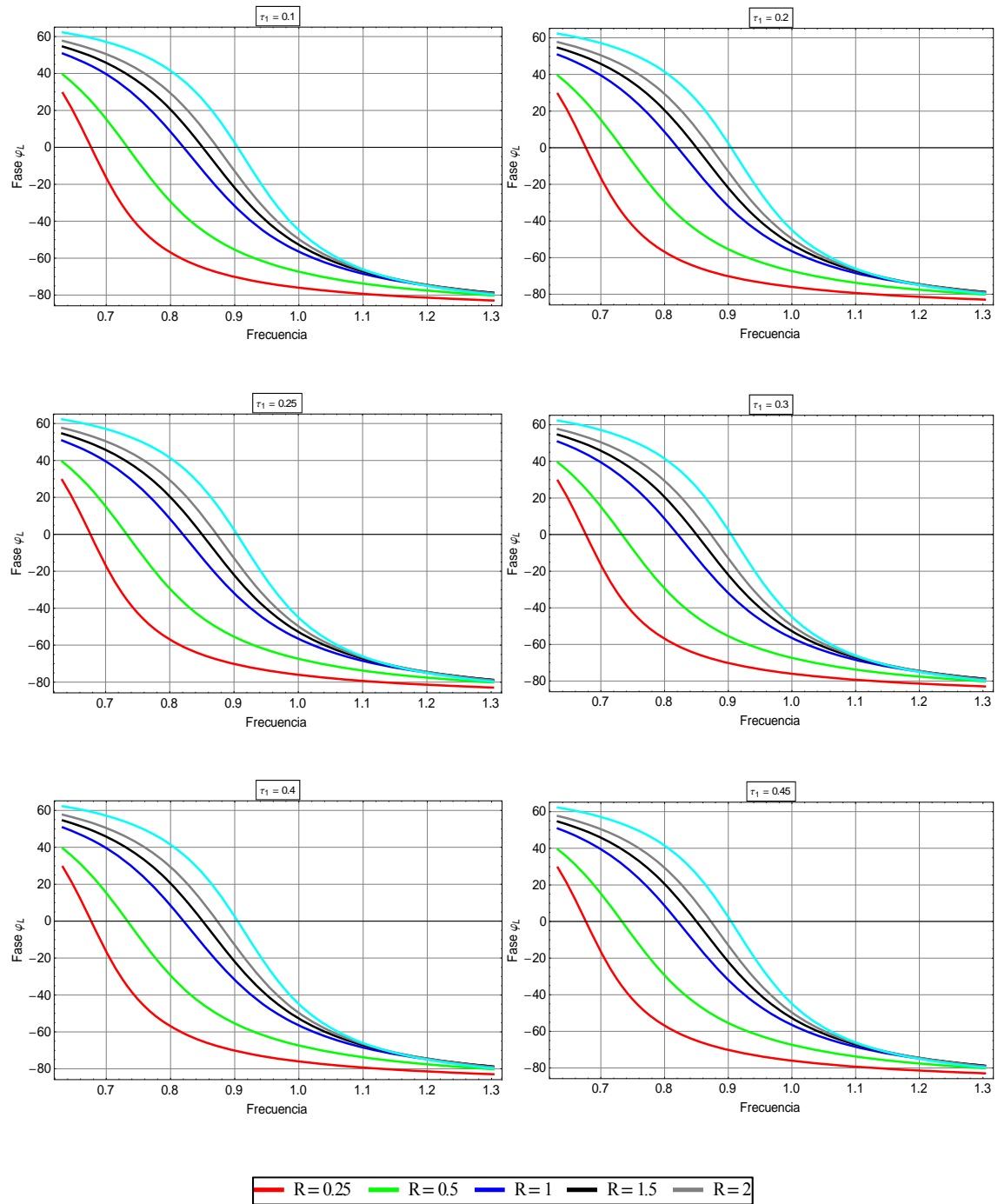


Figura 4-45

Ángulo de fase para diferentes valores ciclo de trabajo en función de la carga

4.9.3.2 Curvas de isopotencia

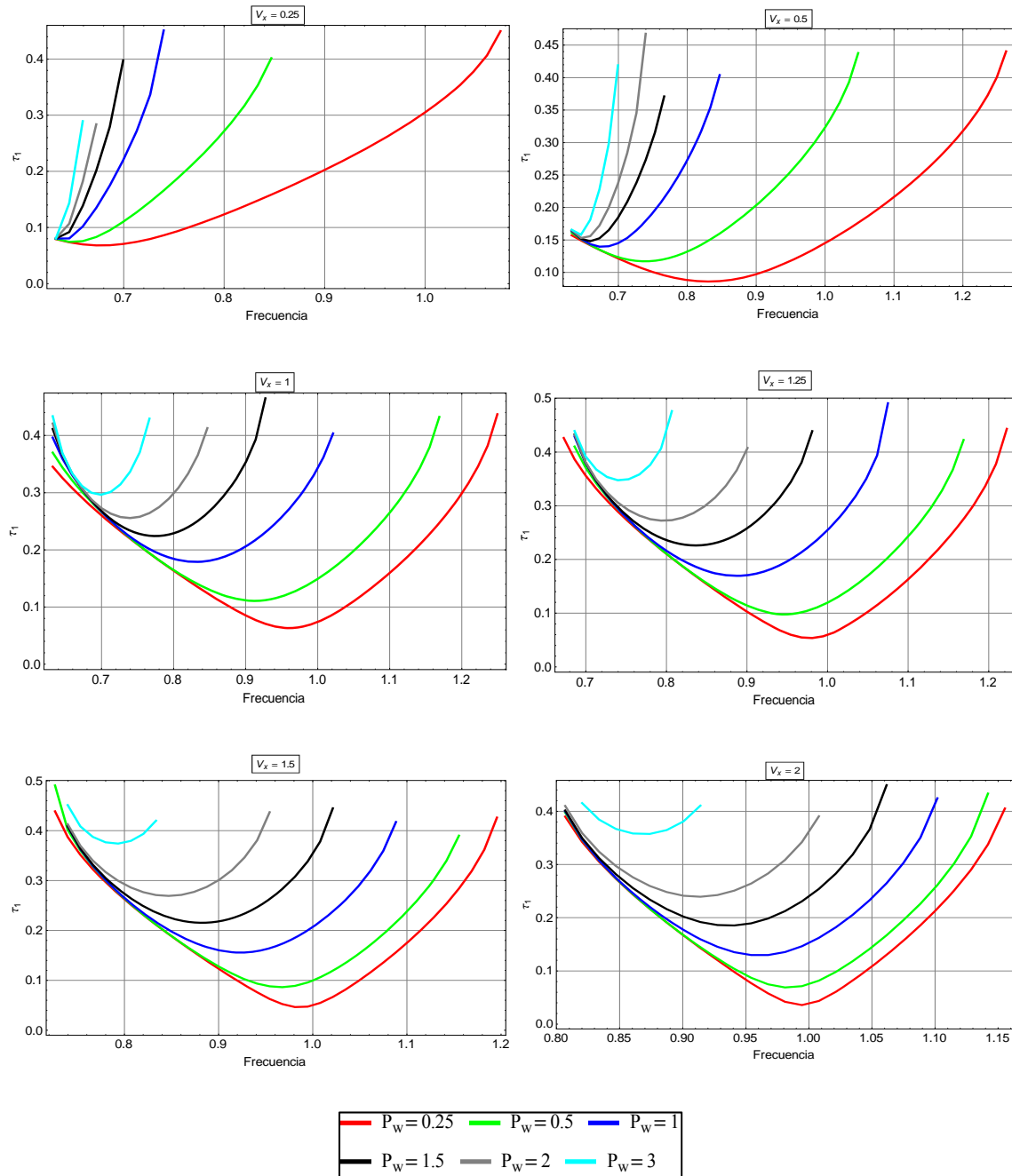


Figura 4-46

Ciclo de trabajo para diferentes valores tensión de salida en función de la potencia de salida

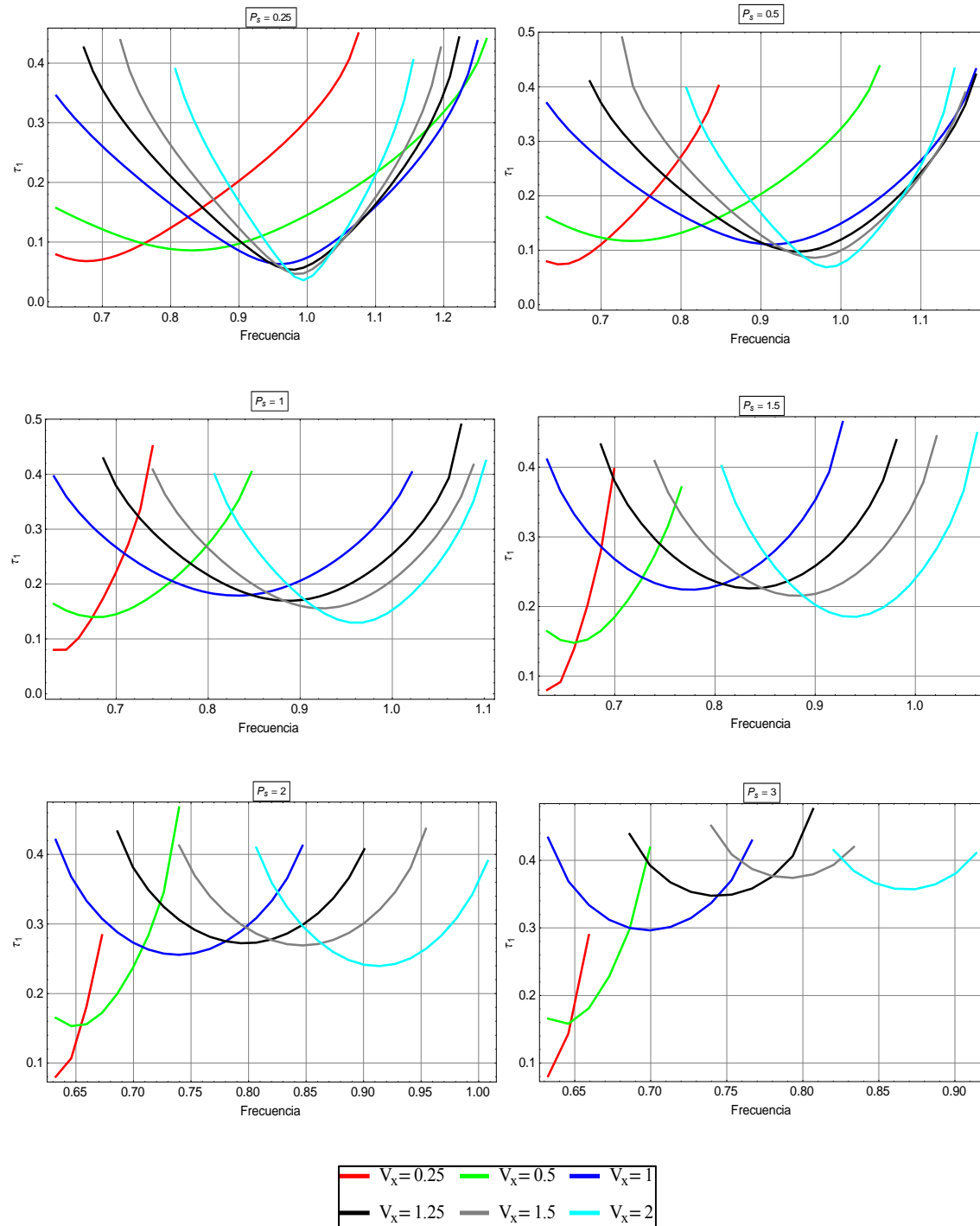


Figura 4-47

Ciclo de trabajo para diferentes valores de potencia de salida en función de la tensión de salida

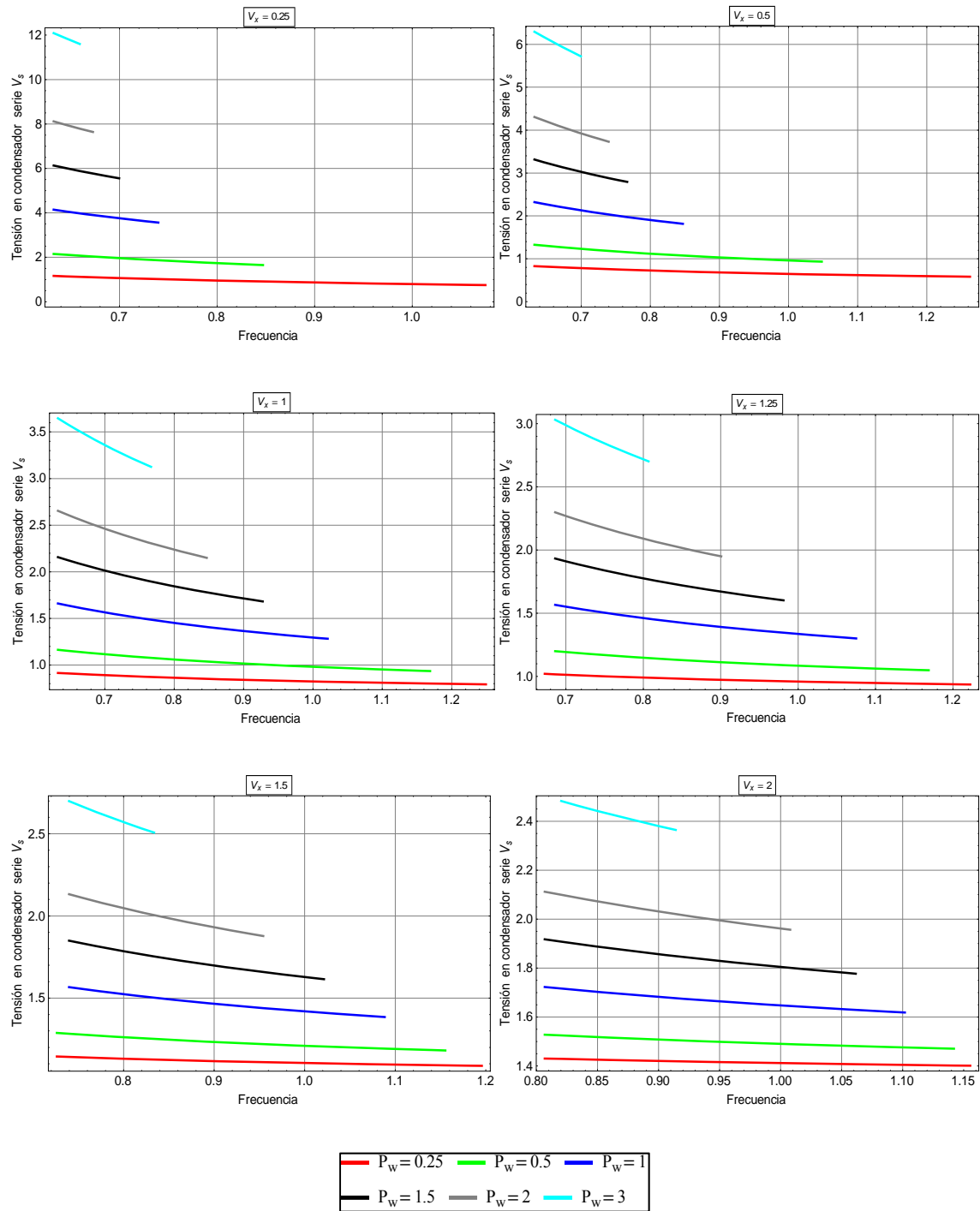


Figura 4-48

Tensión en condensador serie para diferentes valores tensión de salida en función de la potencia de salida

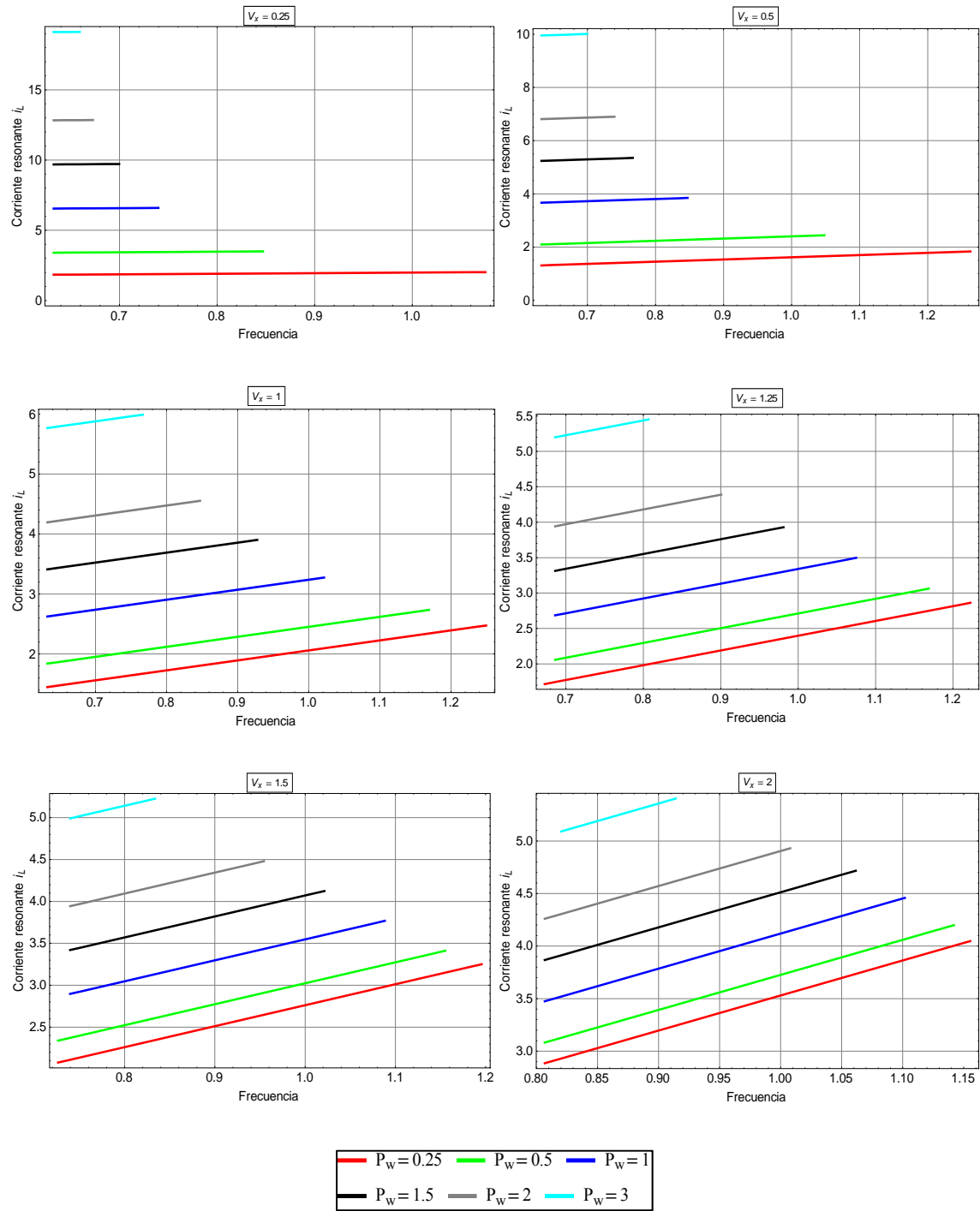


Figura 4-49

Corriente resonante para diferentes valores tensión de salida en función de la potencia de salida

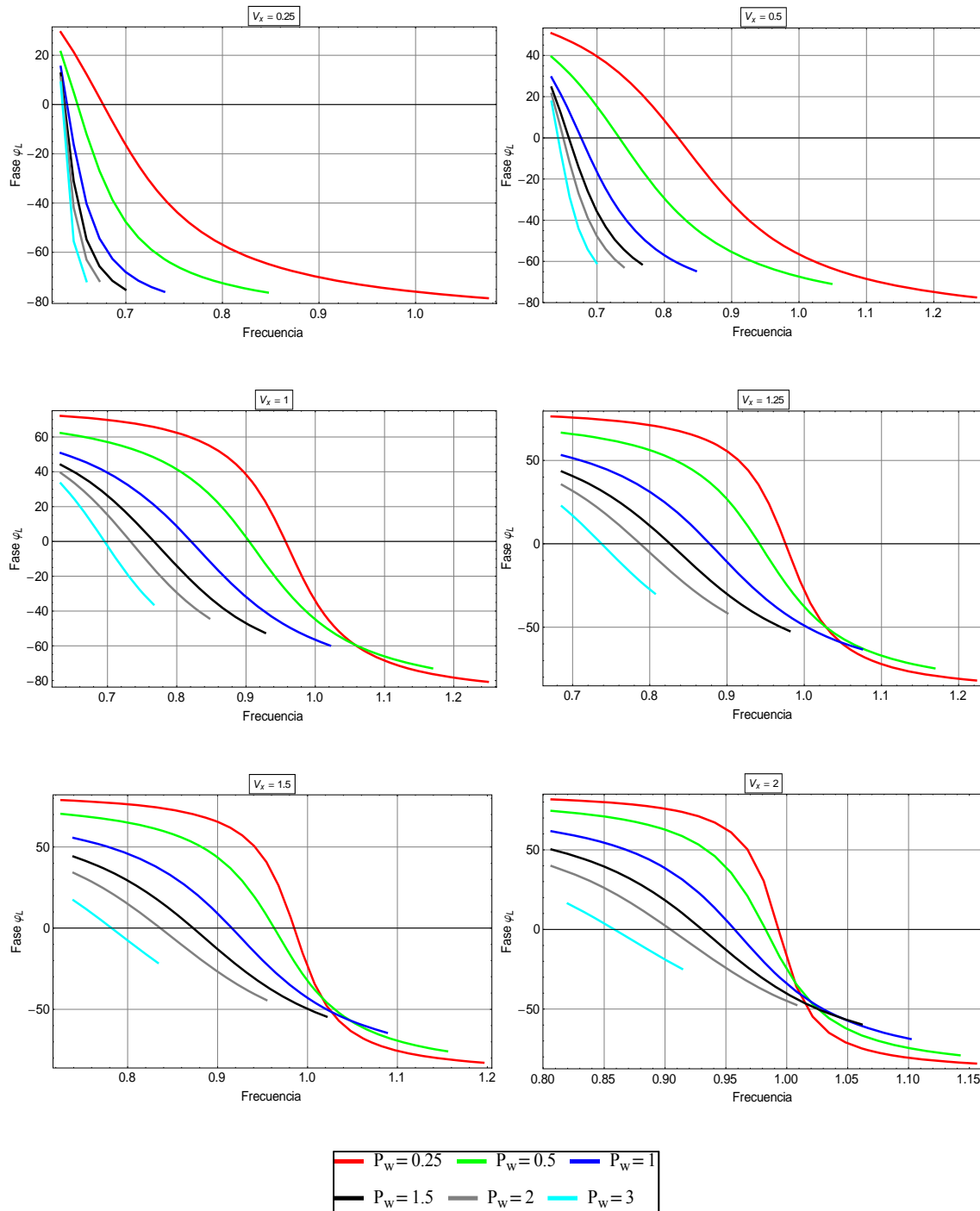


Figura 4-50

Ángulo de fase entre la corriente y la tensión de entrada para diferentes valores tensión de salida en función de la potencia de salida

4.9.3.3 Curvas de isotensión

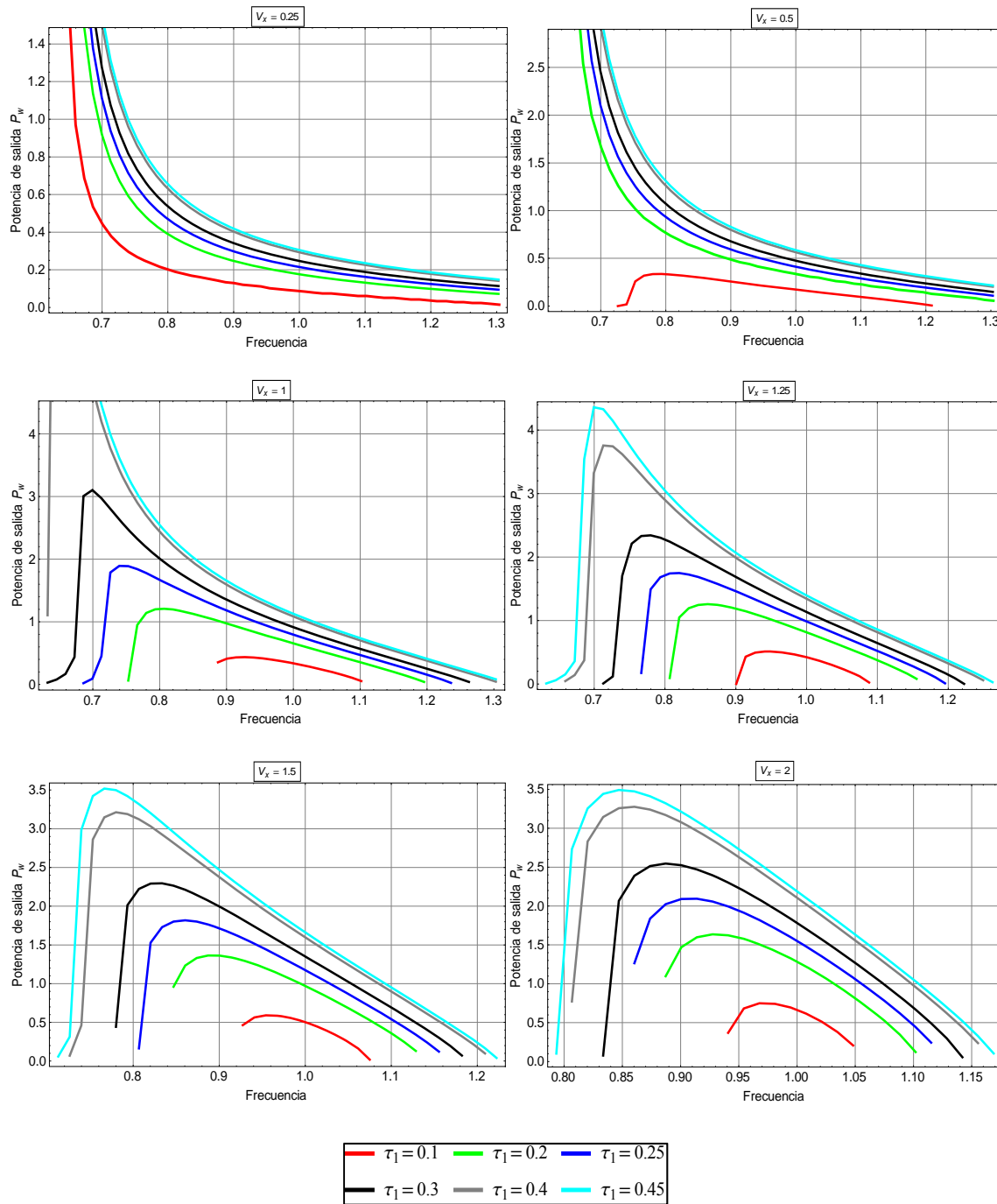


Figura 4-51

Potencia de salida para diferentes tensiones de salida en función del ciclo de trabajo

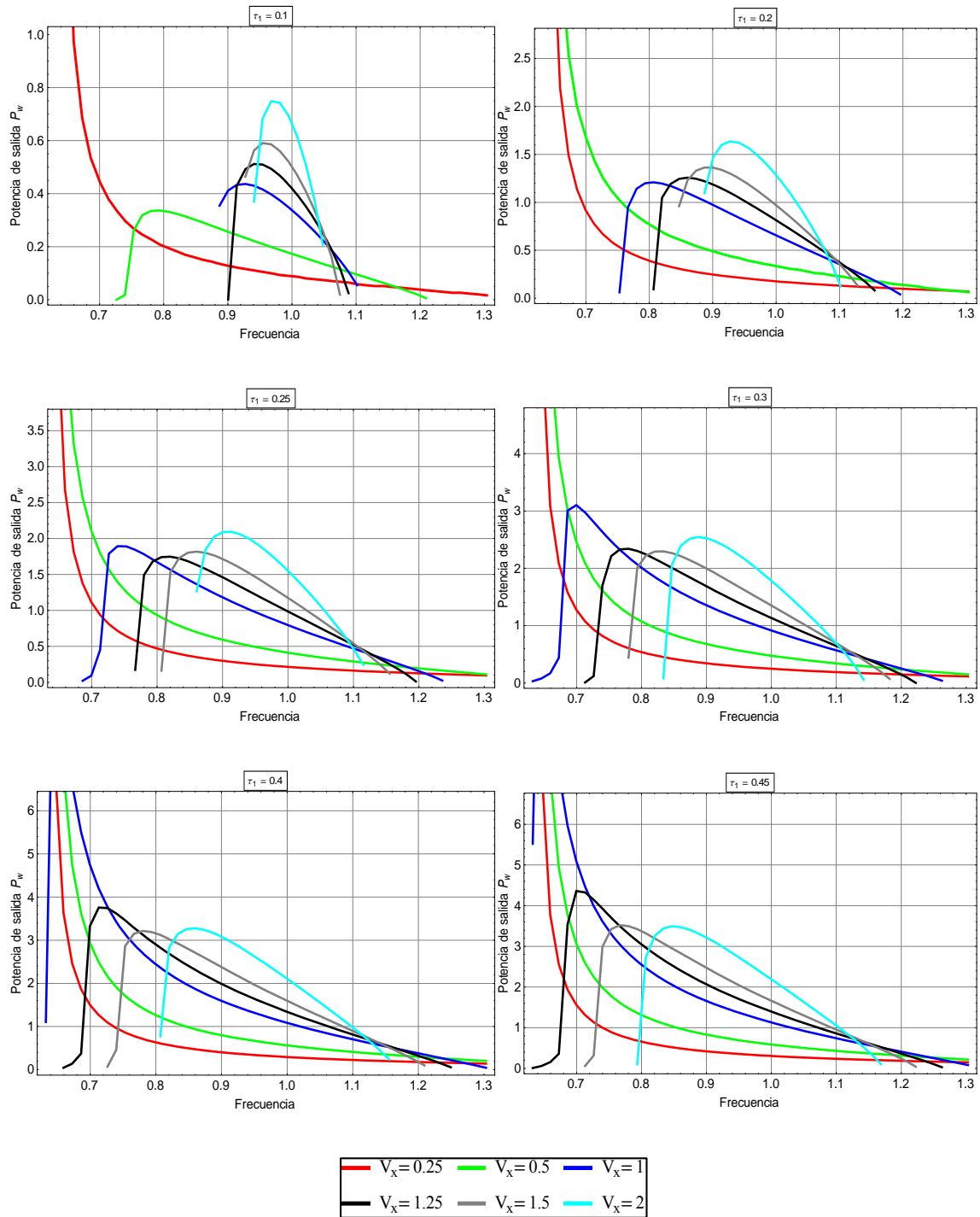


Figura 4-52

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo en función de la tensión de salida

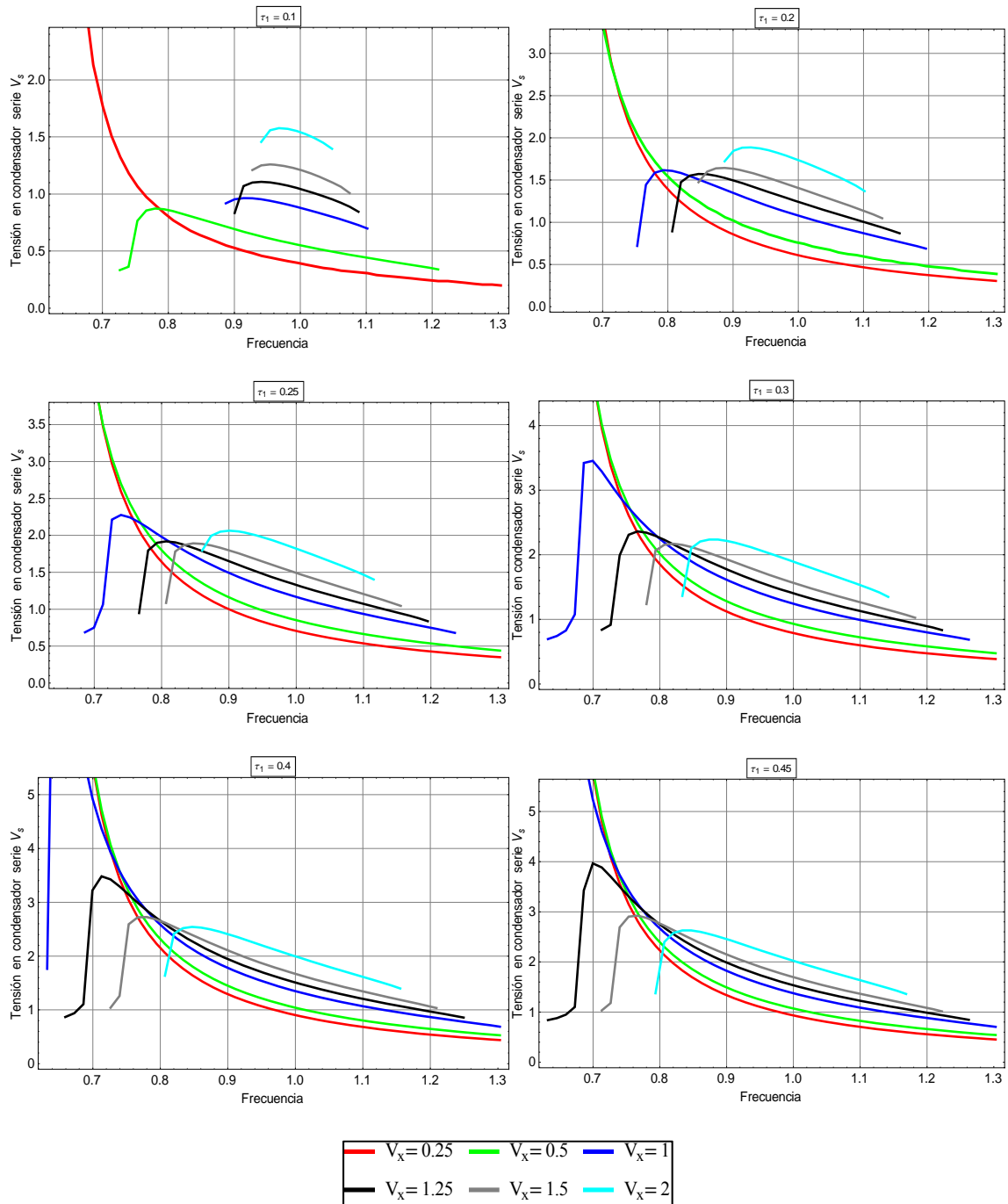


Figura 4-53

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo en función de la tensión de salida

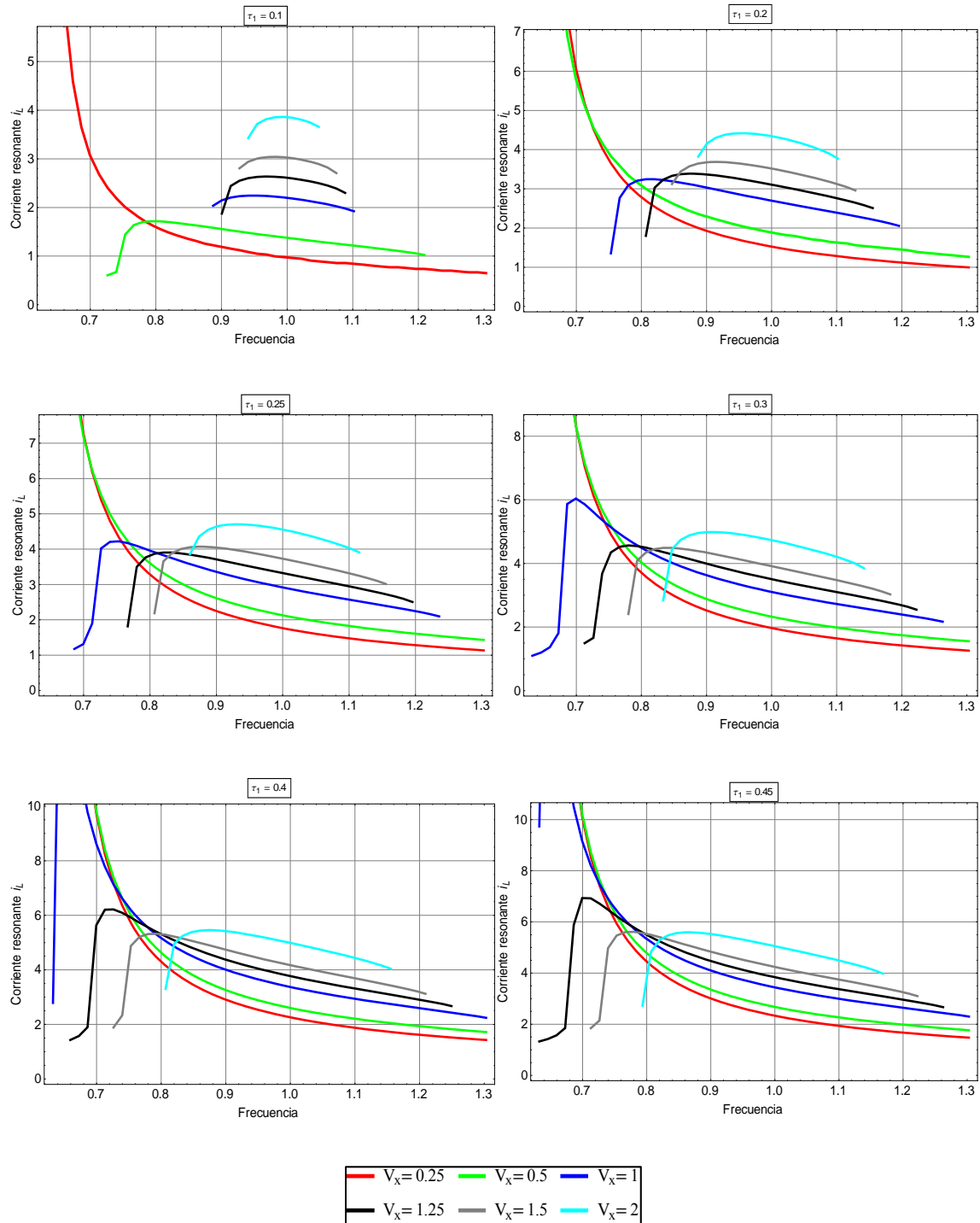


Figura 4-54

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo en función de la tensión de salida

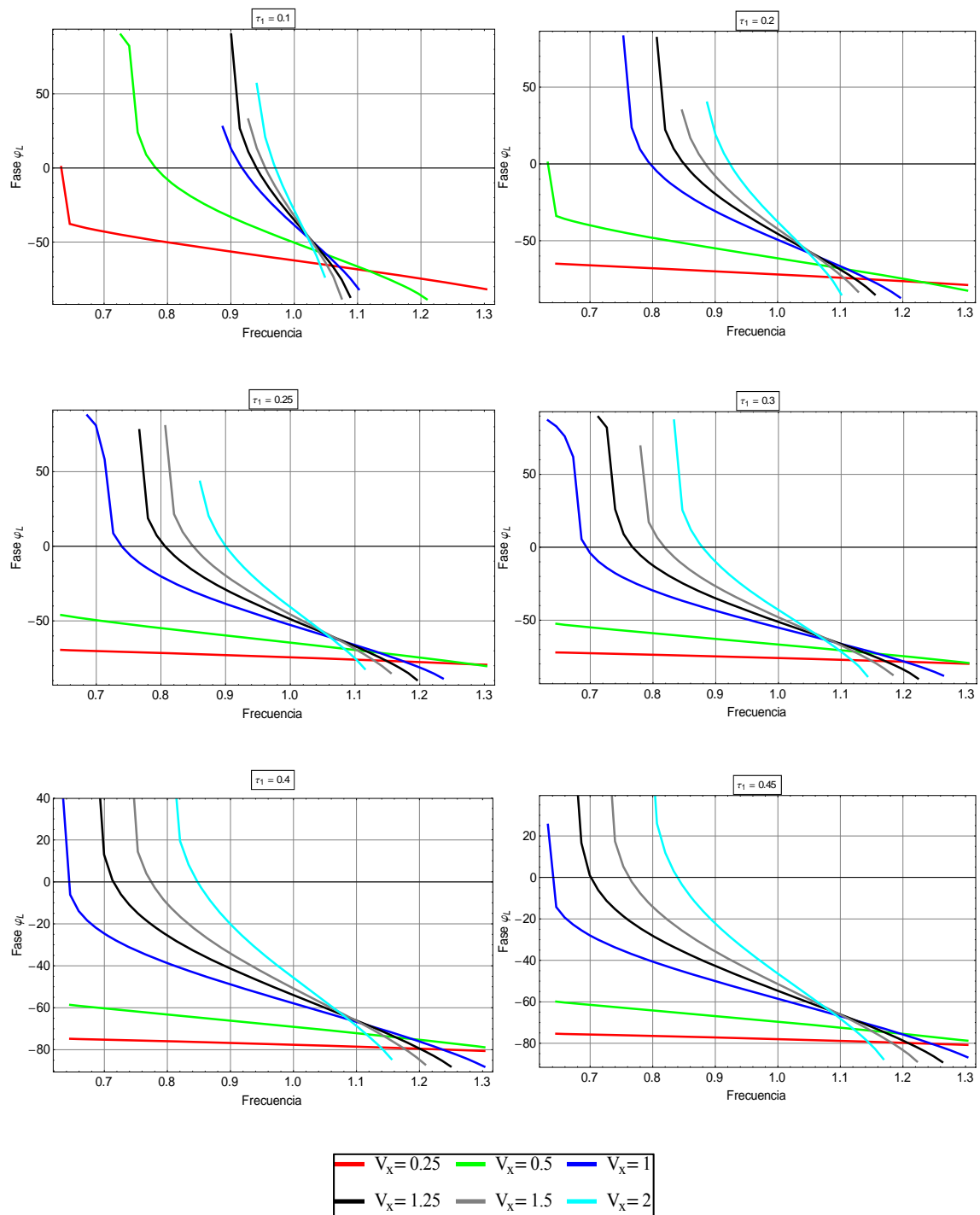


Figura 4-55

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes ciclos de trabajo en función de la tensión de salida

4.9.3.4 Curvas de isoángulo

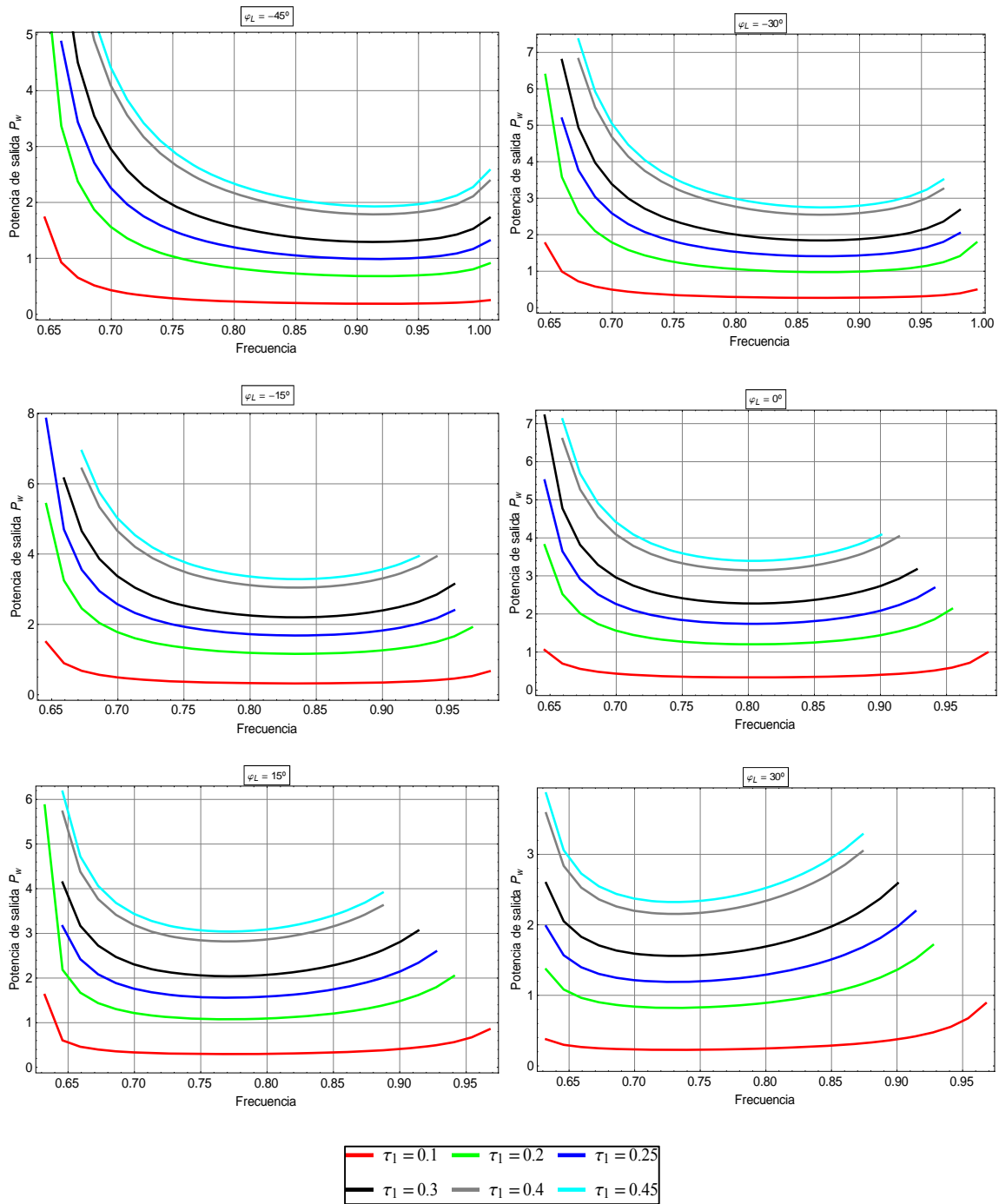


Figura 4-56

Potencia de salida para diferentes ángulos de fase en función del ciclo de trabajo

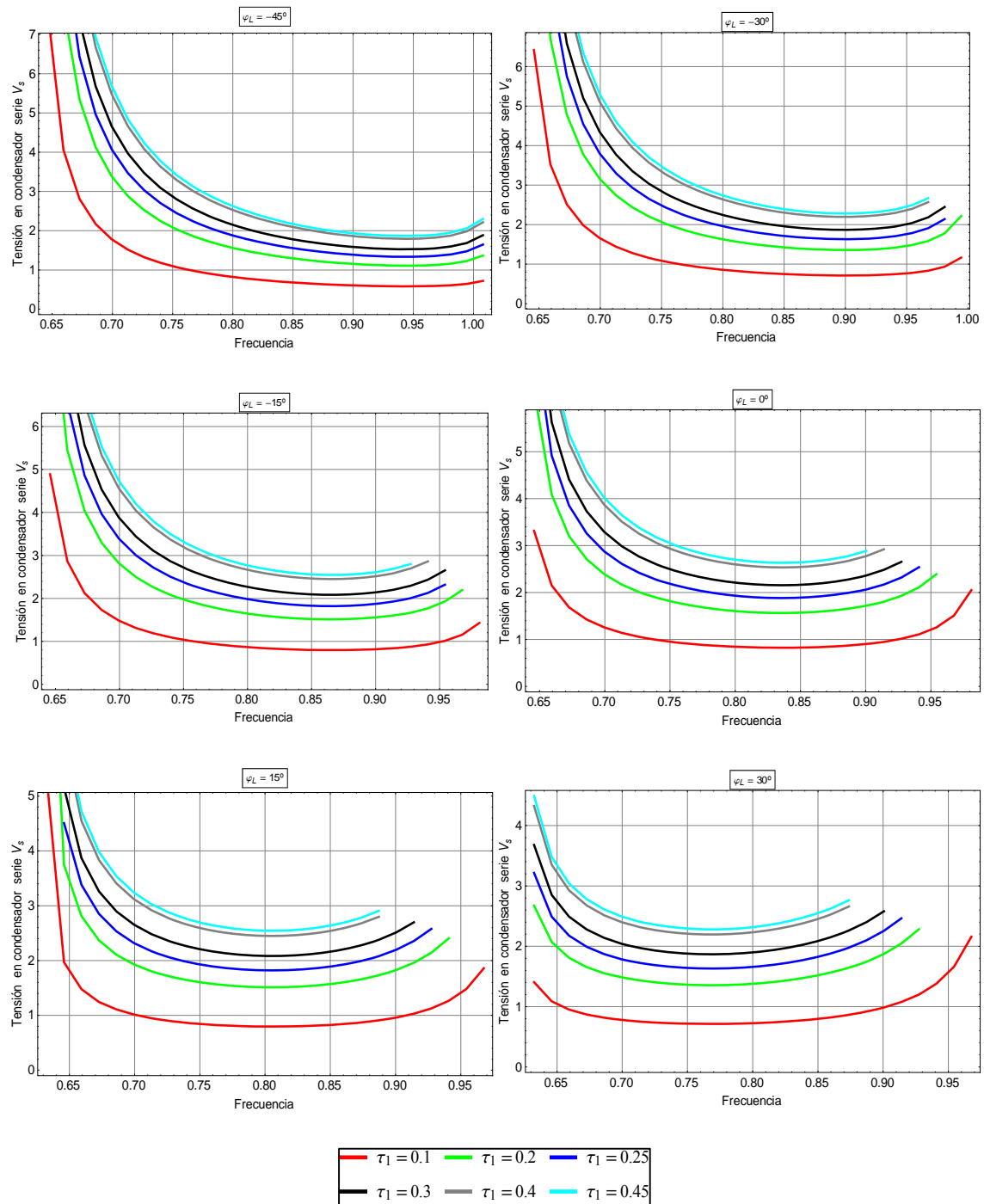


Figura 4-57

Tensión en el condensador serie para diferentes ángulos de fase en función del ciclo de trabajo

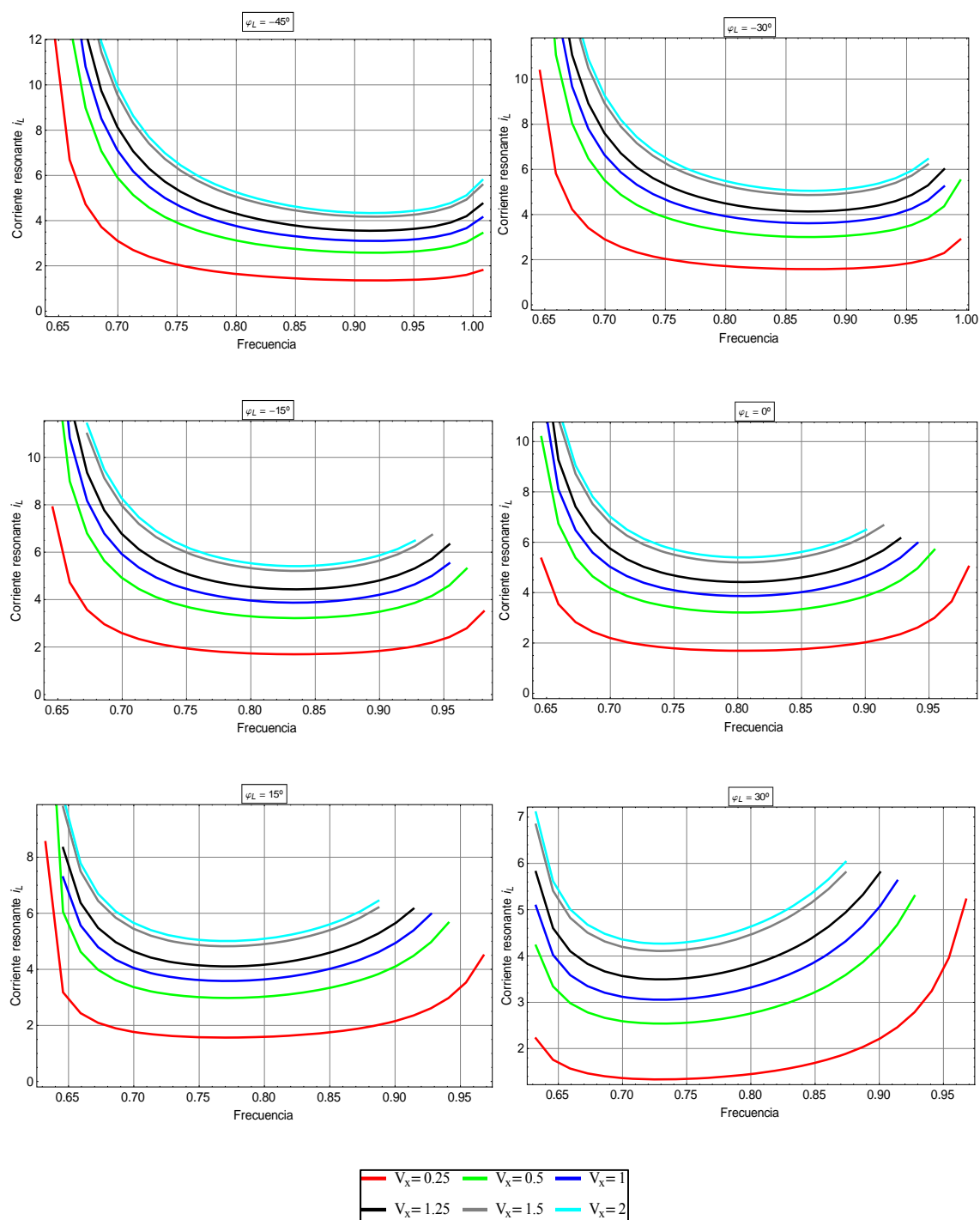


Figura 4-58

Corriente resonante para diferentes ángulos de fase en función de la tensión de salida

4.10 Estudio del modelo en zona óptima

Como ya se ha expuesto en el primer capítulo, existe una combinación de los parámetros de control que conllevan a que en ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada al convertidor sea nula. Esto lleva aparejado unas menores pérdidas en la conmutación de los IGBTs de los puentes rectificadores, por lo que se generan menores pérdidas que hay que disipar, y se reduce el deterioro de los mismos. El modelo propuesto en esta tesis permite obtener también los gráficos en esta zona, ya que no es más que una restricción adicional en una de las ecuaciones matemáticas que ligán en ángulo de la corriente resonante con el armónico de la tensión de entrada. Sin embargo, esta restricción adicional complica los bucles iterativos que recorren los puntos de trabajo en busca de las soluciones que satisfacen las ecuaciones, por lo que en algunos casos, puede apreciarse en algún gráfico valores extraños que con toda seguridad se corresponden con puntos en los que la convergencia de las ecuaciones se produce en otro punto que no es que rige el funcionamiento del convertidor.

Otra de las características que podremos apreciar en los gráficos obtenidos, es que para conseguir el punto de trabajo deseado las condiciones ahora son más restrictivas, lo que conlleva a una reducción de los márgenes de maniobra de los parámetros de control si queremos trabajar en zona óptima. Por ello, aunque los gráficos son parecidos a los casos anteriormente estudiados, tendremos gráficos “pequeños” indicando ese menor margen de control, y en muchos casos no se puede obtener una solución para el punto de trabajo que se desea.

En los epígrafes siguientes, se muestran de nuevo varios gráficos para señal de entrada simétrica, asimétrica y modo fluroroscopia con esta restricción de zona óptima.

4.10.1 Modelo con señal simétrica en zona óptima

4.10.1.1 Curvas de isorresistencia

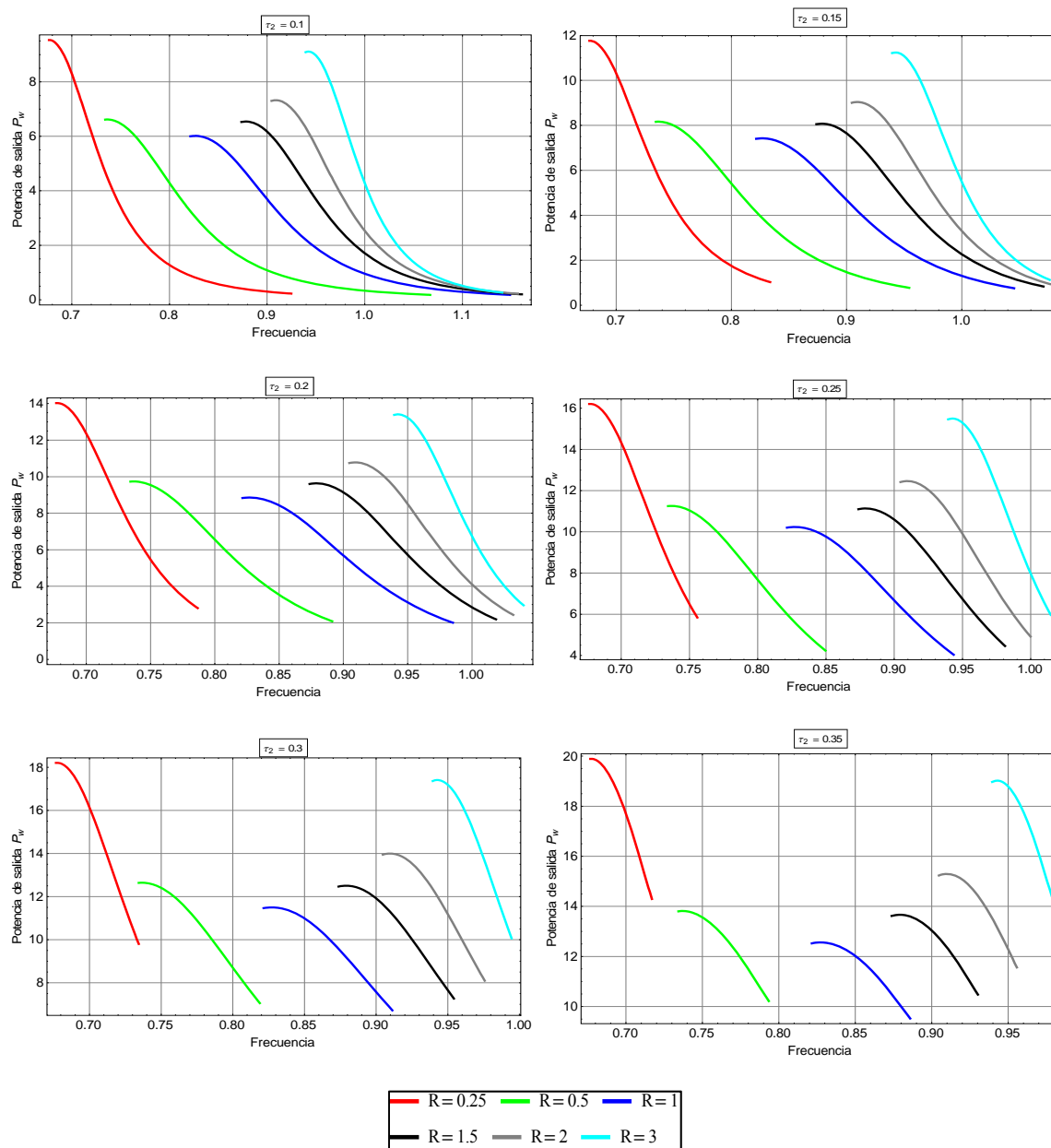


Figura 4-59

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

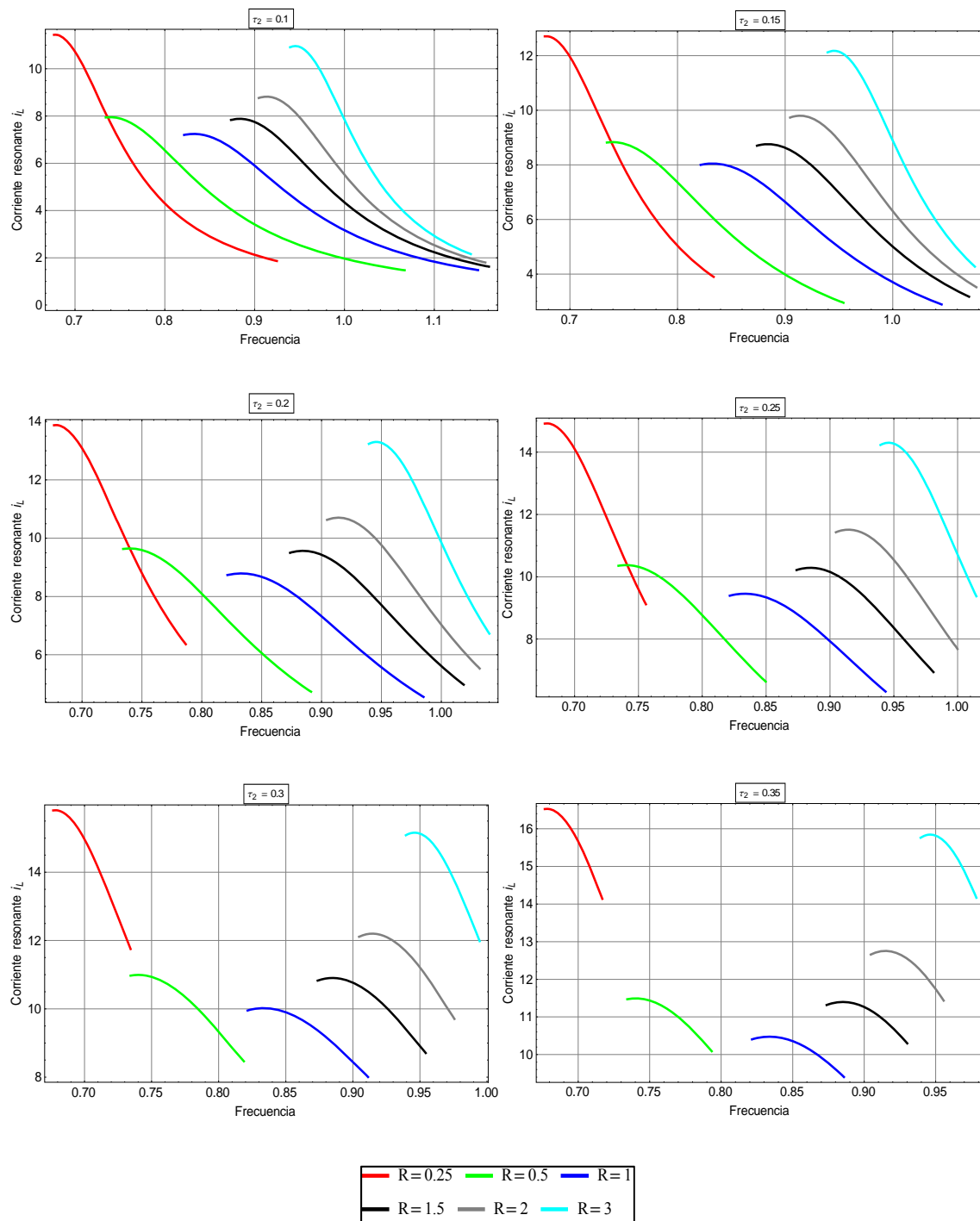


Figura 4-60

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

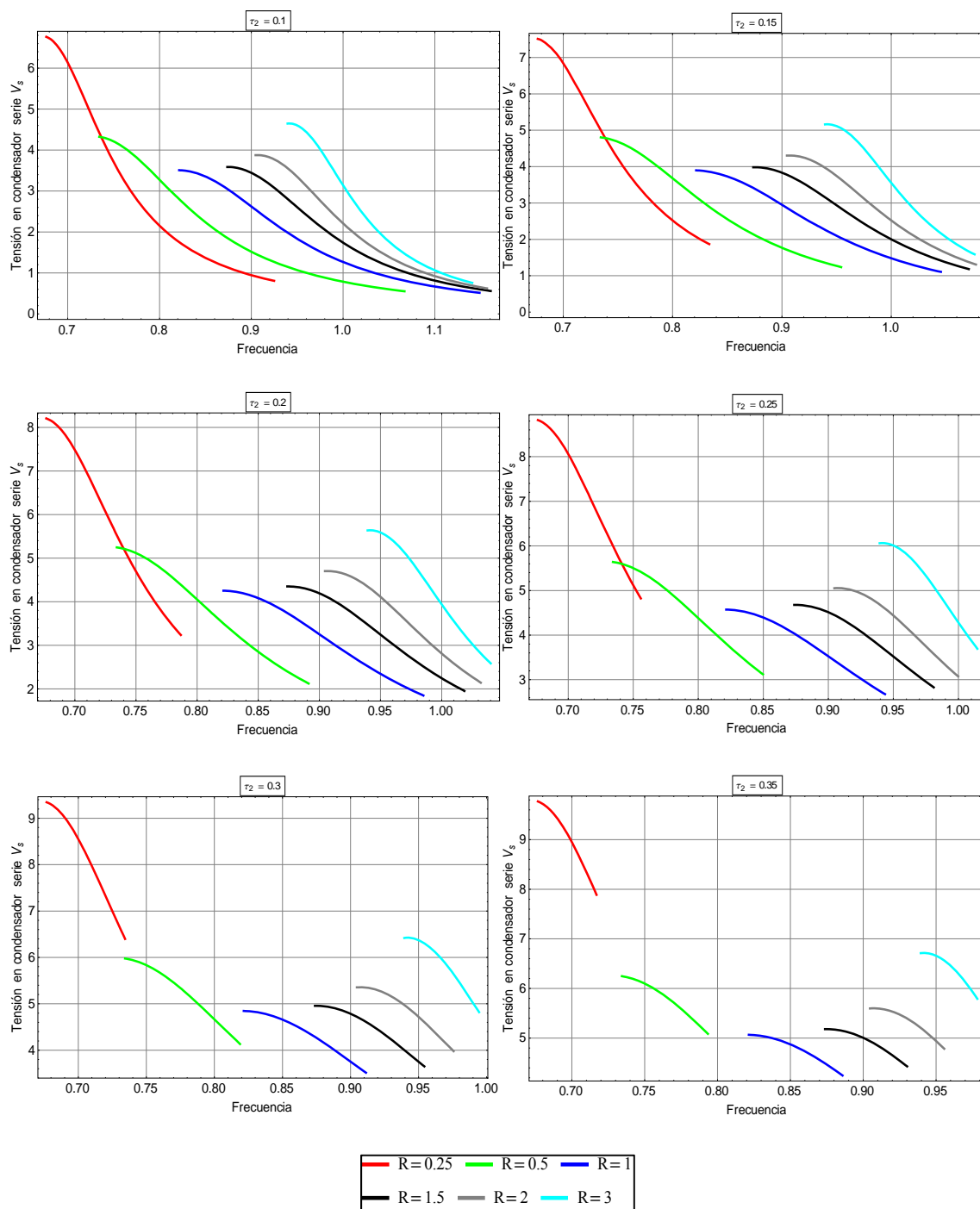


Figura 4-61

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

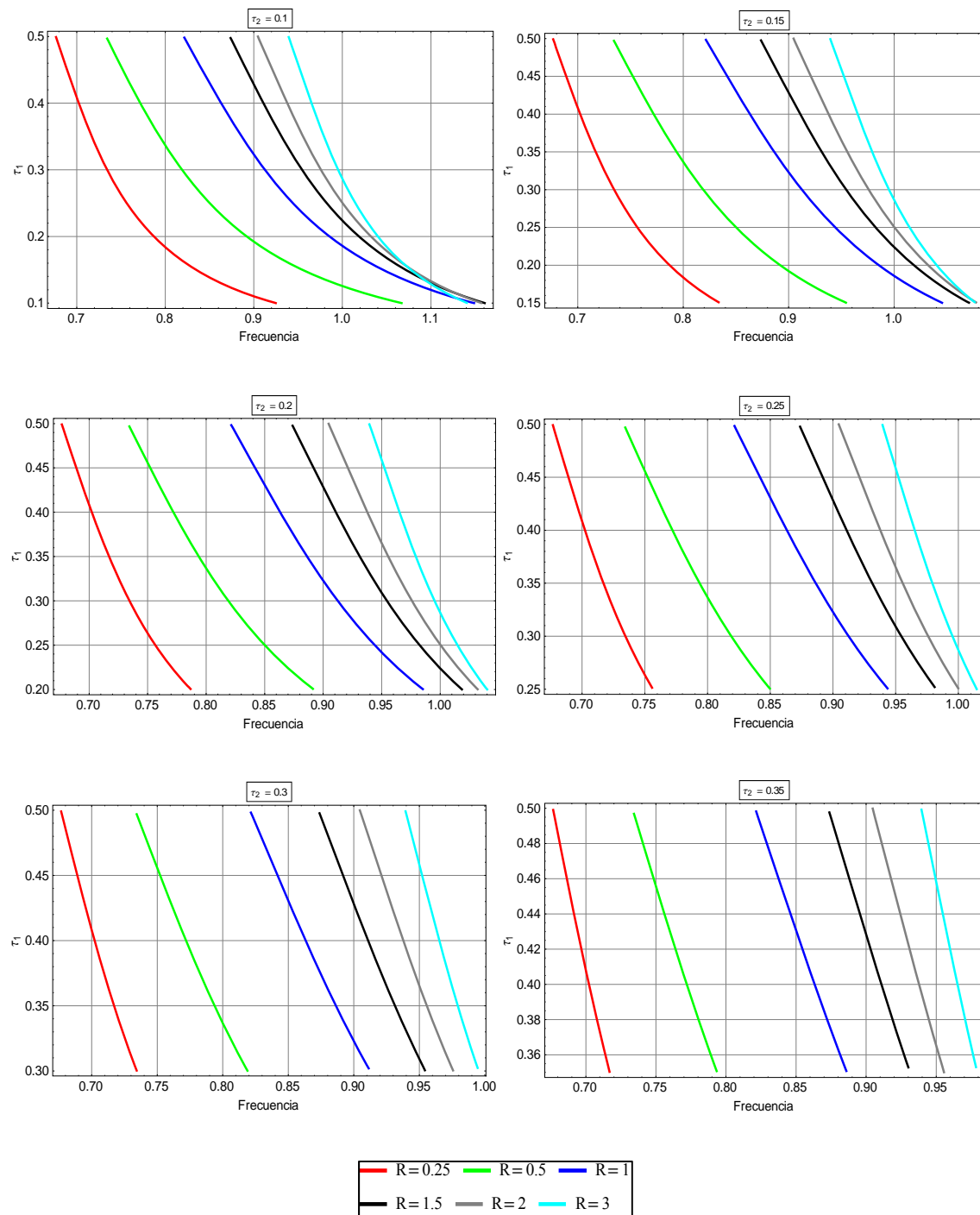


Figura 4-62

Ciclo de trabajo primario para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

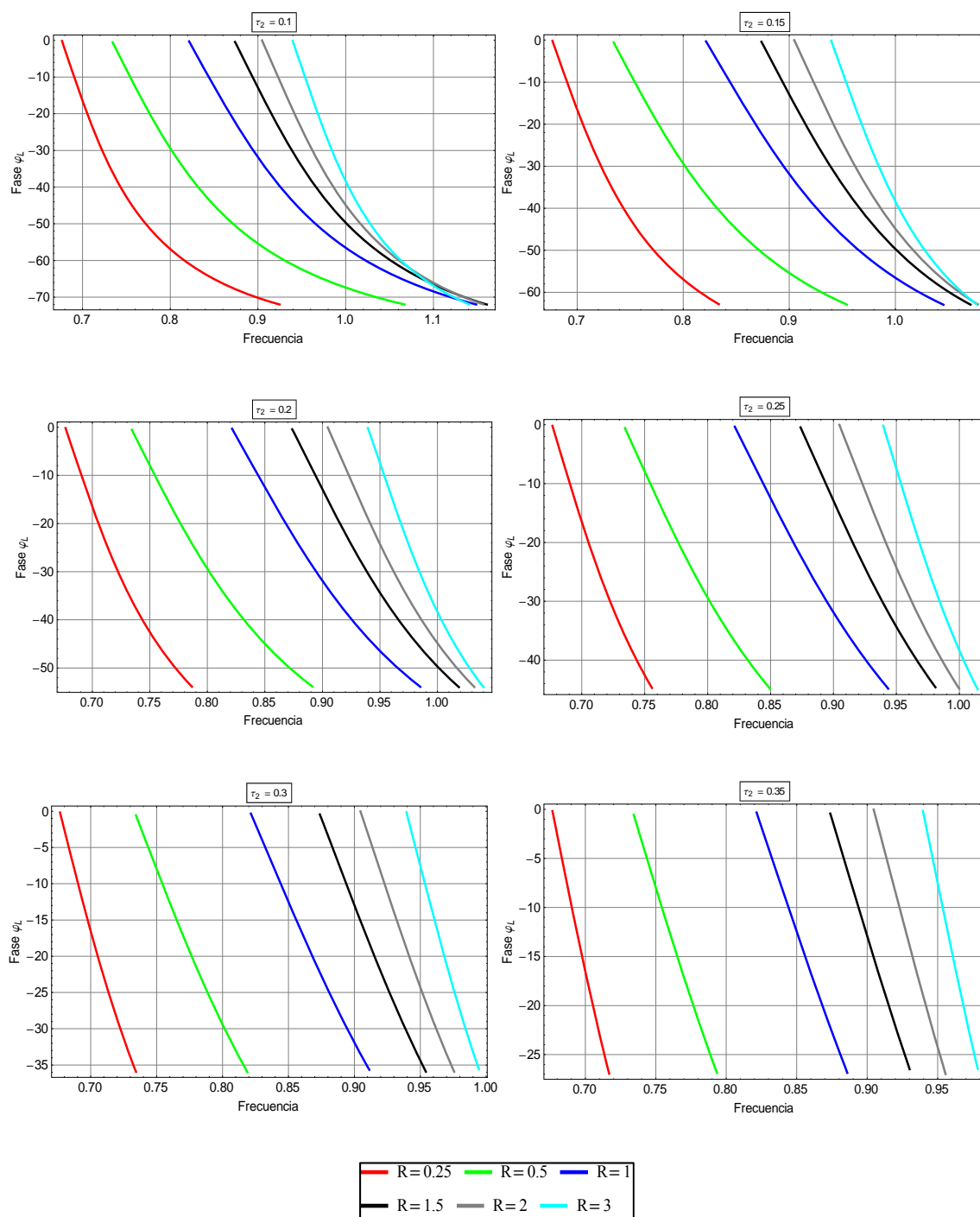


Figura 4-63

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

4.10.1.2 Curvas de isotensión

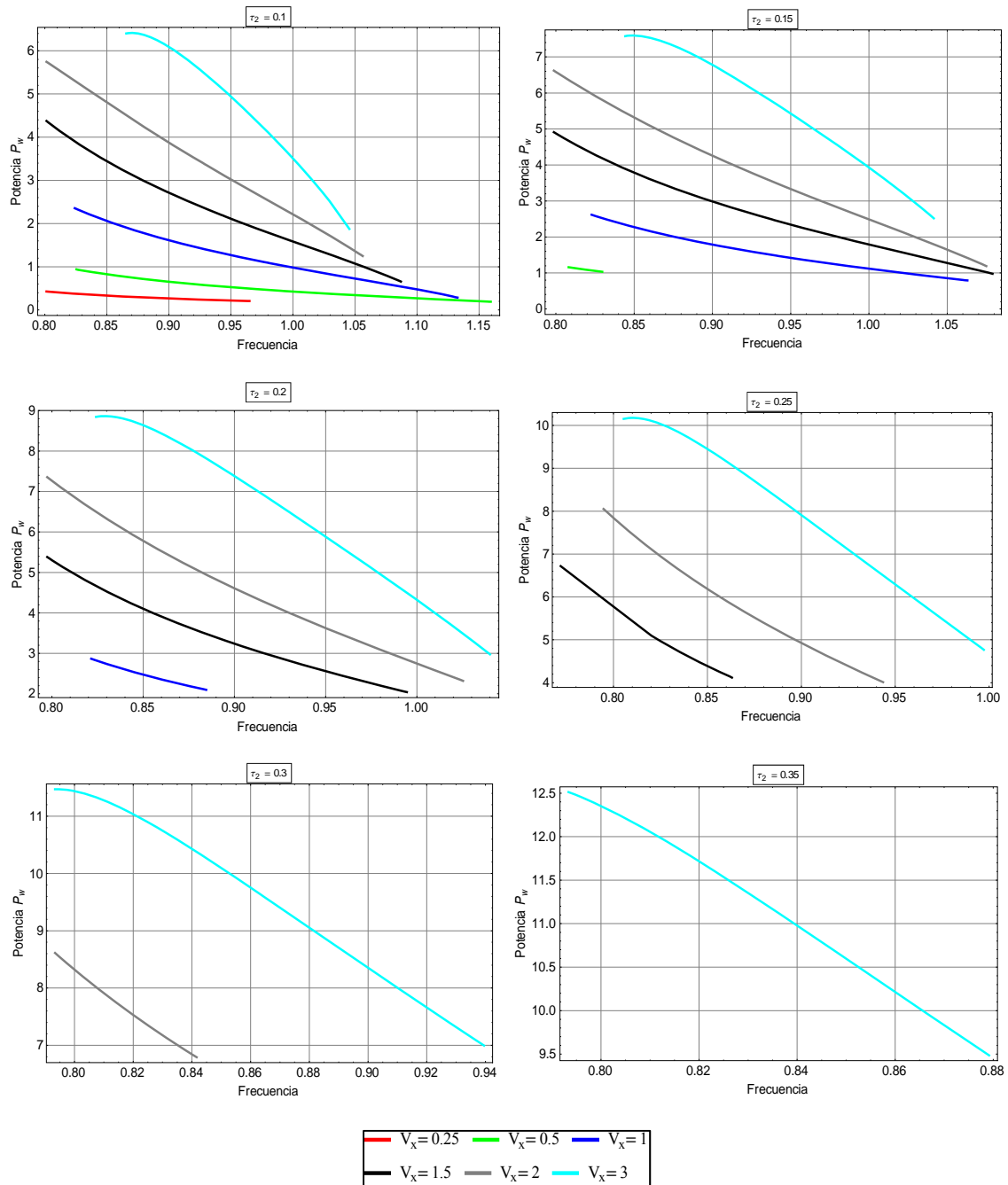


Figura 4-64

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

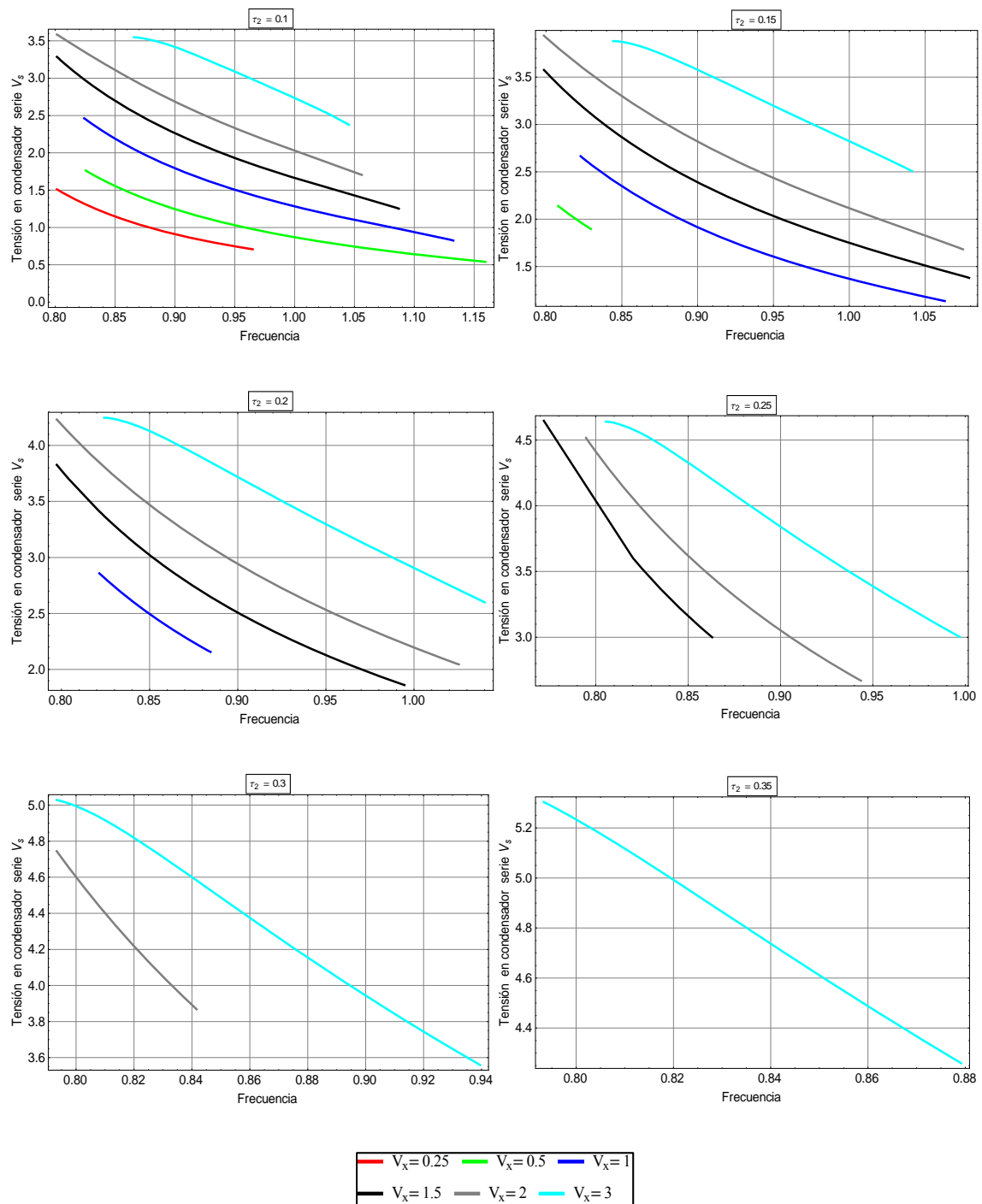


Figura 4-65

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

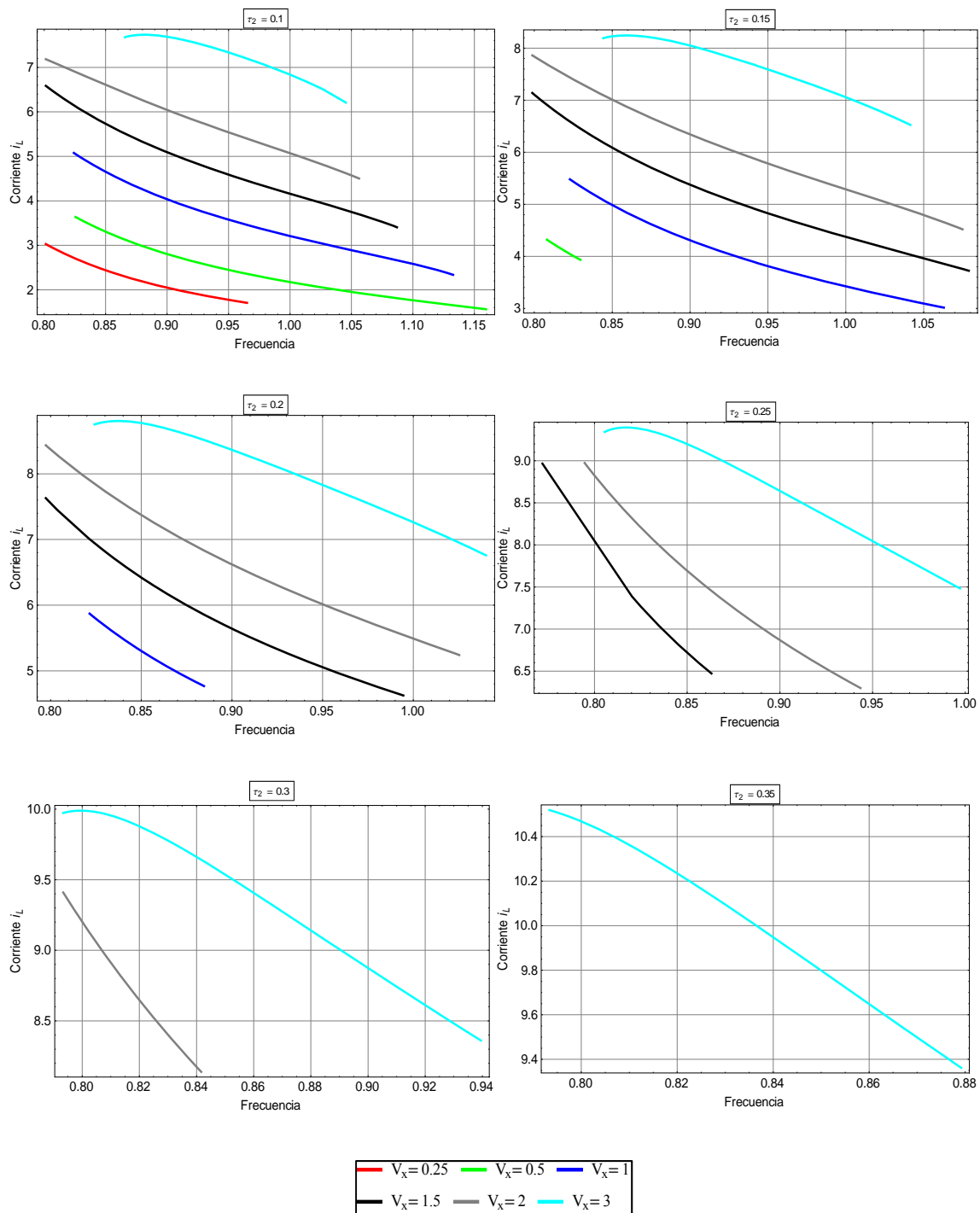


Figura 4-66

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

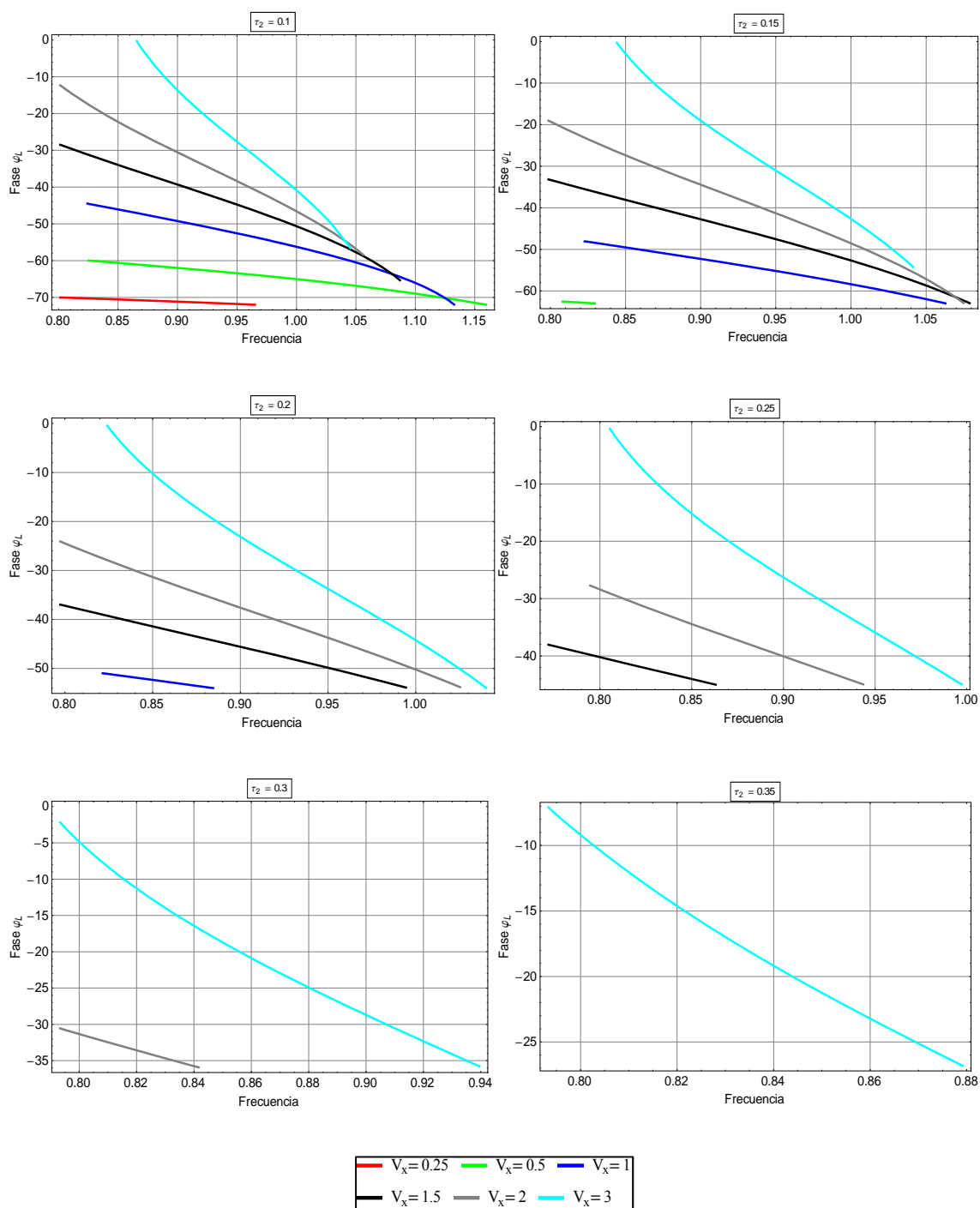


Figura 4-67

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

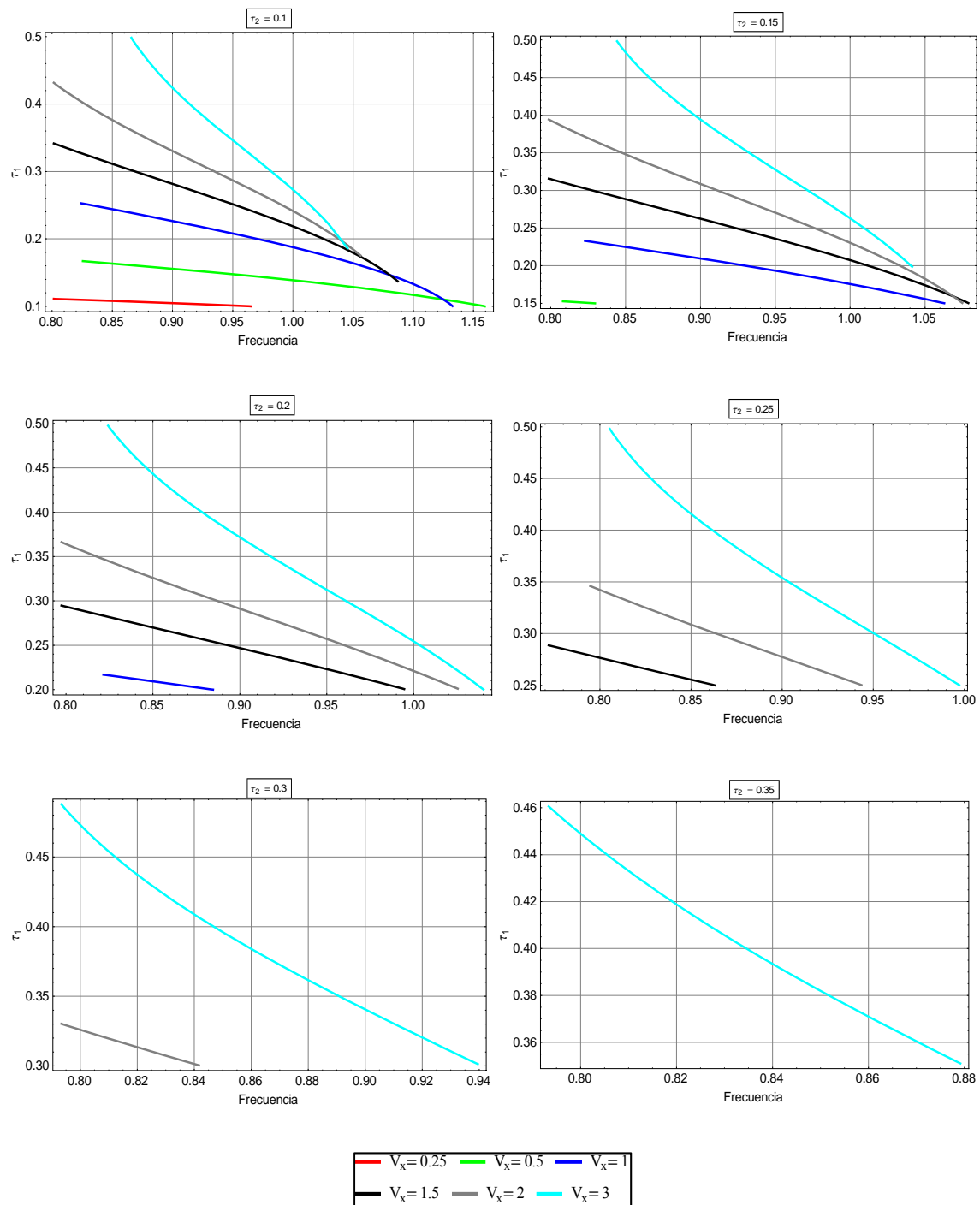


Figura 4-68

Ciclo de trabajo principal para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

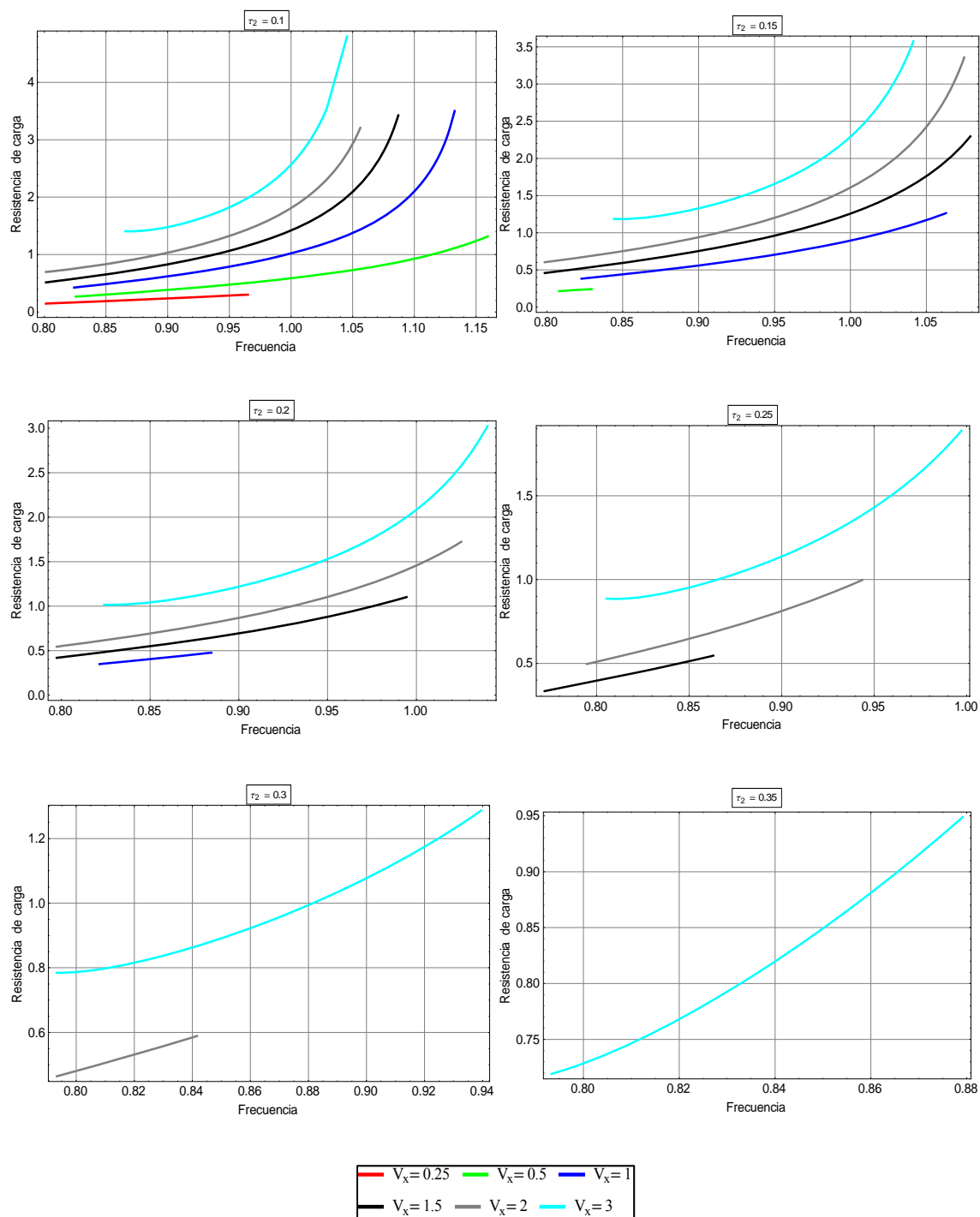


Figura 4-69

Resistencia de carga para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la tensión de salida

4.10.1.3 Curvas de isotencia

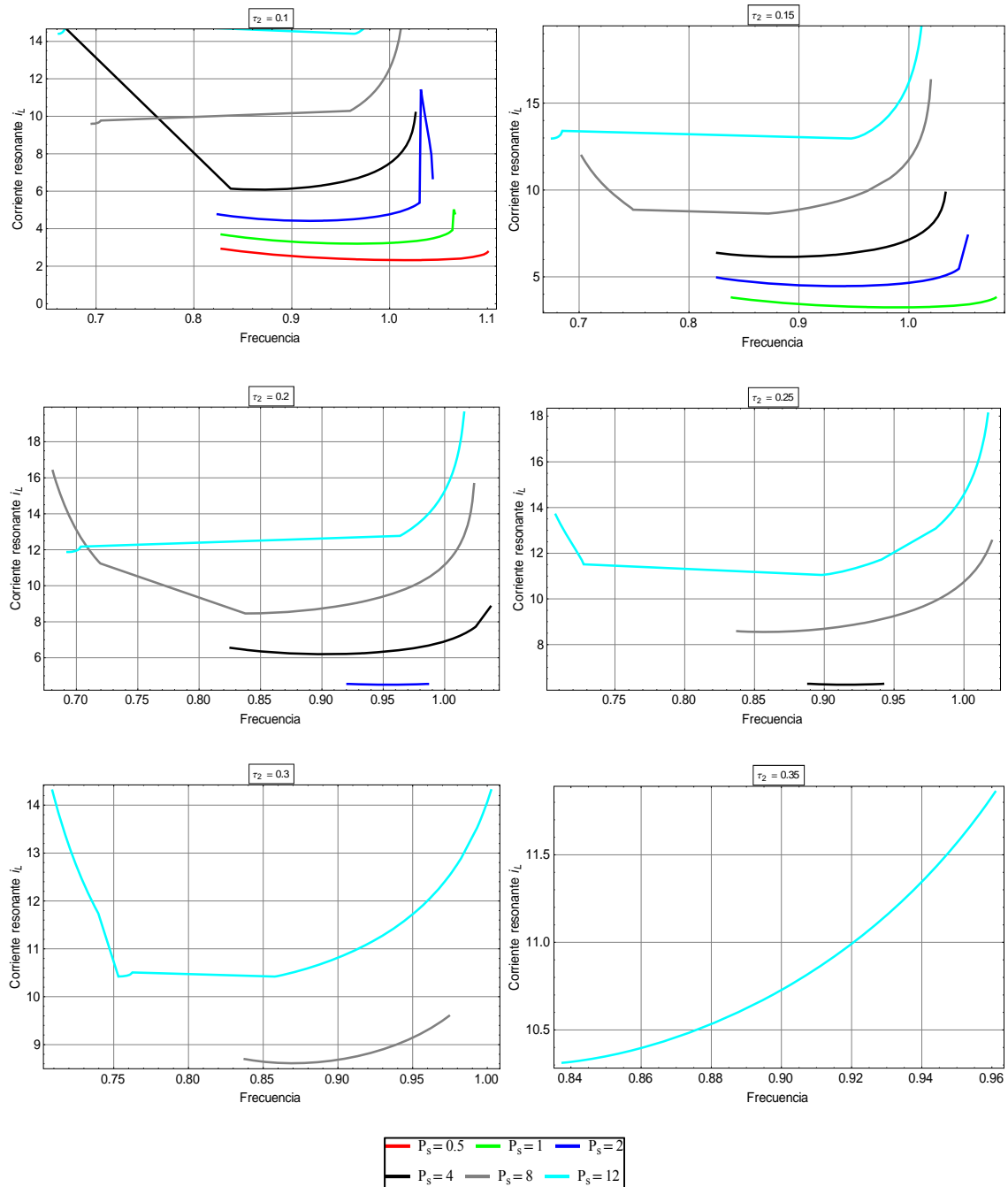


Figura 4-70

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la potencia de salida

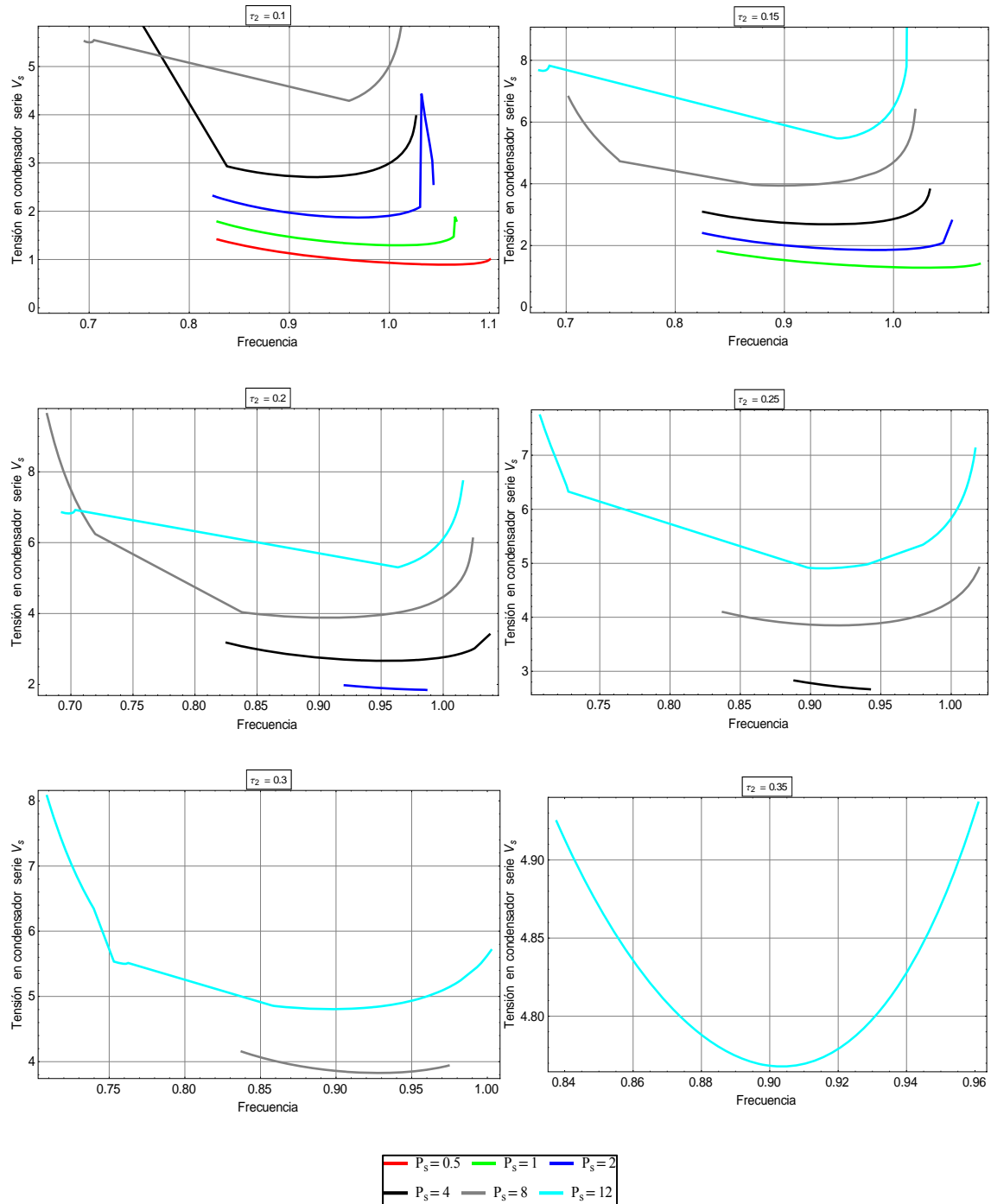


Figura 4-71

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la potencia de salida

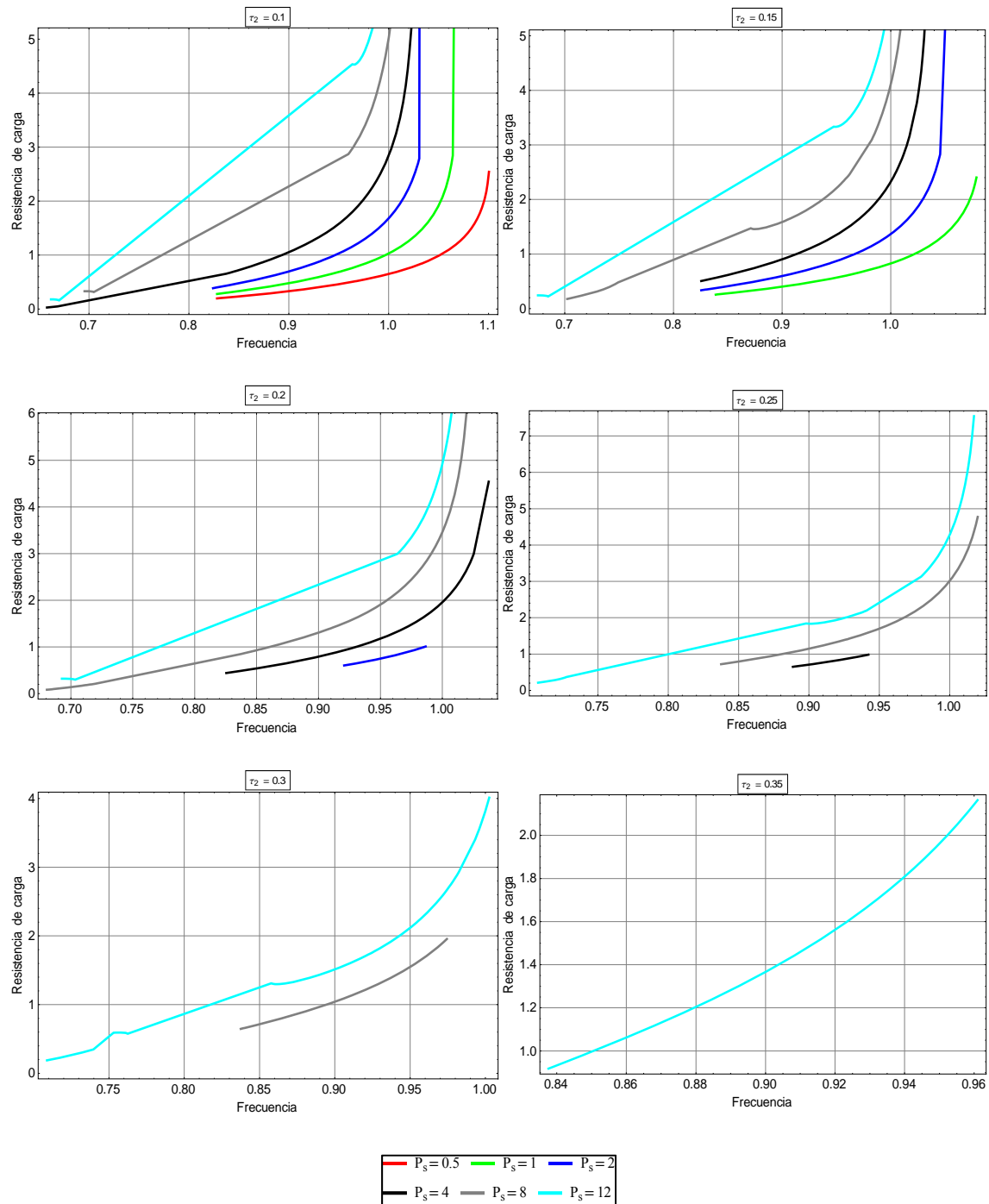


Figura 4-72

Resistencia de carga para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la potencia de salida

4.10.1.4 Curvas de isoángulo

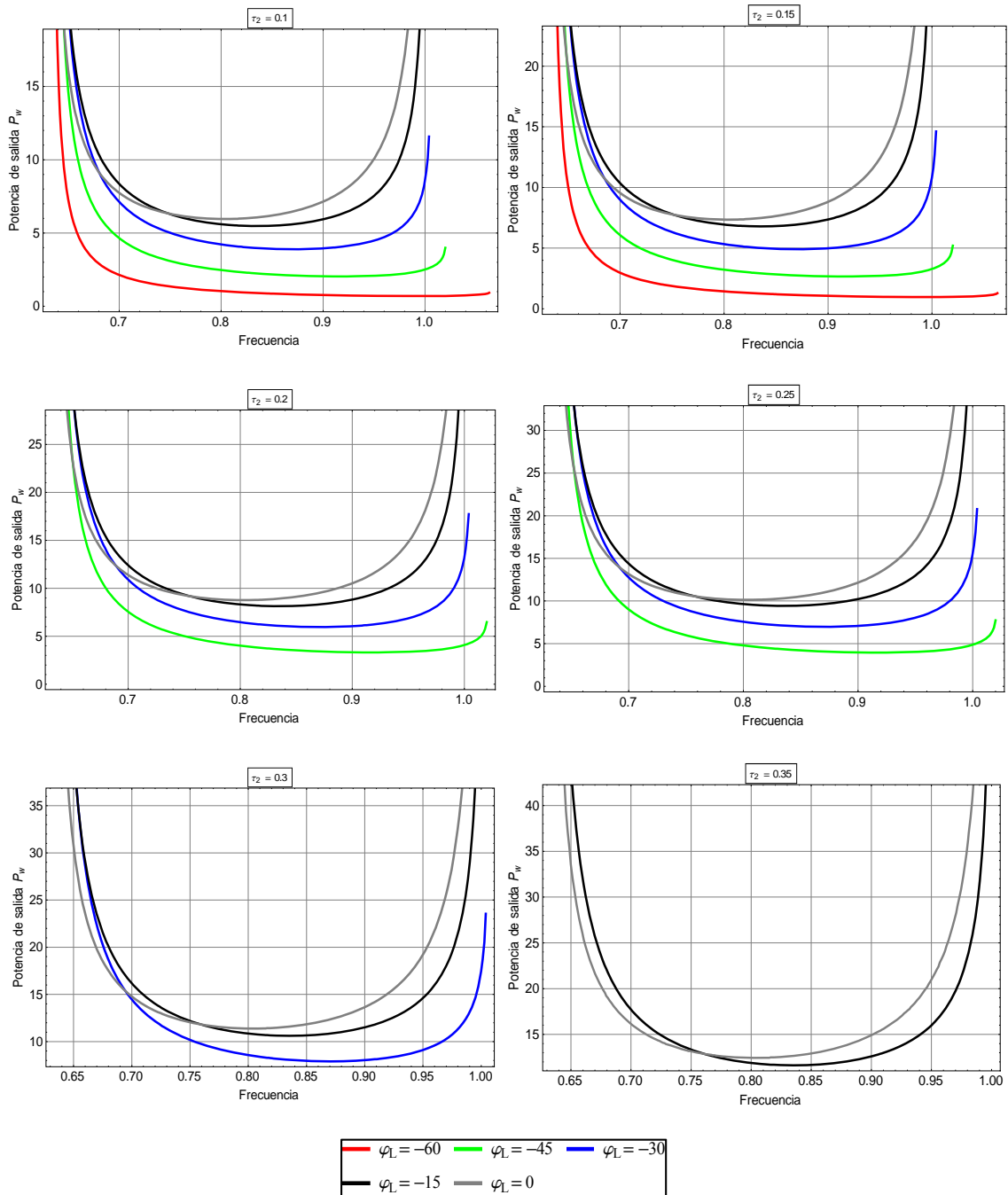


Figura 4-73

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

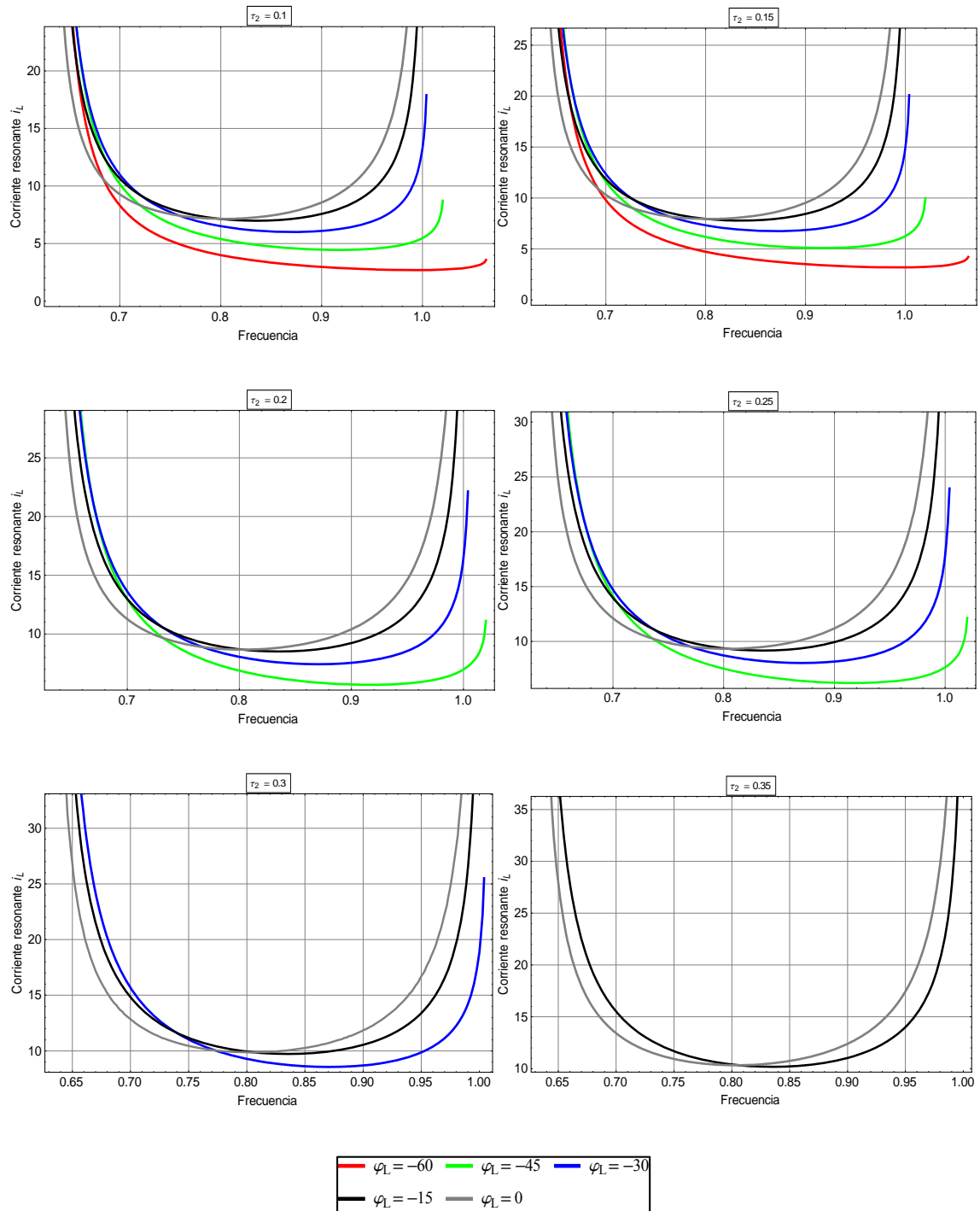


Figura 4-74

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

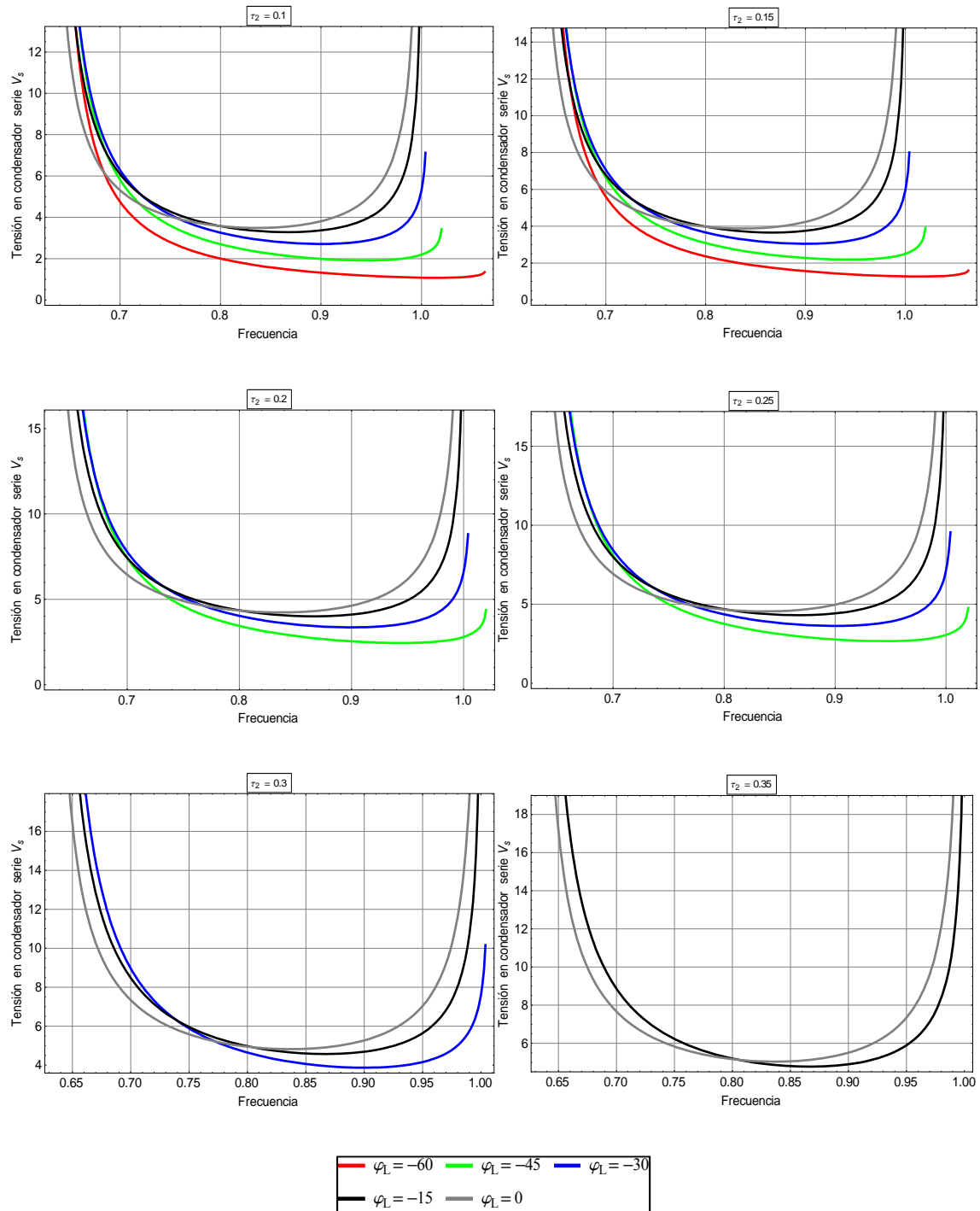


Figura 4-75

Tensión en condesador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

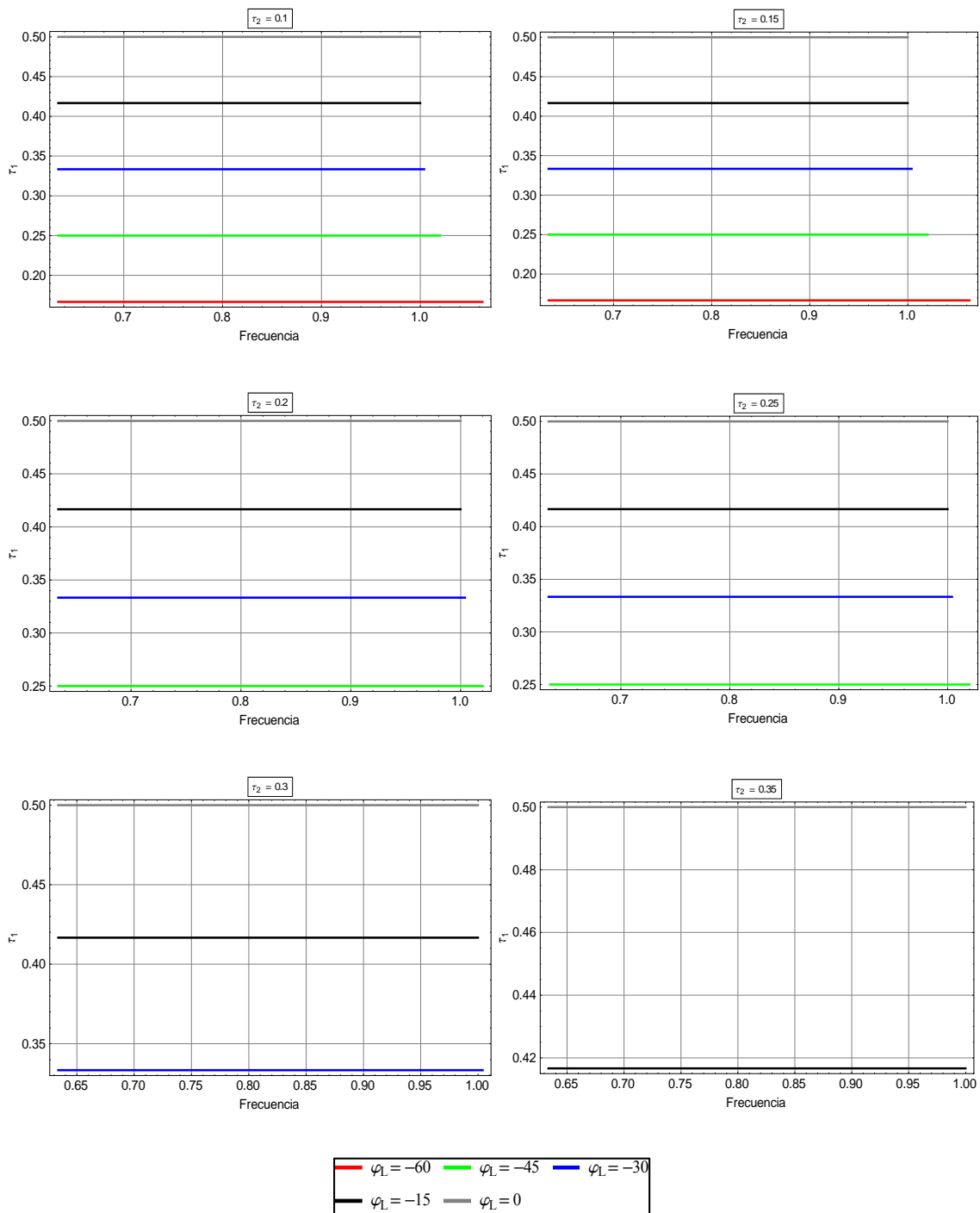


Figura 4-76

Ciclo de trabajo para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

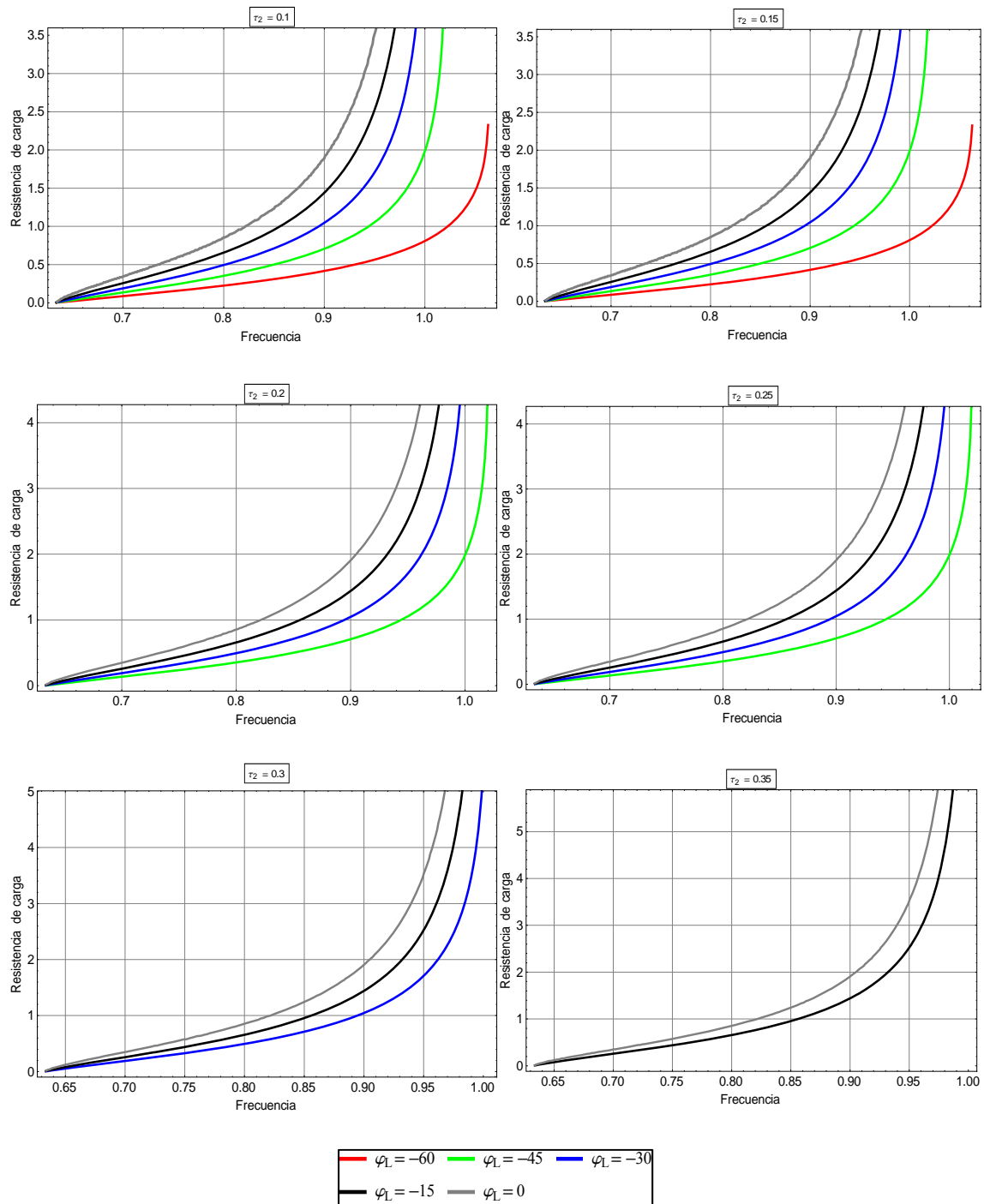


Figura 4-77

Resistencia de carga para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

4.10.2 Modelo con señal asimétrica en zona óptima

4.10.2.1 Curvas de isorresistencia

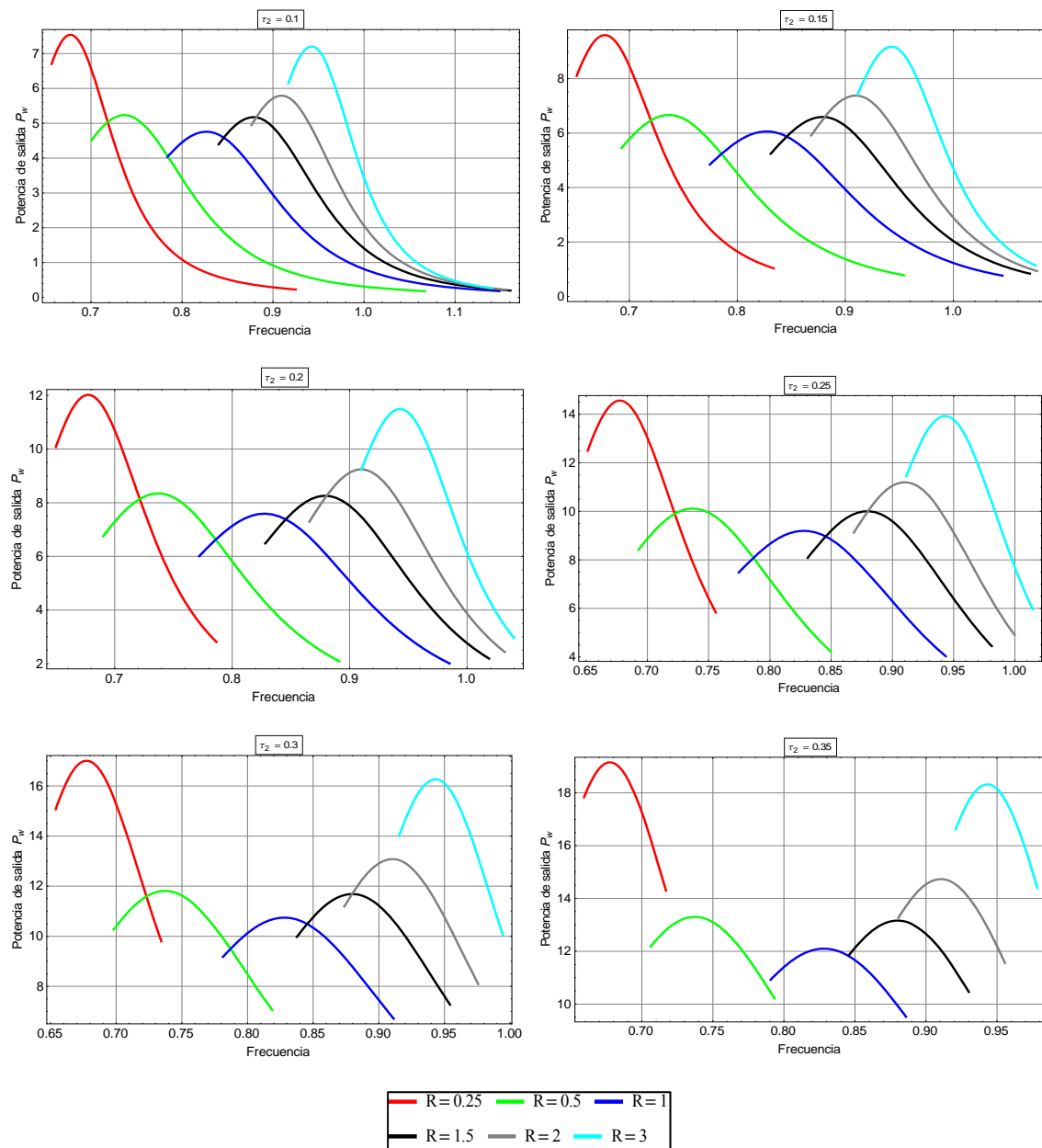


Figura 4-78

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

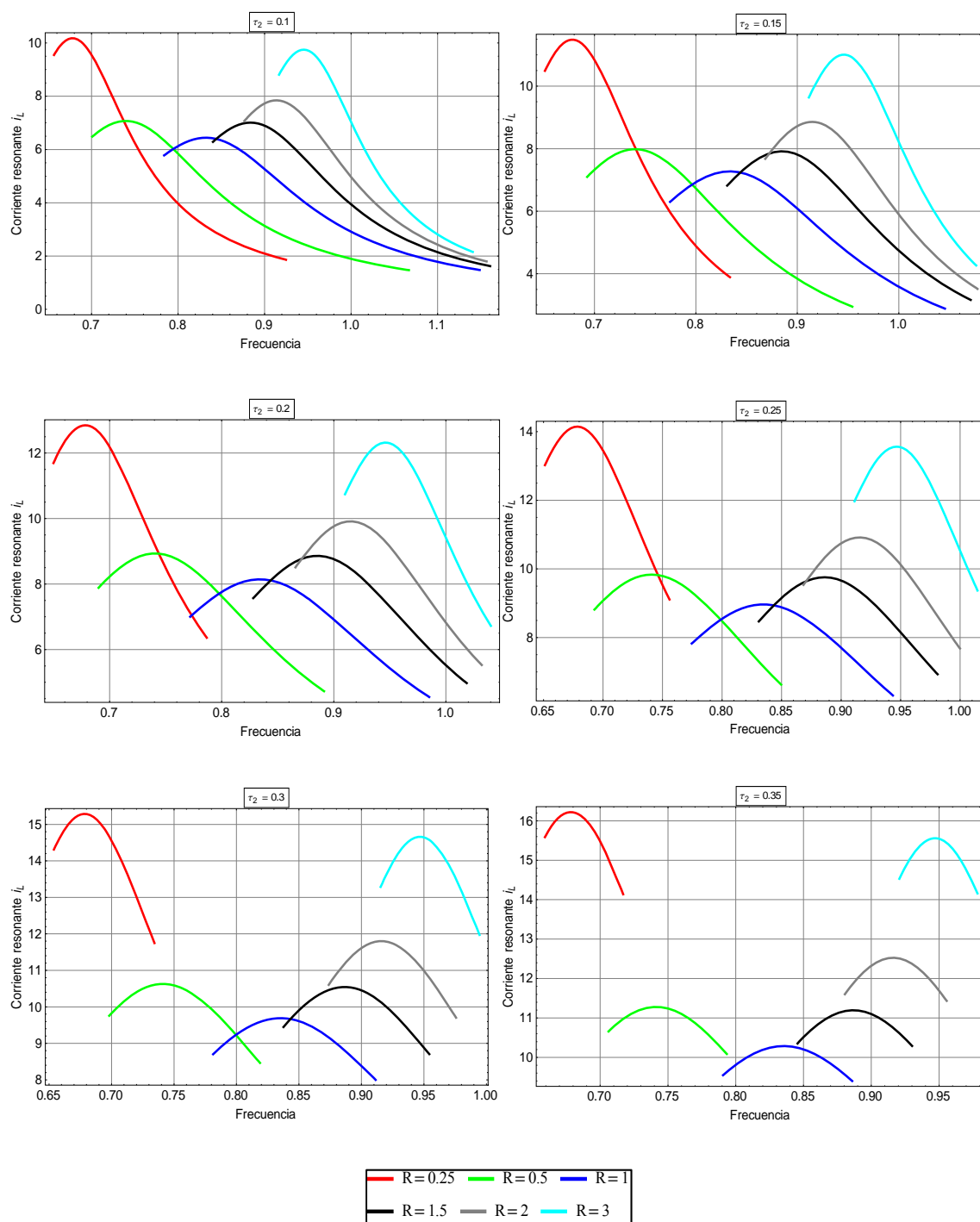


Figura 4-79

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

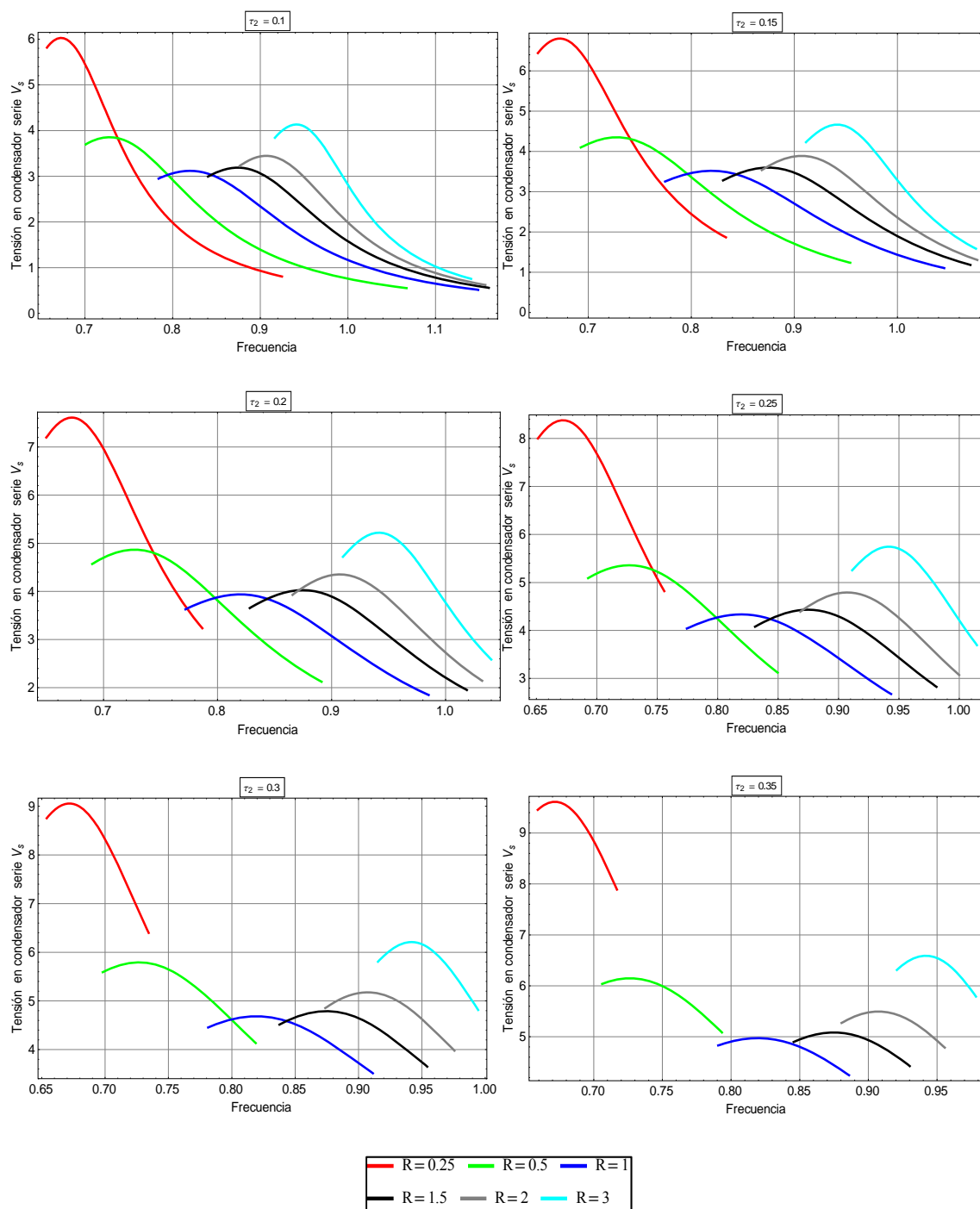


Figura 4-80

Tensión en condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

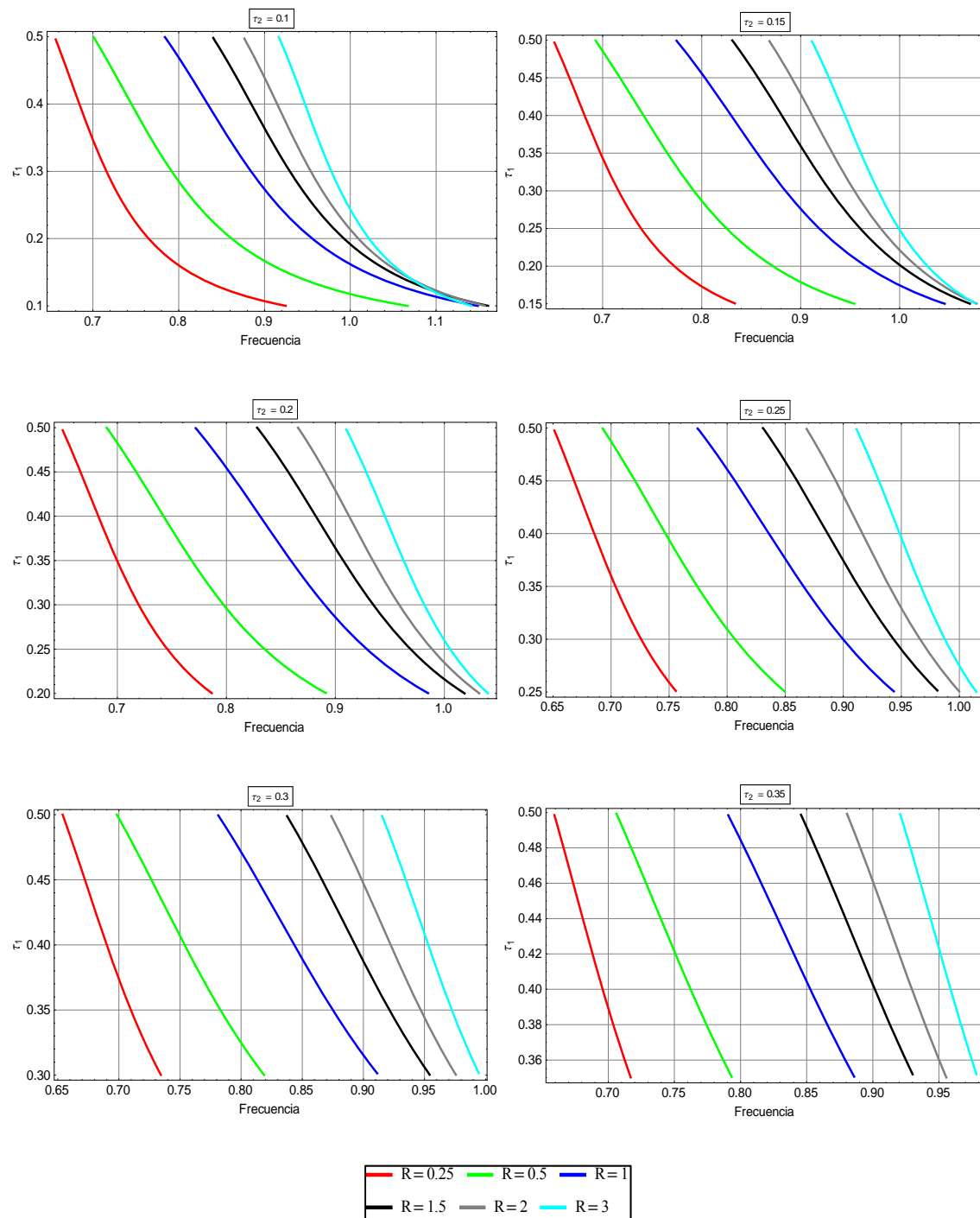


Figura 4-81

Ciclo de trabajo principal para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

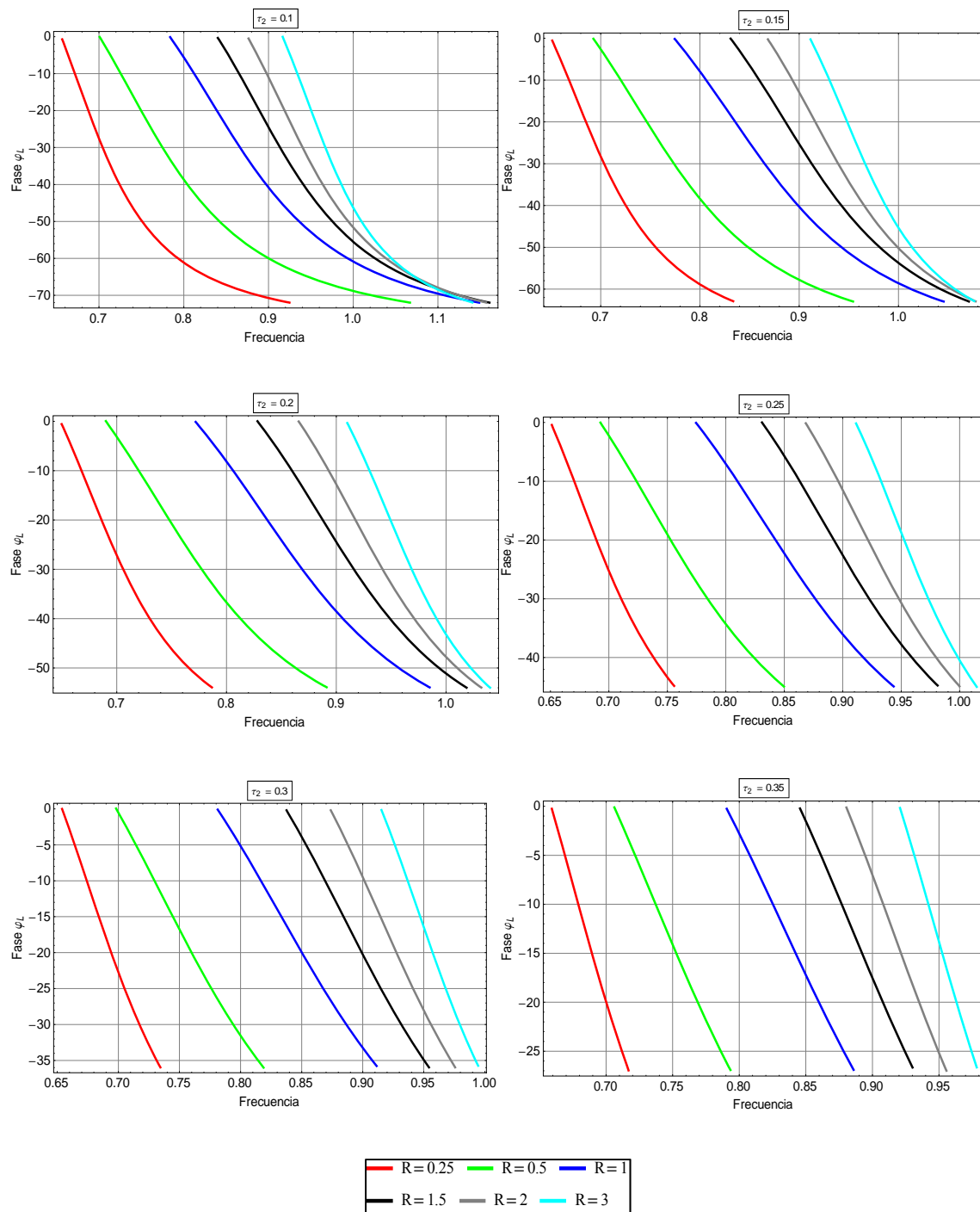


Figura 4-82

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función de la resistencia de carga

4.10.2.2 Curvas de isotensión

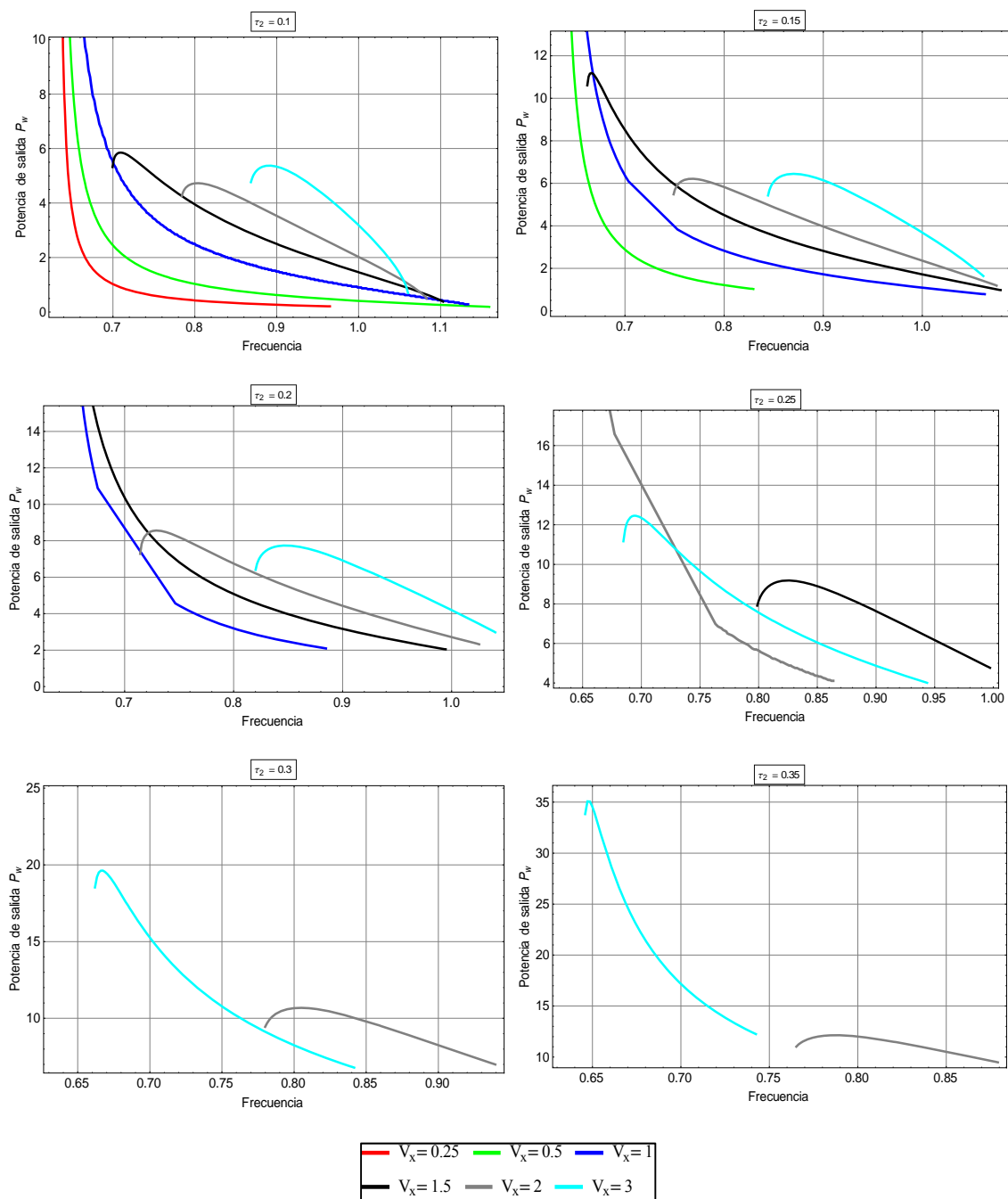


Figura 4-83

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

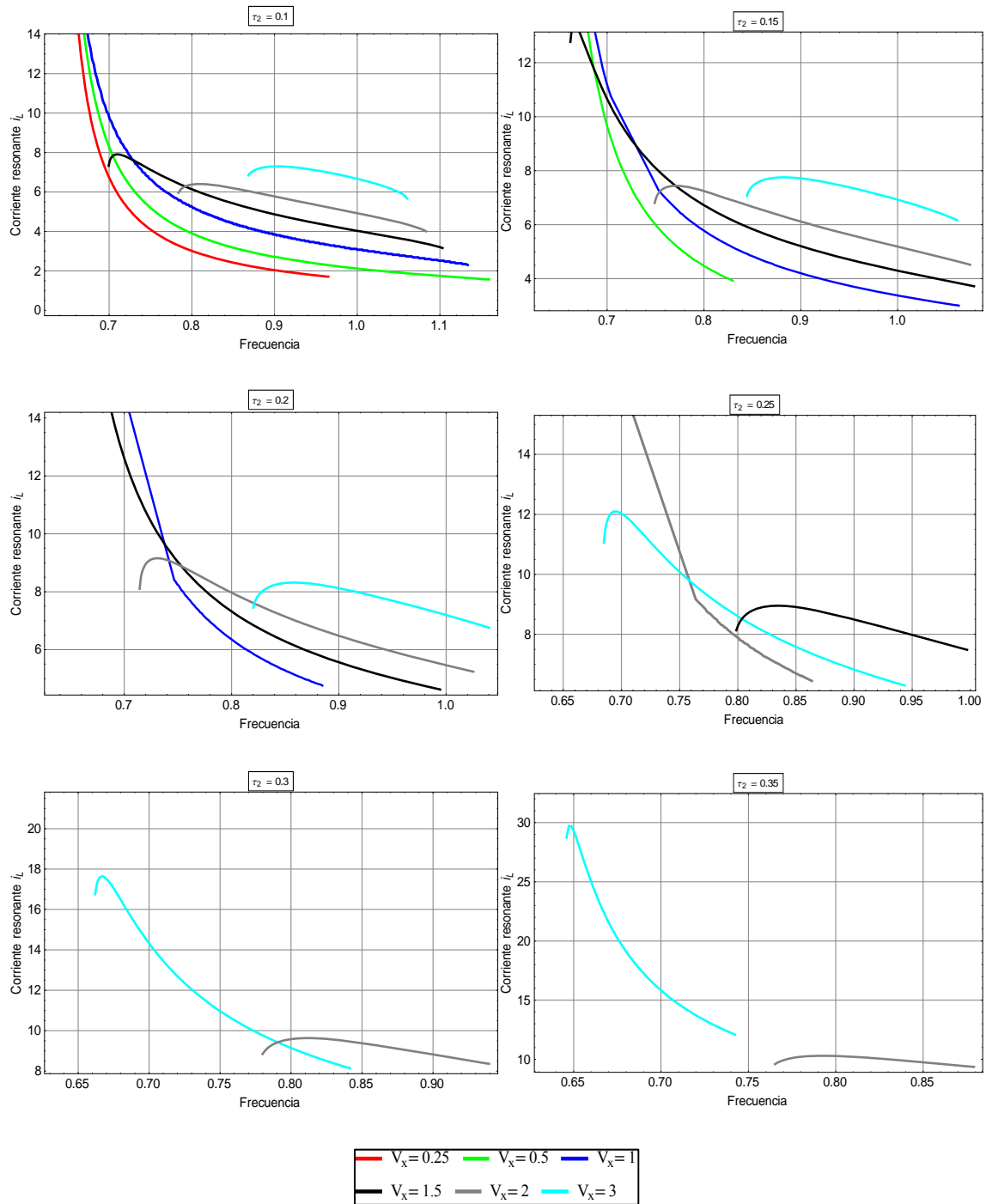


Figura 4-84

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

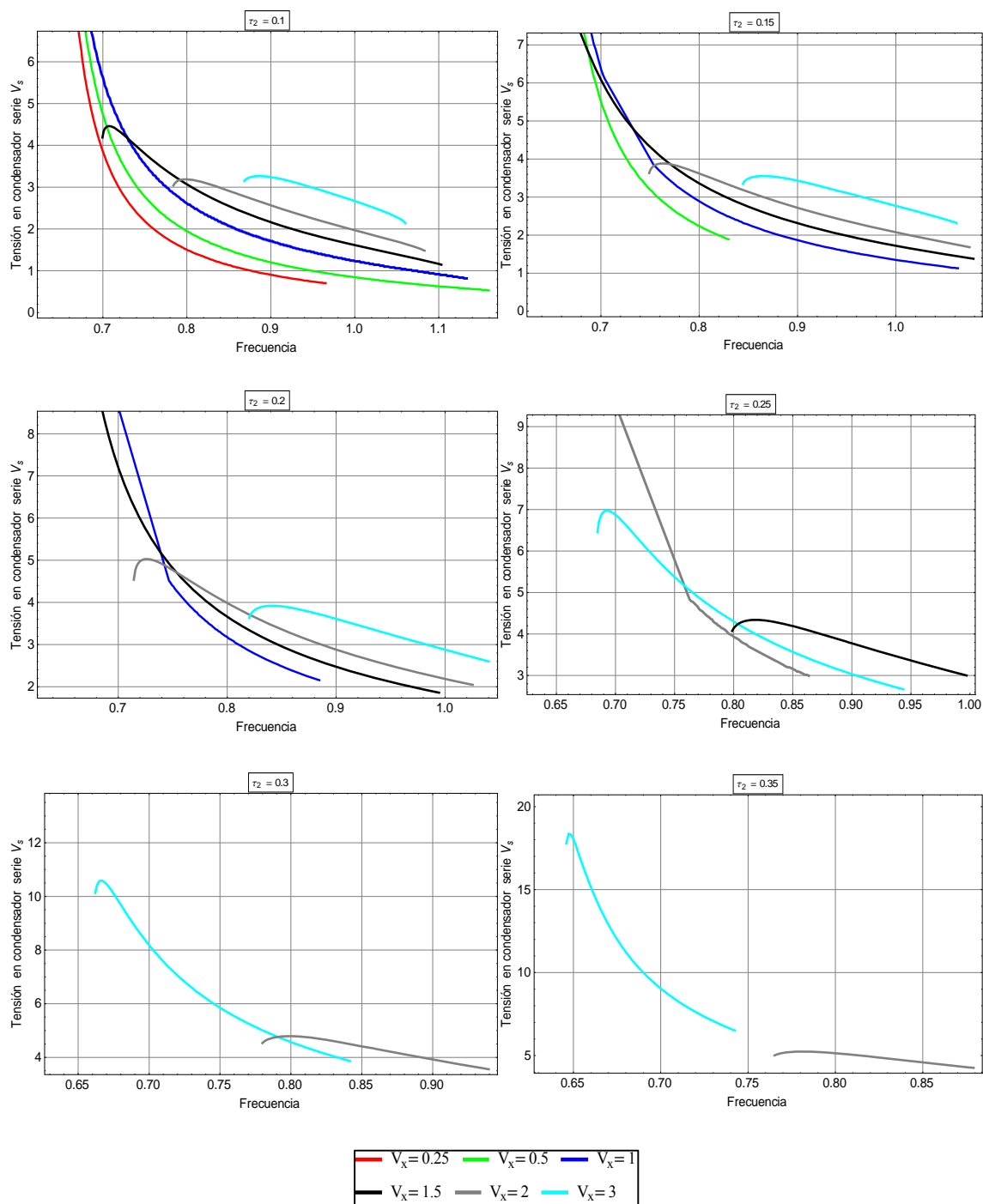


Figura 4-85

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

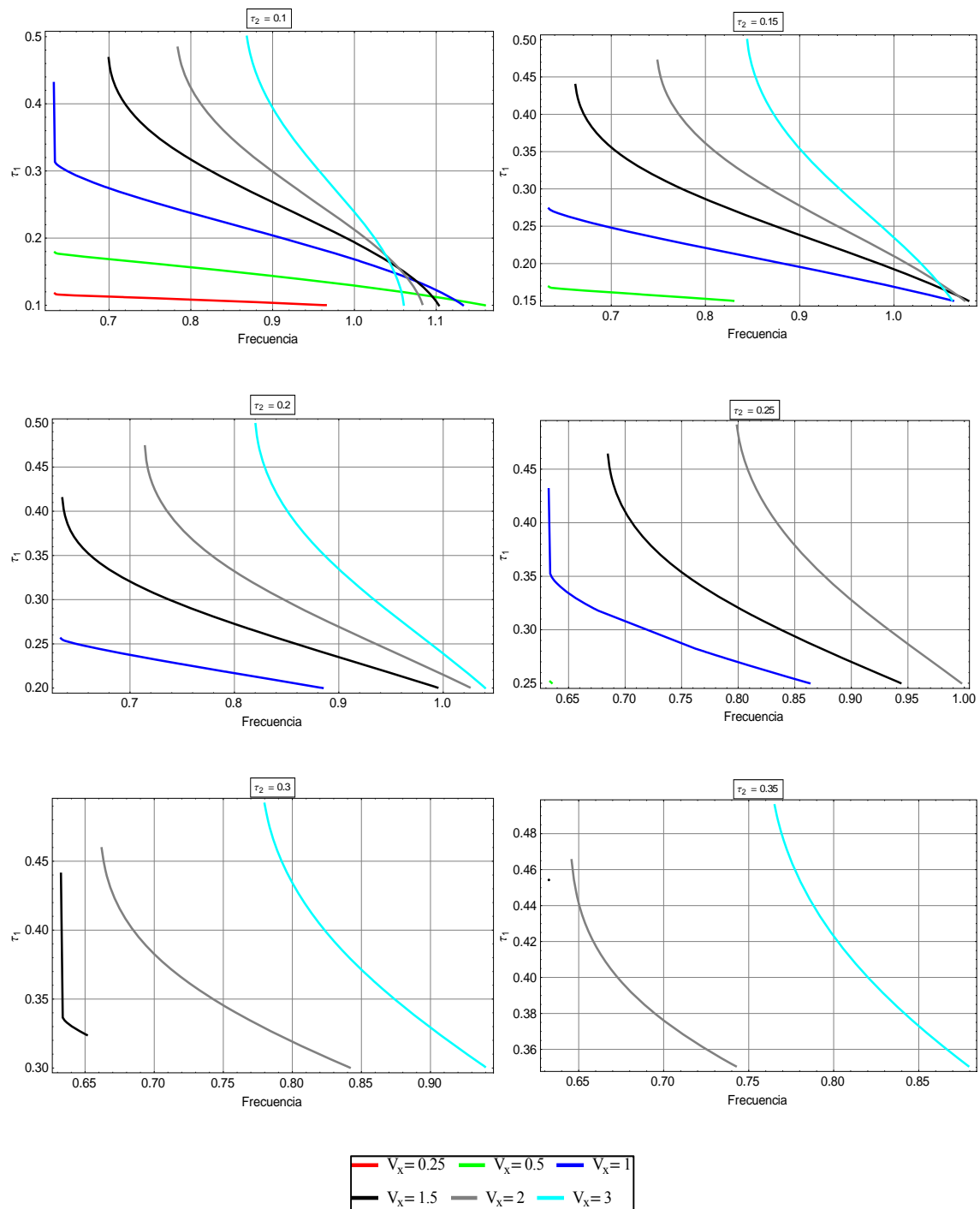


Figura 4-86

Ciclo de trabajo principal para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

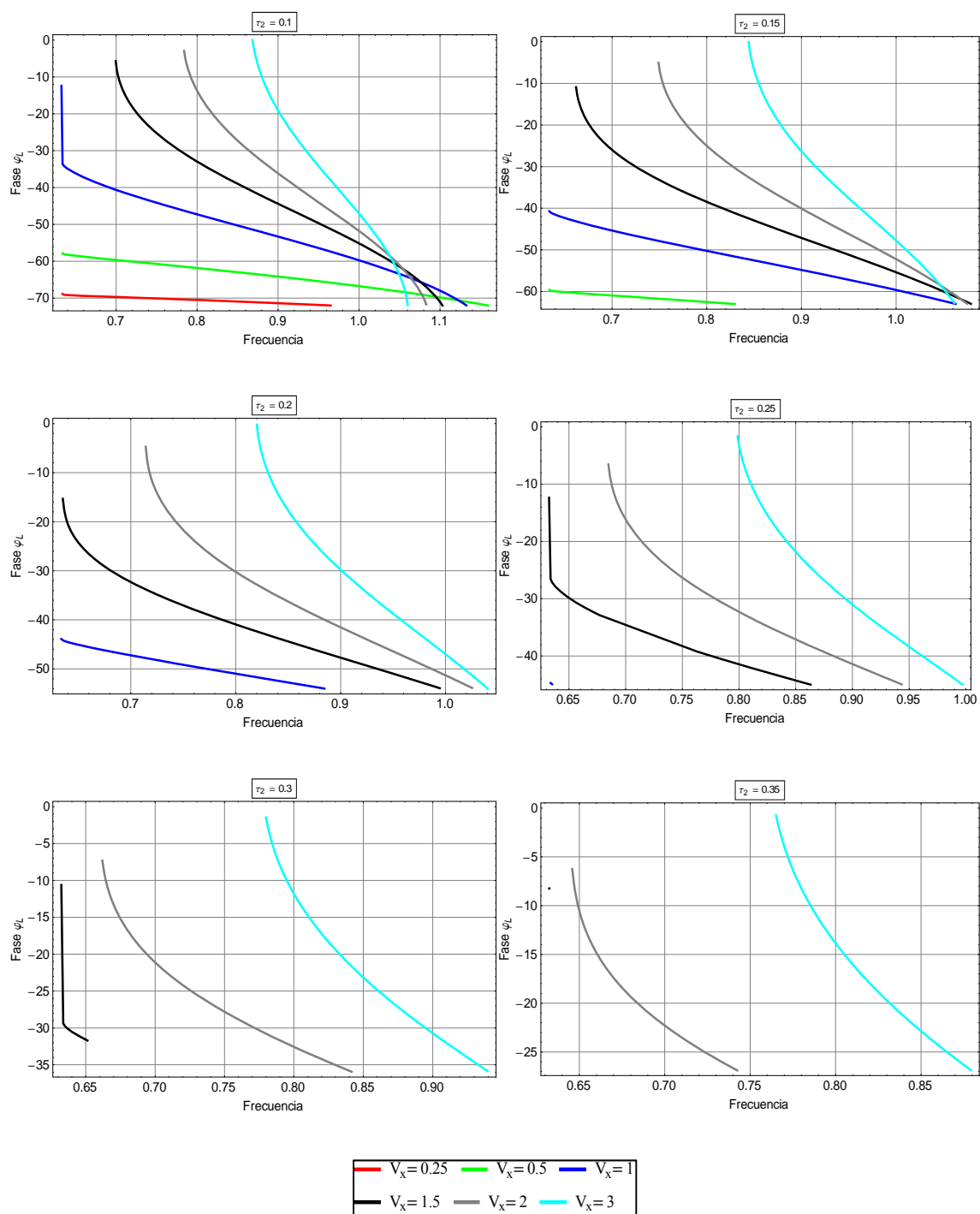


Figura 4-87

Ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

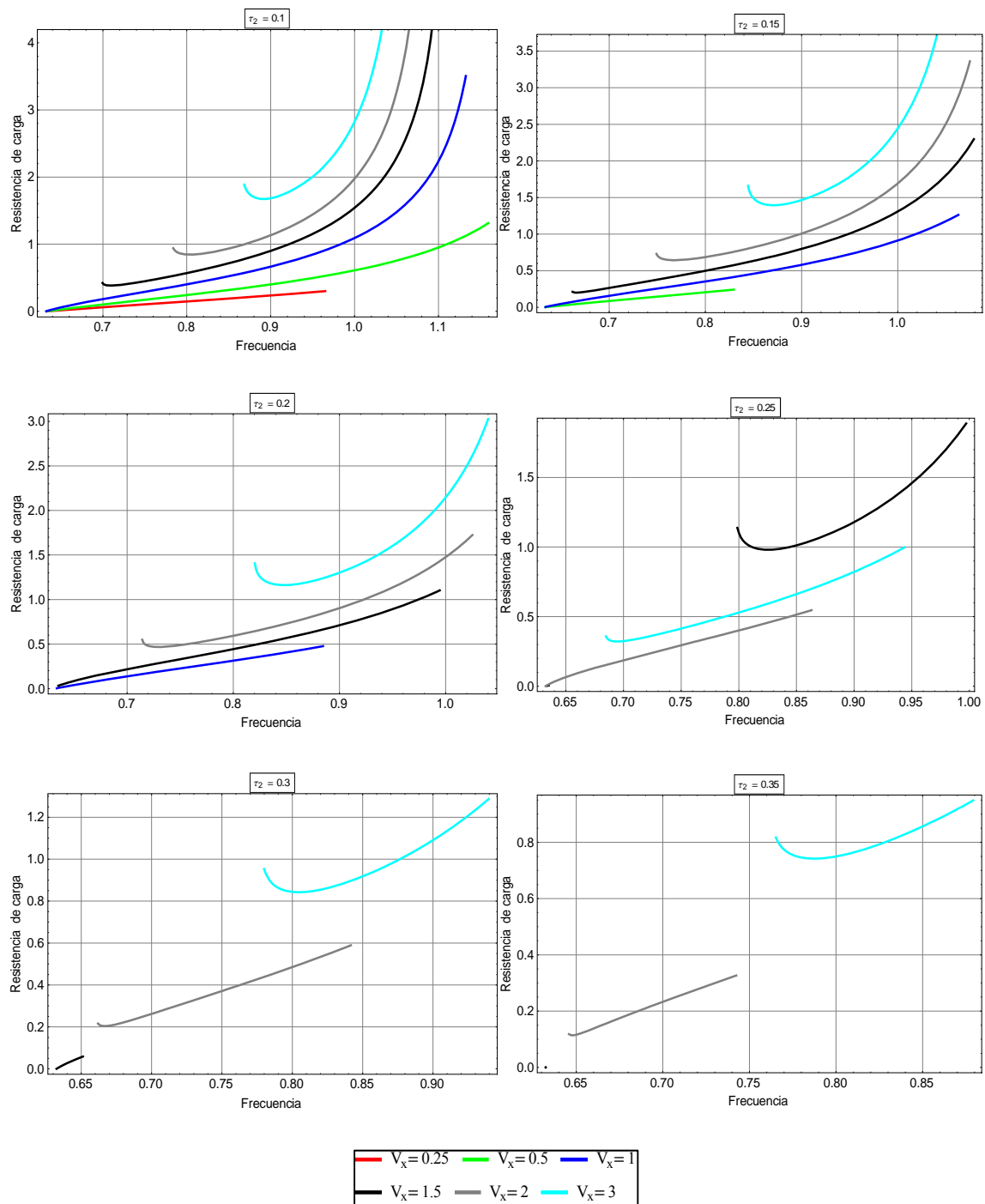


Figura 4-88

Resistencia de carga para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función la tensión de salida

4.10.2.3 Curvas de isoángulo

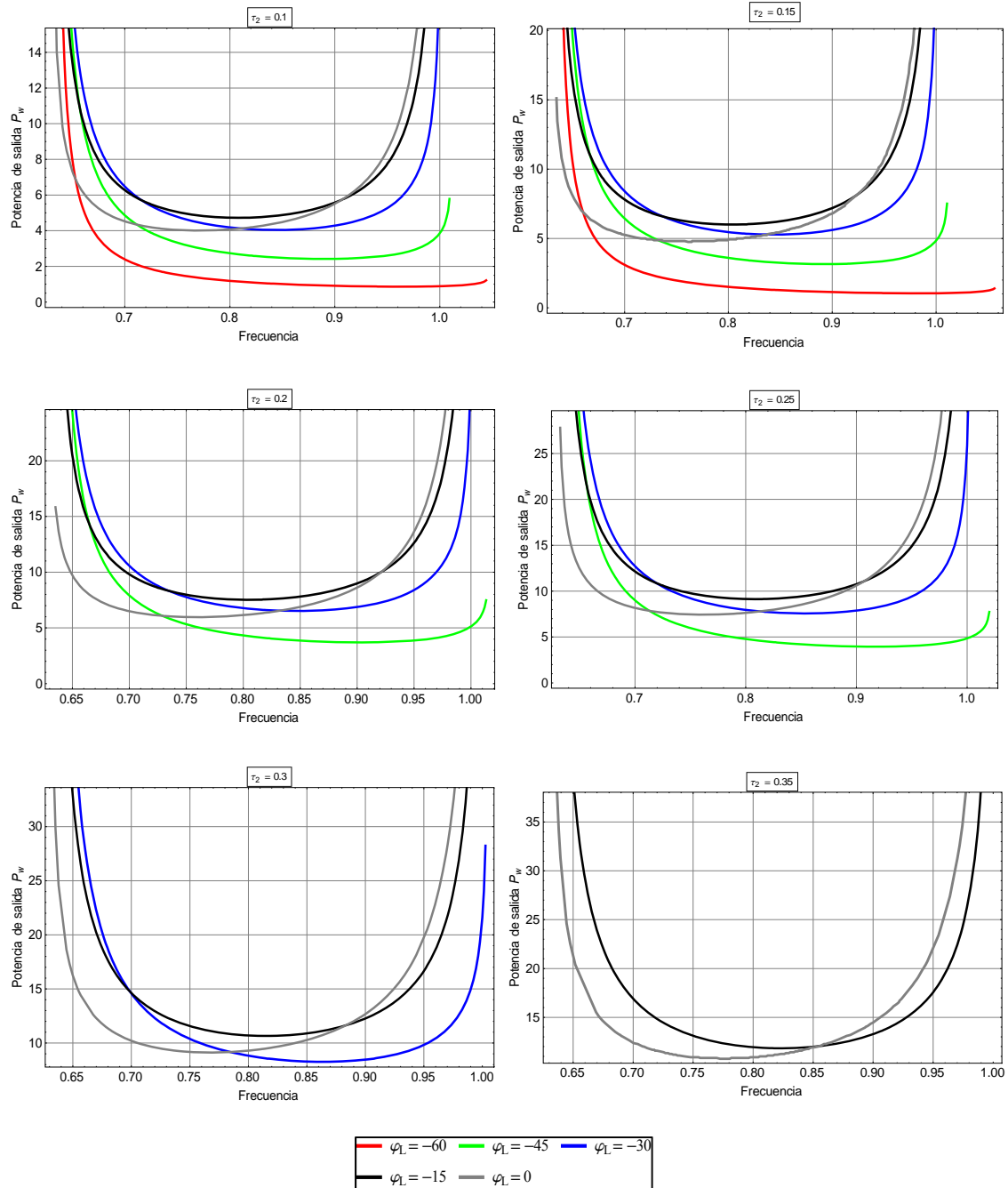


Figura 4-89

Potencia de salida para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

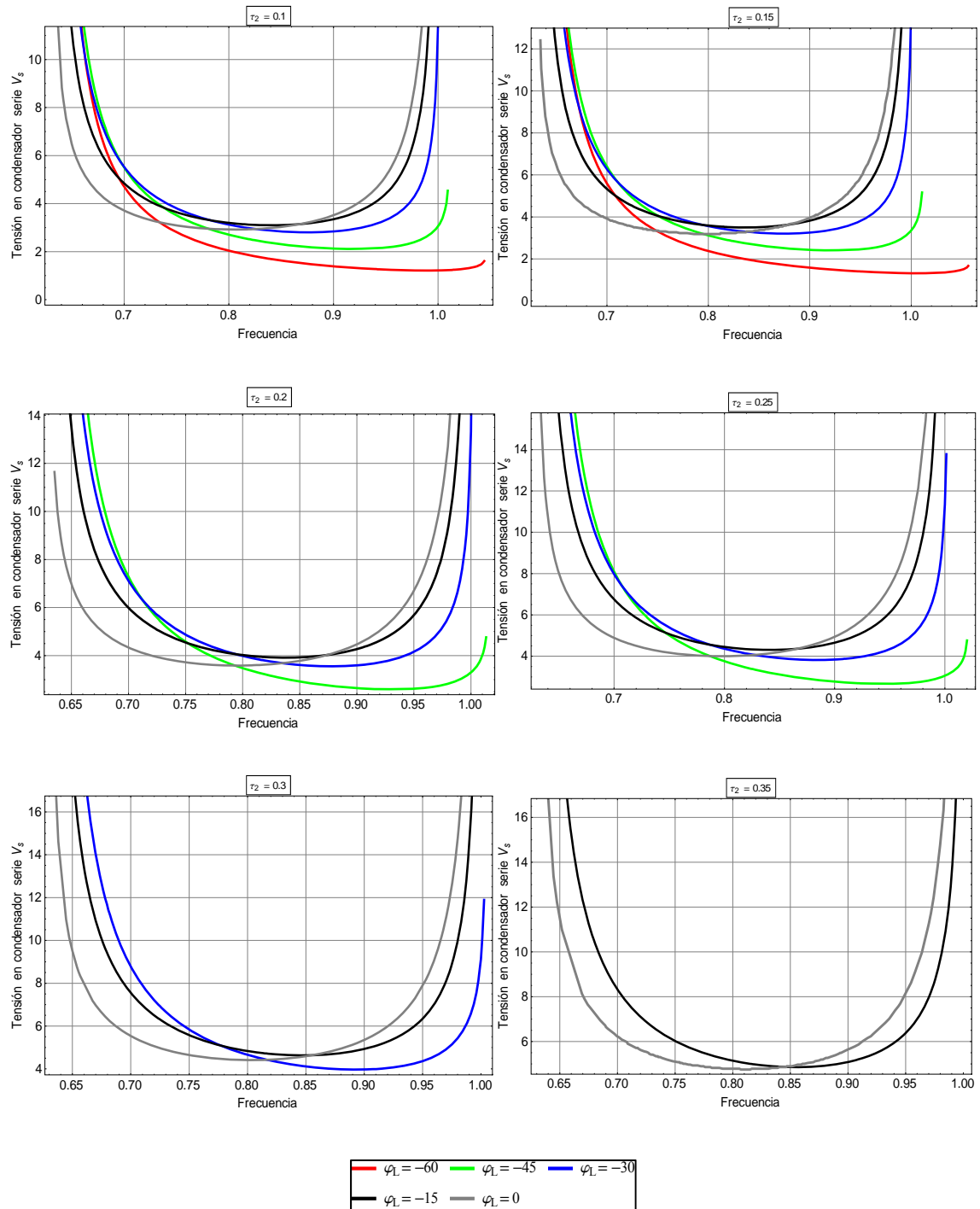


Figura 4-90

Tensión en el condensador serie para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

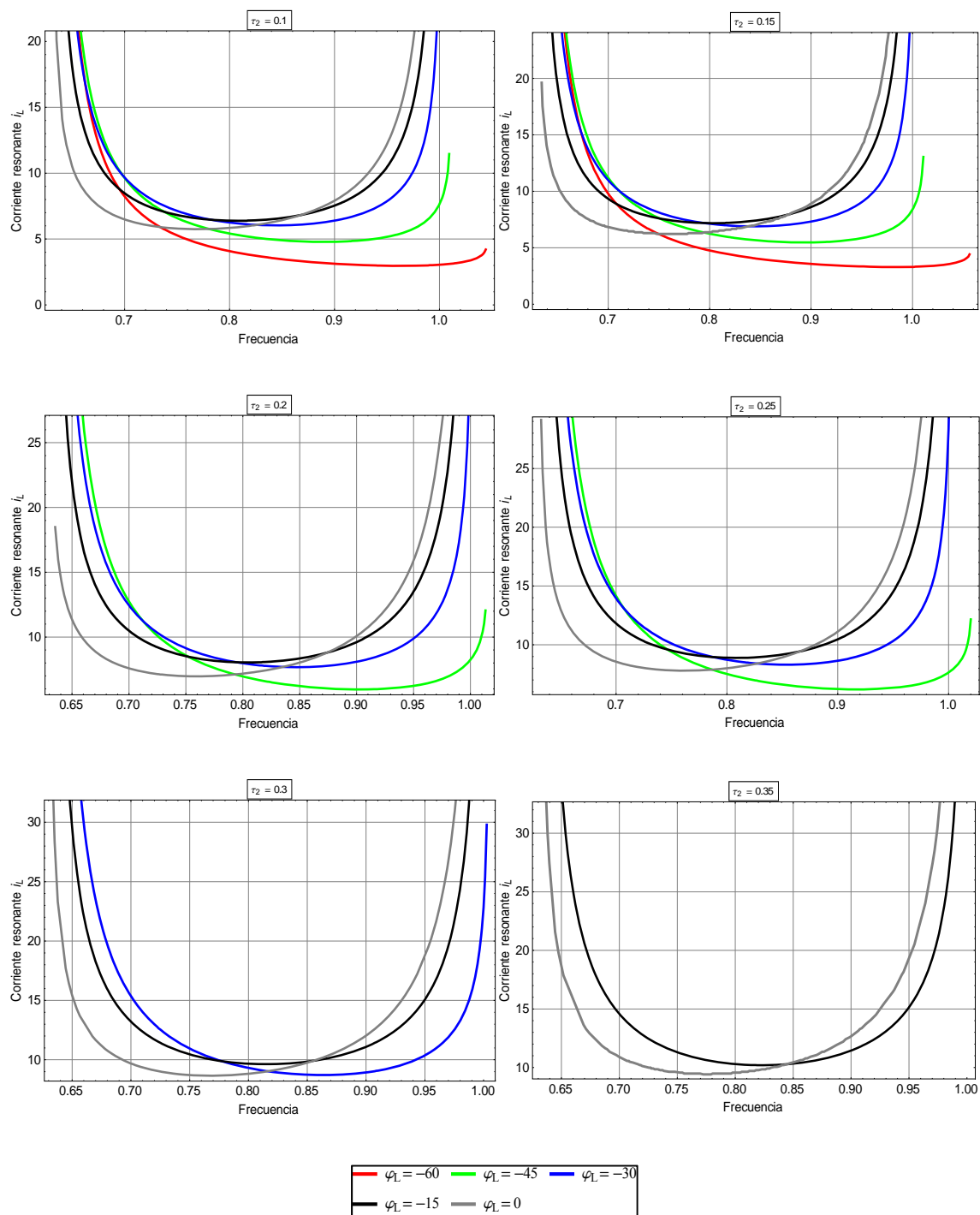


Figura 4-91

Corriente resonante para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

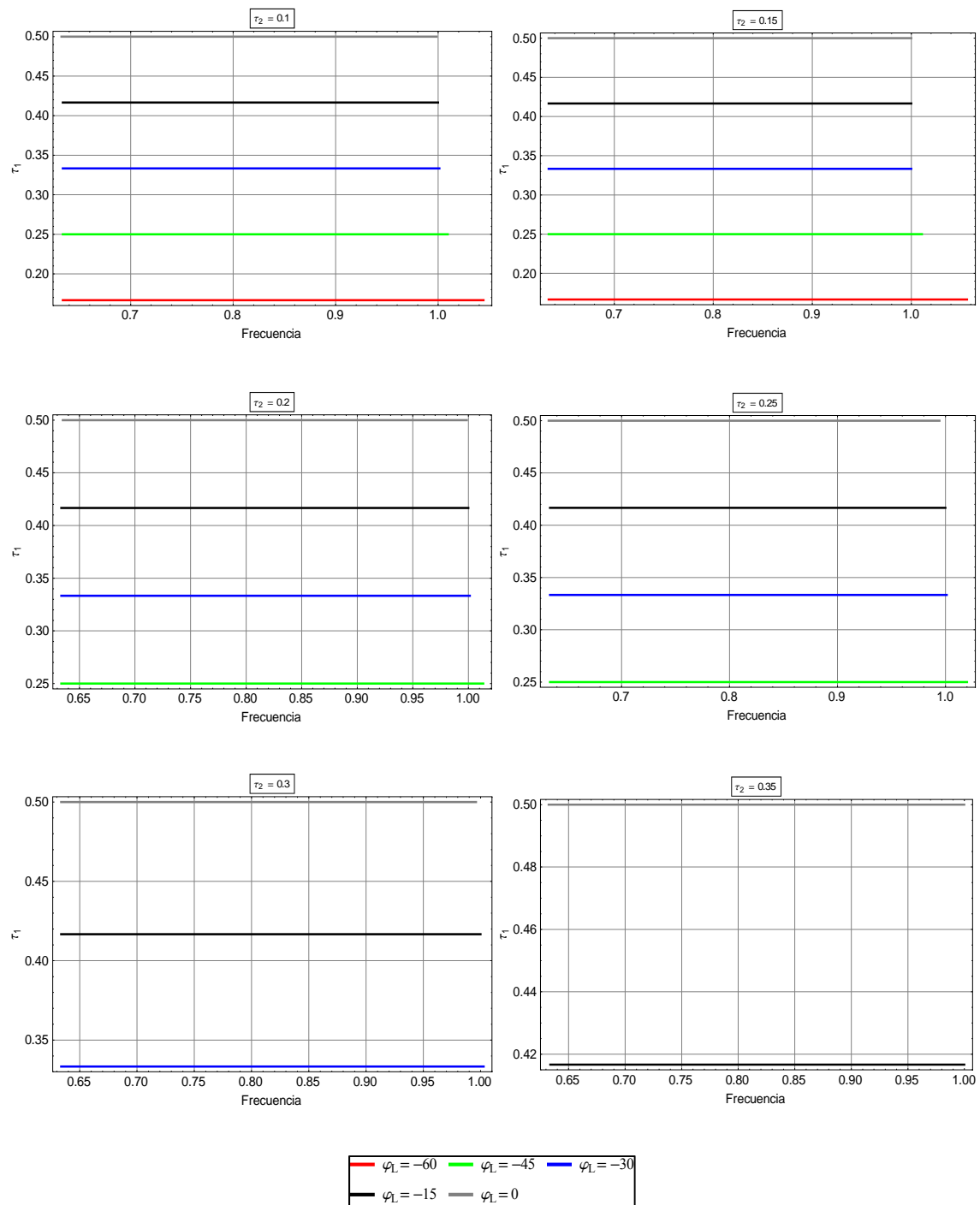


Figura 4-92

Ciclo de trabajo principal para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

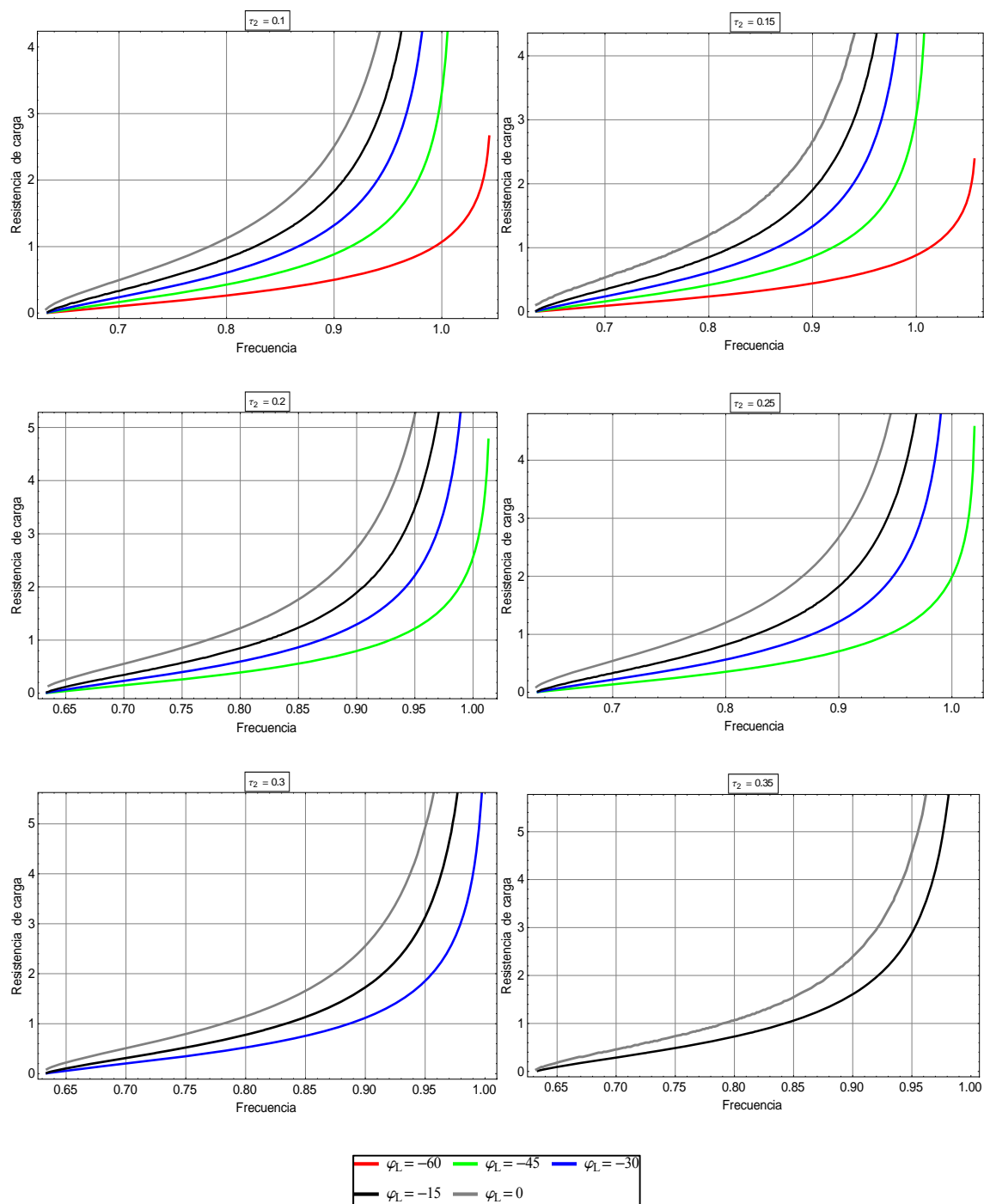


Figura 4-93

Resistencia de carga para diferentes ciclos de trabajo auxiliar en función del ángulo de fase entre la corriente resonante y la tensión de entrada

4.10.3 Modelo en modo fluoroscopia en zona óptima

4.10.3.1 Curvas de isorresistencia

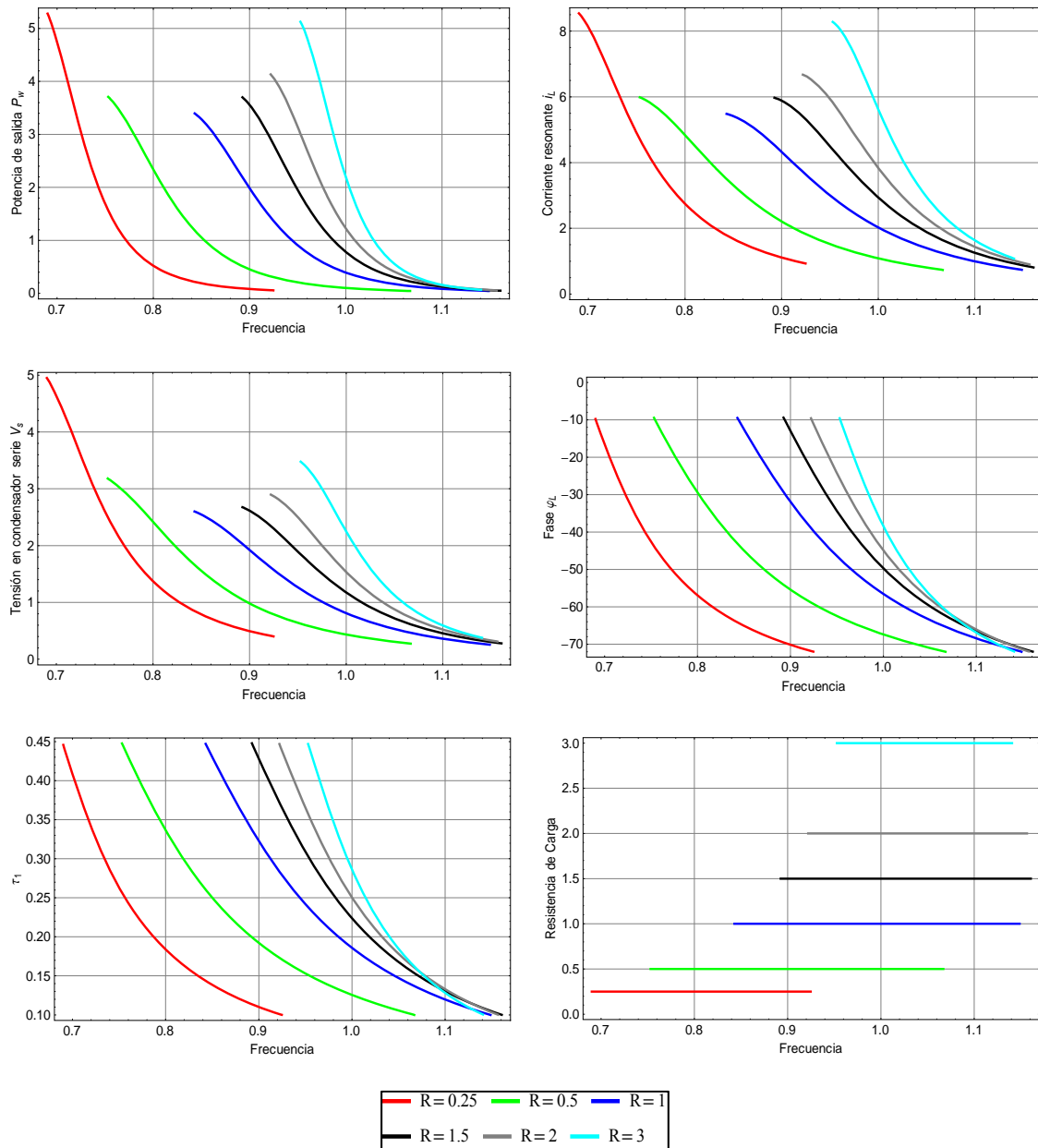


Figura 4-94

Curvas de potencia, corriente resonante, tensión en condensador serie, ángulo de fase, ciclo de trabajo y resistencia de carga para diferentes valores de resistencia de carga

4.10.3.2 Curvas de isotensión

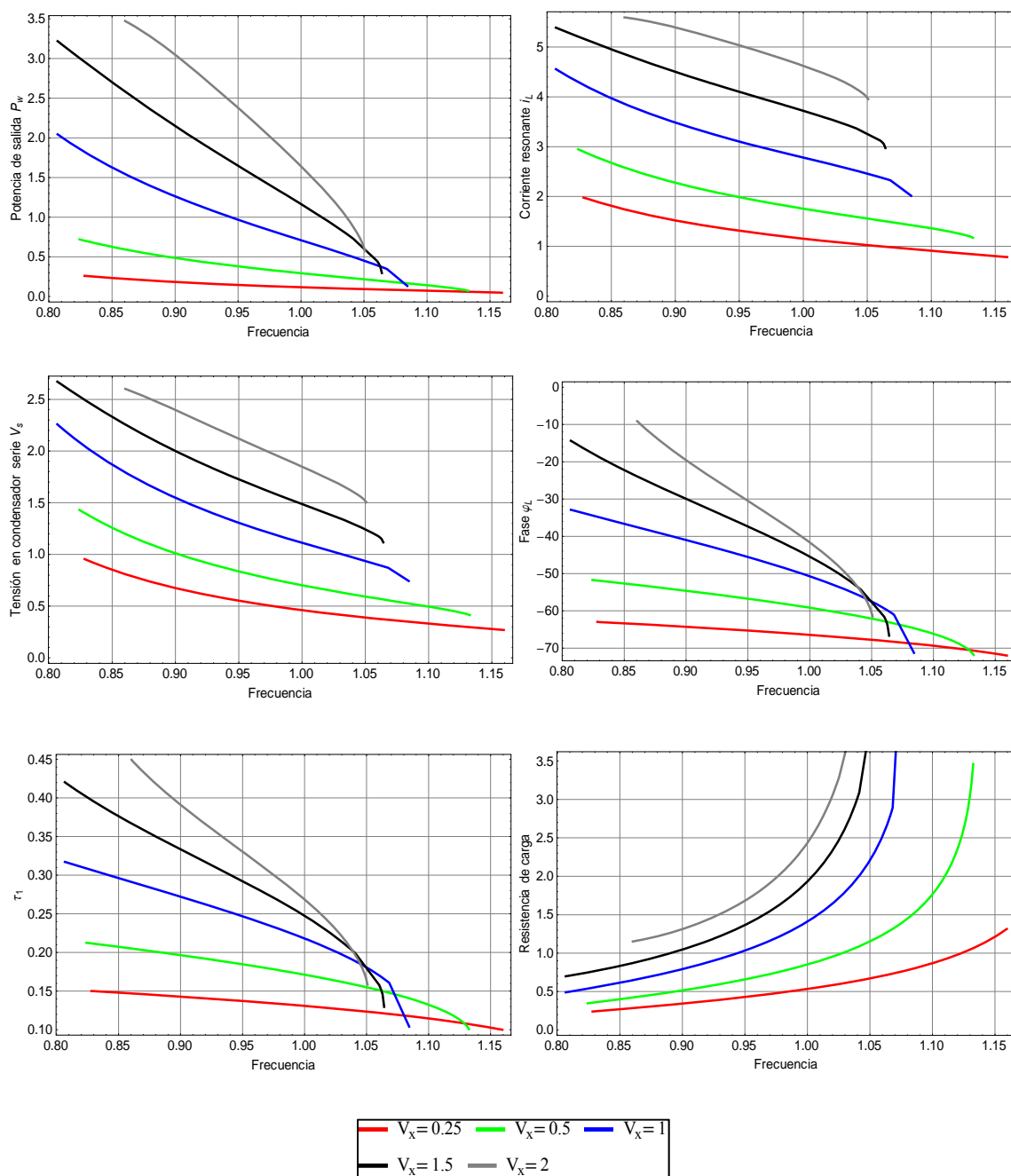


Figura 4-95

Curvas de potencia, corriente resonante, tensión en condensador serie, ángulo de fase, ciclo de trabajo y resistencia de carga para diferentes valores de tensión de salida

4.10.3.3 Curvas de isopotencia

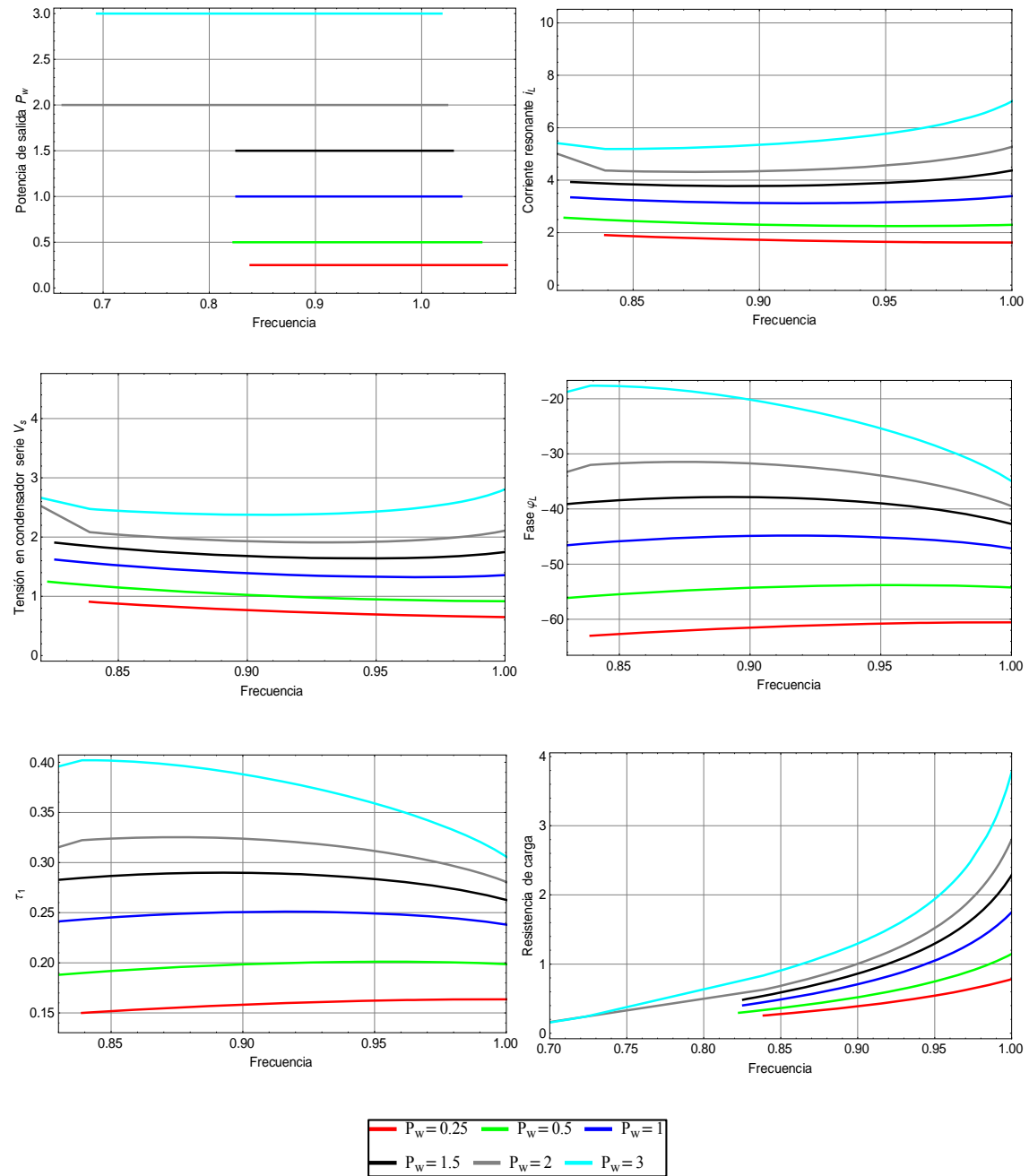


Figura 4-96

Curvas de potencia, corriente resonante, tensión en condensador serie, ángulo de fase, ciclo de trabajo y resistencia de carga para diferentes valores de potencia de salida

4.10.3.4 Curvas de isoángulo

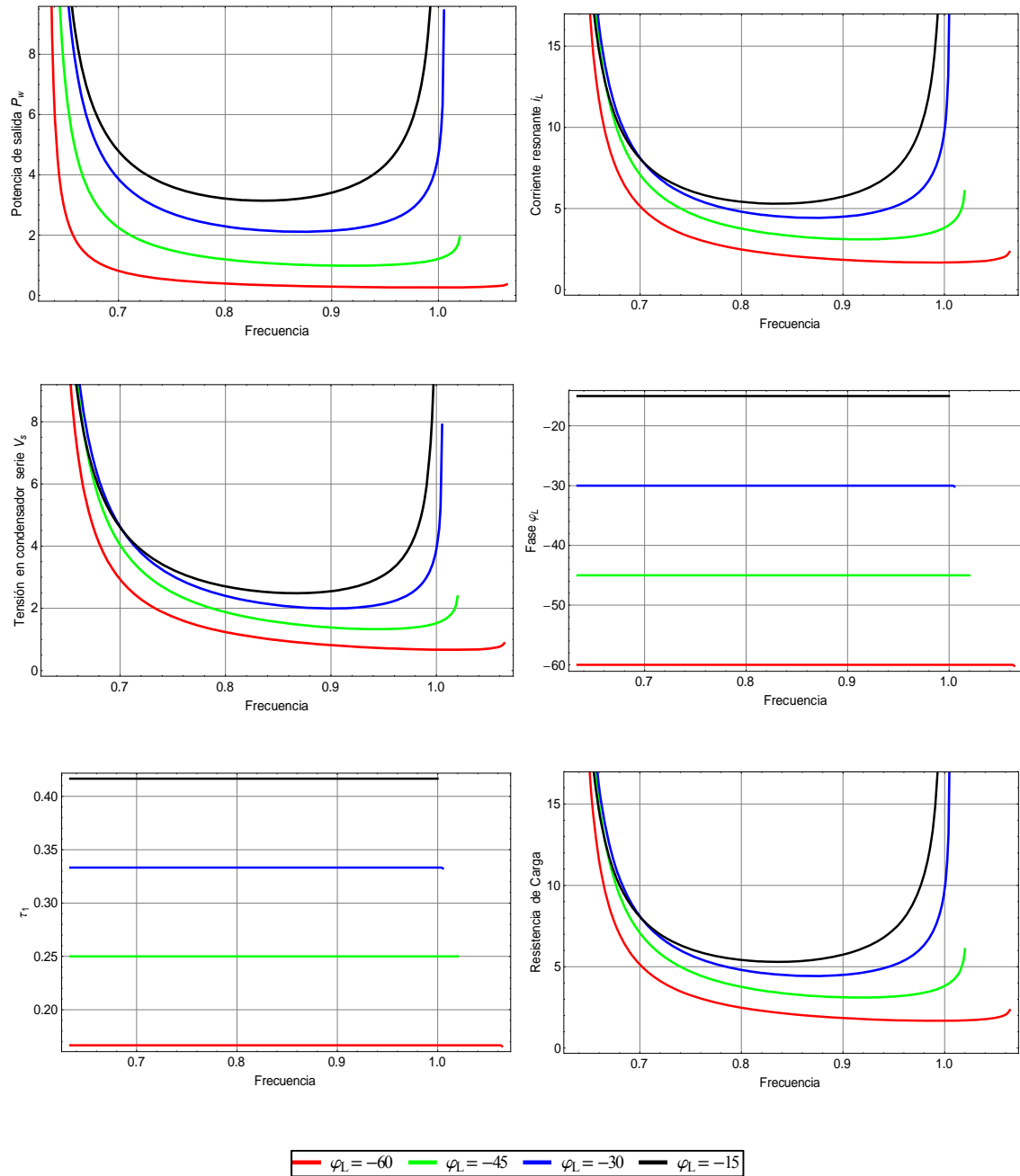


Figura 4-97

Curvas de potencia, corriente resonante, tensión en condensador serie, ángulo de fase, ciclo de trabajo y resistencia de carga para diferentes valores de ángulo de fase

4.11 Conclusiones

En el presente capítulo se ha llegado a la obtención de un modelo en régimen permanente, representado por 5 ecuaciones sencillas que describen el comportamiento de la topología. Tras su obtención, se ha contrastado el resultado con un prototipo de laboratorio a escala 1:10 con varios puntos de trabajo, obteniendo resultados satisfactorios. Queda constatado así que dicha topología es perfectamente modelizable mediante el modelo matemático expuesto, y se complementa con una serie de representaciones gráficas en las que se muestran características de funcionamiento mediante la combinación de diversos parámetros del sistema (tensión de salida, potencia de salida, ciclo de trabajo principal, ángulo de fase, etc.), incluyendo aquellas combinaciones que nos dan un punto de funcionamiento en zona óptima. En alguna de estas representaciones se observan discontinuidades o puntos con un comportamiento alejado del resto sin duda derivados del proceso de cálculo numérico y la forma de calcular las raíces de las ecuaciones.

En el siguiente capítulo se profundizará en la obtención de un modelo en pequeña señal que permitirá conocer la respuesta del sistema ante pequeñas variaciones en los parámetros de entrada de la topología multinivel.

4.12 Bibliografía

- [1] *Martin-Ramos, J.A.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Nuño, F.; Martinez, J.A.*, “Power Supply for a High-Voltage Application”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.23, nº4, pp.1608-1619, July 2008.
- [2] *Witulski, A.F.; Hernandez, A.F.; Erickson, R.W.*, “Small signal equivalent circuit modeling of resonant converters”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.6, nº1, pp.11-27, Jan 1991.
- [3] *Martin-Ramos, J.A.; Villegas Saiz, P.J.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Martinez, J.A.*, “Optimal Control of a High-Voltage Power Supply Based on the PRC-LCC Topology With a Capacitor as Output Filter”, *Industry Applications, IEEE Transactions*, vol. 49, nº5, pp.2323-2329, Sept.-Oct. 2013.
- [4] *Zeng, R.; Xu, L.; Yao, L.; Williams, B.W.*, “Design and Operation of a Hybrid Modular Multilevel Converter”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.30, nº3, pp.1137-1146, March 2015.
- [5] *V. García, M. Rico, J. Sebastián, M. Hernando, and J. Uceda*, “An optimized DC–DC converter topology for high voltage pulse loads applications,” in *Proc. IEEE PESC*, pp. 1413–1421, 1994.
- [6] *Tsai, M.-C.*, “Analysis and implementation of a full-bridge constant-frequency LCC-type parallel resonant converter”, *Electric Power Applications*, vol.141, nº3, pp.121-128, May 1994.
- [7] *Manli Hu; Froehleke, N.; Peters, W.; Boecker, J.*, “Multi-objective optimization of LCC resonant converter applied in VLF HV generator”, *IECON*, pp.1456-1461, Nov. 2011.
- [8] *Juan A. Martín*. “Aportación al diseño de convertidores continua-continua para alta tensión de salida basados en la topología resonante PRC-LCC”. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 2001.

-
- [9] *Juan A. Martín-Ramos, Juan Díaz, Alberto M. Pernía, Juan Manuel Lopera, Fernando Nuño*, “Dynamic and Steady-State Models for the PRC-LCC Resonant Topology with a Capacitor as Output Filter”, *IEEE Transactions on industrial Electronics*, vol. 54, n°4, Agosto 2007.
- [10] *Martin-Ramos, J.A.; Diaz, J.; Nuño, F.; Villegas, P.J.; Lopez-Hernandez, A.; Gutierrez-Delgado, J.F.*, “A Polynomial Model to Calculate Steady-State Set-Point in the PRC-LCC topology with a Capacitor as Output Filter”, *Industry Applications, IEEE Transactions*, vol.PP, n°99, pp.1, Octubre 2014.

SOLUCIÓN EN PEQUEÑA SEÑAL DE LA TOPOLOGÍA MULTINIVEL

Tras la obtención de modelos de gran señal y régimen permanente, en este capítulo abordamos el desarrollo de un modelo en pequeña señal, que implica la obtención de un modelo linealizado en torno a un punto de equilibrio. Este modelo resulta muy útil para el diseño de la regulación del convertidor, el cual ofrece una gran cantidad de opciones de control mediante el juego de la frecuencia y los dos ciclos de trabajo de los inversores.

5 Solución en pequeña señal de la topología multinivel

5.1 Generalidades

En los capítulos anteriores se ha constatado que tanto las características estáticas de la topología, como su comportamiento dinámico de gran señal, dependen de forma no lineal de las variables de control. En consecuencia, es de suponer un comportamiento no lineal del sistema en lazo cerrado [1], independientemente de que el bucle de realimentación sea a su vez lineal o no. Esto implica que el diseño del control del convertidor se haga excesivamente complicado. Para evitar este problema, en general se recurre a la linealización del sistema. Se obtienen de esta forma modelos lineales, que serán únicamente válidos para describir el sistema cuando se produzcan en él pequeñas desviaciones, denominadas perturbaciones, respecto a un punto de funcionamiento de equilibrio [2-7]. Por tanto, el modelo linealizado no es otra cosa que una aproximación al comportamiento dinámico real del sistema en un punto de funcionamiento estático. Esta aproximación sin embargo, sólo tiene validez en un entorno de dicho punto de funcionamiento aunque por otro lado se obtiene mucha mayor sencillez de análisis.

Los modelos linealizados o de pequeña señal, proporcionan una valiosa ayuda en tareas de análisis y diseño [8-9]. La estabilidad permite conocer si un sistema retorna al punto de equilibrio después de pequeñas perturbaciones en los parámetros de entrada, mientras que si es inestable el sistema se volverá inestable sin acciones de control adicionales.

En el presente capítulo se aborda su obtención para la topología que se estudia.

5.2 Linealización

El punto de partida para proceder a la linealización de un sistema es partir de una solución en régimen permanente de funcionamiento [10-11].

Supóngase un convertidor conmutado modelado según el método de promediado generalizado en el espacio de estados. En general, el modelo dinámico de gran señal es no lineal, pudiendo expresarse mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Dichas ecuaciones diferenciales vendrán definidas en función de las variables de estado (x_1, x_2, \dots, x_n) y los parámetros de control (w_1, w_2, \dots, w_p). Como ya se ha explicado en el capítulo 2, es posible formular genéricamente el sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t) \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t)\end{aligned}\tag{5-1}$$

Expresando los índices de cambio instantáneo de cada una de las n variables de estado como función de los valores instantáneos de las propias variables de estado, de las entradas y del tiempo. Como en la definición del modelo hay involucradas n variables de estado, se dice que éste es de n -ésimo orden. Cualquier modelo como el representado en (5-1) se completa con la definición de las m variables de observación del circuito, cuya forma genérica se explica en (5-2)

$$\begin{aligned}y_i(t) &= g_i(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t) \\ \forall i \in N / 1 < i < m\end{aligned}\tag{5-2}$$

Si la variable tiempo no aparece explícitamente en el modelo de gran señal, se dice que el sistema es invariante con el tiempo. De esta forma, cualquiera de las ecuaciones individuales del sistema presentado en (5-1) y (5-2) se puede escribir como:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t)\tag{5-3}$$

$$y_i(t) = g_i(x_1(t), \dots, x_n(t), w_1(t), \dots, w_p(t), t)\tag{5-4}$$

Por otra parte, cualquier solución de régimen estático se caracteriza por cumplir la condición:

$$\dot{x}_i(t)\big|_{t_0} = 0 \quad \forall i \in N / 1 < i < n\tag{5-5}$$

Por lo que se puede enunciar la siguiente propiedad de particularización de f_i en un punto de equilibrio:

$$f_i(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), w_1(t_0), \dots, w_p(t_0), t_0) = 0 \quad (5-6)$$

Suponiendo un sistema invariante, y simplificando la notación de manera que tenemos que $\dot{x}_i(t)|_{t_0} = \dot{x}_{i0}$ $x_i(t_0) = x_{i0}$ $w_i(t_0) = w_{i0}$, las dos ecuaciones anteriores también se escriben según:

$$\dot{x}_{i0} = 0 \quad (5-7)$$

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, w_{10}, \dots, w_{p0}) = 0 \quad (5-8)$$

5.3 Desarrollo en serie del modelo en gran señal

Un modelo dinámico no lineal puede aproximarse por un polinomio utilizando para ello el desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio. Si únicamente se consideran los términos de primer orden, tal polinomio resulta un modelo lineal que representa aproximadamente el comportamiento del sistema frente a pequeñas perturbaciones, por lo que se obtiene un modelo linealizado. Evidentemente, los parámetros de este nuevo modelo linealizado dependen de la condición elegida de funcionamiento en régimen permanente, pues los coeficientes de la serie de Taylor dependen de la solución que se seleccionó. Si el modelo dinámico original era independiente del tiempo, y si la solución nominal elegida se corresponde con valores constantes de las variables, el modelo linealizado también será invariante con el tiempo.

El desarrollo de Taylor en su aproximación de primer grado para un sistema dependiente del tiempo, se enuncia según:

$$z(t) - z(t_0) = \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{t_0} \cdot (t - t_0) \quad (5-9)$$

Para linealizar cada una de las ecuaciones diferenciales individuales del sistema no lineal invariante que se define con la ayuda de (5-1) y (5-2), se aplica en (5-9), definiéndose $y(t)$ en cada caso de la forma:

$$z(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_p) \quad (5-10)$$

O lo que es lo mismo:

$$z(t) = \dot{x}_i(t) \quad (5-11)$$

De esta manera, después de haber empleado las igualdades (5-10) y (5-11) según interese, (5-9) queda particularizada para cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema según expresa (5-12):

$$\dot{x}_i(t) - \dot{x}_i(t)|_{t_0} \approx \left. \frac{d[f_i(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_p)]}{dt} \right|_{t_0} \cdot (t - t_0) \quad (5-12)$$

Una vez se elija un punto de funcionamiento correcto, los términos que deben ser calculados en el instante $t=t_0$ son constantes. Esto significa que (5-12) está formulando en realidad una relación lineal entre el tiempo y cada una de las derivadas de las variables de estado respecto al tiempo.

No obstante, el cálculo de la derivada total de cada función f_i respecto al tiempo no resulta sencillo. La complicación reside en que cada variable de estado y cada parámetro de control en función de las cuales f_i se expresa, depende a su vez del tiempo. La derivada total debe calcularse como suma de las diferentes derivadas parciales. En concreto:

$$\left. \frac{d(f_i)}{dt} \right|_{t_0} = \sum_{k=1}^n \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial x_k} \right|_{t_0} \cdot \left. \frac{dx_k}{dt} \right|_{t_0} \right] + \sum_{k=1}^p \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial w_k} \right|_{t_0} \cdot \left. \frac{dw_k}{dt} \right|_{t_0} \right] \quad (5-13)$$

Ahora se puede esperar que las derivadas parciales de f_i respecto a las variables de estado y los parámetros de control sean de determinación relativamente sencilla. Sin

embargo, evaluar las derivadas totales de las variables de estado y los parámetros de control respecto al tiempo normalmente resulta complicado. De nuevo se acude a la aproximación lineal de Taylor para hacer en este caso las substituciones $z(t) = x_k(t)$ y $z(t) = w_k(t)$. Despejando en los resultados de dichas substituciones, se obtiene que:

$$\left. \frac{dx_k(t)}{dt} \right|_{t_0} \approx \frac{x_k(t) - x_k(t_0)}{t - t_0} = \frac{x_k(t) - x_k(t_0)}{t - t_0} \quad (5-14)$$

$$\left. \frac{dw_k(t)}{dt} \right|_{t_0} \approx \frac{w_k(t) - w_k(t_0)}{t - t_0} = \frac{w_k(t) - w_k(t_0)}{t - t_0} \quad (5-15)$$

Empleando ahora (5-14) y (5-15) junto con (5-13), se tiene que:

$$\left. \frac{d(f_i)}{dt} \right|_{t_0} \approx \sum_{k=1}^n \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial x_k} \right|_{t_0} \cdot \frac{x_k - x_{k0}}{t - t_0} \right] + \sum_{k=1}^p \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial w_k} \right|_{t_0} \cdot \frac{w_k - w_{k0}}{t - t_0} \right] \quad (5-16)$$

Expresión que puede substituirse a su vez en (5-12) para obtener:

$$\dot{x}_i - \dot{x}_i|_{t_0} \approx \sum_{k=1}^n \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial x_k} \right|_{t_0} \cdot (x_k - x_{k0}) \right] + \sum_{k=1}^p \left[\left. \frac{\partial(f_i)}{\partial w_k} \right|_{t_0} \cdot (w_k - w_{k0}) \right] \quad (5-17)$$

Obtenemos así en (5-17) las derivadas totales de las variables de estado expresadas linealmente en función de las propias variables de estado y de los parámetros de control en las que el tiempo no aparece explícitamente.

5.4 Desarrollo en serie de las variables de observación

La relación existente entre las variables de observación, las variables de estado y los parámetros de control, también se puede aproximar en forma lineal, siguiendo un procedimiento análogo al del epígrafe anterior. En este caso tenemos:

$$z(t) = y_i(t) \quad (5-18)$$

Y suponiendo un sistema invariante con el tiempo:

$$z(t) = g_i(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_p) \quad (5-19)$$

Con lo que el desarrollo en serie de Taylor queda en:

$$y_i(t) - y_i(t_0) \approx \left. \frac{d[g_i(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_p)]}{dt} \right|_{t_0} \cdot (t - t_0) \quad (5-20)$$

de nuevo se substituye la derivada total respecto al tiempo por las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables de estado y los parámetros de control, las cuales se aproximan a su vez aplicando de nuevo el desarrollo en serie de Taylor. El resultado es como sigue:

$$y_i - y_i|_{t_0} \approx \sum_{k=1}^n \left[\left. \frac{\partial(g_i)}{\partial x_k} \right|_{t_0} \cdot (x_k - x_{k0}) \right] + \sum_{k=1}^p \left[\left. \frac{\partial(g_i)}{\partial w_k} \right|_{t_0} \cdot (w_k - w_{k0}) \right] \quad (5-21)$$

5.5 Expresión incremental del sistema linalizado

Las ecuaciones (5-17) y (5-21) se pueden reescribir de una manera más compacta. Para ello se emplea la notación incremental, que se basa en definir la variación de las diferentes variables de estado, la de sus derivadas y la de los parámetros de control, como un incremento respecto de su valor de equilibrio. Según esto puede aceptarse que:

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) - x_i(t_0) = x_i - x_{i0} \quad (5-22)$$

$$\Delta w_i(t) = w_i(t) - w_i(t_0) = w_i - w_{i0} \quad (5-23)$$

$$\Delta \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i - \dot{x}_i|_{t_0} = \dot{x}_i - \dot{x}_{i0} \quad (5-24)$$

$$\Delta y_i(t) = y_i(t) - y_i(t_0) = y_i - y_{i0} \quad (5-25)$$

Y por tanto, (5-17) se reescribe para tomar forma según (5-26):

$$\Delta \dot{x}_i(t) \approx \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial(f_i)}{\partial x_k} \Big|_{t_0} \cdot \Delta x_k(t) \right] + \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial(f_i)}{\partial w_k} \Big|_{t_0} \cdot \Delta w_k(t) \right] \quad (5-26)$$

Mientras que (5-21) queda según (5-27):

$$\Delta y_i(t) \approx \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial(g_i)}{\partial x_k} \Big|_{t_0} \cdot \Delta x_k(t) \right] + \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial(g_i)}{\partial w_k} \Big|_{t_0} \cdot \Delta w_k(t) \right] \quad (5-27)$$

Se tienen así los patrones a partir de los cuales se puede definir cada expresión del modelo de gran señal y cada expresión del sistema de observación de forma incremental.

En este tipo de notación, se puede establecer una propiedad importante en lo que se refiere a los términos en derivada temporal de las variables de estado. Para ello debe recordarse que $\dot{x}_{i0} = 0$ y constatarse que:

$$\frac{dx_i(t_0)}{dt} = \frac{d(x_{i0})}{dt} = 0 \quad (5-28)$$

Como x_{i0} es un valor constante en cada punto de linealización, obtenemos que:

$$\Delta \dot{x}_i = \Delta \left(\frac{d(x_i)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\Delta x_i) \quad (5-29)$$

Pues en efecto:

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i0} = \frac{d(x_i)}{dt} - \frac{d(x_{i0})}{dt} = \frac{d(x_i - x_{i0})}{dt} = \frac{d}{dt}(\Delta x_i) \quad (5-30)$$

5.6 Expresión final del modelo en pequeña señal

Las expresiones (5-26) y (5-27) deben aplicarse respectivamente a todas las ecuaciones diferenciales que definen el modelo en gran señal y a todas las ecuaciones que definen las variables de observación.

Utilizando notación matricial (5-26) adquiere el aspecto:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \Delta \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta w_1(t) \\ \vdots \\ \Delta w_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-31)$$

Que se resume en:

$$[\Delta \dot{x}(t)] \approx [A] \cdot [\Delta x(t)] + [B] \cdot [\Delta w(t)] \quad (5-32)$$

Donde se han hecho las siguientes simplificaciones:

$$[\Delta \dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \Delta \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-33)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

$$[\Delta x(t)] = \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-35)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(f_n)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

$$[\Delta w(t)] = \begin{bmatrix} \Delta w_1(t) \\ \vdots \\ \Delta w_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

Si como se está suponiendo el modelo es invariante con el tiempo, de modo que f_i no dependen explícitamente de él, y si la solución nominal que se eligió para proceder a la linealización es constante, entonces todas las derivadas que se definen para el modelo de pequeña señal son a su vez constantes. Esto es lo que se ha supuesto a la hora de definir $[A]$ y $[B]$ independientes del tiempo.

Si además también g_i es invariante, el conjunto de ecuaciones (5-27), que también puede presentarse en forma matricial, estará definido mediante sendas matrices, $[C]$ y $[D]$, que también serán constantes:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1(t) \\ \vdots \\ \Delta y_n(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta w_1(t) \\ \vdots \\ \Delta w_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

La expresión anterior puede resumirse en:

$$[\Delta y(t)] \approx [C] \cdot [\Delta x(t)] + [D] \cdot [\Delta w(t)] \quad (5-39)$$

Con las siguientes simplificaciones:

$$[\Delta y(t)] = \begin{bmatrix} \Delta y_1(t) \\ \vdots \\ \Delta y_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-40)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial x_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial x_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial w_1} \right|_{t_0} & \dots & \left. \frac{\partial(g_n)}{\partial w_n} \right|_{t_0} \end{bmatrix} \quad (5-42)$$

El cálculo pues del modelo linealizado respecto un punto de equilibrio se basa en la evaluación de las diferentes derivadas parciales que aparecen en (5-26) y a su particularización en un punto de funcionamiento concreto. Las ventajas de estos modelos lineales es que permiten el análisis dinámico de estabilidad y de regulación del sistema.

5.7 Análisis de modelos lineales

5.7.1 Introducción

Una vez se dispone del modelo linealizado, es preciso desarrollar ciertas herramientas básicas para proceder a su análisis. Debe tenerse en mente que el modelo está constituido por un número de ecuaciones diferenciales, aunque éstas sean ahora lineales. En ellas el punto de funcionamiento en que se centró la linealización, puede considerarse matemáticamente como condición inicial en el proceso de resolución. La

manera más sencilla de abordar la solución es utilizar la transformada de Laplace. Se convierten así las ecuaciones diferenciales en algebraicas.

Manipulando tal sistema algebraico, se alcanza el objetivo final de este proceso matemático, es decir, se determinan las distintas funciones de transferencia que resultan útiles en la descripción del comportamiento en pequeña señal de la topología en estudio.

5.7.2 Transformada de Laplace

Para aplicar la transformada de Laplace a la expresión (5-32) basta con conocer la imagen de la función derivada que se da en (5-43), y tener en cuenta la igualdad (5-29)

$$L\left(\frac{dz(t)}{dt}\right) = sZ(s) - z(t_0) \quad (5-43)$$

Donde $Z(s)$ es la transformada de $z(t)$.

Aplicando ambas expresiones, si se quiere transformar un elemento genérico $\Delta\dot{x}_k(t)$ de la matriz de derivadas temporales de las variables de estado, $[\Delta\dot{x}_k(t)]$, se procede como sigue:

$$L(\Delta\dot{x}_k(t)) = L\left(\frac{d}{dt}(\Delta x_k(t))\right) = sX_k(s) - \Delta x_k(t_0) = sX_k(s) \quad (5-44)$$

Puesto que obviamente $\Delta x_k(t_0) = x_{k0} - x_{k0}$, y se ha definido $X_k(s)$ como función imagen de $\Delta x_k(t)$. Por tanto tenemos que:

$$L[\Delta x(t)] = [X(s)] \quad (5-45)$$

$$L[\Delta\dot{x}(t)] = s[X(s)] \quad (5-46)$$

Teniendo en cuenta (5-32), se completa la tabla de transformadas con (5-47) y se aprovecha que las matrices $[A]$ y $[B]$ son constantes, resulta sencillo concluir que (5-48) ya expresa el modelo de pequeña señal tras la transformación de Laplace.

$$L[\Delta w(t)] = [W(s)] \quad (5-47)$$

$$s[X(s)] = [A][X(s)] + [B][W(s)] \quad (5-48)$$

De idéntica manera, es posible obtener la transformada de Laplace para las variables de observación del circuito linealizadas, la cual se muestra en (5-50). Basta admitir la expresión (5-49), recordar (5-39), y aplicar el mismo proceso que se hizo para el propio modelo de pequeña señal anterior.

$$L[\Delta y(t)] = [Y(s)] \quad (5-49)$$

$$[Y(s)] = [C][X(s)] + [D][W(s)] \quad (5-50)$$

5.7.3 Obtención de funciones de transferencia

Una vez realizada la transformación al plano complejo del sistema temporal de pequeña señal, es sencillo obtener las funciones de transferencia de las distintas variables de estado en función de los parámetros de entrada. Por ejemplo, operando en (5-48):

$$\begin{aligned} 0 &= [A - sI][X(s)] + [B][W(s)] \Rightarrow [sI - A][X(s)] = [B][W(s)] \Rightarrow \\ [X(s)] &= [sI - A]^{-1} [B][W(s)] = [Q(s)][W(s)] \end{aligned} \quad (5-51)$$

Donde I es la matriz identidad. La expresión anterior proporciona las funciones de transferencia entre las variables de estado y los parámetros de control. En general, las variables de estado no coincidirán con las variables de salida o de observación del circuito, por lo que será necesario obtener las funciones de transferencia entre ellas y los parámetros de control. Éstas pueden obtenerse como sigue:

$$[Y(s)] = [C][sI - A]^{-1} [B][W(s)] + [D][W(s)] \Rightarrow [Y(s)] = [R(s)][W(s)] \quad (5-52)$$

Conocidas las funciones de transferencia, resulta posible evaluar la respuesta en frecuencia del circuito que se modela, sin más que hacer $s = j \cdot \omega$, donde j es la unidad imaginaria y ω es la pulsación, y modificar el valor de esta última.

5.8 Modelo en pequeña señal de la topología multinivel

En capítulos anteriores se obtuvo un modelo matemático en régimen permanente que modeliza la topología multinivel propuesta. Vamos a aplicar los resultados de los epígrafes anteriores al sistema de ecuaciones no lineales para obtener un grupo de ecuaciones linealizado.

5.8.1 Linealización

5.8.1.1 Obtención de las ecuaciones diferenciales lineales

Recordemos que en el epígrafe 2.7.5 se han obtenido las ecuaciones diferenciales (2-97)-(2-101) que modelizan el comportamiento de la topología. En ellas hemos substituido los

términos diferenciales por $f_1 = \frac{di_{LA}(t)}{dt}$, $f_2 = \frac{di_{LB}(t)}{dt}$, $f_3 = \frac{dV_{SA}(t)}{dt}$, $f_4 = \frac{dV_{SB}(t)}{dt}$,

$f_5 = \frac{dV_x(t)}{dt}$, obteniendo lo siguiente:

$$f_1 = \frac{1}{L_S} \left[\frac{2V_e}{\pi} ((2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))) + L_S \omega \cdot i_{LB} - V_{SA} - \frac{i_{LA} \cdot \sin^2(\psi) + i_{LB} \cdot \mu}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LA} \right] \quad (5-53)$$

$$f_2 = \frac{1}{L_S} \left[-\frac{2\Gamma V_e}{\pi} (\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))) - L_S \omega \cdot i_{LA} - V_{SB} + \frac{i_{LA} \cdot \mu - i_{LB} \cdot \sin^2(\psi)}{\pi \cdot C_p \omega} - r \cdot i_{LB} \right] \quad (5-54)$$

$$f_3 = \frac{1}{C_S} [i_{LA} + C_S \omega \cdot V_{SB}] \quad (5-55)$$

$$f_4 = \frac{1}{C_S} [i_{LB} - C_S \omega \cdot V_{SA}] \quad (5-56)$$

$$f_5 = \frac{1}{C_f} \left[\frac{\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}}{\pi} [1 + \cos(\psi)] - \frac{V_x}{R} \right] \quad (5-57)$$

Con las siguientes simplificaciones:

$$\mu(\psi) = \psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \quad (5-58)$$

$$\cos(\psi) = 1 - \frac{2C_P \omega \cdot V_x}{i_L} = 1 - \frac{2C_P \omega \cdot V_x}{\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (5-59)$$

Deducimos pues que el vector de estado será:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} i_{LA} \\ i_{LB} \\ V_{SA} \\ V_{SB} \\ V_x \end{bmatrix} \quad (5-60)$$

Es necesario calcular ahora las matrices $[A]$ y $[B]$ término a término de la siguiente manera:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = -\frac{\sin^2(\psi)}{L_S \pi C_P \omega} - \frac{r}{L_S} + \frac{V_x \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\psi)}{L_S \pi \sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (5-61)$$

$$a_{12} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \omega - \frac{\psi}{L_S \pi C_P \omega} + \frac{\sin(\psi)}{L_S \pi C_P \omega} - \frac{V_x \sin(\psi) \cos^2(\varphi)}{L_S \pi \sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (5-62)$$

$$a_{13} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = \frac{-1}{L_S} \quad (5-63)$$

$$a_{14} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-64)$$

$$a_{15} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = -\frac{\sin(\psi)\sin(\varphi)}{\pi L_s} \quad (5-65)$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = -\omega + \frac{\psi}{L_s \pi C_P \omega} + \frac{\sin(\psi)}{L_s \pi C_P \omega} + \frac{V_x \sin(\psi) \sin^2(\varphi)}{L_s \pi \sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (5-66)$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \frac{-\sin^2(\psi)}{L_s \pi C_P \omega} - \frac{r}{L_s} - \frac{V_x \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\psi)}{L_s \pi \sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2}} \quad (5-67)$$

$$a_{23} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-68)$$

$$a_{24} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = \frac{-1}{L_s} \quad (5-69)$$

$$a_{25} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = \frac{\sin(\psi) \cos(\varphi)}{\pi L_s} \quad (5-70)$$

$$a_{31} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = \frac{1}{C_S} \quad (5-71)$$

$$a_{32} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-72)$$

$$a_{33} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-73)$$

$$a_{34} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = \omega \quad (5-74)$$

$$a_{35} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-75)$$

$$a_{41} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-76)$$

$$a_{42} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \frac{1}{C_S} \quad (5-77)$$

$$a_{43} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = -\omega \quad (5-78)$$

$$a_{44} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-79)$$

$$a_{45} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-80)$$

$$a_{51} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = \frac{2\cos(\varphi)}{\pi C_f} \quad (5-81)$$

$$a_{52} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \frac{2\sin(\varphi)}{\pi C_f} \quad (5-82)$$

$$a_{53} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-83)$$

$$a_{54} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-84)$$

$$a_{55} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = \frac{-1}{RC_f} - \frac{C_p \omega}{\pi C_f} \quad (5-85)$$

Los coeficientes anteriores sirven para la matriz $[A]$. Se observa que dependen del punto que se seleccione para linealizar el modelo y de los componentes de la topología, incluyendo la resistencia de carga. En lo que respecta al punto de funcionamiento nominal se ha supuesto que éste es cualquiera de las soluciones posibles para una operación en régimen permanente.

De igual forma, se calculan los elementos de la matriz $[B]$:

$$b_{11} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = \frac{i_{LA} \sin^2(\psi) + i_{LB}(\psi - \sin(\psi)) + \pi L_S C_P \omega^2}{\pi L_S C_P \omega^2} \quad (5-86)$$

$$b_{12} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = \frac{2V_e}{L_S} [(2 + \Gamma) \cos(\pi \tau_1) - \Gamma \cos(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-87)$$

$$b_{13} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = \frac{4\Gamma V_e \cos(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))}{L_S} \quad (5-88)$$

$$b_{14} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_1)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = \frac{2}{\pi L_S} [(2 + \Gamma) \sin(\pi \tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-89)$$

$$b_{21} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = \frac{i_{LB} \sin^2(\psi) + i_{LA}(-\psi + \sin(\psi)) - \pi L_S C_P \omega^2}{\pi L_S C_P \omega^2} \quad (5-90)$$

$$b_{22} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = -\frac{2\Gamma V_e}{L_S} [\sin(\pi \tau_1) - \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-91)$$

$$b_{23} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = -\frac{4\Gamma V_e \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))}{L_S} \quad (5-92)$$

$$b_{24} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_2)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = \frac{2\Gamma}{\pi L_S} [\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))] \quad (5-93)$$

$$b_{31} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = V_{SB} \quad (5-94)$$

$$b_{32} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-95)$$

$$b_{33} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-96)$$

$$b_{34} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_3)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-97)$$

$$b_{41} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = -V_{SA} \quad (5-98)$$

$$b_{42} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-99)$$

$$b_{43} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-100)$$

$$b_{44} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_4)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-101)$$

$$b_{51} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-102)$$

$$b_{52} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-103)$$

$$b_{53} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-104)$$

$$b_{54} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(f_5)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-105)$$

Tenemos pues en la siguiente expresión, la matriz que representa la expresión completa del modelo en pequeña señal del sistema:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{i}_{LA}(t) \\ \Delta \dot{i}_{LB}(t) \\ \Delta \dot{V}_{SA}(t) \\ \Delta \dot{V}_{SB}(t) \\ \Delta \dot{V}_x(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta i_{LA}(t) \\ \Delta i_{LB}(t) \\ \Delta V_{SA}(t) \\ \Delta V_{SB}(t) \\ \Delta V_x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \omega(t) \\ \Delta \tau_1(t) \\ \Delta \tau_2(t) \\ \Delta V_e(t) \end{bmatrix} \quad (5-106)$$

5.8.2 Linealización de las variables de observación

Siguiendo un proceso análogo al anterior, puede obtenerse una solución lineal para las variables de observación. Los términos de las matrices $[C]$ y $[D]$ vienen dados por las reglas diferenciales que se detallan a continuación.

$$g_1 = \varphi = A \tan \left(\frac{i_{LB}}{i_{LA}} \right) \quad (5-107)$$

$$g_2 = i_L = +\sqrt{i_{LA}^2 + i_{LB}^2} \quad (5-108)$$

$$g_3 = V_S = +\sqrt{V_{SA}^2 + V_{SB}^2} \quad (5-109)$$

$$g_4 = V_x(t) \approx \frac{V_{x0}}{2} = V_x \quad (5-110)$$

El vector de variables de observación es:

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} \varphi \\ i_L \\ V_S \\ V_x \end{bmatrix} \quad (5-111)$$

Para obtener los términos de la matriz [C], se van haciendo las derivadas parciales obteniendo los siguientes coeficientes:

$$c_{11} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = -\frac{i_{LB}}{i_{LA}^2 + i_{LB}^2} \quad (5-112)$$

$$c_{12} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \frac{i_{LA}}{i_{LA}^2 + i_{LB}^2} \quad (5-113)$$

$$c_{13} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-114)$$

$$c_{14} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-115)$$

$$c_{15} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-116)$$

$$c_{21} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = \cos(\varphi) \quad (5-117)$$

$$c_{22} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = \sin(\varphi) \quad (5-118)$$

$$c_{23} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-119)$$

$$c_{24} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-120)$$

$$c_{25} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-121)$$

$$c_{31} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-122)$$

$$c_{32} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-123)$$

$$c_{33} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = \frac{V_{SA}}{\sqrt{V_{SA}^2 + V_{SB}^2}} \quad (5-124)$$

$$c_{34} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = \frac{V_{SB}}{\sqrt{V_{SA}^2 + V_{SB}^2}} \quad (5-125)$$

$$c_{35} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-126)$$

$$c_{41} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial x_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial i_{LA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-127)$$

$$c_{42} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial x_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial i_{LB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-128)$$

$$c_{43} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial x_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial V_{SA}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-129)$$

$$c_{44} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial x_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial V_{SB}} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-130)$$

$$c_{45} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial x_5} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial V_x} \right|_{t_0} = 1 \quad (5-131)$$

Análogo procedimiento para obtener los términos de la matriz $[D]$:

$$d_{12} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-132)$$

$$d_{14} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_1)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-133)$$

$$d_{21} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-134)$$

$$d_{22} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-135)$$

$$d_{23} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-136)$$

$$d_{24} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_2)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-137)$$

$$d_{31} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-138)$$

$$d_{32} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-139)$$

$$d_{33} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-140)$$

$$d_{34} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_3)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-141)$$

$$d_{41} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial w_1} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial \omega} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-142)$$

$$d_{42} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial w_2} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial \tau_1} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-143)$$

$$d_{43} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial w_3} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial \tau_2} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-144)$$

$$d_{44} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial w_4} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial(g_4)}{\partial V_e} \right|_{t_0} = 0 \quad (5-145)$$

Podemos observar como todos los coeficientes de la matriz $[D]$ son nulos, por lo que la expresión final queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\phi}(t) \\ \Delta \dot{i}_L(t) \\ \Delta \dot{V}_S(t) \\ \Delta \dot{V}_x(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi(t) \\ \Delta i_L(t) \\ \Delta V_S(t) \\ \Delta V_x(t) \end{bmatrix} \quad (5-146)$$

5.8.3 Ecuaciones diferenciales normalizadas

Para normalizar el sistema matricial del epígrafe anterior, se puede obtener de dos formas distintas:

1. Volver a hacer el desarrollo matricial con las ecuaciones diferenciales ya normalizadas, obtenidas en capítulos anteriores.
2. Normalizar término a término cada elemento del sistema de matrices obtenido en el epígrafe anterior.

En cualquier caso, las magnitudes base que se toman para la normalización son las mismas que se especificaron en capítulos anteriores.

Aquí vamos a exponer la segunda alternativa cogiendo cada uno de los términos y aplicando la normalización. Para ello se tiene en cuenta que las funciones f son las derivadas con respecto al tiempo de las variables de estado.

$$f_1 = \frac{di_{LA}(t)}{dt} \quad f_2 = \frac{di_{LB}(t)}{dt} \quad f_3 = \frac{dV_{SA}(t)}{dt} \quad f_4 = \frac{dV_{SB}(t)}{dt} \quad f_5 = \frac{dV_x(t)}{dt}$$

En general, tenemos una corriente o una tensión derivada respecto a i_{LA} , i_{LB} , V_{SA} , V_{SB} , V_e , τ_1 , τ_2 , ω , por lo que tendremos los siguientes casos:

- Derivada de una corriente respecto a otra corriente

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{di}{dt} \right) \bigg|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{i} \cdot I_B)} \left(\frac{d(\hat{i} \cdot I_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \bigg|_{t_0} = \frac{1}{T_B} \frac{\partial}{\partial \hat{i}} \left(\frac{d\hat{i}}{d\hat{t}} \right) \bigg|_{t_0} = \frac{\hat{a}_{ij}}{T_B} \quad (5-147)$$

- Derivada de una corriente respecto a una tensión

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{di}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{V} \cdot V_B)} \left(\frac{d(\hat{i} \cdot I_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{I_B}{T_B V_B} \frac{\partial}{\partial \hat{V}} \left(\frac{d\hat{i}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\hat{a}_{ij}}{T_B Z_B} \quad (5-148)$$

- Derivada de una corriente respecto a la pulsación

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{di}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{\omega} \cdot \omega_B)} \left(\frac{d(\hat{i} \cdot I_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{I_B}{T_B \omega_B} \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} \left(\frac{d\hat{i}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{I_B \hat{a}_{ij}}{2\pi} \quad (5-149)$$

- Derivada de una corriente respecto al ciclo de trabajo

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{di}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{\tau})} \left(\frac{d(\hat{i} \cdot I_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{I_B}{T_B} \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} \left(\frac{d\hat{i}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{I_B \hat{a}_{ij}}{T_B} \quad (5-150)$$

- Derivada de una tensión respecto a una corriente

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{dV}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{i} \cdot I_B)} \left(\frac{d(\hat{V} \cdot V_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{V_B}{I_B T_B} \frac{\partial}{\partial \hat{i}} \left(\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{Z_B \hat{a}_{ij}}{T_B} \quad (5-151)$$

- Derivada de una tensión respecto a otra tensión

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{dV}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{v} \cdot V_B)} \left(\frac{d(\hat{V} \cdot V_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{1}{T_B} \frac{\partial}{\partial \hat{v}} \left(\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\hat{a}_{ij}}{T_B} \quad (5-152)$$

- Derivada de una tensión respecto a la pulsación

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{dV}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial (\hat{\omega} \cdot \omega_B)} \left(\frac{d(\hat{V} \cdot V_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{V_B}{T_B \omega_B} \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} \left(\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{V_B \hat{a}_{ij}}{2\pi} \quad (5-153)$$

- Derivada de una tensión respecto a un ciclo de trabajo

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dV}{dt} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial(\hat{\tau})} \left(\frac{d(\hat{V} \cdot V_B)}{d(\hat{t} \cdot T_B)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{V_B}{T_B} \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} \left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} \right) \Big|_{t_0} = \frac{V_B \hat{a}_{ij}}{T_B} \quad (5-154)$$

Aplicando las expresiones anteriores a los elementos de las matrices del sistema, obtenemos los coeficientes normalizados para la matriz $[A]$:

$$\hat{a}_{11} = a_{11} T_B = -\frac{\alpha \cdot \sin^2(\psi)}{\hat{\omega}} - 2\pi\hat{r} + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\psi)}{\hat{i}_L} \quad (5-155)$$

$$\hat{a}_{12} = a_{12} T_B = 2\pi\hat{\omega} - \frac{2\alpha\psi}{\hat{\omega}} + \frac{2\alpha\sin(\psi)}{\hat{\omega}} - \frac{2\sin(\psi)\cos^2(\varphi)}{\hat{i}_L} \quad (5-156)$$

$$\hat{a}_{13} = a_{13} T_B Z_B = -2\pi \quad (5-157)$$

$$\hat{a}_{14} = a_{14} T_B Z_B = 0 \quad (5-158)$$

$$\hat{a}_{15} = a_{15} T_B Z_B = -2\sin(\psi)\sin(\varphi) \quad (5-159)$$

$$\hat{a}_{21} = a_{21} T_B = -2\pi\hat{\omega} + \frac{2\alpha\psi}{\hat{\omega}} + \frac{2\alpha\sin(\psi)}{\hat{\omega}} + \frac{2\sin(\psi)\sin^2(\varphi)}{\hat{i}_L} \quad (5-160)$$

$$\hat{a}_{22} = a_{22} T_B = -\frac{\alpha \cdot \sin^2(\psi)}{\hat{\omega}} - 2\pi\hat{r} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\psi)}{\hat{i}_L} \quad (5-161)$$

$$\hat{a}_{23} = a_{23} T_B Z_B = 0 \quad (5-162)$$

$$\hat{a}_{24} = a_{24} T_B Z_B = -2\pi \quad (5-163)$$

$$\hat{a}_{25} = a_{25} T_B Z_B = 2\sin(\psi)\cos(\varphi) \quad (5-164)$$

$$\hat{a}_{31} = \frac{T_B}{Z_B} a_{31} = 2\pi(1 - \alpha) \quad (5-165)$$

$$\hat{a}_{32} = \frac{T_B}{Z_B} a_{32} = 0 \quad (5-166)$$

$$\hat{a}_{33} = T_B a_{33} = 0 \quad (5-167)$$

$$\hat{a}_{34} = T_B a_{34} = 2\pi\hat{\omega} \quad (5-168)$$

$$\hat{a}_{35} = T_B a_{35} = 0 \quad (5-169)$$

$$\hat{a}_{41} = \frac{Z_B}{T_B} a_{41} = 0 \quad (5-170)$$

$$\hat{a}_{42} = \frac{Z_B}{T_B} a_{42} = 2\pi(1 - \alpha) \quad (5-171)$$

$$\hat{a}_{43} = T_B a_{43} = -2\pi\hat{\omega} \quad (5-172)$$

$$\hat{a}_{44} = T_B a_{44} = 0 \quad (5-173)$$

$$\hat{a}_{45} = T_B a_{45} = 0 \quad (5-174)$$

$$\hat{a}_{51} = \frac{T_B}{Z_B} a_{51} = 4\beta \cos(\varphi) \quad (5-175)$$

$$\hat{a}_{52} = \frac{T_B}{Z_B} a_{52} = 4\beta \sin(\varphi) \quad (5-176)$$

$$\hat{a}_{53} = T_B a_{53} = 0 \quad (5-177)$$

$$\hat{a}_{54} = T_B a_{54} = 0 \quad (5-178)$$

$$\hat{a}_{55} = T_B a_{55} = \frac{-2\pi\beta}{\hat{R}} - \frac{2\hat{\omega}\beta}{\alpha} \quad (5-179)$$

Los coeficientes normalizados de la matriz $[B]$ son:

$$\hat{b}_{11} = \frac{2\pi}{I_B} b_{11} = \hat{i}_{LA} \left(\frac{2\alpha \sin^2(\psi)}{\hat{\omega}^2} \right) + \hat{i}_{LB} \left(1 + \frac{2\alpha\psi}{\hat{\omega}^2} - \frac{2\alpha \sin(\psi)}{\hat{\omega}^2} \right) \quad (5-180)$$

$$\hat{b}_{12} = \frac{T_B}{I_B} b_{12} = 4\pi [(2 + \Gamma) \cos(\pi\tau_1) - \Gamma \cos(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-181)$$

$$\hat{b}_{13} = \frac{T_B}{I_B} b_{13} = 8\pi\Gamma \cos(\pi(\tau_1 - 2\tau_2)) \quad (5-182)$$

$$\hat{b}_{14} = T_B Z_B b_{14} = 4[(2 + \Gamma) \sin(\pi\tau_1) - \Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-183)$$

$$\hat{b}_{21} = \frac{2\pi}{I_B} b_{21} = \hat{i}_{LA} \left(-1 - \frac{2\alpha\psi}{\hat{\omega}^2} + \frac{2\alpha \sin(\psi)}{\hat{\omega}^2} \right) + \hat{i}_{LB} \left(\frac{2\alpha \sin^2(\psi)}{\hat{\omega}^2} \right) \quad (5-184)$$

$$\hat{b}_{22} = \frac{T_B}{I_B} b_{22} = -4\pi\Gamma [\sin(\pi\tau_1) - \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2))] \quad (5-185)$$

$$\hat{b}_{23} = \frac{T_B}{I_B} b_{23} = -8\pi\Gamma \sin(\pi(\tau_1 - 2\tau_2)) \quad (5-186)$$

$$\hat{b}_{24} = T_B Z_B b_{24} = 4\Gamma [\cos(\pi\tau_1) + \cos(\pi(1 - \tau_1 + 2\tau_2))] \quad (5-187)$$

$$\hat{b}_{31} = \frac{2\pi}{V_B} b_{31} = 2\pi \hat{V}_{SB} \quad (5-188)$$

$$\hat{b}_{32} = \frac{T_B}{V_B} b_{32} = 0 \quad (5-189)$$

$$\hat{b}_{33} = \frac{T_B}{V_B} b_{33} = 0 \quad (5-190)$$

$$\hat{b}_{34} = T_B b_{34} = 0 \quad (5-191)$$

$$\hat{b}_{41} = \frac{2\pi}{V_B} b_{41} = -2\pi \hat{V}_{SA} \quad (5-192)$$

$$\hat{b}_{42} = \frac{T_B}{V_B} b_{42} = 0 \quad (5-193)$$

$$\hat{b}_{43} = \frac{T_B}{V_B} b_{43} = 0 \quad (5-194)$$

$$\hat{b}_{44} = T_B b_{44} = 0 \quad (5-195)$$

$$\hat{b}_{51} = \frac{2\pi}{V_B} b_{51} = 0 \quad (5-196)$$

$$\hat{b}_{52} = \frac{T_B}{V_B} b_{52} = 0 \quad (5-197)$$

$$\hat{b}_{53} = \frac{T_B}{V_B} b_{53} = 0 \quad (5-198)$$

$$\hat{b}_{54} = T_B b_{54} = 0 \quad (5-199)$$

Los coeficientes normalizados de la matriz $[C]$ son:

$$\hat{c}_{11} = -\frac{\sin(\varphi)}{\hat{i}_L} \quad (5-200)$$

$$\hat{c}_{12} = \frac{\cos(\varphi)}{\hat{i}_L} \quad (5-201)$$

$$\hat{c}_{13} = 0 \quad (5-202)$$

$$\hat{c}_{14} = 0 \quad (5-203)$$

$$\hat{c}_{15} = 0 \quad (5-204)$$

$$\hat{c}_{21} = \text{Cos}(\varphi) \quad (5-205)$$

$$\hat{c}_{22} = \text{Sin}(\varphi) \quad (5-206)$$

$$\hat{c}_{23} = 0 \quad (5-207)$$

$$\hat{c}_{24} = 0 \quad (5-208)$$

$$\hat{c}_{25} = 0 \quad (5-209)$$

$$\hat{c}_{31} = 0 \quad (5-210)$$

$$\hat{c}_{32} = 0 \quad (5-211)$$

$$\hat{c}_{33} = \frac{\hat{V}_{SA}}{\hat{V}_S} \quad (5-212)$$

$$\hat{c}_{34} = \frac{\hat{V}_{SB}}{\hat{V}_S} \quad (5-213)$$

$$\hat{c}_{35} = 0 \quad (5-214)$$

$$\hat{c}_{41} = 0 \quad (5-215)$$

$$\hat{c}_{42} = 0 \quad (5-216)$$

$$\hat{c}_{43} = 0 \quad (5-217)$$

$$\hat{c}_{44} = 0 \quad (5-218)$$

$$\hat{c}_{45} = 1 \quad (5-219)$$

La matriz $[D]$ tiene todos sus términos nulos.

5.9 Análisis del modelo lineal

De la expresión (5-51) obtenemos que:

$$0 \approx \begin{bmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - s & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} - s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta i_{LA}(s) \\ \Delta i_{LB}(s) \\ \Delta V_{SA}(s) \\ \Delta V_{SB}(s) \\ \Delta V_x(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \omega(s) \\ \Delta \tau_1(s) \\ \Delta \tau_2(s) \\ \Delta V_e(s) \end{bmatrix} \quad (5-220)$$

El sistema matricial representado, constituye un resultado interesante pues basta con despejar las variables de estado, para obtener un modelo linealizado de la topología, obteniendo sin más un conjunto de ecuaciones algebraicas que forman el modelo linealizado.

5.9.1 Obtención de las funciones de transferencia

Teniendo en cuenta la expresión obtenida en la expresión (5-51), obtenemos la relación siguiente, cuyos términos representan las funciones de transferencia para cada una de las variables de estado.

$$[Q(s)] = [sI - A]^{-1} [B] \quad (5-221)$$

Así obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{LA}(s) \\ \Delta i_{LB}(s) \\ \Delta V_{SA}(s) \\ \Delta V_{SB}(s) \\ \Delta V_x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & q_{12}(s) & q_{13}(s) & q_{14}(s) \\ q_{21}(s) & q_{22}(s) & q_{23}(s) & q_{24}(s) \\ q_{31}(s) & q_{32}(s) & q_{33}(s) & q_{34}(s) \\ q_{41}(s) & q_{42}(s) & q_{43}(s) & q_{44}(s) \\ q_{51}(s) & q_{52}(s) & q_{53}(s) & q_{54}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \omega(s) \\ \Delta \tau_1(s) \\ \Delta \tau_2(s) \\ \Delta V_e(s) \end{bmatrix} \quad (5-222)$$

Cada uno de los términos $q_{ij}(s)$ de la matriz $[Q(s)]$ representan la expresión linealizada genérica para un punto de linealización para la variable de estado i -ésima según el parámetro de control j -ésimo.

Nótese que el grado de los polinomios resultantes que componen el denominador y el numerador de cada una de las funciones de transferencia $q_{ij}(s)$ está definido por el modo en que está construida la matriz inversa de $[A-s\cdot I]$.

5.10 Resultados experimentales

Se han llevado a cabo varios experimentos en los que se ha utilizado el prototipo de laboratorio, y en el que se ha introducido una perturbación de una señal de entrada desde el punto de equilibrio, para poder obtener la respuesta del sistema.

En los siguientes test, se ha fijado un punto de funcionamiento en régimen permanente, y se ha aplicado una variación oscilatoria en el ciclo de trabajo auxiliar. Los resultados los podemos ver en las siguientes figuras.

TEST 1: PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_l=0.4$	$\tau_2=0.28$	$100\text{Hz-}100\text{kHz}$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$\Gamma=1$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=10V$	$V_x=12V$	$R=7\Omega$	$\Gamma_l=1$	

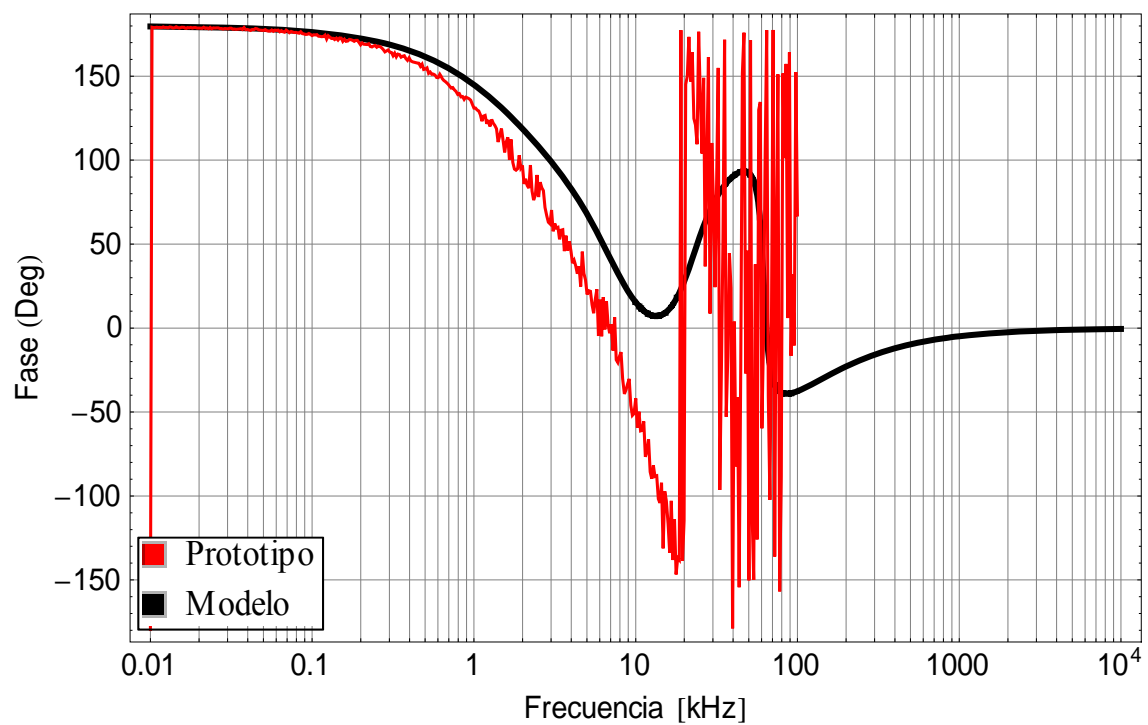
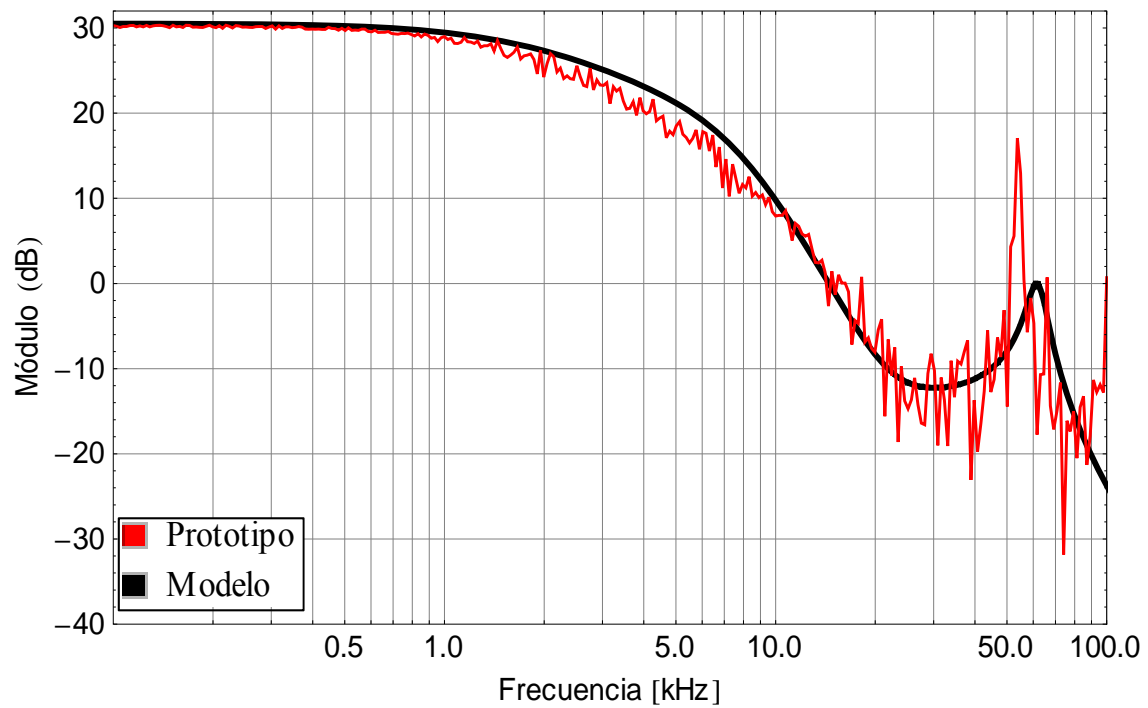


Figura 5-1

Diagrama de Bode en módulo y fase de la respuesta en frecuencia del Test1

TEST 2: PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_1=0.4$	$\tau_2=0.3$	$100\text{Hz}-100\text{kHz}$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$\Gamma=1$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=15V$	$V_x=18V$	$R=7\Omega$	$\Gamma_l=1$	

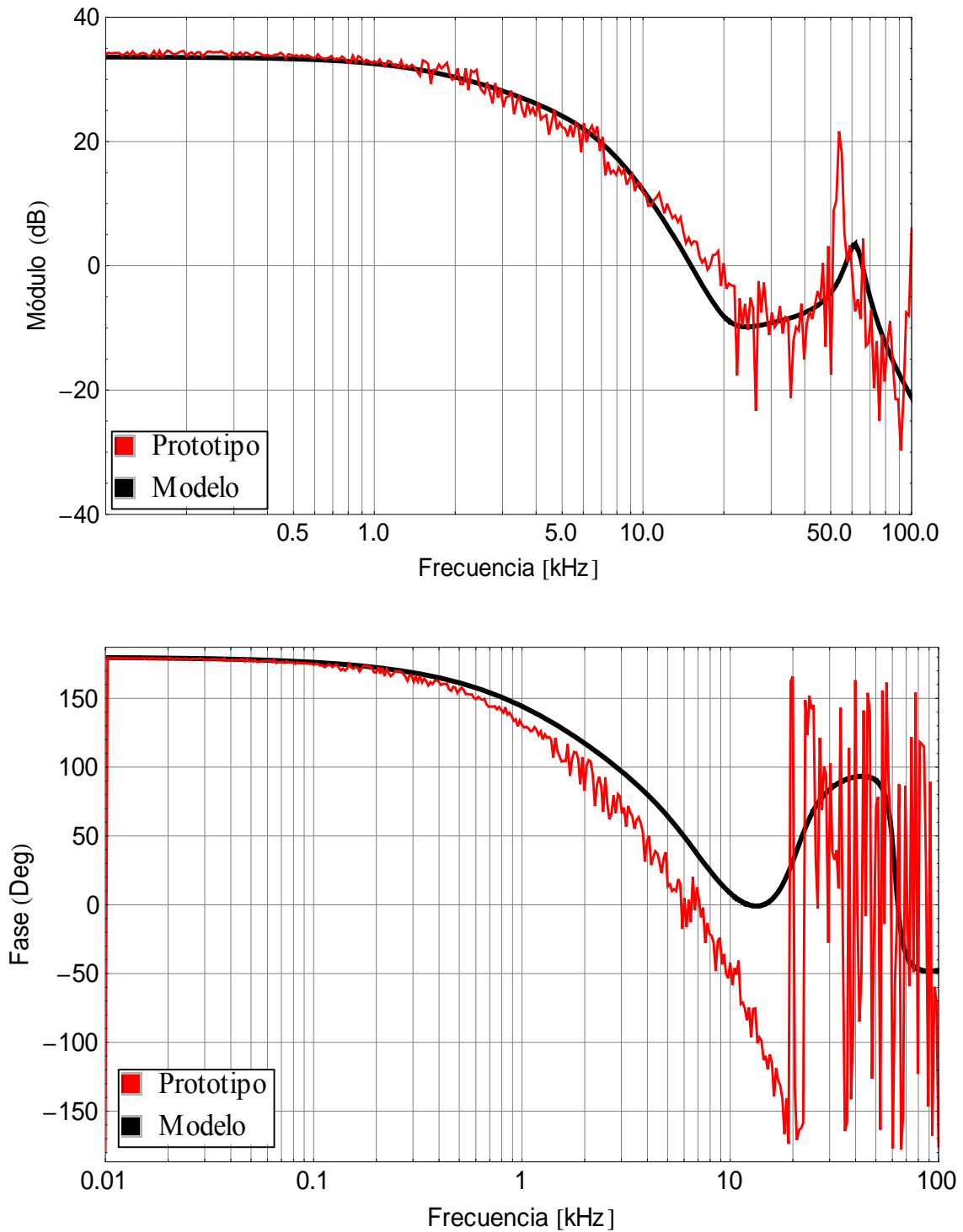
**Figura 5-2**

Diagrama de Bode en módulo y fase de la respuesta en frecuencia del Test 2

TEST 3: PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_1=0.4$	$\tau_2=0.33$	$100\text{Hz}-100\text{kHz}$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330\text{nF}$	$C_p=220\text{nF}$	$\Gamma=1$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=15V$	$V_x=18V$	$R=7\Omega$	$\Gamma_l=1$	

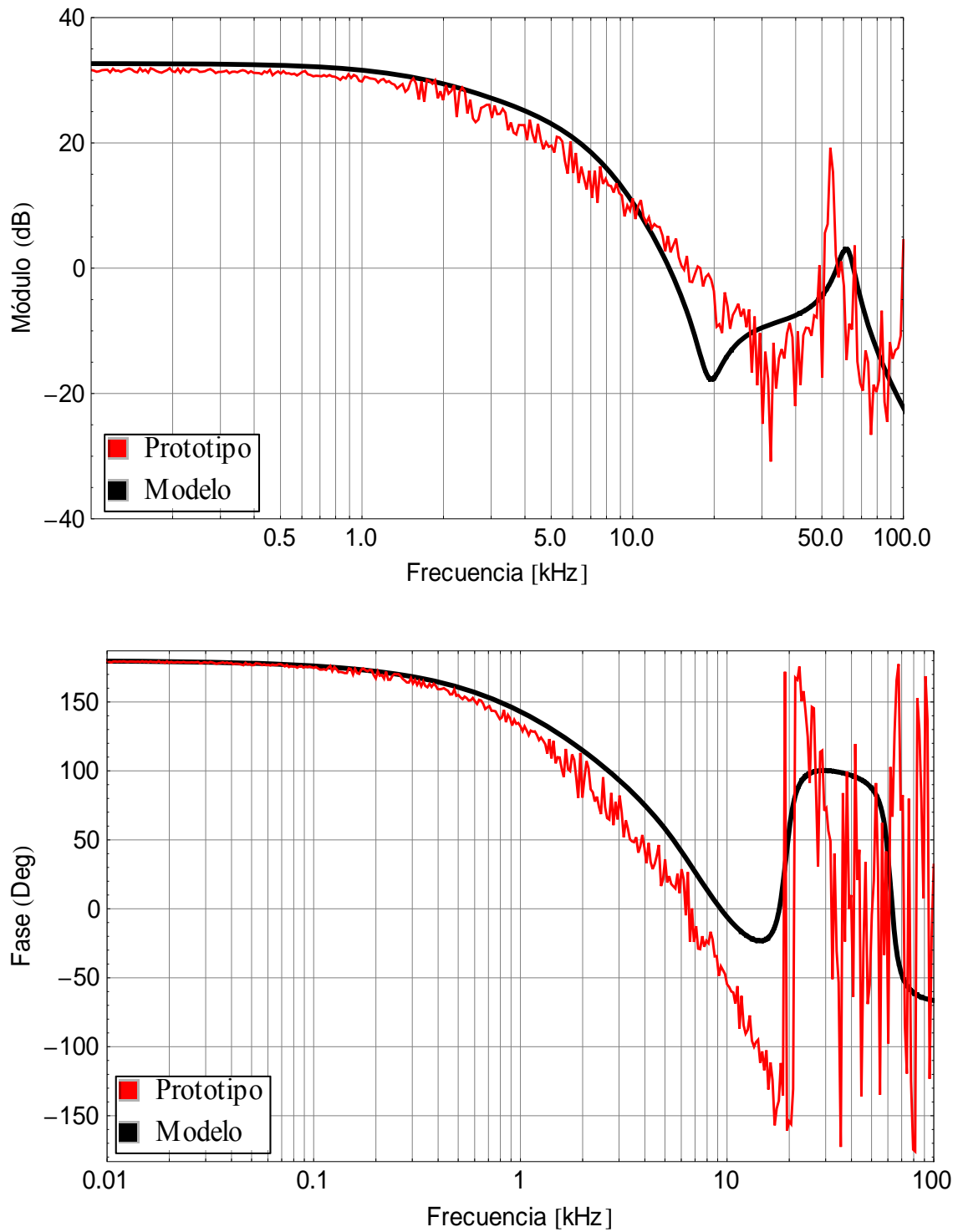


Figura 5-3

Diagrama de Bode en módulo y fase de la respuesta en frecuencia del Test 3

TEST 4: PARAMETROS DE CONTROL				
$f=56391\text{ Hz}$	$\tau_l=0.4$	$\tau_2=0.25$	$100\text{Hz}-100\text{kHz}$	
PARÁMETROS CONSTRUCTIVOS				
$L_s=38\mu H$	$C_s=330nF$	$C_p=220nF$	$\Gamma=1$	$C_F=29\mu F$
OTROS				
$V_e=20V$	$V_x=24V$	$R=7\Omega$	$\Gamma_l=1$	

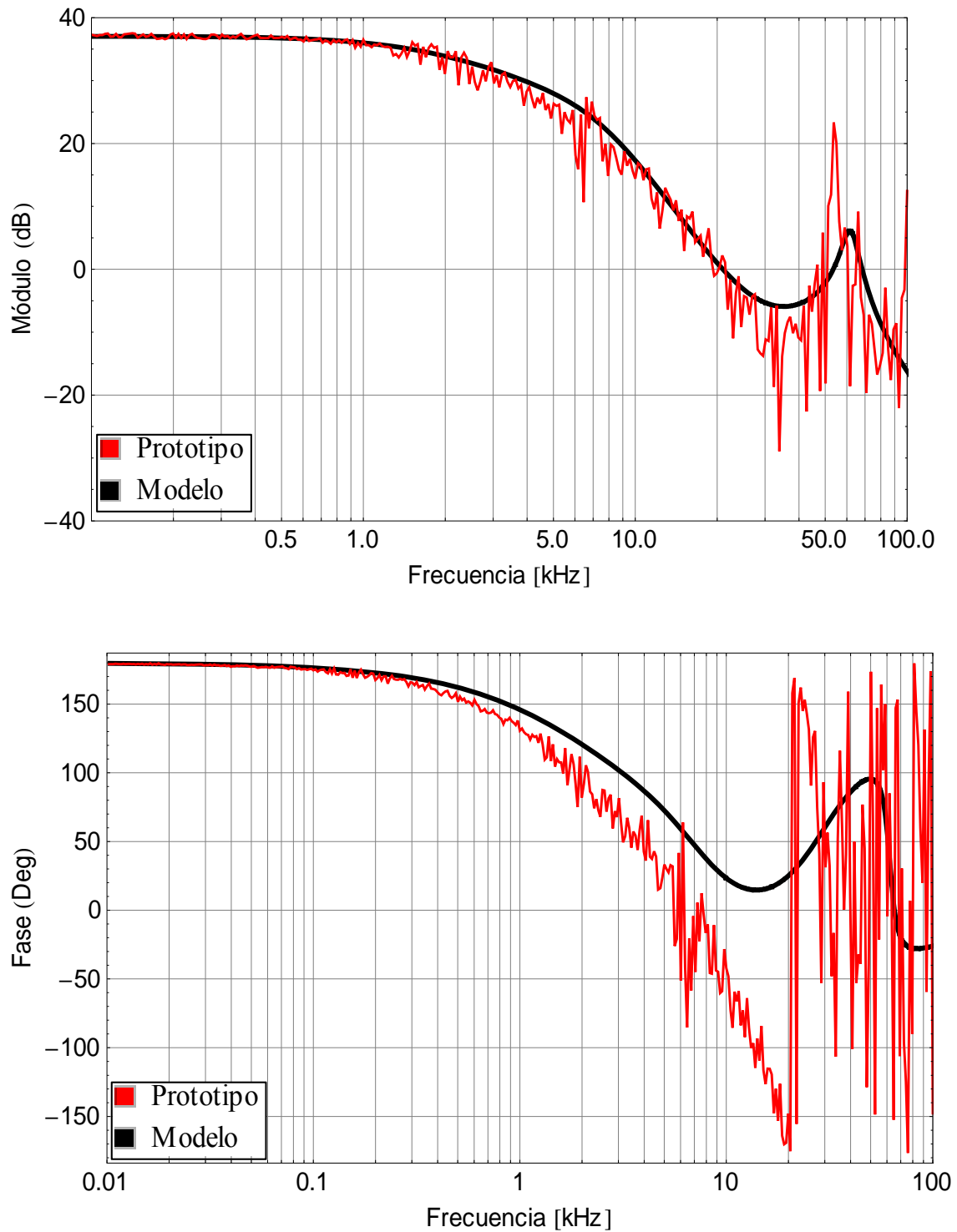


Figura 5-4

Diagrama de Bode en módulo y fase de la respuesta en frecuencia del Test 4

5.11 Conclusiones

En el desarrollo de este capítulo se han estudiado las ecuaciones generales de la topología multinivel, y se ha presentado un método que permite la linealización del sistema entorno a un punto de equilibrio.

La obtención de esta linealización se ha descrito de una manera genérica, y basta introducir los valores en el punto de equilibrio que se desee estudiar para obtener la función de transferencia que relaciona cualquier variable de estado con cualquier magnitud de control. Se ha obtenido una representación matricial del método, e incluso se han calculado los coeficientes de las matrices en su forma normalizada.

Por último, se ha validado el modelo linealizado en torno a un punto de equilibrio elegido, comparando los resultados con los obtenidos del prototipo de laboratorio, quedando así suficientemente probada la validez del modelo.

5.12 Bibliografía

- [1] *Witulski, A.F.; Hernandez, A.F.; Erickson, R.W.*, “Small signal equivalent circuit modeling of resonant converters”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol.6, nº1, pp.11-27, Jan 1991.
- [2] *Agarwal, V.; Bhat, A.K.S.*, “Small signal analysis of the LCC-type parallel resonant converter using discrete time domain modeling”, *Power Electronics Specialists Conference*, pp.805-813 vol.2, Jun 1994.
- [3] *Agarwal, V.; Bhat, A.K.S.*, “Small signal equivalent circuit modeling of the LCC-type parallel resonant converter”, *Power Electronics and Drive Systems*, pp.146-151 vol.1, Feb 1995.
- [4] *Chien-Hsuan Chang; En-Chih Chang; Chun-An Cheng; Hung-Liang Cheng; Sheng-Chang Lin*, “Small Signal Modeling of LLC Resonant Converters Based on Extended Describing Function”, *Computer, Consumer and Control (IS3C)*, pp.365-368, June 2012.
- [5] *Buccella, C.; Cecati, C.; Latafat, H.; Pepe, P.; Razi, K.*, “Linearization of LLC resonant converter model based on extended describing function concept”, *Intelligent Energy Systems (IWIES), 2IEEE International Workshop*, pp.131-136, Nov. 2013.
- [6] *Cheng, B.; Musavi, F.; Dunford, W.G.*, “Novel small signal modeling and control of an LLC resonant converter”, *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, pp.2828-2834, March 2014.
- [7] *Aboushady, A.A.; Ahmed, K.H.; Finney, S.J.; Williams, B.W.*, “Linearized Large Signal Modeling, Analysis, and Control Design of Phase-Controlled Series-Parallel Resonant Converters Using State Feedback”, *Power Electronics, IEEE Transactions*, vol. 28, nº8, pp. 3896-3911, Aug. 2013.

-
- [8] *Juan A. Martín*. “Aportación al diseño de convertidores continua-continua para alta tensión de salida basados en la topología resonante PRC-LCC”. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo 2001.
- [9] *Xiaodong Li; Hong-Yu Li; Gao-Yuan Hu*, “Modeling of a fixed-frequency resonant LLC DC/DC converter with capacitive output filter”, Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), pp.5456-5461, Sept. 2013.
- [10] *Zahid, Z.U.; Lai, J.-S.J.; Huang, X.K.; Madiwale, S.; Hou, J.*, “Damping impact on dynamic analysis of LLC resonant converter”, Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), pp.2834-2841, March 2014.
- [11] *Martin-Ramos, J.A.; Villegas Saiz, P.J.; Pernia, A.M.; Diaz, J.; Martinez, J.A.*, “Optimal Control of a High-Voltage Power Supply Based on the PRC-LCC Topology With a Capacitor as Output Filter”, Industry Applications, IEEE Transactions, vol. 49, n°5, pp.2323-2329, Sept.-Oct. 2013.

CONCLUSIONES

Como finalización a este trabajo, en este capítulo se destacan los logros conseguidos durante el desarrollo de esta tesis, así como las posibles líneas de investigación que tomando como punto de partida esta obra, pueden profundizar en este tipo de topología.

6 Conclusiones finales

Durante el desarrollo de esta tesis, se ha abordado el problema que tiene el diseño de una fuente de alimentación que ha de trabajar en rangos de potencias muy dispares manteniendo tensiones de salida elevadas en todos los casos. Los diseños tradicionales con un solo puente tienen que trabajar con valores de corrientes elevadas para mantener los niveles de tensión, y trabajando en bajas potencias como es el caso de fluoroscopia, obligan al convertidor a trabajar con dichas corrientes durante un intervalo de tiempo grande. Adicionalmente, estos diseños se hacen para cubrir todo el rango de funcionamiento por lo que se calculan para tensión mínima de entrada, lo que implica que ante un aumento de la tensión de entrada, las corrientes crecen rápidamente. Todo ello redundaría en una situación perniciosa para los elementos de conmutación, que han de ser sobredimensionados para aguantar dichas corrientes y que han de tener un sistema de refrigeración sobredimensionado para evitar su sobrecalentamiento.

Para evitar este problema, se ha profundizado en el estudio de la topología multinivel propuesta a partir de una topología resonante paralelo con condensador de filtro a la salida. A esta topología se ha añadido una rama adicional a modo de multinivel, que modifica el tanque resonante modificando el valor de la inductancia del convertidor en modo de fluoroscopia, e introduciendo un grado de libertad nuevo en el sistema (ciclo de trabajo auxiliar) que permite varias combinaciones en la tensión de salida del inversor. Esto conlleva una serie de ventajas:

- La presencia de dos puentes inversores permite diseñar el convertidor para una tensión de entrada deseada.
- Gracias a la inclusión de un parámetro adicional de control como es el ciclo de trabajo auxiliar, se puede obtener una regulación precisa de la tensión de salida del inversor independientemente de las fluctuaciones de la tensión de entrada.
- Permite obtener una forma de onda, cuyo armónico principal cobra suficiente importancia como para despreciar el resto de armónicos sin cometer demasiado error, y por tanto, obtener un sistema en función de funciones senoidales y cosenoidales simple.

- Permite regular la potencia entregada a la carga simplemente variando el ciclo de trabajo auxiliar sin tener que modificar el ciclo de trabajo principal. Esto implica además que, en el caso de una señal simétrica, se mantienen los desfases entre las distintas magnitudes aunque se varíe el ciclo, lo que es especialmente útil para la regulación de funcionamiento en zona óptima.
- Desconectando la rama auxiliar (modo fluoroscopia), el transformador auxiliar se convierte en una inductancia magnetizante que modifica las propiedades del circuito resonante mediante la obtención de una inductancia total más grande, lo que beneficia al sistema ya que se traduce en una menor corriente resonante, reduciendo así las pérdidas generadas en los elementos de conmutación.

Para dar forma a la idea de incluir una rama multinivel en el sistema, ha sido necesario dar validez a la viabilidad de la topología propuesta. Para ello se han seguido los siguientes pasos:

- Se han aplicado ciertas simplificaciones para poder modelizar matemáticamente el sistema, obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales que tienen suficiente precisión como para conocer con suficiente exactitud el comportamiento de la topología descrita.
- De las ecuaciones diferenciales obtenidas, se ha realizado un estudio en gran señal y validado, observando que el modelo se comporta como una envolvente de la señal original manteniendo la información de los transitorios que se producen con el cambio de un punto de trabajo a otro en el que se obtienen los valores máximos y mínimos de la magnitud estudiada, por lo que resulta muy útil para que el diseñador dimensione correctamente los elementos que componen el convertidor sin miedo a que se sobrepase algún límite y se dañe algún componente.
- Se ha obtenido un modelo en régimen permanente sencillo que permite conocer los valores en los que funciona de forma estable un sistema como el propuesto, y se ha validado mediante un prototipo de laboratorio. A partir de él, se han obtenido varias curvas asociadas a puntos de funcionamiento bajo ciertas condiciones que pueden resultar de interés para el diseñador, teniendo en cuenta,

que es posible reproducir otras curvas que se consideren necesarias sin más que realizar algunas iteraciones en el modelo propuesto bajo los condicionantes que se quieran graficar.

- Se ha obtenido un modelo en pequeña señal que permite el diseño de un sistema de control en bucle cerrado para el convertidor, de forma que entorno a un punto de equilibrio, se pueda regular ante pequeñas perturbaciones en los parámetros de entrada del sistema.

6.1 Futuros trabajos

El modelo aquí propuesto se considera con suficiente precisión como para la descripción del comportamiento de una topología multinivel como la propuesta. Sin embargo, es posible profundizar el estudio en ciertas partes que exceden el cometido de esta tesis. Cabe destacar los siguientes puntos de continuación:

- Diseñar el sistema de regulación y control de la topología propuesta. Es sin duda uno de los trabajos que completan el modelo propuesto en esta obra, ya que con la inclusión del ciclo de trabajo auxiliar, se abre la puerta a nuevas estrategias de control.
- Estudiar el comportamiento del sistema mediante la inclusión de más ramas multinivel.
- Modelado más preciso del comportamiento de los transformadores principal y auxiliar.
- Estudiar el comportamiento de la topología en un régimen de trabajo sub-resonante.
- Estudiar variaciones topológicas en las cuales las bobinas magnetizantes formen parte del circuito resonante.

