

GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE SEÑALES Y SISTEMAS PARA SU APLICACIÓN A LA DESCRIPCIÓN, RESOLUCIÓN Y PARAMETRIZACIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Autor: Juan Heredia Juesas

Tutor: Emilio Gago Ribas

***Programa de Doctorado: Tecnologías de la Información y
Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM)***

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, de Computadores y Sistemas.

Universidad de Oviedo

*A mi hermano down Miguel,
un ingeniero en un universo paralelo
y un ángel en el mío*

Agradecimientos

Puede resultar paradójico que lo último que escriba en esta tesis sea lo primero que se aparezca, pero bien es cierto que todo el trabajo que hay después de estas dos páginas no habría sido posible sin la ayuda de muchas personas y entidades y, como de buen nacido es ser agradecido, siempre está bien hacer un recordatorio de todos los que han pasado a lo largo de estos cuatro años, y pico, para llevar a buen puerto esta tesis.

En primer lugar dar las gracias a D. Emilio Gago Ribas por su dirección de la tesis, por su orientación, correcciones, ideas y aportaciones, por darme la oportunidad de desarrollar una tesis meramente matemática, una de mis predilecciones, dentro del ámbito de la ingeniería de telecomunicaciones y por la libertad que me ha dado para desarrollarla, por todo el tiempo que me ha dedicado para la redacción de informes, diseño de gráficas, figuras y esquemas, por darme la oportunidad de introducirme en las actividades docentes, que me han resultado de gran agrado, y por las facilidades que me ha dado para poder asistir a congresos y realizar estancias en otras universidades, gracias a lo cual he recorrido medio mundo.

Oficialmente he de agradecer las becas recibidas para la realización de la tesis y estancias en el extranjero por parte del Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Oviedo y por parte de la Ficyt, a través del programa Severo Ochoa, del Principado de Asturias, así como por parte del programa de becas del Banco Santander Iberoamérica para Jóvenes Profesores e Investigadores para la realización de una de las estancias.

Tengo que dar infinitas gracias a mi familia, a mis padres Delfín y M^a Ángeles por su paciencia, constancia, preocupación y confianza en mí, por sus muchos esfuerzos y detalles diarios a los que sólo se llega por el hecho de ser padres, y a mis hermanos Laura, Luis y Miguel por hacerme desconectar con cuestiones diametralmente opuestas, en especial a mi hermana Laura por la excelente gestión de muchos de mis viajes que me ha facilitado mucho todos los trámites.

Es inevitable nombrar a todos los compañeros de área de Teoría de Señal y Comunicaciones, desde los profesores a los compañeros del *Taburdiu*, Ana, Andreea, Carlos, Cebrián, Dani, George, Jaime, Jana, Kike, Marta, Miguel, Nuria, Pablo, Ramona y René, combatientes no sólo con su tesis doctoral y compañeros de pelea no sólo contra la burocracia, los cuales, aunque con temáticas de trabajo diferentes pero con alguna ludopatía en común, siempre me han ayudado en lo que he necesitado, particularmente agradecer a Miguel López por su impagable ayuda como 'informático' en cuestiones técnicas y por la cantidad de veces que me ha acercado a casa a unas horas en las que sólo el vigilante de seguridad paseaba por los pasillos a oscuras de la universidad.

Recordar también a los que han pasado delante de mí, Fran Varona, Abdelaziz Serroukh y Manuel Carril, intentando una tesis doctoral en el mismo ámbito, consiguiendo abrir el camino en algunos aspectos para que yo logre finalizar ésta.

Agradecer a Rafael de la Madrid por su acogida en la Lamar University, en Beaumont, Texas, por sus esfuerzos para librar la cantidad de trabas que los americanos ponían para dejarme una habitación en el campus, pero sobre todo por introducirme en el estudio de los espacios de Hilbert equipados, que han dado pie a un alto porcentaje de mi tesis. A Song, el chino postdoc de mi sala, el único al que entendía al hablar en inglés en Texas, y a su hija, que me mantenía la silla caliente antes de que yo llegara. Agradecer a los chicos que habían ganado un concurso para la NASA que me dejaran pasar alguna mañana con ellos ya que, aunque sólo fuera pegando plexiglás con estudiantes de magisterio, puedo decir que un día trabajé para la NASA. Y a los innumerables miembros de

la tribu de negros raperos que entraban y salían del cuarto de mi compañero de habitación y que dormían en el sofá por hacerme valorar más aún el lugar donde vivo. *Thank you.*

También darle las gracias a Ibrahim Akduman por darme la oportunidad de realizar una estancia en la Istanbul Technical University, en Estambul, la ciudad más bonita y caótica que conozco hasta el momento, donde cada atardecer es un espectáculo, facilitándome un apartamento con vistas al Bósforo. A todos sus estudiantes, especialmente a Mehmet Çayören, Mehemet Abbak y Tolga por su fantástico trato, sus tés y los intercambios culturales. Agradecer también a toda la gente anónima del campus que ofrecía su coche o moto para recorrer el largo tramo desangelado pero de impresionantes vistas que había desde mi apartamento en el campus hasta la facultad y en especial al vendedor de pizzas que me ayudó a llevar un enorme ventilador en su moto. *Teşekkürler.*

Muchas gracias también a Héctor Vila y su mujer M^a Rita, por abrirme las puertas de la Universidad Nacional de Rosario, en Argentina, a Elizabeth Tapia por su gestión para mi estancia en el CIFASIS y a todos los chicos que trabajaban allí, Natalia, Flavio, Germán, Patricio, Maxi, Fernando, Lucas, Javi y Pablo por su enorme simpatía, sus partidos de fútbol argentino y su asado. Mención especial a Pedro Marangunic, profesor de la facultad de ciencias, por todas las tardes que me dedicó en su humilde despacho para intercambiar ideas sobre la variable compleja y los espacios de Hilbert. Gracias a todos los argentinos que hicieron que le agarrara cariño a esa tierra, a los que me enseñaron una lengua española que desconocía, a los que me aconsejaban que agarrara las cosas en vez de cogerlas y a los que no llegaban a entender que yo no era gallego, sino asturiano. *Muchas gracias.*

Quisiera también recordar a todos con los que me he cruzado en mis diferentes congresos, al taxista de Kuala Lumpur que me pidió que le contara mi ponencia camino del hotel, a la china de Hong Kong que, al no saber pronunciar mi nombre, lo deletreaba en inglés y me llamaba Mr. Yeiyueyan, a los americanos que me dejaron pasar a ver un partido de rugby universitario en Seattle y un largo etcétera.

También agradecer a todos los que en este tiempo se han preocupado por mi tesis y me han dado ánimos para que la llevase adelante. Mucha suerte a todos lo que aún os encontráis camino de finalizarla.

Finalmente, agradecerte a ti que has llegado a leer hasta aquí. No te cortes, lo interesante está a partir de la página siguiente. Y no te preocupes, las ecuaciones integrales son astringentes.

Muchas gracias.

Juan Heredia

Resumen

La Teoría de Señales y Sistemas (SST) desempeña un papel fundamental en la formación académica y profesional en las diferentes áreas de la ingeniería eléctrica (procesado de señal, EM, acústica, mecánica cuántica. . .) así como en otras muchas áreas científicas. Aunque muchos autores presentan esta teoría siguiendo un esquema que es válido para el análisis práctico de muchos sistemas, habitualmente se evita tratar con conceptos más generales que limitan las explicaciones asociadas a la resolución de una gran cantidad de problemas físicos. Estas limitaciones están relacionadas con la interpretación matemática y física de muchos conceptos que subyacen bajo la SST: (i) la definición de las funciones generalizadas como la delta de Dirac sin considerar la rigurosidad matemática de la teoría de las distribuciones, (ii) el análisis de sistemas lineales invariantes en los dominios tiempo-frecuencia realizando el análisis espectral bajo la transformada de Fourier solamente, (iii) el análisis de problemas de variable discreta y continua por separado, etc.

Estas simplificaciones dejan de lado muchos problemas importantes que deben ser analizados bajo la SST pero no encajan en los desarrollos actuales de la teoría. Esto es particularmente importante cuando se enfoca el análisis los problemas físicos (ecuación + condiciones de contorno) bajo la SST: (i) problemas en el dominio espacial, que suelen ser lineales no invariantes, (ii) el análisis en el dominio del tiempo de sistemas lineales no invariantes (ej. el modulador en amplitud), (iii) el análisis espectral bajo otro tipo de transformadas, en relación con las representaciones habituales que utiliza diferentes funciones de onda como funciones base (ondas cilíndricas, ondas esféricas, haces Gaussianos, haces complejos, wavelets. . .), (iv) el análisis de la teoría de las funciones de Green como caso particular de la SST, (v) la consideración de la teoría de las distribuciones junto con las funciones ordinarias a través de la teoría de los espacios de Hilbert equipados, (vi) la ampliación de la SST habitual a funciones de variable compleja con el fin de entender la continuación de coordenadas reales a complejas y (vii) la generalización del análisis de operadores no lineales, así como otros muchos tipos de problemas.

Los resultados de la presente tesis doctoral tratan de dar respuesta a algunos de estos interrogantes. Una vez presentado el resumen de la última versión de la GSST (Generalized Signals & Systems Theory) enmarcado adecuadamente en las líneas de investigación correspondientes, se desarrollan los capítulos principales:

- El análisis generalizado de los cambios de base (Generalized Transform Changes, GTC) en espacios de dimensión infinita, que permiten la obtención de los coeficientes de una señal representada en términos de una base a partir de los coeficientes en otra base, inclusive el caso de que la misma señal se pueda representar en espacios diferentes.
- El análisis espectral generalizado (Generalized Spectral Analysis, GSA) de sistemas lineales (invariante o no invariante) bajo cualquier tipo de transformada, que permite la obtención de los coeficientes de una señal a la salida de un sistema en función de los coeficientes de la señal de entrada, aún cuando el sistema actúe entre espacios diferentes.
- La adecuación de los espacios de Hilbert equipados (Rigged Hilbert Spaces, RHS) a la GSST, reestructurando los espacios de señal desde el principio, de forma que se dé cabida formal a todo tipo de funciones, funciones generalizadas que no pertenezcan a un espacio de Hilbert y distribuciones bajo un mismo marco.
- Se presentan asimismo, diferentes ejemplos de los resultados obtenidos.

Con el fin de mejorar la comprensión de los desarrollos y resultados obtenidos, se ha incluido un gran número de figuras y tablas. La tesis finaliza con las conclusiones generales más importantes así como las líneas futuras (algunas ya iniciadas) asociadas a la última versión de la GSST obtenida en la tesis.

Abstract

The Signals and Systems Theory (SST) plays a fundamental role in the academic and professional background in different areas of electrical engineering (signal processing, EM, acoustics, quantum mechanics...) as well as in many other scientific areas. Although many authors present this theory following a scheme which is valid for the practical analysis of many systems, they usually avoid dealing with general concepts that limit the explanation associated with the resolution of a large number of physical problems. These limitations are related to the mathematical and physical interpretation of many concepts which underlie the SST: (i) the definition of the generalized functions such as the Dirac delta without considering the mathematical rigor of the theory of distributions, (ii) the analysis of linear invariant system in the time-frequency domain by performing spectral analysis under the Fourier transform only, (iii) the analysis of continuous and discrete variable problems separately, etc.

These simplifications leave out many important problems that should be analyzed under the SST but do not fit into the current developments of the theory. This is particularly important if the analysis focuses on physical problems (equation + boundary conditions) under the SST: (i) problems in the spatial domain, which are often linear non invariants, (ii) the analysis in the time domain of linear non-invariant systems (eg. amplitude modulator), (iii) the spectral analysis under other transforms, in connection with the usual representations using different wave functions as a base functions (cylindrical waves, spherical waves, Gaussian beams, beams complex, wavelets...), (iv) the analysis of the Green's functions theory as a particular case of the SST, (v) the consideration of the theory of distributions together with the ordinary functions through the theory of rigged Hilbert spaces, (vi) the extension of the usual SST to complex variable functions in order to understand the complex continuation of real coordinates and (vii) the generalization of the analysis of nonlinear operators, as well as many other types of problems.

The results of this doctoral thesis try to answer some of these questions. Once the summary of the latest version of the GSST (Generalized Signals & Systems Theory) is presented and properly framed on the corresponding research lines, the main chapters are developed:

- *The general analysis of base changes (Generalized Transform Changes, GTC) in infinite dimension, allowing obtaining the coefficients of a signal represented in terms of a base from the coefficients in another base, even if that same signal is represented in different spaces.*
- *The Generalized Spectral Analysis (GSA) of linear systems (invariant or non invariant) under any kind of transform, which allows to obtain the coefficients of the output signal of a system in terms of the coefficients of the input signal, even when the system acts between different spaces.*
- *The adaptation of the Rigged Hilbert Spaces (RHS) to the GSST, restructuring the signal spaces from the beginning, so that all kinds of functions, generalized functions that do not belong to a Hilbert space and distributions may be analyzed within the same framework.*
- *Different examples of the results are also presented.*

In order to improve the understanding of the developments and results, a large number of figures and tables have been included. The thesis concludes with the most important general conclusions and future lines (some already initiated) associated with the latest version of the GSST obtained in the thesis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Marco general de la Tesis	1
1.2. Antecedentes y objetivos	1
1.3. Estructura del documento	10
2. Resumen de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas	17
2.1. Introducción	17
2.2. Esquema general	17
2.3. Espacio de señales	20
2.3.1. Estructura de espacio vectorial	20
2.3.2. Definición del álgebra en los espacios de señales	23
2.3.3. Bases y representación general en términos de una base	24
2.3.4. Problemática de la dimensión infinita y pseudobases	27
2.3.5. Bases ideales	29
2.3.6. Transformadas y dominios transformados	32
2.4. Operadores y sistemas	34
2.4.1. Espacio de operadores	34
2.4.2. Transformadas desde el punto de vista de operadores	39
2.4.3. Caracterización de una señal a través de un sistema	39
2.4.4. Análisis espectral de una señal a través de un sistema	45
I GSST-v1d	49
3. Resultados Previos	51
3.1. Ortogonalidad e independencia lineal	51
3.2. Relación entre los autovalores y el conjunto de respuestas al impulso de un sistema lineal	52
3.3. Relación entre combinación lineal y producto escalar	55
3.3.1. Comprobación de que es un producto escalar	56
3.3.2. Comprobación de la igualdad	57

4. Cambios de Base	63
4.1. Introducción	63
4.2. Desarrollo general	63
4.3. Relación entre los dominios real y espectral	66
4.4. Relación con el Análisis Espectral Generalizado	71
4.5. Casos particulares	73
4.5.1. Espacios euclideos de dimensión finita	73
4.5.2. Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$	76
4.5.3. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$	79
4.5.4. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$	84
4.5.5. Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$	93
4.5.6. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I	98
4.5.7. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II	107
4.5.8. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$	112
4.6. Resumen de las expresiones del cambio de base	120
4.7. Conclusiones	122
5. Análisis Espectral Generalizado	125
5.1. Introducción	125
5.2. Desarrollo general	127
5.3. Casos particulares	133
5.3.1. Operador dentro del mismo espacio de señal	133
5.3.2. Operador dentro del mismo espacio de señal y mismo conjunto de funciones base	135
5.3.3. Conjunto de funciones base como autofunciones del sistema	135
5.4. Resumen de las expresiones del Análisis Espectral Generalizado	141
5.5. Conclusiones	141
6. Ejemplos cambios de base	143
6.1. Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$	143
6.2. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$	149
6.3. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$	155
6.4. Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$	166
6.5. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I	167
6.6. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II	176
6.7. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$	180

7. Ejemplos Análisis Espectral Generalizado	181
7.1. Operador desarrollo en serie de Fourier	181
7.2. Operador modulador	184
II GSST-v2	189
8. Espacios de Hilbert Equipados (RHS)	191
8.1. Introducción	191
8.2. Estructura inicial de los espacios de señal	193
8.2.1. Espacios de Banach	195
8.2.2. Espacios métricos	201
8.2.3. Espacios topológicos	202
8.2.4. Espacios de Hilbert	204
8.3. Formalismo de Dirac de Bras y Kets	206
8.3.1. Generalización del producto interno	206
8.3.2. Producto externo. Operadores	207
8.3.3. Propiedades	209
8.3.4. Ventajas e inconvenientes de la notación de Dirac	211
8.3.5. Espacios de dimensión finita	211
8.3.6. Espacios de dimensión infinita	217
8.4. Necesidad de los RHS	229
8.5. Construcción de los RHS	231
8.6. Algunas estructura finales de los espacios de señal	237
8.6.1. Funciones periódicas de variable discreta	237
8.6.2. Funciones de variable discreta	239
8.6.3. Funciones periódicas de variable continua	245
8.6.4. Funciones de variable continua	251
8.7. Relación entre los RHS a través de transformadas	265
8.7.1. DSF señales periódicas de variable discreta	267
8.7.2. TF señales de variable discreta	269
8.7.3. DSF señales periódicas de variable continua	278
8.7.4. TH señales de variable continua	282
8.7.5. TF señales de variable continua	291
8.8. Isomorfismos	305
8.8.1. $L^2(\langle X_0 \rangle)$ isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$	305

8.8.2.	$L^2(\mathbb{R})$ isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$	308
8.9.	Resumen de las condiciones para construir los RHS	317
8.10.	Conclusiones	318
9.	Cambios de Base desde el Punto de Vista de los RHS	321
9.1.	Introducción	321
9.2.	Relación del cambio de base con la notación de Dirac de Bras y Kets	322
9.3.	Interpretación del cambio de base bajo los RHS	325
9.4.	Casos particulares	331
9.4.1.	Espacios euclideos de dimensión finita	331
9.4.2.	Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$	331
9.4.3.	Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$	333
9.4.4.	Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$	335
9.4.5.	Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$	337
9.4.6.	Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I	338
9.4.7.	Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II	340
9.4.8.	Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$	342
10.	Ejemplos RHS	345
10.1.	Operador derivada en variable continua	345
10.1.1.	Estructura de los espacios de Hilbert equipados	347
10.1.2.	Análisis del sistema en el dominio real	350
10.1.3.	Análisis del sistema en el dominio espectral	355
10.2.	Operador modulador en variable continua	367
10.2.1.	Estructura de los espacios de Hilbert equipados	369
10.2.2.	Análisis del sistema en el dominio real	370
10.2.3.	Análisis del sistema en el dominio espectral	374
10.3.	Operador modulador en variable discreta	379
10.3.1.	Estructura de los espacios de Hilbert equipados	381
10.3.2.	Análisis del sistema en el dominio real	381
10.3.3.	Análisis del sistema en el dominio espectral	386
10.4.	Operador primera diferencia en variable discreta	391
10.4.1.	Estructura de los espacios de Hilbert equipados	393
10.4.2.	Análisis en el dominio real	395
10.4.3.	Análisis del sistema en el dominio espectral	398

10.5. Ejemplo de mecánica cuántica desde el punto de vista de la GSST: Barrera de potencial rectangular unidimensional	405
10.5.1. Obtención del conjunto de funciones base	406
10.5.2. Estructura de los espacios de Hilbert equipados	407
10.5.3. Análisis en el dominio real	409
10.5.4. Análisis en el dominio espectral	410
III Conclusiones y Líneas Futuras	413
11. Conclusiones Generales	415
12. Líneas Futuras	419
12.1. Desarrollo de la teoría de señales y sistemas	419
12.2. Aplicación de la GSST al análisis y parametrización de problemas físicos	421
12.3. Implementación de los resultados teóricos en el software SST	423
13. General Conclusions	425
14. Future Lines	429
14.1. Development of the signals and systems theory	429
14.2. Application of the GSST to the analysis and parameterization of physical problems	431
14.3. Implementation of the theoretical results in the software SST	432
IV Apéndices	435
A. Notación utilizada	437
B. Definiciones	445
B.1. Espacio topológico	445
B.2. Espacio métrico	445
B.3. Espacio normado y de Banach	446
B.4. Seminorma	446
B.5. Sucesión de Cauchy	447
B.6. Isomorfismo	447
B.7. Automorfismo	447
B.8. Formas hermitianas positivas	447
B.9. Espacio prehilbertiano y de Hilbert	448

B.10.	Identidad o relación de Parseval	449
B.11.	Adherencia de un conjunto	450
B.12.	Subespacio denso	450
B.13.	Espacio separable	450
B.14.	Identidad del paralelogramo	450
B.15.	Funcional lineal continuo	451
B.16.	Funcional antilineal continuo	451
B.17.	Distribuciones y funciones generalizadas	452
B.17.1.	Conjunto de funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$	452
B.17.2.	Definición a partir de una sucesión de funciones	452
B.17.3.	Definición a partir de funcionales	453
B.17.4.	Propiedades de las distribuciones	454
B.17.5.	Distribuciones ordinarias	455
B.17.6.	Distribuciones temperadas	456
B.17.7.	Prolongabilidad de distribuciones ordinarias a temperadas	456
B.18.	Medida de Lebesgue	456
B.18.1.	σ -álgebra del conjuntos	456
B.18.2.	Medida de un conjunto	457
B.18.3.	Medida exterior de un conjunto	457
B.18.4.	Conjuntos medibles en \mathbb{R}^n	458
B.18.5.	Medida de Lebesgue	458
B.18.6.	Conjuntos de medida nula	458
B.19.	Relación de equivalencia	459
C.	Teoremas	461
C.1.	Teorema del Binomio	461
C.2.	Teorema de Riesz-Fischer	461
C.3.	Teorema de Representación de Riesz	461
C.4.	Teorema de Riesz-Fréchet	462
C.5.	Teorema de isomorfismos en espacios de Hilbert	462
D.	Demostraciones Matemáticas	463
D.1.	TH a partir de la TF	463
D.2.	TF a partir de la TH	465
D.3.	TH [$\delta(x - x_0)$] a partir de TF [$\delta(x - x_0)$]	467

D.4. TH [sinc (ax)] a partir de TF [sinc (ax)]	468
D.5. TF [sinc (ax)] a partir de TH [sinc (ax)]	469
D.6. Sumatorio infinito de exponenciales complejas	471
D.7. DSF [cos ($\xi_0 x$)] a partir de T $_{\delta_0}$ [cos ($\xi_0 x$)]	475
D.8. DSF [$P_{0,\Delta}(x)$] a partir de T $_{\delta_0}$ [$P_{0,\Delta}(x)$]	476
D.9. T $_{\delta_0}$ [$P_{0,\Delta}(x)$] a partir de DSF [$P_{0,\Delta}(x)$]	477
D.10. DSF [K] a partir de T $_{\delta_0}$ [K]	480
D.11. DSF a partir de la TF en variable continua	481
D.12. TF a partir del DSF en variable continua	484
D.13. $\varepsilon(k; m\Omega_0)$	486
D.14. DSF a partir de la TF en variable discreta	488
D.15. TF a partir del DSF en variable discreta	490
D.16. T $_{\delta}$ [$\delta_0(n)$] a partir de DSF [$\delta_0(n)$]	492
D.17. TH [$T_{T_0}(t)$]	493
D.18. TH [$\Gamma(t)$]	494
D.19. Relación de equivalencia en \mathcal{L}^p	495
D.20. L^2 y l^2 son espacios de Hilbert	496
Bibliografía	499
Actividades en el Entorno de la Tesis	509

1. Introducción

1.1. Marco general de la Tesis

La presente Tesis Doctoral se enmarca dentro del programa de doctorado “Tecnologías de la Información y Comunicaciones Redes Móviles (TICRM)” con Mención de Excelencia MEE2011-0265¹ y ha sido desarrollada dentro de los siguientes proyectos de investigación:

1. “Análisis complejo, teoría de la señal en espacios complejos y su aplicación al análisis y parametrización de problemas electromagnéticos” financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología con Ref. TEC2006-12254-C02-01/TCM, desde el 01-10-2006 al 30-09-2010, cuyo investigador principal ha sido Emilio Gago Ribas.
2. “Desarrollo de nuevas antenas 3D en tecnología impresa basadas en materiales flexibles y conformables (FLEXANT)” financiado por la Consejería de Educación y Ciencia del Gobierno del Principado de Asturias con Ref. PC10-06, desde el 01-03-2011 al 31-12-2012, cuyo investigador principal ha sido Samuel Ver Hoeye.
3. “Técnicas de ‘imaging’ mediante problema inverso de dispersión: nuevos algoritmos y técnicas de medida (iScat)” financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación con Ref. TEC2011-24492, desde el 01-01-2012 al 31-12-2014, cuyo investigador principal es Fernando Las Heras Andrés.

Esta tesis parte de la idea de obtener una generalización de la Teoría de Señales y Sistemas que permita su aplicación tanto al análisis de los sistemas habitualmente estudiados con ella (circuitos, modulaciones, etc.) como al modelado de problemas físicos. Surge como continuación natural al Proyecto Fin de Carrera “Análisis General de la Teoría de Señales y Sistemas para su Aplicación al Modelado de Problemas Físicos”, [1], y a la Tesis de Máster “Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para el Análisis de Problemas Lineales No Invariantes”, [2], del programa de doctorado TICRM. Sin embargo este trabajo se enmarca dentro de una línea de investigación mucho más extensa que parte del estudio de problemas de dispersión electromagnética mediante técnicas asintóticas. Los resultados del análisis de este tipo de problemas daban a entender que sería posible desarrollar una teoría general que englobara una gran cantidad de problemas físicos, es decir, se ha ido tratando, no de buscar técnicas para la solución de tipos de problemas concretos, sino un marco teórico genérico, con rigurosidad matemática, que permita describir cualquier problema físico, ya sea de dispersión electromagnética, radiación de antenas, mecánica de fluidos, mecánica cuántica, acústica, tratamiento de señales digitales o analógicas, etc., cuando se aplican, a dicha teoría, las condiciones oportunas del problema. Todos los antecedentes de esta línea de investigación se describen a continuación siguiendo el orden cronológico en que se han desarrollado.

1.2. Antecedentes y objetivos

1. Durante los años 1991-1993, el Prof. Emilio Gago-Ribas (director de la presente tesis) estuvo trabajando durante dos años con el Prof. Leopold B. Felsen en el análisis detallado de la aplicación de técnicas asintóticas y técnicas analíticas de alta frecuencia a diferentes problemas electromagnéticos, [3]-[7]. Estos trabajos se enmarcaron dentro de una estancia

¹Resolución 06/10/2011, BOE 253 de 20/10/2011

de dos años financiada por el Ministerio español de Educación y Ciencia (MEC) con una beca de formación de personal investigador (FPI) en el extranjero. Dicha colaboración se recogió bajo el nombre “Analytical and Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Interaction with Complex Environments” y se desarrolló durante 6 meses en el *Center for Electromagnetic Research*, Northeastern University, Boston, EE.UU., y los posteriores 18 meses en *Polytechnic University & Weber Research Institute*, Nueva York, EE.UU.

2. Fruto de los trabajos desarrollados en dicha actividad, en el año 1996 se realizó una publicación, [8], en la que se recogen los resultados más importantes de los estudios realizados por el Prof. Emilio Gago Ribas en el marco de su estancia con el Prof. Leopold B. Felsen. En este trabajo se establecieron las bases para el análisis asintótico de estructuras periódicas y cuasi periódicas bajo iluminación de ondas con funciones de fase arbitrarias. El resumen conceptual final asociado a dichos estudios establece las bases del análisis asintótico de los modos de Floquet asociados a los procesos de dispersión de estructuras periódicas iluminadas por campos de fase arbitraria. Se establecieron así las bases del análisis en alta frecuencia (teoría de rayos, GTD, UTD) de estructuras periódicas, resultados que han sido ampliamente utilizados posteriormente por diferentes grupos de investigación de relevancia internacional.
3. Posteriormente, y como consecuencia de los resultados descritos previamente, se comenzó a realizar el estudio particular de los procesos de dispersión en alta frecuencia producidos por arrays periódicos iluminados por haces Gaussianos. Dado que muchos procesos de propagación se producen en forma de haces, resultaba de especial importancia práctica particularizar los resultados de la teoría de rayos de estructuras periódicas cuando dichos haces se modelan mediante la aproximación de haces Gaussianos.
4. Una de las formas de modelar los haces Gaussianos consiste en realizar una extensión analítica de las coordenadas reales de las fuentes a coordenadas complejas, esto es, $\bar{\mathbf{r}}' \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{\mathbf{r}}' \in \mathbb{C}^3$. Esto implica generar un espacio de propagación complejo a partir del espacio real. Con este tipo de técnicas, los haces Gaussianos se obtienen bajo dos aproximaciones: la aproximación compleja de campo lejano y la aproximación paraxial. En relación con esta metodología se realizaron diferentes estudios, [9]-[14], cuyas conclusiones principales se podrían resumir a través del siguiente esquema:
 - a) La continuación del espacio real a un espacio complejo contempla no solo las soluciones de haces Gaussianos (en realidad una aproximación que no es exactamente solución de la ecuación de onda) sino también soluciones más generales denominadas como haces pseudo-Gaussianos y haces complejos (todas ellas obtenidas como ‘deformaciones analíticas’ de la solución de onda cilíndrica a la ecuación de onda 2D en el dominio real producidas por la extensión compleja).
 - b) Estudiar el problema en el espacio complejo permite ‘generalizar’ el estudio de todas las aproximaciones en un único análisis (en el dominio real, cada aproximación se plantea como la solución a un problema diferente).
 - c) El análisis de las diferentes aproximaciones en el espacio complejo da lugar a parametrizaciones completas que recogen no sólo las soluciones habituales de haces Gaussianos sino la parametrización de nuevas soluciones (los citados haces pseudo-Gaussianos y haces complejos). Las aproximaciones de campo lejano y paraxial se unifican dentro del análisis complejo haciendo que el análisis de las regiones de validez de las diferentes soluciones se puedan parametrizar directamente mediante el estudio de diferentes magnitudes complejas (distancias complejas, ángulos complejos, etc.), todas ellas con un claro significado físico asociado.
 - d) A modo de ejemplo, se obtuvieron resultados tan destacables como que bajo el análisis

complejo se encuentran las condiciones para modelar haces donde la aproximación de campo lejano se vuelve solución exacta válida incluso en la posición ‘real’ de la fuente, [10]-[11].

- e) Todos estos resultados dieron lugar también a la aparición de conceptos asociados a la teoría de rayos y métodos de alta frecuencia en sus versiones complejas (rayos complejos, leyes de reflexión y difracción complejas, etc.).
5. Todos estos resultados indujeron a pensar que detrás de la extensión compleja no había una mera ‘herramienta matemática’ (paso al espacio complejo, operar en dicho espacio y vuelta al dominio real) que permitía unificar soluciones sino que era conveniente explorar en profundidad todo lo que podía haber asociado a la extensión compleja. En concreto, se abrieron las puertas a plantear una serie de problemas entre los que cabe citar:
- a) Todos los análisis que se habían llevado a cabo fueron bajo la extensión a espacios complejos de problemas 2D. Esto conllevaría estudiar lo que ocurre en problemas 3D – deformación de ondas esféricas en haces complejos, pseudo-Gaussianos o Gaussianos–.
 - b) Analizar el significado asociado a la teoría de rayos complejos y su traducción al espacio real de propagación.
 - c) Análisis de algunos problemas canónicos de dispersión electromagnética bajo iluminación de haces complejos y su parametrización en el espacio de distancias-ángulos complejos.
 - d) Estudiar si realmente la extensión compleja es una continuación analítica –como suelen mencionar las publicaciones que abordan esta problemática– o no. En este sentido cabe destacar que los resultados obtenidos indican claramente que la extensión del espacio real a un espacio complejo no es una continuación analítica de variable real a variable compleja.
 - e) Tratar de obtener algún sistema de coordenadas complejo –por ejemplo, un sistema de coordenadas cilíndricas complejas– que permitiera reformular todo el problema en términos directamente de coordenadas complejas.
 - f) Determinar el análisis y significado riguroso asociado a la resolución de la ecuación de onda bajo la teoría de funciones de Green: complexificar las coordenadas de las fuentes resulta ser equivalente a complexificar las coordenadas del punto de observación, lo que lleva directamente a tratar con funciones de Green en variable compleja, operadores diferenciales en versión compleja y, lo que es más importante, el tratamiento de la delta de Dirac en variable compleja. Un reducido grupo de autores han utilizado los métodos de complexificación para obtener diferentes versiones de la delta de Dirac en variable compleja bajo la complexificación de las coordenadas espacio-tiempo, $(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{t}) \in \mathbb{C}^4$; tómense como ejemplo las referencias [15]-[19].
6. Los problemas mencionados en el punto 5 dieron lugar a la división de los trabajos de investigación a realizar en dos ramas diferentes: (i) asociada directamente a la resolución de problemas de radiación y dispersión electromagnética, y (ii) asociada al estudio de la teoría de señal que pudiera facilitar el análisis riguroso de los problemas de complexificación. Ambas ramas deberían ser compatibles en el sentido de que la primera debería de proveer resultados concretos que pudieran servir como ejemplo para los análisis realizados en la segunda; y la segunda, que debería de dar resultados matemáticos que diesen ideas de análisis y/o explicaciones más rigurosas a los cálculos realizados en la parte de aplicaciones prácticas.

7. Análisis de Problemas de Radiación y Dispersión EM en espacios complejos:

Dentro de este apartado se han realizado diferentes estudios de especial interés, no sólo desde el punto de vista electromagnético sino, también como base para justificar la importancia de abordar una “forma de generalizar la teoría de S&S” que permita entender mejor gran parte del trasfondo asociado a dichos problemas; dentro de dichos estudios cabe destacar los siguientes, [20]-[47]:

- a) Análisis de las diferentes aproximaciones de haces complejos, en particular el análisis de las ondas cilíndricas no homogéneas (haces pseudo-gaussianos) en problemas bidimensionales. Dichas aproximaciones se han basado en el análisis de las magnitudes asociadas a la continuación de coordenadas reales a coordenadas complejas (en particular, distancias complejas y ángulos complejos, incluyendo la interpretación física asociada a dichas magnitudes). A su vez, el análisis exhaustivo de dichas magnitudes permitió el estudio de las que hemos dado por denominar como “aproximaciones complejas” (condiciones complejas de campo lejano, condiciones complejas de alta frecuencia, aproximaciones complejas junto con la aproximación paraxial, etc.).
- b) Fruto de estos estudios y de los resultados asociados se realizó la primera clasificación conocida por nosotros donde, en virtud de las diferentes aproximaciones complejas, era posible obtener diferentes soluciones a la ecuación de onda bidimensional en forma de haces con diferentes características, así como la forma de unificar todas las soluciones bajo una única “formulación compleja”.
- c) Los estudios previos determinaron también la realización de trabajos de aplicación concreta relacionados con la aplicación de la continuación analítica de espacios de coordenadas reales a complejas, destacando entre ellos:
 - 1) El problema de dispersión de un *strip* 2D conductor perfecto bajo incidencia de haces complejos y su parametrización en términos de distancias y ángulos complejos.
 - 2) Análisis de las corrientes inducidas en un plano conductor perfecto bajo la solución general de haces complejos y el análisis de las mismas bajo las diferentes aproximaciones complejas.
 - 3) Análisis asintótico en el dominio real complejo del problema de dispersión de un *strip* conductor incluyendo el análisis de las correspondientes “leyes complejas” de reflexión y difracción asociadas.
 - 4) Análisis del problema de un *strip* conductor semiinfinito bajo iluminación de haces complejos en el dominio espectral.
 - 5) Análisis del problema de regularización de los haces complejos y su relación con el análisis espectral de dichos haces.
 - 6) Análisis del problema de radiación de campos sin lóbulos laterales obtenidos/modelados a partir del problema de la fuente puntual compleja.
- d) Los resultados obtenidos del análisis de problemas concretos dieron lugar a poder extender dichos resultados a la resolución de problemas más generales, por ejemplo:
 - 1) La representación de haces complejos bidimensionales en términos de armónicos cilíndricos.
 - 2) La representación espectral de los haces complejos bidimensionales.

- 3) El análisis de haces complejos tridimensionales (extensión de las coordenadas 3D reales a coordenadas complejas).
 - 4) Problemas de radiación de haces complejos tridimensionales en los dominios real y espectral y su aplicación al análisis de la ecuación de Laplace 3D.
 - 5) La posibilidad de poder generar un “sistema de coordenadas complejo” en función de las distancias y los ángulos complejos (por ejemplo, un sistema de coordenadas “polar complejo”) y su posible aplicación al modelado de las ecuaciones iniciales complexificadas.
- e) Finalmente, destacar de nuevo que gran parte de los trabajos realizados dentro del análisis de problemas de radiación y dispersión electromagnética “complexificados” así como su posible interpretación y las dificultades asociadas a dichas interpretaciones fueron las que han ido dando lugar en gran medida a plantearse el problema de generar una “teoría generalizada de señales y sistemas”, primero en variable real para, posteriormente, estudiar su posible extensión a variable compleja. Esta segunda línea de investigación es la que se resume a continuación y dentro de la que se enmarca la presente tesis doctoral.

8. Análisis de la Teoría de Señales y Sistemas:

Después de los primeros estudios realizados en relación con el problema de complexificación en espacios y su aplicación a la descripción de problemas electromagnéticos, [9]-[14], se pensó que una de las formas de poder profundizar y entender dichos análisis pasaba por entender mejor la teoría de señales y sistemas y su posible extensión a variable compleja. En particular, en los trabajos [27]-[28] y [30]-[31] se presentaba ya un esquema de lo que denominamos en su momento *Complex Signal Theory* como el desarrollo de una teoría que permitiese enmarcar la continuación de funciones de variable real a funciones de variable complejas y su posible significado. A partir de ese momento, y de forma paralela a los trabajos prácticos realizados sobre problemas electromagnéticos, se comenzó a ver la posibilidad de elaborar dicha teoría. Uno de los primeros resultados que se reflejaron de los estudios iniciales fue que el hecho de que intentar establecer una *teoría de señal en variable compleja* conllevaba establecer previamente una *teoría de señal en variable real* descrita en la forma más completa y rigurosa posible y sin perder de vista su conexión con el análisis de problemas físicos. Algunos de los **problemas** más importantes que se hicieron notar se pueden resumir mediante el siguiente esquema:

- a) En primer lugar, la descripción de problemas físicos en variable real conlleva la resolución de ecuaciones de onda que pueden ser entendidos como sistemas descritos por ecuaciones en derivadas -1 dimensión- o diferenciales $-N$ dimensiones-.
- b) El método habitual de resolución de problemas físicos conlleva a su vez la resolución del problema de Green asociado al problema inicial; esta problemática está directamente conectada con el concepto de describir sistemas en términos de conjuntos de respuestas al impulso. Esto introducía el problema adicional de estudiar de forma rigurosa la delta de Dirac y otras funciones generalizadas asociadas, lo que lleva directamente a un estudio riguroso de la *teoría de distribuciones*.
- c) El análisis de la teoría de funciones de Green en el marco de la teoría de señales y sistemas sugirió también la idea de que tanto los problemas directos $-$ conocidas las fuentes y el sistema calcular la respuesta del mismo a dicha fuentes- como los inversos $-$ conocidas las fuentes y las respuestas, establecer el sistema que las relaciona- se podrían generalizar en el marco de una teoría general de señales y sistemas.

- d) Una buena parte de los problemas físicos (en nuestro caso particular, problemas EM), bien son problemas descritos por operadores lineales no invariantes –habitual en los problemas EM respecto de la variable espacial– o incluso por operadores no lineales –habituales en problemas inversos, o en problemas de mecánica cuántica, por ejemplo–. Resultaba entonces especialmente crítico establecer de una forma rigurosa una teoría general que enmarcase todos los casos.
- e) Los problemas descritos en los puntos previos (a, b, c y d, a modo de ejemplo) se complican aún más si pensamos en el problema de complexificar las variables descriptivas de los problemas: significado de una ecuación de onda en variable compleja, análisis de la delta de Dirac en variable compleja, extensión de la teoría de distribuciones a variable compleja, teoría de funciones de Green en variable compleja, etc.

Con estas ideas en mente, se pensó que la forma usual de abordar la teoría de señales y sistemas en la manera habitual (tómense como ejemplo las referencias [48]-[50]) permitía el análisis de una gran variedad de problemas –análisis de circuitos, teoría de la comunicación, aplicaciones al procesado de señal (DSP), etc.–, pero no daba respuesta a muchos de los interrogantes que se nos planteaban, especialmente teniendo en mente su posterior extensión al análisis de problemas en variable compleja. A modo de ejemplo, **algunos de los problemas** que no suelen tratarse habitualmente en la forma usual de la teoría de señales y sistemas son:

- a) La teoría de señales y sistemas no suele abordarse desde el principio como un problema algebraico en el que lo que se está analizando depende profundamente de la métrica, norma o productos escalares definidos, así como de los espacios de funciones sobre los que se está operando. Esto hace que de alguna forma se pierda el concepto de ‘en qué espacio estamos operando’, cuáles son sus propiedades y, muy en particular, el hecho de que la mayor parte de espacios de señales son de dimensión infinita (lo que hace que el álgebra cambie sustancialmente respecto al álgebra de dimensión finita habitual).
- b) En la teoría habitual tampoco suele abordarse el problema de que las variables involucradas puedan ser diferentes a la variable temporal, lo que hace que se pierda de alguna forma la relación entre la teoría de señal y la resolución de problemas físicos definidos habitualmente tanto en el tiempo como en el espacio –tómese como ejemplo el caso de las ondas planas como representación ‘espectral’ en términos de la transformada de Fourier de problemas en el espacio libre descritos por la ecuación de Helmholtz–.
- c) Tampoco se recoge explícitamente el hecho de que la respuesta al impulso de un sistema tiene que ver en realidad con un conjunto finito o infinito –este último el caso más habitual– de respuestas al impulso. Este hecho suele estar relacionado con el caso particular de que aunque se suele hablar de sistemas lineales, en realidad se está tratando siempre con sistemas lineales que son también invariantes. Cuando la propiedad de invarianza no se cumple, los resultados habituales son diferentes y hay que analizarlos en un contexto mucho más general.
- d) Tampoco se suelen analizar las transformadas desde un punto de vista general sino que se centran habitualmente en el caso particular de la transformada de Fourier, cuyas propiedades son bastante adecuadas desde el punto de vista del análisis de sistemas lineales e invariantes, pero que no lo son tanto cuando los sistemas son lineales no invariantes o incluso en el caso de sistemas no lineales.
- e) No suele abordarse tampoco la generalización de ver las transformadas como “representaciones de funciones de un cierto espacio en términos de un conjunto de funciones base”. Esto hace que se obvие también el hecho de analizar otro tipo de transformadas

y, en particular, que se obvие el problema de los “cambios de base en espacios de dimensión infinita”.

- f) Los esquemas habituales también suelen obviar el problema algebraico de explicar de forma rigurosa las transformadas habituales de variable compleja (transformada de Laplace y transformada Z habitualmente). Nótese, como ejemplo, que considerar funciones en la forma e^{sx} , con $s \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$ es un problema “dual” al de considerar funciones $e^{s\mathbf{x}}$, con $s \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$ (caso particular de complexificación de la variable real $x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{C}$).
- g) El tratamiento asociado a la delta de Dirac suele obviar el sustrato riguroso de la teoría de distribuciones o funciones generalizadas, [56]-[63], así como la influencia de esta teoría en la redefinición de los espacios de funciones iniciales de trabajo, aspectos que acaban requiriendo de la inclusión de nuevas teorías de señal como es el caso de los RHS (*Rigged Hilbert Spaces* –espacios de Hilbert equipados–, [64]-[71]). Nótese que estos “aparentes refinamientos” matemáticos están directamente relacionados con problemas que aparecen constantemente en la práctica (tratamiento de funciones tan sencillas como las funciones constantes u otras señales de energía infinita, requieren de dichas teorías para su correcta explicación desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas).

Teniendo en cuenta los antecedentes descritos tanto desde el punto de vista de la problemática general asociada a la teoría usual de señales y sistemas como a los problemas intrínsecos asociados a nuestra problemática, se comenzaron a dar los primeros pasos para lograr construir una Teoría Generalizada de Señales y Sistemas (*Generalized Signals & Systems Theory*, GSST). Los estudios realizados en la presente tesis así como gran parte de la actividad investigadora del doctorando se han enmarcado dentro de la presente línea de investigación. Los estudios, trabajos y resultados obtenidos hasta el momento se pueden resumir mediante el siguiente esquema:

- a) Se construyó una primera versión de la GSST (GSST-v1a) basada en la representación de un problema general de señales y sistemas definiendo una estructura algebraica “desde la base”, esto es, basada en la definición de los espacios de señales de trabajo junto con la estructura algebraica correspondiente (métrica, norma y producto escalar asociados al espacio). Todo ello se basó en la generalización del espacio de señales incluyendo una variable τ genérica -variable real- que representase tanto variables discretas como variables continuas (estas últimas a su vez pudiendo representar variables particulares como el tiempo, una variable espacial o cualquier otra variable física de interés). La primera versión incluía ya el problema de tener que considerar, de forma general, subconjuntos de funciones; así, se incluyó la notación particular $u(\tau; \mu)$ que permitía identificar subconjuntos de funciones en la variable real τ ; la nueva variable μ podría ser finita, entera infinita o continua (en principio real o bien otras versiones continuas como el caso de considerar variable compleja). La notación particular con el “;” ha resultado ser especialmente adecuada para describir subconjuntos de funciones de dimensión finita, infinita numerable o continua que pueden ser “entendidas o visualizadas” como “casos particulares de superficies discretas y/o continuas”. Un ejemplo especialmente importante es el de considerar subconjuntos de “funciones base” denotados habitualmente como $e(\tau; \mu)$. De esta forma se tenían en cuenta los casos de espacios de dimensión infinita (numerable o continua) que son los habituales, junto con la problemática asociada a la dimensión infinita. Esta primera versión también incluía una definición de *transformada generalizada* en la que se tiene en cuenta la representación de un elemento genérico del espacio generalizado, $a(\tau)$, en términos de una cierta base $e(\tau; \mu)$, mediante un operador “combinación lineal

generalizado” (dependiente de la dimensión del espacio) junto con la definición de la métrica asociada al espacio correspondiente, determinante tanto de la obtención de los coeficientes/coordenadas de $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$ así como los posibles criterios de convergencia inherentes a la dimensión infinita de la mayor parte de espacios de señales. Estas representaciones, junto con la teoría de distribuciones, permitió establecer una primera interpretación de la representación de operadores lineales (no invariantes), $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, en términos de operadores integrales de núcleo el conjunto de respuestas al impulso, $h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right]$, interpretando al conjunto $\tilde{\delta}(\tau - \tau')$ como un caso particular de “base ideal” $e(\tau; \mu = \tau')$ y su correspondiente transformación por el operador. Obviamente, dicha generalización se transforma en la operación de convolución habitual en la teoría de señales y sistemas usual, operación reinterpretada como un caso particular de representación integral de operadores lineales invariantes de funciones núcleo $h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] = h(\tau - \tau')$ (convoluciones continuas o discretas en relación con la dimensión del espacio). Así mismo se obtuvo también una primera versión de la representación espectral de un operador asociando dicha representación al concepto de transformación de la base y de que ésta pertenezca al subespacio de autofunciones del espacio generalizado de análisis. Todos estos conceptos quedaron recogidos en un primer trabajo provisional, [80], así como en una versión inicial (escrita a mano) de un libro actualmente en preparación, [83], y una presentación en un congreso, [84]. Ambos trabajos, además de su influencia en los trabajos de investigación, han resultado esenciales para “redefinir” la forma en la que se imparte la teoría de señales y sistemas a nivel docente, tanto en cursos de grado como de postgrado.

- b) Basados en el esquema obtenido bajo la GSST-v1a, se comenzó a estudiar la generalización del análisis espectral para sistemas lineales no invariantes bajo la transformada de Fourier (nótese que, en este caso, las funciones base de la transformada de Fourier no son autofunciones si los operadores son lineales no invariantes). Se obtuvo así una representación integral en el dominio espectral de cualquier operador lineal no invariante bajo la transformada de Fourier, lo que sugirió a su vez la posibilidad de poder generalizar los conceptos de análisis espectral de un sistema y versión espectral de un operador, [85]-[86].
- c) En base a la versión GSST-v1a, se comenzó también a estudiar su aplicación al análisis de problemas electromagnéticos y, muy en particular, para obtener una teoría generalizada de las funciones de Green. En función de estos estudios iniciales, [88], actualmente se están realizando desarrollos más rigurosos para lograr una teoría generalizada completa que explique la teoría de funciones de Green en función del tipo de operadores, del tipo de condiciones de contorno y de una nueva teoría generalizada en N dimensiones (GSST-ND).
- d) Uno de los primeros resultados prácticos desarrollados como consecuencia de la versión GSST-v1a fue la implementación de una herramienta software “Signals & Systems Theory v1.0” (*SSTv1.0*), [89], llevada a cabo por un alumno de la universidad de Valladolid como Proyecto Fin de Carrera en la titulación de Ingeniería de Telecomunicación en el que se mostraban, a modo de ejemplo, algunos sistemas y espacios de señal. Asimismo, se continuó con el desarrollo de esta herramienta en su versión *SSTv2.0*, [90], también como proyecto fin de carrera por parte de otro alumno de la titulación de Ingeniería Técnica de Telecomunicación (especialidad Telemática) de la universidad de Oviedo, distribuyendo de una forma más clara los espacios de señal, los tipos de señales y añadiendo más sistemas. Estos resultados se publicaron en [91].
- e) Como continuación con el desarrollo de esta teoría, el autor de esta tesis, Juan Here-

dia Juegas, se introdujo en esta temática a través de su Proyecto Final de Carrera en la titulación de Ingeniería de Telecomunicación de la Universidad de Oviedo, [1], en el que se analizaban de forma pormenorizada y bajo el marco de la GSST algunas transformadas diferentes a la usuales, como son la transformada de Hilbert o las transformadas de Bessel de orden ν , así como el procedimiento para el análisis de una **transformada generalizada** definida a partir de un conjunto generalizado de funciones base ortogonales $e(\tau; \mu)$. También se describió el análisis espectral que se podría hacer para sistemas lineales bajo estas dos transformadas, basándose en los resultados obtenidos en [86], dando lugar a la versión GSST-v1b. Los resultados teóricos obtenidos se implementaron también en forma de software obteniéndose la versión *SSTv3.0*, [92].

- f) Se continuó avanzando en la extensión de esta teoría por el propio autor a través de la Tesis de Máster dentro del Máster Interuniversitario en Tecnologías de la Información y Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM), [2], generando la versión GSST-v1c. En esta versión se analizaron en profundidad los sistemas lineales no invariantes tanto en el dominio real como en el **dominio espectral generalizado**. Se estudió la relación entre las propiedades físicas de estos sistemas (memoria, causalidad, estabilidad e invertibilidad) y los conjuntos de respuestas al impulso $h(\tau; \mu)$ que los describen matemáticamente, dando lugar a una representación en tres dimensiones de dichos conjuntos que permite analizar y entender gráficamente dichas propiedades. Esta cualidad resultó muy práctica para su implementación en una versión del software *SSTv4.0* realizada como Proyecto Fin de Carrera en la titulación de Ingeniería de Telecomunicación de la universidad de Oviedo, [93], añadiendo un análisis gráfico generalizado de las propiedades de los sistemas lineales. Estos resultados dieron lugar a una serie de presentaciones en congresos, [94]-[95]. En cuanto al análisis en el dominio espectral, se desarrolló lo que hemos denominado como **Análisis Espectral Generalizado** (*Generalized Spectral Analysis*, GSA), que permite relacionar los coeficientes de la señal de salida de un sistema lineal –invariante o no invariante– en función de los de la entrada, a través de un conjunto de funciones que dependen del sistema –con una interpretación dual al papel jugado por el conjunto de respuestas al impulso $h(\tau; \tau')$ en el dominio real– y de la transformada bajo la cual se esté realizando dicho análisis espectral. Este análisis general se particularizó para las transformadas analizadas hasta el momento (transformadas y desarrollos en serie de Fourier, transformada de Hilbert y transformadas de Bessel de orden ν) y se comprobó también que se obtenía el análisis espectral clásico en el sentido habitual de los autovalores del sistema asociado a un conjunto de funciones base que sean autofunciones, cuando a éste se le imponía la condición de invarianza. Estos resultados se presentaron en [96]. Asimismo, la implementación del GSA dio lugar a una nueva versión de la herramienta software, *SSTv5.0*, cuyos contenidos dieron lugar a otra Tesis de Máster dentro del Máster Interuniversitario en Tecnologías de la Información y Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM), [97], así como a varias publicaciones en congresos de carácter científico y docente, [98]-[99].
- g) Finalmente, el punto actual del desarrollo de la GSST se encuentra en los contenidos de la presente tesis doctoral. Los objetivos de estos contenidos se pueden clasificar en dos partes bien diferenciadas:
- i) La versión GSST-v1d, en la que se desarrolla el concepto generalizado de cambios de base –o relación entre transformadas– y que hemos denominado como *Generalized Transform Change* (GTC). Esta parte de la GSST permite la obtención de los coeficientes de una señal en una base a partir de los coeficientes de la misma señal en otra base sin tener que pasar por la señal original. El análisis

generalizado obtenido se ha comprobado que se reduce a las conocidas matrices de cambio de base para espacios de dimensión finita, pero permite generalizar este concepto hasta el punto de poder relacionar los coeficientes de una señal vista como un elemento perteneciente a distintos espacios, con sus definiciones de álgebra propias. Estos resultados se recogen en [100]. También se desarrolla una versión más general del concepto que había hasta el momento de Análisis Espectral Generalizado (*Generalized Spectral Analysis*, GSA), obteniendo expresiones que permiten analizar cualquier sistema lineal –invariante o no invariante– que actúe entre espacio diferentes, realizando el análisis espectral bajo transformadas independientes tanto en el espacio de señales de partida (entrada del sistema) como en el de llegada (salida del sistema).

- ii) Se ha llevado a cabo una nueva versión de la teoría, GSST-v2, en la que se incluye la teoría de los espacios de Hilbert equipados (*Rigged Hilber Spaces*, RHS), [64]-[71], y que permite relacionar las funciones ordinarias con las distribuciones y las funciones generalizadas. Esta nueva versión plantea la construcción de los espacios de señal de una manera diferente a como se venía haciendo hasta ahora, ya que inicialmente se comenzaba por un conjunto de señales que tenían algunas características en común (en general, dominio de definición y periodicidad) y dotándolos de estructura de espacio vectorial, sino partiendo de un espacio de Hilbert y equipándolo con las funciones que no entren dentro de ese espacio, dando cabida, de manera formal, a todo tipo de funciones y distribuciones. Esta nueva versión de la GSST resulta de especial interés dado que plantea nuevas generalizaciones de la teoría así como una nueva forma de definir desde el principio la GSST y su aplicación a la resolución de problemas físicos (definición del espacio de Hilbert de partida, definición de los espacios dual y antidual, etc.). Los resultados obtenidos, interpretaciones asociadas y sus posibles aplicaciones futuras se describen con todo detalle en la tesis.

1.3. Estructura del documento

En función de los objetivos de la actual tesis que se describen en el último punto 8g de la Secc. 1.2, la estructura del documento se divide en dos grandes bloques: una parte referida a los contenidos de la versión GSST-v1d y otra sobre la nueva versión de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas, GSST-v2. Existen, además, otros dos bloques: uno referente a las conclusiones y líneas futuras y otro que incluye los apéndices. Asimismo se completa la estructura de la tesis con la presente introducción, el resumen de la teoría general y la bibliografía utilizada o citada en todo el desarrollo. A continuación se describen cada uno de los capítulos.

Parte I. GSST-v1d

- Se comienza con algunos **resultados previos** de algunas cuestiones que quedaban pendientes en la versión GSST-v1c, como son la relación entre la ortogonalidad de un conjunto de funciones y su independencia lineal, la relación entre los autovalores y el conjunto de respuestas al impulso de un sistema lineal y la relación existente entre las combinaciones lineales y el producto escalar, que permite relacionar los espacios vectoriales con los espacios de Hilbert.
- Un capítulo importante analiza los **Cambios de Base** (*Generalized Transform Changes*, GTC) en los espacios de señal tanto de dimensión finita como infinita. Para ello se encuentran las ecuaciones generales que rigen dichos cambios de base, comprobando que en el caso de dimensión finita se reducen a las conocidas matrices para el cambio de base, y se relacionan también estas ecuaciones con otras expresiones conocidas, como son la representación general de una función en términos de una base o el análisis espectral generalizado

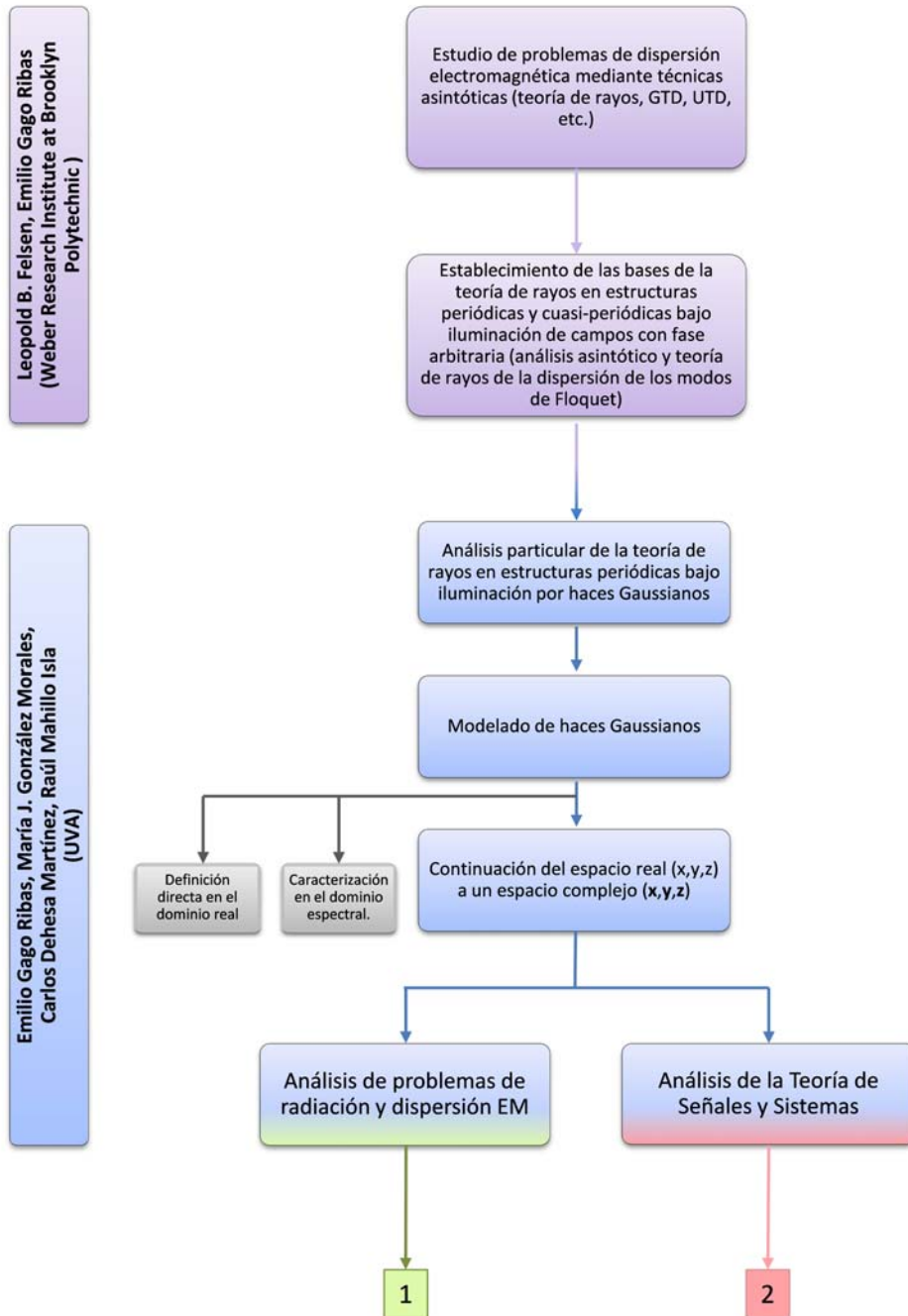


Figura 1.1: Organigramma resumen de los trabajos de investigación en los que se enmarca la presente tesis.

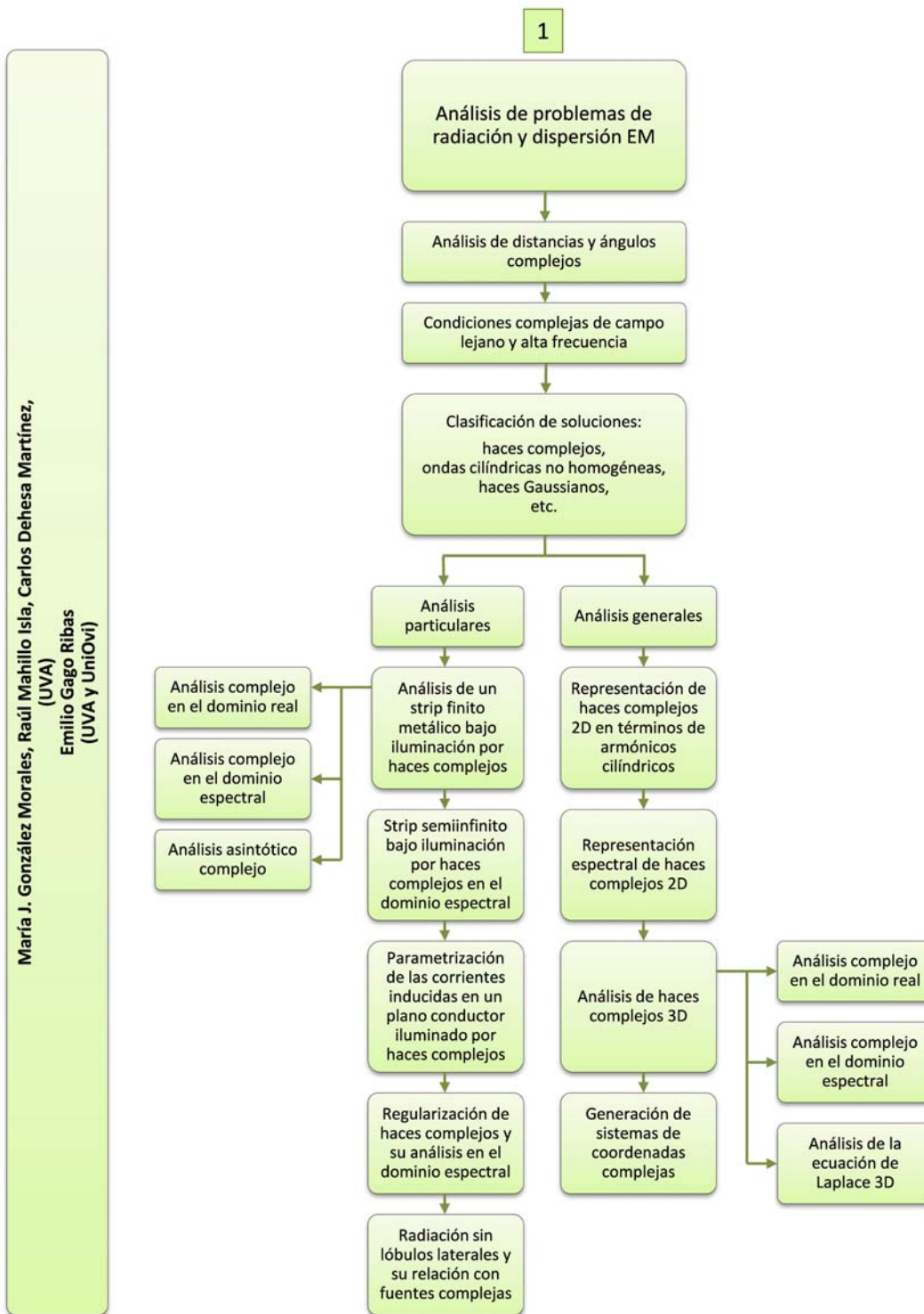


Figura 1.2: Resumen de los trabajos asociados a la línea de investigación “Análisis de Problemas de Radiación y Dispersión EM en espacios complejos”.

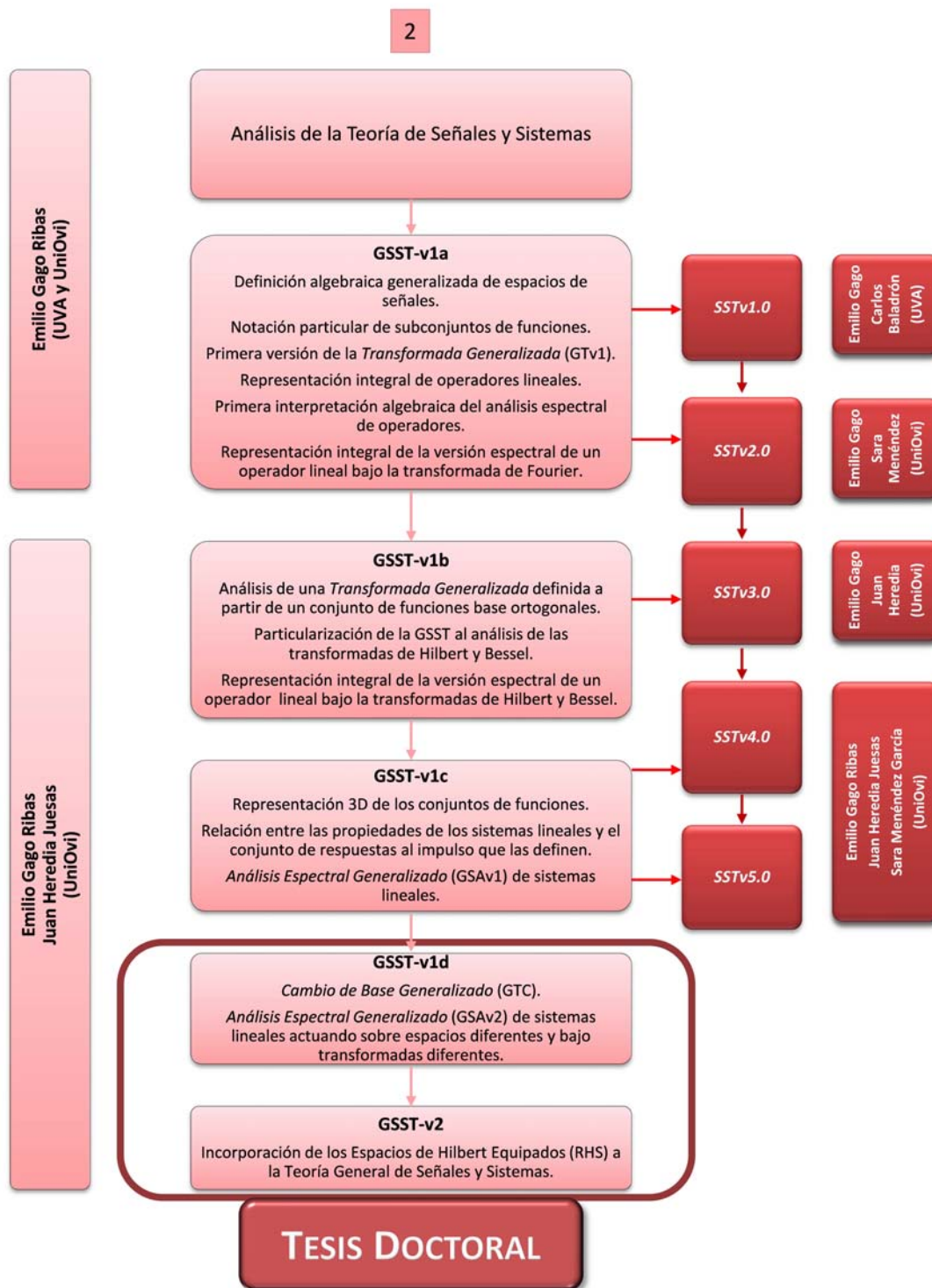


Figura 1.3: Resumen de los trabajos asociados a la línea de investigación “Análisis de la Teoría de Señales y Sistemas” junto con el marco en el que se sitúa la presente tesis doctoral.

de un sistema lineal, de forma que se pueda interpretar el cambio de base, no sólo como lo que es en sí mismo, sino también como un caso particular de un análisis más general, ya que las ecuaciones generales de todos estos procesos son formalmente iguales. Finalmente se exponen los resultados aplicados a diversos casos particulares para diferentes espacios de señal, llegando a algunos resultados sorprendentes, como son los cambios de base entre conjuntos de funciones con diferente cardinalidad o los cambios de base entre conjuntos de funciones vistos dentro de espacios de señal diferentes.

- En otro capítulo se desarrolla de la forma más general el concepto de **Análisis Espectral Generalizado** (*Generalized Spectral Analysis, GSA*). Este concepto ya había sido iniciado en las versiones GSST-v1b y GSST-v1c, como se puede ver en el organigrama de la Fig. 1.3. Esta versión general permite analizar la señal de salida de un sistema lineal, invariante o no invariante, en el dominio espectral bajo cualquier tipo de transformada. El sistema puede actuar entre espacios de señal diferente, pudiéndose, asimismo, realizar el análisis espectral bajo distintas transformadas tanto en el espacio de entrada como en el de salida. La representación es formalmente igual al análisis de una señal a través de un sistema lineal en el dominio real, ya que se puede expresar la señal de salida en ambos dominios a partir de una combinación lineal generalizada de la señal de entrada en el dominio correspondiente y un conjunto de funciones que dependen del sistema analizado y, en el caso del dominio espectral, también de las transformadas utilizadas tanto en el espacio de partida como en el de llegada.
- Los últimos dos capítulos de esta parte muestran diversos ejemplos de los resultados obtenidos sobre los cambios de base y el análisis espectral generalizado.

Parte II. GSST-v2

- El capítulo principal de esta parte es el referente al estudio, análisis y adecuación de los **Espacios de Hilbert Equipados** (*Rigged Hilbert Spaces, RHS*) a la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas. En él se detalla todo el proceso para la construcción de estos espacios, indicando las modificaciones necesarias en la estructura inicial que se tenía para los espacios de señal hasta la versión GSST-v1d. Se hace mención expresa a la notación de Dirac de bras y kets, habitualmente utilizada en los problemas de mecánica cuántica, de donde parte la idea de los RHS, para poder realizar la interpretación de los productos escalares de una manera generalizada en términos de funcionales, pero manteniendo posteriormente la notación habitual de la GSST debido a que, a pesar de ser menos simplificada, aporta mayor claridad e información. Se describe a continuación la necesidad y forma de construcción de los RHS en los espacios de señal, para posteriormente presentar algunas estructuras finales de dichos espacios bajo los RHS. Asimismo, se demuestran las relaciones entre estas estructuras a través de las transformadas más habituales (transformadas y desarrollos en serie de Fourier y transformada de Hilbert). Estas relaciones, como se verá al final del capítulo, llevan a determinar diferentes isomorfismos que permiten unificar todos los espacios de señal en dos tipos: los de dimensión finita y los de dimensión infinita, siendo, para cada tipo, todos los espacios iguales salvo isomorfismos.
- En el siguiente capítulo se trata de interpretar algunos conceptos desarrollados en la versión GSST-v1d bajo los RHS como son los cambios de base. Esto da solución a algunas cuestiones que quedaban bajo interrogantes en versiones anteriores, como son la dimensión de un espacio de señal, ya que se pueden considerar conjuntos de funciones que hacen el papel de una base con diferente cardinalidad para un mismo espacio de señal. Los RHS permiten interpretar rigurosamente estos tipos de bases y establecer las relaciones entre ellos.
- Finalmente se completa esta parte con la descripción de algunos ejemplos de aplicación de los RHS a diferentes problemas físicos, tanto en variable continua como en variable

discreta. Asimismo, se presenta un problema típico de mecánica cuántica analizado bajo la formulación clásica de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas.

Parte III. Conclusiones y líneas futuras

- Se comentan las principales conclusiones obtenidas referentes a los diversos desarrollos teóricos y se exponen una serie de líneas de investigación futuras para continuar con las cuestiones abiertas en esta tesis y con los puntos descritos en los antecedentes de la Secc. 1.2, tanto en el tema referente a la profundización del análisis de la Teoría de Señales y Sistemas, como en el del análisis de problemas de radiación y dispersión EM en espacios complejos, además de reseñar el propósito de implementar todos estos resultados en una nueva versión de la herramienta software *Signals & Systems Theory (SST)*.

Parte IV. Apéndices

- Notación. Se presenta en detalle toda la notación utilizada a lo largo de toda la tesis.
- Definiciones. Se detallan algunas definiciones matemáticas de los conceptos más importantes que aparecen a lo largo de los desarrollos teóricos.
- Teoremas. Se describen los teoremas principales que aparecen en el desarrollo de la tesis.
- Demostraciones matemáticas. Se desarrollan de forma detallada las demostraciones matemáticas que aparecen en el desarrollo de la tesis.

2. Resumen de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas

2.1. Introducción

En este capítulo se pretende hacer una recopilación de los aspectos más importantes a tener en cuenta con respecto a última versión de la **Teoría General de Señales y Sistemas** (*Generalized Signals and Systems Theory, GSST-v1c*) hasta el comienzo de la tesis, indicada en el organigrama de la Fig. 1.3 de la introducción. De esta manera se proporciona una introducción general a los desarrollos teóricos expuestos más adelante. Estos conceptos pueden encontrarse de manera mucho más detallada en las referencias bibliográficas [80]-[88], por tanto se exponen aquí únicamente para tener claros algunos conceptos importantes que irán surgiendo a lo largo de todo el desarrollo y para tenerlos como referencia, así como para darle una estructura formal a todo el documento.

2.2. Esquema general

El esquema general de la Teoría de Señales y Sistemas es el que puede verse en la Fig. 2.1.

En un espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se define una distancia $d(\cdot, \cdot)$, una norma $\|\cdot\|$ y un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ apropiados a ese espacio. Dentro de cada espacio se puede definir un conjunto de funciones que actúan como base de ese espacio, de manera que, a partir de unos coeficientes, es posible representar cada una de las señales del espacio a través de una combinación lineal generalizada. El esquema también representa el paso de estas señales a través de un sistema lineal representado por el operador $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, de forma que las señales de salida de dicho sistema pertenecen, en general, a otro espacio de señal $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, donde se realizan unas nuevas definiciones de distancia, norma y producto escalar que serán los apropiados a este espacio, pudiendo definir, asimismo, los conjuntos de funciones base adecuados en este espacio para poder representar cada una de las señales a partir de unos coeficientes. La relación entre los coeficientes de la señal de salida y los de la de entrada al sistema representan el análisis espectral de dicho sistema. Se representan también, en el mismo esquema, los subespacios referentes al dominio $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ y núcleo $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ del operador en el espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y la imagen del mismo, $\text{Imag}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$, en el espacio de llegada $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$.

Por otro lado, el conjunto de deltas genéricas desplazadas $\tilde{\delta}(\tau - \tau')$ ¹ forman una base ideal del espacio. La salida de este conjunto de funciones a través del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ genera el conocido como conjunto de respuestas al impulso que juegan un papel importante a la hora de describir los sistemas lineales en el dominio real. Puede resultar chocante a primera vista que este conjunto de deltas se represente fuera del dominio del operador y, aún así, se le aplique dicho operador. Esto, en primer lugar, se debe a que, dependiendo de la naturaleza del espacio y del operador, este conjunto podría pertenecer o no al dominio del operador pero, sobretodo, a que para todo operador se puede considerar un operador generalizado al que se le puede aplicar un conjunto más grande que el propio dominio del operador², de ahí que se represente en las Figs. 2.1 y 2.2 con otro color.

¹Una delta genérica $\tilde{\delta}(\tau)$ puede indicar una delta de Dirac cuando τ representa una variable continua o una delta de Kronecker cuando τ representa una variable discreta.

²Por ejemplo, considerando el operador derivada en un espacio de variable continua, $\mathbf{F} \equiv \frac{d}{dx}$, su dominio será el conjunto de funciones derivables, pero el operador generalizado se podrá aplicar a cualquier tipo de función, ya que se tiene en cuenta también la teoría de distribuciones.

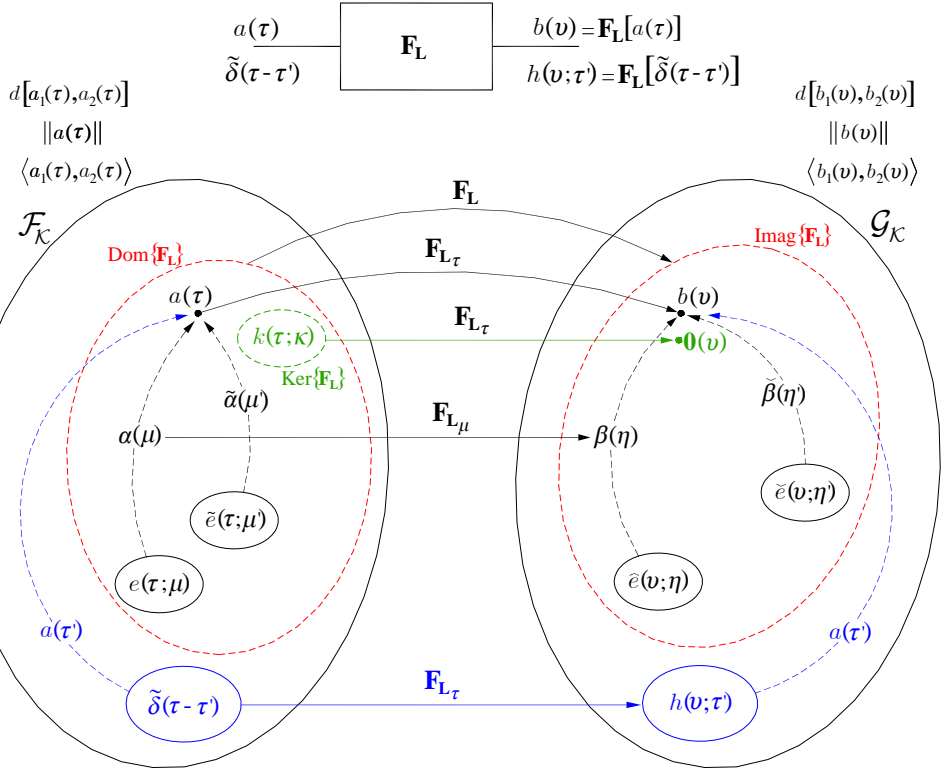


Figura 2.1: Esquema general de la GSST. El sistema lineal se representa por el operador \mathbf{F}_L entre dos espacios de señal diferentes, el de partida \mathcal{F}_K , representando el conjunto de funciones pertenecientes al dominio del operador, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\}$ (rojo), y el de llegada \mathcal{G}_K , donde también se representa el conjunto de funciones pertenecientes a la imagen del operador $\text{Imag}\{\mathbf{F}_L\}$ (rojo). El conjunto de funciones pertenecientes al núcleo del operador, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\}$ (verde), van siempre al elemento neutro del espacio de llegada $0(v)$. El conjunto ideal de deltas desplazadas genera, a través del operador, el conjunto de respuestas al impulso. Esta relación está marcada en otro color (azul) para indicar que, en general, habrá que considerar una versión generalizada de dicho operador, ya que muchas veces el conjunto de deltas desplazadas no pertenecerán al dominio del operador.

En cada uno de los espacios se define una distancia, norma y producto escalar, que serán diferentes dependiendo de la naturaleza del espacio. Por otro lado, cada señal de cada espacio puede ser expresada como una combinación lineal generalizada de los elementos de una base escogida de manera adecuada a través de unos coeficientes que dependerán, obviamente, de esta base seleccionada. La relación entre los coeficientes de la señal de salida y los de la de entrada representan el análisis espectral del sistema.

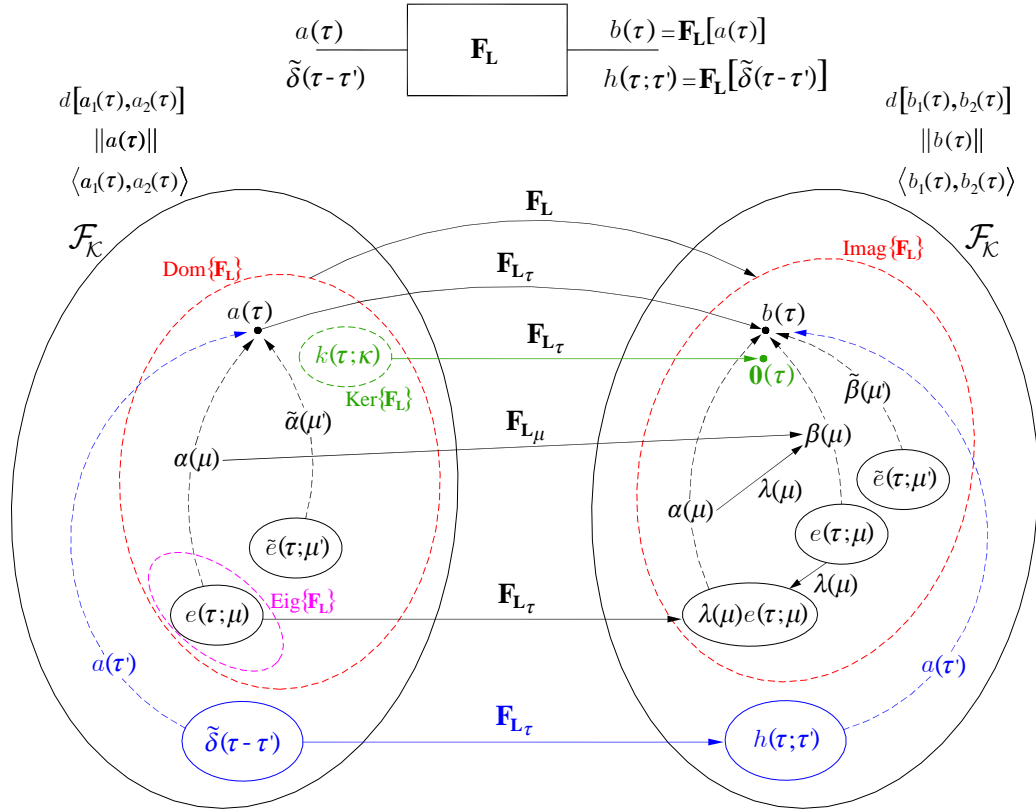


Figura 2.2: Esquema general de la GSST cuando el operador actúa entre señales pertenecientes al mismo espacio. Las indicaciones son las mismas que las de la Fig. 2.1, pero pudiendo añadir al esquema el conjunto de funciones base pertenecientes al conjunto de autofunciones del sistema, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ (rosa), de los que se obtiene, a través del operador, el mismo conjunto de funciones base escalados por un conjunto de autovalores que permiten establecer, de manera muy simplificada, la relación entre los coeficientes de la señal de salida con los de la de entrada, es decir, el análisis espectral del sistema.

La Fig. 2.2 representa una particularización del esquema general cuando el operador actúa entre funciones del mismo espacio. Todo lo comentado anteriormente se mantiene, con la añadidura de que es posible encontrar un conjunto de funciones base que sean autofunciones del operador, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_L\}$, de forma que la salida de este conjunto a través del operador devuelva el mismo conjunto escalado por unos autovalores, que tienen una gran importancia a la hora de realizar el análisis clásico del sistema en el dominio espectral.

A lo largo de este capítulo se detallan todos los conceptos que aparecen en este esquema para tener una idea básica e inicial de los fundamentos matemáticos que existen bajo la presente Tesis Doctoral.

2.3. Espacio de señales

Entendemos por **señal** cualquier elemento de cualquier tipo del que podemos obtener una cierta información. Está claro que existe una infinidad de tipos de señales, desde las señales de tráfico hasta las señales paranormales, pasando por las señales de guerra o señales de vida. Hasta 19 acepciones diferentes se pueden encontrar en la Real Academia Española, RAE. Sin embargo, nos quedaremos con aquéllas señales que se puedan representar mediante una función matemática cuando la información que aporten dependa de alguna magnitud física, ya sea el tiempo, el espacio, la presión, la temperatura, la posición, etc. Es por esto que a partir de aquí, y salvo que se especifique lo contrario, se tratará de manera indiferente a las señales que a las funciones que las representan. Asimismo, se considerarán de forma equivalente los espacios de señal que los espacios de funciones.

2.3.1. Estructura de espacio vectorial

Es interesante realizar una comparación y un estudio paralelo entre los espacios vectoriales y los espacios de funciones, ya que, por otra parte, éstos últimos no son más que un caso particular de los primeros. Los espacios vectoriales son bien conocidos, sobre todo cuando se trata de espacios en \mathbb{R}^n ; pero, independientemente del valor de $n \in \mathbb{N}$, éste va a ser siempre un número finito y, por tanto, la dimensión de este espacio será finita; sin embargo, en los espacios de funciones, aún habiendo algunos en los que la dimensión también sea finita, existen importantes espacios de dimensión infinita, con la problemática que ello conlleva. Aún así, esta comparación es bastante clarificadora para el buen entendimiento de los espacios de señales.

El primer paso es definir el conjunto de elementos que componen el espacio y sobre los que se opera. Si en un espacio vectorial se tienen vectores,

$$\mathcal{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}, \quad (2.1)$$

en el espacio de funciones se tienen, por tanto, funciones:

$$\mathcal{F} = \{a(\tau), b(\tau), c(\tau), \dots\}, \quad (2.2)$$

definidas como³

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{k}_\tau \rightarrow \mathbb{K} \\ \tau &\mapsto a(\tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

En este caso $\tau \in \mathbb{k}_\tau$ indica la variable sobre las que están descritas las funciones de \mathcal{F} , es decir, el dominio de dichas funciones, por tanto, existen diferentes espacios de funciones dependiendo de la naturaleza de la variable τ , es decir, de la particularización que tome el conjunto \mathbb{k}_τ .

Por ejemplo:

³En general, el rango o recorrido de las funciones será el cuerpo de los complejos, es decir $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$.

- Si $\tau \in \mathbb{N}$, estaríamos hablando de un espacio de funciones cuya variable es un número natural. No cabe la posibilidad en este caso de que haya funciones periódicas, ya que el conjunto de los números naturales está acotado.

Un ejemplo de estas funciones podría ser $x(n)$, donde $n \in \mathbb{N}$, representando n valores discreto naturales, por ejemplo, el gasto de teléfono por minutos enteros.

- Si $\tau \in \mathbb{Z}$, representaría un espacio de funciones de variable entera, es decir, el conjunto de funciones sólo estaría definido para valores enteros, entrando en este grupo tanto funciones periódicas como aperiódicas.

En este caso se podría tomar como ejemplo $a(m)$ con $m \in \mathbb{Z}$, representando m las muestras de una señal.

- Si $\tau \in [1, N_0]$, representaría un espacio de señal de variable discreta definido en un intervalo de longitud N_0 . Estas funciones no son periódicas, pero sus valores se podrían periodificar con un periodo N_0 , aunque nos encontraríamos en el caso precedente.

Un ejemplo de función de variable discreta definida en un intervalo finito podría ser $T(k)$, que represente las temperaturas máximas en una ciudad a lo largo de una semana, siendo $N_0 = 7$.

- Si $\tau \in \mathbb{R}$, representaría un espacio de funciones de variable real, es decir, el conjunto de funciones estaría definido para valores reales, entrando en este grupo, también, tanto funciones periódicas como aperiódicas.

Existe gran cantidad de ejemplos para este espacio de funciones. Las más comunes, quizá, puedan ser las funciones $x(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$ indicaría el tiempo, y $f(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ indicaría la distancia.

- Si $\tau \in \mathbb{R}^+$, representaría un espacio de funciones de variable real, pero sólo para valores positivos. En este ejemplo no se podría dar el caso de funciones periódicas.

Siendo estricto, sería en este grupo en el que habría que englobar los ejemplos del punto anterior, puesto que físicamente no existen tiempos ni distancias negativas; sin embargo, en la Teoría de Señales se puede considerar, para determinados problemas, un instante o una posición de referencia, que haría las veces de $t_0 = 0$ ó $x_0 = 0$, y lo que sucediese antes, tanto en el tiempo como en la distancia respectivamente, de esos valores, podría considerarse como tiempos o distancias negativas.

- Si $\tau \in [a, b]$ o $\tau \in (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, representaría un espacio de funciones de variable real definido entre a y b , es decir, señales de soporte finito. Igualmente aquí no se podría dar el caso de funciones periódicas, pero sí que se podrían periodificar con un periodo $X_0 = b - a$, aunque nos encontraríamos en el caso de funciones periódicas con $\tau \in \mathbb{R}$.

También en este caso se podrían contemplar los ejemplos de los dos puntos anteriores para $t \in [a, b]$ o $t \in (a, b)$ y $x \in [a, b]$ o $x \in (a, b)$.

- Si $\tau \in \mathbb{R}^3$, representaría un espacio de funciones de variable real tridimensional, es decir, el dominio de las funciones sería un espacio de tres dimensiones. En este grupo se podría dar el caso de funciones aperiódicas o periódicas en alguna o todas las variables.

El ejemplo más claro de este caso sería el de las funciones $f(\vec{r})$, donde $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, representaría un punto del espacio euclídeo tridimensional.

- En general también podría contemplarse el caso $\tau \in \mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, representando funciones que dependen de n variables.

- Si $\tau \in \mathbb{C}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, representaría un espacio de funciones de una o varias variables complejas, es decir, dichas funciones estarían definidas sobre los números complejos.

Un ejemplo de esto sería el estudio de problemas de radiación y dispersión electromagnética como los que se muestran en [14]-[32].

Volviendo a la estructura del espacio de señales, éstos tienen que cumplir las dos propiedades de los espacios vectoriales: la ley de composición interna y la ley de composición externa.

1. **Ley de composición interna.** Esta operación sólo actúa dentro de los elementos del propio espacio.

Para vectores: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{u}$.

Para señales: $a(\tau) + b(\tau) = u(\tau)$.

Para cumplir esta ley, siempre que $a(\tau)$ y $b(\tau)$ pertenezcan a \mathcal{F} , el elemento $u(\tau)$ ha de pertenecer al espacio \mathcal{F} .

2. **Ley de composición externa.** En esta operación es necesario un conjunto de elementos externos al espacio. Estos elementos son los escalares pertenecientes a un cuerpo \mathcal{K} .

Para vectores: $\alpha\vec{a} = \vec{v}$ con $\alpha \in \mathcal{K}$.

Para señales: $\alpha a(\tau) = v(\tau)$ con $\alpha \in \mathcal{K}$.

Para cumplir esta ley, si $a(\tau) \in \mathcal{F}$, el elemento $v(\tau)$ ha de pertenecer al espacio \mathcal{F} .

Para que las definiciones dadas tanto en la ley de composición interna como externa sean válidas, estas operaciones se realizan, en general, punto a punto.

Puesto que, como se ha indicado en la ley de composición externa, se necesita un cuerpo \mathcal{K} sobre el que trabajar, se denota de aquí en adelante el espacio de funciones como $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

De esta manera, en relación con un espacio vectorial, se tienen las siguientes características:

- Se puede definir el concepto de **independencia lineal**. Dos vectores son linealmente independientes si y sólo si se cumple la siguiente condición:

$$\alpha a(\tau) + \beta b(\tau) = 0(\tau) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0, \quad (2.4)$$

siendo $0 \in \mathcal{K}$ el elemento neutro de dicho cuerpo y $0(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, la función nula del espacio $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ ⁴.

En general, M funciones son linealmente independientes si y sólo si:

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m a_m(\tau) = 0(\tau) \Leftrightarrow \alpha_m = 0 \quad \forall m. \quad (2.5)$$

- Igualmente, se puede definir el concepto de **combinación lineal** (en general **CL**). Dadas M funciones⁵ $\{a_m(\tau)\}_M \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y M elementos $\{\alpha_m\}_M \subset \mathcal{K}$, la función

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m a_m(\tau) = a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \quad (2.6)$$

como consecuencia de las dos leyes de composición.

⁴La definición de función nula $0(\tau)$ depende del álgebra asociada al espacio. Véase Secc. 2.3.2.

⁵ $\{a_m(\tau)\}_M$ representa un conjunto de M funciones de variable τ enumeradas por el parámetro m .

- Surge de forma inmediata el concepto de **base**, es decir, qué conjunto de funciones $\{e_m(\tau)\}_M \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ permite que cualquier otro elemento $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ pueda expresarse como combinación lineal de estos elementos base. En la Secc. 2.3.3 se estudiará este concepto en mayor profundidad.
- Juntando todo lo anterior, se puede decir que cualquier problema que parta de espacios de señales se puede geometrizar de la misma forma que si se tratara de un espacio vectorial.

2.3.2. Definición del álgebra en los espacios de señales

Una vez establecida la estructura de espacio vectorial para los espacios de señales $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, se ha de definir un álgebra en dicho espacio para poder medir, comparar y relacionar los elementos del espacio.

Para ello se necesita definir tres conceptos importantes como son la métrica, la norma y el producto escalar.

▪ Métrica.

La métrica es una aplicación entre dos elementos del espacio de señales $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y los reales no negativos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. En general a la métrica también se le conoce como distancia d . Sirve para obtener una valoración numérica que indica cómo de diferentes son dos elementos cualesquiera de dicho espacio $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

$$\begin{cases} d : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (a(\tau), b(\tau)) \mapsto d[a(\tau), b(\tau)]. \end{cases} \quad (2.7)$$

La definición de la métrica determina cuándo dos señales son iguales. Si la distancia entre dos funciones es 0, se considera, bajo esta métrica, que dichas señales son iguales. Es importante notar que con otra definición de distancia esas mismas funciones ahora podrían ser muy diferentes, por tanto, la similitud y comparación entre señales de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ depende expresamente de la definición o tipo de distancia que se use. De la misma manera, la elección de una métrica determinará cuál es el elemento nulo $0(\tau)$, pudiendo ser diferente para diferentes métricas aún siendo el mismo espacio de señales.

Usualmente, la métrica elegida es la que induce la norma.

▪ Norma.

La norma es un funcional entre el espacio de señales $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y el conjunto de los reales no negativos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

$$\begin{cases} \|\cdot\| : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ a(\tau) \mapsto \|a(\tau)\|. \end{cases} \quad (2.8)$$

Con la norma se mide cómo de grande es cada uno de los elementos de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, de esta forma se pueden comparar y ordenar. En general, esta definición se lleva a cabo de forma que describa algún parámetro físico de interés. El más habitual es la norma que calcule la energía de las funciones $a(\tau)$.

Una vez definida la norma, la métrica inducida se obtiene de la siguiente manera:

$$d[a(\tau), b(\tau)] = \|a(\tau) - b(\tau)\|. \quad (2.9)$$

■ **Producto escalar.**

El producto escalar es una forma hermitiana positiva y no degenerada⁶ entre dos elementos del espacio de señales $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y el conjunto de los complejos \mathbb{C} .

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{C} \\ (a(\tau), b(\tau)) \mapsto \langle a(\tau), b(\tau) \rangle. \end{cases} \quad (2.10)$$

El concepto matemático del producto escalar representa la proyección de la función $a(\tau)$ sobre $b(\tau)$.

Es muy importante estudiar el caso en el que dicho producto escalar sea 0, es decir, la proyección de un elemento sobre el otro es nula, lo que querría decir que las dos funciones a las que se le está aplicando el producto escalar son ortogonales.

$$\langle a(\tau), b(\tau) \rangle = 0 \iff a(\tau) \perp b(\tau). \quad (2.11)$$

Éste será un concepto muy importante a tener en cuenta a la hora de hablar de bases y escoger una, como se verá en la Secc. 2.3.3.

La definición de la norma se relaciona con el producto escalar de la siguiente manera:

$$\|a(\tau)\| = \langle a(\tau), a(\tau) \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

y, junto con la ecuación (2.9), se pueden relacionar la métrica, la norma y el producto escalar:

$$d[a(\tau), b(\tau)] = \|a(\tau) - b(\tau)\| = \langle a(\tau) - b(\tau), a(\tau) - b(\tau) \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

2.3.3. Bases y representación general en términos de una base

Como se ha comentado en la Secc. 2.3.1, la definición de combinación lineal lleva directamente al concepto de base. En un espacio vectorial, una base se correspondería con encontrar un número N de vectores de $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ linealmente independientes $\{\vec{e}_n\}_N$ y que generen todo el espacio, esto es, que cada vector de ese espacio se pueda expresar como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$\vec{a} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \vec{e}_n \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}, \quad \alpha_n \in \mathcal{K} \quad \forall n = 1 \div N, \quad (2.14)$$

siendo $\{\alpha_n\}_N$ las N coordenadas de \vec{a} en la base $\{\vec{e}_n\}_N$. En este caso, la dimensión del espacio vectorial sería N .

Con respecto a los espacios de señales, habría que encontrar un conjunto de N señales de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ linealmente independientes $\{e_n(\tau)\}_N$ y que generasen todo el espacio, de forma que cualquier función de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ pudiera expresarse como una combinación lineal de esta base:

$$a(\tau) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n(\tau) \quad \forall a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \quad \alpha_n \in \mathcal{K} \quad \forall n = 1 \div N. \quad (2.15)$$

Pero este es un caso muy particular, puesto que se está considerando un espacio de señales de dimensión finita N y, como se ha comentado anteriormente, es muy habitual que el espacio de señales en el que se trabaje sea de dimensión infinita, tanto numerable como no numerable. Por tanto, es conveniente realizar una nueva notación más general que englobe todos los casos.

⁶Ver definición de forma hermitiana en el Ap. B.8.

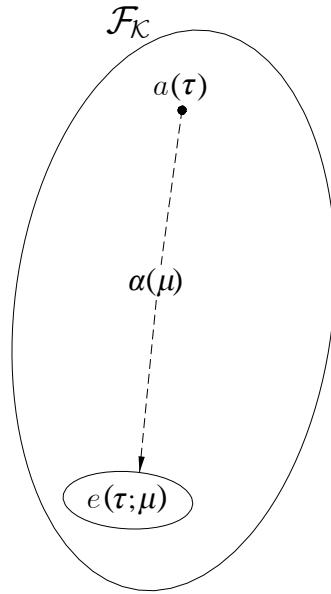


Figura 2.3: La función $a(\tau)$ se puede obtener como una combinación lineal de los elementos de la base $e(\tau; \mu)$ con coeficientes $\alpha(\mu)$.

- En primer lugar, a las funciones de la base se les introduce un nuevo parámetro: $\mu \in \mathbb{k}_\mu$, quedando de la forma $e(\tau; \mu)$ ⁷. Este parámetro no es una nueva variable, puesto que las funciones base siguen siendo de una sola variable, τ , sino que sirve para identificar cada uno de los elementos de la base, de ahí que τ y μ se separen por un punto y coma (;) y no por una coma (,) como sería el caso de una función de dos variables. De esta forma, el parámetro μ puede pertenecer a cualquier dominio, pudiendo ser el conjunto \mathbb{k}_μ tanto discreto finito o infinito, como continuo⁸.

De la misma manera, los coeficientes pasarían a expresarse como $\alpha(\mu)$; siendo, para un valor de μ concreto ($\mu = \mu_0$), $\alpha(\mu_0)$ el coeficiente que multiplicaría al elemento de la base $e(\tau; \mu_0)$.

- Por otro lado, la representación general de una combinación lineal ya no vendría expresada por un sumatorio finito, si no que se denota, a partir de ahora, con el símbolo \mathbf{CL}_μ , indicando una generalización del concepto de combinación lineal, pudiendo ser una suma finita, una serie o una integral, conforme al parámetro μ , o incluso podría representar un funcional.

Finalmente, la representación general de una función $a(\tau)$ del espacio \mathcal{F}_K en términos de una base $e(\tau; \mu)$ sería la siguiente:

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]. \quad (2.16)$$

De esta manera, se puede caracterizar una función $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$ a partir de sus coeficientes $\alpha(\mu)$.

En la Fig. 2.3 se puede ver un ejemplo de la obtención de una señal a partir de la base y unos coeficientes.

Hay tres conceptos relacionados con las bases que son muy importantes:

⁷ $e(\tau; \mu)$ indica un conjunto de funciones de variable τ enumeradas por el parámetro μ , ya sea éste finito, infinito numerable o infinito no numerable.

⁸Nótese que se relaciona con el caso anterior (dimensión finita) si $\mu \equiv n$, siendo $\{e_n(\tau)\}_N \equiv e(\tau; n)$. En este caso μ sería un parámetro discreto que variaría entre 1 y N .

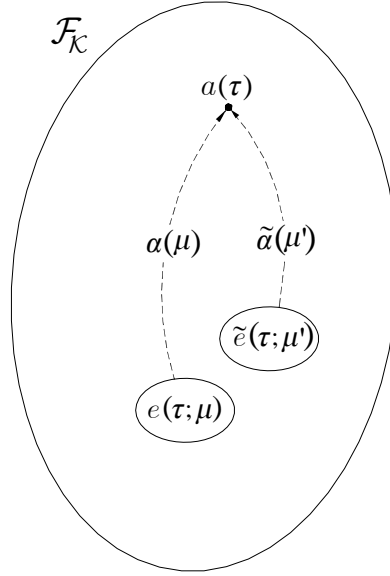


Figura 2.4: Dos bases diferentes escogidas en un mismo espacio implica la obtención de distintos coeficientes para reconstruir una misma señal.

1. Existen, para un mismo espacio de señales, diferentes conjuntos que pueden ejercer de base, sin embargo son importantes las bases cuyos elementos sean ortogonales entre sí.
2. Aunque pueda ser evidente, la elección de una base u otra hará que cambien los coeficientes (coordenadas para un espacio vectorial) de un mismo elemento del espacio de señal \mathcal{F}_K . Es decir, dada $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$ y un conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \subset \mathcal{F}_K$, por la ecuación (2.16), los coeficientes que definen $a(\tau)$ son $\alpha(\mu)$; mientras que con otro conjunto de funciones base $\tilde{e}(\tau; \mu') \subset \mathcal{F}_K$, la expresión de $a(\tau)$ sería

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (2.17)$$

por lo que los coeficientes que describirían $a(\tau)$ serían, en este caso $\tilde{\alpha}(\mu')$, como puede observarse en la Fig. 2.4.

3. Cualquier subconjunto $\mathbb{k}_{\tilde{\mu}} \subset \mathbb{k}_{\mu}$ generaría un subespacio de \mathcal{F}_K a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \tilde{\mu})$ con $\tilde{\mu} \in \mathbb{k}_{\tilde{\mu}}$. Por ejemplo, si $\mathbb{k}_{\tilde{\mu}} \equiv \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \equiv \mathbb{k}_{\mu}$, nos quedaríamos, de todas las $\text{card}\{\mathbb{R}\} = c$ funciones base, sólo con aquellas $\text{card}\{\mathbb{Z}\} = \aleph_0$ de parámetro entero⁹, generando así un conjunto más pequeño de funciones.

⁹Aunque la Teoría de Conjuntos no es objeto principal de esta tesis, resulta interesante conocer algunas nociones sobre la cardinalidad de los conjuntos infinitos, ya que ésta está relacionada muchas veces con la dimensión de un espacio, problemática que sí se considera en la presente tesis. Si el cardinal del conjunto \mathbb{k}_{μ} es finito, no hay ningún problema y nos encontramos en un espacio de dimensión finita de valor $\text{card}\{\mathbb{k}_{\mu}\}$, mientras que si su cardinal es infinito nos encontraremos en un espacio de dimensión infinita. El problema surge porque existen diferentes clases de infinitos. Si $\text{card}\{\mathbb{k}_{\mu}\} = \aleph_0$ estaríamos en un espacio de dimensión infinita numerable pero si $\text{card}\{\mathbb{k}_{\mu}\} = c$ nos encontraríamos en un espacio de dimensión infinita no numerable. Aceptando la hipótesis del continuo, se tendría que $c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Pueden existir, incluso, cardinalidades infinitas superiores a c como son \aleph_2, \aleph_3 , etc. teniendo en cuenta los números transfinitos. Esto, como se verá más adelante en el desarrollo de la tesis, podría dar ciertos problemas ya que un mismo espacio de señal \mathcal{F}_K podría estar descrito por dos conjuntos de funciones base que tengan cardinalidad diferente, una \aleph_0 y otra \aleph_1 , sin que falte ni sobre ninguna función base en ambos conjuntos, como puede ser el conjunto de las funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua, donde se pueden considerar las bases $\{e(x; m)\}_{m \in \mathbb{Z}} = \left\{e^{jm \frac{2\pi}{X_0} x}\right\}_{m \in \mathbb{Z}}$, de cardinalidad infinita numerable, y $\{\tilde{e}(x; x')\}_{x' \in (X_0)} = \{\delta_0(x - x')\}_{x' \in (X_0)}$, de cardinalidad infinita no numerable. Pero aquí hay que tener en cuenta que también se está considerando como bases a las pseudobases, es decir, a aquellos

2.3.4. Problemática de la dimensión infinita y pseudobases

Volviendo a las bases, hay que tener en cuenta que el paso hacia la dimensión infinita no es trivial. En dimensión infinita se necesitaría un conjunto infinito de funciones base, pudiendo darse el caso de que no se cumpliera alguna de las condiciones necesarias para ser una base, por ejemplo, que no pertenezcan al propio espacio¹⁰. En este caso se estaría hablando de **pseudobases**, un conjunto infinito de funciones linealmente independientes, a partir de las cuales se puede representar cualquier función de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, pero que no cumple la definición estricta de base. Aún así, la expresión (2.16) es válida tanto para bases como para pseudobases, recordando la generalización del símbolo \mathbf{CL}_{μ} , que no sólo se limita a combinaciones lineales finitas.

En general, a partir de ahora y como abuso del lenguaje, se denotarán por igual tanto las bases como las pseudobases con el nombre de bases.

A partir de la expresión (2.16) surgen dos cuestiones:

1. Qué significa, en términos de espacios de señal, la igualdad que aparece.
2. Cuáles son los coeficientes $\alpha(\mu)$ que hacen que se cumpla esa igualdad.

En un espacio de dimensión finita y considerando una base ortogonal, estas dos cuestiones no tendrían mayor relevancia, puesto que la igualdad se daría siempre, siendo las dos funciones iguales punto a punto y los coeficientes se obtendrían por medio de un sistema de ecuaciones o, al igual que en los espacios vectoriales, proyectando la función $a(\tau)$ sobre cada uno de los elementos de la base $e(\tau; \mu)$. Esta proyección vendría determinada por el producto escalar que se estuviera utilizando¹¹

$$\alpha(\mu) \propto \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle. \quad (2.18)$$

En la Fig. 2.5 puede verse un ejemplo explicativo de la proyección de un vector sobre los elementos de la base, en el cual se obtienen los coeficientes necesarios para reconstruirlo como combinación lineal de la base.

Sin embargo, estas consideraciones no se pueden extrapolar directamente a la dimensión infinita, puesto que, precisamente por haber infinitos elementos en la base, no se alcanzaría nunca la igualdad propuesta si se escogiese un conjunto finito de elementos de la base. Al tratarse de un conjunto infinito, lo que hay que conseguir es que la combinación lineal *tienda* a ser la función $a(\tau)$ a medida que se añaden elementos de la base.

Por otro lado, teniendo en cuenta las consideraciones algebraicas definidas en la Secc. 2.3.2, para comparar dos señales hay que hacerlo a través de la distancia. Decir, por tanto, que dos señales son iguales es lo mismo que decir que la distancia entre ellas es 0

$$d(a(\tau), \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]) = 0. \quad (2.19)$$

Este resultado se cumple perfectamente para la dimensión finita, mientras que, como se ha indicado anteriormente, para dimensión infinita lo que habría que hacer es que esa distancia tendiese a 0,

$$d(a(\tau), \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]) \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

conjuntos que no cumplen todos los criterios para ser base, como es la pertenencia al espacio. Este conflicto se verá más claro en el Cap. 4 sobre los cambios de base, pero se introducirá una solución en los Caps. 8 y 9 con la aportación de los Espacios de Hilbert Equipados (RHS).

Sobre la Teoría de Conjuntos y su cardinalidad se puede acudir a las referencias bibliográficas [102]-[103] o a [104] de Georg Cantor.

¹⁰La condición de independencia lineal siempre es necesaria.

¹¹La igualdad en la proyección se daría si la base, además de ortogonal, fuese ortonormal.

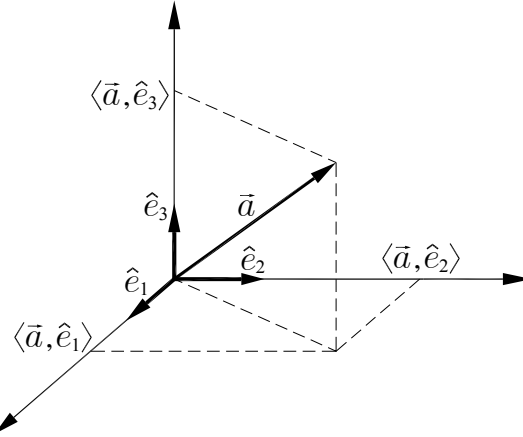


Figura 2.5: Proyección de un vector sobre cada uno de los elementos de la base en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 .

Analizando dicha distancia, se obtendrían los coeficientes $\alpha(\mu)$ que harían que se diese la igualdad (ecuación (2.19)) o los que harían tender la combinación lineal a la función $a(\tau)$ (ecuación (2.20)).

En general, tanto para dimensión finita o infinita numerable¹² y siempre que la base sea ortogonal, los coeficientes van a ser igual o proporcional a la proyección de la función $a(\tau)$ sobre cada uno de los elementos de la base, mientras que, para dimensión infinita no numerable, aunque muchas veces también sea dicha proyección, no se puede asegurar siempre y hay que acudir a la expresión (2.20) para encontrar los coeficientes $\alpha(\mu)$ óptimos que hagan la distancia entre la función $a(\tau)$ y la combinación lineal en μ , $\mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]$, sea mínima y tienda a 0.

■ **Ejemplo.**

Sea un espacio de variable real $\tau \equiv x \in \mathbb{R}$ y de dimensión infinita no numerable $\mu \equiv \xi \in \mathbb{R}$, por tanto, el espacio de señales será $\mathcal{F}_K \equiv \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ (funciones continuas de variable real).

Sea $f(x) \in \mathcal{S}(-\infty, \infty)$, una función compleja. Tomando el producto escalar ordinario, éste es

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx, \quad (2.21)$$

se escoge el conjunto de funciones base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ de variable x enumeradas por ξ . La función $f(x)$ vendrá descrita por los coeficientes $F(\xi)$,

$$f(x) = \mathbf{CL}_\xi [F(\xi)e(x; \xi)], \quad (2.22)$$

$$f(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{j\xi x}d\xi, \quad (2.23)$$

siendo estos coeficientes la proyección ortogonal de la función $f(x)$ sobre cada uno de los elementos de la base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$. Es decir, el coeficiente $F(\xi_0)$ será la proyección

¹²Véase Teoría de la Mejor Aproximación en [80].

ortogonal de $f(x)$ sobre $e(x; \xi_0) = e^{j\xi_0 x}$. En general,

$$F(\xi) \propto \langle f(x), e(x; \xi) \rangle = \langle f(x), e^{j\xi x} \rangle, \quad (2.24)$$

$$F(\xi) \propto \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (2.25)$$

Este ejemplo sería el caso particular de la Transformada de Fourier para señales de variable continua, siendo la ecuación (2.25) la transformación directa y la ecuación (2.23) la transformación inversa.

Sobre el tema de transformadas se hablará con más detenimiento en la Secc. 2.3.6.

Como se ha visto, cuando el parámetro μ representa un conjunto continuo, la combinación lineal \mathbf{CL}_μ se convierte en una integral, generalmente de soporte infinito. Esto plantea un nuevo problema, normalmente para el cálculo de los coeficientes $\alpha(\mu)$, puesto que puede darse el caso de que esa integral no sea convergente para cierto conjunto de funciones. Para solucionar este problema, habría que modificar el espacio de partida para aquellas funciones que cumplieran unos determinados criterios de convergencia, es decir, reducir el espacio a las funciones para las cuales se pudiera garantizar que existe una expresión y unos coeficientes que la permitieran representarla como una combinación lineal de los elementos de la base escogida.

2.3.5. Bases ideales

En la parte principal del siguiente apartado se trata el caso de funciones complejas de variable real, es decir $\tau \equiv x$ y $a(\tau) \equiv f(x) \in \mathcal{S}(-\infty, \infty)$; pero al final se hace también referencia a variable discreta ($\tau \equiv n$ y $a(\tau) \equiv x(n) \in \mathcal{D}(-\infty, \infty)$).

La Delta de Dirac

El objeto matemático conocido como Delta de Dirac, $\delta(x)$, no es propiamente una función sino una función generalizada que, para ser entendida, debe aplicarse a una función de variable continua. Su utilidad radica en que es un objeto capaz de seleccionar un valor concreto sobre un conjunto continuo de valores.

La delta de Dirac puede ser definida como una distribución a partir de una sucesión de funciones de buen comportamiento¹³ como, por ejemplo, gaussianas, funciones sinc o derivadas de arcotangentes. De esta manera, la delta de Dirac quedaría definida como una distribución que valiese 0 en todo su dominio excepto en el 0 donde no estaría definida:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ ? & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Sin embargo, otra posible definición es la obtenida desde el punto de vista de funcional, definiéndolo como \mathbf{D} ¹⁴. En este caso, la delta de Dirac es una aplicación que, al actuar sobre otra función,

¹³Las funciones de buen comportamiento son, en general, funciones $f(x)$ continuas e infinitamente derivables y, además, de energía finita, es decir,

$$\begin{cases} f(x) \in \mathcal{C}^\infty, \\ f(x) \in L^2(\text{Dom}\{f(x)\}). \end{cases} \quad (2.26)$$

¹⁴Puede verse una definición más rigurosa de las distribuciones en general en el Ap. B.17.

da como resultado el valor de dicha función en el origen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : \mathcal{S}(-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) &\mapsto f(0). \end{aligned} \tag{2.28}$$

La obtención de dicho valor se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\delta(x) : f(x) \mapsto \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \in \mathbb{C}. \tag{2.29}$$

En este caso, la integral que aparece no debe ser entendida como una integral de Riemman ni de Lebesgue, puesto que no hay ningún área bajo la curva, sino como una expresión cerrada por la cual se obtiene el valor de la función $f(x)$ en el origen, es decir, $f(0)$.

De la definición vista en (2.29), se puede interpretar la expresión integral que aparece como el producto escalar de la función $f(x)$ con la delta de Dirac $\delta(x)$. Puesto que la delta se considera real, se tiene

$$\langle f(x), \delta(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx, \tag{2.30}$$

con las precauciones debidas puesto que, como se ha indicado anteriormente, ni la $\delta(x)$ es una función y ni el símbolo \int se puede interpretar como una integral. De todas formas, podría entenderse que el valor complejo $f(0)$ es la proyección de la función $f(x)$ sobre la Delta de Dirac $\delta(x)$.

Un resultado interesante que se puede obtener de lo visto anteriormente es que el objeto matemático $\delta(x)$ permite obtener el valor $f(0)$ de una función $f(x)$, es decir, realiza un muestreo de dicha función en el punto $x = 0$.

Una vez conocido el comportamiento de la delta de Dirac $\delta(x)$, basta tan solo con desplazar su localización para conseguir el valor de una función dada $f(x)$ en cualquier punto x_0 . Es decir, a partir de una delta localizada en x_0 se obtendría el valor de la función en ese punto, $f(x_0)$. Definiciones análogas, por tanto, a (2.29) y (2.30) serían:

$$\delta(x - x_0) : f(x) \mapsto \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \in \mathbb{C}, \tag{2.31}$$

$$\langle f(x), \delta(x - x_0) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx. \tag{2.32}$$

Esto quiere decir que, barriendo todo el dominio de la función $f(x)$ y situando la $\delta(x - x_0)$ en cada punto, se puede obtener cada uno de los valores particulares $f(x_0) \in \mathbb{C}$ de la función $f(x)$.¹⁵

Conjunto de deltas desplazadas como base ideal

Se define el conjunto de deltas desplazadas como $\{\delta(x - x')\}_{x'}$. Como se había visto en el punto 2.3.3, una base $e(\tau; \mu)$ es un conjunto de funciones a través de las cuales se pueda representar cualquier función $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ como combinación lineal de los elementos de esa base ponderados por unos coeficientes $\alpha(\mu) \in \mathcal{K}$.

Uno de los casos particulares más importantes es el de las funciones complejas de variable real sobre el cuerpo de los complejos. En este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{K}} &\equiv \mathcal{S}(-\infty, \infty), \\ \mathcal{K} &\equiv \mathbb{C}, \\ a(\tau) &\equiv f(x). \end{aligned}$$

¹⁵Una definición más extensa y rigurosa de la delta de Dirac $\delta(x)$ puede verse en la bibliografía [80].

Por otro lado, en la Secc. 2.3.5, se ha visto como el conjunto $\{\delta(x - x_0)\}$ para cada x_0 actúa como un muestreador de una señal $f(x)$, obteniéndose cada valor $f(x_0)$ como el producto escalar de la señal $f(x)$ con la delta correspondiente $\delta(x - x_0)$.

Pues bien, sea el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{\delta(x - x')\}_{x'}$ siendo, tanto x como x' reales. En este caso el parámetro descriptivo $\mu \equiv x'$ describe el lugar donde se localiza cada una de las deltas $\delta(x - x')$.

Para comprobar que el conjunto $\{\delta(x - x')\}_{x'}$ es una base de $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ hay que ver que una función cualquiera $f(x) \in \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ se puede expresar como una combinación lineal de dicha base. Teniendo en cuenta la ecuación (2.16) y que el parámetro $\mu \equiv x' \in \mathbb{R}$, la combinación lineal es la integral

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \alpha(x') \delta(x - x') dx'. \quad (2.33)$$

Ahora habría que encontrar los coeficientes $\alpha(x')$ que cumplieran la ecuación (2.33); pero se sabe de la Secc.2.3.5 que esos coeficientes son los valores de la función en cada uno de los puntos, es decir,

$$\alpha(x') = f(x'), \quad (2.34)$$

puesto que

$$f(x') = \langle f(x), \delta(x - x') \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx \in \mathbb{C}. \quad (2.35)$$

De esta manera se puede obtener la función $f(x)$ como una combinación lineal de deltas desplazadas siendo los coeficientes los propios valores de la función en cada punto x' .

Se puede comprobar, por tanto, que

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx', \quad (2.36)$$

puesto que, por la simetría par de la distribución $\delta(x)$, ($\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$) y por similitud con la expresión (2.35), la ecuación (2.36) es correcta.

La integral de la ecuación (2.36) puede verse como una integral de convolución, por lo que la función $f(x)$ se podría expresar también como

$$f(x) = f(x) * \delta(x), \quad (2.37)$$

demostrando, además, que la delta de Dirac $\delta(x)$ es el elemento neutro de la operación convolución.

Finalmente, de forma general, cualquier función $f(x) \in \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ puede representarse en términos del conjunto base ideal $\{\delta(x - x')\}_{x'}$ siendo los coeficientes los valores de $f(x)$ en cada punto, $f(x')$, es decir, queda definida en términos de sí misma.

Para el caso de variable discreta también existe un conjunto de funciones que hace el papel de base ideal. Este es el caso de las deltas de Kronecker; pero estas deltas están perfectamente definidas como

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Cualquier función $x(n) \in \mathcal{D}(-\infty, \infty)$ se puede expresar como

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \delta(n - n') = x(n) * \delta(n). \quad (2.39)$$

El conjunto, por tanto, $\{\delta(n - n')\}_{n'}$ representa una base ideal del espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$, pero sin la problemática de las deltas de Dirac, ya que las deltas de Kronecker no son funciones generalizadas sino funciones perfectamente definidas con las que se puede operar libremente con el resto de funciones del espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$.

En general, para variable genérica τ , se define una base ideal como $e(\tau; \tau') \equiv \left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$, representado esta delta genérica, $\tilde{\delta}$, tanto la delta de Dirac cuando se está en variable continua, como la delta de Kronecker cuando se está en variable discreta, pudiendo representar cualquier función $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ como una combinación lineal de esta base ideal ponderada por la propia señal

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right]. \quad (2.40)$$

Esta representación de las funciones en términos de deltas desplazadas es importante a la hora de analizar las señales a través de sistemas lineales, como se verá en la Secc. 2.4.3.

2.3.6. Transformadas y dominios transformados

En este apartado se analiza el sentido algebraico del significado de transformada, introduciendo el concepto de **Transformada Generalizada**. Dicho análisis está estrechamente relacionado con la Secc. 2.3.3, es decir, con el estudio de la representación de una señal $a(\tau)$ de un espacio $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ en términos de una base $e(\tau; \mu)$. En este estudio, como recuerdan las ecuaciones (2.16), (2.18) y (2.20), dada una base $e(\tau; \mu)$, la función $a(\tau)$ se puede expresar como

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (2.41)$$

siendo¹⁶

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle, \quad (2.42)$$

siempre que la base sea un conjunto ortogonal, tal como se demuestra en [1], donde la constante A se calcula a través del producto escalar entre dos elementos de la base,

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle = A \tilde{\delta}(\mu - \mu'), \quad (2.43)$$

aunque, en general para cualquier base, lo que habría que analizar es que la distancia entre la función original y la combinación lineal tienda a 0

$$d(a(\tau), \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]) \rightarrow 0 \quad (2.44)$$

y de ahí encontrar los coeficientes $\alpha(\mu)$, es decir,

$$\alpha(\mu) \text{ tq } d(a(\tau), \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]) \rightarrow 0. \quad (2.45)$$

Pues simplemente al par de ecuaciones (2.41)-(2.42) ó (2.41)-(2.45) se les llama **Transformación** o **Transformada Generalizada**.

La combinación lineal por la cual se obtiene la función original $a(\tau)$ se denomina **Transformada Inversa**, mientras que la operación por la que se encuentran los coeficientes $\alpha(\mu)$ se denomina **Transformada Directa** o simplemente **Transformada**.

Hay que recordar que la variable τ no tiene nada que ver con el parámetro μ . La primera es la variable del espacio de señales de partida y el segundo tan sólo enumera las funciones base

¹⁶La normalización por el factor A dependerá de cómo se realice la definición de la transformada. En algunas ocasiones esta constante aparecerá en el cálculo de los coeficientes, otras veces en la reconstrucción de la señal como una combinación lineal y en otras ocasiones repartida entre ambas expresiones.

y éste puede ser un conjunto finito, infinito numerable o infinito no numerable. Sin embargo, se puede asignar a μ también el concepto de variable, puesto que, los coeficientes $\alpha(\mu)$ pueden considerarse como una función, que pertenecerá a un cierto espacio dependiendo de la naturaleza de μ . En general, $a(\tau)$ y $\alpha(\mu)$ pertenecerán a espacios de señales distintos, sean $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$, respectivamente. Esto obliga a dar un nuevo significado a μ , que muchas veces estará relacionado con un parámetro físico, dependiendo del problema que se esté analizando. Puesto que la variable original es τ , a ésta se le conoce con el nombre de **variable real**, mientras que, a partir de ahora, siempre que se hable de transformadas, a la variable μ , se le llamará **variable espectral** o **variable transformada**. De esta forma, cuando se esté hablando de cualquier señal de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se dirá que se está en el **dominio real**, mientras que cuando se esté tratando con cualquier señal de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$ se dirá que se está en el **dominio espectral** o **dominio transformado**.

De la misma manera que se había explicado en la Secc. 2.3.4 para el cálculo de coeficientes, cuando la dimensión del espacio es infinita, hay que comprobar tanto la existencia de los coeficientes $\alpha(\mu)$ como la convergencia de la combinación lineal hacia $a(\tau)$. Esto implica una serie de criterios de convergencia que serán propios de cada transformada, restringiendo el conjunto de funciones a las que se les puede aplicar la transformación a aquéllas que cumplan dichos criterios. Por tanto, lo que determina una transformada es el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ escogido y los criterios de convergencia característicos de la misma, [1].

Algunas razones principales por las que son importantes las transformadas son:

- Se puede identificar unívocamente una función a través de sus coeficientes (el equivalente a las coordenadas de un espacio vectorial), por lo que se geometriza la función, simplificándola, por tanto.
- Muchas veces, las señales en el dominio espectral son más sencillas que en el dominio real.
- Algunos parámetros característicos de las señales en el dominio real son mucho más fáciles de obtener en el dominio espectral, como puede ser, en muchos casos, el cálculo de la energía.
- En el dominio espectral las posibles operaciones suelen ser más sencillas, sobre todo cuando se trata del análisis de una señal a través de un sistema lineal.

Dependiendo de la aplicación, el espacio de señales de partida, el sistema y las señales concretas o mayoritarias con las que se va a trabajar, se escogerá una transformada, y por tanto una base, adecuada al problema concreto que se esté analizando¹⁷.

¹⁷En general, esta base será la que cumpla una serie de características, por ejemplo, que sus funciones sean ortogonales, que sean fácilmente parametrizables, que dicho parámetro represente algún parámetro físico de interés (como puede ser la pulsación o frecuencia cuando se trata de exponenciales complejas para la transformada de Fourier y el problema se desarrolla en el dominio del tiempo), que sean autofunciones de ciertos sistemas, etc., aunque no necesariamente. Además de los ya citados, pueden existir otros aspectos, que habitualmente dependen del problema analizado, que pueden determinar la adecuación de un conjunto de funciones para ser utilizada como una base de un cierto espacio de señales. Estos aspectos son especialmente importantes en la aplicación de la Teoría de Señales y Sistemas al análisis de problemas físicos.

2.4. Operadores y sistemas

Un operador \mathbf{F} es una aplicación entre dos espacios vectoriales¹⁸ $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_1}$ y $\mathcal{W}_{\mathcal{K}_2}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1} &\rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2} \\ \vec{a} &\mapsto \mathbf{F}[\vec{a}] = \vec{b}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

En el caso de que estos espacios vectoriales sean considerados como espacios de funciones $\mathcal{F}_{\mathcal{K}_1}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{K}_2}$, la definición es equivalente¹⁹:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathcal{F}_{\mathcal{K}_1} &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{K}_2} \\ a(\tau) &\mapsto \mathbf{F}[a(\tau)] = b(v).\end{aligned}\tag{2.49}$$

Como puede observarse, las variables en las que están definidas tanto las funciones de origen como las de llegada no tienen por qué ser las mismas, puesto que los espacios de partida y de llegada no son, en general, los mismos, así como los cuerpos sobre los que están definidos éstos²⁰, como puede observarse en la Fig. 2.6.

Por otro lado, puede definirse un **sistema** como cualquier proceso en el que intervenga una transformación o modificación entre señales. Esto puede verse, según la Fig. 2.7, como una caja negra en el que hay una o varias señales de entrada que son modificadas por el sistema dando lugar a una o varias señales de salida. En general, sólo se estudiarán los sistemas en los que la transformación de una sola señal dé lugar a otra única señal, como es el caso del esquema que muestra la Fig. 2.8. De esta forma, cualquier sistema puede ser descrito en términos de un operador, tras pasando las propiedades físicas de ese sistema a las características particulares del conjunto de los operadores

2.4.1. Espacio de operadores

Los operadores pueden tener naturaleza muy diversa, tan diversa como los diferentes problemas físicos que uno pueda llegar a imaginarse. Sin embargo, se puede realizar una clasificación importante de los operadores en función de algunas características que tengan en común. A este grupo de operadores que tengan esas mismas características se les llama **espacio de operadores**. Las propiedades más importantes a tener en cuenta en los operadores son:

¹⁸Podría definirse, en general, un operador entre dos productos cartesianos de espacios vectoriales, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1}^N = \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1}^1 \times \dots \times \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1}^N &\rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2}^1 \times \dots \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2}^M = \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2}^M \\ (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) &\mapsto \mathbf{F}[(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)] = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m),\end{aligned}\tag{2.46}$$

donde cada uno de los M vectores de salida dependen de los N vectores de entrada a través del operador \mathbf{F} .

¹⁹Igualmente, se podría definir un operador entre dos productos cartesianos de espacios de señales como,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathcal{F}_{\mathcal{K}_1}^N = \mathcal{F}_{\mathcal{K}_1}^1 \times \dots \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}_1}^N &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{K}_2}^1 \times \dots \times \mathcal{G}_{\mathcal{K}_2}^M = \mathcal{G}_{\mathcal{K}_2}^M \\ (a_1(\tau), \dots, a_n(\tau)) &\mapsto \mathbf{F}[(a_1(\tau), \dots, a_n(\tau))] = (b_1(v), \dots, b_m(v)),\end{aligned}\tag{2.48}$$

donde cada una de las M señales de salida de variable v dependen de las N señales de entrada de variable τ a través del operador \mathbf{F} . Salvo casos concretos, como son el producto escalar o la distancia vistos como operadores, donde el espacio de llegada es el cuerpo de los complejos \mathbb{C} o los reales no negativos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, respectivamente, u otros como la suma o la multiplicación, se considerará siempre $N = M = 1$, es decir, una sola señal de salida dependiente de una sola señal de entrada.

²⁰Aunque aquí estemos en una notación lo más general posible, en adelante, y salvo que se especifique lo contrario, se considerará el mismo cuerpo \mathcal{K} de escalares para todos los espacios de señal, siendo éste el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} .

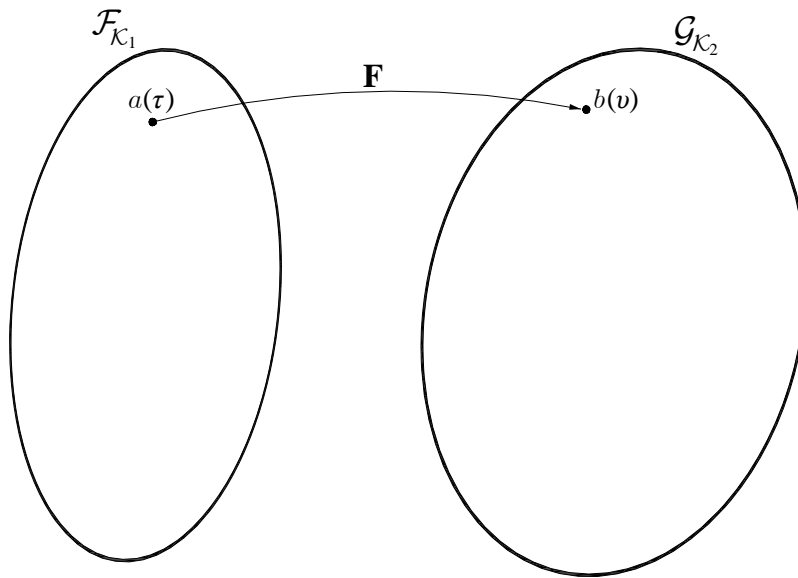


Figura 2.6: En general, un operador \mathbf{F} pasa de un espacio de funciones a otro diferente.

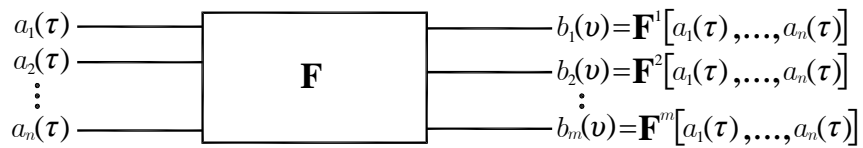


Figura 2.7: Esquema general de un sistema de n señales de entrada generando m señales de salida.

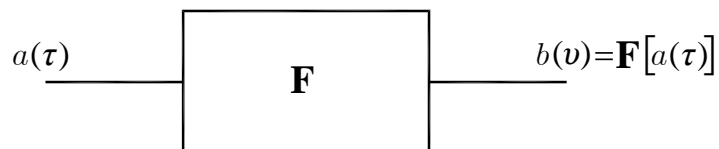


Figura 2.8: Paso de una señal a través de un sistema \mathbf{F} .

■ **Linealidad.**

Un sistema descrito por un operador se dice que es lineal cuando una combinación lineal a la entrada produce la misma combinación lineal a la salida. Esto es,

$$\mathbf{F} \text{ lineal} \Leftrightarrow \mathbf{F} [\alpha_1 a_1(\tau) + \alpha_2 a_2(\tau)] = \alpha_1 \mathbf{F} [a_1(\tau)] + \alpha_2 \mathbf{F} [a_2(\tau)]. \quad (2.50)$$

■ **Invarianza.**

Un sistema lineal descrito por un operador se dice que es invariante cuando un desplazamiento en la variable independiente en la señal de entrada produce el mismo desplazamiento en la señal de salida²¹.

$$\mathbf{F} \text{ invariante} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{F} [a(\tau)] = b(\tau') \\ \mathbf{F} [a(\tau - \tau_0)] = b(\tau' - \tau_0). \end{cases} \quad (2.51)$$

De esta manera se pueden clasificar los sistemas en dos grandes conjuntos:

1. **Sistemas no lineales**, descritos por un operador \mathbf{F} no lineal, identificando como $\mathbf{F}(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ al espacio de los operadores no lineales sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.
2. **Sistemas lineales**, descritos por un operador \mathbf{F} lineal. En este caso se denotarían como $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$, dando lugar al espacio de los operadores lineales sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. En este espacio se puede encontrar un subconjunto importante:
 - a) **Sistemas lineales invariantes**, descritos por un operador \mathbf{F} lineal e invariante. En este caso se denotarían como $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$, siendo $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \subset \mathbf{F}_{\mathbf{L}}(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$, dando lugar al espacio de los operadores lineales e invariantes sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

La Fig. 2.9 muestra una representación esquemática de estos tipos de sistemas como espacio de operadores.

Otras propiedades de los operadores son:

■ **Memoria.**

Un sistema operando en el mismo espacio se dice que no tiene memoria si la señal de salida en un punto depende únicamente de la entrada en ese punto.

$$\mathbf{F} \text{ sin memoria} \Leftrightarrow b(\tau_0) = \mathbf{F} [a(\tau_0)], \quad \forall \tau_0. \quad (2.52)$$

■ **Invertibilidad.**

Un sistema es invertible si existe otro tal que, al aplicarlo a la señal de salida del primero, nos devuelve la señal original.

$$\mathbf{F} \text{ invertible} \Leftrightarrow \exists \mathbf{F}^{-1} \text{ tq } \mathbf{F} [\mathbf{F}^{-1} [a(\tau)]] = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{F} [a(\tau)]] = a(\tau), \quad \forall a(\tau) \in \text{Dom} \{\mathbf{F}\}. \quad (2.53)$$

■ **Causalidad.**

Un sistema cuya señal de salida pertenece al mismo espacio que la de entrada se dice que es causal si el valor de la salida en un punto no depende de valores posteriores.

$$\mathbf{F} \text{ causal} \Leftrightarrow b(\tau_0) = \mathbf{F} [a(\tau \leq \tau_0)], \quad \forall \tau_0 \quad (2.54)$$

²¹En este caso es claro que el espacio de llegada tiene que ser el mismo que el de partida, para que pueda producirse tal desplazamiento, por eso la variable de la función de llegada, v , tiene que ser de la misma naturaleza que la del espacio de partida, τ , por lo que se representa como τ' ; aunque, en general, salvo que indiquen magnitudes físicas diferentes, podrían denominarse ambas incluso con la misma variable τ .

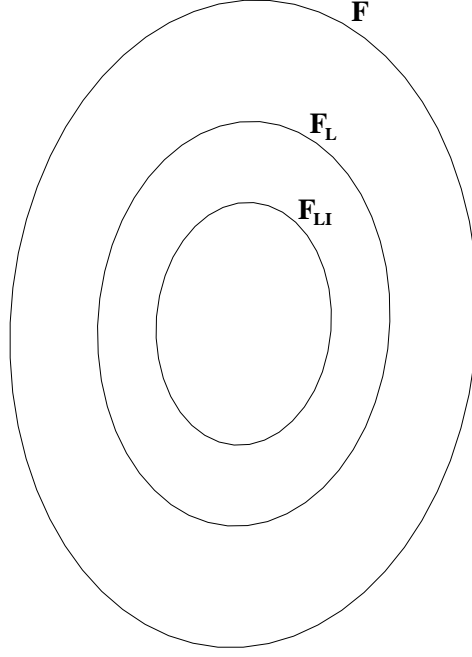


Figura 2.9: El conjunto de operadores \mathbf{F} puede verse como un espacio en el que los operadores lineales \mathbf{F}_L son un subconjunto y los operadores lineales e invariantes \mathbf{F}_{LI} otro subconjunto dentro de éste último.

■ **Estabilidad.**

Un sistema es estable si para toda señal de entrada acotada la salida también lo está.

$$\mathbf{F} \text{ estable} \Leftrightarrow |a(\tau)| < A \Rightarrow |b(v)| = |\mathbf{F}[a(\tau)]| < B, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

■ **Autoadjuntividad.**

Se define el adjunto de un operador \mathbf{F} como aquél \mathbf{F}^\dagger que cumple la igualdad

$$\langle a_1(\tau), \mathbf{F}[a_2(\tau)] \rangle = \langle \mathbf{F}^\dagger[a_1(\tau)], a_2(\tau) \rangle \quad (2.56)$$

Cuando se cumple que $\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{F}$ se dice que el operador es hermítico, si, además, coinciden sus dominios totalmente, se dice que son autoadjuntos. Todo operador autoadjunto es hermítico pero no al revés. En el caso de dimensión finita, todo operador hermítico es sinónimo de autoadjunto. Si se cumple que $\mathbf{F}^\dagger = -\mathbf{F}$ se dice que el operador es antihermítico, y si coinciden totalmente sus dominios, se dice que es antiautoadjunto.

■ **Continuidad.**

Un operador \mathbf{F} que actúa entre dos espacios topológicos²² se dice que es continuo si, siendo $\mathbf{F}[a(\tau)] = b(v)$, la aplicación de \mathbf{F} a una función del entorno de $a(\tau)$, $U(a(\tau))$, lleva a una función del entorno de $b(v)$, $U(b(v))$,

$$a'(\tau) \in U(a(\tau)) \Rightarrow \mathbf{F}[a'(\tau)] \in U(\mathbf{F}[a(\tau)]) = U(b(v)). \quad (2.57)$$

Considerando el operador \mathbf{F} entre dos espacios normados²³, la continuidad indica que la aplicación de \mathbf{F} a una función $a'(\tau)$ cercana a $a(\tau)$ lleva a una función $b'(v)$ cercana a

²²Ver definición de espacio topológico en el Ap. B.1.

²³Ver definición de espacio normado en el Ap. B.3.

$b(v)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \|a(\tau) - a'(\tau)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}[a(\tau)] - \mathbf{F}[a'(\tau)]\| = \|b(v) - b'(v)\| < \varepsilon. \quad (2.58)$$

Hay que tener en cuenta que $\|\mathbf{F}[a(\tau)]\| = \|b(v)\|$ es la norma referente al espacio de llegada $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ mientras que $\|a(\tau)\|$ es la referente al espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

■ **Acotabilidad.**

Un operador \mathbf{F} que describe un sistema se dice que está acotado si, y sólo si, para una entrada con norma finita, la señal de salida por el sistema tiene también norma finita.

$$\mathbf{F} \text{ acotado} \Leftrightarrow \exists K \text{ tq } \|\mathbf{F}[a(\tau)]\| < K \|a(\tau)\|, \forall a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \quad (2.59)$$

donde nuevamente hay que tener en cuenta que $\|\mathbf{F}[a(\tau)]\|$ es la norma referente al espacio de llegada y $\|a(\tau)\|$ la del de partida.

Un operador lineal acotado entre dos espacios normados implica la continuidad del operador²⁴.

■ **Inyectividad.**

Un sistema es inyectivo si la aplicación a señales diferentes da siempre como resultado señales diferentes.

$$\mathbf{F} \text{ inyectivo} \Leftrightarrow \forall a_1(\tau), a_2(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \quad \mathbf{F}[a_1(\tau)] = \mathbf{F}[a_2(\tau)] \Rightarrow a_1(\tau) = a_2(\tau). \quad (2.60)$$

■ **Suprayectividad.**

Un sistema es suprayectivo o exhaustivo si para todo elemento del espacio de llegada existe un elemento del espacio de partida que sea antiimagen por el sistema.

$$\mathbf{F} \text{ suprayectivo} \Leftrightarrow \forall b(v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}} \exists a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \mathbf{F}[a(\tau)] = b(v). \quad (2.61)$$

■ **Biyectividad.**

Un sistema es biyectivo si es inyectivo y suprayectivo a la vez. Todo sistema biyectivo es invertible y todo sistema invertible es biyectivo, además, su sistema inverso también biyectivo.

Otros subconjuntos por las que se pueden agrupar los operadores como subespacios de los anteriores son:

■ Subespacio **dominio** del operador $\text{Dom}\{\mathbf{F}\}$.

El dominio de un operador \mathbf{F} es el conjunto de elementos de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ para los que el operador está bien definido²⁵, es decir, el conjunto de elementos a los que se puede aplicar \mathbf{F} y obtener un elemento de $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$.

$$\text{Dom}\{\mathbf{F}\} = \{a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \exists b(v) = \mathbf{F}[a(\tau)] \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}}\}. \quad (2.62)$$

$$D = \text{Dom}\{\mathbf{F}\} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}.$$

²⁴Para una explicación detallada de las propiedades de los operadores acotados y no acotados referirse, por ejemplo, a [64].

²⁵En muchas ocasiones, sobre todo cuando se trabaja con funciones de variable continua y distribuciones, es necesario considerar una versión generalizada del operador \mathbf{F} , de forma que pueda abarcar una mayor cantidad de funciones que no pertenecerían al dominio sin esta generalización. Habitualmente se considerará siempre este operador generalizado, aunque se denomine igual y no se distinga específicamente, puesto que da mayor juego a la hora de tratar con distribuciones y funciones generalizadas, elementos ampliamente utilizados en la GSST.

- Subespacio **imagen** del operador $\text{Imag}\{\mathbf{F}\}$.

La imagen de un operador \mathbf{F} es el conjunto de elementos de $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ para los cuales existe al menos un elemento de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ tal que al aplicárselo, se obtenga dicho elemento de $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$.

$$\text{Imag}\{\mathbf{F}\} = \{b(v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \exists a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \mathbf{F}[a(\tau)] = b(v)\}. \quad (2.63)$$

$I = \text{Imag}\{\mathbf{F}\} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$. En ocasiones a la imagen de \mathbf{F} también se le conoce como rango del operador, $\text{Rang}\{\mathbf{F}\}$, aunque puede dar lugar a equivocación confundiéndolo con la dimensión del espacio de llegada, ya que este término suele estar asociado al rango de una matriz, que permite obtener la dimensión del espacio de llegada de un operador lineal de dimensión finita.

- Subespacio **núcleo** del operador $\text{Ker}\{\mathbf{F}\}$.

El núcleo o kernel de un operador \mathbf{F} es el conjunto de elementos de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ cuya imagen es el elemento neutro de $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, típicamente denominado como $0(v)$.

$$\text{Ker}\{\mathbf{F}\} = \{a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \mathbf{F}[a(\tau)] = 0(v)\}. \quad (2.64)$$

$$K = \text{Ker}\{\mathbf{F}\} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}.$$

- Subespacio de **funciones propias** $\text{Eig}\{\mathbf{F}\}$.

El conjunto de funciones propias o autofunciones (eigenfunctions en inglés) de un operador \mathbf{F} se define como aquellas funciones que, a través del operador, se transforman en sí mismas multiplicadas por un escalar λ . Esto es,

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}\} = \{a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \text{ tq } \mathbf{F}[a(\tau)] = \lambda a(\tau), \quad \lambda \in \mathcal{K}\}. \quad (2.65)$$

$E = \text{Eig}\{\mathbf{F}\} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Al escalar λ se le conoce como valor propio o autovalor (eigenvalue en inglés). En este caso hay que tener en cuenta que sólo es posible encontrar autofunciones cuando los espacios de partida y de llegada son los mismos, por lo que $\mathcal{G}_{\mathcal{K}} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

2.4.2. Transformadas desde el punto de vista de operadores

Tal como se había visto en la Secc. 2.3.6, la transformada $\alpha(\mu)$ de una señal $a(\tau)$, es decir, los coeficientes de $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$, puede ser interpretada como una nueva función considerando el parámetro μ como una nueva variable. De esta forma, el concepto de transformada puede ser visto como un operador \mathbf{T} que actúa entre los espacios $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$, como se muestra en las Figs. 2.10 y 2.11. La representación matemática de este operador sería

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}} \\ a(\tau) &\mapsto \mathbf{T}[a(\tau)] = \alpha(\mu). \end{aligned} \quad (2.66)$$

por el cual, a partir de una señal $a(\tau)$ de un espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, se obtiene otra, $\alpha(\mu)$ perteneciente a otro espacio (en este caso el de llegada) $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$.

2.4.3. Caracterización de una señal a través de un sistema

Caracterización general

Recordando la ecuación (2.16), escogido un conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$, una señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base de la forma

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]. \quad (2.67)$$

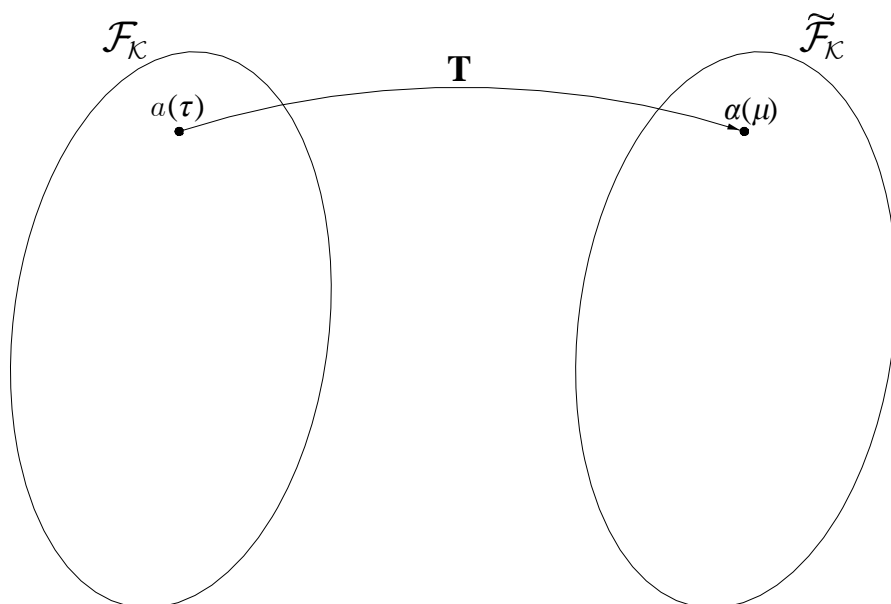


Figura 2.10: Un operador Transformada \mathbf{T} pasa de un espacio de funciones a otro, en general, diferente.

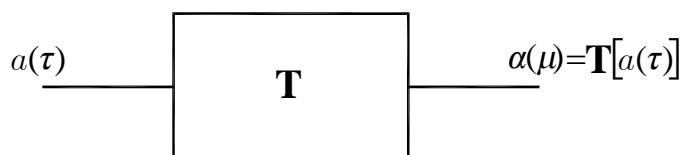


Figura 2.11: Transformada interpretada desde el punto de vista de un operador \mathbf{T} . $a(\tau) \in \mathcal{F}_\kappa$ y $a(\mu) \in \tilde{\mathcal{F}}_\kappa$.

Cuando esta señal pasa a través de un sistema \mathbf{F} , la señal de salida $b(v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ puede expresarse como

$$b(v) = \mathbf{F} [a(\tau)] = \mathbf{F} [\mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]] . \quad (2.68)$$

Si el operador que define el sistema es lineal, es decir, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, tal como indica la definición (2.50), la señal de salida quedaría

$$b(v) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu)\mathbf{F}_{\mathbf{L}} [e(\tau; \mu)]] \quad (2.69)$$

por tanto, si el operador es lineal, tan solo hay que transformar los elementos de la base para, junto con la misma combinación lineal que se tenía a la entrada, obtener la señal de salida. Esto quiere decir que la transformación a través del operador $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ queda caracterizada únicamente a partir de la transformación de la base.

Si además de ser lineal, los espacios de partida y de llegada son los mismos y el conjunto de funciones base pertenecen al subespacio de autofunciones del operador $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, es decir, $e(\tau; \mu) \in \text{Eig} \{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$, se tiene

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} [e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu), \quad (2.70)$$

la señal de salida queda caracterizada como

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu)\lambda(\mu)e(\tau; \mu)] . \quad (2.71)$$

En este caso, $\lambda(\mu_0)$ representa el autovalor correspondiente a la transformación del elemento de la base $e(\tau; \mu_0)$.

Llamando

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu)\lambda(\mu) \quad (2.72)$$

se tiene que la señal de salida es, simplemente,

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\beta(\mu)e(\tau; \mu)] , \quad (2.73)$$

es decir, una nueva combinación lineal de los elementos de la misma base del espacio de entrada $e(\tau; \mu)$. En la Fig. 2.12 se representa un esquema ejemplificativo de este desarrollo.

Es importante decir que, aunque la base sea un concepto intrínsecamente relacionado con el espacio de señales, sin tener en cuenta ningún tipo de operadores, la elección de una base u otra puede venir condicionada por el tipo de operadores que se vayan a usar en un problema concreto, puesto que, como se ha visto, el caso de las funciones base que sean autofunciones de un operador simplifica los cálculos. Pero esto no impide que se pueda usar cualquier otra base, aunque las operaciones se compliquen. Para entenderlo mejor, se puede volver a los espacios vectoriales y poner como ejemplo el espacio vectorial sobre \mathbb{R}^3 . En este espacio se pueden representar los puntos eligiendo una base tanto de coordenadas cartesianas, como cilíndricas o esféricas, entre otros, independientemente del problema que se vaya a tratar. Sin embargo, una vez conocido dicho problema se puede escoger la base que mejor convenga, puesto que si, por ejemplo, el problema trata sobre radiación de una antena, en general se usarán coordenadas esféricas, si trata sobre fibras ópticas, se escogerán coordenadas cilíndricas, y si el problema es de geometría, en muchos casos lo mejor son las coordenadas cartesianas. Esto no quiere decir que cualquiera de estos problemas no pueda resolverse en otra base, pero complicaría los cálculos y las expresiones.

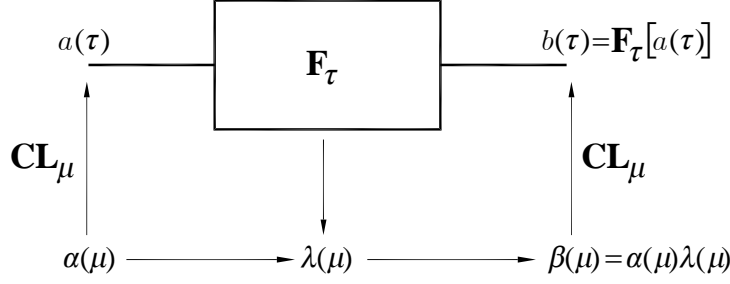


Figura 2.12: Cuando las funciones base escogidas son autofunciones del sistema, los coeficientes de la combinación lineal de la señal de salida son los propios de la señal de entrada multiplicados por los autovalores del sistema. Estos autovalores $\lambda(\mu)$ es lo que se conoce como el análisis espectral del sistema \mathbf{F} .

Sistemas lineales Si se escoge como base el conjunto $e(\tau; \mu) \equiv e(\tau; \tau') = \left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$, se tiene, como se ha comentado en la Secc. 2.3.5, una base ideal con un conjunto de deltas desplazadas. De esta manera, una función cualquiera $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ puede expresarse en términos de sí misma de la forma, como mostraba la ecuación (2.40)

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right]. \quad (2.74)$$

Cuando esta señal pase a través de un sistema lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, la señal de salida $b(v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ podrá expresarse como²⁶

$$\begin{aligned} b(v) &= \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [a(\tau)] = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right] = \\ &= \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Denominando

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] = h(v; \tau'), \quad (2.76)$$

se tiene que la salida a un sistema lineal viene expresada por la forma

$$b(v) = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') h(v; \tau') \right]. \quad (2.77)$$

El conjunto $\{h(v; \tau')\}_{\tau'}$ viene descrito por el parámetro τ' y se conoce como **conjunto de respuestas al impulso del sistema**. La Fig. 2.13 muestra esquemáticamente la obtención de este conjunto a través del operador representado por una caja negra. De esta manera, sea cual sea el operador lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ que defina el sistema, lo único que se debe conocer para obtener la respuesta a cualquier entrada $a(\tau)$ es la respuesta a las señales impulsivas delta, localizadas a lo largo de todo el dominio de definición de la variable independiente.

Además, conocido el conjunto $\{h(v; \tau')\}_{\tau'}$ para un operador lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, existe una **representación de núcleo** $h(v; \tau')$ que caracteriza de forma alternativa pero única el operador $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\cdot] \equiv \mathbf{CL}_{\tau'} \left[(\cdot)_{\tau'} h(v; \tau') \right]. \quad (2.78)$$

²⁶Hay que tener en cuenta que el operador sólo actúa sobre la variable real del problema, es decir, sobre τ .

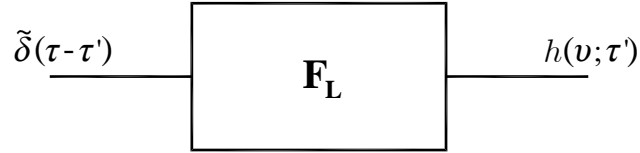


Figura 2.13: Representación esquemática del concepto asociado al conjunto de funciones respuesta al impulso $h(v; \tau')$ descriptivas de un sistema caracterizado por un operador \mathbf{F}_L lineal.

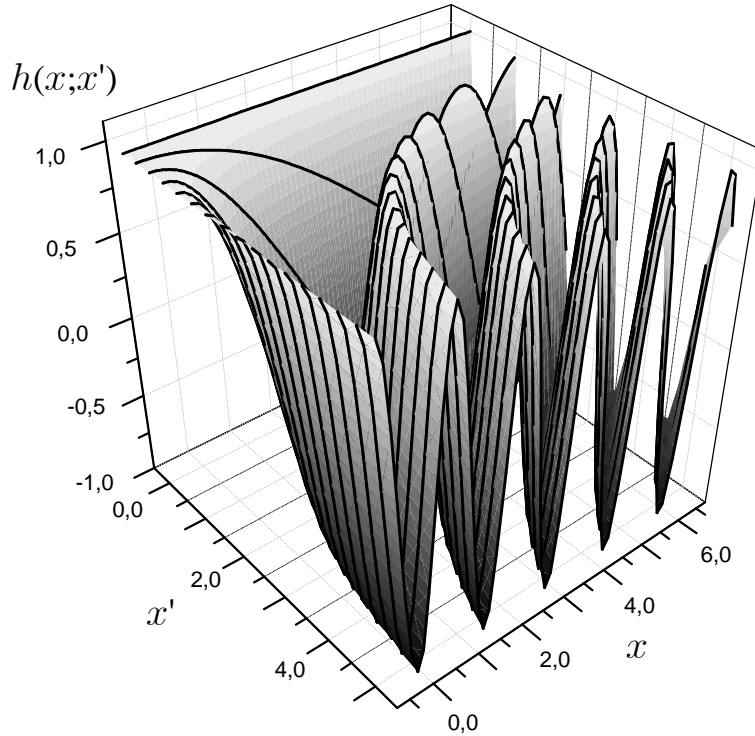


Figura 2.14: Conjunto de respuestas al impulso $h(x; x')$ de un sistema lineal no invariante de variable continua. Se marcan en trazo negro algunas de estas funciones.

En el caso de que el operador actúe sobre el mismo espacio de señal \mathcal{F}_K , las respuestas al impulso vendrían representadas como $h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_L [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]$. Una particularización de este caso en variable continua cuando $\tau \equiv x \in \mathbb{R}$ y $\tau' \equiv x' \in \mathbb{R}$ vendría representada como el conjunto $h(x; x')$. En las Figs. 2.14 y 2.15 puede verse un ejemplo de este tipo de respuestas al impulso de un sistema lineal no invariante representado en tres dimensiones, mientras que en la Fig. 2.16 se muestra un conjunto de estas funciones para algunos valores de x' concretos.

Sistemas lineales e invariantes Si además de ser lineal, el operador considerado pertenece al subespacio de operadores lineales e invariantes, $\mathbf{F}_{LI} \subset \mathbf{F}_L$, el conjunto de respuestas al impulso pasa a ser una sola función²⁷.

$$\mathbf{F}_L [\tilde{\delta}(\tau - \tau')] = h(\tau; \tau') = h(\tau - \tau'). \quad (2.79)$$

²⁷Para que se dé el caso de que el sistema sea invariante, el espacio de llegada tiene que ser el mismo que el de partida, por lo que la variable de las funciones de llegada será también τ .

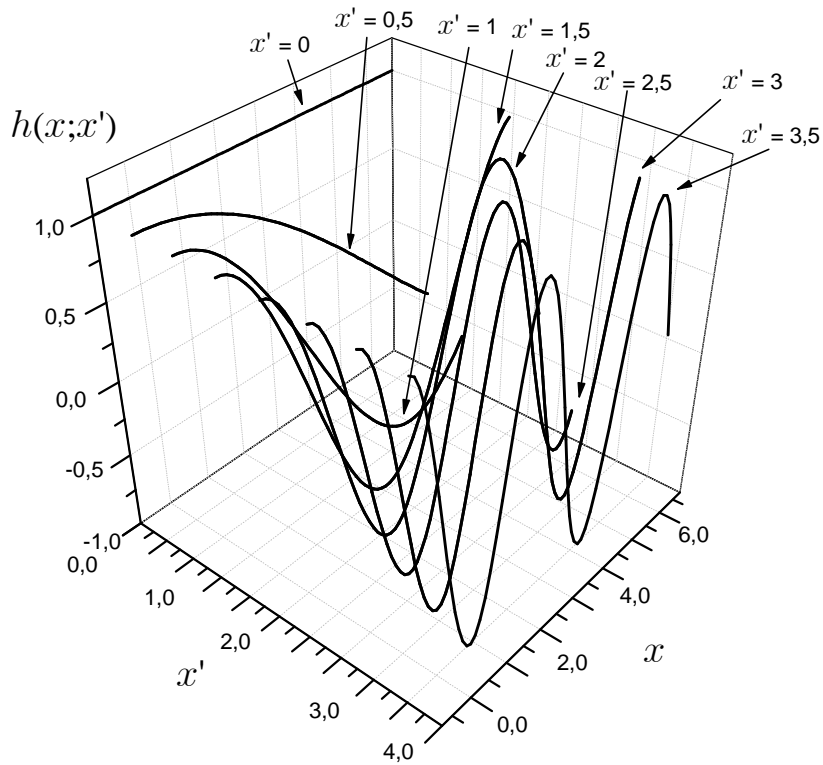


Figura 2.15: Ejemplo de respuestas al impulso $h(x; x')$ de un sistema lineal no invariante.

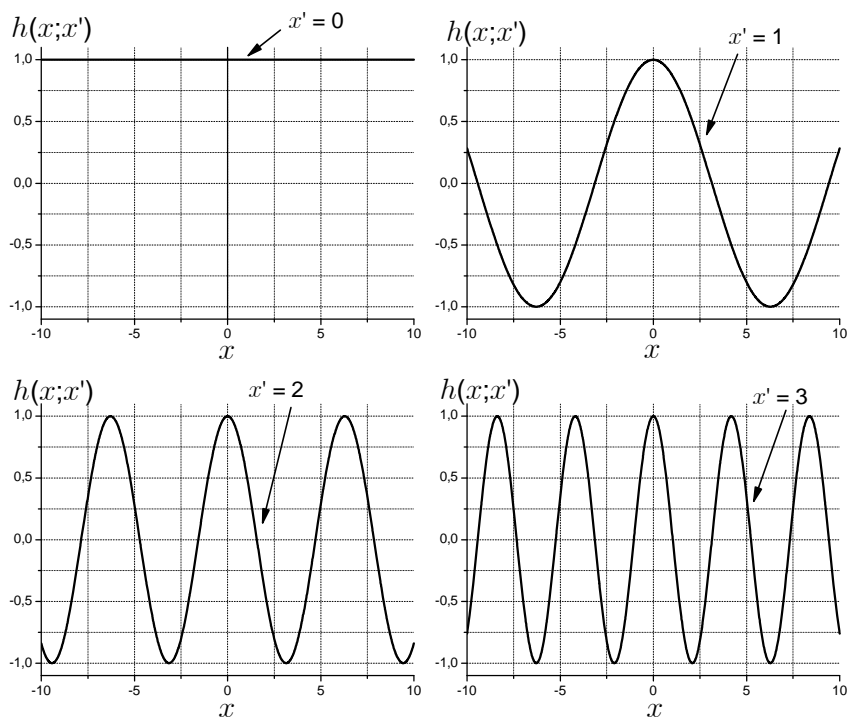


Figura 2.16: Representación de algunas funciones respuesta al impulso $h(x; x')$ de un sistema lineal no invariante para algunos valores concretos de x' .

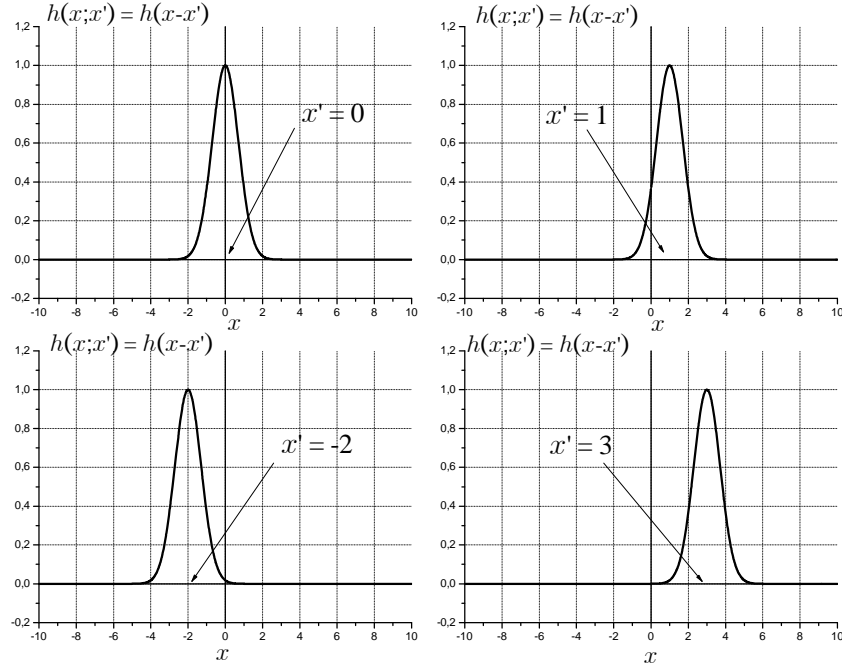


Figura 2.17: Ejemplo de respuestas al impulso $h(x; x') = h(x - x')$ de un sistema lineal e invariante.

De esta forma, la ecuación (2.77) pasaría a ser

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') h(\tau - \tau')]. \quad (2.80)$$

Las funciones $h(\tau - \tau')$ no serían más que el desplazamiento de una única función $h(\tau)$ conocida como respuesta al impulso del sistema, puesto que es la salida del sistema cuando la entrada es una delta

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [\tilde{\delta}(\tau)] = h(\tau). \quad (2.81)$$

La expresión (2.80) demuestra que, para cualquier sistema lineal e invariante, existe una representación con núcleo la respuesta al impulso $h(\tau)$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [\cdot] \equiv \mathbf{CL}_{\tau'} [(\cdot)_{\tau'} h(\tau - \tau')], \quad (2.82)$$

que además puede ser interpretada, al igual que ocurría en la ecuación (2.37), pero en términos generales, como una convolución

$$b(\tau) = a(\tau) * h(\tau), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [\cdot] = (\cdot) * h(\tau). \quad (2.84)$$

En la Fig. 2.17 puede verse un ejemplo de respuestas al impulso de un sistema lineal e invariante.

2.4.4. Análisis espectral de una señal a través de un sistema

Análisis general

El análisis espectral de una señal a través de un sistema no es más que la interpretación de dicho sistema en el dominio espectral o dominio transformado. Por la ecuación (2.45) se ha visto

que trabajar en el dominio transformado es lo mismo que hacerlo con los coeficientes $\alpha(\mu)$ tales que, a partir de una combinación lineal en μ junto con los elementos de la base que definen la transformada que se está utilizando, reconstruyen la señal original $a(\tau)$, es decir,

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]. \quad (2.85)$$

Por otro lado se ha visto que, según la ecuación (2.69), si el sistema es lineal, la salida en el dominio real es

$$b(v) = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu)\mathbf{F}_L [e(\tau; \mu)]]. \quad (2.86)$$

Además, en el caso particular de que el espacio de llegada sea el mismo que el de partida, $\mathcal{F}_K = \mathcal{G}_K$, y que las funciones base sean autofunciones del sistema lineal, $e(\tau; \mu) \in \text{Eig}\{\mathbf{F}_L\}$, por la ecuación (2.70) se tiene que la señal de salida del sistema en el dominio real es

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu)\lambda(\mu)e(\tau; \mu)] = \mathbf{CL}_\mu [\beta(\mu)e(\tau; \mu)], \quad (2.87)$$

por lo que el análisis en el dominio espectral pasaría a ser, simplemente, el producto de los coeficientes de la señal de entrada, $\alpha(\mu)$, por los autovalores del operador lineal \mathbf{F}_L , $\lambda(\mu)$,

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu)\lambda(\mu). \quad (2.88)$$

La interpretación es la misma que puede verse en la Fig. 2.12.

Ejemplo.

- En el caso particular de analizar un sistema lineal e invariante bajo la transformada de Fourier, resulta que el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ son autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{LI} [e^{j\xi x}] &= e^{j\xi x} * h(x) = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} e^{j\xi(x-x')} h(x') dx' = \\ &= e^{j\xi x} \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= H(\xi)e^{j\xi x} = \mathbf{TF} [h(x)] e^{j\xi x}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

siendo los autovalores

$$\lambda(\xi) = H(\xi) = \mathbf{TF} [h(x)] \quad (2.90)$$

Para cualquier sistema lineal e invariante, el análisis espectral en este caso sería, al igual que el mostrado en la ecuación (2.88), es decir, el producto de los coeficientes de la señal $f(x)$ en términos de la transformada de Fourier, es decir $F(\xi)$, por los autovalores calculados anteriormente $H(\xi)$, así

$$G(\xi) = F(\xi)H(\xi). \quad (2.91)$$

Comparando el análisis en los dominios real y espectral

$$g(x) = f(x) * h(x), \quad (2.92)$$

$$G(\xi) = F(\xi)H(\xi), \quad (2.93)$$

se comprueba que resulta mucho más sencillo realizar dicho análisis en el dominio espectral, de ahí su habitual utilidad. Además, este resultado concuerda con la conocida propiedad de la transformada de Fourier de convertir convoluciones en productos²⁸.

²⁸Véase propiedades de la transformada de Fourier en [51], [52], [80].

En el caso de que las funciones base no fueran autofunciones del operador que se esté tratando, no significaría que no existiera análisis espectral, puesto que éste, como se ha comentado anteriormente, es la interpretación de dicho sistema en el dominio transformado. Se podría realizar un análisis general en el dominio espectral bajo cualquier transformada, aunque de una manera un poco más compleja, dando lugar al **Análisis Espectral Generalizado**, cuyo desarrollo detallado se verá en el Cap. 5.

Parte I

GSST-v1d

3. Resultados Previos

3.1. Ortogonalidad e independencia lineal

Se quiere demostrar que dado un conjunto de funciones ortogonales entre sí dos a dos implica que son linealmente independientes, es decir

$$e(\tau; \mu) \text{ ortogonales} \Rightarrow e(\tau; \mu) \text{ linealmente independientes.} \quad (3.1)$$

Demostración:

Sea $e(\tau; \mu)$ un conjunto de funciones ortogonales según un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir

$$\langle e(\tau; \mu'), e(\tau; \mu'') \rangle = A\tilde{\delta}(\mu' - \mu''). \quad (3.2)$$

Se quiere probar que son linealmente independientes. Para ellos se tiene que cumplir que la ecuación

$$\mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)] = 0(\tau) \quad (3.3)$$

implique que necesariamente todos los $\alpha(\mu)$ sean igual a $0(\mu)$ ¹.

Realizando el producto escalar a ambos lados de la ecuación (3.3) por un elemento de la base $e(\tau; \mu')$ se tiene

$$\langle \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], e(\tau; \mu') \rangle = \langle 0(\tau), e(\tau; \mu') \rangle \quad (3.4)$$

que, intercambiando en el término de la derecha el operador combinación lineal \mathbf{CL} por el producto escalar²,

$$\mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle] = 0(\mu'). \quad (3.5)$$

Por la ortogonalidad de las funciones base, la ecuación se reduce a

$$\mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) A\tilde{\delta}(\mu - \mu')] = 0(\mu') \quad (3.6)$$

y, por las propiedades de las funciones delta generalizadas $\tilde{\delta}$

$$A\alpha(\mu') = 0(\mu'). \quad (3.7)$$

Por lo tanto,

$$\alpha(\mu) = 0 \quad (3.8)$$

como se quería demostrar.

¹Las expresiones $0(\tau)$ y $0(\mu)$ representan las funciones idénticamente nulas, según la métrica que se esté usando, en la variable τ o μ respectivamente.

²Los operadores combinación lineal, \mathbf{CL} , y producto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se pueden intercambiar porque el producto escalar es un operador lineal continuo, como se demuestra en [110].

3.2. Relación entre los autovalores y el conjunto de respuestas al impulso de un sistema lineal

Se desea obtener la relación existente entre el conjunto de respuestas al impulso de un sistema lineal \mathbf{F}_L y el conjunto de autovalores $\lambda(\mu)$ que se generan cuando el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ son autofunciones de ese sistema, es decir,

$$e(\tau; \mu) \in \text{Eig}\{\mathbf{F}_L\} \Leftrightarrow \mathbf{F}_L[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau; \mu) \quad (3.9)$$

y, además, este conjunto de funciones base es ortogonal, es decir,

$$\langle e(\tau; \mu'), e(\tau; \mu'') \rangle = A\tilde{\delta}(\mu' - \mu''). \quad (3.10)$$

Una de las propiedades más conocidas que relacionan los dominios real y espectral a través de la transformada de Fourier (en sus modalidades continua y discreta y desarrollos en serie) es que esta transformada convierte la operación de convolución en un producto, es decir,

$$c(\tau) = a(\tau) * b(\tau) \Rightarrow C(\mu) = K A(\mu) B(\mu), \quad (3.11)$$

siendo

$$C(\mu) = \mathbf{TF}[c(\tau)], \quad (3.12)$$

$$A(\mu) = \mathbf{TF}[a(\tau)], \quad (3.13)$$

$$B(\mu) = \mathbf{TF}[b(\tau)] \quad (3.14)$$

y K una constante. Esta propiedad resulta muy útil a la hora de analizar sistemas lineales e invariantes en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier, ya que la señal de salida en el dominio real se puede expresar como la convolución de la entrada por la respuesta al impulso, es decir,

$$c(\tau) = a(\tau) * h(\tau), \quad (3.15)$$

donde $a(\tau)$ es la señal de entrada, $c(\tau)$ la de salida y $h(\tau)$ la respuesta al impulso del sistema, definida como

$$h(\tau) = \mathbf{FLI}[\tilde{\delta}(\tau)]. \quad (3.16)$$

Esta relación en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier es

$$C(\mu) = K A(\mu) H(\mu) \quad (3.17)$$

donde

$$H(\mu) = \mathbf{TF}[h(\tau)] \quad (3.18)$$

pero también, recordando la ecuación (2.71) del Apdo. 2.4.3 sobre la teoría general, la señal de salida de un sistema lineal \mathbf{F}_L en el dominio real cuando el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema, viene descrita por

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_\mu[\alpha(\mu) \lambda(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (3.19)$$

donde $\alpha(\mu)$ son los coeficientes de la señal de entrada $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$ y $\lambda(\mu)$ los autovalores del sistema, por lo que los coeficientes de la señal de salida serán

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu). \quad (3.20)$$

Comparando (3.17) con (3.20) se llega a la conclusión evidente que

$$H(\mu) = \frac{1}{K} \lambda(\mu), \quad (3.21)$$

es decir, que, salvo por un factor de escala, la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ es igual que los autovalores del mismo. Pero esta relación se da en el caso de realizar el análisis espectral bajo la transformada de Fourier en sistemas lineales e invariantes, ya que el conjunto de funciones base que describen la transformada y el desarrollo en serie de Fourier en sus versiones continua y discreta son siempre autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante. Sin embargo, la propiedad de la ecuación (3.20) se cumple para cualquier sistema lineal, ya sea invariante o no, siempre que el conjunto de funciones base sean autofunciones del mismo. Así que es de esperar que, en general, exista una relación entre el conjunto de autovalores $\lambda(\mu)$ y la transformada generalizada del conjunto de respuestas al impulso³ $H(\mu; \tau') = \mathbf{T}_e[h(\tau; \tau')]$.

En primer lugar decir que la existencia de autofunciones de un sistema lineal no tiene nada que ver con la invarianza del mismo. Como se ha visto anteriormente, si el sistema es lineal e invariante existe como conjunto de funciones base que son autofunciones del sistema las exponenciales complejas que definen la transformada de Fourier. Pero, si el sistema es lineal no invariante, este conjunto en general no lo será, pero puede existir otro. Por ejemplo, sea el sistema lineal no invariante en variable continua

$$g(x) = \mathbf{Q}[f(x)] = xf(x). \quad (3.22)$$

El conjunto de funciones $e(\tau; \mu) \equiv e(x; y) = \{\delta(x - y)\}_y$ es una base ortogonal del espacio⁴ y también son autofunciones del sistema, ya que

$$\mathbf{Q}[\delta(x - x')] = x\delta(x - x') = x'\delta(x - x') = h(x; x'), \quad (3.23)$$

donde el conjunto de autovalores son $\lambda(x') = x'$. Además,

$$H(y; x') = \mathbf{T}_\delta[h(x; x')] = h(y; x') \quad (3.24)$$

y se cumple que

$$H(y; x') = y\delta(y - x') = \lambda(y)\delta(x' - y), \quad (3.25)$$

habida cuenta de que el sistema es no invariante, ya que $h(x; x') \neq h(x - x')$ y además,

$$\mathbf{Q}[f(x - x_0)] = xf(x - x_0) \neq (x - x_0)f(x - x_0) = g(x - x_0). \quad (3.26)$$

Por otro lado, si introducimos una función base desplazada,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[e(x - x_0; x')] &= \mathbf{Q}[\delta((x - x_0) - x')] = \\ &= x\delta((x - x_0) - x') = \\ &= (x' + x_0)\delta((x - x_0) - x') \neq \\ &\neq x'\delta((x - x_0) - x') = \\ &= \lambda(x')\delta(x; x'), \end{aligned} \quad (3.27)$$

es decir que, en un caso general,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu) \neq \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[e(\tau - \tau_0; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau - \tau_0; \mu), \quad (3.28)$$

por lo que el autovalor de una autofunción no será el mismo si esta función está desplazada. Sin embargo esto sí se cumple en el caso de los sistemas lineales e invariantes. Dado un conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ que sean autofunciones de un sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, se tiene que

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu), \quad (3.29)$$

³Se denomina por \mathbf{T}_e la transformada definida según la base $e(\tau; \mu)$.

⁴Referirse al Apdo. 2.3.5 del Cap. 2 sobre el resumen de la teoría general.

y en este caso sí se cumple que

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [e(\tau - \tau_0; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau - \tau_0; \mu), \quad (3.30)$$

ya que, si⁵

$$\begin{cases} b(\tau) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [a(\tau)], \\ b(\tau - \tau_0) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [a(\tau - \tau_0)] \end{cases} \quad (3.31)$$

y

$$\begin{cases} a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)] \\ a(\tau - \tau_0) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau - \tau_0; \mu)], \end{cases} \quad (3.32)$$

por tanto

$$\begin{aligned} b(\tau) &= \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [a(\tau)] = \\ &= \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [\mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [e(\tau; \mu)]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \lambda(\mu) e(\tau; \mu)], \end{aligned} \quad (3.33)$$

y

$$\begin{aligned} b(\tau - \tau_0) &= \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [a(\tau - \tau_0)] = \\ &= \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [\mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau - \tau_0; \mu)]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [e(\tau - \tau_0; \mu)]], \end{aligned} \quad (3.34)$$

pero, de (3.33),

$$b(\tau - \tau_0) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \lambda(\mu) e(\tau - \tau_0; \mu)], \quad (3.35)$$

por lo que, comparando (3.34) con (3.35), se tiene que

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [e(\tau - \tau_0; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau - \tau_0; \mu). \quad (3.36)$$

Yendo al conjunto de respuestas al impulso de un sistema lineal, $h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]$, es sabido que se puede expresar cada una de las funciones $\tilde{\delta}(\tau - \tau')$, para cada τ' , en términos de la base con unos coeficientes como

$$\tilde{\delta}(\tau - \tau') = \mathbf{CL}_{\mu} [\Delta(\mu; \tau') e(\tau; \mu)], \quad (3.37)$$

por lo que

$$\begin{aligned} h(\tau; \tau') &= \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')] = \\ &= \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\mathbf{CL}_{\mu} [\Delta(\mu; \tau') e(\tau; \mu)]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu} [\Delta(\mu; \tau') \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [e(\tau; \mu)]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu} [\Delta(\mu; \tau') \lambda(\mu) e(\tau; \mu)], \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde se concluye que

$$H(\mu; \tau') = \mathbf{T}_e [h(\tau; \tau')] = \Delta(\mu; \tau') \lambda(\mu). \quad (3.39)$$

⁵Está claro que si el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema, el espacio de llegada tiene que ser el mismo que el de partida, de ahí que la variable de las funciones del espacio de llegada sea la misma que las del de partida.

Por otro lado, dado que el conjunto de funciones base es ortogonal, se pueden calcular los coeficientes $\Delta(\mu; \tau')$ como

$$\begin{aligned}\Delta(\mu; \tau') &= \mathbf{T}_e \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] = \\ &= \frac{1}{A} \left\langle \tilde{\delta}(\tau - \tau'), e(\tau; \mu) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{A} e^*(\tau'; \mu),\end{aligned}\tag{3.40}$$

así, se tiene finalmente que

$$\boxed{H(\mu; \tau') = \mathbf{T}_e [h(\tau; \tau')] = \frac{1}{A} e^*(\tau'; \mu) \lambda(\mu),}\tag{3.41}$$

lo que quiere decir que, para cada valor de τ' , la transformada generalizada del conjunto de respuestas al impulso $H(\mu; \tau')$ se relaciona con el conjunto de los autovalores del sistema $\lambda(\mu)$ a través del producto de éstos por el conjugado de la función base que genera cada autovalor, $e^*(\tau; \mu)$, evaluada en el punto $\tau = \tau'$ y ponderado todo ello por una constante relacionada con la ortogonalidad de las funciones base. La expresión (3.25) del ejemplo anterior del sistema lineal no invariante es un caso particular de este resultado.

En el caso del análisis de un sistema lineal e invariante el resultado es el mismo, sabiendo que se cumple la propiedad de que $h(\tau; \tau') = h(\tau - \tau')$, por lo que sólo es necesario conocer la función $h(\tau)$ para obtener todo el conjunto de respuestas al impulso. Dado que $h(\tau) = h(\tau - 0) = h(\tau; 0)$, la relación que existe entre la respuesta al impulso y el conjunto de autovalores en un sistema lineal e invariante es

$$\boxed{H(\mu) = \mathbf{T}_e [h(\tau)] = \frac{1}{A} e^*(0; \mu) \lambda(\mu).}\tag{3.42}$$

En el caso particular de la transformada y desarrollo en serie de Fourier, dado que las exponenciales complejas valen siempre 1 cuando la variable real es nula independientemente del valor del parámetro μ , se tiene que

$$H(\mu) = \mathbf{TF} [h(\mu)] = \frac{1}{A} \lambda(\mu),\tag{3.43}$$

resultado esperado que se había encontrado en (3.21).

3.3. Relación entre combinación lineal y producto escalar

El objetivo de esta demostración es probar si se puede expresar un producto escalar como una combinación lineal.

En principio se trata de dos operadores que no tienen nada que ver, ya que la combinación lineal **CL** es un concepto inherente a un espacio vectorial y el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a un espacio prehilbertiano o espacio de Hilbert, si es completo⁶. Sin embargo, vamos a tratar de encontrar una expresión que los relacione.

Dado un conjunto de funciones que juegan el papel de una base $e(\tau; \mu)$, ortogonales respecto a la variable τ , y también respecto al parámetro μ , es decir,

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle_\tau = A_\mu \tilde{\delta}(\mu - \mu'),\tag{3.44}$$

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau'; \mu) \rangle_\mu = A_\tau \tilde{\delta}(\tau - \tau')\tag{3.45}$$

⁶Ver definición de espacio prehilbertiano y espacio de Hilbert en el Ap. B.9.

donde A_μ y A_τ son dos constantes reales, positivas y finitas, puesto que el producto escalar es definido positivo y que está relacionada con la norma de dichas funciones, se quiere demostrar que la expresión

$$\langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle \quad (3.46)$$

donde $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$, se puede representar a través de la siguiente combinación lineal en τ :

$$\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \quad (3.47)$$

es decir, que se pueda intercambiar un producto escalar por una combinación lineal y viceversa en las situaciones necesarias, siendo, por tanto

$$\boxed{\langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle = \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)]}. \quad (3.48)$$

Para ello se sigue la siguiente demostración.

3.3.1. Comprobación de que es un producto escalar

Lo primero que hay que comprobar es que la expresión que queremos equiparar a un producto escalar cumple realmente las condiciones exigidas a un producto escalar, estas son:

1. Linealidad por la primera componente,

$$\langle \alpha a_1(\tau) + \beta a_2(\tau), b(\tau) \rangle = \alpha \langle a_1(\tau), b(\tau) \rangle + \beta \langle a_2(\tau), b(\tau) \rangle \quad (3.49)$$

2. Antilinealidad por la segunda componente,

$$\langle a(\tau), \gamma b_1(\tau) + \varepsilon b_2(\tau) \rangle = \gamma^* \langle a(\tau), b_1(\tau) \rangle + \varepsilon^* \langle a(\tau), b_2(\tau) \rangle \quad (3.50)$$

3. Hermiticidad,

$$\langle a(\tau), b(\tau) \rangle = \langle b(\tau), a(\tau) \rangle^* \quad (3.51)$$

4. Definición positiva.

$$\begin{cases} \langle a(\tau), a(\tau) \rangle \geq 0 \\ \langle a(\tau), a(\tau) \rangle = 0 \Leftrightarrow a(\tau) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

A continuación se demuestran las cuatro propiedades para la expresión (3.48).

1. Linealidad por la primera componente:

$$\begin{aligned} \langle \alpha a(\tau) + \beta b(\tau), e(\tau; \mu) \rangle &= \mathbf{CL}_\tau [(\alpha a(\tau) + \beta b(\tau)) e^*(\tau; \mu)] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau [\alpha a(\tau) e^*(\tau; \mu) + \beta b(\tau) e^*(\tau; \mu)] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau [\alpha a(\tau) e^*(\tau; \mu)] + \mathbf{CL}_\tau [\beta b(\tau) e^*(\tau; \mu)] = \\ &= \alpha \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)] + \beta \mathbf{CL}_\tau [b(\tau) e^*(\tau; \mu)] = \\ &= \alpha \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle + \beta \langle b(\tau), e(\tau; \mu) \rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

2. Antilinealidad por la segunda componente:

$$\begin{aligned} \langle a(\tau), \gamma e(\tau; \mu) + \varepsilon \hat{e}(\tau; \mu) \rangle &= \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) (\gamma^* e^*(\tau; \mu) + \varepsilon^* \hat{e}^*(\tau; \mu))] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau [\gamma^* a(\tau) e^*(\tau; \mu) + \varepsilon^* a(\tau) \hat{e}^*(\tau; \mu)] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau [\gamma^* a(\tau) e^*(\tau; \mu)] + \mathbf{CL}_\tau [\varepsilon^* a(\tau) \hat{e}^*(\tau; \mu)] = \\ &= \gamma^* \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)] + \varepsilon^* \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) \hat{e}^*(\tau; \mu)] \\ &= \gamma^* \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle + \varepsilon^* \langle a(\tau), \hat{e}(\tau; \mu) \rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

3. Hermiticidad:

$$\begin{aligned}
\langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle^* &= (\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)])^* = \\
&= \mathbf{CL}_\tau [a^*(\tau) e(\tau; \mu)] = \\
&= \mathbf{CL}_\tau [e(\tau; \mu) a^*(\tau)] = \\
&= \langle e(\tau; \mu), a(\tau) \rangle.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

4. Definición positiva:

$$\langle a(\tau), a(\tau) \rangle = \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) a^*(\tau)] = \mathbf{CL}_\tau [|a(\tau)|^2] \geq 0, \tag{3.56}$$

ya que todos los elementos $|a(\tau)|^2$ son no negativos.

$$\mathbf{CL}_\tau [|a(\tau)|^2] = 0 \Rightarrow |a(\tau)|^2 = 0 \Rightarrow |a(\tau)| = 0 \Rightarrow a(\tau) = 0, \tag{3.57}$$

$$\mathbf{CL}_\tau [0(\tau) 0^*(\tau)] = 0. \tag{3.58}$$

De esta manera la expresión $\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)]$ cumple las condiciones de producto escalar.

3.3.2. Comprobación de la igualdad

Que la expresión $\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)]$ cumpla las condiciones de producto escalar no nos asegura que la igualdad propuesta en (3.48) sea cierta. Para comprobar que estas dos expresiones son equivalentes, al tratarse de una igualdad entre funciones (en este caso ambas sobre el parámetro μ considerado como una nueva variable μ), hay que comprobar que la distancia, según la métrica definida, entre ambas expresiones es nula, es decir,

$$d(\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle) = 0 \tag{3.59}$$

Dado que el rango del operador distancia está definido siempre sobre los números reales no negativos, por comodidad, se estudiará la distancia al cuadrado y, dado que⁷

$$d^2(s(\mu), t(\mu)) = \|s(\mu) - t(\mu)\|^2 = \langle s(\mu) - t(\mu), s(\mu) - t(\mu) \rangle_\mu, \tag{3.60}$$

la expresión que hay que evaluar y comprobar que es igual a cero es⁸

$$\begin{aligned}
&d^2(\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau) = \\
&= \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)] - \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] - \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Desarrollando este producto escalar se obtienen los siguientes cuatro términos

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu - \\
&- \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu - \\
&- \langle \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu + \\
&+ \langle \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

A continuación se desarrollan dichos términos para llegar a expresiones más sencillas:

⁷Puesto que a partir de este punto se intercalará un gran número de productos escalares, para aclarar los desarrollos se indicará como subíndice la variable sobre la que se está haciendo el producto escalar.

⁸En el segundo término del desarrollo de la distancia al cuadrado como producto escalar de la diferencia, se ha cambiado la variable τ por ν para evitar conflictos de notación en el desarrollo. Esto no supone ningún tipo de problema en la veracidad de la demostración puesto que se trata de una variable muda que se puede expresar con cualquier denominación.

- Sea

$$I = \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu. \quad (3.63)$$

Desarrollando esta expresión por las propiedades de linealidad y antilinealidad del producto escalar se obtiene⁹

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu = \\ &= \mathbf{CL}_\tau \left[\langle a(\tau) e^*(\tau; \mu), \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu \right] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau \left[\mathbf{CL}_\nu \left[\langle a(\tau) e^*(\tau; \mu), a(\nu) e^*(\nu; \mu) \rangle_\mu \right] \right] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau \left[a(\tau) \mathbf{CL}_\nu \left[a^*(\nu) \langle e^*(\tau; \mu), e^*(\nu; \mu) \rangle_\mu \right] \right] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau \left[a(\tau) \mathbf{CL}_\nu \left[a^*(\nu) \langle e(\nu; \mu), e(\tau; \mu) \rangle_\mu \right] \right] = \\ &= \mathbf{CL}_\tau \left[a(\tau) \mathbf{CL}_\nu \left[a^*(\nu) A_\tau \tilde{\delta}(\nu - \tau) \right] \right] = \\ &= A_\tau \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) a^*(\tau)] = \\ &= A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde se ha tenido en cuenta la condición (3.45).

- Tomando la suma del segundo y tercer término de (3.62),

$$II = \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu + \langle \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \mathbf{CL}_\nu [a(\nu) e^*(\nu; \mu)] \rangle_\mu. \quad (3.65)$$

Esta expresión se puede representar como la suma de un término más su conjugado,¹⁰

$$\begin{aligned} II &= \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu + \\ &\quad + \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu^* = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{CL}_\tau \left[a(\tau) \langle e^*(\tau; \mu), \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

En este punto hay que evaluar la expresión

$$\langle e^*(\tau; \mu), \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu, \quad (3.67)$$

lo que es una concatenación de productos escalares en diferentes variables.

A partir de la expresión

$$\langle \langle h(u), k(u; t) \rangle_u, g(t) \rangle_t = \langle h(u), \langle g(t), k^*(u; t) \rangle_t \rangle_u \quad (3.68)$$

⁹Dado que la variable τ puede ser de cualquier naturaleza, el operador \mathbf{CL}_τ puede corresponderse en muchas ocasiones con series o integrales infinitas. En este caso hay que asegurar la convergencia para poder realizar los intercambios entre combinaciones lineales y entre productos escalares. Esta convergencia se considera siempre, puesto que se parte de funciones $a(\tau)$ que cumplen unos criterios de convergencia y, aunque muchas veces las funciones base escogidas $e(\tau; \mu)$ no los cumplen, sí que son convergentes las expresiones de partida $\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)]$, en términos de funciones ordinarias o en términos de distribuciones, lo que permite el intercambio de las combinaciones lineales.

¹⁰Nuevamente, la variable τ del producto escalar del segundo sumando puede sustituirse por la variable ν , puesto que el producto escalar refleja una función de variable μ , no teniendo en cuenta en el resultado final la variable sobre la que se realiza el producto escalar. De la misma manera, la variable ν en la segunda combinación lineal puede sustituirse por la variable τ , ya que es una variable muda en este caso. De esta manera se homogeneizan las variables de los dos sumandos para poder operar sobre ellos.

que intercambia el orden de los productos escalares, aplicándola a (3.67) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \langle e^*(\tau; \mu), \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu = \\
& = \langle \langle a^*(\nu), e^*(\nu; \mu) \rangle_\nu, e(\tau; \mu) \rangle_\mu = \\
& = \left\langle a^*(\nu), \langle e(\tau; \mu), e(\nu; \mu) \rangle_\mu \right\rangle_\nu = \\
& = \left\langle a^*(\nu), A_\tau \tilde{\delta}(\tau - \nu) \right\rangle_\nu = \\
& = A_\tau a^*(\tau),
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde se ha tenido en cuenta la condición (3.45).

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
II & = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{CL}_\tau \left[a(\tau) \langle e^*(\tau; \mu), \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu \right] \right\} = \\
& = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) A_\tau a^*(\tau)] \} = \\
& = 2A_\tau \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{CL}_\tau [|a(\tau)|^2] \right\} = \\
& = 2A_\tau \mathbf{CL}_\tau [|a(\tau)|^2],
\end{aligned} \tag{3.70}$$

dado que el módulo al cuadrado de una señal siempre es real.

De aquí se saca también un resultado interesante. Dado que el producto escalar $\langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau$ supone el cálculo de los coeficientes $\alpha(\mu)$ de la señal $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$,

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A_\mu} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \tag{3.71}$$

es decir, el cálculo de la transformada de $a(\tau)$ definida sobre la base $e(\tau; \mu)$, el resultado obtenido en (3.69) permite obtener una expresión para el cálculo de la transformada inversa de una señal a partir de un producto escalar:

$$\begin{aligned}
& \langle e^*(\tau; \mu), \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu = \\
& = \langle e^*(\tau; \mu), A_\mu \alpha(\mu) \rangle_\mu = \\
& = A_\mu \langle \alpha(\mu), e^*(\tau; \mu) \rangle_\mu^* = \\
& = A_\tau a^*(\tau).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

De esta manera, la transformada inversa de una función $\alpha(\mu)$ definida sobre una base ortogonal $e(\tau; \mu)$ se puede obtener como el siguiente producto escalar:

$$a(\tau) = \frac{A_\mu}{A_\tau} \langle \alpha(\mu), e^*(\tau; \mu) \rangle_\mu. \tag{3.73}$$

- Por último, sea *III* el cuarto término de (3.62),

$$III = \langle \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \langle a(\nu), e(\nu; \mu) \rangle_\nu \rangle_\mu. \tag{3.74}$$

Dado que, según se demuestra en [1],

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A_\mu} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau, \tag{3.75}$$

se tiene que

$$III = \langle A_\mu \alpha(\mu), A_\mu \alpha(\mu) \rangle_\mu = A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2. \tag{3.76}$$

La expresión final de (3.62) queda, por tanto,

$$I-II+III = A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right] - 2A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right] + A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2 = A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2 - A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right]. \quad (3.77)$$

Sólo falta comprobar que

$$A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2 = A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right]. \quad (3.78)$$

Del resultado obtenido en (3.73) en el que una función se puede representar mediante el producto escalar de sus coeficientes en una base por esa base conjugada,

$$a(\tau) = \frac{A_\mu}{A_\tau} \langle \alpha(\mu), e^*(\tau; \mu) \rangle_\mu, \quad (3.79)$$

se obtiene que¹¹

$$\begin{aligned} A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right] &= A_\tau \mathbf{CL}_\tau [a(\tau) a^*(\tau)] = \\ &= A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[\frac{A_\mu}{A_\tau} \langle \alpha(\mu), e^*(\tau; \mu) \rangle_\mu \frac{A_\mu}{A_\tau} \langle \alpha(\eta), e^*(\tau; \eta) \rangle_\eta^* \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Hay que detenerse ahora en la expresión (3.80). Independientemente de las constantes, en el interior del operador combinación lineal aparece el producto de dos productos escalares sobre variables diferentes. Esto hace que cada producto escalar vea al otro como una constante, por lo que puede introducirse uno dentro del otro siguiendo las propiedades de linealidad por la primera componente y antilinealidad por la segunda, propias de los productos escalares. De esta manera, el producto escalar sobre η puede introducirse, conjugándolo, como una constante en la segunda componente del producto escalar sobre μ quedando de la siguiente manera:

$$\frac{A_\mu^2}{A_\tau} \mathbf{CL}_\tau \left[\left\langle \alpha(\mu), \langle \alpha(\eta), e^*(\tau; \eta) \rangle_\eta e^*(\tau; \mu) \right\rangle_\mu \right]. \quad (3.81)$$

De la misma manera, el conjunto de funciones $e^*(\tau; \mu)$ es constante con respecto a la variable η , por lo que puede introducirse de forma conjugada como una constante en la segunda componente del producto escalar sobre η , obteniendo

$$\frac{A_\mu^2}{A_\tau} \mathbf{CL}_\tau \left[\left\langle \alpha(\mu), \langle \alpha(\eta), e^*(\tau; \eta) e(\tau; \mu) \rangle_\eta \right\rangle_\mu \right]. \quad (3.82)$$

Por otro lado, la combinación lineal sólo afecta a las funciones de variable τ , por lo que puede intercambiarse el operador \mathbf{CL}_τ con los productos escalares,

$$\frac{A_\mu^2}{A_\tau} \left\langle \alpha(\mu), \langle \alpha(\eta), \mathbf{CL}_\tau [e^*(\tau; \eta) e(\tau; \mu)] \rangle_\eta \right\rangle_\mu. \quad (3.83)$$

Ahora bien, la expresión de la combinación lineal no es más que la transformada inversa de $e^*(\tau; \eta)$ sobre la variable τ en la base $e(\tau; \mu)$, es decir,

$$\mathbf{CL}_\tau [e^*(\tau; \eta) e(\tau; \mu)] = \mathbf{T}_\tau^{-1} [e^*(\tau; \eta)]. \quad (3.84)$$

La transformada inversa de un elemento de la base conjugado es proporcional a la función delta generalizada $\tilde{\delta}$, puesto que la operación inversa, es decir, la transformada de una función delta

¹¹Nuevamente, para evitar conflictos de variables, cada uno de los productos escalares se nombra con una variable diferente, sin que esto suponga ninguna pérdida de generalización.

generalizada es la función base conjugada cuyo parámetro es el desplazamiento de la delta, es decir

$$\mathbf{T}_\mu \left[\tilde{\delta}(\mu - \eta) \right] = \frac{1}{A_\tau} e^*(\tau; \eta), \quad (3.85)$$

por tanto,

$$\mathbf{CL}_\tau [e^*(\tau; \eta) e(\tau; \mu)] = A_\tau \tilde{\delta}(\mu - \eta). \quad (3.86)$$

Introduciendo (3.86) en (3.83) se reduce a

$$\frac{A_\mu^2}{A_\tau} \left\langle \alpha(\mu), \left\langle \alpha(\eta), A_\tau \tilde{\delta}(\mu - \eta) \right\rangle_\eta \right\rangle_\mu. \quad (3.87)$$

Aplicando las propiedades de la función $\tilde{\delta}$ se llega a

$$A_\mu^2 \langle \alpha(\mu), \alpha(\mu) \rangle_\mu = A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2, \quad (3.88)$$

probando, por tanto, lo que se quería demostrar:

$$A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right] = A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2. \quad (3.89)$$

Finalmente, recordando de (3.77), se tiene

$$I + II + III = A_\mu^2 \|\alpha(\mu)\|^2 - A_\tau \mathbf{CL}_\tau \left[|a(\tau)|^2 \right] = 0, \quad (3.90)$$

es decir, se ha comprobado que la distancia entre el producto escalar y la combinación lineal propuesta para sustituirlo es igual a 0:

$$d(\mathbf{CL}_\tau [a(\tau) e^*(\tau; \mu)], \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_\tau) = 0, \quad (3.91)$$

por lo que las dos expresiones son métricamente iguales, como se quería demostrar.

Hay que tener en cuenta que el hecho de que la distancia entre ambas funciones sea igual a cero no significa que sean iguales punto a punto, dependerá de la definición de la métrica que se esté utilizando, de ahí que se diga que ambas expresiones son métricamente iguales pero no tienen por qué ser exactamente iguales punto a punto.

4. Cambios de Base

4.1. Introducción

Al igual que en un mismo espacio euclideo se puede identificar cada elemento en términos de diferentes bases, en espacios de funciones debería ocurrir lo mismo, de hecho es uno de los puntos principales del concepto de transformada. Tal como se ha visto en el Apdo. 2.3.3 del Cap. 2 sobre el resumen de la Teoría General de la GSST, escogido un conjunto de funciones base del espacio $e(\tau; \mu) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, cada elemento $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se puede expresar en términos de esa base a partir de unos coeficientes $\alpha(\mu)$ como la siguiente combinación lineal generalizada:

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]. \quad (4.1)$$

De la misma manera, escogido otro conjunto de funciones base del espacio, $\tilde{e}(\tau; \mu') \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}^1$, se podrá representar la misma función $a(\tau)$ en términos de esta nueva base junto con otros coeficientes diferentes $\tilde{\alpha}(\mu')$ de la siguiente manera:

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{e}(\tau; \mu')]. \quad (4.2)$$

La idea del **cambio de base** es la siguiente: conocidos los coeficientes $\alpha(\mu)$ que representan una señal $a(\tau)$ en una base $e(\tau; \mu)$, dada una nueva base $\tilde{e}(\tau; \mu')$, poder encontrar los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ que representan la misma señal $a(\tau)$ en esta nueva base sin tener que pasar por la expresión de la señal original $a(\tau)$, es decir, la relación existente entre los coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$. Esquemáticamente es lo que se muestra en la Fig. 4.1.

4.2. Desarrollo general

En primer lugar hay que tener claro que los coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ son, respectivamente, la transformada de la función $a(\tau)$ en cada una de las bases $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, es decir²,

$$\alpha(\mu) = \mathbf{T}_e [a(\tau)], \quad (4.3)$$

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{T}_{\tilde{e}} [a(\tau)]. \quad (4.4)$$

Estos coeficientes han de ser calculados a través de la minimización de la distancia entre la función original $a(\tau)$ y la combinación lineal generalizada; pero, a partir de los resultados obtenidos en [1], dichos coeficientes se pueden obtener a partir del producto escalar entre la función original y cada uno de los elementos de la base:

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{A} \langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (4.6)$$

¹Aunque los parámetros identificadores de las funciones base μ y μ' puedan ser de la misma naturaleza, es preferible representarlos de manera diferente para evitar posibles confusiones de notación a la hora de operar con ambas funciones a la vez. Sin embargo, la variable real de las funciones base, τ , ha de ser la misma en ambos casos puesto que nos estamos refiriendo siempre al mismo espacio.

²Puesto que hay que trabajar con transformadas definidas a partir de conjuntos de funciones base diferentes, para evitar confusiones a la hora de realizar una transformada, se indicará siempre con el símbolo \mathbf{T} junto con el subíndice que indique la base sobre la cual se realiza la transformada. Así, por ejemplo, el símbolo \mathbf{T}_e indica que se está realizando la transformada definida a partir del conjunto de funciones base e . El parámetro que describe este conjunto de funciones base vendrá expresado implícitamente en la variable de la señal transformada.

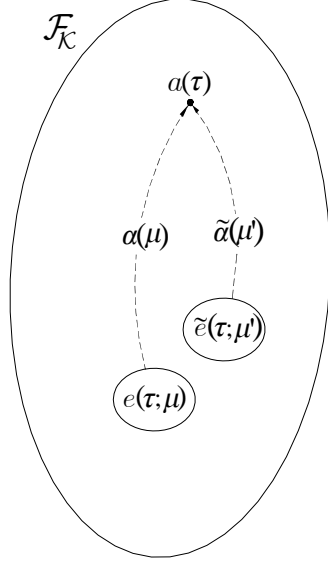


Figura 4.1: Para una señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$, dadas dos bases $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, los coeficientes que representan $a(\tau)$ como una combinación lineal de cada una de estas bases son $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ respectivamente.

donde³

$$\langle e(\tau; \mu_i), e(\tau; \mu_j) \rangle_\tau = A\tilde{\delta}(\mu_i - \mu_j), \quad i, j \in \mathbb{I}, \quad (4.7)$$

$$\langle \tilde{e}(\tau; \mu'_i), \tilde{e}(\tau; \mu'_j) \rangle_\tau = \tilde{A}\tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j), \quad i, j \in \mathbb{J}, \quad (4.8)$$

con \mathbb{I} y \mathbb{J} enumeradores, ya sean numerables o no numerables. En algunas ocasiones también es necesaria la ortogonalidad de las funciones base según el parámetro que las describen, es decir, para cada dos valores fijos de la variable real τ , el producto escalar entre todas las funciones base para cada esos dos valores fijados. En realidad, lo que se hace es ver las funciones base sobre el parámetro, fijando la variable⁴. De esta manera hay que considerar también que, en general,

$$\langle e(\tau_i; \mu), e(\tau_j; \mu) \rangle_\mu = A\tilde{\delta}(\tau_i - \tau_j), \quad i, j \in \mathbb{K}, \quad (4.9)$$

$$\langle \tilde{e}(\tau_i; \mu'), \tilde{e}(\tau_j; \mu') \rangle_{\mu'} = \tilde{A}\tilde{\delta}(\tau_i - \tau_j), \quad i, j \in \mathbb{K}, \quad (4.10)$$

siendo \mathbb{K} un enumerador.

³Realmente, a efectos de concepto, el valor de las constantes A y \tilde{A} son intrascendentes. Su valor dependerá de las funciones base escogidas y estará relacionado con la energía de dichas funciones cuando la norma inducida por el producto escalar represente el cálculo de la energía de una señal. De hecho, la representación en (4.5) y (4.6) trata de indicar una normalización de dichos coeficientes. Lo que siempre será cierto es que los valores de A y \tilde{A} serán reales, positivos y finitos, debido a las propiedades de definición de un producto escalar. Diferentes autores [51], [52], [61], [80] colocan el valor de estas constantes en el cálculo de los coeficientes (transformada directa), en la combinación lineal (transformada inversa) o incluso la dividen entre ambos en la forma \sqrt{A} para cada expresión para que exista una simetría. La colocación de la constante únicamente supone un factor de escala tanto para la señal original como para los coeficientes.

Para mantener una uniformidad en el desarrollo general se seguirá con las expresiones (4.5) y (4.6) y ya en los casos particulares se colocarán las constantes en el lugar requerido según la definición de cada transformada.

⁴Hay que tener en cuenta y cuidado en que, en general, la naturaleza de τ y de μ o de μ' no tienen por qué ser la misma, por lo que el producto escalar podrá tener una definición diferente en (4.7) y (4.8) que en (4.9) y (4.10).

La obtención de las ecuaciones para los cambios de base es relativamente sencilla, conociendo las expresiones generales de la representación en una base (4.1) y (4.2) y las expresiones de los coeficientes (4.5) y (4.6), simplemente se trata de introducir (4.1) en (4.6) obteniendo

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{\tilde{A}} \langle \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (4.11)$$

donde, intercambiando el producto escalar por la combinación lineal, se llega a la expresión⁵

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{\tilde{A}} \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle]. \quad (4.12)$$

De esta manera se obtienen los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ en la nueva base $\tilde{e}(\tau; \mu')$ a partir de los coeficientes conocidos $\alpha(\mu)$.

Análogamente, la expresión de los coeficientes $\alpha(\mu)$ en la base $e(\tau; \mu)$ a partir de $\tilde{\alpha}(\mu')$ conocidos, se obtiene de la misma manera introduciendo la ecuación (4.2) en (4.5), llegando a

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle]. \quad (4.13)$$

Lo que realmente se está haciendo es proyectar cada uno de los elementos de la antigua base sobre cada uno de los elementos de la nueva. De esta manera, por cada proyección, se obtiene un valor que depende de ambos parámetros que identifican cada una de las funciones base, μ y μ' , el cual podríamos llamar de la siguiente manera:

$$\langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle = \tilde{A} \tilde{\varepsilon}(\mu'; \mu), \quad (4.14)$$

$$\langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle = A \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'). \quad (4.15)$$

Es fácil comprobar que

$$A \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \tilde{A} \varepsilon^*(\mu'; \mu), \quad (4.16)$$

dado que ambos provienen de intercambiar los elementos de un producto escalar⁶.

Estos valores no serían más que los coeficientes de cada uno de los elementos de una base al expresarlos en términos de la otra base. Es decir, refiriéndose de nuevo a la expresión (4.6), para cada valor μ_0 de la base $e(\tau; \mu)$, es decir la función $e(\tau; \mu_0)$, el conjunto de valores $\varepsilon(\mu'; \mu_0)$ es el conjunto de coeficientes que representan la función $e(\tau; \mu_0)$ como una combinación lineal de los elementos de la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$, es decir,

$$e(\tau; \mu_0) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\varepsilon(\mu'; \mu_0) \tilde{e}(\tau; \mu')]. \quad (4.17)$$

Así, para todo valor de μ , es decir, para todos los elementos de la base antigua, se tiene que

$$e(\tau; \mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\varepsilon(\mu'; \mu) \tilde{e}(\tau; \mu')]. \quad (4.18)$$

⁵Los operadores combinación lineal, \mathbf{CL} , y producto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se pueden intercambiar porque el producto escalar es un operador lineal continuo, como se demuestra en [110].

⁶En general, ambos productos escalares serán el mismo, ya que se está trabajando con un cambio de base en un mismo espacio de funciones, aunque puede darse el caso, como se verá más adelante en algún ejemplo, que se trabaje con un subespacio de funciones donde se defina una métrica propia y el producto escalar que la induce, diferentes a las heredadas por el propio espacio de funciones. En este caso también se podrá hacer el cambio de base pero habrá que tener cuidado al observar la igualdad propuesta en (4.16).

Por otro lado, según la definición de la transformada, las constantes A y \tilde{A} pueden aparecer como normalización en el cálculo de los coeficientes (transformada directa) o aparecer en el desarrollo de la combinación lineal (transformada inversa). Por este motivo, también hay que tener cuidado en la colocación de estas constantes a la hora de comprobar la igualdad (4.16).

Igualmente, a la inversa, a partir de la expresión (4.5), se obtiene

$$\tilde{e}(\tau; \mu') = \mathbf{CL}_\mu [\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') e(\tau; \mu)], \quad (4.19)$$

por lo que la representación del cambio de base se podría expresar, a través de estos valores, como

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \tilde{A}_{\mu'} \varepsilon(\mu'; \mu)] = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)], \quad (4.20)$$

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') A_{\mu} \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')]. \quad (4.21)$$

Realizando la interpretación en términos de transformadas⁷,

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \mathbf{T}_{\tilde{\varepsilon}} [e(\tau; \mu)], \quad (4.22)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \mathbf{T}_e [\tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (4.23)$$

por lo que, haciendo la representación del cambio de base a partir de transformadas, se puede expresar como

$$\mathbf{T}_{\tilde{\varepsilon}} [a(\tau)] = \tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] = \mathbf{CL}_\mu [\mathbf{T}_e [a(\tau)] \mathbf{T}_{\tilde{\varepsilon}} [e(\tau; \mu)]], \quad (4.24)$$

es decir, para conocer la transformada de una señal en una base, conocida la transformada de esa misma señal en la otra base, hay que encontrar la transformada de la base antigua sobre la nueva base. De esta manera, también se puede entender que $\tilde{\alpha}(\mu')$ es la transformada de $\alpha(\mu)$ en la base $\tilde{\varepsilon}(\mu'; \mu)$, y viceversa, $\alpha(\mu)$ es la transformada de $\tilde{\alpha}(\mu')$ en la base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ ⁸, es decir,

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{T}_{\tilde{\varepsilon}} [\alpha(\mu)], \quad (4.25)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{T}_\varepsilon [\tilde{\alpha}(\mu')]. \quad (4.26)$$

Todo esto se muestra esquematizado en la Fig. 4.2.

4.3. Relación entre los dominios real y espectral

No deja de ser sorprendente que exista una dualidad entre la nueva expresión obtenida para el cambio de base y la representación general de una señal en términos de una base, como se mostraba en la ecuación (4.1) o en la (4.2). Por simple inspección se pueden observar las similitudes:

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (4.27)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')]. \quad (4.28)$$

El cálculo de los coeficientes de una señal en el análisis de un cambio de base es equivalente a la representación de una señal en términos de una base.

Como se veía en la Secc. 2.3.3 del capítulo sobre la teoría general, la representación de una señal en términos de una base requiere de unos coeficientes que la definen unívocamente en esa base, por lo que, una vez determinada la base, es indiferente trabajar con la propia señal o con el conjunto de coeficientes, de aquí que se hable de una señal en el dominio real o en el

⁷ Como aclaración a la notación, las transformadas se indican utilizando como subíndice el nombre de la base sobre la que se realizan.

⁸ Que tanto $\varepsilon(\mu'; \mu)$ como $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ son una base en el dominio espectral se demuestra en la Secc. 4.3.

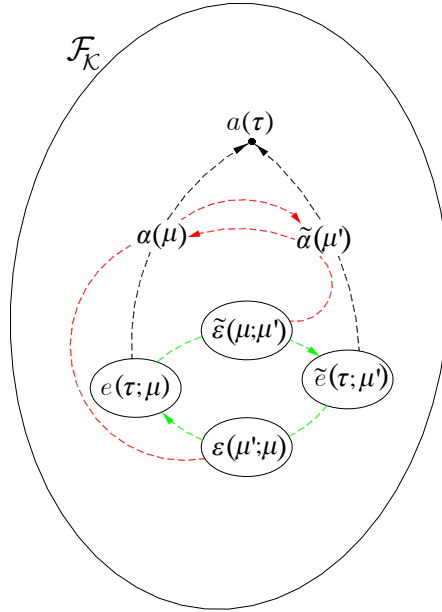


Figura 4.2: Para una señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$, los coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\alpha(\mu')$ son la transformada de $a(\tau)$ en las bases $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ respectivamente (líneas discontinuas negras). Por otro lado, los conjuntos de coeficientes $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ y $\varepsilon(\mu'; \mu)$ son la transformada de los conjuntos de funciones $\tilde{e}(\tau; \mu')$ y $e(\tau; \mu)$ en las bases $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ respectivamente (líneas verdes discontinuas). Finalmente, el conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$ es la transformada de $\tilde{\alpha}(\mu')$ en la base $\varepsilon(\mu'; \mu)$, mientras que $\tilde{\alpha}(\mu')$ es la transformada de $\alpha(\mu)$ en la base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ (líneas discontinuas rojas).

dominio espectral, siendo ambas la misma señal. En el análisis del cambio de base, lo que se hace es representar la señal en el dominio espectral como una combinación lineal generalizada de un conjunto de funciones por unos coeficientes. Se estaría dando una nueva vuelta de tuerca a la teoría general, haciendo lo que podríamos llamar un análisis espectral de segundo orden, es decir, un análisis espectral del análisis espectral de una señal. Por eso aparece un nuevo parámetro, μ' , identificador de lo que serían las funciones base en el dominio espectral y los coeficientes (lo que vendría representado con las líneas rojas discontinuas en la Fig. 4.2). Es más, debido a esta simetría, si interpretamos la ecuación (4.28) de la misma manera que (4.27), es decir, que los coeficientes que identifican la señal en una base representan unívocamente esa señal, se estaría diciendo que, tanto $a(\tau)$ como $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ estarían representando las tres exactamente la misma señal; lo cual no es de extrañar, puesto que $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ son representaciones espectrales de $a(\tau)$ en bases diferentes. Sin embargo, la relación entre $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ puede verse, curiosamente, como el análisis espectral de una sobre otra y viceversa. Estos conceptos tratan de explicarse en la Fig. 4.3.

Sería interesante comprobar que el conjunto de funciones $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ forman una base en el dominio espectral. Considerando el parámetro μ como nuestra variable en el dominio espectral, nos estaríamos refiriendo a un conjunto de funciones de variable μ enumeradas por el parámetro μ' .

Para probar que este conjunto de funciones puede realizar el papel de una base, habría que comprobar las tres condiciones que ha de cumplir una base:

- Todos los elementos tienen que pertenecer al espacio,
- El conjunto de los elementos tiene que generar todo el espacio,

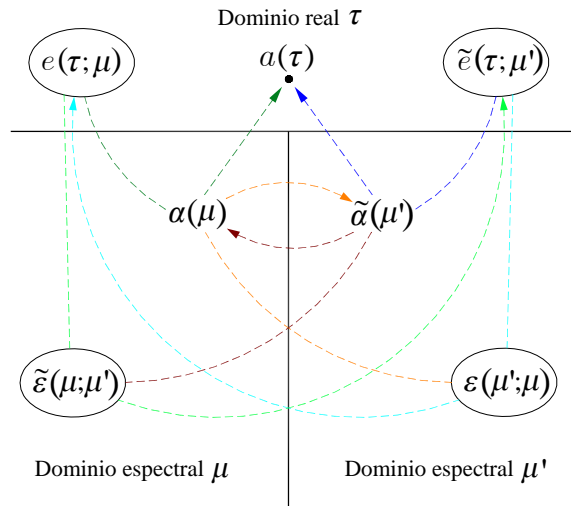


Figura 4.3: En este esquema se representan los conceptos fundamentales del cambio de base. En el dominio real τ se encuentran las funciones base $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ y la señal original $a(\tau)$. Los coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ son los que reconstruyen las señales $a(\tau)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ en la base $e(\tau; \mu)$ (líneas verde oscuro y claro, respectivamente), y que se corresponden con las señales en el dominio espectral μ . Por su parte, los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ y $\alpha(\mu)$ son los que reconstruyen las señales $a(\tau)$ y $e(\tau; \mu)$ en la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$ (líneas azul oscuro y claro respectivamente), y que se corresponden con las señales en el dominio espectral μ' . Por otro lado, los coeficientes $\alpha(\mu)$ pueden expresarse a partir de la base $\tilde{e}(\mu; \mu')$ por los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ (línea marrón oscuro), siendo éstos la señal espectral de $\alpha(\mu)$ en el dominio de μ' ; mientras que al revés, los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ pueden expresarse a partir de la base $e(\mu'; \mu)$ por los coeficientes $\alpha(\mu)$ (línea marrón claro), siendo éstos la señal espectral de $\tilde{\alpha}(\mu')$ en el dominio de μ .

- Todos los elementos tienen que ser linealmente independientes.

El primer punto, la pertenencia al espacio, puede, en cierta manera, obviarse. El espacio $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$, donde vivirían los coeficientes $\alpha(\mu)$ ahora considerados como funciones, vendrá determinado por la naturaleza de la variable μ y las funciones $\alpha(\mu) \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$, por lo que el conjunto de funciones $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$, que es un conjunto de funciones de variable μ enumerados por el parámetro μ' , deberían pertenecer todos al espacio $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$; sin embargo, al igual que se ha visto en el Cap. 2, podría ser que, para ciertos casos, este conjunto de funciones no perteneciera al espacio, bien por hacer algún tipo de restricciones al espacio original, bien por representar las funciones en términos de distribuciones o bien por cualquier otro motivo. En este caso, se estaría hablando de pseudobases, pero no tendría importancia para el concepto principal que sería el de expresar una señal como una combinación lineal generalizada de un conjunto de funciones por unos coeficientes. En muchos casos, sobre todo cuando se trata la variable continua en espacios de dimensión infinita, el conjunto de funciones base no siempre pertenece al espacio considerado, por lo que puede tratarse indistintamente el concepto de base o pseudobase.

Para comprobar el segundo punto, es decir que este conjunto de funciones genera todo el espacio, simplemente hay que referirse a la ecuación (4.28), de donde se desprende que cualquier elemento del espacio $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$ puede expresarse en términos del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$. Para cualquier $\alpha(\mu) = \mathbf{T}_e[a(\tau)]$, existirán los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$, puesto que son la transformada, en la base $\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu')$, de $a(\tau)$, ya sea términos de funciones ordinarias o de funciones generalizadas, por lo que se puede concluir que el conjunto $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ genera todo el espacio $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$.

Para el tercer punto, la independencia lineal, puede tenerse en cuenta el resultado de la Secc. 3.1, en la que la demostración de la ortogonalidad de un conjunto de funciones implica su independencia lineal. Así que, por tanto, únicamente es necesario comprobar la ortogonalidad del conjunto de funciones $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ para que éste sea una base del espacio del dominio espectral $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$.

La demostración de la ortogonalidad de las funciones base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ se hace en base al producto escalar que venga definido por la naturaleza de la ahora variable μ . Se quiere probar que

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'_i), \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'_j) \rangle = \tilde{\Delta} \tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j), \quad i, j \in \mathbb{J}, \quad (4.29)$$

donde $\tilde{\Delta}$ sea una constante real, finita y positiva y \mathbb{J} un enumerador.

Teniendo en cuenta las expresiones (4.7), (4.8), (4.14) y (4.15), además de la relación entre el producto escalar y la combinación lineal vista en la Secc. 3.3, se demuestra lo siguiente⁹:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'_i), \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'_j) \rangle_{\mu} &= \left\langle \frac{1}{A} \langle \tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \frac{1}{A} \langle \tilde{\varepsilon}(\tau'; \mu'_j), e(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \right\rangle_{\mu} = \\ &= \frac{1}{A^2} \langle \mathbf{CL}_{\tau} [\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i) e^*(\tau; \mu)], \mathbf{CL}_{\tau'} [\tilde{\varepsilon}(\tau'; \mu'_j) e^*(\tau'; \mu)] \rangle_{\mu} = \\ &= \frac{1}{A^2} \mathbf{CL}_{\tau} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} [\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i) \tilde{\varepsilon}^*(\tau'; \mu'_j) \langle e^*(\tau; \mu), e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\mu}] \right] = \\ &= \frac{1}{A^2} \mathbf{CL}_{\tau} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} [\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i) \tilde{\varepsilon}^*(\tau'; \mu'_j) \langle e(\tau'; \mu), e(\tau; \mu) \rangle_{\mu}^*] \right] = \\ &= \frac{1}{A^2} \mathbf{CL}_{\tau} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} [\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i) \tilde{\varepsilon}^*(\tau'; \mu'_j) A \tilde{\delta}^*(\tau - \tau')] \right] = \end{aligned}$$

⁹Dado que en la demostración aparecen varios productos escalares concatenados, para aclarar la notación se indica como subíndice la variable sobre la cual se está realizando el producto escalar.

En la segunda componente, el producto escalar se realiza sobre la variable τ' en vez de τ únicamente para evitar conflictos posteriores con la notación. Ni el resultado ni el concepto se ven alterados, ya que es indistinto considerar la variable de las funciones como τ o τ' y actuar sobre ellas, sabiendo que son de la misma naturaleza y representan la misma magnitud física.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\tau} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} \left[\tilde{e}(\tau; \mu'_i) \tilde{e}^*(\tau'; \mu'_j) \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right] = \\
&= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\tau} \left[\tilde{e}(\tau; \mu'_i) \tilde{e}^*(\tau; \mu'_j) \right] = \\
&= \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'_i), \tilde{e}(\tau; \mu'_j) \rangle_{\tau} = \\
&= \frac{1}{A} \tilde{A} \tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j) = \\
&= \frac{\tilde{A}}{A} \tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j), \tag{4.30}
\end{aligned}$$

con $i, j \in \mathbb{J}$.

Se prueba, por tanto, que el conjunto de funciones $\tilde{e}(\mu; \mu')$ son ortogonales, donde $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{A}}{A}$, lo que implica que sean linealmente independientes y, consecuentemente, formen una base del espacio en el dominio espectral $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$.

De la misma manera y por el mismo razonamiento, se demuestra que el conjunto $\varepsilon(\mu'; \mu)$ de funciones de variable μ' enumeradas por el parámetro μ son también una base del espacio en el dominio espectral $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}$, donde

$$\langle \varepsilon(\mu'; \mu_i), \varepsilon(\mu'; \mu_j) \rangle_{\mu'} = \frac{A}{\tilde{A}} \tilde{\delta}(\mu_i - \mu_j), \quad i, j \in \mathbb{I}. \tag{4.31}$$

Existe un caso particular que ejemplifica bien la relación entre el par de ecuaciones (4.27)-(4.28). Es el caso de la representación general de una señal en términos de deltas. En este caso, se considera una base ideal formada por un conjunto de deltas desplazadas $\left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$. Los coeficientes que representan una señal en términos de deltas son la propia señal en cada punto,

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right], \tag{4.32}$$

donde se han realizado las siguientes interpretaciones:

$$\mu' \equiv \tau', \tag{4.33}$$

$$\tilde{\alpha}(\mu') \equiv a(\tau'), \tag{4.34}$$

$$\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{\delta}(\tau - \tau'), \tag{4.35}$$

dado que, en este caso, la identificación de las funciones base corresponde con un desplazamiento.

Los valores $a(\tau')$ corresponden con la señal en el dominio espectral, aunque, en este caso, al tratarse de la base ideal $\{\tilde{\delta}(\tau - \tau')\}_{\tau'}$, la señales en el dominio real y espectral son la misma.

Conceptualmente, representar ahora la señal $a(\tau)$ en términos de una base $e(\tau; \mu)$ sería realizar el cambio de base

$$\tilde{\delta}(\tau - \tau') \rightarrow e(\tau; \mu). \tag{4.36}$$

Realizando el desarrollo del cambio de base,¹⁰

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{e}(\mu; \mu') \right] = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\tilde{\alpha}(\mu') \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle \right] = \tag{4.37}$$

$$= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \langle \tilde{\delta}(\tau - \tau'), e(\tau; \mu) \rangle \right] = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') e^*(\tau'; \mu') \right] = \tag{4.38}$$

$$= \frac{1}{A} \langle a(\tau'), e(\tau'; \mu) \rangle. \tag{4.39}$$

¹⁰En la tercera igualdad se tiene en cuenta la interpretación de las variables en (4.33)-(4.35).

El resultado que se obtiene es el que cabría esperar, pues la relación entre los coeficientes que representan la señal $a(\tau)$ en las bases $\{\delta(\tau - \tau')\}_{\tau'}$ y $e(\tau; \mu)$, $a(\tau')$ y $\alpha(\mu)$ respectivamente, es la expresión general del cálculo de coeficientes de una señal en una base como la proyección de la función sobre cada uno de los elementos de la base.

4.4. Relación con el Análisis Espectral Generalizado

No debería resultar extraño observar que la nueva expresión

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \quad (4.40)$$

se asemeje en gran medida, no sólo en la forma sino también en el uso de los parámetros y su interpretación, a la expresión (5.38)¹¹ del Cap. 5 sobre el Análisis Espectral Generalizado que aparece en el Apdo. 5.3.1, cuando el espacio de llegada es el mismo que el de partida, donde se tenía que¹²

$$\beta(\mu) = \tilde{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')]. \quad (4.42)$$

En este caso no se está analizando ningún sistema, por lo que no aparecen ningún tipo de respuestas al impulso ni transformaciones de éstas; sin embargo, la simetría entre ambas expresiones radica en la interpretación que se está haciendo. Como se había dicho anteriormente, el concepto de cambio de base consiste en encontrar la relación entre los coeficientes de una señal en una y otra base, mientras que el análisis espectral generalizado estudia la relación de los coeficientes de una señal al paso de un sistema lineal. En definitiva, lo que se está haciendo es un análisis en el dominio espectral. Para ello se hace uso de un conjunto de funciones: en el caso del cambio de base sería $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$, y en el del análisis espectral generalizado sería $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$.

Conviene recordar la funcionalidad de cada uno de los parámetros. La variable μ es el identificador de cada una de las funciones base $e(\tau; \mu)$, mientras que μ' es el parámetro identificador de otro conjunto de funciones base, tanto $\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu')$ para el análisis del cambio de base, como $e(\tau'; \mu')$ para el análisis espectral generalizado¹³. En cualquier caso, cuando se realiza un análisis en el dominio espectral, lo que era el parámetro μ pasaría a ser la variable de nuestras funciones (siempre sin perder de vista el significado original que tenía), mientras que μ' seguiría siendo un enumerador. Sin embargo, estos papeles pueden intercambiarse, como se veía en el par de ecuaciones (4.20)-(4.21), dependiendo de cuál sea la base por la cuál se estén representando las señales. De todas formas, al tener originariamente ambos parámetros la misma interpretación (enumeradores de funciones dentro de un conjunto), puede considerarse irrelevante que uno tenga la función de variable en el dominio espectral y el otro de identificador o al revés.

Sin embargo, no sería del todo descabellado interpretar el cambio de base como un operador y poder así estudiarlo desde el punto de vista del análisis espectral generalizado. Evidentemente el operador será la identidad, puesto que no se realiza ninguna transformación a la función original $a(\tau)$ en el dominio real. Lo que se realiza es un cambio de la visión de esa señal en el dominio espectral, pasando de realizar dicho análisis en el espacio de partida con respecto del conjunto de funciones base $\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu')$, mientras que en el de llegada se realiza con respecto

¹¹Particularizando esta expresión que se encuentra en (5.38) para el caso que nos ocupa, el parámetro η se corresponde con μ .

¹²El valor de la constante \tilde{A} se determina a partir del conjunto de funciones base del que se parte, en este caso $\{\tilde{\varepsilon}(\tau; \mu')\}_{\mu'}$, como

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_i), \tilde{\varepsilon}(\tau; \mu'_j) \rangle = \tilde{A} \tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j), \quad i, j \in \mathbb{J}. \quad (4.41)$$

¹³Referirse a la Secc. 5.2 para analizar el desarrollo del Análisis Espectral Generalizado y el papel del parámetro μ' .

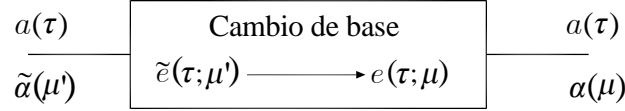


Figura 4.4: Operador cambio de base, de $\tilde{e}(\tau; \mu')$ a $e(\tau; \mu)$.

del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$. Como es lógico, en este operador el espacio de partida y el de llegada van a ser el mismo, $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, ya que lo que realmente se está analizando es el más simple de los operadores, el operador identidad, por eso, el conjunto de funciones base tanto en el espacio de partida como en el de llegada son ambas de variable τ . Además, los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ y $\alpha(\mu')$ de las ecuaciones (4.40) y (4.42) respectivamente, representan ambos la señal de entrada en el dominio espectral según la base del espacio de partida.

Un esquema de lo que se trata de hacer se encuentra reflejado en la Fig. 4.4.

El objetivo es comprobar que realizar el análisis espectral generalizado de este sistema se corresponde con las ecuaciones de cambio de base obtenidas en (4.20) ó (4.21), según la dirección del cambio de base. Para ello, hay que encontrar cuál es el conjunto de funciones $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$ para este sistema, recordando de (5.39)¹⁴,

$$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{\tilde{A}A} \langle \langle h(\tau; \tau'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \tilde{e}^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (4.43)$$

con $\tilde{e}(\tau; \mu')$ la base de la que se parte y $e(\tau; \mu)$ la base a la que se quiere llegar. Es decir, se trata de la proyección del conjunto de respuestas al impulso del sistema sobre la base en el espacio de llegada y proyectado nuevamente sobre el conjunto de funciones base del espacio de partida conjugadas y representadas sobre la variable τ' . Dado que, para este sistema,

$$h(\tau; \tau') = \mathbf{F} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')] = \mathbf{I} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')] = \tilde{\delta}(\tau - \tau'), \quad (4.44)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(\mu; \mu') &= \frac{1}{\tilde{A}A} \langle \langle \tilde{\delta}(\tau - \tau'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \tilde{e}^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}A} \langle e^*(\tau'; \mu), \tilde{e}^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}A} \langle e(\tau'; \mu), \tilde{e}(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}^* = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}A} \langle \tilde{e}(\tau'; \mu'), e(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}A} A \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}} \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Finalmente,

$$\alpha(\mu) = \tilde{A} \mathbf{C} \mathbf{L}_{\mu'} \left[\tilde{\alpha}(\mu') \frac{1}{\tilde{A}} \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') \right] = \mathbf{C} \mathbf{L}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')], \quad (4.46)$$

donde se ha tenido en cuenta que la señal de entrada del sistema en el dominio espectral es $\tilde{\alpha}(\mu')$, que son los coeficientes de $a(\tau)$ en la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$ y que la señal de salida en el dominio

¹⁴Nuevamente, el parámetro η en la expresión general se corresponde con μ .

espectral es $\alpha(\mu)$, coeficientes de la misma señal $a(\tau)$ pero en la base $e(\tau; \mu)$, llegando al resultado esperado del cambio de base.

Para más un desarrollo más detallado del concepto de Análisis Espectral Generalizado, acudir al Cap. 5.

4.5. Casos particulares

4.5.1. Espacios euclideos de dimensión finita

Los casos particulares que se van a analizar a continuación para diferentes espacios de señal son una generalización del concepto de cambio de base bien conocido para espacios euclideos. Las expresiones de los conjuntos $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ no son más que las matrices del cambio de base para los espacios de dimensión finita. Estas matrices se corresponderían con la representación de cada uno de los elementos de una base con respecto de la otra, y se corresponde perfectamente con las expresiones (4.14) y (4.15) obtenidas en el desarrollo de la Secc. 4.2. Así, por ejemplo, es bien conocido el cambio de base de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas en un espacio euclideo tridimensional. En la Fig. 4.5 se muestran cuáles estas dos bases ortonormales en este espacio. Dada la base¹⁵ $\{e(i; j)\}_{j=1 \div 3} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ y la base $\{\tilde{e}(i; k)\}_{k=1 \div 3} = \{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ se puede obtener esta última como proyección de cada uno de estos vectores sobre la base $\{e(i; j)\}_j$:

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{cases}, \quad (4.49)$$

y, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

siendo

$$B = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

la matriz del cambio de base de coordenadas cartesianas a esféricas.

Se puede comprobar fácilmente que la representación en (4.50) cumple la ecuación del cambio de base (4.20),

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)], \quad (4.52)$$

¹⁵Las bases en este espacio de 3 dimensiones son vectores. Los parámetros que la definen son:

$$i \equiv \text{componente } i \text{ del vector}, \quad (4.47)$$

$$j / k \equiv \text{elemento } j / k \text{ de la base.} \quad (4.48)$$

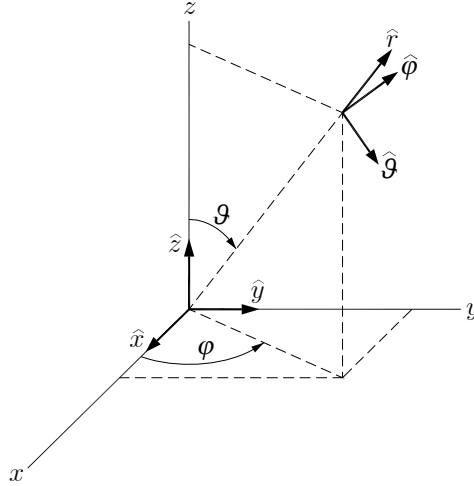


Figura 4.5: Base de coordenadas cartesiana $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ y base de coordenadas esféricas $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ de un espacio de tres dimensiones.

siendo¹⁶

$$\alpha(\mu) \equiv \alpha(j) \equiv (x, y, z), \quad (4.54)$$

$$\tilde{\alpha}(\mu') \equiv \tilde{\alpha}(k) \equiv (r, \theta, \varphi), \quad (4.55)$$

$$\varepsilon(\mu'; \mu) \equiv \varepsilon(k; j) = B = e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; k), \quad (4.56)$$

$$\mathbf{CL}_\mu \equiv \sum_{j=1}^3. \quad (4.57)$$

Igualmente, el cambio de base inverso, es decir, de esféricas a cartesianas, sería,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

con

$$B^{-1} = B^t = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \tilde{e}(i; k) \cdot e(i; j) = \tilde{\varepsilon}(j; k) \quad (4.59)$$

En general, para cualquier par de bases ortonormales $\{e(i; j)\}_{j=1 \div N}$ y $\{\tilde{e}(i; k)\}_{k=1 \div N}$ de un

¹⁶Las coordenadas de un vector a en la base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ son (x, y, z) , y sus coordenadas en la base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ son (r, θ, φ) .

El producto escalar en un espacio euclideo tridimensional es

$$\langle e(i; j), \tilde{e}(i; k) \rangle = e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; k) = \sum_{i=1}^3 e(i; j) \tilde{e}(i; k) \quad (4.53)$$

espacio de dimensión N , la matriz del cambio de base de $e(i; j)$ a $\tilde{e}(i; k)$ es

$$\varepsilon(k; j) = \epsilon = \begin{pmatrix} e(i; 1) \cdot \tilde{e}(i; 1) & e(i; 2) \cdot \tilde{e}(i; 1) & \cdots & e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; 1) & \cdots & e(i; N) \cdot \tilde{e}(i; 1) \\ e(i; 1) \cdot \tilde{e}(i; 2) & e(i; 2) \cdot \tilde{e}(i; 2) & \cdots & e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; 2) & \cdots & e(i; N) \cdot \tilde{e}(i; 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(i; 1) \cdot \tilde{e}(i; k) & e(i; 2) \cdot \tilde{e}(i; k) & \cdots & e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; k) & \cdots & e(i; N) \cdot \tilde{e}(i; k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(i; 1) \cdot \tilde{e}(i; N) & e(i; 2) \cdot \tilde{e}(i; N) & \cdots & e(i; j) \cdot \tilde{e}(i; N) & \cdots & e(i; N) \cdot \tilde{e}(i; N) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

por lo que los coeficientes $\tilde{v}(k)$ de un vector u en la base $\tilde{e}(i; k)$ pueden representarse a partir de a través de esta matriz como (4.20),

$$\tilde{v}(k) = \mathbf{CL}_j [v(j) \varepsilon(k; j)], \quad (4.61)$$

siendo $v(j)$ los coeficientes de u en la base $e(i; j)$ y $\mathbf{CL}_j \equiv \sum_{j=1}^N$. En forma matricial

$$\tilde{v} = \epsilon v. \quad (4.62)$$

Por otro lado, la matriz del cambio de $\tilde{e}(i; k)$ a $e(i; j)$ es

$$\tilde{\varepsilon}(j; k) = \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{e}(i; 1) \cdot e(i; 1) & \tilde{e}(i; 2) \cdot e(i; 1) & \cdots & \tilde{e}(i; k) \cdot e(i; 1) & \cdots & \tilde{e}(i; N) \cdot e(i; 1) \\ \tilde{e}(i; 1) \cdot e(i; 2) & \tilde{e}(i; 2) \cdot e(i; 2) & \cdots & \tilde{e}(i; k) \cdot e(i; 2) & \cdots & \tilde{e}(i; N) \cdot e(i; 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{e}(i; 1) \cdot e(i; j) & \tilde{e}(i; 2) \cdot e(i; j) & \cdots & \tilde{e}(i; k) \cdot e(i; j) & \cdots & \tilde{e}(i; N) \cdot e(i; j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{e}(i; 1) \cdot e(i; N) & \tilde{e}(i; 2) \cdot e(i; N) & \cdots & \tilde{e}(i; k) \cdot e(i; N) & \cdots & \tilde{e}(i; N) \cdot e(i; N) \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

de forma que los coeficientes $v(j)$ de un vector u en la base $e(i; j)$ se pueden expresar a partir de esta matriz como (4.21),

$$v(i) = \mathbf{CL}_k [\tilde{v}(k) \tilde{\varepsilon}(j; k)], \quad (4.64)$$

donde $\tilde{v}(k)$ son los coeficientes de u en la base $\tilde{e}(i; k)$ y $\mathbf{CL}_k \equiv \sum_{k=1}^N$. En forma matricial

$$v = \tilde{\varepsilon} \tilde{v}. \quad (4.65)$$

De esta manera, se puedan representar en forma matricial las ecuaciones generales del cambio de base (4.20) y (4.21), probando que este caso general también es aplicable a los cambios de base bien conocidos para espacios vectoriales de dimensión finita.

A continuación se muestran los ejemplos de casos particulares para espacios de señal de dimensiones finita e infinita.

4.5.2. Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$

El espacio de funciones de variable continua, es decir, el espacio, $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$, es el formado por el conjunto de funciones $f(x) \in \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ complejas de variable real. El producto escalar definido en este espacio es el siguiente:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx. \quad (4.66)$$

En este espacio se pueden escoger como funciones base, por ejemplo, el conjunto de exponenciales complejas que definen la transformada de Fourier, $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$ o el conjunto de funciones que definen la transformada de Hilbert¹⁷, $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$. Hay que notar que tanto ξ como x' son enumeradores que pertenecen al conjunto de los números reales ($\xi \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$), por lo que la dimensión del espacio será infinita no numerable¹⁸. De esta manera, aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general, cada función $f(x)$ de este espacio se podrá representar como una combinación lineal generalizada \mathbf{CL}_{μ} de una de estas bases por unos coeficientes.

Así, para la transformada de Fourier, **TF**, se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi, \quad (4.67)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{CL}_{\mu} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} d\xi$ y que el conjunto de coeficientes $F(\xi)$ son la proyección ortogonal de la función original sobre cada uno de los elementos de la base, es decir,

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \langle f(x), e^{j\xi x} \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (4.68)$$

Por otro lado, para la transformada de Hilbert, **TH**, se tiene:

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{H(x')}{\pi(x-x')} dx', \quad (4.69)$$

donde $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \int_{x'=-\infty}^{\infty} dx'$ y el conjunto de coeficientes $H(x')$ son la proyección ortogonal de la función original sobre cada uno de los elementos de la base,

$$H(x') = \mathbf{TH}[f(x)] = \left\langle f(x), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx. \quad (4.70)$$

Aplicando los resultados de las ecuaciones del cambio de base (4.20) y (4.21), se obtienen las siguientes ecuaciones para el cambio de estas dos bases en este espacio

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu}[\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow H(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \left\langle e^{j\xi x}, \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle d\xi, \quad (4.71)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'}[\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow F(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} H(x') \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, e^{j\xi x} \right\rangle dx'. \quad (4.72)$$

¹⁷El hecho de que el conjunto de funciones $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$ y $e(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$, sean una base del espacio $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ puede comprobarse en las referencias [1] y [80].

¹⁸Con respecto a la numerabilidad de los espacios de dimensión infinita se hablará más en detalle en los Caps. 8 y 9.

Desarrollando los productos escalares internos, de las tablas de [61] para realizar las transformas, se obtiene

$$\begin{aligned}\varepsilon(x'; \xi) &= \left\langle e^{j\xi x}, \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\xi x}}{\pi(x-x')} dx = \\ &= \mathbf{TH} \left[e^{j\xi x} \right] = j \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'},\end{aligned}\quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(\xi; x') &= \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, e^{j\xi x} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x}}{\pi(x-x')} dx = \\ &= \mathbf{TF} \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right] = -j \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'},\end{aligned}\quad (4.74)$$

representados en las Figs. 4.6 y 4.7, donde además se puede comprobar que¹⁹.

$$\varepsilon^*(x'; \xi) = \tilde{\varepsilon}(\xi; x'). \quad (4.78)$$

Finalmente, las ecuaciones del cambio de base entre los coeficientes de la **TF** y los de la **TH** son:

$$H(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi, \quad (4.79)$$

$$F(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx'. \quad (4.80)$$

Para comprobar que dichas ecuaciones son correctas, pasamos a hacer el desarrollo de los coeficientes $F(\xi)$ y $H(x')$ en (4.79) y (4.80), esperando obtener la expresión conocida para el cálculo de coeficientes tanto para la transformada de Hilbert como para la de Fourier, respectivamente.

¹⁹Ciertamente, según se había demostrado en (4.16), la igualdad que debería producirse es

$$A\tilde{\varepsilon}(x'; \xi) = \tilde{A}\varepsilon^*(\xi; x'), \quad (4.75)$$

donde

$$\left\langle e^{j\xi x}, e^{j\xi' x} \right\rangle = 2\pi\delta(\xi - \xi') \Rightarrow A = 2\pi, \quad (4.76)$$

$$\left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, \frac{1}{\pi(x-x'')} \right\rangle = \delta(x' - x'') \Rightarrow \tilde{A} = 1 \quad (4.77)$$

por lo que en este caso no se cumpliría dicha igualdad; sin embargo, tal como también se había explicado en el pie de página número 3, según la definición que se dé a la transformada, ésta puede llevar las constantes en el cálculo de los coeficientes, en la combinación lineal o incluso repartida en ambas expresiones. En este caso, para que se cumpliera la expresión (4.75), simplemente habría que tomar el factor $\frac{1}{2\pi}$ de la ecuación (4.71) y adjuntarlo a la expresión de $\varepsilon(x'; \xi)$ para que, de esta forma, se cumpla que $\frac{1}{2\pi} \varepsilon^*(x'; \xi) = \tilde{\varepsilon}(\xi; x')$, que sería lo mismo que $\varepsilon^*(x'; \xi) = 2\pi\tilde{\varepsilon}(\xi; x')$, es decir, $\tilde{A}\varepsilon^*(\xi; x') = A\tilde{\varepsilon}(x'; \xi)$, que es lo que se quería probar. De todas formas, se reitera que la colocación de las constantes es intrascendente, puesto que sólo muestran un factor de escala.

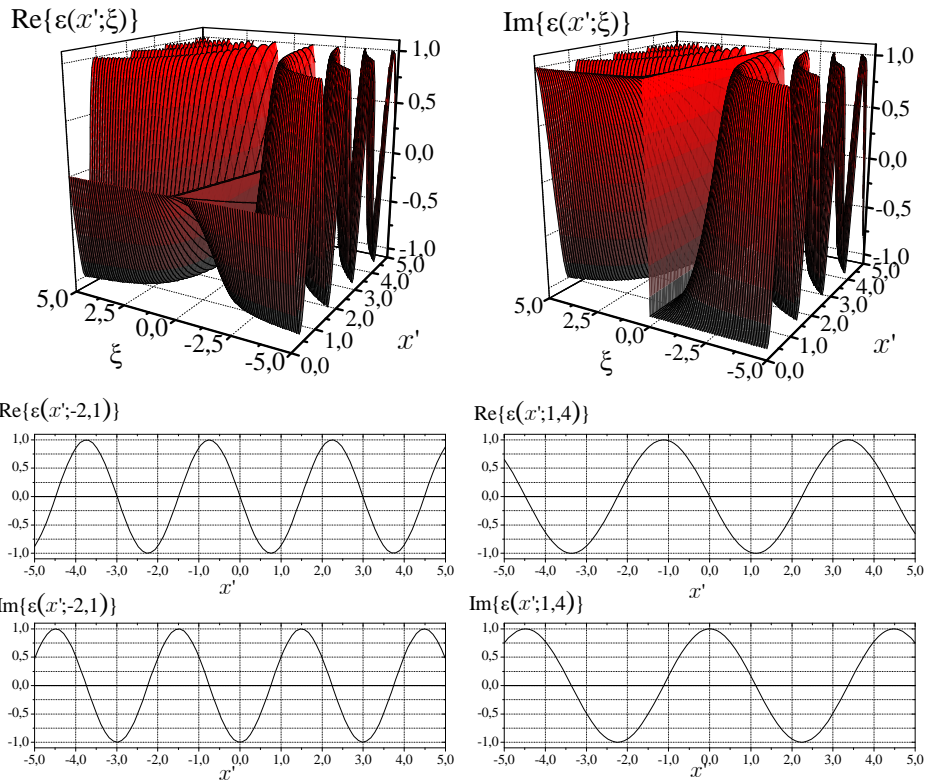


Figura 4.6: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\varepsilon(x'; \xi)$ y dos particularizaciones para $\xi = -2, 1$ y $\xi = 1, 4$.

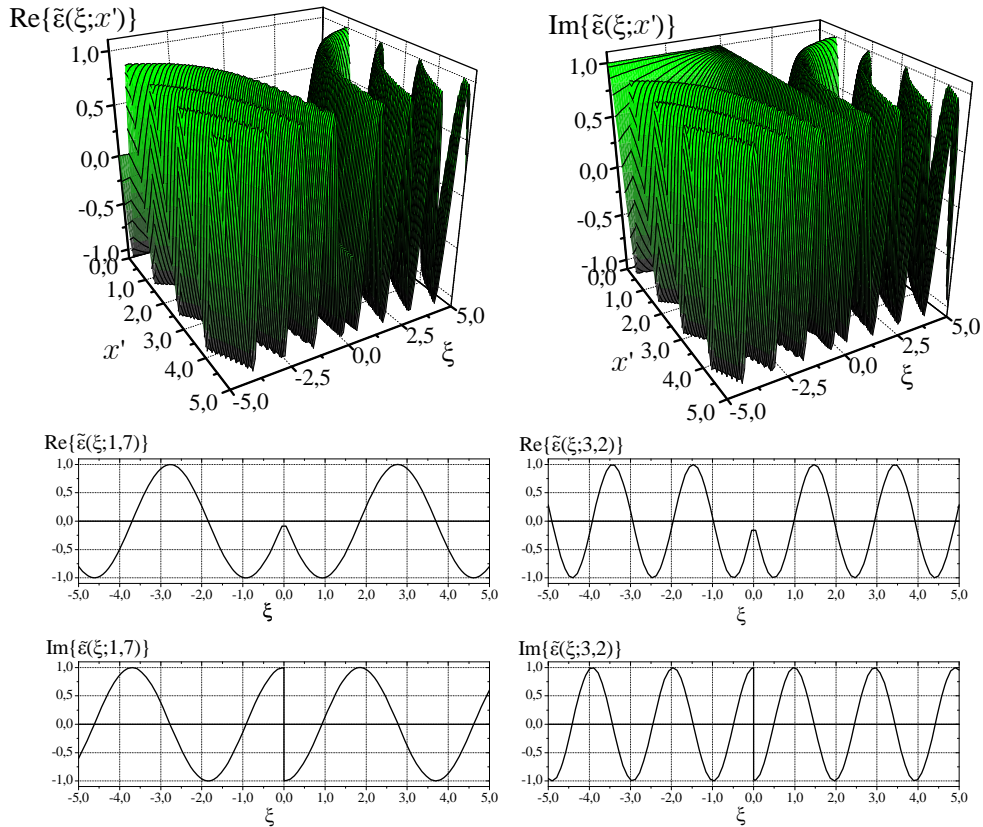


Figura 4.7: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\xi; x')$ y dos particularizaciones para $x' = 1, 7$ y $x' = 3, 2$.

De (4.79), desarrollando $F(\xi)$ como en (4.68), se obtiene²⁰:

$$\begin{aligned}
H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx e^{j\xi x'} d\xi = \\
&= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x} e^{j\xi x'} d\xi dx = \\
&= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{j(x'-x)\xi} d\xi dx = \\
&= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2}{j(x-x')} dx = \\
&= \mathbf{TH}[f(x)], \tag{4.81}
\end{aligned}$$

obteniendo el resultado esperado.

De la misma manera, a partir de (4.80), desarrollando $H(x')$ como se muestra en (4.70), se obtiene²¹:

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -j \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
&= -j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x'}}{\pi(x-x')} dx' dx = \\
&= -j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) j \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x} dx = \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx = \\
&= \mathbf{TF}[f(x)], \tag{4.82}
\end{aligned}$$

que es el resultado esperado.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.1 del Cap. 6.

4.5.3. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$

En el espacio de funciones $f_0(x)$ periódicas de periodo X_0 de variable continua se pueden definir dos conjuntos de funciones base conocidos. Por un lado el conjunto infinito no numerable de la base ideal del tren de deltas desplazadas $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{\delta_0(x - x')\}_{x'} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x' - nX_0) \right\}_{x'}$, con $x' \in \langle X_0 \rangle$, es decir, x' perteneciente a un intervalo de longitud X_0 ²²; y por otro, el conjunto infinito numerable de exponenciales complejas de periodo un múltiplo entero de la pulsación fundamental $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, es decir, $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$, con $m \in \mathbb{Z}$, que definen el Desarrollo en Serie de Fourier, **DSF**.

El producto escalar para este espacio, al ser de señales periódicas, será el generado por la integral a lo largo de un periodo del producto de una señal por el conjugado de la otra, así

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx. \tag{4.83}$$

²⁰Ver la demostración completa en el Ap. D.1 del Apéndice de demostraciones matemáticas.

²¹Se puede ver la demostración completa en el Ap. D.2.

²²En general puede considerarse el intervalo $(0, X_0)$ ó $(-\frac{X_0}{2}, \frac{X_0}{2})$, abierto o cerrado indistintamente, puesto que un punto aislado (en general cualquier conjunto de medida nula) no influye en la métrica definida en este espacio.

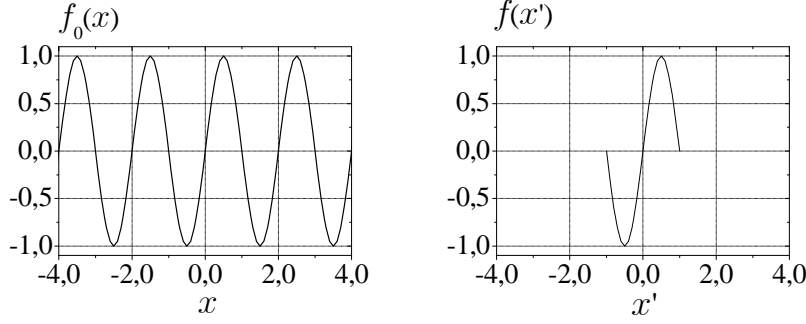


Figura 4.8: La señal $f(x')$ se corresponde únicamente con un sólo periodo de la señal $f_0(x)$. En este ejemplo se representa una señal sinusoidal de periodo $X_0 = 2$. Fuera de ese periodo no está definida.

De esta manera, aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general, cada señal $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ puede ser expresada en términos de una combinación lineal de estos conjuntos de funciones base ponderados por unos coeficientes:

$$f_0(x) = \int_{x'=\langle X_0 \rangle} p(x') \delta_0(x-x') dx', \quad (4.84)$$

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (4.85)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{CL}_\mu \equiv \int_{x=\langle X_0 \rangle} dx'$ y $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty}$. Además, los coeficientes para cada caso son el producto escalar de la señal original sobre cada uno de los elementos de la base, así²³

$$p(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[f_0(x)] = \langle f_0(x), \delta_0(x-x') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \delta_0(x-x') dx = f(x') \quad (4.86)$$

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \langle f_0(x), e^{jm\xi_0 x} \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (4.87)$$

Es importante remarcar que el conjunto de coeficientes $p(x')$ se corresponde con la señal original $f_0(x)$ pero solamente definido en un intervalo de longitud X_0 , ya que el parámetro x' sólo toma valores a lo largo de un periodo, es decir, $\text{Dom}\{p(x')\} = \langle X_0 \rangle$, por lo tanto, a partir de aquí se considerarán los coeficientes de la señal $f_0(x)$ bajo la \mathbf{T}_{δ_0} como $f(x')$, teniendo cuidado de no confundir $f(x')$ con $f_0(x)$, ya que $f(x')$ se corresponde tan solo con uno de los periodos de $f_0(x)$, no estando definida fuera del intervalo de definición de x' de longitud X_0 , puesto que con este conjunto de coeficientes ya se tiene la información necesaria y suficiente para reconstruir $f_0(x)$ ²⁴, como se puede observar en el ejemplo de la Fig. 4.8. Por otro lado, los coeficientes $a(m)$ se corresponden con un conjunto discreto de valores.

Aparece, por tanto, un resultado cuanto menos curioso. En un mismo espacio de señal, con una misma métrica y producto escalar definido, se pueden encontrar dos conjuntos diferentes

²³ \mathbf{T}_{δ_0} representa la transformada sobre la base del tren de deltas desplazadas.

²⁴ En realidad sí que se podría considerar la función $f(x')$ definida para todos los valores de $x' \in \mathbb{R}$, considerando esta señal periódica de periodo X_0 , teniendo en cuenta que siempre que se haga un cálculo de esta función sobre la variable x' , éste ha de hacerse sobre un intervalo de longitud X_0 (cualquier intervalo de esa longitud). En este caso los coeficientes $f(x')$ serían igual que la función $f_0(x)$ simplemente que definida sobre la variable x' , por lo que los ejemplos de este caso particular no tendrían mucha importancia. Mantenemos, por tanto, la expresión de $f(x')$ definida tan solo en un intervalo de longitud X_0 para que este caso particular tenga un poco más de relevancia.

de funciones que hacen el papel de base del espacio pero que contienen un número diferente de elementos. En ambos casos se trata de un conjunto infinito de funciones, lo que indicaría una dimensión infinita del espacio, pero en el caso de las deltas desplazadas es infinito no numerable, por lo que la dimensión se correspondería con el número de elementos de esta base, es decir, $\text{card}(\{x' \in \langle X_0 \rangle\}) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ²⁵, mientras que en el caso de las exponenciales complejas se trata de un infinito numerable, por lo que la dimensión sería $\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$. Lo curioso es que ambos conjuntos de funciones son base del espacio, puesto que lo generan, son linealmente independientes y, además, no hay ninguna función que sobre ni falte en cada base para generar todo el espacio. Este dilema se resuelve teniendo en cuenta que el conjunto de deltas desplazadas no pertenecen realmente al espacio, puesto que son distribuciones, por lo que estaríamos hablando de una pseudobase, tal como se comentaba en el Apdo. 2.3.4, mientras que el conjunto de exponenciales complejas sí se puede considerar como una base en términos estrictos. El estudio de los Espacios de Hilbert Equipados en el Cap. 8 aportará una solución a este problema.

De esta manera, existen en este espacio dos conjuntos de funciones que permiten el cambio de base de una a otra, de forma que se puedan encontrar los coeficientes de una señal en una base a partir de los coeficientes de la misma señal en la otra base. Aplicando las ecuaciones generales (4.20) y (4.21) a este caso se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\mu') &= \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow \\ \Rightarrow a(m) &= \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f(x') \frac{1}{X_0} \langle \delta_0(x - x'), e^{jm\xi_0 x} \rangle dx',\end{aligned}\quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}\alpha(\mu) &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \langle e^{jm\xi_0 x}, \delta_0(x - x') \rangle.\end{aligned}\quad (4.89)$$

Desarrollando los productos escalares internos se obtienen los dos conjuntos de funciones para el cambio de base, así

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mu'; \mu) &\equiv \varepsilon(m; x') = \frac{1}{X_0} \langle \delta_0(x - x'), e^{jm\xi_0 x} \rangle = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} \delta_0(x - x') e^{-jm\xi_0 x} dx = \\ &= \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 x'},\end{aligned}\quad (4.90)$$

tratándose de un conjunto de funciones de variable $m \in \mathbb{Z}$ enumeradas por un parámetro continuo $x' \in \langle X_0 \rangle$; y

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') &\equiv \tilde{\varepsilon}(x'; m) = \langle e^{jm\xi_0 x}, \delta_0(x - x') \rangle = \\ &= \int_{x \in \langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} \delta_0(x - x') dx = \\ &= e^{jm\xi_0 x'}.\end{aligned}\quad (4.91)$$

Las Figs. 4.9 y 4.10 representan estos conjuntos.

²⁵Referirse a [102]-[104] sobre la teoría de conjuntos y su numerabilidad. Todas estas igualdades se dan si se acepta la hipótesis del continuo.

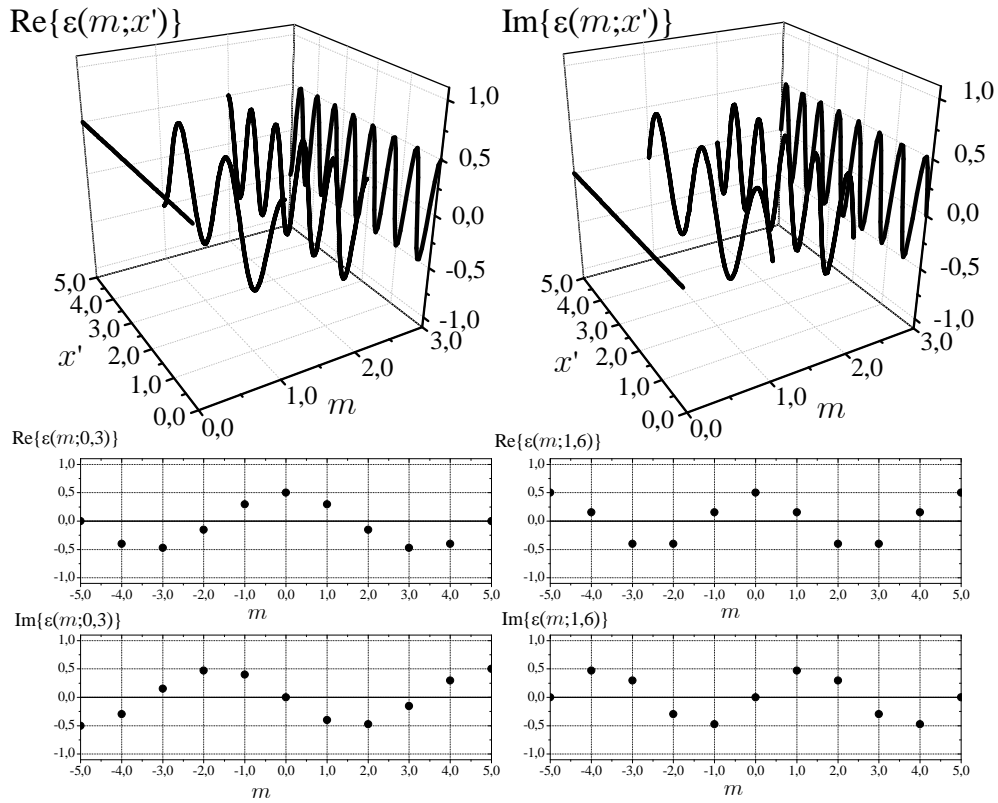


Figura 4.9: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\varepsilon(m; x')$ con $X_0=2$ y dos particularizaciones para $x'=0,3$ y $x'=1,6$.

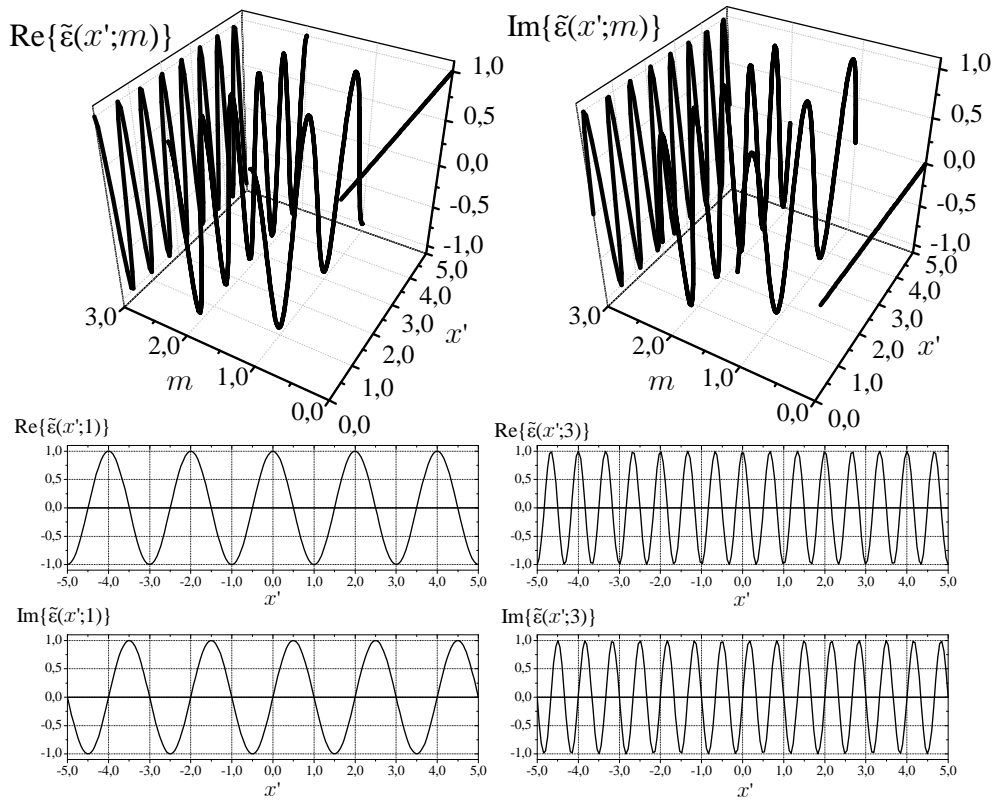


Figura 4.10: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\tilde{\varepsilon}(x'; m)$ con $X_0=2$ y dos particularizaciones para $m=1$ y $m=3$.

Resulta muy sencillo comprobar la igualdad (4.16),

$$A\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \tilde{A}\varepsilon^*(\mu'; \mu), \quad (4.92)$$

donde

$$\langle e(x; x'), e(x; x'') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} \delta(x - x') \delta(x - x'') dx = \delta(x' - x'') \Rightarrow A = 1, \quad (4.93)$$

$$\langle \tilde{e}(x; m), \tilde{e}(x; m') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = X_0 \delta(m - m') \Rightarrow \tilde{A} = X_0, \quad (4.94)$$

ya que

$$A\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \tilde{\varepsilon}(x'; m) = e^{jm\xi_0 x'} = X_0 \left(\frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 x'} \right)^* = X_0 \varepsilon^*(m; x') = \tilde{A}\varepsilon^*(\mu'; \mu). \quad (4.95)$$

Finalmente, las ecuaciones del cambio de base entre los coeficientes de la base ideal de deltas y los del **DSF** son

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx', \quad (4.96)$$

$$f(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'}. \quad (4.97)$$

Además, no es difícil comprobar que estas ecuaciones son correctas dado que, a partir de las expresiones del cálculo de los coeficientes $f(x')$ y $a(m)$ con respecto a sus bases (4.86) y (4.87), al introducirlos en las ecuaciones (4.96) y (4.97) respectivamente, se obtienen los propios cálculos conocidos de estos coeficientes, así

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \delta_0(x - x') dx e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \int_{x'=\langle X_0 \rangle} e^{-jm\xi_0 x'} \delta_0(x - x') dx' dx = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx, \end{aligned} \quad (4.98)$$

y

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx e^{jm\xi_0 x'} = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x'} e^{-jm\xi_0 x} dx = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} dx = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) X_0 \delta_0(x' - x) dx = \\ &= \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \delta_0(x - x'), \end{aligned} \quad (4.99)$$

como se quería demostrar, donde se ha tenido en cuenta la demostración del Ap. D.6 sobre demostraciones matemáticas para realizar la suma infinita de exponenciales.

Este par de ecuaciones (4.96)-(4.97), que representan el cambio de base dentro del espacio $\mathcal{P}(X_0)$ entre la base ideal $\{\delta_0(x-x')\}_{x' \in \langle X_0 \rangle}$ y la base formada por el conjunto discreto de exponenciales complejas $\{e^{jm\xi_0 x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$, y viceversa, muestran la capacidad de representar un mismo espacio, es decir, un mismo conjunto de señales con una misma métrica, norma y producto escalar definidos, con dos tipos de bases distintas, que además son de diferente dimensión, haciendo que se pueda pasar de ver el espacio a partir de una base infinita pero numerable, a verlo desde una base infinita no numerable. Los conjuntos de funciones $\varepsilon(m; x')$ y $\tilde{\varepsilon}(x'; m)$ son los encargados de pasar de una base a otra y de interpretarlos como dimensiones diferentes, recordando que $\varepsilon(m; x')$ es un conjunto de funciones discretas enumerado por un parámetro continuo $x' \in \langle X_0 \rangle$, mientras que $\tilde{\varepsilon}(x'; m)$ es al revés, un conjunto de señales de variable continua (aunque solamente definidos en un dominio de longitud X_0) enumerados por un parámetro discreto $m \in \mathbb{Z}$.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.2 del Cap. 6.

4.5.4. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$

Consideremos en este caso particular nuevamente el conjunto de las funciones $f_0(x)$ de variable continua, periódicas de periodo X_0 .

Este conjunto de funciones se puede considerar como un subespacio del conjunto de funciones de variable continua $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$. Al ser un subespacio, conserva la definición de producto escalar del espacio original, expresada en (4.66),

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx. \quad (4.100)$$

Escogiendo para este espacio el conjunto de funciones base para la transformada de Fourier, **TF**, definidas como el conjunto de exponenciales complejas $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$, hablaríamos de que la dimensión del espacio es infinita no numerable, al ser el parámetro $\xi \in \mathbb{R}$. Cada señal, aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general, puede ser expresada como la combinación lineal del conjunto de funciones base por unos coeficientes como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi, \quad (4.101)$$

donde la combinación lineal en este caso se define como $\mathbf{CL}_\mu \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} d\xi$ y el conjunto de coeficientes se calcula como la proyección ortogonal de la función original sobre cada uno de los elementos de la base,

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \langle f(x), e(x; \xi) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (4.102)$$

Igualmente, se puede considerar para este conjunto de funciones el espacio $\mathcal{P}(X_0)$ en el que sólo existen funciones periódicas de periodo X_0 . En este espacio, el producto escalar definido es el mismo que el visto en (4.83),

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx \quad (4.103)$$

y el conjunto de funciones base es el conjunto de exponenciales complejas cuya pulsación es múltiplo de una fundamental, es decir, $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$, donde $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, y que definen el desarrollo en serie de Fourier, **DSF**. Se puede comprobar, por tanto, que, al ser el parámetro $m \in \mathbb{Z}$, la dimensión del espacio sería infinita numerable. Aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general para este espacio, cada señal $f_0(x)$ se podrá expresar como una combinación lineal de este conjunto de funciones base por unos coeficientes, así

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (4.104)$$

donde $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty}$ y el conjunto de coeficientes $a(m)$ se puede obtener como la proyección ortogonal normalizada al periodo X_0 de la señal original con cada uno de los elementos de la base como

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f(x)] = \frac{1}{X_0} \langle f_0(x), \tilde{e}(x; m) \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (4.105)$$

Una vez definidos los dos conjuntos de funciones base escogidos para este espacio, se busca cuáles serían las ecuaciones para encontrar los coeficientes de una señal en una base, conocidos los de la otra. Para esto, aplicamos las ecuaciones del cambio de base vistas en (4.20) y (4.21), obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow a(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1}{X_0} \langle e^{j\xi x}, e^{jm\xi_0 x} \rangle d\xi, \quad (4.106)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow F(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \langle e^{jm\xi_0 x}, e^{j\xi x} \rangle. \quad (4.107)$$

Desarrollando los productos escalares internos, se obtiene

$$\varepsilon(m; \xi) = \frac{1}{X_0} \langle e^{j\xi x}, e^{jm\xi_0 x} \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{j\xi x} e^{-jm\xi_0 x} dx, \quad (4.108)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = \langle e^{jm\xi_0 x}, e^{j\xi x} \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x} e^{-j\xi x} dx. \quad (4.109)$$

Así, para el cálculo de $\varepsilon(m; \xi)$, se realiza el producto escalar sobre cada una de las funciones $\tilde{e}(x; m)$ de todas las funciones $e(x; \xi)$, a pesar de que este producto escalar sea una integral a lo largo de un periodo X_0 y la mayoría de las funciones $e(x; \xi) = e^{j\xi x}$ no sean periódicas de periodo X_0 ; sin embargo eso no importa en exceso para el cálculo, pues el resultado es el requerido para expresar el conjunto $\varepsilon(m; \xi)$ necesario para realizar el cambio de base. Posteriormente se

analizan los casos en los que $e^{j\xi x}$ sí son periódicas X_0 para entender este resultado, así

$$\begin{aligned}
\varepsilon(m; \xi) &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{j\xi x} e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} e^{j(\xi - m\xi_0)x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \frac{1}{j(\xi - m\xi_0)} \left[e^{j(\xi - m\xi_0)x} \right]_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} = \\
&= \frac{1}{X_0} \frac{1}{j(\xi - m\xi_0)} \left(e^{j(\xi - m\xi_0)\frac{X_0}{2}} - e^{-j(\xi - m\xi_0)\frac{X_0}{2}} \right) = \\
&= \frac{2}{X_0} \frac{1}{(\xi - m\xi_0)} \sin \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) = \\
&= \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right). \tag{4.110}
\end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que los cálculos se han hecho siempre que $\xi \neq m\xi_0$ para evitar la singularidad. En los casos en los que $\xi = m\xi_0$ se tendría

$$\begin{aligned}
\varepsilon(m; \xi) &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{j\xi x} e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^0 dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} 1 dx = \\
&= 1, \tag{4.111}
\end{aligned}$$

lo cual concuerda precisamente con la propia definición de la función $\operatorname{sinc}(x)$ que vale 1 cuando el argumento de la sinc es 0. Por lo tanto, para todo $m \in \mathbb{Z}$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\varepsilon(m; \xi) = \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right), \tag{4.112}$$

recordando que se trata de un conjunto de funciones de variable discreta m descritos por un parámetro continuo ξ , es decir, para cada valor fijo de ξ se tiene una función en m . Una observación importante es que la función, para valores del parámetro ξ que son múltiplos de ξ_0 , es decir, de la pulsación fundamental de la señal, $\xi = k\xi_0$ con $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon(m; \xi)$ vale

$$\begin{aligned}
\varepsilon(m; k\xi_0) &= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \varepsilon(m; \xi) \delta(\xi - k\xi_0) d\xi = \\
&= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) \delta(\xi - k\xi_0) d\xi = \\
&= \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (k\xi_0 - m\xi_0) \right) = \\
&= \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} ((k - m)\xi_0) \right) = \\
&= \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} \left((k - m) \frac{2\pi}{X_0} \right) \right) = \\
&= \operatorname{sinc}((k - m)\pi) = \\
&= \delta(k - m) \tag{4.113}
\end{aligned}$$

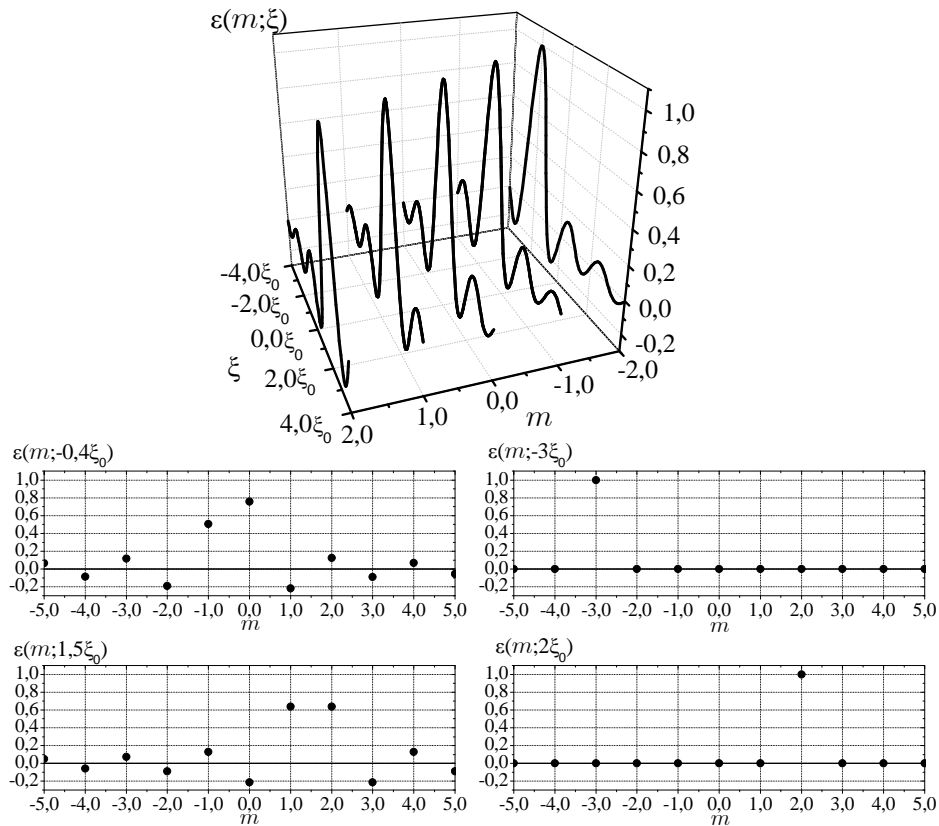


Figura 4.11: Representación del conjunto $\varepsilon(m; \xi)$ con $X_0=5$ y cuatro particularizaciones para $\xi = -0,4\xi_0$, $\xi = 1,5\xi_0$, $\xi = -3\xi_0$ y $\xi = 2\xi_0$.

delta de Kronecker, es decir, que de todas las funciones base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$, aquellas que generan las señales periódicas de periodo X_0 , hacen que la función $\varepsilon(m; \xi)$ sea nula salvo en la posición correspondiente al múltiplo del periodo de esa función base. En la Fig. 4.11 se representa este conjunto de funciones y algunos casos particulares.

Para el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}(\xi; m) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x} e^{-j\xi x} dx = \\
 &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{j(m\xi_0 - \xi)x} dx = \\
 &= 2\pi\delta(\xi - m\xi_0), \tag{4.114}
 \end{aligned}$$

es decir, se trata de una delta de Dirac localizada en la posición $\xi = m\xi_0$ y ponderada por 2π , lo cual es lógico, puesto que se están proyectando sobre el conjunto infinito no numerable $\{e(x; \xi)\}_\xi = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ el conjunto numerable de exponenciales complejas que tienen por pulsación un múltiplo de ξ_0 , es decir, las que son de la forma $e^{jm\xi_0 x}$. Se trata de un conjunto de funciones de variable continua $\xi \in \mathbb{R}$ descritas por un parámetro entero $m \in \mathbb{Z}$, es decir, para cada valor discreto de m , se tiene una función continua como se muestra en la Fig. 4.12

Indicar que, a partir de la representación de la Fig. 4.12, según el periodo X_0 de la señal que se esté considerando, la dirección de la posición de las deltas será distinta, pudiendo representarse también sobre la misma gráfica, todos los conjuntos de funciones $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ diferentes para los infinitos valores posibles de periodos de la señal $X_0 \in \mathbb{R}^+$ como se muestra en la Fig. 4.13. Se puede comprobar que el ángulo α formado entre la dirección de las deltas y el eje ξ cumple que

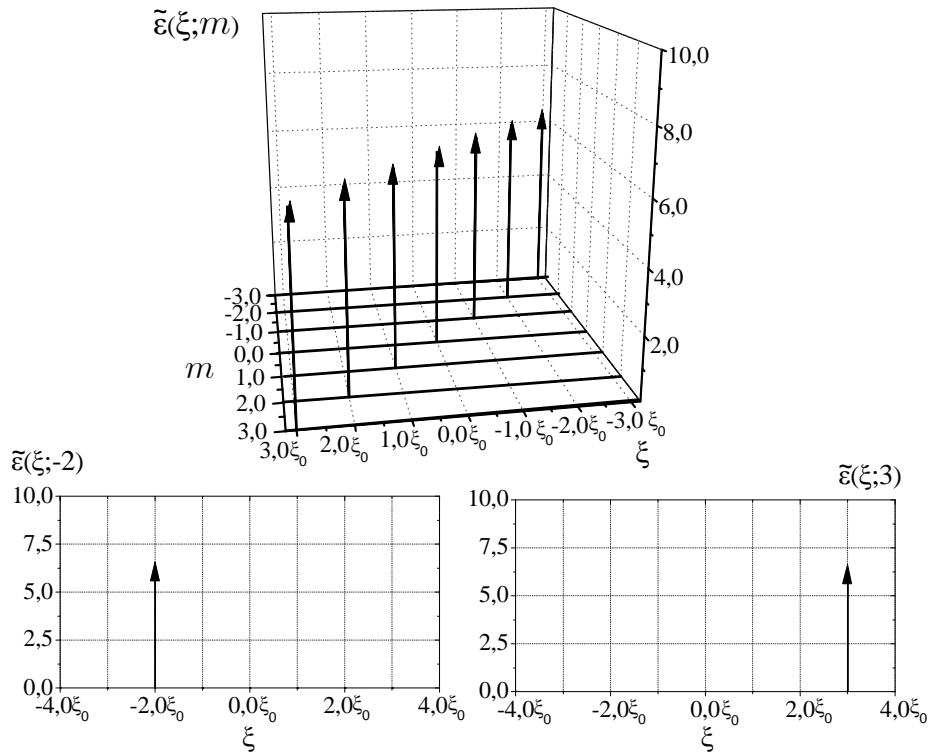


Figura 4.12: Representación del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ con $X_0=5$ y dos particularizaciones para $m = -2$ y $m = 3$.

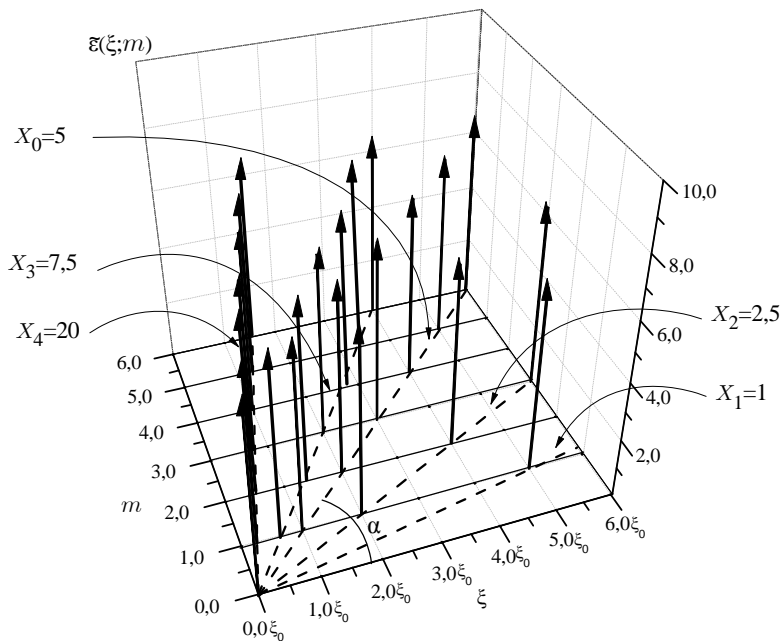


Figura 4.13: Representación en una misma gráfica del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ para diferentes valores del periodo X_i , tomando como referencia para el eje ξ el valor correspondiente al periodo $X_0=5$. El ángulo α está relacionado con el periodo de la señal. Cuanto mayor es el periodo, más juntas se encuentran las deltas y mayor es α , por el contrario, cuanto más pequeño es el periodo, mayor es la separación entre deltas y más pequeño es α .

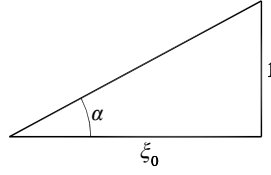


Figura 4.14: Ángulo formado por el tren de deltas y el eje ξ .

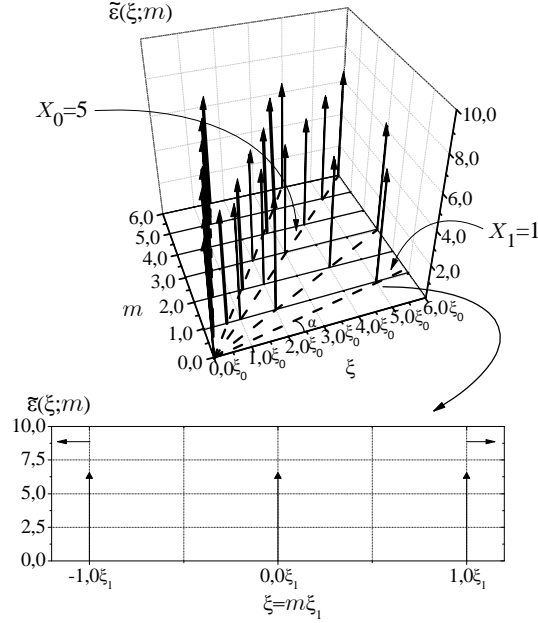


Figura 4.15: Arriba, representación en tres dimensiones de varios conjuntos $\varepsilon(\xi; m)$ para diferentes valores del periodo. Abajo, en dos dimensiones, representación para un valor concreto del periodo $X_1=1$.

Representando sobre una misma gráfica todas las funciones $\varepsilon(\xi; m)$ para distintos valores de m cuando el periodo de la señal tiende a infinito, $X_i \rightarrow 0$, puede comprobarse como la separación entre deltas aumenta hasta tender a infinito y sólo quedar una delta en $\xi = 0$, lo que correspondería, en el límite, con una función periódica de periodo 0, o lo que es lo mismo, una señal constante.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{\xi_0} = \frac{1}{\frac{2\pi}{X_0}} = \frac{X_0}{2\pi}, \quad (4.115)$$

por lo que el ángulo formado entre la dirección de las deltas y el eje ξ (ver Fig. 4.14), en función del periodo X_0 será

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_0}{2\pi}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\xi_0}\right). \quad (4.116)$$

El caso especial en el que el periodo $X_i \rightarrow 0$, representaría una señal de periodo 0, es decir, una señal constante, por lo que en su representación tan sólo habría una delta en la posición nula (ver Fig. 4.15), lo cual concuerda con la representación general, dado que

$$\lim_{X_i \rightarrow 0} \delta(\xi - m\xi_i) = \lim_{\xi_i \rightarrow \infty} \delta(\xi - m\xi_i) = \delta(\xi), \quad (4.117)$$

y en el caso de que el periodo $X_j \rightarrow \infty$, lo que se tiene es una señal no periódica, por lo que la representación se correspondería con un tren de deltas infinitesimalmente separadas como muestra la Fig. 4.16, por lo que se podría cambiar el término $m\xi_j$ por una variable continua ξ' ,

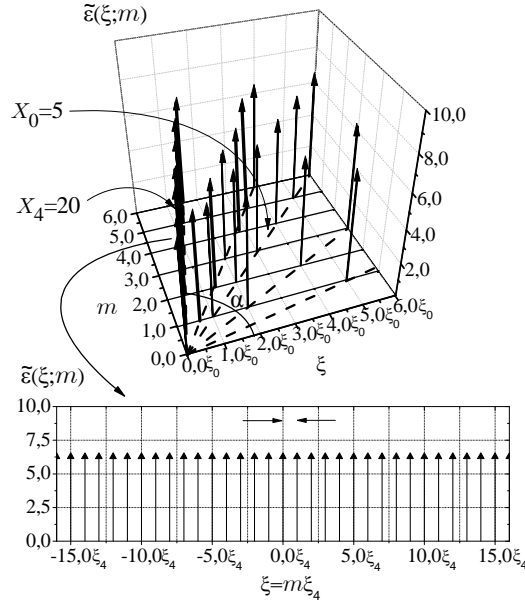


Figura 4.16: Arriba, representación en tres dimensiones de varios conjuntos $\varepsilon(\xi; m)$ para diferentes valores del periodo. Abajo, en dos dimensiones, representación para un valor concreto del periodo $X_4 = 20$.

Representando sobre una misma gráfica todas las funciones $\varepsilon(\xi; m)$ para distintos valores de m cuando el periodo de la señal tiende a infinito, $X_j \rightarrow \infty$, puede comprobarse como la separación entre deltas disminuye hasta hacerse infinitesimal, lo que correspondería, en el límite, con una función no periódica o de periodo infinito.

de forma que

$$\lim_{X_j \rightarrow \infty} \delta(\xi - m\xi_j) = \lim_{\xi_j \rightarrow 0} \delta(\xi - m\xi_j) = \delta(\xi - \xi'). \quad (4.118)$$

Es bastante evidente comprobar que no se cumple la igualdad (4.16) en la que

$$A\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = \tilde{A}\varepsilon^*(m; \xi), \quad (4.119)$$

donde se tiene que

$$\langle e(x; \xi), e(x; \xi') \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{j\xi x} e^{-j\xi' x} dx = 2\pi\delta(\xi - \xi') \Rightarrow A = 2\pi, \quad (4.120)$$

$$\langle \tilde{e}(x; m), \tilde{e}(x; m') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = X_0\delta(m - m') \Rightarrow \tilde{A} = X_0, \quad (4.121)$$

ya que

$$\varepsilon(m; \xi) = \text{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right), \quad (4.122)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = 2\pi\delta(\xi - m\xi_0), \quad (4.123)$$

y esto es debido a que los cálculos de $\varepsilon(m; \xi)$ y $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ no provienen del mismo producto escalar, ya que ambos productos escalares están definidos en espacios diferentes como se veía al principio. Sin embargo esta igualdad puede obtenerse en el caso de que hagamos tender X_0 a

infinito, ya que²⁶

$$\lim_{X_0 \rightarrow \infty} \tilde{A}\varepsilon^*(m; \xi) = \lim_{X_0 \rightarrow \infty} X_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) = 2\pi \delta(\xi - m\xi_0) = \tilde{\varepsilon}(\xi; m). \quad (4.124)$$

Finalmente, las ecuaciones del cambio de base para este caso particular son:

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1}{X_0} \langle e^{j\xi x}, e^{jm\xi_0 x} \rangle d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \langle e^{jm\xi_0 x}, e^{j\xi x} \rangle = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) 2\pi \delta(\xi - m\xi_0), \end{aligned} \quad (4.126)$$

es decir,

$$a(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi, \quad (4.127)$$

$$F(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0). \quad (4.128)$$

Para comprobar que estas ecuaciones son correctas, simplemente hay que introducir en (4.127) y (4.128) las expresiones del cálculo de los coeficientes vistas en (4.102) y (4.105) respectivamente para que, desarrollando las expresiones, se llegue al resultado conocido del cálculo del **DSF** y la **TF** de una señal. Entonces²⁷,

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2\pi}{X_0} P_{X_0}(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f(x) e^{-jm\xi_0 x} dx, \end{aligned} \quad (4.129)$$

que es el resultado esperado.

²⁶Hay que tener en cuenta que el cálculo de $\varepsilon(m; \xi)$ está normalizado por X_0 (valor de \tilde{A}), mientras que el de $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ no está normalizado por 2π (valor de A), por eso se multiplica a $\varepsilon(m; \xi)$ por X_0 y a $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ se considera como si ya estuviera ponderado por 2π .

²⁷Ver la demostración completa en el Ap. D.11.

Por otro lado, para comprobar el otro cambio de variable, según (4.128)²⁸,

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle}^{\infty} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \frac{2\pi}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle}^{\infty} f_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \delta(\xi - m\xi_0) dx = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx' \int_{x=\langle X_0 \rangle}^{\infty} f_0(x) e^{-j\xi x} dx = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) f_c(x) e^{-j\xi(x+x')} dx dx' = \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} f_0(u) e^{-j\xi u} du, \tag{4.130}
\end{aligned}$$

Por último resta comentar lo que significan realmente las expresiones del cambio de base (4.127) y (4.128). Es importante remarcar uno de los conceptos principales de este caso particular y es el de representar un mismo conjunto de señales (funciones complejas periódicas de periodo X_0 de variable continua, $f_0(x)$) en términos de dos bases, no sólo distintas, sino de diferente dimensión y pertenecientes a espacios distintos, ya que $e(x; \xi) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ y $\tilde{e}(x; m) \subset \mathcal{P}(X_0)$, es decir, considerar el conjunto inicial de funciones pertenecientes a espacios diferentes. Si bien es cierto que el álgebra definida en cada espacio es diferente y acorde con la definición propia del espacio, también es cierto que existe una relación entre esas bases aunque sean de dimensiones diferentes, ambas infinitas, pero una numerable y otra no numerable. Esta relación entre bases permite, no sólo desarrollar las expresiones del cambio de base para los coeficientes de una misma señal representados en una u otra base vistas anteriormente, sino también entender la relación existente para poder pasar de una dimensión a otra y de un espacio a otro.

La integral propuesta en (4.127), a pesar de parecer complicada en su realización, no significa más que un inventariado de $F(\xi)$. Teniendo en cuenta que estamos trabajando con señales periódicas $f_0(x)$ de periodo X_0 , $F(\xi)$, que es la **TF** de $f_0(x)$ estará expresada en términos de la transformada de Fourier de las funciones base que generan las señales periódicas de periodo X_0 , es decir, sólo se seleccionan las funciones base cuya pulsación sea un múltiplo entero de $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, por lo que vendrá representada por la modulación de un tren de deltas de periodo ξ_0 , algo de la forma

$$F(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(\xi - k\xi_0), \tag{4.131}$$

es decir, $F(\xi)$ siempre estará expresada en términos de distribuciones al ser $f_0(x)$ señales que no cumplen las condiciones para que tengan **TF** en términos de funciones ordinarias, ya que toda señal periódica no es absolutamente integrable ni siquiera de cuadrado integrable, es decir,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |f_0(x)| dx = \infty, \tag{4.132}$$

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |f_0(x)|^2 dx = \infty. \tag{4.133}$$

²⁸La demostración completa y detallada de este cambio de base se encuentra en el Ap. D.12.

Esto quiere decir que, al multiplicarlo por la función sinc $\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right)$, tan sólo habrá un valor no nulo en la delta que se encuentre en la posición $\xi = m\xi_0$, puesto que en el resto coincidirá con un valor en el que la sinc valdrá 0.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(\xi - k\xi_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}((k-m)\xi_0)\right) \delta(\xi - k\xi_0) = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}\left((k-m)\frac{2\pi}{X_0}\right)\right) \delta(\xi - k\xi_0) = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \operatorname{sinc}((k-m)\pi) \delta(\xi - k\xi_0) = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(k-m) \delta(\xi - k\xi_0) \tag{4.134}
\end{aligned}$$

debido a que la sinc es nula para múltiplos enteros de π distintos de 0. Al integrar este producto en ξ , se obtendrá el coeficiente que modulaba esa delta en la posición m ; así, para cada valor de m se encontrarían todos los coeficientes $a(m)$ que representan la señal $f_0(x)$ en la base $\tilde{e}(x; m) = e^{jm\xi_0 x}$,

$$\begin{aligned}
a(m) & = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(k-m) \delta(\xi - k\xi_0) d\xi = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(k-m) = \\
& = \frac{1}{2\pi} u(m). \tag{4.135}
\end{aligned}$$

De esta manera se pasa de una señal de variable continua, $F(\xi)$ a una de variable discreta, $a(m)$. El conjunto continuo de funciones discretas $\varepsilon(m; \xi)$ es el que permite pasar de una dimensión infinita no numerable a una dimensión infinita numerable a través de la suma continua en ξ , para cada m , de las funciones $\varepsilon(m; \xi)$ ponderadas por el valor de $F(\xi)$.

Por otro lado, la expresión (4.128) no es más que lo explicado anteriormente para la construcción de $F(\xi)$, es decir, la modulación de un tren de deltas por unos coeficientes. En este caso el tren de deltas proviene del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = \{2\pi\delta(\xi - m\xi_0)\}_m$ y la función que modula, es decir, los coeficientes por los que se pondera cada una de las deltas, corresponde con $a(m)$ que es el espectro de $f_0(x)$ en la base $\tilde{e}(x; m)$. Así, se encuentra la señal $F(\xi)$ de variable continua, que son los coeficientes de $f_0(x)$ en la base $e(x; \xi)$, pasando así de una señal en variable discreta a una señal en variable continua, con el conocimiento, eso sí, de que $F(\xi)$ será 0 para todos aquellos valores distintos de múltiplos enteros de la pulsación fundamental de la señal, es decir, en los valores en los que $\xi \neq m\xi_0 = \frac{2\pi m}{X_0}$. Este paso es posible realizarlo a través de la suma en m , para cada valor de ξ , del conjunto discreto de variable continua $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ ponderado por los valores de $a(m)$ para cada m .

Todo este desarrollo demuestra, no sólo la posibilidad de expresar un mismo conjunto de señales $f_0(x)$ en términos de bases diferentes, sino también de localizarlas dentro de espacios diferentes existiendo una relación matemática entre ellos, por lo que se generaliza aún más el concepto de cambio de base, no ya sólo dentro de un mismo espacio, sino también entre espacios diferentes,

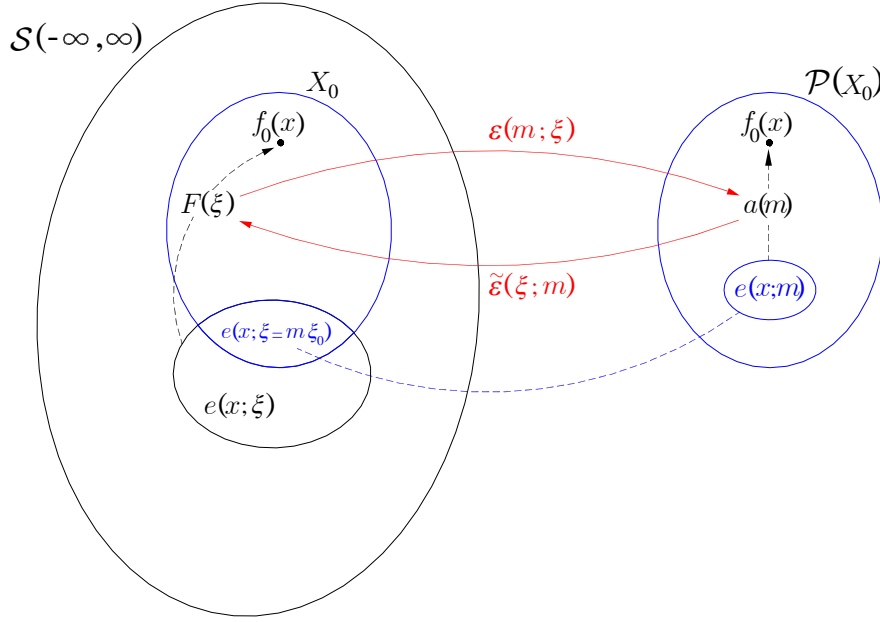


Figura 4.17: Representación del cambio de base de funciones periódicas de variable continua vistas desde el espacio $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ y desde el espacio $\mathcal{P}(X_0)$, junto con los conjuntos de funciones $\{\varepsilon(m; \xi)\}_\xi$ y $\{\tilde{\varepsilon}(\xi; m)\}_m$ necesarios para pasar de un espacio a otro.

siempre que sus bases generen el mismo conjunto de señales. Una explicación gráfica de este proceso es la que se puede ver en la Fig. 4.17.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.3 del Cap. 6.

4.5.5. Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$

En este espacio se consideran las funciones complejas de variable discreta $x(n)$, donde el producto escalar definido es

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n). \quad (4.136)$$

Para este espacio se pueden considerar dos conjuntos de funciones que jueguen el papel de una base. En primer lugar, el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$ con $n' \in \mathbb{Z}$, que identificaría el espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ con un espacio de dimensión infinita numerable, ya que $\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$; y en segundo lugar, el conjunto continuo de exponenciales complejas discretas que definen la **TF**, $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ con Ω perteneciente a cualquier intervalo de longitud 2π , que haría que se interpretara el espacio como uno de dimensión infinita pero no numerable, es decir, de dimensión $\text{card}(\{\Omega \in \langle 2\pi \rangle\}) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ²⁹.

Se estaría en una situación similar al caso particular del Apdo. 4.5.3 del espacio $\mathcal{P}(X_0)$, considerando el conjunto ideal de deltas de Dirac desplazadas con dimensión infinita no numerable, y el conjunto de las exponenciales complejas con dimensión infinita numerable, pero en este caso al revés, es decir, el conjunto que tiene dimensión infinita numerable es el ideal de las deltas de

²⁹Referirse a [102]-[104] sobre la teoría de conjuntos y su numerabilidad. Todas estas igualdades se dan si se acepta la hipótesis del continuo.

Kronecker desplazadas, y el que tiene dimensión infinita no numerable es el de las exponenciales complejas discretas. No debería resultar difícil comprender este intercambio ya que las deltas de Dirac se soportan sobre un dominio continuo mientras que las deltas de Kronecker sobre un dominio discreto, y, por otro lado, la relación entre las exponenciales complejas $e^{jm\xi_0x}$ y $e^{j\Omega n}$, a pesar de que si se representa cada uno de los conjuntos sobre ambas variables (x y m en el primer caso y n y Ω en el segundo) se obtendrían las mismas funciones, es importante resaltar que en el conjunto $\{e^{jm\xi_0x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ las funciones son de variable continua x enumeradas por un parámetro discreto m , mientras que el conjunto $\{e^{j\Omega n}\}_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle}$ son funciones de variable discreta n enumeradas por un parámetro continuo Ω .

Para resolver esta dicotomía sobre la dimensión, hay que tener en cuenta que cada una de las funciones $e^{j\Omega n}$ no es de cuadrado sumable, ya que

$$\|e^{j\Omega n}\|^2 = \langle e^{j\Omega n}, e^{j\Omega n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty, \quad (4.137)$$

por lo que realmente no es una base en sentido estricto sino una pseudobase, tal como se comentaba en el Apdo. 2.3.4, mientras que el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas sí se puede considerar como una base en términos estrictos ya que todas las funciones pertenecen al espacio y son de cuadrado sumable. El estudio de los Espacios de Hilbert Equipados en los Caps. 8 y 9 aportará una solución a este problema.

Aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general a este caso particular, se puede reconstruir una señal $x(n) \in \mathcal{D}(-\infty, \infty)$ como una combinación lineal generalizada de los elementos de la base ponderada por unos coeficientes como

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} d(n') \delta(n - n'), \quad (4.138)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (4.139)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{CL}_\mu \equiv \sum_{n'=-\infty}^{\infty}$ y $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} d\Omega$. Además, los coeficientes que reconstruyen la señal y que la identifican unívocamente una vez escogida la base, son la proyección ortogonal de la función original $x(n)$ sobre cada uno de los elementos de la base, así³⁰

$$d(n') = \mathbf{T}_\delta[x(n)] = \langle x(n), \delta(n - n') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n - n') = x(n'), \quad (4.140)$$

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)] = \langle x(n), e^{j\Omega n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}. \quad (4.141)$$

Puesto que los coeficientes $d(n')$ se identifican exactamente con la señal original $x(n)$ pero sobre el parámetro n' , a partir de ahora se considerarán los coeficientes bajo la \mathbf{T}_δ como la propia señal original sobre el parámetro n' . Es por esto que este caso particular escogiendo estos dos conjuntos de funciones base no tiene mucho interés, puesto que los coeficientes en una de las bases son los propios valores de la señal original, ya que la \mathbf{T}_δ es una transformada identidad y el conjunto de coeficientes que genera son los mismos que la señal original. Por otro lado, los coeficientes $X(\Omega)$ son un conjunto continuo de valores periódicos de periodo 2π . De esta manera se puede considerar esta función $X(\Omega)$ como una señal definida para todos los valores

³⁰El operador \mathbf{T}_δ identifica la transformada bajo la base ideal de deltas de Kronecker desplazadas.

$\Omega \in \mathbb{R}$, o solamente una función definida a lo largo de un intervalo de longitud 2π , puesto que ese intervalo ya contiene la información necesaria para reconstruir la señal original $x(n)$. Dado que, por norma general, estos coeficientes se consideran como una función periódica de periodo 2π , utilizaremos la función $X(\Omega)$ como una función periódica 2π definida para todos los valores $\Omega \in \mathbb{R}$ (salvo posibles singularidades).

Para encontrar las expresiones del cambio de base, simplemente hay que particularizar las ecuaciones (4.20) y (4.21) a este caso particular, así

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\mu') &= \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow \\ \Rightarrow X(\Omega) &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \langle \delta(n-n'), e^{j\Omega n} \rangle,\end{aligned}\quad (4.142)$$

$$\begin{aligned}\alpha(\mu) &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow \\ \Rightarrow x(n') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) \langle e^{j\Omega n}, \delta(n-n') \rangle d\Omega,\end{aligned}\quad (4.143)$$

donde, desarrollando los productos escalares interiores se obtiene

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mu'; \mu) &\equiv \varepsilon(\Omega; n') = \langle \delta(n-n'), e^{j\Omega n} \rangle = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n') e^{-j\Omega n} = \\ &= e^{-j\Omega n'}\end{aligned}\quad (4.144)$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') &\equiv \tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = \langle e^{j\Omega n}, \delta(n-n') \rangle = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} \delta(n-n') = \\ &= e^{j\Omega n'}\end{aligned}\quad (4.145)$$

representados en las Figs. 4.18 y 4.19, respectivamente. Es importante remarcar que el conjunto $\varepsilon(\Omega; n')$ es un conjunto de funciones de variable continua descritos mediante un parámetro discreto, mientras que el conjunto $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega)$ son funciones de variable discreta descritas mediante un parámetro continuo. De esta manera, estos conjuntos de funciones permiten realizar el cambio de base y pasar de unos coeficientes descritos mediante una variable discreta a unos coeficientes descritos mediante una variable continua y viceversa.

Resulta sencillo comprobar, además, la igualdad (4.16), en la que

$$A\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \tilde{A}\varepsilon^*(\mu'; \mu), \quad (4.146)$$

siendo³¹

$$\langle \delta(n-n'), \delta(n-n'') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n') \delta(n-n'') = \delta(n'-n'') \Rightarrow A = 1, \quad (4.147)$$

$$\langle e^{j\Omega n}, e^{j\Omega' n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} e^{-j\Omega' n} = 2\pi \delta_0(\Omega - \Omega') \Rightarrow \tilde{A} = 2\pi, \quad (4.148)$$

³¹La demostración del sumatorio (4.148) puede verse en el Ap. D.6, donde el periodo de la señal es, en este caso, 2π .

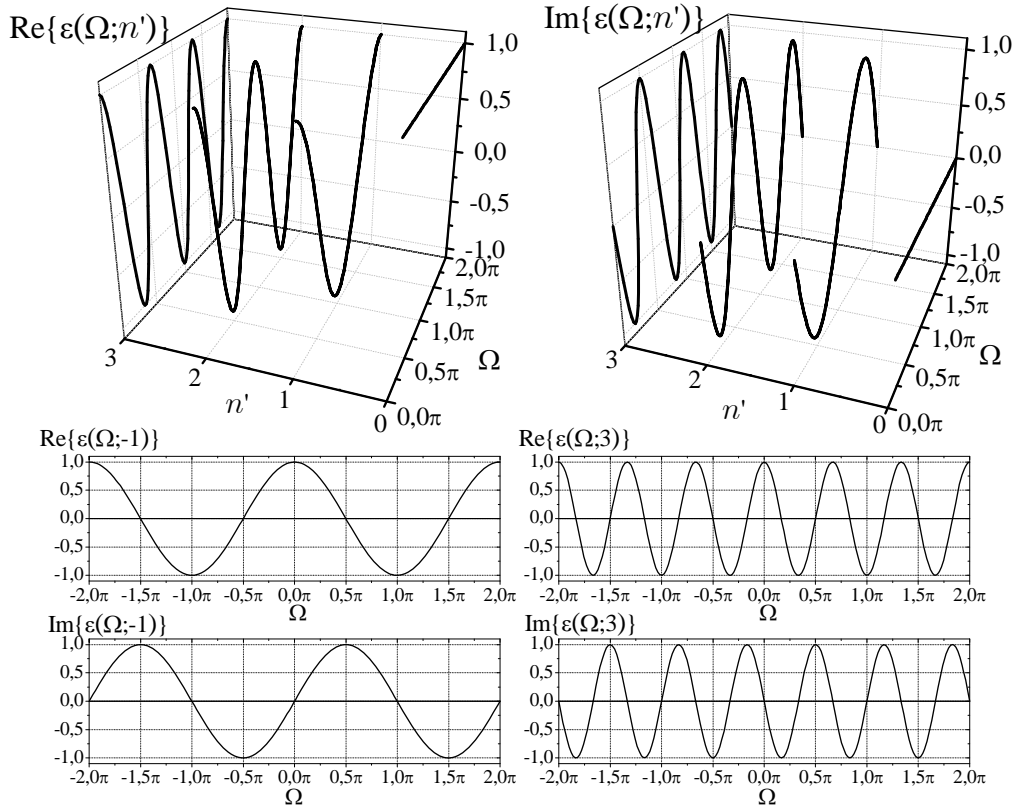


Figura 4.18: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\varepsilon(\Omega; n')$ y dos particularizaciones para $n' = -1$ y $n' = 3$.

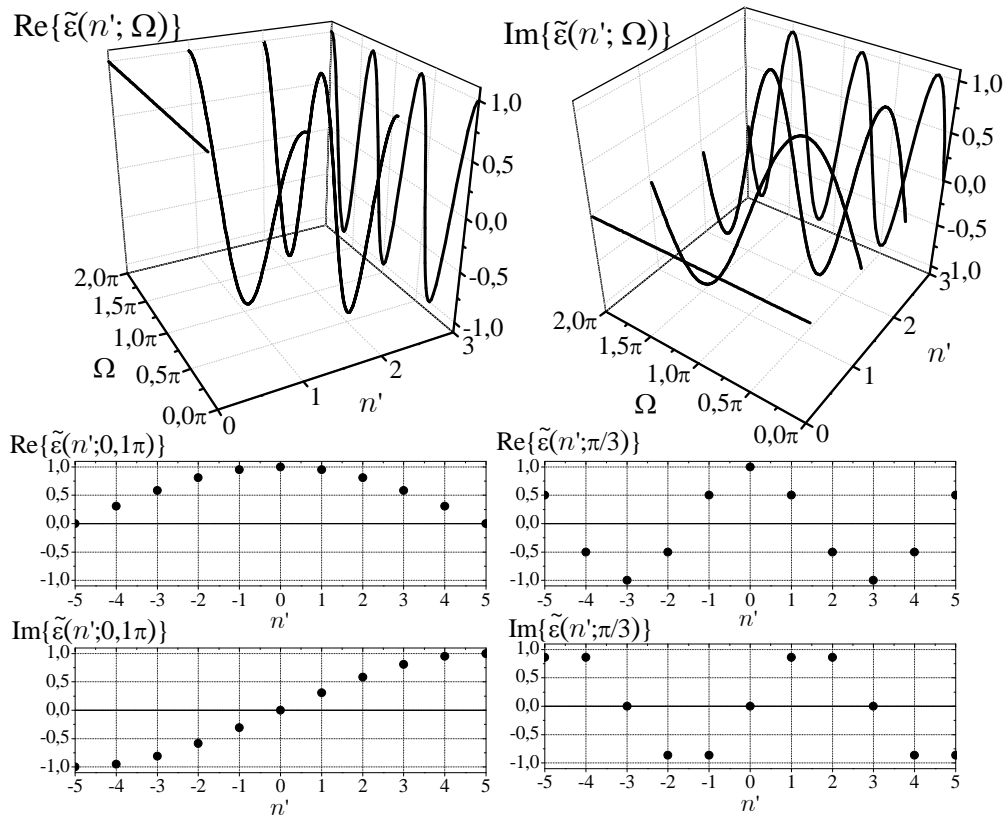


Figura 4.19: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega)$ y dos particularizaciones para $\Omega = 0, 1\pi$ y $\Omega = \frac{\pi}{3}$.

así³²,

$$A\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = e^{j\Omega n'} = \varepsilon^*(\Omega; n'). \quad (4.149)$$

Finalmente, las expresiones del cambio de base para este caso particular entre la base ideal de deltas de Kronecker desplazadas y las exponenciales complejas que definen la **TF** son

$$X(\Omega) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\Omega n'}, \quad (4.150)$$

$$x(n') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=(2\pi)} X(\Omega) e^{j\Omega n'} d\Omega. \quad (4.151)$$

Realmente, como puede comprobarse, este par de ecuaciones no son más que las definiciones bien conocidas de la **TF**⁻¹ y la **TF** de señales de variable discreta, respectivamente, dado que, como se había comentado antes, la base ideal de deltas de Kronecker desplazadas no aporta gran información al análisis de una señal en el dominio espectral bajo esa base, ya que los coeficientes son la misma señal identificados bajo otro parámetro. Es por esto que no se dedicará un gran análisis a este caso particular de cambio de base.

Es fácil comprobar que las ecuaciones (4.150)-(4.151) son correctas, no sólo porque sean la definición de la **TF**⁻¹ y la **TF**, es decir, operadores inversos, sino porque se puede comprobar fácilmente como, a partir de la definición (4.140) para el cálculo de los coeficientes $x(n')$ sobre la base $e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$, se llega a

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\Omega n'} = \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n - n') e^{-j\Omega n'} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(n - n') e^{-j\Omega n'} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

que es la definición original del cálculo de los coeficientes $X(\Omega)$ sobre la base $\tilde{e}(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega}$. De la misma manera, a partir de la definición (4.141) para el cálculo de los coeficientes $X(\Omega)$

³² Hay que tener en cuenta que el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega)$ está normalizado por 1 (valor de A), mientras que el de $\varepsilon(\Omega; n')$ no está normalizado por 2π (valor de \tilde{A}), por eso se multiplica a $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega)$ por A y a $\varepsilon(\Omega; n')$ se considera como si ya estuviera ponderado por 2π . Esta normalización se encuentra, después, en la expresión de la **TF** inversa, es decir, en la reconstrucción de la señal original como una combinación lineal de la base ponderada por unos coeficientes.

sobre la base $\tilde{e}(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$, se obtiene³³

$$\begin{aligned}
x(n') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n'} d\Omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} e^{j\Omega n'} d\Omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} e^{-j\Omega(n-n')} d\Omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) 2\pi \delta(n-n') = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n-n'), \tag{4.153}
\end{aligned}$$

que es la definición original del cálculo de $x(n')$ a partir de la base de deltas de Kronecker y la señal original.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.4 del Cap. 6.

4.5.6. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I

Consideremos el conjunto de las funciones complejas de variable discreta $x_0(n)$ periódicas de periodo N_0 . Este conjunto de funciones se puede considerar dentro del espacio de funciones discretas $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ como un subespacio de éste, en el que se tiene definido el producto escalar visto en (4.136)

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n), \tag{4.154}$$

y la base escogida para este espacio sería el conjunto de las exponenciales complejas discretas determinadas por un parámetro continuo $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ que definen la transformada de Fourier en variable discreta, **TF**. Según esta base, la dimensión de este espacio vendría definida por el enumerador $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, es decir, dimensión infinita no numerable, aunque, como se ha visto en el Apdo. 4.5.5, este conjunto no se corresponde con una base sino con una pseudobase. Cada señal podrá ser representada en términos de esta base a través de una combinación lineal generalizada, siendo

$$x_0(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega, \tag{4.155}$$

donde la combinación lineal en este caso es $\mathbf{CL}_\mu \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} d\Omega$ y los coeficientes $X(\Omega)$ son los calculados a partir de la proyección ortogonal de la función original $x_0(n)$ sobre cada uno de los elementos de la base,

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x_0(n)] = \langle x_0(n), e^{j\Omega n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-j\Omega n}, \tag{4.156}$$

donde $X(\Omega)$ será una función de variable continua periódica de periodo 2π .

³³La demostración de la integral de la exponencial compleja puede verse desarrollada en la ecuación (D.68) del Ap. D.10, donde $K = 1$, $m = n - n'$ y $X_0 = 2\pi$.

Por otro lado, se puede ver este conjunto de funciones como el espacio de las funciones periódicas de periodo N_0 , $\mathcal{D}(N_0)$, que tiene definido el siguiente producto escalar

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n) \quad (4.157)$$

y donde se puede escoger el conjunto de funciones base $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$, es decir, el conjunto de las exponenciales complejas discretas enumeradas por un parámetro también discreto que varía a lo largo de N_0 valores, $k \in \langle N_0 \rangle$ y que identifica un múltiplo entero de la pulsación fundamental de la señal, ya que $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, y que definen el desarrollo en serie de Fourier discreto, **DSF**³⁴. La dimensión de este espacio viene determinada por el número de valores que puede tomar el parámetro k que, en este caso, será finito y de valor N_0 . Cada señal $x_0(n)$ podrá ser expresada como una combinación lineal de los elementos de la base, ponderados por unos coeficientes

$$x_0(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n}, \quad (4.158)$$

donde, en este caso, la combinación lineal no es más que una suma finita, $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{k=\langle N_0 \rangle}$ y los coeficientes $a(k)$ son la proyección ortogonal de la señal $x_0(n)$ sobre cada uno de los elementos de la base y normalizada por el periodo N_0 ,

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \frac{1}{N_0} \langle x_0(n), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \quad (4.159)$$

donde los coeficientes $a(k)$ están definidos de manera discreta para N_0 valores diferentes, por lo que se puede periodificar $a(k)$ y considerarla definida para todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$, siendo, al igual que la señal original $x_0(n)$, una función discreta periódica de periodo N_0 .

Una vez definidos los dos conjuntos de funciones base podemos pasar a buscar cuáles son las ecuaciones que relacionan una base con la otra, de manera que se puede ejecutar un cambio entre estas dos bases, para conocer los coeficientes de una señal en una base, a partir de los coeficientes de la señal en la otra base. Aplicando las ecuaciones del cambio de base (4.20) y (4.21), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) \frac{1}{N_0} \langle e^{j\Omega n}, e^{jk\Omega_0 n} \rangle d\Omega, \quad (4.160)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow X(\Omega) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{j\Omega n} \rangle. \quad (4.161)$$

³⁴En algunas referencias bibliográficas [122]-[123], se refieren a esta transformada como la Transformada Discreta de Fourier, **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), pero suele estar referida a secuencias discretas finitas, que son ampliamente utilizadas por ser las únicas de las que se puede hacer la transformada de Fourier de forma numérica computacionalmente sin ningún tipo de error numérico; sin embargo aquí estamos considerando secuencias periódicas y, por tanto, infinitas. La relación existente para poder llamar a ambas transformaciones de igual manera y que pudiera llevar a confusión es el hecho de que el cálculo de la transformada de Fourier de una señal periódica es el mismo que el de una secuencia finita, ya que de la periódica sólo se escoge un periodo (por tanto con un número finito de valores) y el resultado vuelve a ser una señal discreta periódica de la que, por tanto, se puede extraer una secuencia finita con toda la información necesaria de la señal. Salvo que se indique lo contrario, en adelante, se denotará el desarrollo de la transformada de Fourier para señales discretas periódicas definido en (4.159) como **DSF**.

Desarrollando los productos escalares internos se tiene que³⁵³⁶

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mu'; \mu) &\equiv \varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} \left\langle e^{j\Omega n}, e^{jk\Omega_0 n} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j\Omega n} e^{-jk\Omega_0 n} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j(\Omega - k\Omega_0)n} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j(\Omega - k\Omega_0)n} = \\
&= \frac{1}{N_0} \frac{1 - e^{j(\Omega - k\Omega_0)N_0}}{1 - e^{j(\Omega - k\Omega_0)}} = \\
&= \frac{1}{N_0} \frac{e^{j(\Omega - k\Omega_0)\frac{N_0}{2}} \left(e^{-j(\Omega - k\Omega_0)\frac{N_0}{2}} - e^{j(\Omega - k\Omega_0)\frac{N_0}{2}} \right)}{e^{j(\Omega - k\Omega_0)\frac{1}{2}} \left(e^{-j(\Omega - k\Omega_0)\frac{1}{2}} - e^{j(\Omega - k\Omega_0)\frac{1}{2}} \right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} \tag{4.162}
\end{aligned}$$

siendo un conjunto de funciones discretas de variable k descritas por un parámetro continuo $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$. Un subconjunto interesante de este conjunto es el que tiene por parámetro Ω un múltiplo de la pulsación fundamental de la señal $x_0(n)$, es decir, $\Omega = m\Omega_0 = m\frac{2\pi}{N_0}$, con $m \in \langle N_0 \rangle$, así $\varepsilon(k; m\Omega_0)$ es³⁷

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k; m\Omega_0) &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} (-1)^r e^{-jr\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin(r\pi)}{\sin\left(r\frac{\pi}{N_0}\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} (-1)^{pN_0} (-1)^p \frac{\sin(pN_0\pi)}{\sin(p\pi)} = \\
&= \delta_0(k - m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - m - pN_0), \tag{4.163}
\end{aligned}$$

es decir, un tren de deltas de Kronecker de periodo N_0 . Esto quiere decir, que, de todas las funciones $e^{j\Omega n}$, aquéllas que tienen una pulsación múltiplo de la pulsación fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ de la señal periódica $x_0(n)$, hacen que $\varepsilon(k; \Omega)$ sea nula en todos sus puntos salvo en la posición

³⁵A pesar de que el producto escalar (4.157) está definido para funciones periódicas de periodo N_0 y $e^{j\Omega n}$, para cada Ω , en general no lo es, se puede realizar igualmente dicho producto escalar tal como está definido, observando los resultados obtenidos posteriormente para cada valor de Ω .

³⁶Por simplicidad, se escoge el intervalo de N_0 valores de variabilidad de n entre 0 y $N_0 - 1$. De escoger cualquier otro intervalo de variación de n entre $n = t$ y $n = t + N_0 - 1$, simplemente se produciría un cambio de fase en la expresión final de $\varepsilon(k; \Omega)$, siendo esta fase $e^{j\left(t + \frac{N_0-1}{2}\right)(\Omega - k\Omega_0)}$.

Algunos cálculos posteriores dependerán de esta consideración, aunque se explicará brevemente, al igual que en esta aclaración, el resultado que se obtendría al realizar el sumatorio en otro intervalo de variación de n entre $n = t$ y $n = t + N_0 - 1$.

³⁷Se pueden ver los detalles de la demostración completa en el Ap. D.13.

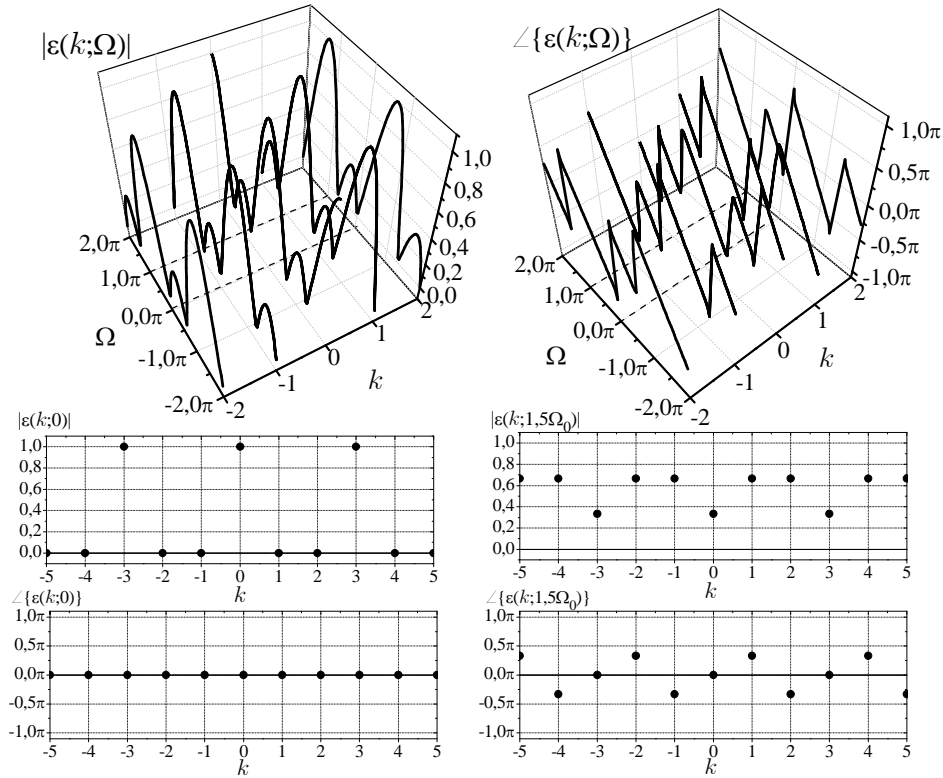


Figura 4.20: Representación del módulo y fase del conjunto $\varepsilon(k; \Omega)$ con $N_0 = 3$ y dos particularizaciones para $\Omega = 0$ y $\Omega = 1,5\Omega_0$. Todas son periódicas de periodo $N_0 = 3$. Puede comprobarse como al tomar valores de Ω múltiplos enteros de Ω_0 , la función que queda $\varepsilon(k; m\Omega_0)$ es real y sólo es no nula en los valores de $k = m \pm tN_0$ con $t \in \mathbb{Z}$.

correspondiente a ese múltiplo de la pulsación fundamental (periodificada con un periodo N_0).³⁸ como puede verse en la Fig. 4.20.

³⁸De haber hecho el sumatorio para un intervalo de variación de n entre $n = t$ y $n = t + N_0 - 1$, aún siendo el resultado de $\varepsilon(k; \Omega)$ distinto por el cambio de fase comentado en la nota al pie de página número 36, para los valores múltiplos de la pulsación fundamental y para $r = m - k = pN_0$, el cambio del sumatorio no influirá ya que

$$e^{j(m\Omega_0 - k\Omega_0)(t + \frac{N_0 - 1}{2})} = e^{jr(t + \frac{N_0 - 1}{2})\frac{2\pi}{N_0}} = e^{jpN_0 t \frac{2\pi}{N_0}} e^{jr\frac{N_0 - 1}{2}\Omega_0} = e^{jr\frac{N_0 - 1}{2}\Omega_0} = e^{j(m - k)(\frac{N_0 - 1}{2})\Omega_0}. \quad (4.164)$$

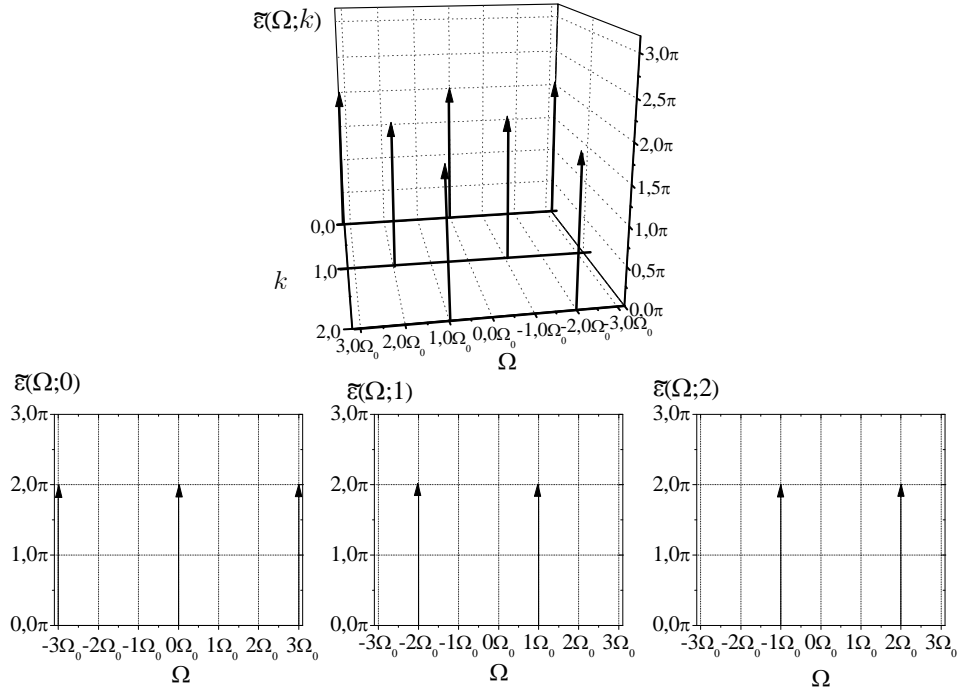


Figura 4.21: Representación del conjunto $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ con $N_0=3$ y tres particularizaciones para $k=0$, $k=1$ y $k=2$. Todas son periódicas de periodo $\Omega = 2\pi = 3\Omega_0$. Realmente sólo existen estas tres funciones, puesto que el valor de k sólo tiene variación en un intervalo de longitud $N_0=3$, así que cualquier otra particularización para un valor de k distinto daría como resultado alguna de estas tres funciones.

Por el otro lado,

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') &\equiv \tilde{\varepsilon}(\Omega; k) = \left\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{j\Omega n} \right\rangle = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 n} e^{-j\Omega n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - \Omega)n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 \left(k - \frac{\Omega}{\Omega_0}\right)n} = \\
&= N_0 \delta_0 \left(k - \frac{\Omega}{\Omega_0}\right) = \\
&= N_0 \delta_0 \left(\frac{k\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0}\right) = \\
&= \frac{N_0}{\Omega_0} \delta_0(k\Omega_0 - \Omega) = \\
&= 2\pi \delta_0(\Omega - k\Omega_0), \tag{4.165}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta el desarrollo del sumatorio de exponenciales que aparece demostrado en el Ap. D.6 del Apéndice sobre demostraciones matemáticas, con $X_0 = N_0$. Se trata, por tanto, de un conjunto de señales de variable continua Ω descritas por un parámetro discreto

$k \in \langle N_0 \rangle$, como puede verse en la Fig. 4.21, y periódicas de periodo 2π , ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - (\Omega + 2\pi l))n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - \Omega - 2\pi l)n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - \Omega)n - j2\pi ln} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - \Omega)n} e^{-j2\pi ln} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(k\Omega_0 - \Omega)n}, \tag{4.166}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega, k) = 2\pi\delta_0(\Omega - k\Omega_0) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m). \tag{4.167}$$

La comprobación, en este caso, de la igualdad en la ecuación (4.16),

$$A\tilde{\varepsilon}(\Omega; k) = \tilde{A}\varepsilon^*(k; \Omega), \tag{4.168}$$

siendo

$$\langle e(n; \Omega), e(n; \Omega') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} e^{-j\Omega' n} = 2\pi\delta_0(\Omega - \Omega') \Rightarrow A = 2\pi, \tag{4.169}$$

$$\langle \tilde{e}(n; k), \tilde{e}(n; k') \rangle = \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} e^{jk\Omega_0 n} e^{-jk'\Omega_0 n} = N_0\delta(k - k') \Rightarrow \tilde{A} = N_0, \tag{4.170}$$

no resulta sencilla, ya que, como puede observarse fácilmente, las expresiones de $\varepsilon(k; \Omega)$ y $\tilde{\varepsilon}(\Omega, k)$ no se parecen, puesto que

$$\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}, \tag{4.171}$$

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega, k) = 2\pi\delta_0(\Omega - k\Omega_0). \tag{4.172}$$

Esto es debido a que el cálculo de $\varepsilon(k; \Omega)$ y $\tilde{\varepsilon}(\Omega, k)$ provienen de productos escalares diferentes, para señales periódicas en el primero y para señales no periódicas en el segundo. Sin embargo, haciendo que la periodicidad en el primer caso tienda a infinito, es decir, $N_0 \rightarrow \infty$, se tiene el resultado esperado³⁹

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \tilde{A}\varepsilon(k; \Omega) = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} = 2\pi\delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \tilde{\varepsilon}^*(\Omega; k). \tag{4.173}$$

Finalmente, las ecuaciones del cambio de base para este caso particular son:

$$\boxed{a(k) = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega,} \tag{4.174}$$

³⁹ Hay que tener en cuenta que el cálculo de $\varepsilon(k; \Omega)$ está normalizado por N_0 , mientras que $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ no lo está por 2π , por eso, al realizar los cálculos para comprobar la igualdad, $\varepsilon(k; \Omega)$ sí hay que multiplicarlo por N_0 , mientras que $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ no hay que multiplicarlo por 2π , ya que ese factor ya aparece por la no normalización en su cálculo. Ese factor se refleja posteriormente en la expresión de la combinación lineal, en este caso, la integral sobre Ω .

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k \in \langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0). \quad (4.175)$$

Estas dos ecuaciones representan, no sólo la relación entre los coeficientes de una señal discreta periódica $x_0(n)$ en una base o en otra, sino también la forma de pasar de una base enumerada por un parámetro continuo a una de parámetro discreto y finito y viceversa. Hay que tener en cuenta una de las consideraciones que se tenía al principio: a pesar de estar considerando siempre señales discretas periódicas $x_0(n)$, en un caso las vemos como elementos del espacio de señales discretas $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ escogiendo la base $e(n; \Omega)$, que es una base de infinitos elementos, y en el otro caso, se consideran las funciones $x_0(n)$ como elementos del espacio de señales discretas periódicas de periodo N_0 , $\mathcal{D}(N_0)$, escogiendo la base $\tilde{e}(n; k)$, que es una base de finitos elementos. Esto quiere decir que no sólo es posible realizar el cambio de base entre diferentes bases seleccionadas dentro de un mismo espacio, sino que también es posible considerar un mismo conjunto de funciones dentro de espacios diferentes, con su álgebra propia definida para cada espacio, así, las ecuaciones del cambio de base representan la relación biunívoca entre los coeficientes de la misma señal representada en diferentes bases de espacios distintos, incluso aunque estas bases sean de dimensiones diferentes.

De forma simplificada, lo que intuitivamente hace la ecuación (4.174) es lo siguiente: dado que se está trabajando siempre con señales discretas periódicas $x_0(n)$ de periodo N_0 , la **TF**, $X(\Omega)$, vendrá expresada en términos de las funciones base $e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ que generan señales periódicas de periodo N_0 , es decir, de todos aquéllos valores del continuo $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, sólo serán necesarios los que sean un múltiplo de la pulsación fundamental de la señal, es decir aquéllos que cumplan que $\Omega = k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N_0}$ para $k \in \langle N_0 \rangle$, por tanto $X(\Omega)$ vendrá expresado como una suma de deltas de Dirac ponderada por unos coeficientes localizadas en los valores $\Omega = k\Omega_0$ y periodificada 2π . Por otro lado, el factor $e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}$, visto desde la variable Ω , no es más que una ventana centrada en $\Omega = k\Omega_0$, para cada $k \in \langle N_0 \rangle$ y periódica 2π , lo que hace que, al multiplicarlo por $X(\Omega)$, tan sólo se seleccione una delta de cada periodo, que, al ser periódica es del mismo valor, y, al integrarlo en un periodo, el resultado sea precisamente el valor de amplitud de esa delta de Dirac, es decir, el coeficiente, como se había comentado antes, que pondera esa delta en esa posición. El factor $\frac{1}{2\pi N_0}$ simplemente realiza una normalización.

La ecuación (4.175) es de más fácil interpretación, puesto que, conocidos los N_0 valores de $a(k)$, lo que simplemente se hace es modular un tren periódico de deltas de Dirac por estos valores y ponderarlos por 2π . Dado que el tren de deltas es periódico 2π con deltas en las posiciones $\Omega = k\Omega_0$ con $k \in \langle N_0 \rangle$, existen, por periodo, N_0 deltas, por lo que el conjunto de N_0 valores de $a(k)$ permite modular totalmente el tren de deltas construyendo de manera perfectamente definida la señal de variable continua $X(\Omega)$ de periodo 2π .

Para comprobar que tanto (4.174) como (4.175) son las correctas ecuaciones del cambio de variable, simplemente hay que introducir en (4.174) la expresión del cálculo de $X(\Omega)$ definida en (4.156) para obtener la expresión del cálculo de $a(k)$; y viceversa, introduciendo la expresión (4.159) donde se define el cálculo de $a(k)$ en (4.175), se debe obtener la expresión de $X(\Omega)$.

Así, por un lado⁴⁰,

$$a(k) = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-j\Omega n} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \bar{P}_{N_0}(n) = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \\ &= \mathbf{DSF}[x_0(n)], \end{aligned} \quad (4.177)$$

donde⁴¹

$$\bar{P}_{N_0}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N_0 \\ 0 & n < 0, n \geq N_0. \end{cases} \quad (4.179)$$

Y, por otro lado⁴²,

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} \frac{1}{2\pi} \mathbf{TF} \left[e^{jk\Omega_0 m} \right] = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega m} N_0 \mathbf{DSF} \left[e^{jm\Omega_0 k} \right] = \\ &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega m} \delta_0(n - m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_0(m) e^{-j\Omega m} = \\ &= \mathbf{TF}[x_0(n)], \end{aligned} \quad (4.180)$$

como se quería probar.

⁴⁰Ver la demostración completa en el Ap. D.14.

⁴¹Hay que recordar que el cálculo de $\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}$, estaba definido por un sumatorio variando n entre $n = 0$ y $n = N_0 - 1$. En el caso de haberlo calculado para un intervalo de variación de n entre $n = t$ y $n = t + N_0 - 1$, el resultado, visto en la nota al pie 36, sería $\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\left(t + \frac{N_0-1}{2}\right)(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}$, por lo que, al hacer la integral, el resultado quedaría

$$\mathbf{TF}^{-1} \left[e^{-j\left(t + \frac{N_0-1}{2}\right)\Theta} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}\Theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Theta\right)} \right] = \bar{P}_{N_0}(n - t), \quad (4.178)$$

y el sumatorio final variaría entre $n = t$ y $n = t + N_0 - 1$, es decir, en un periodo N_0 , por lo que el resultado final no varía.

⁴²Ver demostración completa y sus detalles en el Ap. D.15.

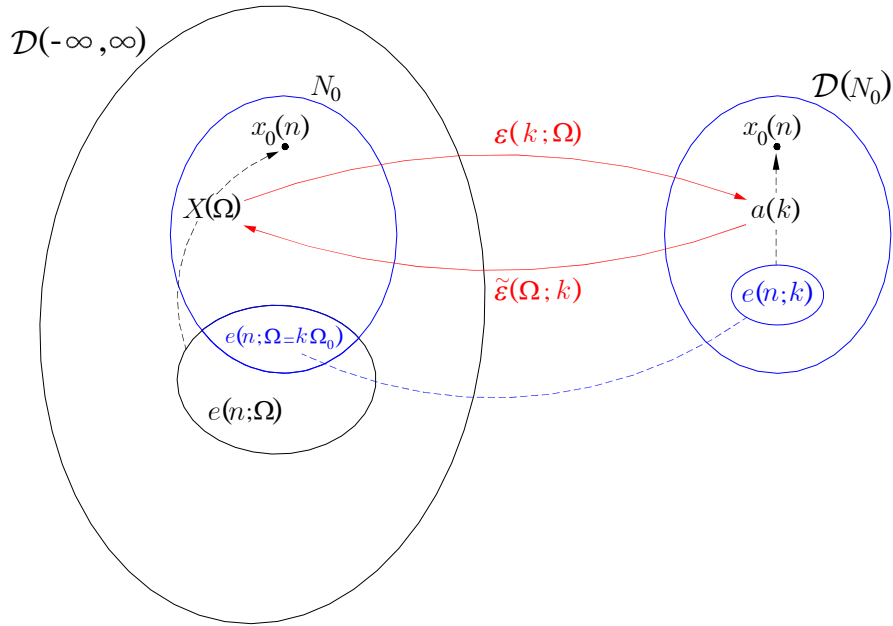


Figura 4.22: Representación del cambio de base de funciones periódicas de variable discreta vistas desde el espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ y desde el espacio $\mathcal{D}(N_0)$, junto con los conjuntos de funciones $\varepsilon(k; \Omega)$ y $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ necesarios para pasar de un espacio a otro.

Similar al caso particular del Apdo. 4.5.4, donde se analizaban las funciones $f_0(x)$ de variable continua periódicas de periodo X_0 que se localizaban en dos espacios diferentes ($\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ y $\mathcal{P}(X_0)$) y se encontraba la relación para realizar el cambio de base de estas señales entre espacios diferentes, en este caso particular de funciones de variable discreta $x_0(n)$ periódicas de periodo N_0 sucede algo semejante: se demuestra que no sólo es posible expresar un mismo conjunto de señales $x_0(n)$ en términos de bases diferentes y encontrar la relación entre los coeficientes que la describen en una y otra base, además, en este caso, una de las bases está determinada por un conjunto infinito no numerable de elementos mientras que la otra por un conjunto finito, sino que también es posible localizar estas señales dentro de espacios diferentes, con su álgebra propia definida en cada espacio, existiendo una relación matemática y unívoca entre ellos, por lo que se generaliza aún más el concepto de cambio de base, no ya sólo dentro de un mismo espacio, sino también entre espacios diferentes, siempre que sus bases generen el mismo conjunto de señales. Una explicación gráfica de este proceso es la que se puede ver en la Fig. 4.22.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.5 del Cap. 6.

4.5.7. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II

Para este mismo conjunto de funciones discretas $x_0(n)$ periódicas de periodo N_0 , se puede considerar otro par de conjuntos de funciones base, una vista desde el espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ y otra dentro del espacio $\mathcal{D}(N_0)$. Por un lado consideremos el conjunto infinito numerable de deltas de Kronecker desplazadas $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$, base del espacio de señales discretas $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$, y por otro, el mismo conjunto considerado anteriormente como base del espacio $\mathcal{D}(N_0)$, $\tilde{e}(\tau; \mu) \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$, es decir, el conjunto finito de exponenciales complejas que definen el desarrollo en serie de Fourier. Las definiciones de los productos escalares para

cada espacio son las mismas que en (4.136) y (4.157), así para $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ es

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n), \quad (4.181)$$

y para $\mathcal{D}(N_0)$ es

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n). \quad (4.182)$$

Para cada una de las bases, la señal $x_0(n)$ se podrá expresar como una combinación lineal de los elementos de la base por unos coeficientes, tal como mostraba la ecuación (2.16) del resumen de la teoría general en la Secc. 2.3.3, así,

$$x_0(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') \delta(n - n'), \quad (4.183)$$

$$x_0(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n}, \quad (4.184)$$

de donde se deduce que $\mathbf{CL}_\mu \equiv \sum_{n'=-\infty}^{\infty}$ y $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{k=\langle N_0 \rangle}$. Por otro lado, los coeficientes necesarios para reconstruir la señal $x_0(n)$ en términos de una combinación lineal de la base son proporcionales a la proyección de la función original sobre cada uno de los elementos de la base⁴³, es decir,

$$p(n') = \mathbf{T}_\delta[x_0(n)] = \langle x_0(n), \delta(n - n') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \delta(n - n') = x_0(n'), \quad (4.185)$$

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \frac{1}{N_0} \langle x_0(n), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \quad (4.186)$$

de donde se puede observar que, para el caso de la base ideal generada por las deltas de Kronecker desplazadas, los coeficientes $p(n')$ no son más que la señal original $x_0(n)$ evaluada en n' , por lo que este caso no tiene mucho interés. Sin embargo se lleva a cabo su estudio debido a que se está analizando el cambio de base entre dos bases diferentes y de distinta dimensión. Por un lado la base formada por el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas tiene dimensión infinita numerable, ya que $\{\delta(n - n')\}_{n' \in \mathbb{Z}}$ está descrito por un parámetro discreto infinito, mientras que la base formada por las exponenciales complejas tiene dimensión finita, puesto que $\{e^{jk\Omega_0 n}\}_{k \in \langle N_0 \rangle}$ está descrito por un parámetro que varía para N_0 valores diferentes. A pesar de que el parámetro k sólo tome N_0 valores diferentes y, por tanto, sólo existan N_0 coeficientes diferentes $a(k)$, esta función se puede periodificar con un periodo N_0 de forma que se pueda obtener una función discreta periódica $a(k)$ de periodo N_0 , de la misma manera que $x_0(n)$ y $p(n') = x_0(n')$.

Para encontrar las ecuaciones del cambio de base, no hay más que aplicar las expresiones (4.20) y (4.21) a este caso particular, así

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow a(k) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') \frac{1}{N_0} \langle \delta(n - n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle, \quad (4.187)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow p(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta(n - n') \rangle. \quad (4.188)$$

⁴³El operador \mathbf{T}_δ indica la transformada sobre la base de deltas desplazadas.

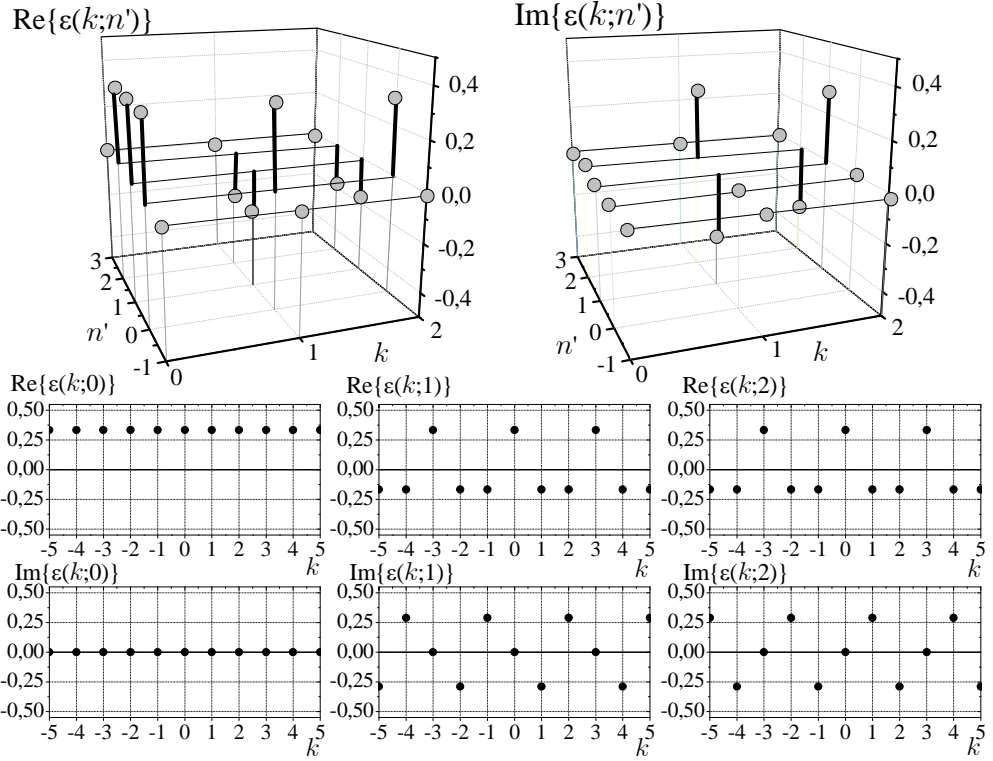


Figura 4.23: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\varepsilon(k; n')$ y tres particularizaciones para $n' = 0$, $n' = 1$ y $n' = 2$. Para el resto de valores de n' la función valdrá 0 para todo valor de k .

Desarrollando los productos escalares, se obtiene, por un lado⁴⁴

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mu'; \mu) &= \varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} \langle \delta(n - n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} \delta(n - n') e^{-jk\Omega_0 n} = \begin{cases} \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} & \text{si } n' \in \langle N_0 \rangle \\ 0 & \text{si } n' \notin \langle N_0 \rangle \end{cases} = \\
&= \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'), \tag{4.189}
\end{aligned}$$

siendo $\bar{P}_{N_0}(n')$ un pulso discreto unitario de ancho N_0 . Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') &= \tilde{\varepsilon}(n'; k) = \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta(n - n') \rangle = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 n} \delta(n - n') = \\
&= e^{jk\Omega_0 n'}, \tag{4.190}
\end{aligned}$$

como se muestran en las Figs. 4.23 y 4.24, respectivamente.

Puesto que el cálculo de $\varepsilon(k; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ provienen de diferentes productos escalares, no será posible comprobar la igualdad propuesta en (4.16),

$$A\tilde{\varepsilon}(n'; k) = \tilde{A}\varepsilon^*(k; n'), \tag{4.191}$$

⁴⁴A pesar de que para el cálculo de $\varepsilon(k; n')$ se realiza un producto escalar de funciones periódicas de periodo N_0 y $\delta(n - n')$ no lo es, el cálculo se lleva a cabo igualmente, obteniendo un resultado que dependerá del valor de n' , es decir, de dónde esté localizada la delta, y que generará un conjunto de funciones que son las necesarias para realizar el cambio de base.

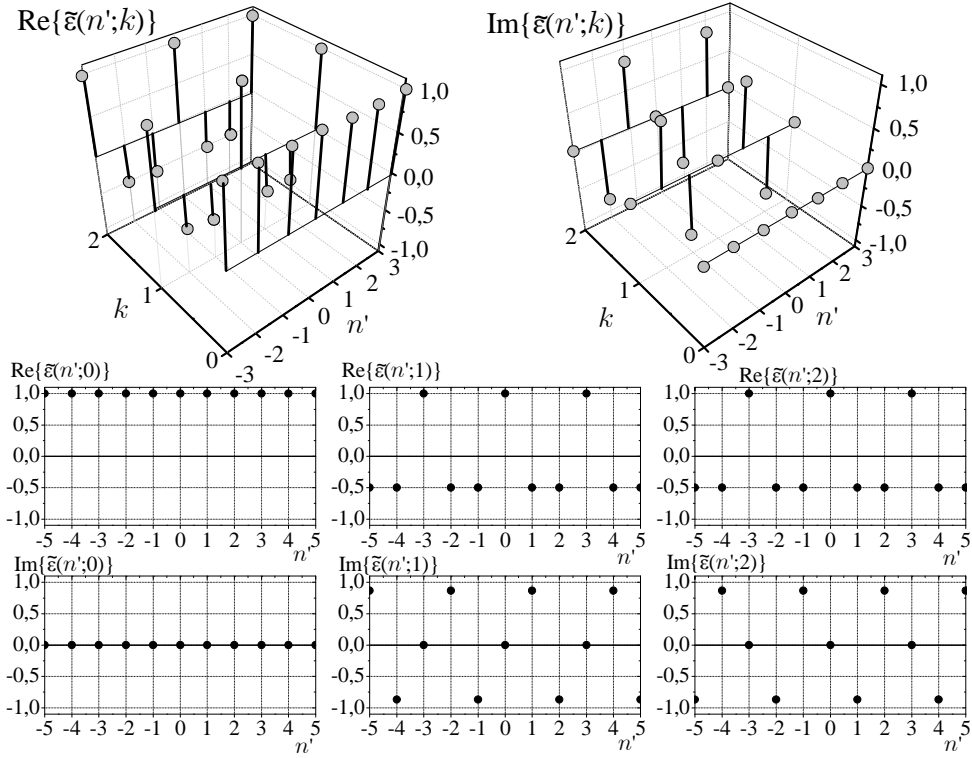


Figura 4.24: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\tilde{\epsilon}(n'; k)$ y tres particularizaciones para $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$. Éstas son todas las funciones que hay, ya que, como $N_0 = 3$, k sólo varía para 3 valores, por lo que para cualquier otro valor que se le quiera dar a k se obtendrá alguna de estas tres funciones.

donde

$$\langle e(n; n'), e(n; n'') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n') \delta(n - n'') = \delta(n' - n'') \Rightarrow A = 1, \quad (4.192)$$

$$\langle \tilde{\epsilon}(n; k), \tilde{\epsilon}(n; k') \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{jk\Omega_0 n} e^{-jk'\Omega_0 n} = N_0 \delta(k - k') \Rightarrow \tilde{A} = N_0, \quad (4.193)$$

obteniéndose

$$A\tilde{\epsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'} \neq e^{jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = N_0 \left(\frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') \right)^* = \tilde{A}\tilde{\epsilon}^*(k; n'); \quad (4.194)$$

sin embargo, esta igualdad se obtendría haciendo que el periodo N_0 tendiera a infinito, de forma que, para ese caso, ambos productos escalares fueran iguales, y así

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} N_0 \left(\frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') \right)^* = e^{jk\Omega_0 n'}, \quad (4.195)$$

pero de esta manera se estarían considerando señales no periódicas (o con periodo infinito) y la base $\tilde{\epsilon}(n; k) = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \xrightarrow{N_0 \rightarrow \infty} e^{j\Omega n}$, por lo que se iría al caso del Apdo. 4.5.5.

A partir de los resultados (4.189) y (4.190), las ecuaciones del cambio de base para este caso son

$$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'), \quad (4.196)$$

$$p(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (4.197)$$

Resulta asimismo sencillo comprobar que este par de ecuaciones está bien definido, ya que, a través de las definiciones propias para el cálculo de los coeficientes en una y otra base vistas en (4.185) y en (4.186), se pueden, introduciéndolas en estas ecuaciones del cambio de base, obtener las mismas definiciones. Por un lado,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \delta(n-n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(n-n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \bar{P}_{N_0}(n) = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}. \end{aligned} \quad (4.198)$$

Y por otro lado,

$$\begin{aligned} p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0(n-n')} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) N_0 \delta_0(n-n') = \\ &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n-n') = x_0(n'), \end{aligned} \quad (4.199)$$

donde se han utilizado los resultados (4.162) y (4.163).

Ciertamente este caso particular de cambio de base es bien sencillo de interpretar, puesto que la expresión (4.196) para encontrar los coeficientes del **DSF** $a(k)$ a partir de los coeficientes $p(n')$ representa el cálculo directo de los $a(k)$, ya que $p(n') = x_0(n)|_{n=n'}$ y el sumatorio infinito se convierte en finito debido al factor $\bar{P}_{N_0}(n')$ que se queda únicamente con N_0 valores de $p(n')$. Por su parte, la expresión (4.197) no es más que el desarrollo de Fourier inverso de señales discretas sobre la variable n' , por lo que el resultado, $p(n')$, es una señal periódica de periodo N_0 y que coincide con $x_0(n)$ en la variable n' .

La importancia de este caso particular radica en la ejemplificación de un conjunto de funciones (en este caso funciones discretas periódicas de periodo N_0) que se puede localizar en un espacio de dimensión finita (encontrando, por tanto, una base de un número finito de elementos) o en un espacio de dimensión infinita numerable (encontrando una base de infinitos elementos pero numerable), en el que se pueda realizar el cambio entre estas dos bases, que pertenecen

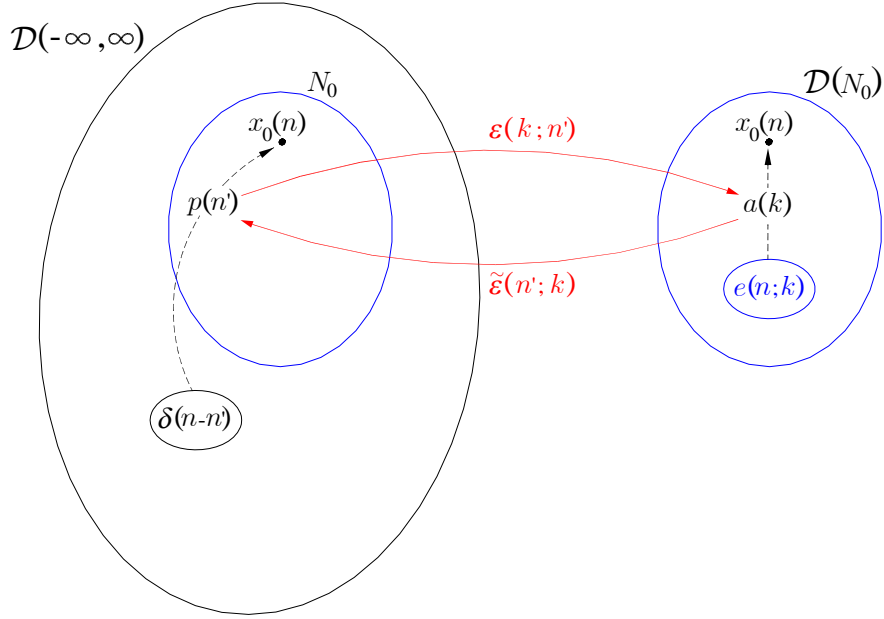


Figura 4.25: Representación del cambio de base de funciones periódicas de variable discreta vistas desde el espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ y desde el espacio $\mathcal{D}(N_0)$, junto con los conjuntos de funciones $\varepsilon(k; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ necesarios para pasar de un espacio a otro.

a espacios diferentes pero que definen el mismo conjunto de señales, de forma unívoca entre ambas, como se muestra en la Fig. 4.25.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.6 del Cap. 6.

4.5.8. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$

En este espacio se consideran las funciones complejas de variable discreta $x_0(n)$ y periódicas de periodo N_0 . El producto escalar definido en este espacio es el visto en (4.157),

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n). \quad (4.200)$$

En este espacio se pueden considerar dos conjuntos que juegan el papel de una base. Por un lado el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas periódicas de periodo N_0 , $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta_0(n - n')\}_{n'} = \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - n' - pN_0) \right\}_{n'}$, donde n' es un valor entero que varía en un rango de N_0 valores diferentes. Por otro lado el conjunto de las exponenciales complejas discretas de periodo un múltiplo entero de $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ que definen el desarrollo en serie de Fourier en variable discreta, **DSF**, donde el parámetro k que las describe es un entero que varía también en un rango de valores diferentes. En general, y sin pérdida de generalidad, se puede considerar la variación de n' y de k es de 0 a $N_0 - 1$.

Está claro que tanto $e(n; n')$ como $\tilde{e}(n; k)$ son, para cada n' y k , respectivamente, funciones

periódicas de periodo N_0 , ya que, con $q \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
e(n + qN_0; n') &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n + qN_0 - n' - pN_0) = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - n' - (p - q)N_0) = \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - n' - rN_0) = e(n; n'), \tag{4.201}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(n + qN_0; k) &= e^{jk\Omega_0(n+qN_0)} = e^{jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 qN_0} = \\
&= e^{jk\Omega_0 n} e^{jk\frac{2\pi}{N_0}qN_0} = e^{jk\Omega_0 n} e^{j2\pi kq} = e^{jk\Omega_0 n} = \tilde{e}(n; k), \tag{4.202}
\end{aligned}$$

y que, además, sus parámetros sólo pueden variar en un rango de N_0 valores, puesto que

$$\begin{aligned}
e(n; n' + qN_0) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - (n' + qN_0) - pN_0) = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(n - n' - (p + q)N_0) = \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - n' - rN_0) = e(n; n'), \tag{4.203}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(n; k + qN_0) &= e^{j(k+qN_0)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n} e^{jqN_0\Omega_0 n} = \\
&= e^{jk\Omega_0 n} e^{jqN_0\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{jk\Omega_0 n} e^{j2\pi qn} = e^{jk\Omega_0 n} = \tilde{e}(n; k), \tag{4.204}
\end{aligned}$$

es decir, que ambos conjuntos de funciones base también son periódicas N_0 respecto del parámetro que las describe, lo cual es bastante razonable porque en la definición de ambos conjuntos de funciones base, la variable real de la función, n , y el parámetro, n' o k , son intercambiables.

Al estar ambos conjuntos de funciones base descritos por sendos parámetros que toman N_0 valores diferentes, la dimensión del espacio es finita de valor N_0 .

Aplicando la ecuación (2.16) de la teoría general a este caso particular, cada señal $x_0(n) \in \mathcal{D}(N_0)$ podrá ser expresada en términos de una combinación lineal de estas bases por un conjunto de coeficientes que dependen de la base escogida, así

$$x_0(n) = \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} d(n') \delta_0(n - n'), \tag{4.205}$$

$$x_0(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n}, \tag{4.206}$$

donde se ve que la combinación lineal para el primer caso es $\mathbf{CL}_\mu \equiv \sum_{n'=\langle N_0 \rangle}$ y para el segundo

caso es igual, $\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{k=\langle N_0 \rangle}$. Por otro lado, los coeficientes necesarios para reconstruir la señal en cada caso son proporcionales a la proyección ortogonal de la función original $x_0(n)$ sobre

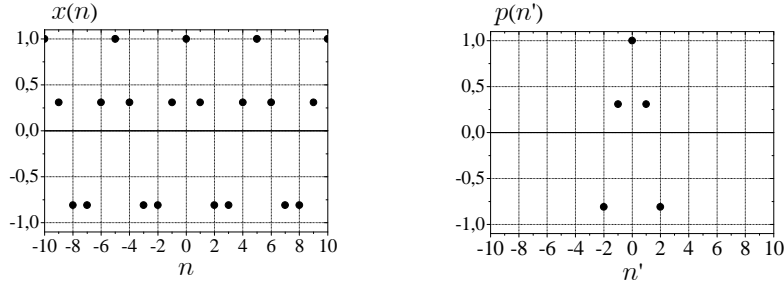


Figura 4.26: La señal $p(n')$ se corresponde únicamente con un sólo periodo de la señal $x(n)$. En este ejemplo se representa la señal $x(n) = \cos(\Omega_0 n)$ con $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ con un periodo $N_0 = 5$. Fuera de ese periodo no está definida.

cada uno de los elementos de la base⁴⁵,

$$d(n') = \mathbf{T}_{\delta_0}[x_0(n)] = \langle x_0(n), \delta_0(n - n') \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n - n'), \quad (4.207)$$

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \frac{1}{N_0} \langle x_0(n), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}. \quad (4.208)$$

Es fácil comprobar que los coeficientes $d(n')$ en la base $e(n; n')$ no son más que la señal original $x_0(n)$ en la variable n' , pero con una salvedad: dado que el parámetro n' tan solo toma N_0 valores diferentes (pudiendo considerarse entre 0 y $N_0 - 1$), el conjunto de coeficientes $d(n')$ sólo está definido para N_0 valores consecutivos, no para todo $n' \in \mathbb{Z}$. En realidad, dado que la información es la misma, puede periodificarse la función $d(n')$ a un periodo N_0 , obteniéndose una función discreta periódica y definida para todo $n' \in \mathbb{Z}$ y que se corresponderá con la propia señal original $x_0(n)$ pero en la variable n' . En este caso, esta transformada no tiene mucho interés, ya que realmente no hace nada, puesto que el operador \mathbf{T}_{δ_0} es simplemente una transformada identidad. Puesto que será indiferente trabajar con la señal $d(n')$ para los N_0 valores que con la señal $d_0(n') = x_0(n')$ para todos los valores enteros de n' , consideraremos la señal $d(n')$ sin periodificar, como se muestra ejemplificada en la Fig. 4.26, para darle un poco más de interés.

De la misma manera, los coeficientes $a(k)$ en la base $\tilde{e}(n; k)$ también están definidos únicamente para N_0 valores consecutivos de la variable k (en general se puede considerar de 0 a $N_0 - 1$), aunque se pueden periodificar con un periodo N_0 de forma que estén definidos para todo $k \in \mathbb{Z}$, ya que la información de los coeficientes se encuentra en sólo un periodo. La consideración de los $a(k)$ de una u otra forma es indiferente, aunque en la mayor parte de la bibliografía se considera periódica definida para todo $k \in \mathbb{Z}$ ⁴⁶.

A partir de las expresiones (4.20) y (4.21), se pueden obtener las ecuaciones del cambio de base

⁴⁵El operador \mathbf{T}_{δ_0} indica el operador transformada sobre la base del tren periódico de deltas de Kronecker desplazadas.

⁴⁶En los cálculos numéricos para implementar la transformada de Fourier que realice cualquier sistema computacional, el desarrollo que realmente se está realizando es el de considerar una señal discreta sobre un rango finito de la que, al realizar el **DSF** (o la **DFT**, *Discrete Fourier Transform*), se obtiene otra secuencia discreta con el mismo número de valores. Ya sea la señal original periódica o no, la secuencia que se considera puede interpretarse como un sólo periodo de N_0 valores de una señal periódica, obteniéndose, por tanto, la señal transformada variando sobre el mismo rango de N_0 valores, y no sobre una variación infinita.

para este caso particular, así,

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_\mu [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)] \Rightarrow a(k) = \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} d(n') \frac{1}{N_0} \langle \delta_0(n-n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle \quad (4.209)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] \Rightarrow d(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta_0(n-n') \rangle. \quad (4.210)$$

Desarrollando los productos escalares interiores se obtienen los respectivos conjuntos de funciones para realizar los cambios de base. Por un lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu'; \mu) &= \varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} \langle \delta_0(n-n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \delta_0(n-n') e^{-jk\Omega_0 n} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \end{aligned} \quad (4.211)$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') &= \tilde{\varepsilon}(n'; k) = \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta_0(n-n') \rangle = \\ &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{jk\Omega_0 n} \delta_0(n-n') = \\ &= e^{jk\Omega_0 n'}, \end{aligned} \quad (4.212)$$

como se muestran en las Figs. 4.27 y 4.28, respectivamente.

Resulta sencillo comprobar la igualdad propuesta en (4.16), es decir,

$$A\tilde{\varepsilon}(n'; k) = \tilde{A}\varepsilon^*(k; n'), \quad (4.213)$$

donde

$$\langle e(n; n'), e(n; n'') \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \delta_0(n-n') \delta_0(n-n'') = \delta(n'-n'') \Rightarrow A = 1, \quad (4.214)$$

$$\langle \tilde{\varepsilon}(n; k), \tilde{\varepsilon}(n; k') \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{jk\Omega_0 n} e^{-jk'\Omega_0 n} = N_0 \delta(k-k') \Rightarrow \tilde{A} = N_0, \quad (4.215)$$

ya que

$$A\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'} = N_0 \left(\frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \right)^* = \tilde{A}\varepsilon^*(k; n'). \quad (4.216)$$

Finalmente, a partir de los resultados (4.211) y (4.212) que definen los conjuntos de funciones para realizar los cambios de base, se obtienen las siguientes expresiones para este caso particular,

$$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} d(n') e^{-jk\Omega_0 n'}, \quad (4.217)$$

$$d(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (4.218)$$

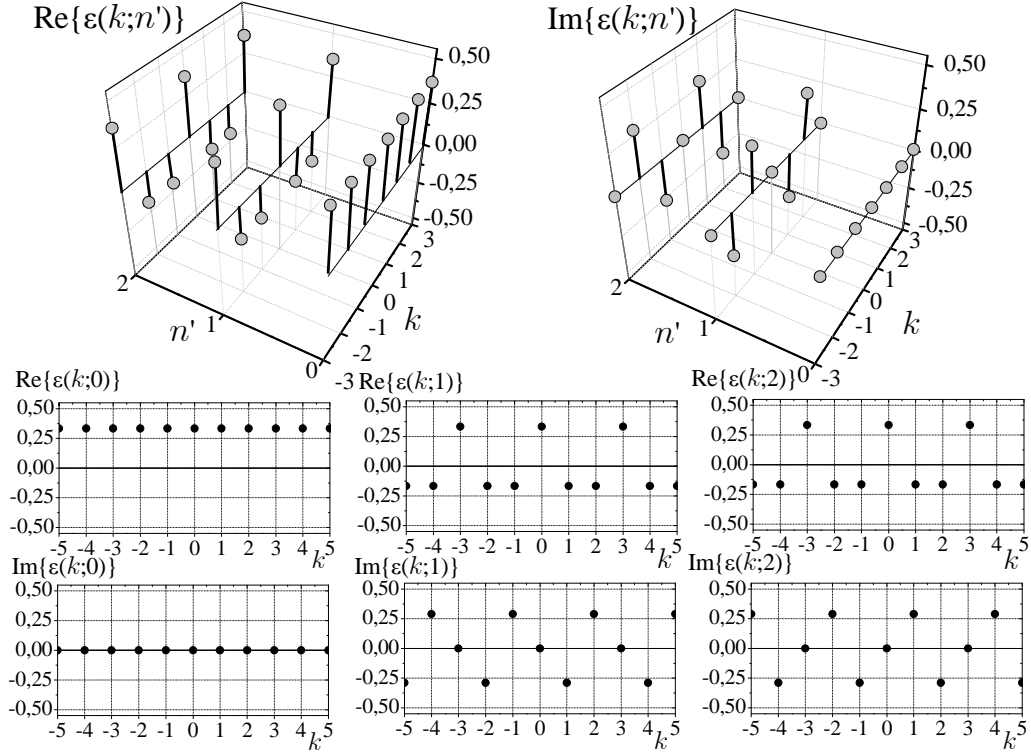


Figura 4.27: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\varepsilon(k; n')$ y tres particularizaciones para $n' = 0$, $n' = 1$ y $n' = 2$. Éstas son todas las funciones que hay, ya que, como $N_0 = 3$, n' sólo varía para 3 valores, por lo que para cualquier otro valor que se quiera dar a n' se obtendrá alguna de estas tres funciones.

No es difícil comprobar que este par de ecuaciones está bien definido. A partir de las expresiones (4.207) y (4.208) para el cálculo de los coeficientes $d(n')$ y $a(k)$ respectivamente, introduciéndolas en las ecuaciones del cambio de base (4.217) y (4.218), se obtienen nuevamente las definiciones conocidas de estos coeficientes.

$$\begin{aligned}
 a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} d(n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n - n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} \delta_0(n - n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \tag{4.219}
 \end{aligned}$$

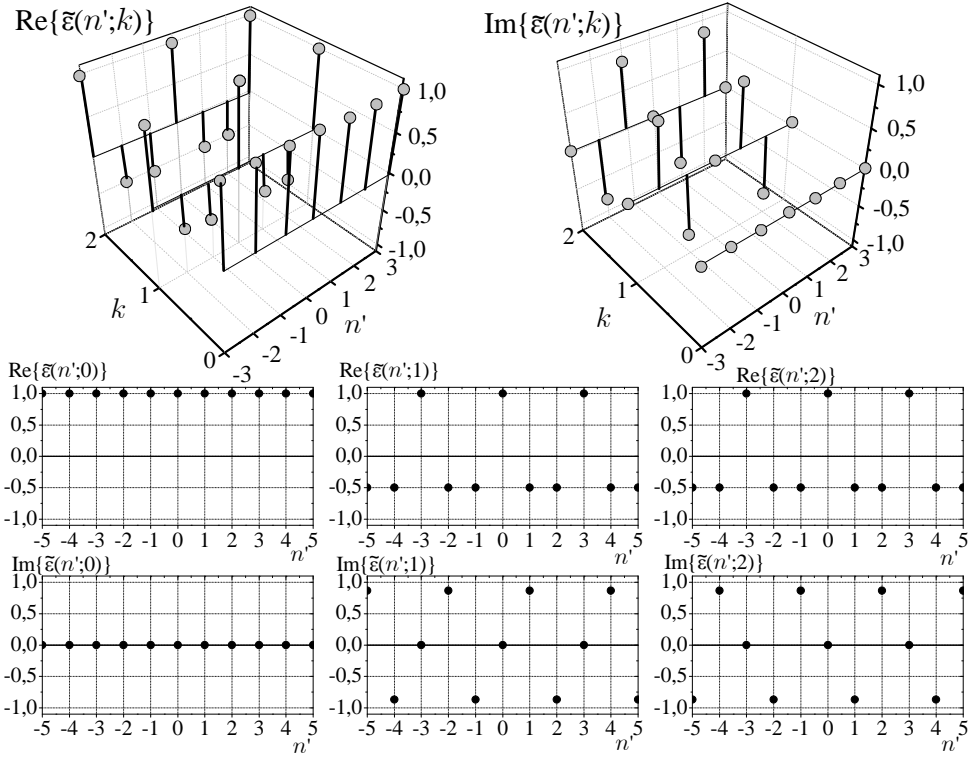


Figura 4.28: Representación de las partes real e imaginaria del conjunto $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ y tres particularizaciones para $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$. Éstas son todas las funciones que hay, ya que, como $N_0 = 3$, k sólo varía para 3 valores, por lo que para cualquier otro valor que se le quiera dar a k se obtendrá alguna de estas tres funciones.

y

$$\begin{aligned}
d(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) N_0 \delta_0(n - n') = \\
&= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n - n'). \tag{4.220}
\end{aligned}$$

Ciertamente, es fácil darse cuenta de que este cambio de base no es más que el **DSF** de una señal $x_0(n)$ y el **DSF**⁻¹ de sus coeficientes, por lo que todo está bien definido y, en realidad, no es de gran interés, puesto que una de las bases es la base ideal de deltas desplazadas y, por tanto, sus coeficientes son la propia señal original. Este caso particular sirve para ilustrar un ejemplo de cambio de base entre un espacio de señal de dimensión finita N_0 .

Debido a que la dimensión del espacio es finita, los conjuntos de funciones $\varepsilon(k; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ son dos conjuntos finitos de funciones de un número finito de elementos, ya que tanto el parámetro n' como k sólo toman N_0 valores, así, estos conjuntos se pueden expresar como una matriz, que será la matriz del cambio de base, como ocurre en los casos de los espacios euclideos de

dimensión finita vistos en el Apdo. 4.5.1. Por un lado⁴⁷

$$\begin{aligned} \varepsilon(k; n') &= \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} = \\ &= \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\Omega_0} & e^{-j2\Omega_0} & \dots & e^{-j\Omega_0 n'} & \dots & e^{-j(N_0-1)\Omega_0} \\ 1 & e^{-j2\Omega_0} & e^{-j4\Omega_0} & \dots & e^{-j2\Omega_0 n'} & \dots & e^{-j2(N_0-1)\Omega_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-jk\Omega_0} & e^{-j2k\Omega_0} & \dots & e^{-jk\Omega_0 n'} & \dots & e^{-jk(N_0-1)\Omega_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j(N_0-1)\Omega_0} & e^{-j2(N_0-1)\Omega_0} & \dots & e^{-j(N_0-1)\Omega_0 n'} & \dots & e^{-j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.221)$$

y por otro

$$\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\Omega_0} & e^{j2\Omega_0} & \dots & e^{jk\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)\Omega_0} \\ 1 & e^{j2\Omega_0} & e^{j4\Omega_0} & \dots & e^{j2k\Omega_0} & \dots & e^{j2(N_0-1)\Omega_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\Omega_0 n'} & e^{j2\Omega_0 n'} & \dots & e^{jk\Omega_0 n'} & \dots & e^{j(N_0-1)\Omega_0 n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j(N_0-1)\Omega_0} & e^{j2(N_0-1)\Omega_0} & \dots & e^{jk(N_0-1)\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0} \end{pmatrix}, \quad (4.222)$$

donde cada columna de estas matrices representa cada una de las funciones para el cambio de base. Así, conocidas estas matrices, se pueden encontrar los coeficientes de una base en función de la otra a partir de ellas, reescribiendo las ecuaciones del cambio de base (4.217) y (4.218) en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ \vdots \\ a(k) \\ \vdots \\ a(N_0-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{-jk\Omega_0 n'} & \dots & e^{-jk(N_0-1)\Omega_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{-j(N_0-1)\Omega_0 n'} & \dots & e^{-j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0) \\ \vdots \\ d(n') \\ \vdots \\ d(N_0-1) \end{pmatrix} \quad (4.223)$$

y

$$\begin{pmatrix} d(0) \\ \vdots \\ d(n') \\ \vdots \\ d(N_0-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{jk\Omega_0 n'} & \dots & e^{j(N_0-1)\Omega_0 n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{jk(N_0-1)\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(0) \\ \vdots \\ a(k) \\ \vdots \\ a(N_0-1) \end{pmatrix}$$

⁴⁷ Considerando la variación tanto de n' como de k de 0 a $N_0 - 1$.

Pueden verse ejemplos de esta caso particular en la Secc. 6.7 del Cap. 6.

4.6. Resumen de las expresiones del cambio de base

La Tabla 4.1 muestra un resumen de las expresiones principales para realizar los cambios de base en los diferentes espacios de señal indicados. Se indican, para cada espacio, las bases utilizadas $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, las expresiones para pasar de los coeficientes $\alpha(\mu)$ de una señal de una base a los coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ en la otra, y los conjuntos de funciones $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ necesarios para ello.

Espacio	Expresiones del cambio de base
Espacio genérico $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$: $e(\tau; \mu)$ $\tilde{e}(\tau; \mu')$	$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)],$ $\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')].$ $\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle,$ $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle.$
$\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = e^{j\xi x}$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; x') = \frac{1}{\pi(x-x')}$	$H(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi,$ $F(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx'.$ $\varepsilon(x'; \xi) = j \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'},$ $\tilde{\varepsilon}(\xi; x') = -j \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'}.$
$\mathcal{P}(X_0)$ $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \delta_0(x - x')$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = e^{jm\xi_0 x}$	$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{x'=(X_0)} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx',$ $f(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'}.$ $\varepsilon(m; x') = \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 x'},$ $\tilde{\varepsilon}(x'; m) = e^{jm\xi_0 x'}.$
$\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$ $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = e^{j\xi x}$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = e^{jm\xi_0 x}$	$a(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \text{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi,$ $F(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0).$ $\varepsilon(m; \xi) = \text{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right),$ $\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = 2\pi \delta(\xi - m\xi_0).$

$\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \delta(n - n')$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; \Omega) = e^{j\Omega n}$	$X(\Omega) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\Omega n'},$ $x(n') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=(2\pi)} X(\Omega) e^{j\Omega n'} d\Omega.$ <hr/> $\varepsilon(\Omega; n') = e^{-j\Omega n'},$ $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = e^{j\Omega n'}.$
$\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty). \text{ Caso I}$ $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = e^{j\Omega n}$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = e^{jk\Omega_0 n}$	$a(k) = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=(2\pi)} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega-k\Omega_0}{2}\right)} d\Omega,$ $X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0).$ <hr/> $\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)},$ $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = 2\pi \delta_0(\Omega - k\Omega_0).$
$\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty). \text{ Caso II}$ $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \delta(n - n')$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = e^{jk\Omega_0 n}$	$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'),$ $p(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}.$ <hr/> $\varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'),$ $\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'}.$
$\mathcal{D}(N_0)$ $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \delta_0(n - n')$ $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = e^{jk\Omega_0 n}$	$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} d(n') e^{-jk\Omega_0 n'},$ $d(n') = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}.$ <hr/> $\varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'},$ $\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'}.$

Tabla 4.1: Resumen de las expresiones generales para los cambios de base.

4.7. Conclusiones

Lo que a priori parece ser algo sencillo como es el **cambio de base** en un espacio vectorial, se ha visto como se puede complicar, tanto en su desarrollo como en su interpretación, en los espacios de señal. En un espacio de dimensión finita, el típico cambio de base consiste en una matriz a partir de la cual se pueden encontrar los coeficientes en una base conocidos los coeficientes en la otra. Este concepto se queda pequeño cuando se trata de realizar el cambio de base en espacios de dimensión infinita, puesto que ya no se puede hablar de matrices ni de vectores.

Las ecuaciones para el cambio de base encontradas en el desarrollo de este capítulo permiten obtener los coeficientes de una señal en una base conocidos los coeficientes de la misma señal en otra base a partir de un conjunto de funciones que contienen información de ambas bases, con la única condición de que éstas sean ortogonales según el producto escalar definido en el espacio de señal correspondiente.

Una de las cuestiones que resulta cuanto menos curiosa es que en un mismo espacio de señal de dimensión infinita se puedan encontrar conjuntos de funciones base que tengan diferente cardinalidad, como puede ser, por ejemplo, en el espacio de funciones periódicas de variable continua, $\mathcal{P}(X_0)$, la base de exponenciales complejas $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ y la base ideal de deltas de Dirac desplazadas $e(x; x') = \{\delta_0(x - x')\}_{x'}$. Incluso en este caso se pueden encontrar los conjuntos de funciones que relacionan ambas bases y que permiten obtener los coeficientes de una señal en una base a partir de los de la otra. Lo que sí es cierto y resulta chocante es que en un mismo espacio no puede haber bases que tengan diferente cardinalidad, puesto que ésta está relacionada con la dimensión del espacio, y éste era uno de los problemas con los que partía la versión actual de la GSST. Este problema se ha visto de forma más evidente a lo largo de este capítulo pero se formalizará y se dará solución con la introducción de los espacios de Hilbert equipados en los Caps. 8 y 9 pero, dando una primera idea, se puede comprobar fácilmente que el conjunto de deltas desplazadas $\{\delta_0(x - x')\}_{x'}$ no es una base en sí misma, puesto que estas funciones no son funciones ordinarias sino distribuciones, por lo que no cumple con todas las condiciones necesarias para ser base, lo que la convierte en una pseudobase, haciendo que no se pueda tener en cuenta su cardinalidad a la hora de determinar la dimensión del espacio.

Pero además, el resultado quizá más sorprendente, es que se puede realizar el cambio de base de un conjunto de funciones cuando éstas son vistas en espacios de señal diferentes y, en general, con dimensiones diferentes. Como se ha visto, una misma señal $f_0(x)$ puede ser vista, por ejemplo, dentro de un espacio de funciones periódicas de variable continua escogiendo una base numerable $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ y dentro del conjunto de las funciones periódicas con una base no numerable $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$. Los coeficientes en el primer caso vendrán descritos por un parámetro discreto $a(m)$ mientras que en el segundo por un parámetro continuo $F(\xi)$ y, sin embargo, existe el conjunto de funciones que permite realizar el cambio de base, pasando de un conjunto numerable a otro no numerable $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ y viceversa $\varepsilon(m; \xi)$. Está claro que tiene que existir una relación entre la numerabilidad de los conjuntos de funciones base que describen la misma señal en espacios diferentes y es que la gran mayoría de las funciones base del conjunto no numerable están ponderadas por 0, tomando sólo un conjunto numerable $e(x; \xi = m\xi_0)$.

Finalmente, se ha visto también cómo la ecuación del cambio de base (4.224) se asemeja formalmente a la expresión de la representación de una señal en una base (4.225) y a la ecuación del análisis espectral generalizado (4.226) (que se verá en el Cap. 5), ya que

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')], \quad (4.224)$$

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (4.225)$$

$$\beta(\mu) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')], \quad (4.226)$$

por lo que se puede interpretar el cambio de base también de dos maneras diferentes:

- Por un lado, tomando como referencia la representación de una señal en una base, (4.225), el cambio de base no es más que la reconstrucción de una señal $\alpha(\mu)$ en términos de una base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ a partir de unos coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$, por lo que se interpretaría $\tilde{\alpha}(\mu')$ como la transformada de $\alpha(\mu)$ en la base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$, es decir, la representación espectral de $\alpha(\mu)$ en dicha base. Como el cambio de base es bidireccional, es decir, se puede realizar en ambos sentidos, la interpretación inversa también es posible, de forma que se puede entender que $\alpha(\mu)$ son los coeficientes que reconstruyen $\tilde{\alpha}(\mu')$ en la base $\varepsilon(\mu'; \mu)$, siendo, por tanto, $\alpha(\mu)$ la representación espectral de $\tilde{\alpha}(\mu')$ en dicha base. Se ha probado que tanto $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ como $\varepsilon(\mu'; \mu)$ son bases en los dominios espectrales correspondientes, es decir, en los espacios de los coeficientes. Dado que $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ son también las representaciones espectrales de $a(\tau)$ en las bases correspondientes, significaría interpretar, en ambos casos, la representación espectral de la señal en el dominio espectral, es decir, sería un doble análisis espectral, como se veía en la Fig. 4.3, aunque lo que realmente se está haciendo es pasar de un dominio espectral generado por la base $e(\tau; \mu)$ al otro generado por la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$.
- Por otro lado, refiriéndose a la ecuación del análisis espectral generalizado, (4.226), el cambio de base no sería más que la interpretación del operador identidad realizando el análisis espectral bajo una transformada diferente en el espacio de partida que en el de llegada, como se veía en la Fig. 4.4. El conjunto de funciones $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$, que contienen la información del sistema y de ambas transformadas, quedaría particularizado al conjunto de funciones para el cambio de base $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ o $\varepsilon(\mu'; \mu)$ dependiendo de la dirección en la que se realice el cambio.

5. Análisis Espectral Generalizado

5.1. Introducción

El propósito general de este capítulo consiste en encontrar una formulación general que permita describir la señal de salida de un sistema lineal en el dominio espectral en términos de la entrada en ese dominio y un conjunto de funciones que dependan y definan unívocamente ese sistema. Algunos resultados de este estilo ya se han formulado en publicaciones anteriores, como en [86] sobre el análisis espectral generalizado bajo la transformada de Fourier o en [2] y en [96] sobre el análisis espectral generalizado para sistemas lineales que operen sobre el mismo espacio de señal, pero para cualquier tipo de transformada. En este caso se abordará de una manera más general, permitiendo que el sistema lineal transforme las señales de un espacio a otro diferente.

Recordando del Apdo. 2.4.3, el análisis de una señal a través de un sistema lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ en el dominio real se puede expresar como

$$b(v) = \mathbf{C}\mathbf{L}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')], \quad (5.1)$$

siendo $a(\tau)$ la señal de entrada al sistema (descrita en (5.1) sobre el parámetro τ') y $h(v; \tau')$ el conjunto de respuestas al impulso del sistema; recordando que la señal de entrada $a(\tau)$ y la señal de salida $b(v)$ están descritas en diferentes variables puesto que pueden pertenecer, en el caso general, a espacios distintos. Tal como muestra (5.1), se puede comprobar que la señal de salida del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ viene descrita en términos de la entrada y un conjunto de funciones que dependen del sistema, en este caso $h(v; \tau')$. La finalidad del Análisis Espectral Generalizado es cumplir este mismo objetivo pero en el dominio espectral. Sin embargo, el hablar del dominio espectral implica siempre la definición de una transformada y, por tanto, de un conjunto de funciones base asociado a ella.

El escenario del que se parte es el que se muestra en la Fig. 5.1 donde el espacio de partida y el de llegada no tienen por qué ser los mismos. Esto quiere decir que el conjunto de funciones base del espacio de partida puede que no se parezca en nada al conjunto de funciones base del espacio de llegada, es por ello que ambos conjuntos están expresados, no sólo en diferentes variables, sino también enumeradas por parámetros distintos. En el espacio de partida representamos el conjunto de funciones base como $e(\tau; \mu)$, de forma que una señal $a(\tau)$ puede ser expresada en términos de unos coeficientes $\alpha(\mu)$ a partir de la combinación lineal generalizada

$$a(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (5.2)$$

siendo $\alpha(\mu)$ la transformada de $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$, es decir¹,

$$\alpha(\mu) = \mathbf{T}_{e_{\tau}} [a(\tau)]. \quad (5.3)$$

¹ Puesto que hay que trabajar con transformadas en espacios de señal diferentes, definidas a partir de conjuntos de funciones base diferentes, para evitar confusiones a la hora de realizar una transformada, se indicará siempre con el símbolo \mathbf{T} junto con el subíndice que indique la base sobre la cual se realiza la transformada así como la variable de esa base y de la señal a la que se está aplicando dicha transformada. Así, por ejemplo, el símbolo $\mathbf{T}_{e_{\tau}}$ indica que se está realizando la transformada definida a partir del conjunto de funciones base e expresados sobre la variable τ . El parámetro que describe este conjunto de funciones base vendrá expresado implícitamente en la variable de la señal transformada.

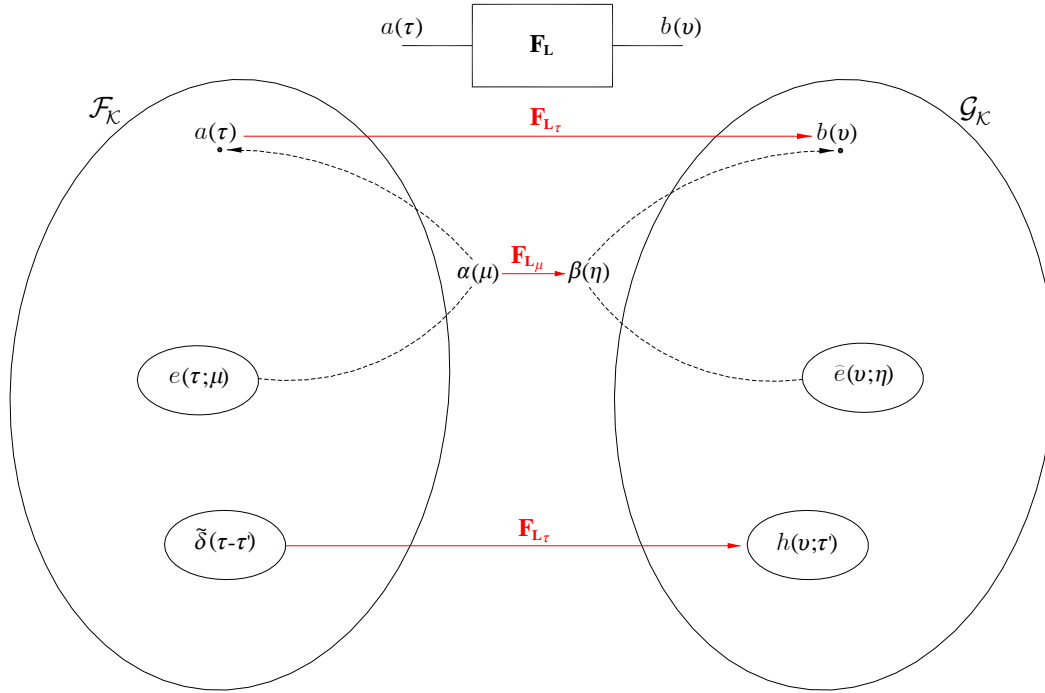


Figura 5.1: Representación general esquemática del concepto de Análisis Espectral Generalizado. La relación entre los coeficientes $a(\mu)$ y $\beta(\eta)$ es la relación en el dominio espectral de las señales de entrada $a(\tau)$ y de salida $b(v)$ del sistema lineal \mathbf{F}_L , cuando el espacio de llegada no es el mismo que el de partida ni, por tanto, los conjuntos de funciones base definidos en cada uno de ellos.

De la misma manera, en el espacio de llegada el conjunto de funciones base se representan como $\hat{e}(v; \eta)$ donde cada señal $b(v)$ puede representarse en términos de esta base a partir de unos coeficientes $\beta(\eta)$ como

$$b(v) = \mathbf{C}\mathbf{L}_\eta [\beta(\eta) \hat{e}(v; \eta)], \quad (5.4)$$

siendo, por tanto, $\beta(\eta)$ la transformada de $b(v)$ en la base $\hat{e}(v; \eta)$, es decir,

$$\beta(\eta) = \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [b(v)]. \quad (5.5)$$

La relación entre los coeficientes $\alpha(\mu)$ de la señal de entrada al sistema y los coeficientes $\beta(\eta)$ de la señal de salida del sistema es lo que se conoce como **Análisis Espectral Generalizado**, $(\text{GSA})^2$. Esto quiere decir que este nuevo análisis espectral propuesto no se tiene por qué corresponder con el estudio de los autovalores que generan las autofunciones de un sistema lineal, lo que se correspondería con el análisis espectral clásico, que hacía que la señal de salida de un sistema en el dominio espectral fuera el producto de la entrada en ese dominio por esos autovalores, como se veía en el Apdo. 2.4.3 del capítulo sobre el resumen de la teoría general. Pero este tipo de análisis sería bastante restrictivo, puesto que impondría que el espacio de llegada fuese el mismo que el de partida y que el conjunto de funciones base escogidas fuesen autofunciones del sistema, lo cual no siempre es así. Este análisis espectral clásico es útil y frecuentemente utilizado en el caso de analizar sistemas lineales e invariantes bajo la transformada de Fourier, puesto que el conjunto de funciones base que definen esta transformada, tanto en variable continua como en discreta, son siempre autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante. Así, el **Análisis Espectral Generalizado** engloba un abanico mucho más amplio de casos, analizando la señal de salida de un sistema lineal en el dominio espectral en función de la entrada en ese

²Generalized Spectral Analysis

dominio y algún conjunto de funciones que definan el sistema y la transformada utilizada, independientemente de si el sistema es invariante o no o de si el conjunto de funciones base que definen la transformada son autofunciones del sistema o no. De esta manera, el análisis espectral clásico se convierte en un caso particular del análisis espectral generalizado, cuya expresión bien conocida se podrá obtener, como se verá más adelante, particularizando la expresión general al caso particular de que el conjunto de funciones base sean autofunciones del sistema. De esta manera se extiende y generaliza ampliamente el concepto de análisis espectral.

5.2. Desarrollo general

Como se ha descrito en la sección anterior, el objetivo del Análisis Espectral Generalizado es obtener la expresión que relacione los coeficientes de la señal de salida $\beta(\eta)$ con los de la entrada $\alpha(\mu)$. Vamos a exigir que el conjunto de funciones base tanto en el espacio de partida como en el de llegada sean un ortogonales, es decir,

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle_{\tau} = A\tilde{\delta}(\mu - \mu'), \quad (5.6)$$

$$\langle \hat{e}(v; \eta), \hat{e}(v; \eta') \rangle_v = \hat{A}\tilde{\delta}(\eta - \eta'), \quad (5.7)$$

y también que sean ortogonales con respecto al parámetro que las describe, es decir, fijados dos valores de la variable real τ y τ' o v y v' , que el producto escalar sobre todas las funciones base sea nulo salvo en el caso en que $\tau = \tau'$ o $v = v'$, es decir³,

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau'; \mu) \rangle_{\mu} = A\tilde{\delta}(\tau - \tau'), \quad (5.8)$$

$$\langle \hat{e}(v; \eta), \hat{e}(v'; \eta) \rangle_{\eta} = \hat{A}\tilde{\delta}(v - v'). \quad (5.9)$$

En el dominio real, dado un sistema lineal y continuo $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, la señal de salida $\beta(v)$ se obtiene a partir de la señal de entrada $a(\tau)$ haciéndola pasar por el sistema, así

$$b(v) = \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[a(\tau)], \quad (5.10)$$

y, de la misma manera, el conjunto de respuestas al impulso $h(v; \tau')$ se obtienen haciendo pasar por el sistema un conjunto de deltas desplazadas $\left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$,

$$h(v; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right], \quad (5.11)$$

recordando que $h(v; \tau')$ son un conjunto de funciones del espacio de llegada $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, aunque estén enumeradas por el parámetro τ' , que es de la misma naturaleza que la variable del espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, es decir,

$$\tilde{\delta}(\tau - \tau') \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \quad (5.12)$$

$$h(v; \tau') \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}}. \quad (5.13)$$

Sin embargo, si en el conjunto $h(v; \tau')$ se fija uno de sus valores $v = v_0$ y se observan todas las funciones para ese valor, lo que realmente se está viendo es una función sobre τ' y, en este caso, pertenecería a $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, es decir, que si $h(v; \tau')$ se ve desde el parámetro, se puede decir que son funciones del espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Es por tanto que este conjunto de funciones está a caballo entre el espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y el de llegada $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, puesto que contiene información de los dos. Esta explicación se puede ver de manera sencilla gráficamente si se observa un ejemplo como la Fig. 5.2, donde vista la señal desde un eje se comprueba que pertenece a un espacio y vista desde el otro es fácil ver que pertenece a otro espacio.

³Hay que tener un cierto cuidado porque, en general, las variables y los parámetros no tienen por qué ser de la misma naturaleza, por lo tanto los productos escalares definidos en (5.6) y (5.7) pueden ser diferentes a los que tengan que ser definidos en (5.8) y (5.9)

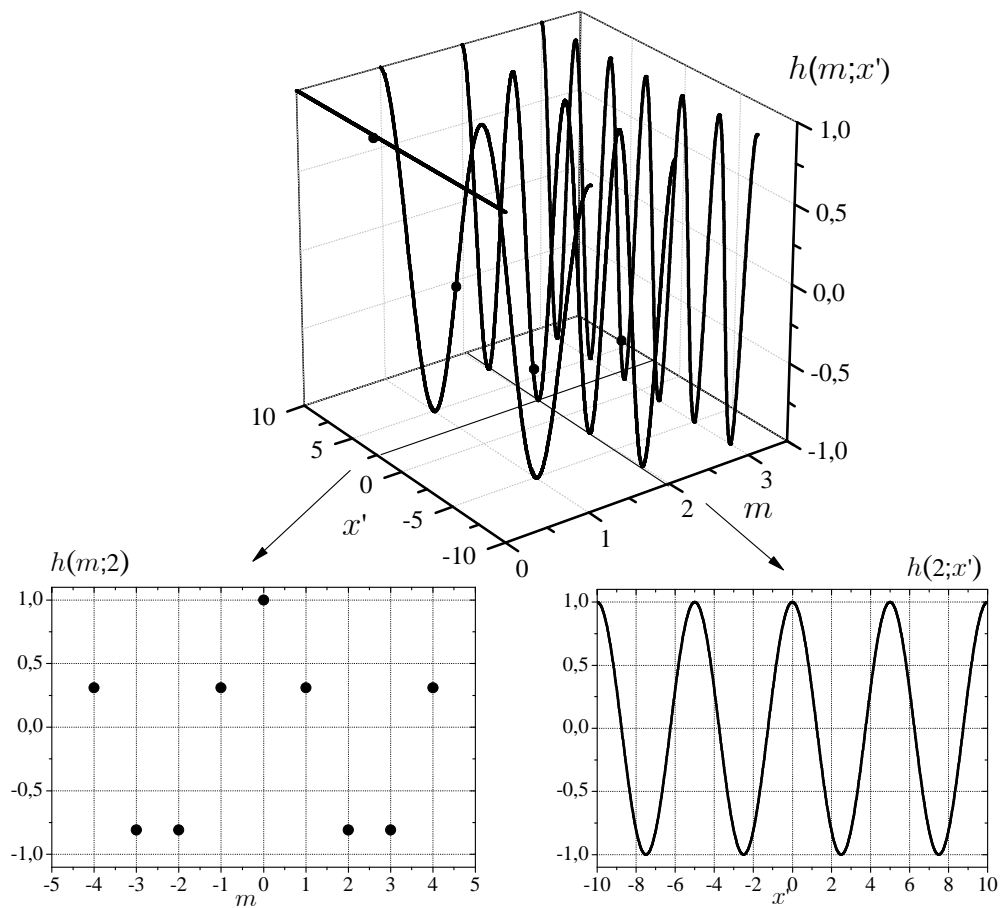


Figura 5.2: El conjunto de funciones $h(m; x')$, que en este ejemplo es $h(m; x') = \cos\left(\frac{2\pi}{10}mx'\right)$, es discreto visto sobre m para cada x' fijo, sin embargo, fijando m lo que se obtiene es una función continua sobre x' . Las representaciones en 2 dimensiones muestran un corte del conjunto $h(m; x')$ para $x' = 2$ por un lado y para $m = 2$ por el otro.

Puesto que cualquier señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ puede expresarse en términos de un conjunto de deltas desplazadas a partir de una combinación lineal generalizada como

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right], \quad (5.14)$$

la señal de salida del sistema puede expresarse, juntanto (5.10) y (5.14), como

$$\begin{aligned} b(v) &= \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [a(\tau)] = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right] = \\ &= \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right] = \mathbf{CL}_{\tau'} \left[a(\tau') h(v; \tau') \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por su parte, los coeficientes de $b(v)$ y, por tanto, la representación espectral de esta señal, son la transformada de $b(v)$ definida a partir del conjunto de funciones base $\hat{e}(v; \eta) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, como se mostraba en (5.5),

$$\beta(\eta) = \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [b(v)] \quad (5.16)$$

y los coeficientes $\alpha(\mu)$ son la transformada de $a(\tau)$ definida a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, según (5.3),

$$\alpha(\mu) = \mathbf{T}_{e_\tau} [a(\tau)]. \quad (5.17)$$

A partir de aquí vamos a buscar una expresión que relacione $\beta(\eta)$ con $\alpha(\mu)$, es decir, que relacione la señal de salida del sistema con la de entrada en el dominio espectral, sin necesidad de conocer las señales en el dominio real.

El conjunto de respuestas al impulso $h(v; \tau')$ son un conjunto de funciones de $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, por tanto, para cada τ' fijo ($\tau' \equiv \tau'_0$) se tiene una función que puede ser expresada en términos de la base $\hat{e}(v; \eta)$ a partir de una combinación lineal junto con unos coeficientes, que denominaremos $H(\eta; \tau'_0)$, tal como se muestra en la Fig. 5.3, así

$$h(v; \tau'_0) = \mathbf{CL}_{\eta} [H(\eta; \tau'_0) \hat{e}(v; \eta)]. \quad (5.18)$$

En general, para todos los valores de τ' posibles se tiene el conjunto de coeficientes $H(\eta; \tau')$, que no son más que la transformada, para cada τ' fijo, de cada una de las funciones $h(v; \tau')$. Así, según el resultado visto en la Secc. 3.3 sobre la relación entre el producto escalar y la combinación lineal, se puede escribir como

$$H(\eta; \tau') = \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [h(v; \tau')] = \frac{1}{A} \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v. \quad (5.19)$$

Hasta aquí tenemos,

$$\begin{aligned} \beta(\eta) &= \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [b(v)] = \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [\mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [h(v; \tau')]] = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') H(\eta; \tau')], \end{aligned} \quad (5.20)$$

pero los coeficientes $\beta(\eta)$ dependen aún de la señal de entrada en el dominio real. Sin embargo, podemos continuar con la idea anterior y considerar el conjunto de funciones $H(\eta; \tau')$ sobre el parámetro τ' , como una nueva variable, fijando η . De esta manera, ahora este conjunto de funciones pertenece a $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, puesto que la variable τ' es la variable de las funciones de este espacio. Así, este conjunto se puede representar a través de una combinación lineal generalizada de las funciones base $e(\tau'; \mu'')$ ⁴ junto con unos coeficientes que denotamos por $\mathbf{H}(\eta; \mu'')$ como se puede apreciar en la Fig. 5.4, así,

$$H(\eta; \tau') = \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') e(\tau'; \mu'')]. \quad (5.21)$$

⁴El conjunto de funciones base $e(\tau'; \mu'') \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ es exactamente la misma que $e(\tau; \mu) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, pero expresada sobre la variable τ' y enumerada por el parámetro μ'' por cuestiones de notación y de identificación de variables.

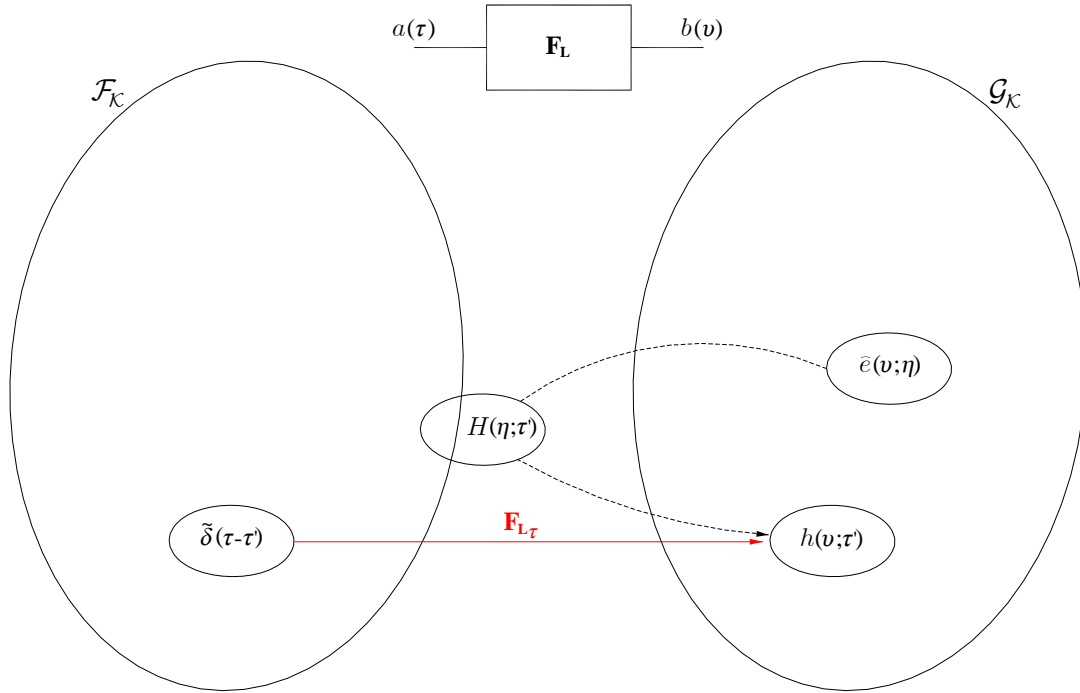


Figura 5.3: El conjunto de coeficientes $H(\eta; \tau')$ son la transformada del conjunto de respuestas al impulso $h(v; \tau')$ sobre la base $\hat{e}(v; \eta)$, del espacio de llegada \mathcal{G}_K . Contienen información del dominio real del espacio de partida a partir del parámetro τ' como información espectral del espacio de llegada a partir del parámetro η .

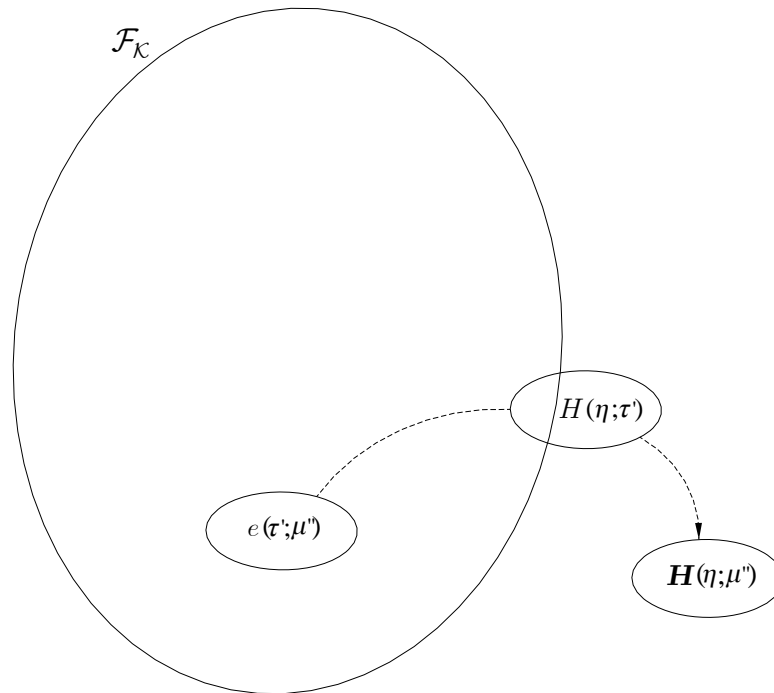


Figura 5.4: El conjunto de funciones $\mathbf{H}(\eta; \mu'')$ es la transformada de $H(\eta; \tau')$ sobre la base $e(\tau'; \mu'')$, del espacio de partida \mathcal{F}_K . Este conjunto contiene la información del sistema, puesto que parte del conjunto de respuestas al impulso $h(v; \tau')$, y de la información espectral tanto del espacio de partida, a través del parámetro μ'' como del espacio de llegada a través del parámetro η . Es, por tanto, el conjunto de funciones que contiene la información necesaria para poder realizar el Análisis Espectral Generalizado.

De esta forma, $\mathbf{H}(\eta; \mu'')$ es la transformada de $H(\eta; \tau')$, para cada η , definida sobre el conjunto de funciones base $e(\tau'; \mu'') \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\mathbf{H}(\eta; \mu'') = \mathbf{T}_{e_{\tau'}} [H(\eta; \tau')] = \frac{1}{A} \langle H(\eta; \tau'), e(\tau'; \mu'') \rangle_{\tau'}. \quad (5.22)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \beta(\eta) &= \mathbf{T}_{\hat{e}_v} [b(v)] = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') H(\eta; \tau')] = \\ &= \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') e(\tau'; \mu'')]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') e(\tau'; \mu'')]], \end{aligned} \quad (5.23)$$

pero, reescribiendo $a(\tau')$ como

$$a(\tau') = \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') e(\tau'; \mu')] \quad (5.24)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \beta(\eta) &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') e(\tau'; \mu'')]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\tau'} [\mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') e(\tau'; \mu')] e(\tau'; \mu'')]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{CL}_{\tau'} [e(\tau'; \mu') e(\tau'; \mu'')]]], \end{aligned} \quad (5.25)$$

pero, a partir de la relación entre la combinación lineal y el producto escalar vista en la Secc. 3.3, la última combinación lineal en τ' se puede expresar como

$$\mathbf{CL}_{\tau'} [e(\tau'; \mu') e(\tau'; \mu'')] = \langle e(\tau'; \mu'), e^*(\tau'; \mu'') \rangle_{\tau'} = \langle e(\tau'; \mu''), e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (5.26)$$

así,

$$\begin{aligned} \beta(\eta) &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{CL}_{\tau'} [e(\tau'; \mu') e(\tau'; \mu'')]]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \langle e(\tau'; \mu''), e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}]] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \langle \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') e(\tau'; \mu'')], e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}] \end{aligned} \quad (5.27)$$

y, por la ecuación (5.21),

$$\begin{aligned} \beta(\eta) &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \langle \mathbf{CL}_{\mu''} [\mathbf{H}(\eta; \mu'') e(\tau'; \mu'')], e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \langle H(\eta; \tau'), e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}] = \\ &= \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \end{aligned} \quad (5.28)$$

definiendo $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$ como

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A} \langle H(\eta; \tau'), e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (5.29)$$

es decir, la proyección del conjunto $H(\eta; \tau')$ visto en τ' sobre cada uno de los elementos de la base $e(\tau'; \mu')$ pero conjugados. Por la definición de $\mathbf{H}(\eta; \mu)$ vista en (5.22), el conjunto $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$ será una modificación de $\mathbf{H}(\eta; \mu')$, que dependerá de la naturaleza del conjunto de funciones base. En el caso de que cada una de las funciones base $e(\tau'; \mu')$ sean reales, se cumplirá que $\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \mathbf{H}(\eta; \mu')$.

Así, finalmente, se tiene el resultado

$$\boxed{\beta(\eta) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')],} \quad (5.30)$$

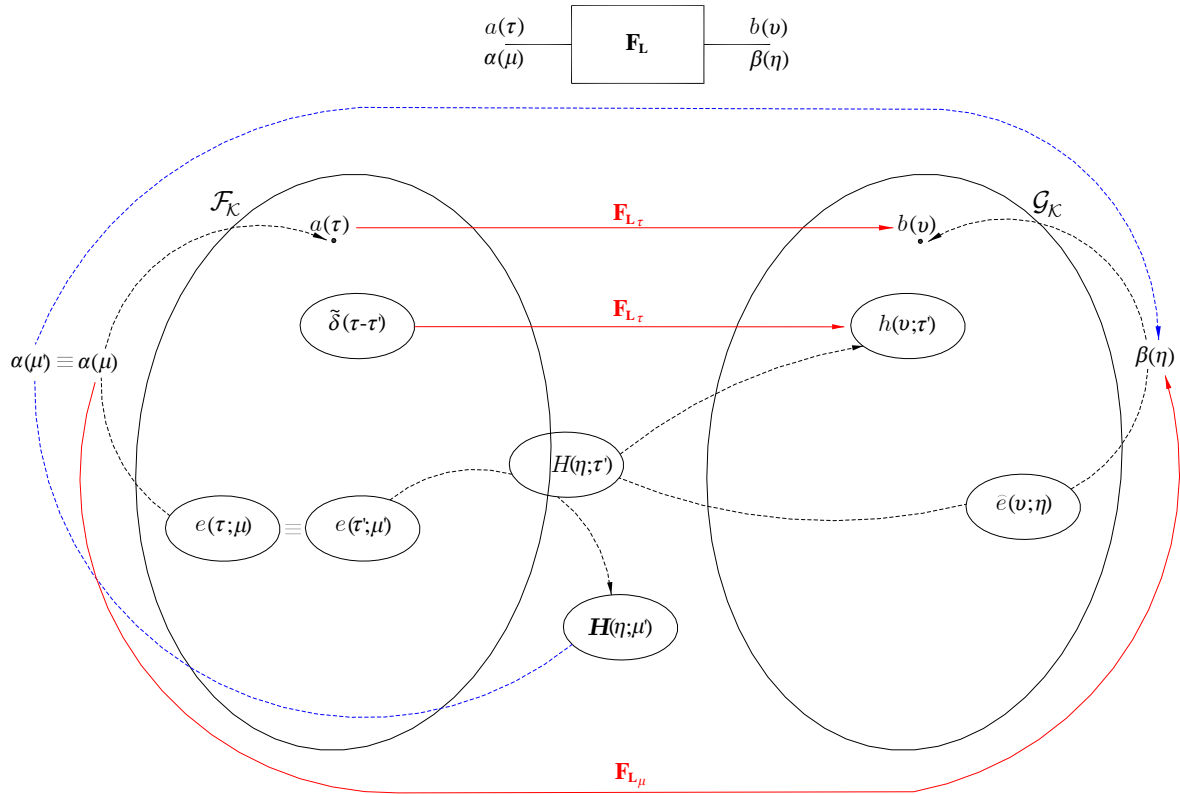


Figura 5.5: Representación esquemática en términos de espacios de señal de todo el proceso del Análisis Espectral Generalizado, donde se muestran todos los conjuntos de funciones que intervienen y sus relaciones. Las flechas rojas continuas indican la transformación de la señal a través del sistema lineal \mathbf{F}_L . Las flechas negras discontinuas indican la reconstrucción de una señal (o un conjunto de señales) como una combinación lineal generalizada de una base a partir de unos coeficientes, localizados en la mitad de la flecha. La flecha azul discontinua indica el camino para realizar el Análisis Espectral Generalizado, es decir, la obtención de la señal de salida del sistema en el dominio espectral $\beta(\eta)$ como una combinación lineal generalizada del conjunto de funciones $\mathbf{H}(\eta; \mu')$ ponderada por la señal de entrada en el dominio espectral $\alpha(\mu')$.

donde se comprueba que la señal de salida en el dominio espectral $\beta(\eta)$ viene descrita en términos de una combinación lineal generalizada de la señal de entrada en el dominio espectral $\alpha(\mu')$ y un conjunto de funciones $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$ que dependen del sistema lineal analizado y de las transformadas aplicadas en cada espacio para realizar el análisis espectral, puesto que, además, se tiene que

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{AA} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (5.31)$$

es decir, que el conjunto de funciones $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$ está relacionado con la transformada del conjunto de respuestas al impulso sobre la variable v primeramente, definida sobre el conjunto de funciones base $\hat{e}(v; \eta) \subset \mathcal{G}_K$ y la transformada del conjunto resultante sobre la variable τ' definida a partir del conjunto de funciones base $e(\tau'; \mu') \subset \mathcal{F}_K$.

En la Fig. 5.5 se muestra, de forma esquemática, todo el proceso llevado a cabo hasta ahora, indicando cada uno de los espacios, funciones y conjuntos de funciones que intervienen en el proceso.

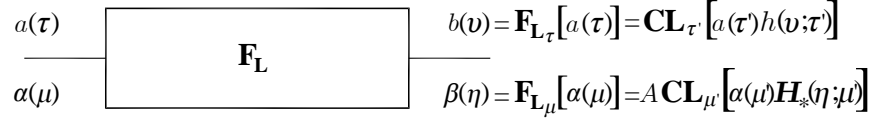


Figura 5.6: Con la obtención de las ecuaciones del Análisis Espectral Generalizado se obtiene una expresión para el cálculo de la señal de salida de un sistema lineal formalmente igual para el dominio real que para el espectral. En ambos casos la señal de salida viene descrita en términos de una combinación lineal generalizada de la señal de entrada al sistema en el dominio correspondiente y de un conjunto de funciones que dependen del sistema y, en el caso del dominio espectral, también del conjunto de funciones base (transformadas) escogidas para realizar el análisis espectral tanto en el espacio de entrada como en el de salida.

Se puede observar cómo el resultado del Análisis Espectral Generalizado se asemeja al resultado bien conocido del análisis de una señal a través de un sistema lineal \mathbf{F}_L en el dominio real, sin más que comparar ambas expresiones

$$b(v) = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')], \quad (5.32)$$

$$\beta(\eta) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (5.33)$$

es decir, la señal de salida de un sistema lineal se puede expresar en términos de una combinación lineal generalizada de la entrada en el dominio correspondiente y un conjunto de funciones que dependen y definen unívocamente el sistema lineal y, en el caso del análisis espectral, también del conjunto de funciones base seleccionadas tanto para la señal de entrada como para la de salida. Esta dualidad se muestra en la Fig. 5.6.

5.3. Casos particulares

5.3.1. Operador dentro del mismo espacio de señal

En el caso particular de que $\mathcal{F}_K = \mathcal{G}_K$, la variable real de las funciones del espacio de llegada es la misma que la del espacio de partida, así

$$v \equiv \tau, \quad (5.34)$$

por lo que la señal de salida vendrá descrita como $b(\tau)$ y el conjunto de respuestas al impulso, en este caso, como

$$h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_L [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]. \quad (5.35)$$

Sin embargo, el conjunto de funciones base seleccionado para la señal de entrada al sistema $a(\tau)$ no tiene por qué ser el mismo que el de la señal de salida $b(\tau)$, pero sí estarán representados por la misma variable real. De esta forma, la señal de entrada puede representarse a partir del conjunto $e(\tau; \mu)$ con unos coeficientes $\alpha(\mu)$ a través de la combinación lineal

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (5.36)$$

mientras que la señal de salida puede estar representada a partir del conjunto de funciones base $\hat{e}(\tau; \eta)$ y unos coeficientes $\beta(\eta)$ como

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_{\eta} [\beta(\eta) \hat{e}(\tau; \eta)], \quad (5.37)$$

donde μ y η son los parámetros que describen los conjuntos de funciones base del espacio de partida y de llegada pero no tienen por qué ser iguales, ya que, por ejemplo, se puede representar

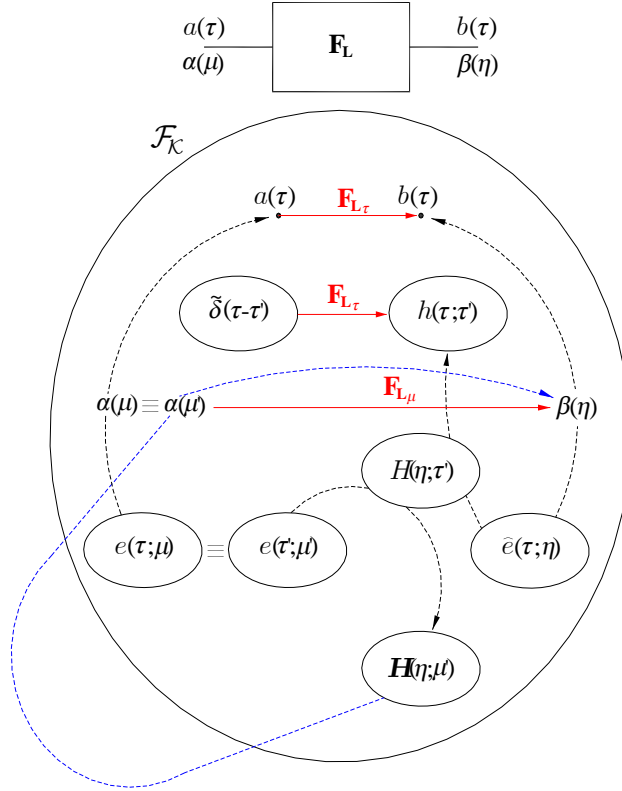


Figura 5.7: Representación esquemática del Análisis Espectral Generalizado cuando el operador lineal no modifica el espacio de señal, pero considerando conjuntos de funciones base diferentes para la señal de entrada y la de salida.

la señal de entrada al sistema en el dominio espectral a través de la transformada de Fourier, siendo $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ mientras que la de salida se puede representar a través de la transformada de Hilbert, siendo $\hat{e}(\tau; \eta) \equiv \hat{e}(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$, perteneciendo ambos conjuntos de funciones base al espacio de señales de variable continua $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$.

En este caso, el Análisis Espectral Generalizado vendría descrito a partir de la misma ecuación que en (5.30)

$$\beta(\eta) = A \mathbf{C} \mathbf{L}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (5.38)$$

aunque teniendo en cuenta que el cálculo de $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$ se realiza a partir de

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A\hat{A}} \langle \langle h(\tau; \tau'), \hat{e}(\tau; \eta) \rangle_\tau, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (5.39)$$

donde, en este caso, los dos productos escalares que hay encadenados van a ser iguales, puesto que nos encontramos en el mismo espacio de señal y, por tanto, con el mismo producto interno definido, además de que tanto τ como τ' son de la misma naturaleza.

La Fig. 5.7 muestra esquemáticamente el proceso del desarrollo del análisis espectral generalizado en el caso particular de que el operador actúe sobre el mismo espacio de señal \mathcal{F}_K .

5.3.2. Operador dentro del mismo espacio de señal y mismo conjunto de funciones base

Este es un caso particular de la situación anterior. Seguimos trabajando dentro del mismo espacio de señal, es decir, $\mathcal{G}_{\mathcal{K}} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$; pero además, en este caso, el conjunto de funciones base escogido para representar la señal de entrada y la de salida del sistema en el dominio espectral es el mismo, por lo que

$$v \equiv \tau, \quad (5.40)$$

$$\eta \equiv \mu, \quad (5.41)$$

así, tanto $a(\tau)$ como $b(\tau)$ pueden ser expresados a partir del mismo conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ como

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (5.42)$$

$$b(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\beta(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (5.43)$$

respectivamente.

En este caso, el Análisis Espectral Generalizado vendrá descrito a partir de la ecuación

$$\beta(\mu) = A \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')], \quad (5.44)$$

donde

$$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A^2} \langle \langle h(\tau; \tau'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}, \quad (5.45)$$

es decir, la proyección del conjunto de respuestas al impulso $h(\tau; \tau')$, primeramente sobre la base $e(\tau; \mu)$, y luego sobre la base conjugada $e^*(\tau'; \mu')$. Este es el mismo resultado que se había obtenido en [2].

La Fig. 5.8 representa de manera esquemática el proceso del análisis espectral generalizado en este caso particular en el que el conjunto de funciones base es el mismo para representar la señal de entrada al sistema y la de salida en el dominio espectral.

5.3.3. Conjunto de funciones base como autofunciones del sistema

Nuevamente nos encontramos en una situación más particular dentro del caso anterior. El operador que define el sistema lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ actúa sobre el mismo espacio de señal y tanto la señal de entrada al sistema como la de salida vienen representadas en el dominio espectral bajo la misma transformada, es decir, bajo el mismo conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$. Añadimos, además, la condición, en este caso, de que cada una de estas funciones base sean *autofunciones* o *funciones propias* del sistema, es decir,

$$e(\tau; \mu) \subset \text{Eig} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \}, \quad (5.46)$$

que cumplan que al pasarlas por el sistema se obtenga como resultado ellas mismas escaladas por un valor, es decir,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} [e(\tau; \mu_0)] = \lambda(\mu_0) e(\tau; \mu_0), \quad (5.47)$$

donde $\lambda(\mu_0)$ es el *autovalor* o *valor propio* correspondiente a la función base $e(\tau; \mu_0)$, es decir, la que tiene el valor μ_0 como parámetro que la describe. En general, para todas las funciones base

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} [e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau; \mu). \quad (5.48)$$

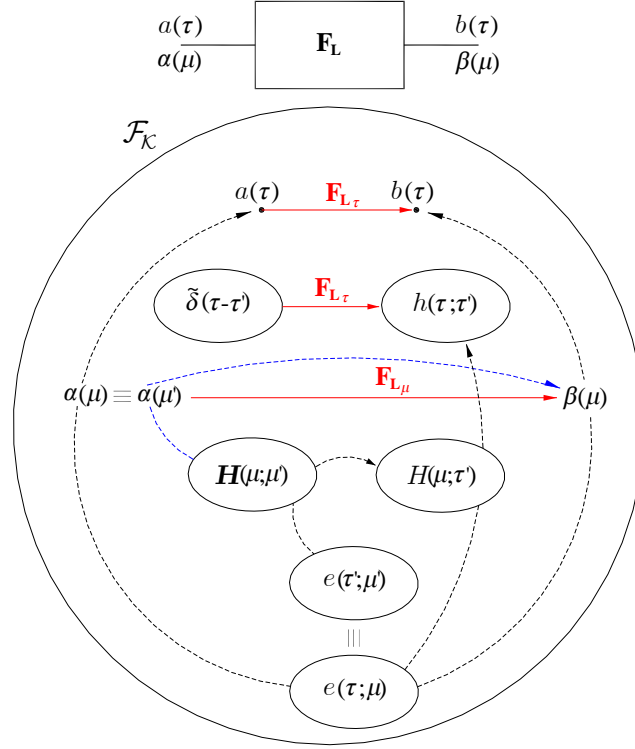


Figura 5.8: Representación esquemática del Análisis Espectral Generalizado cuando el operador actúa dentro del mismo espacio y el conjunto de funciones base escogido para realizar el análisis espectral es el mismo tanto para la señal de entrada al sistema como para la de salida.

Este es el caso general que se considera normalmente para realizar el análisis espectral, puesto que resulta muy sencillo obtener la relación entre la señal de salida y la de entrada en este dominio, puesto que

$$\begin{aligned}
 b(\tau) &= \mathbf{F}_L [a(\tau)] = \mathbf{F}_L [\mathbf{C}\mathbf{L}_\mu [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]] = \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu [\alpha(\mu) \mathbf{F}_L [e(\tau; \mu)]] = \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu [\alpha(\mu) \lambda(\mu) e(\tau; \mu)] = \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu [\beta(\mu) e(\tau; \mu)],
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

por lo que

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu) \tag{5.50}$$

y $\lambda(\mu)$ son los valores que portarán la información del sistema \mathbf{F}_L .

La expresión (5.50) es sencilla, y, por tanto, ampliamente utilizada, puesto que, en comparación con el análisis en el dominio real

$$b(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{L}_{\tau'} [a(\tau') h(\tau; \tau')] \tag{5.51}$$

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu) \tag{5.52}$$

la combinación lineal que hay en el dominio real se reduce a un simple producto en el dominio espectral. Por simple inspección de ambas ecuaciones (5.51) y (5.52), es de suponer que el conjunto de autovalores $\lambda(\mu)$ está relacionado con el conjunto de respuestas al impulso. De hecho, tal como se había visto en la Secc. 3.2, se puede comprobar que esta relación es

$$H(\mu; \tau') = \mathbf{T}_e [h(\tau; \tau')] = \frac{1}{A} e^*(\tau'; \mu) \lambda(\mu). \tag{5.53}$$

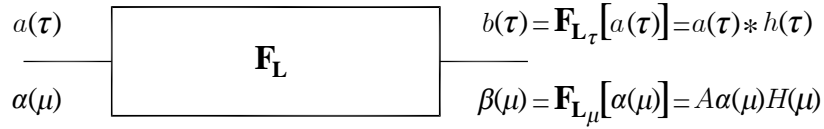


Figura 5.9: En el análisis espectral clásico el conjunto de funciones base escogido son autofunciones del sistema. Así, la señal de salida en dicho dominio no es más que el producto de la señal de entrada por el conjunto de autovalores que se obtienen al pasar el conjunto de funciones base por el sistema.

Un ejemplo bien conocido es cuando se analiza un sistema lineal e invariante bajo la transformada o desarrollo en serie de Fourier (según la naturaleza de las señales que intervienen), ya que el conjunto de funciones que definen esta transformada son siempre autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante. Dado que, entonces, sólo es necesario conocer una única respuesta al impulso, se tiene la relación

$$H(\mu) = \frac{1}{A} e^*(0; \mu) \lambda(\mu) \quad (5.54)$$

y, para el caso de las exponenciales complejas que definen la transformada y el desarrollo en serie de Fourier, $e^*(0; \mu) = 1$ para cualquier valor del parámetro μ , por lo que se llega a la expresión bien conocida de que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante coincide, salvo un factor de escala, con el conjunto de autovalores del sistema, es decir,

$$\lambda(\mu) = A \mathbf{T}_{e_\tau} [h(\tau)]. \quad (5.55)$$

En este caso la combinación lineal de (5.51) se reduce a una convolución, por lo que el análisis de una señal a través de un sistema lineal e invariante bajo la transformada o desarrollo en serie de Fourier en los dominios real y espectral es

$$b(\tau) = a(\tau) * h(\tau), \quad (5.56)$$

$$\beta(\mu) = A\alpha(\mu)H(\mu), \quad (5.57)$$

como muestra la Fig. 5.9, resultado bien conocido que representa el Análisis Espectral Clásico.

Lo que resulta interesante es comprobar que el resultado general para el análisis espectral obtenido en (5.30), se reduce a la expresión bien conocida en (5.52) o en (5.57) al aplicar la condición de que el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ pertenece al subconjunto de autofunciones del sistema. En primer lugar, al encontrarse tanto la señal de entrada como la de salida en el mismo espacio y realizarse el análisis espectral bajo la misma transformada, la expresión (5.30) se reduce a la vista en (5.44), es decir,

$$\beta(\mu) = A \mathbf{C} \mathbf{L}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')], \quad (5.58)$$

pero no resulta sencillo llegar rápidamente a la expresión (5.57) puesto que no aparecen directamente las funciones base para poder aplicar la condición de autofunciones. Es necesario, por tanto, ir más atrás en el desarrollo y encontrar la expresión particular del conjunto $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$ en este caso.

Describamos, primeramente, el conjunto de deltas desplazadas $\left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$ en términos de la base escogida y un conjunto de coeficientes, que llamaremos $\Delta(\mu; \tau')$, como una combinación lineal generalizada, de la siguiente forma

$$\tilde{\delta}(\tau - \tau') = \mathbf{C} \mathbf{L}_{\mu} [\Delta(\mu; \tau') e(\tau; \mu)], \quad (5.59)$$

es, por tanto, que $\Delta(\mu; \tau')$ es la transformada de $\tilde{\delta}(\tau - \tau')$ en la base $e(\tau; \mu)$,

$$\Delta(\mu; \tau') = \mathbf{T}_{e_\tau} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \quad (5.60)$$

es decir, para cada desplazamiento τ' , obtenemos unos coeficientes en μ . De esta manera, se puede encontrar el conjunto de respuestas al impulso como

$$\begin{aligned} h(\tau; \tau') &= \mathbf{F}_L \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] = \mathbf{F}_L \left[\mathbf{C}\mathbf{L}_\mu \left[\Delta(\mu; \tau') e(\tau; \mu) \right] \right] = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu \left[\Delta(\mu; \tau') \mathbf{F}_L \left[e(\tau; \mu) \right] \right], \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde aquí ya se puede aplicar la propiedad de que las funciones base son autofunciones del sistema, así,

$$\begin{aligned} h(\tau; \tau') &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu \left[\Delta(\mu; \tau') \mathbf{F}_L \left[e(\tau; \mu) \right] \right] = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{L}_\mu \left[\Delta(\mu; \tau') \lambda(\mu) e(\tau; \mu) \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

De esta manera se puede determinar que la transformada de $h(\tau; \tau')$ sobre la base $e(\tau; \mu)$ es $\lambda(\mu) \Delta(\mu; \tau')$, es decir,

$$\mathbf{T}_{e_\tau} \left[h(\tau; \tau') \right] = \lambda(\mu) \Delta(\mu; \tau') = H(\mu; \tau'). \quad (5.63)$$

Sólo faltaría por conocer la transformada de este conjunto sobre la base $e(\tau'; \mu'')$ ⁵ para obtener el conjunto de funciones $\mathbf{H}(\mu; \mu'')$, que sería

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mu; \mu'') &= \mathbf{T}_{e_{\tau'}} \left[H(\mu; \tau') \right] = \mathbf{T}_{e_{\tau'}} \left[\lambda(\mu) \Delta(\mu; \tau') \right] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{T}_{e_{\tau'}} \left[\Delta(\mu; \tau') \right] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{T}_{e_{\tau'}} \left[\mathbf{T}_{e_\tau} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right] \right], \end{aligned} \quad (5.64)$$

lo que indica, de alguna manera, que para obtener el resultado deseado, es necesario realizar la transformada del conjunto de deltas desplazadas tanto en la variable τ como en el parámetro τ' .

Yendo para atrás en el desarrollo, de (5.27) se tiene que

$$\beta(\mu) = \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \left\langle \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu''} \left[\mathbf{H}(\mu; \mu'') e(\tau'; \mu'') \right], e^*(\tau'; \mu') \right\rangle_{\tau'} \right], \quad (5.65)$$

donde la expresión

$$\mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu''} \left[\mathbf{H}(\mu; \mu'') e(\tau'; \mu'') \right] \quad (5.66)$$

indica la transformada inversa de $\mathbf{H}(\mu; \mu'')$, que es $H(\mu; \tau')$, así

$$\beta(\mu) = \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \left\langle H(\mu; \tau'), e^*(\tau'; \mu') \right\rangle_{\tau'} \right], \quad (5.67)$$

que, al sustituirla por la expresión obtenida en (5.63) para este caso particular, se tiene

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \left\langle \lambda(\mu) \Delta(\mu; \tau'), e^*(\tau'; \mu') \right\rangle_{\tau'} \right] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \left\langle \mathbf{T}_{e_\tau} \left[\tilde{\delta}(\tau - \tau') \right], e^*(\tau'; \mu') \right\rangle_{\tau'} \right]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

De aquí, intercambiando el operador transformada con el producto escalar,

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \lambda(\mu) \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \mathbf{T}_{e_\tau} \left[\left\langle \tilde{\delta}(\tau - \tau'), e^*(\tau'; \mu') \right\rangle_{\tau'} \right] \right] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \mathbf{T}_{e_\tau} \left[\left\langle e(\tau'; \mu'), \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\rangle_{\tau'} \right] \right] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{C}\mathbf{L}_{\mu'} \left[\alpha(\mu') \mathbf{T}_{e_\tau} \left[e(\tau; \mu') \right] \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

⁵Se trata de la misma base que $e(\tau; \mu)$, por lo que la definición de la transformada va a ser la misma, pero está expresada en otras variables para poder realizar dicha transformada sobre el parámetro que aún no ha sido tocado, el que determina el desplazamiento de las deltas, τ' . El resultado vendrá descrito en μ'' .

y, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{T}_{e_\tau} [e(\tau; \mu')] = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle_\tau = \frac{1}{A} A \tilde{\delta}(\mu - \mu') = \tilde{\delta}(\mu - \mu'), \quad (5.70)$$

se llega a

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \lambda(\mu) \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{T}_{e_\tau} [e(\tau; \mu')]] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \tilde{\delta}(\mu - \mu')], \end{aligned} \quad (5.71)$$

del que se obtiene el siguiente resultado

$$\boxed{\beta(\mu) = \lambda(\mu) \alpha(\mu)}, \quad (5.72)$$

que es el resultado esperado según lo previsto en (5.52).

Y ahora bien, por simple inspección y comparación entre las ecuaciones (5.58) y (5.71),

$$\beta(\mu) = A \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')], \quad (5.73)$$

$$\beta(\mu) = \lambda(\mu) \mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \tilde{\delta}(\mu - \mu')] \quad (5.74)$$

se llega a la conclusión de que el conjunto de funciones $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$ es

$$\boxed{\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu')}, \quad (5.75)$$

que ya se podía intuir a partir de (5.64) ya que

$$\mathbf{H}(\mu; \mu') = \lambda(\mu) \mathbf{T}_{e_{\tau'}} [\mathbf{T}_{e_\tau} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]] \quad (5.76)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(\mu; \mu') &= \lambda(\mu) \mathbf{T}_{e_{\tau'}}^* [\mathbf{T}_{e_\tau} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]] = \\ &= \lambda(\mu) \mathbf{T}_{e_{\tau'}}^* \left[\frac{1}{A} e^*(\mu; \tau') \right] = \\ &= \frac{1}{A^2} \lambda(\mu) \langle e^*(\mu; \tau'), e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} = \\ &= \frac{1}{A^2} \lambda(\mu) A \tilde{\delta}^*(\mu - \mu') = \\ &= \frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu'), \end{aligned} \quad (5.77)$$

resultado al que se quería llegar.

En el caso de que el sistema sea lineal e invariante, la expresión de $\mathbf{H}_*(\mu; \mu')$ es la misma que (5.75), pero se puede reducir, ya que el conjunto de respuestas al impulso es $h(\tau; \tau') = h(\tau - \tau')$, por lo que sólo es necesario conocer $h(\tau)$ y obviar la dependencia de τ' , de esta manera,

$$H(\mu) = \mathbf{T}_{e_\tau} [h(\tau)] = \mathbf{T}_{e_\tau} [h(\tau; 0)] = H(\mu; 0) \quad (5.78)$$

y

$$\begin{aligned} H(\mu; 0) &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\mathbf{H}_*(\mu; \mu') e^*(0; \mu')] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu') e^*(0; \mu') \right] = \\ &= \frac{1}{A} e^*(0; \mu) \lambda(\mu) = H(\mu), \end{aligned} \quad (5.79)$$

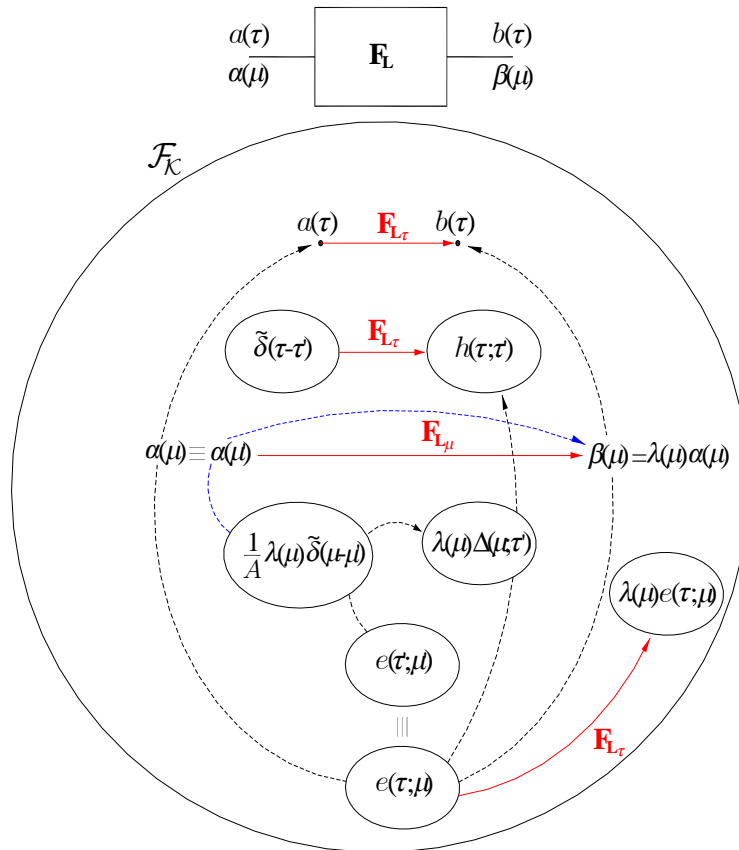


Figura 5.10: Representación esquemática del Análisis Espectral Generalizado cuando el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema. De esta manera, la representación general se reduce al resultado conocido del análisis espectral clásico. Este caso sólo se puede dar en operadores que actúen sobre el mismo espacio de señal y se considere el mismo conjunto de funciones base tanto para la señal de entrada como la de salida.

resultado esperado que ya se había directamente en (5.54) y en (3.42) de la Secc. 3.2.

La Fig. 5.10 muestra esquemáticamente el proceso seguido en este caso particular para realizar el **Análisis Espectral Generalizado** dentro del mismo espacio de señal cuando el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema.

Algunos ejemplos prácticos en los que se aplica detalladamente el análisis espectral generalizado pueden verse en el Cap. 7.

5.4. Resumen de las expresiones del Análisis Espectral Generalizado

La Tabla 5.1 muestra las ecuaciones principales del Análisis Espectral Generalizado para los casos analizados, dependiendo de los espacios entre los que actúe el operador considerado y de las características de los conjuntos de funciones base escogidos, tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

Relación de espacios	Expresión GSA y conjunto $\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$
Diferentes espacios:	$\beta(\eta) = \text{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')],$
	$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A\tilde{A}} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}.$
Mismo espacio:	$\beta(\eta) = \text{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')],$
	$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A\tilde{A}} \langle \langle h(\tau; \tau'), \hat{e}(\tau; \eta) \rangle_{\tau}, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}.$
Mismo conjunto de funciones base:	$\beta(\mu) = \text{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\mu; \mu')],$
	$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A\tilde{A}} \langle \langle h(\tau; \tau'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}.$
Funciones base como autofunciones del sistema:	$\beta(\mu) = \lambda(\mu) \alpha(\mu),$
	$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu').$

Tabla 5.1: Resumen de las expresiones generales del Análisis Espectral Generalizado.

5.5. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha comprobado cómo es posible realizar una generalización del concepto de análisis espectral de un sistema lineal. En la formulación clásica, el análisis espectral se corresponde con el estudio de los autovalores que generan el conjunto de funciones base cuando éstas son autofunciones del sistema. Este análisis es ampliamente utilizado puesto que el conjunto de funciones base que definen la transformada de Fourier son siempre autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante, por lo que, en general, siempre se realiza el análisis espectral de este tipo de sistemas y bajo esta transformada. Esto restringe en gran medida

el tipo de problemas que se pueden analizar en el dominio espectral. Problemas típicos en el dominio espacial o algunos en el dominio temporal, como la modulación en amplitud, son lineales pero no invariantes, quedando fuera de la posibilidad de analizarlos en el dominio espectral bajo la formulación clásica. Mucho menos tratar de considerar otro tipo de transformadas que no sean las de Fourier, que no cuentan con propiedades tan interesantes como ser siempre autofunciones de un sistema lineal e invariante o la de transformar convoluciones en productos, etc.

Sin infravalorar las ventajas evidentes que posee el **Análisis Espectral Clásico**, se ha desarrollado el conocido **Análisis Espectral Generalizado**, que permite analizar un sistema lineal en el dominio espectral, ya sea éste invariante o no invariante, y bajo cualquier tipo de transformada, cuyos elementos de la base que la definen sean ortogonales, pudiendo considerar una transformada diferente en el espacio de partida y en el de llegada. Este análisis espectral ya no se considera en el sentido de los autovalores, puesto que éstos, en general, no van a existir, ya que las funciones base que definen la transformada en cada caso no van a ser, generalmente, autofunciones del sistema. Por el contrario, el análisis espectral generalizado se entiende como la relación existente que hay entre los coeficientes de una señal en una base a la entrada de un sistema lineal y los coeficientes de la señal de salida de ese sistema en otra base.

Los desarrollos teóricos realizados en este capítulo muestran cómo encontrar las ecuaciones del análisis espectral generalizado en el caso más general, es decir, cuando del operador sólo se sabe que es lineal, actúa entre espacios de señal diferentes y se consideran conjuntos de funciones base distintos, es decir, transformadas distintas, tanto en el espacio de partida como en el espacio de llegada. Se han analizado también diferentes casos más particulares, llegando a la expresión del análisis espectral clásico aplicando las particularizaciones oportunas.

Además, las expresiones finales se asemejan formalmente al análisis de un sistema en el dominio real,

$$b(v) = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')], \quad (5.80)$$

$$\beta(\eta) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (5.81)$$

es decir, la señal de salida se representa en términos de una combinación lineal generalizada de la señal de entrada en el dominio correspondiente y un conjunto de funciones que dependen del sistema y, en el caso del análisis espectral, también de los conjuntos de funciones base considerados en los espacios de partida y de llegada.

Todos estos desarrollos permiten extender y generalizar la GSST en cuanto al análisis espectral de un sistema lineal, abarcando la posibilidad de analizar un mayor número de problemas a partir de una formulación general y de una manera rigurosa matemáticamente.

6. Ejemplos cambios de base

Para la realización de las transformadas que aparecen en los ejemplos y demostraciones de este capítulo se han hecho uso de las tablas sobre transformadas que se pueden encontrar en las Refs. [51], [52], [61], [80].

6.1. Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$

Tomando como conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi \in \mathbb{R}}$ que define la transformada de Fourier, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; x') = \left\{\frac{1}{\pi(x-x')}\right\}_{x' \in \mathbb{R}}$ que define la transformada de Hilbert, las ecuaciones para realizar los cambios de base de una función $f(x)$, determinadas en el Apdo. 4.5.2, son

$$H(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi, \quad (6.1)$$

$$F(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx'. \quad (6.2)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(x'; \xi) = j \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'}, \quad (6.3)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; x') = -j \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'}, \quad (6.4)$$

1. Sea la función

$$f(x) = \delta(x - x_0). \quad (6.5)$$

Escogiendo la base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$, para el cálculo de los coeficientes bajo la transformada de Fourier se tiene

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[\delta(x - x_0)] = e^{-j\xi x_0} \quad (6.6)$$

y, según la base $\tilde{e}(x; x') = \left\{\frac{1}{\pi(x-x')}\right\}_{x'}$, para el cálculo de los coeficientes bajo la transformada de Hilbert,

$$H(x') = \mathbf{TH}[\delta(x - x_0)] = \frac{1}{\pi(x_0 - x')}, \quad (6.7)$$

como se muestran en la Fig. 6.1.

Según (6.1), se pueden obtener los coeficientes $H(x')$ de la señal $f(x)$ a partir de $F(\xi)$ como¹

$$\begin{aligned} H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j e^{-j\xi x_0} \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi(x_0 - x')}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

¹Ver la demostración completa en el Ap. D.3.

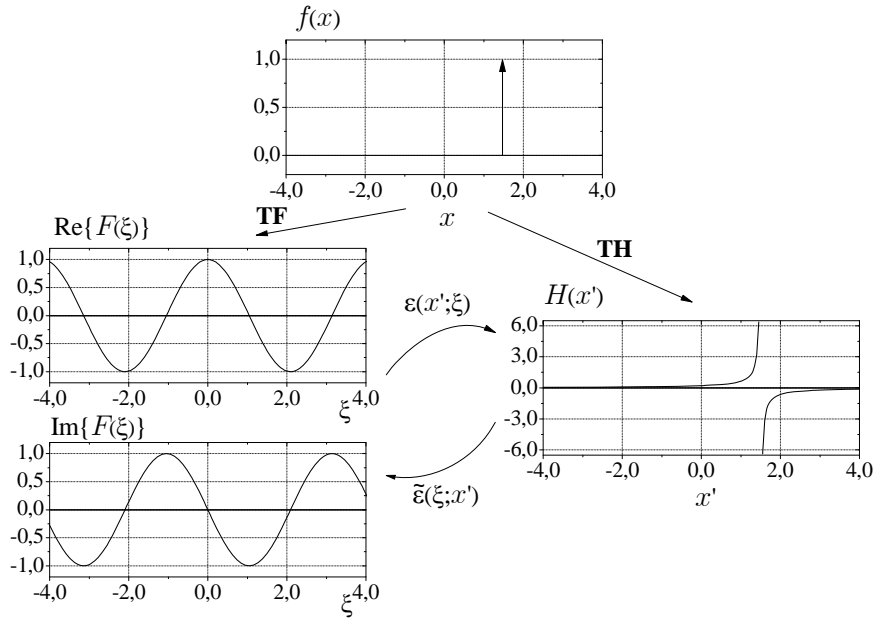


Figura 6.1: Función $f(x) = \delta(x - x_0)$, delta de Dirac localizada en $x_0 = 1,5$, junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su transformada de Hilbert $H(x')$.

como queda demostrado.

De la misma manera, según (6.2), se pueden obtener los coeficientes $F(\xi)$ de la señal $f(x)$ a partir de $H(x')$ como

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -j H(x') \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
 &= -j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(x_0 - x')} e^{-j\xi x'} dx' = \\
 &= -j \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x_0} j \operatorname{sign}(\xi) = \\
 &= e^{-j\xi x_0},
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde, utilizando las relaciones (D.15) y (D.16) del Ap. D.2 sobre demostraciones matemáticas, se llega al resultado esperado.

2. Sea la función

$$f(x) = \operatorname{sinc}(ax). \tag{6.10}$$

Según la base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$, los coeficientes de $f(x)$ bajo la transformada de Fourier son

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[\operatorname{sinc}(ax)] = \frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi) \tag{6.11}$$

y, según la base que define la transformada de Hilbert, $\tilde{e}(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$, el cálculo de los coeficientes en esta base es,

$$H(x') = \mathbf{TH}[\operatorname{sinc}(ax)] = \frac{\cos(ax') - 1}{ax'}, \tag{6.12}$$

tal como se muestran en la Fig. 6.2.

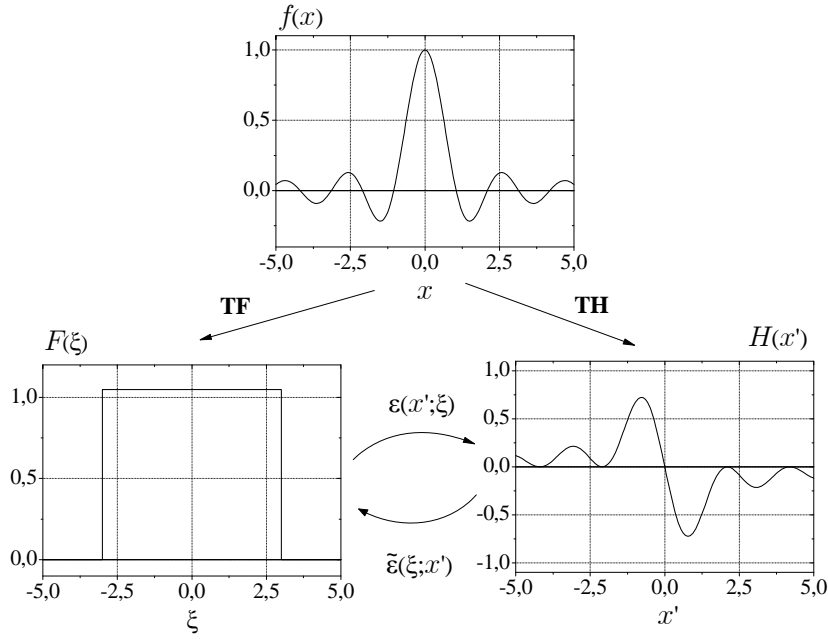


Figura 6.2: Función sinc $f(x) = \text{sinc}(ax)$ con un valor de $a = 3$ junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su transformada de Hilbert $H(x')$.

Para probar las ecuaciones del cambio de base, según (6.1), se obtiene²

$$\begin{aligned}
 H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j\frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\
 &= \frac{j\pi}{2\pi a} \int_{\xi=-a}^a \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\
 &= \frac{\cos(ax') - 1}{ax'}, \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Igualmente, a partir de (6.2),³

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
 &= -j \text{sign}(\xi) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax') - 1}{ax'} e^{-j\xi x'} dx' = \\
 &= -j \text{sign}(\xi) \left(-j\frac{\pi}{2a} \text{sign}(\xi - a) - j\frac{\pi}{2a} \text{sign}(\xi + a) + j\frac{\pi}{a} \text{sign}(\xi) \right) = \\
 &= \frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi), \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

que es el resultado esperado.

3. Sea la función

$$f(x) = Ae^{j\xi_0 x}. \tag{6.15}$$

La transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$F(\xi) = \mathbf{TF} [Ae^{j\xi_0 x}] = 2\pi A\delta(\xi - \xi_0), \tag{6.16}$$

²Ver la demostración completa en el Ap. D.4.

³Ver la demostración completa en el Ap. D.5.

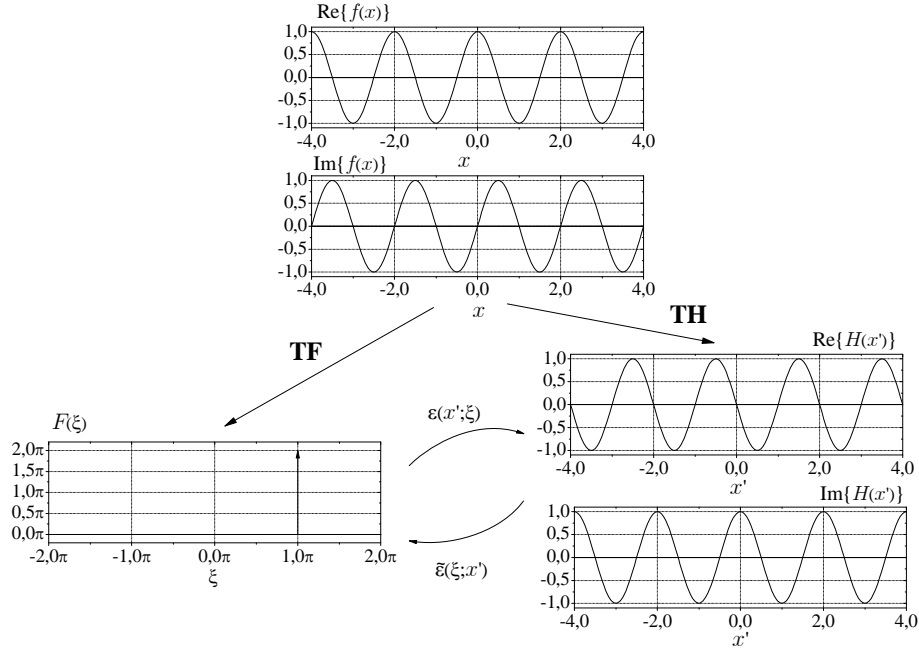


Figura 6.3: Función exponencial compleja $f(x) = e^{j\xi_0 x}$ de amplitud 1 con un valor de pulsación $\xi_0 = \pi$ y, por tanto, $X_0 = 2$, junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su transformada de Hilbert $H(x')$.

mientras que la transformada de Hilbert de $f(x)$ es

$$H(x') = \mathbf{TH} [Ae^{j\xi_0 x}] = jA \text{sign}(\xi_0) e^{j\xi_0 x'}, \quad (6.17)$$

tal como aparece en la Fig. 6.3.

Se comprueba, a partir de (6.1), el cambio de $F(\xi)$ a $H(x')$ como

$$\begin{aligned} H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j2\pi A\delta(\xi - \xi_0) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= jA \text{sign}(\xi_0) e^{j\xi_0 x'}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

como se quería probar.

De la misma manera, a partir de (6.2) se comprueba el cambio de base de $H(x')$ a $F(\xi)$,

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jjA \text{sign}(\xi_0) e^{j\xi_0 x'} \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= A \text{sign}(\xi_0) \text{sign}(\xi) \int_{x'=-\infty}^{\infty} e^{j\xi_0 x'} e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= A \text{sign}(\xi_0) \text{sign}(\xi) \int_{x'=-\infty}^{\infty} e^{-j(\xi - \xi_0)x'} dx' = \\ &= A \text{sign}(\xi_0) \text{sign}(\xi) 2\pi\delta(\xi - \xi_0) = \\ &= A \text{sign}(\xi_0) \text{sign}(\xi_0) 2\pi\delta(\xi - \xi_0) = \\ &= 2\pi A\delta(\xi - \xi_0), \end{aligned} \quad (6.19)$$

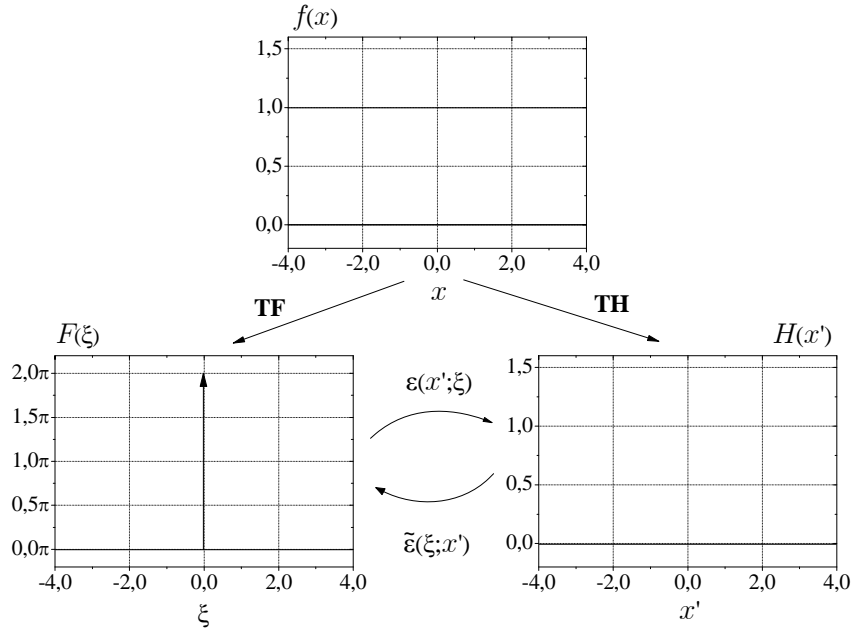


Figura 6.4: Función constante de amplitud $K = 1$, $f(x) = 1$, junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su transformada de Hilbert $H(x')$.

resultado que se deseaba encontrar.

4. Sea la función

$$f(x) = K. \quad (6.20)$$

Este es un ejemplo interesante, puesto que la transformada de Fourier de una constante es

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[K] = 2\pi K \delta(\xi), \quad (6.21)$$

mientras que la transformada de Hilbert de cualquier constante es siempre nula⁴

$$H(x') = \mathbf{TH}[K] = 0, \quad (6.22)$$

como puede verse en la Fig. 6.4.

En este caso, si comprobamos las ecuaciones del cambio de base para estas dos bases que definen la transformada de Fourier y la de Hilbert, se obtiene, para el cambio de $F(\xi)$ a $H(x')$, según (6.1),

$$\begin{aligned} H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j2\pi K \delta(\xi) \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \end{aligned}$$

⁴Es conveniente recordar que la transformada de Hilbert no diferencia constantes, es decir, que la transformada de Hilbert de dos funciones que difieran en una constante es la misma, lo que querría decir que la transformada de Hilbert no sería un operador inyectivo, no existiendo, por tanto, una función única para la transformada inversa de Hilbert, sino un conjunto infinito determinado por cada constante en que difieran éstas. Para resolver este problema, se ha definido la relación de equivalencia de funciones vista en el Proyecto Fin de Carrera del mismo autor, [1], en el que dos funciones son equivalentes si difieren sólo en una constante, tomando como representante de cada clase, la función que tenga valor medio nulo. Por esta razón, la transformada de Hilbert de una constante va a ser siempre la función nula.

$$\begin{aligned}
&= jK \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'} \Big|_{\xi=0} = \\
&= jK \operatorname{sign}(0) e^{j0x'} = \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

lo cual es el resultado esperado.

Sin embargo, al hacer el cambio de $H(x')$ a $F(\xi)$ según (6.2) se tiene

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -j0 \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

es decir, no es el resultado esperado, que debería ser $F(\xi) = 2\pi K\delta(\xi)$. Sin embargo, en relación a lo comentado anteriormente, la transformada de Hilbert considera cualquier constante como la constante nula, por tanto, al hacer el cambio de coeficientes desde los de la transformada de Hilbert, $H(x')$, a los de la transformada de Fourier, $F(\xi)$, el resultado es el que cabría esperar cuando la función original fuera $f(x) = 0$.

Esto no quiere decir que las ecuaciones del cambio de base sean erróneas o tengan excepciones, sino que hay que tener en cuenta las particularidades de la transformada de Hilbert en este caso, considerando la relación de equivalencia de funciones vista en [1], donde dos funciones son equivalentes si difieren sólo en una constante, y que no se aplica en la transformada de Fourier. Una vez tenido esto en cuenta, la solución para realizar correctamente el cambio de base en el caso de que haya constantes en la función original pasa por expresar las funciones constantes como un caso particular de exponenciales complejas de pulsación nula, como el ejemplo 3. De esta manera, tomando la expresión (6.18) de los coeficientes de $H(x')$ del ejemplo 3, donde $A \equiv K$ y para una pulsación ξ_0 arbitraria pero que después de particularizará como un valor nulo, se tiene

$$H(x') = jK \operatorname{sign}(\xi_0) e^{j\xi_0 x'} \tag{6.25}$$

se obtendría

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jjK \operatorname{sign}(\xi_0) e^{j\xi_0 x'} \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\
&= 2\pi K\delta(\xi - \xi_0),
\end{aligned} \tag{6.26}$$

que, particularizando para $\xi_0 = 0$ se obtendría

$$F(\xi) = 2\pi K\delta(\xi), \tag{6.27}$$

que es el resultado deseado.

6.2. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$

Tomando como conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{\delta_0(x - x')\}_{x' \in \langle X_0 \rangle}$, que define una transformada identidad, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ que define el desarrollo en serie de Fourier, las ecuaciones para realizar los cambios de base de una función $f_0(x)$ periódica, determinadas en el Apdo. 4.5.3, son

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx', \quad (6.28)$$

$$f(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'}. \quad (6.29)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(m; x') = \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 x'}, \quad (6.30)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x'; m) = e^{jm\xi_0 x'}. \quad (6.31)$$

1. Sea la función

$$f_0(x) = \cos(\xi_0 x). \quad (6.32)$$

A partir de la base ideal $e(x; x') = \{\delta_0(x - x')\}_{x'}$, los coeficientes en esta base son

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[\cos(\xi_0 x)] = \cos(\xi_0 x'), \quad (6.33)$$

mientras que a partir de la base $\tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$, los coeficientes del **DSF** son

$$a(m) = \mathbf{DSF}[\cos(\xi_0 x)] = \frac{1}{2}\delta(m-1) + \frac{1}{2}\delta(m+1), \quad (6.34)$$

como se muestran en la Fig. 6.5.

Según la ecuación (6.28), se pueden encontrar los coeficientes $a(m)$ a partir de $f(x')^5$,

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \cos(\xi_0 x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \frac{e^{j\xi_0 x'} + e^{-j\xi_0 x'}}{2} e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{2}\delta(m+1) + \frac{1}{2}\delta(m-1). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Y según la ecuación (6.29) se prueba

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\delta(m-1) + \frac{1}{2}\delta(m+1) \right) e^{jm\xi_0 x'} = \\ &= \frac{1}{2}e^{j\xi_0 x'} + \frac{1}{2}e^{-j\xi_0 x'} = \\ &= \cos(\xi_0 x'), \end{aligned} \quad (6.36)$$

que son los resultados esperados.

⁵Se puede ver la demostración completa en el Ap. D.7.

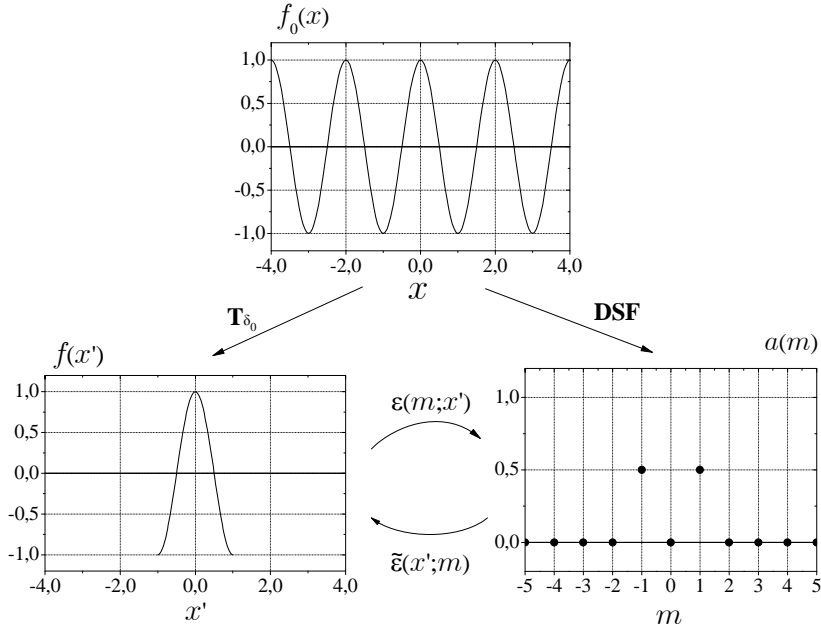


Figura 6.5: Función coseno $f_0(x) = \cos(\pi x)$ periódica de periodo $X_0=2$ con $\xi_0=\pi$, junto con su transformada en deltas periódicas \mathbf{T}_{δ_0} (función definida sólo en un periodo) $f(x')$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

2. Sea la función

$$f_0(x) = P_{0,\Delta}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\Delta}(x - kX_0) \quad (6.37)$$

un tren de pulsos de ancho Δ periódico de periodo X_0 .

Los coeficientes bajo la base ideal de deltas desplazadas son

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[P_{0,\Delta}(x)] = P_{\Delta}(x' - kX_0), \quad (6.38)$$

un pulso de ancho Δ centrado en $x' = kX_0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y definido sólo en un intervalo de longitud X_0 , mientras que los coeficientes del **DSF** son

$$a(m) = \mathbf{DSF}[P_{0,\Delta}(x)] = \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right), \quad (6.39)$$

según se puede ver en la Fig. 6.6.

A partir de (6.28) se comprueba que⁶

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} P_{\Delta}(x' - kX_0) e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=kX_0 - \frac{\Delta}{2}}^{kX_0 + \frac{\Delta}{2}} e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right), \end{aligned} \quad (6.40)$$

⁶Ver la demostración completa en el Ap. D.8.

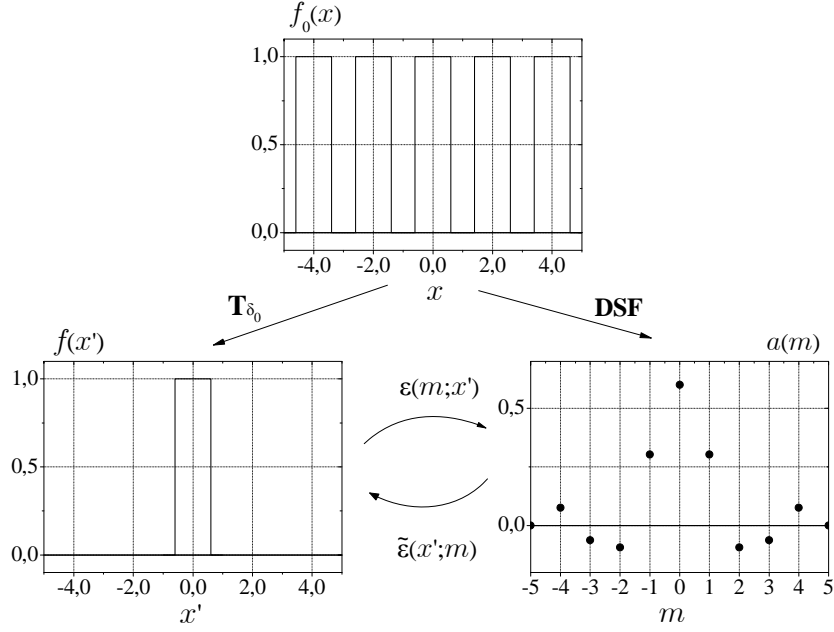


Figura 6.6: Función tren de pulsos $f_0(x) = P_{0,\Delta}(x)$ periódica de periodo $X_0=2$ con un ancho de pulso $\Delta = 1, 2$, junto con su transformada en deltas periódicas \mathbf{T}_{δ_0} (función definida sólo en un periodo) $f(x')$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

y a partir de (6.29)⁷,

$$\begin{aligned}
 f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= \mathbf{DSF}^{-1}\left[\frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right)\right] = \\
 &= P_{0,\Delta}(x') \quad \text{con } x' = \langle X_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

3. Sea la función

$$f(x) = \delta_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX_0), \tag{6.42}$$

un tren de deltas de periodo X_0 .

Los coeficientes de esta señal bajo la base ideal de deltas desplazadas son

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[\delta_0(x)] = \delta(x' - kX_0) \tag{6.43}$$

es decir, una delta localizada en $x' = kX_0$ para algún valor de $k \in \mathbb{Z}$ y definida sobre un intervalo de longitud X_0 , mientras que los coeficientes del **DSF** son

$$a(m) = \mathbf{DSF}[\delta_0(x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \delta(m - n) = \frac{1}{X_0} \quad \forall m, \tag{6.44}$$

que aparecen representados en la Fig. 6.7.

⁷La demostración completa se encuentra en el Ap. D.9.

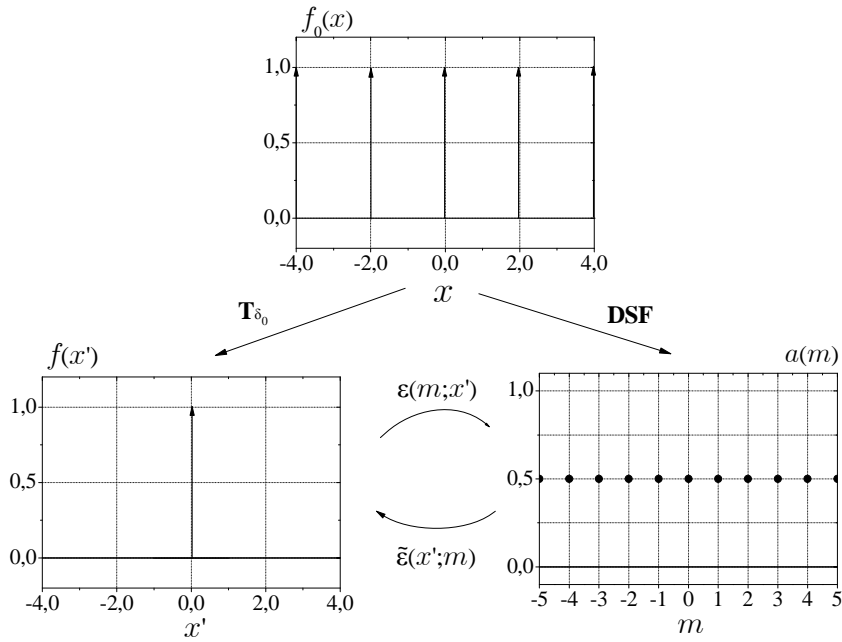


Figura 6.7: Función tren de deltas $f_0(x) = \delta_0(x)$ periódica de periodo $X_0=2$, junto con su transformada en deltas periódicas \mathbf{T}_{δ_0} (función definida sólo en un periodo) $f(x')$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

Se comprueba, a partir de (6.28), que

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} \delta(x' - kX_0) e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 kX_0} = \\
 &= \frac{1}{X_0} e^{-jm \frac{2\pi}{X_0} kX_0} = \\
 &= \frac{1}{X_0} e^{-jmk2\pi} = \\
 &= \frac{1}{X_0} \forall m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \delta(m-n), \tag{6.45}
 \end{aligned}$$

y, a partir de (6.29)⁸,

$$\begin{aligned}
 f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \delta(m-n) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= \frac{1}{X_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m-n) e^{jm\xi_0 x'} =
 \end{aligned}$$

⁸En esta demostración se utiliza el resultado del Ap. D.6 del Apéndice sobre demostraciones matemáticas para realizar el sumatorio infinito de exponenciales.

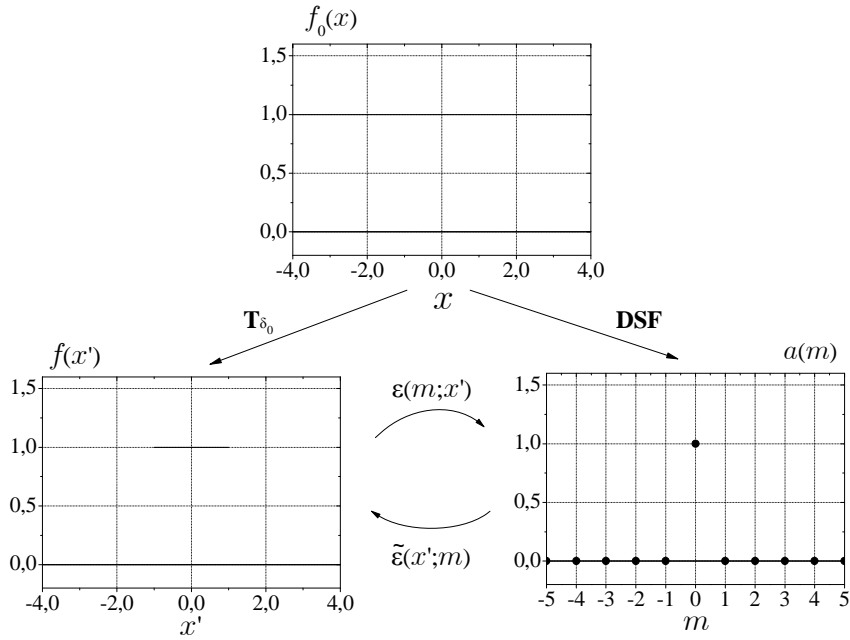


Figura 6.8: Función constante $f_0(x) = K$ de valor $K = 1$, periódica de periodo $X_0 = 2$, junto con su transformada en deltas periódicas \mathbf{T}_{δ_0} (función definida sólo en un periodo) $f(x')$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{X_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\xi_0 x'} = \\
 &= \frac{1}{X_0} X_0 \delta(x') = \\
 &= \delta(x'), \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

que, de considerar todo este desarrollo sobre $x' - kX_0$ se hubiera obtenido una delta centrada en $x' = kX_0$ y no en $x' = 0$, lo que es intrascendente.

De esta forma se obtienen los coeficientes en una y otra base a partir de los coeficientes de la otra.

4. Sea la función

$$f(x) = K, \quad K \in \mathbb{C}. \tag{6.47}$$

Esta función puede considerarse no periódica o periódica de cualquier periodo. Supongamos que sea periódica de periodo X_0 , así, los coeficientes bajo la base ideal de deltas desplazadas será

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[K] = K, \tag{6.48}$$

es decir, sigue siendo una función constante, pero recordando que sólo está definida en un intervalo de longitud X_0 (que es donde únicamente se tiene la información del periodo de la señal). Los coeficientes del **DSF** para esta señal son,

$$a(m) = \mathbf{DSF}[K] = K\delta(m) = \begin{cases} K & m = 0 \\ 0 & m \neq 0, \end{cases} \tag{6.49}$$

que se muestran en la Fig. 6.8.

Se puede, por tanto, comprobar fácilmente que las ecuaciones del cambio de base son correctas ya que, a partir de (6.28) se puede obtener $a(m)$ conocido $f(x')$ como⁹

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} K e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= K\delta(m),
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

y, particularizando en este caso (6.29), se pueden obtener los coeficientes $f(x')$ a partir de los $a(m)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} K\delta(m) e^{jm\xi_0 x'} = \\
 &= K e^{j0\xi_0 x'} = \\
 &= K \quad x' = \langle X_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

⁹Ver la demostración completa en el Ap. D.10.

6.3. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$

Tomando como conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi \in \mathbb{R}}$, que define la transformada de Fourier, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$, con $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier, las ecuaciones para realizar los cambios de base de una función $f_0(x)$ periódica, determinadas en el Apdo. 4.5.4, son

$$a(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi, \quad (6.52)$$

$$F(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0). \quad (6.53)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(m; \xi) = \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right), \quad (6.54)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = 2\pi \delta(\xi - m\xi_0), \quad (6.55)$$

1. Sea la función

$$f_0(x) = \cos(\xi_0 x). \quad (6.56)$$

Según la base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$, los coeficientes $F(\xi)$ definidos como la transformada de Fourier de $f(x)$ son:

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[\cos(\xi_0 x)] = \pi \delta(\xi - \xi_0) + \pi \delta(\xi + \xi_0), \quad (6.57)$$

es decir, dos deltas de Dirac en las posiciones $\xi = \pm\xi_0$ ponderadas por π .

Asimismo, según la base $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$, los coeficientes $a(m)$ definidos a partir del desarrollo en serie Fourier son

$$a(m) = \mathbf{DSF}[\cos(\xi_0 x)] = \frac{1}{2} \delta(m-1) + \frac{1}{2} \delta(m+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & m = \pm 1 \\ 0 & m \neq \pm 1 \end{cases}, \quad (6.58)$$

es decir, dos deltas de Kronecker localizadas en $m = \pm 1$ y ponderadas por $\frac{1}{2}$. Estas funciones se representan en la Fig. 6.9.

A partir de las ecuaciones (6.52) y (6.53), se comprueba el cambio de base, puesto que

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} (\pi \delta(\xi - \xi_0) + \pi \delta(\xi + \xi_0)) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi_0 - m\xi_0)\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(-\xi_0 - m\xi_0)\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}\left((1-m)\frac{2\pi}{X_0}\right)\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}\left((-1-m)\frac{2\pi}{X_0}\right)\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sinc}((m-1)\pi) + \operatorname{sinc}(m+1)\pi) = \\ &= \frac{1}{2} \delta(m-1) + \frac{1}{2} \delta(m+1), \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde se ha tenido en cuenta en la quinta igualdad que la función $\operatorname{sinc}(x)$ es par.

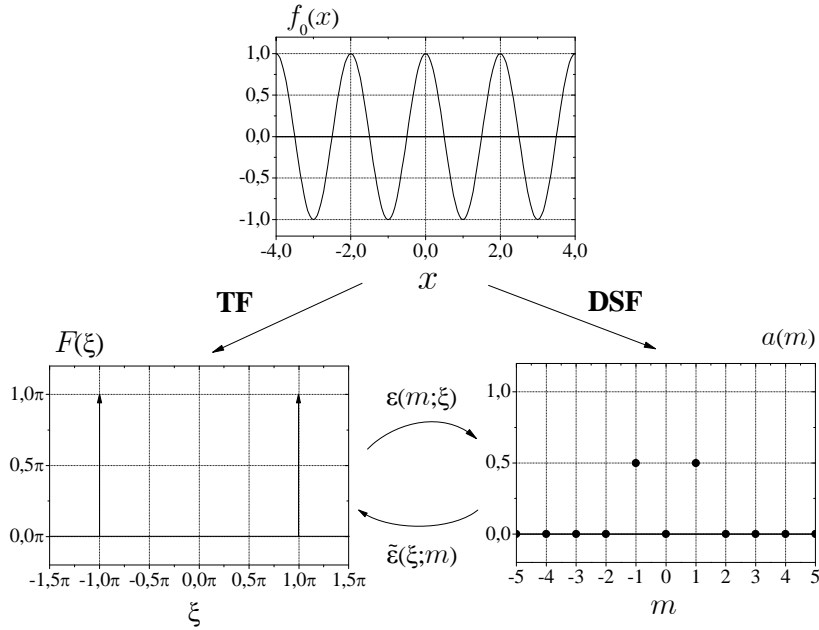


Figura 6.9: Función coseno $f_0(x) = \cos(\pi x)$ periódica de periodo $X_0=2$ con $\xi_0 = \pi$, junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \delta(m-1) + \frac{1}{2} \delta(m+1) \right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= \pi \delta(\xi - \xi_0) + \pi \delta(\xi + \xi_0).
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

- Seal el tren de pulsos de anchura $\Delta < X_0$

$$f_0(x) = P_{0,\Delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{\Delta}(x - nX_0). \tag{6.61}$$

La **TF** de esta señal será

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[P_{0,\Delta}(x)] = \frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k\pi \frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - k\xi_0), \tag{6.62}$$

mientras que el **DSF** es

$$a(m) = \mathbf{DSF}[P_{0,\Delta}(x)] = \frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right), \tag{6.63}$$

como se pueden visualizar en la Fig. 6.10.

La aplicación de las ecuaciones del cambio de base a este ejemplo son bien sencillas, así de

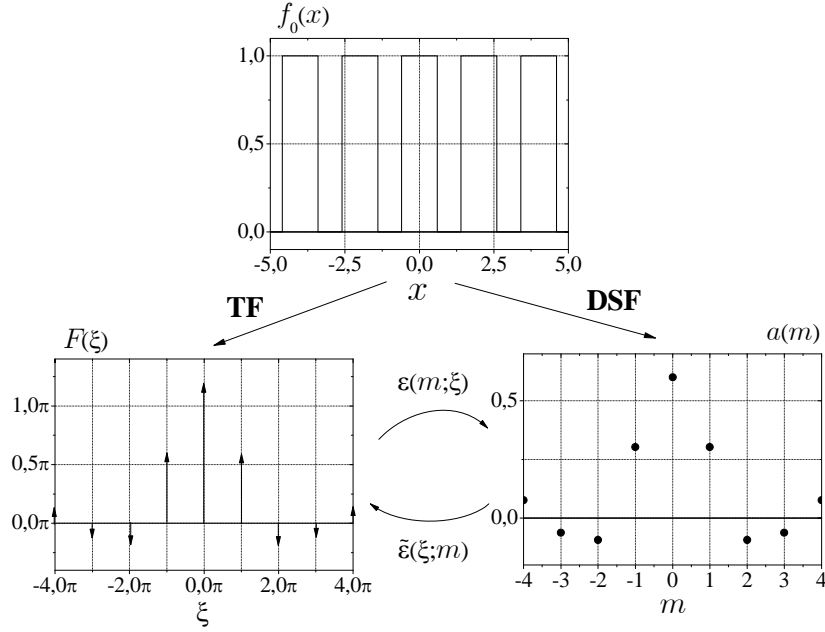


Figura 6.10: Función tren de pulsos $f_0(x) = P_{0,\Delta}(x)$ periódica de periodo $X_0=2$ con un ancho de pulso $\Delta = 1, 2$, junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

(6.52),

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - k\xi_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(k\xi_0 - m\xi_0)\right) = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(k-m)\frac{2\pi}{X_0}\right) = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \operatorname{sinc}((k-m)\pi) = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(k-m) = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right), \tag{6.64}
 \end{aligned}$$

y de (6.53),

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= \frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - m\xi_0). \tag{6.65}
 \end{aligned}$$

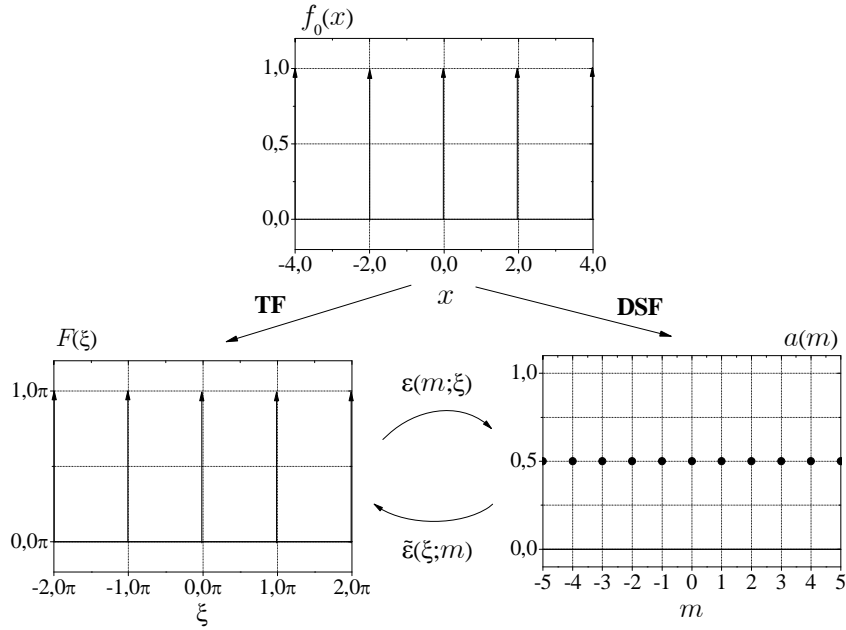


Figura 6.11: Función tren de deltas $f_0(x) = \delta_0(x)$ periódica de periodo $X_0=2$ junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

3. Considerando el tren de deltas de periodo X_0

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0), \quad (6.66)$$

la **TF** es

$$F(\xi) = \mathbf{TF} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0) \right] = \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - k\xi_0), \quad (6.67)$$

y su **DSF** es

$$a(m) = \mathbf{DSF} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0) \right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \delta(m - p) = \frac{1}{X_0}, \quad \forall m, \quad (6.68)$$

tal como aparecen en la Fig. 6.11.

Aplicando la ecuación (6.52) del cambio de base para este caso se obtiene

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - k\xi_0) \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (k\xi_0 - m\xi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (k - m) \frac{2\pi}{X_0} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}((k-m)\pi) = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-m) = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(m-p), \tag{6.69}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que la delta de Kronecker es par y que el índice del sumatorio es indiferente que sea k ó p .

Y de la misma manera, aplicando (6.53), se tiene

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \delta(m-p) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \frac{2\pi}{X_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - p\xi_0) = \\
&= \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - k\xi_0), \tag{6.70}
\end{aligned}$$

donde se ha cambiado el índice del sumatorio de p a k simplemente para homogeneizar la expresión con (6.67).

4. Sea la señal constante

$$f_0(x) = K, \quad K \in \mathbb{C}. \tag{6.71}$$

Esta señal se puede considerar periódica de cualquier periodo, en concreto de periodo X_0 , así, su transformada de Fourier es

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[K] = 2\pi K \delta(\xi), \tag{6.72}$$

en el que se puede ver que no hay ninguna referencia al periodo de la señal.

Su desarrollo en serie de Fourier, considerando que sea periódica de periodo X_0 es

$$a(m) = \mathbf{DSF}[K] = K \delta(m) = \begin{cases} K & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}. \tag{6.73}$$

Estas gráficas vienen representadas en la Fig. 6.12.

Al aplicar las ecuaciones del cambio de base de la transformada de Fourier al desarrollo en serie de Fourier (6.52) se obtiene

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} 2\pi K \delta(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
&= K \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(0 - m\xi_0)\right) =
\end{aligned}$$

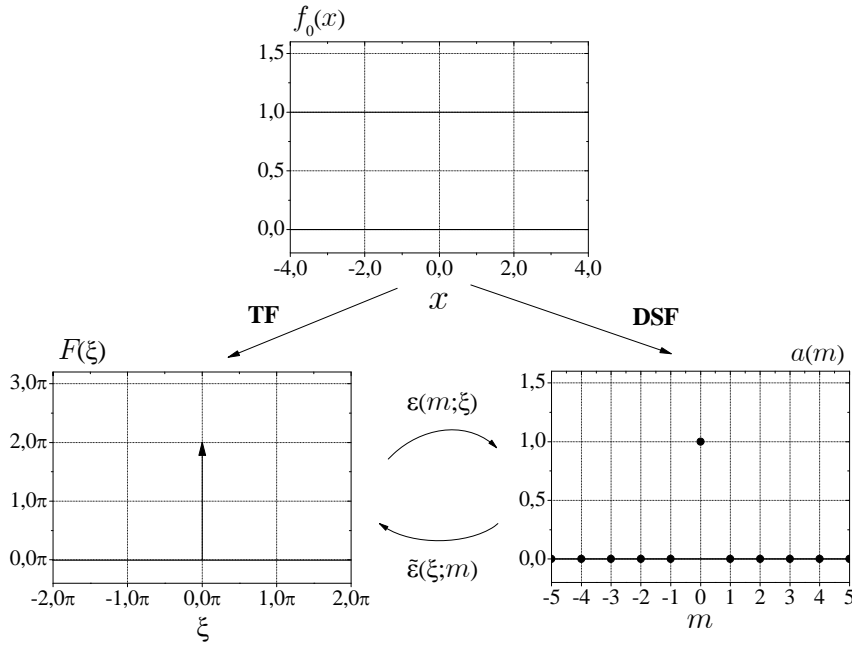


Figura 6.12: Función constante $f_0(x) = K$ de valor $K = 1$ periódica de periodo $X_0 = 2$ junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(m)$.

$$\begin{aligned}
 &= K \operatorname{sinc} \left(\frac{X_0}{2} m \frac{2\pi}{X_0} \right) = \\
 &= K \operatorname{sinc} (m\pi) = \\
 &= K \delta (m),
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

utilizando la propiedad de paridad de la función $\operatorname{sinc}(x)$.

Y al revés, al pasar del desarrollo en serie a la transformada según (6.53),

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} K \delta(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= 2\pi K \delta(\xi).
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

En este caso, la señal en el dominio espectral bajo la **TF** no va a depender del periodo, cosa que ocurriría en los demás ejemplos. Esto es debido a que la señal constante es periódica para cualquier periodo, por lo que su expresión es válida para cualquier periodo, es decir, el periodo es una información irrelevante.

5. Consideremos por último una señal $f(x)$ arbitraria no periódica de soporte finito $\operatorname{supp}\{f(x)\} = (a, b)$, absolutamente integrable y que no tenga singularidades, periodificada sobre un periodo $X_0 \geq b - a$ para que no haya solapamiento, siendo, por tanto,

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x - nX_0). \tag{6.76}$$

Suponiendo conocida $F_c(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$, la transformada de Fourier $F(\xi)$ de $f_0(x)$ será

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \mathbf{TF}[f_0(x)] = \\
&= \mathbf{TF}\left[f(x) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0)\right] = \\
&= \mathbf{TF}[f(x)] \mathbf{TF}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0)\right] = \\
&= F_c(\xi) \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - k\xi_0) = \\
&= \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \delta(\xi - k\xi_0)
\end{aligned} \tag{6.77}$$

es decir, la señal espectral $F_c(\xi)$ muestreada en los múltiplos enteros de la pulsación fundamental¹⁰ que modula a un tren de deltas de periodo ξ_0 .

Aplicando la ecuación (6.52) del cambio de base para encontrar los coeficientes $a(m)$ que la describen en términos del desarrollo en serie de Fourier se obtiene,

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \delta(\xi - k\xi_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(k\xi_0 - m\xi_0)\right) = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(k - m) \frac{2\pi}{X_0}\right) = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \operatorname{sinc}((k - m)\pi) = \\
&= \frac{1}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(k\xi_0) \delta(k - m) = \\
&= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0),
\end{aligned} \tag{6.78}$$

es decir, se llega a la conclusión de que se pueden obtener los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $a(m)$ de una señal periódica $f_0(x)$ a partir de la transformada de Fourier $F_c(\xi)$ de la señal formada únicamente por un solo periodo $f(x)$, siendo estos coeficientes $a(m)$ el muestreo de la transformada $F_c(\xi)$ en los valores $\xi = m\xi_0$ y ponderados por $\frac{1}{X_0}$.

Este es un resultado conocido, puesto que, por la propia definición de los coeficientes del

¹⁰ $F_c(\xi)$ puede ser muestreada en $\xi = k\xi_0$ puesto que $f(x)$ cumple las condiciones para que exista la \mathbf{TF} en términos de funciones ordinarias, no en términos de distribuciones.

DFS se llega al resultado esperado, así

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_a^b f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=a}^b f(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \delta(\xi - m\xi_0) d\xi dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \delta(\xi - m\xi_0) d\xi = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F_c(\xi) \delta(\xi - m\xi_0) d\xi = \\
&= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0). \tag{6.79}
\end{aligned}$$

Esto implica que tan solo puede ser necesario conocer la transformada de Fourier de la señal que sólo contiene un periodo para encontrar los coeficientes de la señal periodificada para un periodo X_0 arbitrario (siempre que éste sea mayor que el soporte de la función); así, para una misma señal $f(x)$ con $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$, se pueden tener diferentes coeficientes cuando la periodificamos para distintos periodos, por ejemplo, volviendo al caso del ejemplo 2, se tenía que la **TF** de un tren de pulsos es

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[P_{0,\Delta}(x)] = \frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - k\xi_0), \tag{6.80}$$

que se corresponde con el muestreo de una señal sinc, ya que

$$F_c(\xi) = \mathbf{TF}[P_{\Delta}(x)] = \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right); \tag{6.81}$$

así, a partir de una misma expresión, se tienen diferentes funciones para diferentes periodos, por ejemplo:

a) $X_0 = \Delta$:

Los coeficientes del **DSF** serían

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0) = \\
&= \frac{1}{X_0} \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}m\xi_0\right) = \\
&= \frac{\Delta}{\Delta} \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}m\frac{2\pi}{\Delta}\right) = \\
&= \text{sinc}(m\pi) = \\
&= \delta(m), \tag{6.82}
\end{aligned}$$

y los de la **TF**,

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \delta(\xi).
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Ambas expresiones se corresponden con lo que sería el **DSF** y la **TF**, respectivamente, de una señal constante de valor 1, ya que es lo que ocurre al periodificar un pulso cuyo periodo sea igual que su ancho, como se muestra en la Fig. 6.13(a).

b) $X_0 = 2\Delta$:

En este caso, los coeficientes del **DSF** son,

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0) = \\
&= \frac{1}{X_0} \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m\xi_0\right) = \\
&= \frac{\Delta}{2\Delta} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m \frac{2\pi}{2\Delta}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} & m = 0 \\ 0 & m \text{ par} \\ \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{2}\right) & m \text{ impar,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.84}$$

y los coeficientes de la **TF**,

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{2}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{2}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \begin{cases} \pi & m = 0 \\ 0 & m \text{ par} \\ \pi \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{2}\right) \delta(\xi - m\xi_0) & m \text{ impar.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.85}$$

El hecho de que el periodo sea exactamente el doble del ancho del pulso hace que en su representación espectral bajo la **TF** se produzcan nulos las pulsaciones pares, salvo para la pulsación 0; equivalentemente es nulo en las posiciones pares, salvo en la 0, de los coeficientes del **DSF**, tal como se muestra en la Fig. 6.13(b).

c) $X_0 = k\Delta$, con $k \in \mathbb{N}$:

Para este caso, los coeficientes del **DSF** son,

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0) = \\
&= \frac{1}{X_0} \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m\xi_0\right) = \\
&= \frac{\Delta}{k\Delta} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m \frac{2\pi}{k\Delta}\right) = \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{k}\right) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{k} & m = 0 \\ 0 & m \text{ múltiplo de } k \\ \frac{1}{k} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{k}\right) & \text{resto,} \end{cases} \quad (6.86)
\end{aligned}$$

y los coeficientes de la **TF** son,

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{k}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \frac{2\pi}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{k}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{k} & m = 0 \\ 0 & m \text{ múltiplo de } k \\ \frac{2\pi}{k} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{k}\right) \delta(\xi - m\xi_0) & \text{resto,} \end{cases} \quad (6.87)
\end{aligned}$$

es decir, que periodificar el pulso a un periodo que sea múltiplo entero de su ancho produce nulos en las pulsaciones múltiplos de ese periodo. Los dos ejemplos anteriores son un caso particular de este resultado. Para $k = 4$ se muestra el ejemplo en la Fig. 6.13(c).

d) $X_0 = a\Delta$, con $a > 1$, $a \notin \mathbb{Q}$:

En el caso contrario en el que el periodo no sea un múltiplo entero, ni siquiera racional, del ancho del pulso, se tendrán valores no nulos en todas las posiciones según las expresiones generales, tanto para los coeficientes del **DSF** como para los de la **TF**, respectivamente:

$$\begin{aligned}
a(m) &= \frac{1}{X_0} F_c(m\xi_0) = \\
&= \frac{1}{X_0} \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m\xi_0\right) = \\
&= \frac{\Delta}{a\Delta} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2} m \frac{2\pi}{a\Delta}\right) = \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(m \frac{\pi}{a}\right), \quad (6.88)
\end{aligned}$$

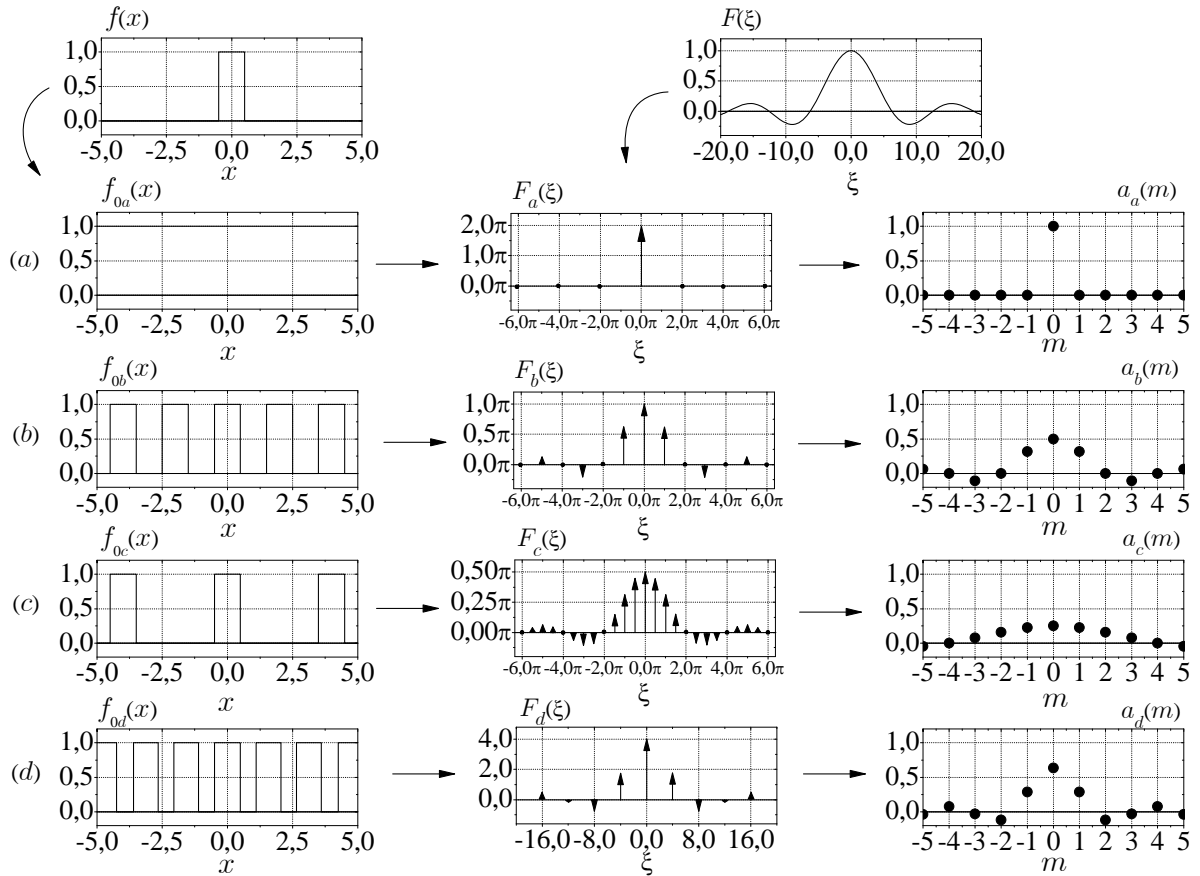


Figura 6.13: Función pulso $f(x) = P_{\Delta}(x)$ de ancho $\Delta = 1$ junto con su transformada de Fourier $F(\xi)$. (a) periodificación para $X_0 = 1$, (b) periodificación para $X_0 = 2$, (c) periodificación para $X_0 = 4$, (d) periodificación para $X_0 = \frac{\pi}{2}$. Se indican también sus correspondientes transformadas y sus desarrollos en serie de Fourier.

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(m\frac{\pi}{a}\right) \delta(\xi - m\xi_0) = \\
 &= \frac{2\pi}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(m\frac{\pi}{a}\right) \delta(\xi - m\xi_0). \tag{6.89}
 \end{aligned}$$

En la Fig. 6.13(d) se muestra este caso para $a = \frac{\pi}{2}$.

6.4. Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$

Puesto que para este caso particular, con las dos bases definidas, $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n' \in \mathbb{Z}}$, que define una transformada identidad, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle}$, que define la transformada de Fourier, los coeficientes en una de las bases de una señal $x(n)$ son la propia señal y los coeficientes en la otra base son la **TF** de la señal, las ecuaciones para realizar los cambios de base en este caso son

$$X(\Omega) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\Omega n'}, \quad (6.90)$$

$$x(n') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n'} d\Omega. \quad (6.91)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Omega; n') &= e^{-j\Omega n'}, \\ \tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) &= e^{j\Omega n'}. \end{aligned}$$

En este caso no existe ningún interés en mostrar ejemplos concretos, ya que se corresponderían con el cálculo de la **TF** y la **TF**⁻¹ de señales de variable discreta y esto se puede encontrar en las tablas de cualquier referencia bibliográfica sobre teoría de señales y sistemas, [51], [52], [61], [80]. El cambio de base está bien definido, como se vio en (4.152) y (4.153) del Apdo. 4.5.5 y, para cualquier señal escogida, el cambio entre la base ideal de deltas de Kronecker desplazadas que definen la **T**_δ y las exponenciales complejas que definen la **TF** es

$$X(\Omega) = \mathbf{TF} [x(n')] \quad (6.92)$$

y viceversa

$$x(n') = \mathbf{TF}^{-1} [X(\Omega)]. \quad (6.93)$$

6.5. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I

Tomando como conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle}$, que define la transformada de Fourier, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_{k \in \langle N_0 \rangle}$, con $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier, las ecuaciones para realizar los cambios de base de una función $x_0(n)$ periódica, determinadas en el Apdo. 4.5.6, son

$$a(k) = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega, \quad (6.94)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k \in \langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0). \quad (6.95)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}, \quad (6.96)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega, k) = 2\pi \delta_0(\Omega - k\Omega_0). \quad (6.97)$$

En las demostraciones de muchos de los ejemplos que aparecen a continuación hay que tener en cuenta los resultados (D.89)-(D.96) del Ap. D.13, donde

$$e^{j\frac{N_0-1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)} = \delta_0(k - m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - m - pN_0) \quad (6.98)$$

1. Sea la función

$$x_0(n) = \cos(p\Omega_0 n), \quad p \in [0, N_0 - 1] \subset \mathbb{Z}. \quad (6.99)$$

Con la base $e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega}$, la **TF** de esta función es

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[\cos(p\Omega_0 n)] = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi m), \quad (6.100)$$

dos deltas de Dirac en las posiciones $\Omega = p\Omega_0$ y $\Omega = -p\Omega_0$ periodificadas 2π .

Y con la base $\tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$, el **DSF** de esta función es

$$a(k) = \mathbf{DSF}[\cos(p\Omega_0 n)] = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - p - mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k + p - mN_0), \quad (6.101)$$

dos deltas de Kronecker en las posiciones $k = p$ y $k = -p$ y periodificadas $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. La Fig. 6.14 muestra este ejemplo para $p = 1$ y $N_0 = 5$.

A partir de las ecuaciones (6.94) y (6.95) se comprueba el cambio de base, así, por un lado

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega \in \langle 2\pi \rangle} \left(\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi m) \right) \times \\ &\quad \times e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega = \end{aligned}$$

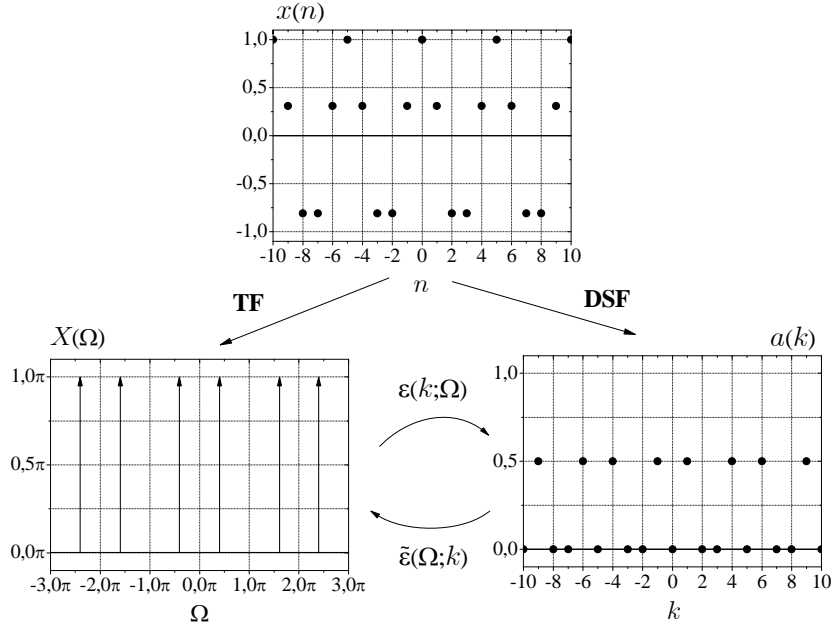


Figura 6.14: Función coseno $x_0(n) = \cos(\Omega_0 n)$ periódica de periodo $N_0=5$, por lo que $\Omega_0 = \frac{2\pi}{5}$, junto con su transformada de Fourier $X(\Omega)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(k)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(p\Omega_0 - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(p\Omega_0 - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(p\Omega_0 - k\Omega_0)\right)} + \\
&+ \frac{1}{2N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(-p\Omega_0 - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(-p\Omega_0 - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(-p\Omega_0 - k\Omega_0)\right)} = \\
&= \frac{1}{2N_0} (-1)^{(p-k)} e^{-j(p-k)\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin\left((p-k)\pi\right)}{\sin\left((p-k)\frac{\pi}{N_0}\right)} + \\
&+ \frac{1}{2N_0} (-1)^{(p+k)} e^{j(p+k)\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin\left((p+k)\pi\right)}{\sin\left((p+k)\frac{\pi}{N_0}\right)} = \\
&= \frac{1}{2N_0} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} N_0 \delta(p-k-mN_0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} N_0 \delta(p+k-mN_0) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-p-mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k+p-mN_0), \tag{6.102}
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\
&= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-p-mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k+p-mN_0) \right) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\
&= \pi \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - (p+mN_0)\Omega_0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega + (p-mN_0)\Omega_0) \right) =
\end{aligned}$$

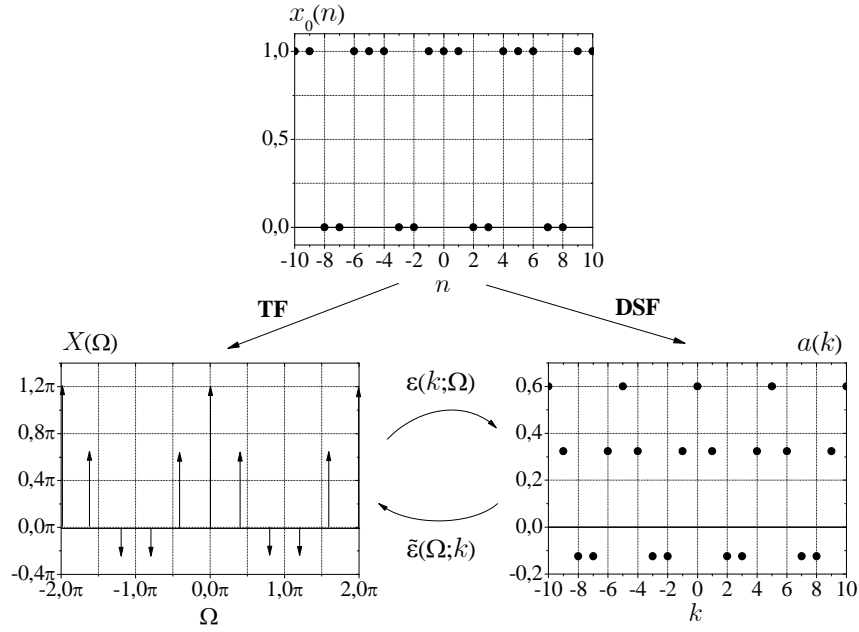


Figura 6.15: Función tren de pulsos $x_0(n) = P_{0,2N+1}(n)$ con $N = 1$ periódica de periodo $N_0 = 5$, junto con su transformada de Fourier $X(\Omega)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(k)$.

$$\begin{aligned}
&= \pi \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi m) \right) = \\
&= \pi \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi m - 2\pi t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi m - 2\pi t) \right) = \\
&= \pi \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi(m+t)) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi(m+t)) \right) = \\
&= \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - p\Omega_0 - 2\pi r) + \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + p\Omega_0 - 2\pi r). \quad (6.103)
\end{aligned}$$

2. Sea el tren de pulsos de anchura $2N + 1$ de periodo N_0 , con $2N + 1 < N_0$

$$x_0(n) = P_{0,2N+1}(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} P_{2N+1}(n - qN_0). \quad (6.104)$$

La **TF** de esta señal es

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[P_{0,2N+1}(n)] = \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)m\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\Omega_0\right)} \delta(\Omega - m\Omega_0), \quad (6.105)$$

y su **DSF** es

$$a(k) = \mathbf{DSF}[P_{0,2N+1}(n)] = \frac{1}{N_0} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)k\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0\right)}, \quad (6.106)$$

como se representan en la Fig. 6.15 para $N = 1$ y $N_0 = 5$.

Las ecuaciones del cambio de base (6.94) y (6.95) permiten obtener unos coeficientes en

función de los otros, así

$$\begin{aligned}
a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\
&= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)m\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\Omega_0\right)} \delta(\Omega-m\Omega_0) \times \\
&\quad \times e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)m\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\Omega_0\right)} \times \\
&\quad \times \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \delta(\Omega-m\Omega_0) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)m\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\Omega_0\right)} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)m\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\Omega_0\right)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} N_0 \delta(m-k-pN_0) = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(k+pN_0)\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(k+pN_0)\Omega_0\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)k\Omega_0 + \left(N+\frac{1}{2}\right)2\pi p\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0 + \frac{1}{2}2\pi p\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)k\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0\right)}, \tag{6.107}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la demostración del Ap. D.13 para expresar el cociente de senos de variable discreta en términos de deltas, también que la función $\frac{\sin\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$ es periódica de periodo 2π , y que al integral $\delta(\Omega-m\Omega_0)$ a lo largo de un intervalo de longitud 2π tan solo nos quedaremos con los valores de m pertenecientes a un intervalo de longitud N_0 .

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega-k\Omega_0) = \\
&= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)k\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0\right)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-k\Omega_0-2\pi m) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(k+mN_0)\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(k+mN_0)\Omega_0\right)} \delta(\Omega-(k+mN_0)\Omega_0) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(k+m')\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(k+m')\Omega_0\right)} \delta(\Omega-(k+m')\Omega_0) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)p\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}p\Omega_0\right)} \delta(\Omega-p\Omega_0), \tag{6.108}
\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

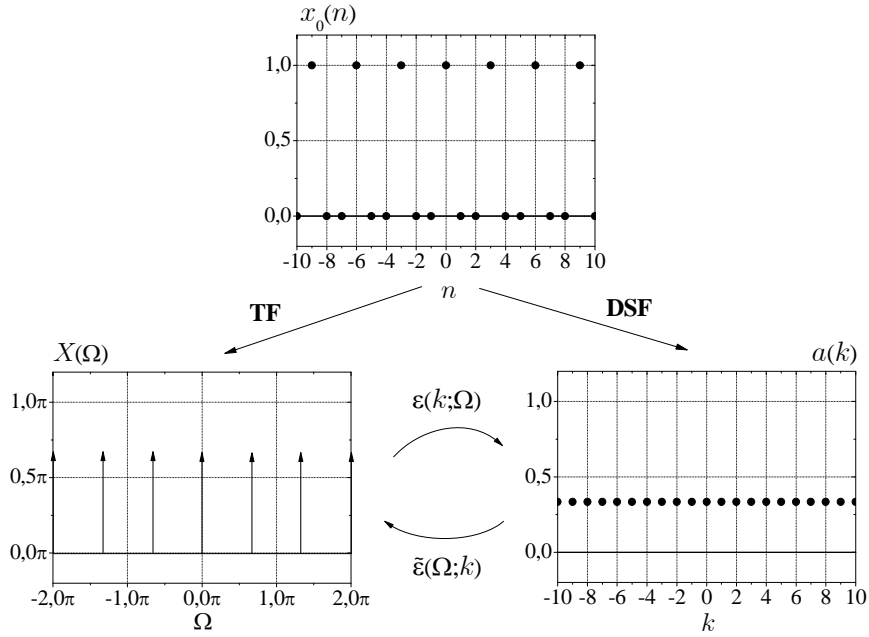


Figura 6.16: Función tren de deltas $x_0(n) = \delta_0(n)$ periódica de periodo $N_0=3$, junto con su transformada de Fourier $X(\Omega)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(k)$.

3. Sea el tren de deltas de Kronecker de periodo N_0

$$x_0(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(n - qN_0). \quad (6.109)$$

La **TF** de esta función es

$$X(\Omega) = \mathbf{TF} \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(n - qN_0) \right] = \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_0), \quad (6.110)$$

y el **DSF** es

$$a(k) = \mathbf{DSF} \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(n - qN_0) \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_0} \delta(k - m) = \frac{1}{N_0}, \quad \forall k. \quad (6.111)$$

En la Fig. 6.16 se muestra representado este ejemplo para $N_0 = 3$ y, por tanto, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{3}$.

A partir de (6.94) y (6.95) se puede comprobar el cambio de base. Por un lado,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=(2\pi)} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=(2\pi)} \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_0) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} \delta(\Omega-m\Omega_0) d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m-k)\Omega_0} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m-k)\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m-k)\Omega_0\right)} = \\
&= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} N_0 \delta_0(m-k) = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k-p), \tag{6.112}
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega-k\Omega_0) = \\
&= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_0} \delta(k-m) \delta_0(\Omega-k\Omega_0) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \delta_0(\Omega-m\Omega_0) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-m\Omega_0-2\pi p) = \\
&= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-p\Omega_0) \tag{6.113}
\end{aligned}$$

4. Un caso interesante es el de considerar una señal de valor constante para todo n ,

$$x(n) = A. \tag{6.114}$$

Esta señal puede ser periódica de cualquier periodo. Consideremos para este caso que es periódica de periodo N_0 , así, su transformada de Fourier es

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[A] = 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-2\pi m). \tag{6.115}$$

Como $x(n)$ no depende del periodo, $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)]$, una señal periódica de periodo 2π , no tendrá tampoco información alguna del periodo N_0 que se está considerando de la señal. Por otro lado, el desarrollo en serie de Fourier de la señal constantes es

$$a(k) = \mathbf{DSF}[A] = A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-mN_0), \tag{6.116}$$

que es un tren de deltas de Kronecker de periodo N_0 , ya que $a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)]$ siempre va a ser una función periódica de periodo N_0 . Como puede verse en la Fig. 6.17, la relación entre $X(\Omega)$ y $a(k)$ es que ambos son un tren de deltas de Dirac y de Kronecker y de periodos 2π y N_0 respectivamente.

A partir de las ecuaciones para el cambio de base (6.94) y (6.95) se puede encontrar la

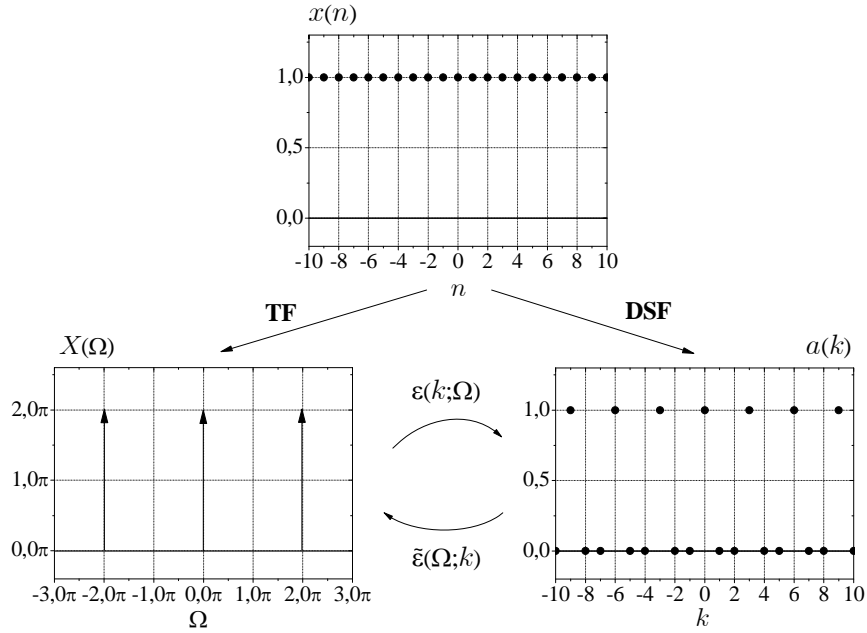


Figura 6.17: Función constante $x(n) = A$ periódica de periodo $N_0 = 3$ y de amplitud $A = 1$, junto con su transformada de Fourier $X(\Omega)$ y su desarrollo en serie de Fourier $a(k)$.

relación matemática, así

$$\begin{aligned}
 a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} 2\pi K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-2\pi m) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\
 &= \frac{K}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m_0 N_0 - k)\Omega_0} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m_0 N_0 - k)\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m_0 N_0 - k)\Omega_0\right)} = \\
 &= \frac{K}{N_0} N_0 \delta_0(k - m_0 N_0) = \\
 &= K \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - pN_0), \tag{6.117}
 \end{aligned}$$

y en el otro sentido,

$$\begin{aligned}
 X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\
 &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mN_0) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\
 &= 2\pi K \delta_0(\Omega - m_0 N_0 \Omega_0) = \\
 &= 2\pi K \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi p). \tag{6.118}
 \end{aligned}$$

5. Sea finalmente una señal $x(n)$ no periódica pero definida en un intervalo de longitud finita $N < N_0$, es decir $\text{supp}\{x(n)\} = [p, p + N - 1]$, y la periodificamos sobre un periodo N_0 ,

quedando, por tanto, la señal periódica

$$x_0(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - qN_0) \quad (6.119)$$

Suponiendo conocida $X_c(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)]$, la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x_0(n)$ será

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbf{TF}[x_0(n)] = \\ &= \mathbf{TF}\left[x(n) * \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(n - qN_0)\right] = \\ &= \mathbf{TF}[x(n)] \mathbf{TF}\left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(n - qN_0)\right] = \\ &= X_c(\Omega) \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_0) = \\ &= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c(m\Omega_0) \delta(\Omega - m\Omega_0), \end{aligned} \quad (6.120)$$

es decir, la señal espectral $X_c(\Omega)$ muestreada en los múltiplos enteros de la pulsación fundamental¹¹ que modula a un tren de deltas de periodo Ω_0 .

A partir de la ecuación (6.94) para encontrar los coeficientes del **DSF** $a(k)$ en función de $X(\Omega)$ se puede encontrar que

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c(m\Omega_0) \delta(\Omega - m\Omega_0) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} X_c(m\Omega_0) e^{j\frac{N_0-1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m\Omega_0 - k\Omega_0)\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0^2} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} X_c(m\Omega_0) N_0 \delta_0(k - m) = \\ &= \frac{1}{N_0} X_c(k\Omega_0), \end{aligned} \quad (6.121)$$

es decir, que se llega a la conclusión de que, para conocer los coeficientes del **DSF** de una señal discreta periódica, simplemente es necesario saber cuál sería su espectro a través de la **TF** de la señal generada por sólo un periodo, muestrearla en los valores $\Omega = k\Omega_0$ para $k \in \mathbb{Z}$ y ponderarla por $\frac{1}{N_0}$, es más, dado que $X(\Omega)$ y $X_c(\Omega)$ son funciones periódicas 2π , $a(k)$ será periódica de periodo N_0 , ya que

$$\begin{aligned} a(k + N_0) &= \frac{1}{N_0} X_c((k + N_0)\Omega_0) = \frac{1}{N_0} X_c(k\Omega_0 + N_0\Omega_0) = \\ &= \frac{1}{N_0} X_c(k\Omega_0 + 2\pi) = \frac{1}{N_0} X_c(k\Omega_0) = a(k), \end{aligned} \quad (6.122)$$

¹¹ $X_c(\Omega)$ puede ser muestreada en $\Omega = m\Omega_0$ puesto que $x(n)$ cumple las condiciones para que exista la **TF** en términos de funciones ordinarias, no en términos de distribuciones, al ser una señal definida en un intervalo finito y, por tanto, de cuadrado sumable.

propiedad que es bien conocida de antemano, por lo que únicamente sería necesario conocer los valores de $X_c(\Omega)$ en un periodo y, por consiguiente, los valores de k en un intervalo de longitud N_0 . De hecho, no debe sorprender el resultado en (6.121) ya que es el obtenido a partir de la propia definición del cálculo de los coeficientes de una señal discreta periódica a partir de su desarrollo en serie de Fourier,

$$\begin{aligned}
a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega n} \delta(\Omega - k\Omega_0) d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \delta(\Omega - k\Omega_0) d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega) \delta(\Omega - k\Omega_0) d\Omega = \\
&= \frac{1}{N_0} X_c(k\Omega_0), \tag{6.123}
\end{aligned}$$

que coincide con el resultado obtenido en (6.121)¹².

¹²En esta demostración hay que hacer una pequeña puntualización. Normalmente se considera el rango de variación de Ω al hacer las integrales sobre esta variable en un intervalo de longitud 2π , puesto que las funciones $X(\Omega)$ son periódicas 2π . Sin embargo aquí, al expresar el conjunto de funciones $e^{-jk\Omega_0 n}$ como la integral sobre Ω de $e^{-j\Omega n}$ por una delta localizada en $\Omega = k\Omega_0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, se considera el rango de variación de Ω sobre todo \mathbb{R} . Esto es debido a que $\delta(\Omega - k\Omega_0)$ no es una función periódica. De considerar la variación de k sólo sobre un periodo de longitud N_0 , sí se podría expresar el conjunto $e^{-jk\Omega_0 n}$ como la integral de $e^{-j\Omega n}$ por un tren de deltas $\delta_0(\Omega - k\Omega_0)$ periódico 2π sobre un intervalo de Ω de longitud 2π , ya que ahora sí que $\delta_0(\Omega - k\Omega_0)$ es periódica 2π ; pero eso sí, sólo se conocerían los coeficientes de $a(k)$ para N_0 valores, lo cual no sería un problema puesto que la función $a(k)$ es periódica de periodo N_0 , conociendo, por tanto, la información necesaria para determinar $a(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ sin más que periodificarla.

6.6. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II

Tomando como conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n' \in \mathbb{Z}}$, que define una transformada identidad, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_{k \in \langle N_0 \rangle}$, con $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier, las ecuaciones para realizar los cambios de base de una función $x_0(n)$ periódica, determinadas en el Apdo. 4.5.7, son

$$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'), \quad (6.124)$$

$$p(n') = \sum_{k \in \langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (6.125)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'), \quad (6.126)$$

$$\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (6.127)$$

Para este caso particular no se representa ninguna gráfica puesto que $p(n') = x(n)|_{n=n'}$ y $a(k) = \mathbf{DSF}[x(n)]$, y los ejemplos que se muestran son los mismos que los de la Secc. 6.5, por lo que ahí ya vienen representadas las señales correspondientes a este caso.

1. Sea la señal

$$x(n) = \cos(\Omega_0 n) \quad (6.128)$$

periódica de periodo $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

Los coeficientes en la base ideal de deltas desplazadas $e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$ son

$$p(n') = \mathbf{T}_\delta[\cos(\Omega_0 n)] = \cos(\Omega_0 n'), \quad (6.129)$$

y los del **DSF** en la base de las exponenciales complejas $\tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ son

$$a(k) = \mathbf{DSF}[\cos(\Omega_0 n)] = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - 1 - mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k + 1 - mN_0), \quad (6.130)$$

es decir, dos deltas de Kronecker en las posiciones $k = \pm 1$ y periodificadas por un periodo N_0 .

A partir de las ecuaciones del cambio de base (6.124) y (6.125) se pueden encontrar unos a partir de otros ya que

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \cos(\Omega_0 n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n' \in \langle N_0 \rangle} \cos(\Omega_0 n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\ &= \mathbf{DSF}[\cos(\Omega_0 n')] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - 1 - mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k + 1 - mN_0) \end{aligned} \quad (6.131)$$

y

$$\begin{aligned}
p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-1-mN_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k+1-mN_0) \right) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \delta(k-1-mN_0) e^{jk\Omega_0 n'} + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \delta(k+1-mN_0) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{2} e^{j(1+m_0 N_0)\Omega_0 n'} + \frac{1}{2} e^{-j(1-m_0 N_0)\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm_0 N_0 \Omega_0 n'} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm_0 N_0 \Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{j\Omega_0 n'} + e^{-j\Omega_0 n'} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jn' N_0 \frac{2\pi}{N_0} m_0} = \\
&= \cos(\Omega_0 n'). \tag{6.132}
\end{aligned}$$

2. Sea el tren de pulsos discretos de periodo N_0 y unitario de ancho $2N+1$ con $N < \frac{N_0-1}{2}$

$$x_0(n) = P_{0,2N+1}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} P_{2N+1}(n-pN_0). \tag{6.133}$$

Los coeficientes bajo la transformada de deltas desplazadas son

$$p(n') = \mathbf{T}_\delta [P_{0,2N+1}(n)] = P_{0,2N+1}(n') \tag{6.134}$$

y bajo el **DSF** son

$$a(k) = \mathbf{DSF} [P_{0,2N+1}(n)] = \frac{1}{N_0} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)k\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}k\Omega_0\right)}. \tag{6.135}$$

A partir de (6.124) y (6.125) se comprueba el cambio de base, así, por un lado

$$\begin{aligned}
a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} P_{0,2N+1}(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} P_{0,2N+1}(n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\
&= \mathbf{DSF} [P_{0,2N+1}(n')] = \\
&= \frac{1}{N_0} \frac{\sin\left(k\Omega_0\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, \tag{6.136}
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \frac{\sin(k\Omega_0(N + \frac{1}{2}))}{\sin(k\frac{\Omega_0}{2})} e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \mathbf{DSF}^{-1} \left[\frac{1}{N_0} \frac{\sin(k\Omega_0(N + \frac{1}{2}))}{\sin(k\frac{\Omega_0}{2})} \right] = \\
&= P_{0,2N+1}(n). \tag{6.137}
\end{aligned}$$

3. Sea la señal

$$x_0(n) = \delta_0(n), \tag{6.138}$$

un tren de deltas de Kronecker de periodo N_0 .

Los coeficientes bajo la base ideal de deltas desplazadas son

$$p(n') = \mathbf{T}_\delta[\delta_0(n)] = \delta_0(n') \tag{6.139}$$

y los coeficientes del **DSF** son

$$a(k) = \mathbf{DSF}[\delta_0(n)] = \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-m), \tag{6.140}$$

es decir, un tren de deltas de Kronecker de amplitud $\frac{1}{N_0}$ para todo k .

Aplicando las ecuaciones del cambio de base para este caso, (6.124) y (6.125), se puede comprobar la relación entre unos y otros coeficientes, así

$$\begin{aligned}
a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta_0(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} \delta_0(n') e^{-jk\Omega_0 n'} = \\
&= \mathbf{DSF}[\delta_0(n)] = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-m), \tag{6.141}
\end{aligned}$$

y¹³

$$\begin{aligned}
p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-m) e^{jk\Omega_0 n'} = \\
&= \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{jm\Omega_0 n'} = \\
&= \delta_0(n'). \tag{6.142}
\end{aligned}$$

¹³Se puede ver la demostración completa en el Ap. D.16.

4. Sea la señal constante de valor $K \in \mathbb{C}$

$$x_0(n) = K. \quad (6.143)$$

Realmente esta señal puede considerarse periódica de cualquier periodo. Para este ejemplo la consideraremos de periodo N_0 , así, los coeficientes de la señal en la base formada por el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas son

$$p(n') = K, \quad \forall n', \quad (6.144)$$

lo que quiere decir que estos coeficientes no guardan información alguna sobre el periodo escogido para la señal constante, obvio por otra parte, ya que la definición de esta transformada está hecha para señales de variable discreta en general, independientemente de si son periódicas o no. Sin embargo, los coeficientes de esta señal en la base de las exponenciales complejas son

$$a(k) = K\delta_0(k) = K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mN_0), \quad (6.145)$$

es decir, un tren de deltas de valor K periódico de periodo N_0 , por lo que estos coeficientes sí contienen la información sobre el periodo de la señal.

Particularizando (6.124) y (6.125) se comprueban las expresiones de unos coeficientes en términos de los otros, así¹⁴

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} p(n') e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} K e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n') = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} K e^{-jk\Omega_0 n'} = \\ &= \frac{1}{N_0} K N_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mN_0) = \\ &= K \delta_0(k), \end{aligned} \quad (6.146)$$

y

$$\begin{aligned} p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mN_0) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \delta(k - mN_0) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= K e^{jm_0 N_0 \Omega_0 n'} = \\ &= K \quad \forall n'. \end{aligned} \quad (6.147)$$

¹⁴El desarrollo de este sumatorio es el mismo que el demostrado en el Ap. D.16 con las variables adecuadas.

6.7. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$

Puesto que para este caso particular, con las dos bases definidas, $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta_0(n - n')\}_{n' \in \langle N_0 \rangle}$, que define una transformada identidad, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_{k \in \langle N_0 \rangle}$, que define el desarrollo en serie de Fourier, los coeficientes de una señal $x_0(n)$ en una de las bases son la propia señal y los coeficientes en la otra base son el **DSF** de la señal, las ecuaciones para realizar los cambios de base en este caso son

$$a(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n' \in \langle N_0 \rangle} d(n') e^{-jk\Omega_0 n'}, \quad (6.148)$$

$$d(n') = \sum_{k \in \langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (6.149)$$

Y los conjuntos de funciones que determinan estos cambios son

$$\varepsilon(k; n') = \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'}, \quad (6.150)$$

$$\tilde{\varepsilon}(n'; k) = e^{jk\Omega_0 n'}. \quad (6.151)$$

En este caso no existe ningún interés en mostrar ejemplos concretos, ya que se corresponderían con el cálculo del **DSF** y el **DSF**⁻¹ de señales discretas periódicas $x_0(n)$, y esto se puede encontrar en las tablas de cualquier referencia bibliográfica sobre teoría de señales y sistemas, [51], [52], [61], [80]. Para cualquier señal $x_0(n)$ escogida, el cambio entre la base ideal del tren de deltas de Kronecker desplazadas que definen la \mathbf{T}_{δ_0} y las exponenciales complejas que definen el **DSF** es

$$a(k) = \mathbf{DSF} [d(n')] \quad (6.152)$$

y viceversa

$$d(n') = \mathbf{DSF}^{-1} [a(k)]. \quad (6.153)$$

7. Ejemplos Análisis Espectral Generalizado

7.1. Operador desarrollo en serie de Fourier

Consideremos el operador lineal Desarrollo en Serie de Fourier, $\mathbf{F}_{L_1} \equiv \mathbf{DSF}$, que actúa entre el espacio de funciones periódicas de periodo X_0 , $\mathcal{P}(X_0)$, y el de funciones de variable discreta $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$, tal como muestra la Fig. 7.1. Consideremos el análisis espectral del espacio de partida bajo el desarrollo en serie de Fourier y el análisis espectral del espacio de llegada bajo la transformada de Fourier para señales de variable discreta, obteniendo el esquema que se muestra en la Fig. 7.2. El objetivo es encontrar la relación entre las funciones $a(m)$ y $X(\Omega)$, es decir, la relación espectral de las funciones de entrada y salida al sistema \mathbf{F}_{L_1} .

Está claro que

$$x(n) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jn\xi_0 x} dx. \quad (7.1)$$

De las expresiones generales en (5.30) y (5.31) se tiene que

$$\beta(\eta) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (7.2)$$

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{AA} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \quad (7.3)$$

en donde, en este caso,

$$\tau \equiv x \in \mathbb{R}, \quad (7.4)$$

$$\tau' \equiv x' \in \langle X_0 \rangle, \quad (7.5)$$

$$\mu \equiv m \in \mathbb{Z}, \quad (7.6)$$

$$\mu' \equiv m' \in \mathbb{Z}, \quad (7.7)$$

$$v \equiv n \in \mathbb{Z}, \quad (7.8)$$

$$\eta \equiv \Omega \in \mathbb{R}, \quad (7.9)$$

así pues

$$\alpha(\mu') \equiv a(m'), \quad (7.10)$$

$$\beta(\eta) \equiv X(\Omega), \quad (7.11)$$

$$h(v; \tau') \equiv h(n; x'), \quad (7.12)$$

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') \equiv \mathbf{H}_*(\Omega; m'), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \cdot \quad (7.14)$$

Además, los conjuntos de funciones base son

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; m) = e^{jm\xi_0 x} \quad (7.15)$$

para el espacio $\mathcal{P}(X_0)^1$, donde $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, y

$$\hat{e}(v; \eta) \equiv \hat{e}(n; \Omega) = e^{j\Omega n} \quad (7.16)$$

¹Es importante hacer notar que cuando se considera el conjunto de funciones base $e(x; m)$ sobre los parámetros primados, es decir, $e(x', m') = \left\{ e^{jm'\xi_0 x'} \right\}_{m'}$, el dominio de estas funciones es sólo sobre un intervalo de longitud X_0 , puesto que ése es el dominio de definición de la variable x' .

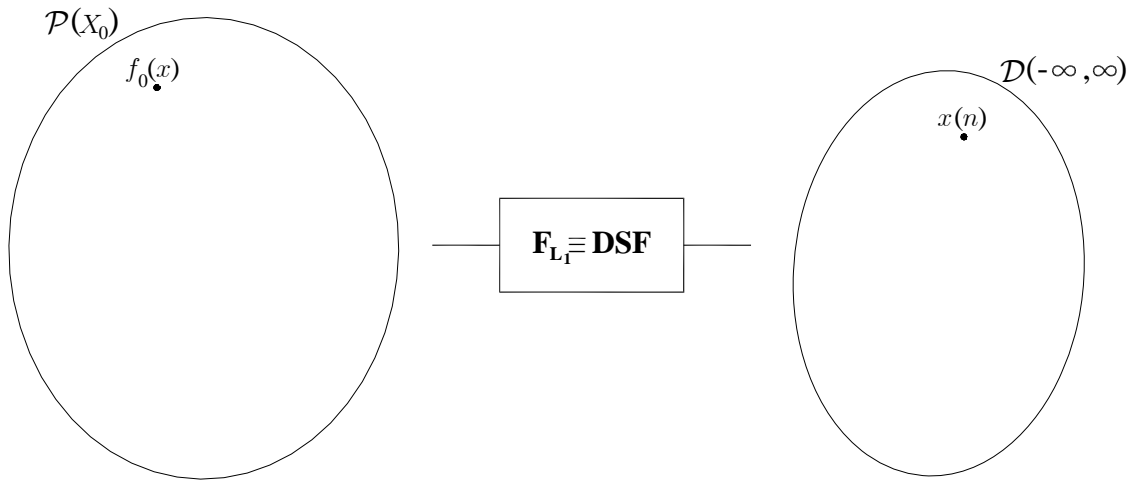


Figura 7.1: Representación esquemática del operador lineal $\mathbf{F}_{L_1} \equiv \mathbf{DSF}$ entre los espacios $\mathcal{P}(X_0)$ y $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$.

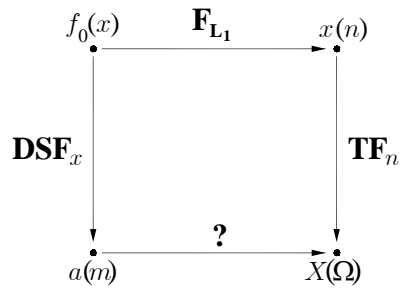


Figura 7.2: Representación esquemática del análisis del operador $\mathbf{F}_{L_1} \equiv \mathbf{DSF}$ en los dominios real y espectral. La señal de entrada en el dominio real $f_0(x)$ produce una señal de salida $x(n)$. En el espacio de partida se realiza el análisis espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier, obteniéndose los coeficientes $a(m)$, mientras que en el espacio de llegada se realiza bajo la transformada de Fourier, dando lugar a los coeficientes $X(\Omega)$. La relación entre estos dos conjuntos de coeficientes es el llamado *Análisis Espectral Generalizado* para este ejemplo.

para el espacio $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$. De esta manera se pueden calcular las constantes A y \hat{A} como²

$$\langle e(x; m), e(x; m') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = X_0 \delta(m - m') \Rightarrow A = X_0, \quad (7.17)$$

$$\langle \hat{e}(n; \Omega), \hat{e}(n; \Omega') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} e^{-j\Omega' n} = 2\pi \delta_0(\Omega - \Omega') \Rightarrow \hat{A} = 2\pi, \quad (7.18)$$

sin embargo, según la definición de la transformada de Fourier para funciones de variable discreta,

$$\mathbf{TF}[x(n)] = \langle x(n), \hat{e}(n; \Omega) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}, \quad (7.19)$$

ésta se calcula sin normalizar, al contrario de como aparece en la expresión general, por lo que para el cálculo de $\mathbf{H}_*(\Omega; m')$ hay que obviar el factor $\frac{1}{\hat{A}}$.

El paso a seguir ahora es encontrar el conjunto $\mathbf{H}_*(\Omega; m')$ para este sistema. Por un lado tenemos

$$h(n; x') = \mathbf{FL}_1[\delta_0(x - x')] = \mathbf{DSF}[\delta_0(x - x')] = \frac{1}{X_0} e^{-jn\xi_0 x'}. \quad (7.20)$$

A partir de aquí,

$$\begin{aligned} H(\Omega; x') &= \langle h(n; x'), \hat{e}(n; \Omega) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} e^{-jn\xi_0 x'} e^{-j\Omega n} = \\ &= \frac{1}{X_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi_0(x' + \frac{\Omega}{\xi_0})n} = \frac{1}{X_0} X_0 \delta_0\left(\frac{\Omega}{\xi_0} + x'\right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(\Omega; m') &= \frac{1}{A} \langle H(\Omega; x'), e^*(x'; m') \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} \delta_0\left(\frac{\Omega}{\xi_0} + x'\right) e^{jm'\xi_0 x'} dx' = \\ &= \frac{1}{A} e^{-jm'\xi_0 \frac{\Omega}{\xi_0}} = \frac{1}{A} e^{-jm'\Omega}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

y, por tanto,

$$X(\Omega) = A \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \frac{1}{A} e^{-jm'\Omega}, \quad (7.23)$$

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') e^{-j\Omega m'}}. \quad (7.24)$$

Es fácil comprobar que el resultado es correcto a partir del cálculo de $X(\Omega)$ pasando por las funciones $f_0(x)$ y $x(n)$, puesto que

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (7.25)$$

²En realidad A no es necesario calcularla porque se anulará en el proceso de obtención de $X(\Omega)$.

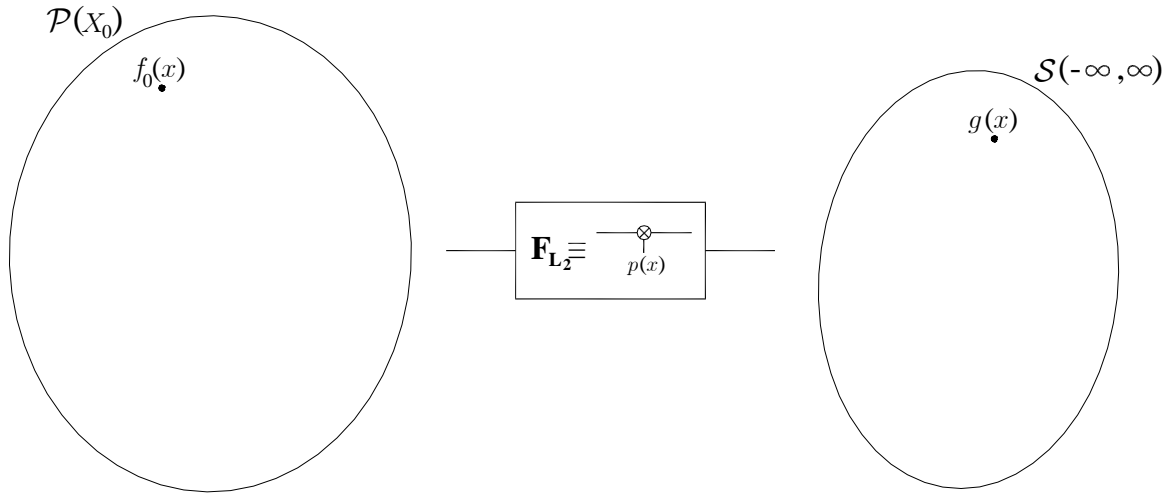


Figura 7.3: Representación esquemática del operador lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}_2} \equiv \cdot p(x)$ entre los espacios $\mathcal{P}(X_0)$ y $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \mathbf{F}_{\mathbf{L}_1}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} e^{-jn\xi_0 x} dx = \\
 &= \frac{1}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \int_{x=\langle X_0 \rangle}^{\infty} e^{j(m-n)\xi_0 x} dx = \\
 &= \frac{1}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) X_0 \delta(m-n) = a(n)
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

y

$$\begin{aligned}
 X(\Omega) &= \mathbf{TF}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{-j\Omega n},
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

por lo que concurda, cambiando la variable n por m' con la expresión obtenida en (7.24).

7.2. Operador modulador

En este segundo ejemplo consideremos un sistema modulador $\mathbf{F}_{\mathbf{L}_2}$ entre el espacio de funciones periódicas de periodo X_0 , $\mathcal{P}(X_0)$, y el espacio de funciones de variable continua $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$. Se considera éste como espacio de llegada puesto que la función moduladora considerada, $p(x)$, puede ser no periódica. Esquemáticamente se representa en la Fig. 7.3. Consideramos el desarrollo en serie de Fourier para el análisis espectral en el espacio de partida y la transformada de Hilbert para el análisis espectral en el espacio de llegada, obteniendo el esquema de la Fig. 7.4. El objetivo consiste en encontrar la relación entre $a(m)$ y $G(y)$ sin necesidad de conocer la expresión de $g(x)$, es decir, la relación entre las funciones de entrada y salida del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{L}_2}$ en el dominio espectral.

Por un lado

$$g(x) = \mathbf{F}_{\mathbf{L}_2}[f_0(x)] = f_0(x) g(x). \tag{7.28}$$

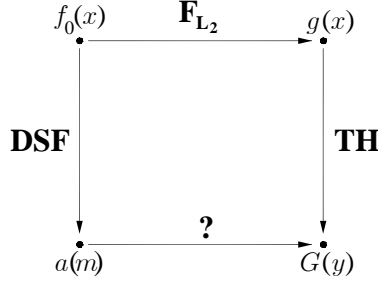


Figura 7.4: Representación esquemática del análisis del operador $\mathbf{F}_{L_2} \equiv \cdot p(x)$ en los dominios real y espectral. La señal de entrada en el dominio real $f_0(x)$ produce una señal de salida $g(x)$. En el espacio de partida se realiza el análisis espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier, obteniéndose los coeficientes $a(m)$, mientras que en el espacio de llegada se realiza bajo la transformada de Hilbert, dando lugar a los coeficientes $G(y)$. La relación entre estos dos conjuntos de coeficientes es el llamado *Análisis Espectral Generalizado* para este ejemplo.

De las expresiones generales en (5.30) y (5.31) se tiene que

$$\beta(\eta) = A\mathbf{CL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (7.29)$$

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A\hat{A}} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \quad (7.30)$$

en donde, en este caso,

$$\tau \equiv x \in \mathbb{R}, \quad (7.31)$$

$$\tau' \equiv x' \in \langle X_0 \rangle, \quad (7.32)$$

$$\mu \equiv m \in \mathbb{Z}, \quad (7.33)$$

$$\mu' \equiv m' \in \mathbb{Z}, \quad (7.34)$$

$$v \equiv x \in \mathbb{R}, \quad (7.35)$$

$$\eta \equiv y \in \mathbb{R}, \quad (7.36)$$

así pues

$$\alpha(\mu') \equiv a(m'), \quad (7.37)$$

$$\beta(\eta) \equiv G(y), \quad (7.38)$$

$$h(v; \tau') \equiv h(x; x'), \quad (7.39)$$

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') \equiv \mathbf{H}_*(y; m'), \quad (7.40)$$

$$\mathbf{CL}_{\mu'} \equiv \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \cdot \quad (7.41)$$

Además, los conjuntos de funciones base son

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; m) = e^{jm\xi_0 x} \quad (7.42)$$

para el espacio $\mathcal{P}(X_0)$ y

$$\hat{e}(v; \eta) \equiv \hat{e}(x; y) = \frac{1}{\pi(x-y)} \quad (7.43)$$

para el espacio $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$. De esta manera se pueden calcular las constantes A y \hat{A} como

$$\langle e(x; m), e(x; m') \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = X_0 \delta(m - m') \Rightarrow A = X_0, \quad (7.44)$$

$$\langle \hat{e}(x; y), \hat{e}(x; y') \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(x-y)} \frac{1}{\pi(x-y')} = \delta(y-y') \Rightarrow \hat{A} = 1. \quad (7.45)$$

Para encontrar la expresión final de $\mathbf{H}_*(y; m')$, primero obtenemos el conjunto de respuestas al impulso $h(x; x')$ como

$$h(x; x') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}_2} [\delta_0(x-x')] = p(x) \delta_0(x-x') \quad (7.46)$$

que no es, en general, una función, para cada x' , periódica.

A partir del cálculo de $h(x; x')$ obtenemos $H(y; x')$ como

$$\begin{aligned} H(y; x') &= \frac{1}{\hat{A}} \langle h(x; x'), \hat{e}(x; y) \rangle = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} p(x) \delta_0(x-x') \frac{1}{\pi(x-y)} dx = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} p(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'-kX_0) \frac{1}{\pi(x-y)} dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p(x'+kX_0)}{\pi(x'+kX_0-y)}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(y; m') &= \frac{1}{A} \langle H(y; x'), e^*(x'; m') \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \int_{x'=\langle X_0 \rangle}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p(x'+kX_0)}{\pi(x'+kX_0-y)} e^{jm'\xi_0 x'} dx', \end{aligned} \quad (7.48)$$

haciendo el cambio

$$\left| \begin{array}{l} u = x' + kX_0 \\ du = dx' \end{array} \right| \quad (7.49)$$

y teniendo en cuenta que $\int_{x'=\langle X_0 \rangle}^{\infty} = \int_{x'=r}^{r+X_0}$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$ fijo,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(y; m') &= \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{u=r+kX_0}^{r+(k+1)X_0} \frac{p(u)}{\pi(u-y)} e^{jm'\xi_0(u-kX_0)} du = \\ &= \frac{1}{A} e^{-jm'\xi_0 kX_0} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{p(u)}{\pi(u-y)} e^{jm'\xi_0 u} du = \\ &= \frac{1}{A} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{p(u) e^{jm'\xi_0 u}}{\pi(u-y)} du = \\ &= \frac{1}{A} \mathbf{TH} [p(x) e^{jm'\xi_0 x}] \end{aligned} \quad (7.50)$$

Finalmente,

$$G(y) = A \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \frac{1}{A} \tilde{P}(y; m'), \quad (7.51)$$

$$\boxed{G(y) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \tilde{P}(y; m'),} \quad (7.52)$$

siendo

$$\tilde{P}(y; m') = \mathbf{TH} \left[p(x) e^{jm'\xi_0 x} \right]. \quad (7.53)$$

Igualmente, resulta sencillo comprobar que el resultado (7.52) es correcto a partir del cálculo de $G(y)$ pasando por las funciones $f_0(x)$ y $g(x)$:

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= p(x) f_0(x) = p(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) p(x) e^{jm\xi_0 x} \end{aligned} \quad (7.55)$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbf{TH} [g(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{\pi(x-y)} dx = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a(m) p(x) e^{jm\xi_0 x}}{\pi(x-y)} dx = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{p(x) e^{jm\xi_0 x}}{\pi(x-y)} dx = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \mathbf{TH} \left[p(x) e^{jm\xi_0 x} \right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \tilde{P}(y; m), \end{aligned} \quad (7.56)$$

que es el mismo resultado obtenido en (7.52) a través de la formulación general.

Parte II

GSST-v2

8. Espacios de Hilbert Equipados (RHS)

8.1. Introducción

Uno de las principales dificultades que se encuentran en el desarrollo de la Teoría General de Señales y Sistemas es el de tratar de unificar en un mismo marco las funciones ordinarias y las distribuciones. Tal como se ha visto en el capítulo introductorio a esta teoría 2, el uso de las funciones ordinarias (es decir, funciones continuas, derivables, de cuadrado integrable y cualquier otra característica que se le quiera añadir), se intercala con el uso de las distribuciones sin ningún tipo de consideración. De hecho este uso es bastante generalizado, puesto que, en variable continua, se dice que cualquier función se puede expresar en términos de deltas de Dirac desplazadas a través de una integral como,

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' \quad (8.1)$$

y, además, los valores $f(x')$ se pueden calcular a partir del producto escalar de $f(x)$ con cada una de las deltas desplazadas siendo

$$f(x') = \langle f(x), \delta(x-x') \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x') dx. \quad (8.2)$$

Se dice, por tanto, que el conjunto de deltas desplazadas $\{\delta(x-x')\}_{x'}$ es una *base ideal* del espacio de funciones de variable continua, puesto que permite representar cada función en términos de estas deltas de Dirac. Por otro lado, el uso de esta distribución también es esencial en la caracterización de sistemas lineales, puesto que se puede representar la señal de salida¹ de cualquier sistema lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ como

$$g(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') h(x;x') dx' \quad (8.3)$$

donde $f(x)$ es la señal de entrada al sistema y

$$h(x;x') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\delta(x-x')] \quad (8.4)$$

son el *conjunto de respuestas al impulso*, que son determinados a partir de este conjunto de deltas de Dirac desplazadas y que, en la mayoría de los casos, también se corresponderá con un conjunto de distribuciones. Este conjunto de respuestas al impulso es ciertamente importante, puesto que representa de forma matemática las propiedades físicas del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$. Es por eso que no es en absoluto desdeñable el uso y tratamiento de las distribuciones. Sin embargo, ¿qué quieren decir las expresiones (8.1)-(8.4)? Quizá la expresión (8.4) pueda ser más intuitiva, pues indica cómo reacciona un sistema a una entrada impulsiva, es decir, a una perturbación infinitesimalmente corta. Sin embargo, ¿es posible realizar una integral con una distribución de por medio? y si un producto escalar indica una proyección de una función sobre otra, ¿cómo se entiende proyectar sobre una delta de Dirac? Uno se puede hacer una idea más o menos cercana a estas respuestas si sustituye las distribuciones por funciones ordinarias que puedan representar, como límite de una sucesión, estas distribuciones, como se puede ver en el Cap. 7 de [80], o haciendo el similar a variable discreta, donde las deltas de Kronecker están bien

¹ Consideremos, sin pérdida de generalidad, que el espacio de llegada es el mismo que el de partida, por lo que no cambia la variable de la señal de salida con la de la de entrada.

definidas como funciones ordinarias y no suponen ningún problema. Si bien es cierto que las distribuciones son elementos teóricos, puesto que no es posible conseguir físicamente una delta de Dirac, por ejemplo, es necesario, de todas maneras, dar respuesta a estos interrogantes para tener una justificación adecuada del uso de las distribuciones.

Existen otro tipo de funciones también muy empleadas que, en principio, no se consideran distribuciones y que surgen a partir de algunos tipos de operadores ampliamente utilizados, como puede ser el operador derivada, que aparece en una gran cantidad de problemas físicos como son las ecuaciones de Maxwell, la de Sturm-Liouville, la de Helmholtz, etc. Analizando cuáles son las autofunciones de este operador se llega a la conclusión que son las exponenciales complejas, puesto que

$$\frac{d}{dx} A e^{\gamma x} = A \gamma e^{\gamma x}, \quad A, \gamma \in \mathbb{C}, \quad (8.5)$$

funciones que pueden parecer ordinarias y fácilmente tratables, puesto que son continuas e infinitamente derivables, pero guardan un secreto que puede ser problemático: ¿qué sucede cuando se quiere proyectar una exponencial sobre otra, es decir, hacer su producto escalar? El resultado es que, para el producto escalar ordinario definido en el espacio de variable continua, la integral

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} A_1 e^{\gamma_1 x} A_2^* e^{\gamma_2^* x} dx \quad (8.6)$$

no converge, y esto supone un problema, puesto que funciones de este tipo son la base de la transformada de Fourier o la transformada de Laplace, tan utilizadas en la teoría de señales y sistemas. No debería parecer sorprendente, entonces, que existiera una relación entre este tipo de funciones y las distribuciones, de hecho, la distribución delta de Dirac surge para dar solución a la integral (8.6), en concreto, tomando $A_1 = A_2 = 1$, cuando $\gamma_1 = j\xi_1$ y $\gamma_2 = j\xi_2$ se tiene que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{j\xi_1 x} e^{-j\xi_2 x} dx = 2\pi \delta(\xi_1 - \xi_2), \quad (8.7)$$

que representa la ‘ortogonalidad’ de las funciones base de la transformada de Fourier, escribiendo ‘ortogonalidad’ entre comillas puesto que se sabe que la integral será nula cuando $\xi_1 \neq \xi_2$, pero no se sabe nada cuando $\xi_1 = \xi_2$, es decir, cuando ambas funciones son la misma y, por tanto, se esté calculando la norma de esa función que, en este caso, habrá que decir que es infinita. Es por tanto que no sólo las distribuciones, sino también otro tipo de funciones como las exponenciales, funciones trigonométricas, constantes, etc., quedan fuera del conjunto inicial de funciones que podríamos considerar. Este conjunto, parece ser, tendría que aquél en el que la norma de las funciones fuera finita y, puesto que la norma va a provenir, salvo que se dijera lo contrario, de un producto escalar, estaremos considerando como lugar donde todo esté bien definido, un espacio prehilbertiano que, en caso de que sea completo, será un espacio de Hilbert.

Según todo lo expuesto hasta ahora, vemos que un espacio de Hilbert no va a ser suficiente para albergar todas las funciones y distribuciones que nos gustaría. Es por ello que es necesario agrandarlo o equiparlo con el resto de elementos deseados, pero esto no se puede hacer a la ligera. Fue el propio Paul A. M. Dirac el que introdujo el llamado formalismo de Dirac de *bras* y *kets* en su monografía sobre los principios de mecánica cuántica en 1930, [72]. Este formalismo rompía con la idea original del producto escalar como una aplicación entre dos elementos de un espacio de Hilbert para pasar a considerarlo como la aplicación de un funcional sobre un elemento, del que se obtiene un número complejo. De ahí viene el nombre *bra-ket* (corchete en inglés), que separa cada una de sus componentes para considerarlas independientemente, de esta manera se generaliza el concepto de producto interno. Aunque este formalismo trató de desarrollarse inicialmente dentro de un espacio de Hilbert, pronto el propio Dirac intuyó que esta formalización debería estar en un espacio más general que el de Hilbert. En 1940 Laurent-Moïse Schwartz dio un significado más preciso a la función delta de Dirac, entendiéndola como

un funcional sobre un espacio de funciones test, [54], lo que dio lugar al desarrollo de una nueva rama dentro del análisis funcional, la teoría de distribuciones. Los **Espacios de Hilbert Equipados (Rigged Hilbert Spaces, RHS)** aparecieron en los años 1960 de la mano de Izráil Moiséyevich Gél'fand y sus colaboradores, [56], [57], [73]-[77], dando formalidad rigurosa a la intuición de Dirac. Los espacios de Hilbert equipados consisten en dotar a un espacio de Hilbert de la teoría de distribuciones, es decir, no sustituye al espacio de Hilbert sino que lo amplía. La utilidad de los RHS no se restringe sólo a acomodar el formalismo de Dirac de bras y kets, sino que tiene una gran utilidad como herramienta de investigación en la teoría cuántica de dispersión y decaimiento, [64], y en la construcción de descomposiciones espectrales generalizadas de mapas caóticos, [78]-[79]. En definitiva, los RHS son el lenguaje natural para tratar problemas que involucren un espectro continuo en espacios de dimensión infinita.

Una de las mayores aplicaciones de los RHS radica en la formulación de problemas de Mecánica Cuántica en los que se trabaje con espectro continuo, ya que las autofunciones de los operadores que miden algunos parámetros básicos de una partícula como son la posición, el momento o la energía, son funciones que no se pueden adecuar dentro de un espacio de Hilbert, [64]-[67]. Es a partir de esta bibliografía y en este campo donde se han estudiado los RHS, bajo la supervisión del profesor Rafael de la Madrid, para adecuar su formalización a la Teoría General de Señales y Sistemas.

A pesar de que la motivación inicial para el desarrollo de los espacios de Hilbert equipados consistía en unificar bajo una misma teoría las funciones ordinarias y las distribuciones, como se ha visto, también existen funciones que, sin ser distribuciones, deben ser consideradas fuera del espacio de Hilbert. Llevándolo al campo de la teoría de señal, esto da pie a pensar que no sólo en los espacios de señal de variable continua puede haber funciones que queden fuera de un espacio de Hilbert, sino que también en los espacios de señal de variable discreta de dimensión infinita, aunque aquí no existan distribuciones, se pueden encontrar igualmente funciones que no pertenezcan a un espacio de Hilbert pero que se quieran integrar de alguna manera con el resto de funciones que, en este caso de un espacio de variable discreta, serán de cuadrado sumable. Funciones como exponenciales discretas, senos y cosenos discretos o funciones constantes han de ser consideradas dentro de un espacio de Hilbert equipado. En los espacios de dimensión finita, la estructura de un espacio de Hilbert (espacio euclídeo en este caso) es suficiente para dar cabida a todo tipo de elementos sin necesidad de ampliarlo a un espacio de Hilbert equipado.

Finalmente, comentar el origen del nombre Rigged Hilbert Space. La traducción literal del inglés al español del verbo *to rig* sería *aparejar* o *amañar*, por lo que estaríamos hablando de un espacio de Hilbert *amañado*. Sin embargo se trata de una connotación náutica, similar a decir *fully rigged ship* (*barco totalmente aparejado*), debida a la traducción literal de su origen ruso *Osnashchyonnoe Hilbertovo Prostranstvo* de la que se ha mantenido el nombre. Una traducción al inglés más adecuada sería *equipped Hilbert space*, cuya transcripción al español es la que empleamos normalmente, puesto que lo que se hace es equipar al espacio de Hilbert de las distribuciones y demás funciones que no pertenezcan a él.

En esta Tesis se contempla por primera vez la teoría de los espacios de Hilbert equipados como una herramienta para el desarrollo, ampliación y formalización rigurosa de la Teoría General de Señales y Sistemas.

8.2. Estructura inicial de los espacios de señal

La Teoría Generalizada de Señales y Sistemas pretender englobar en una misma teoría la interpretación general de cualquier problema físico. Recordando el desarrollo general de esta teoría (véase Cap. 2), se verifica que se parte de un conjunto de funciones $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ que contiene las señales $a(\tau)$ de variable genérica τ , variable que puede representar cualquier magnitud. Para dotar al conjunto de estructura de espacio vectorial, se definen las leyes de composición interna y

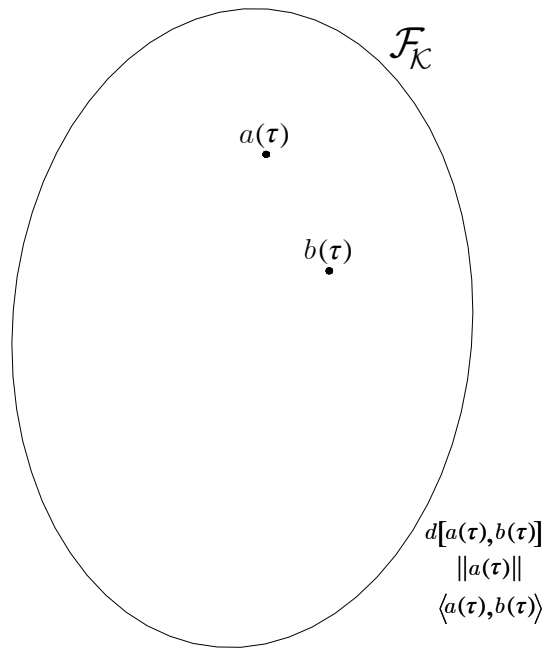


Figura 8.1: Espacio genérico de señal donde se ha definido la distancia, la norma y el producto escalar entre señales.

externa. Además, se determinan también las definiciones de distancia, $d(\cdot, \cdot)$, normal, $\|\cdot\|$, y producto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que permiten dar una medida de las funciones y relacionarlas entre ellas. Se tiene, por tanto, el esquema general para un espacio de funciones de la Fig. 8.1, donde no existe ninguna condición ni restricción para las funciones $a(\tau)$.

Las definiciones de distancia, norma y producto escalar generan, respectivamente, un espacio métrico, un espacio normado y un espacio de Hilbert² que normalmente se denota por \mathcal{H} . Si bien es cierto que se podría analizar el espacio \mathcal{F}_K bajo una definición de distancia, norma y producto escalar no inducidos uno por el otro, consideraremos que la definición de distancia proviene de la norma a su vez inducida por el producto escalar. De esta forma, el espacio de Hilbert \mathcal{H} será a su vez un espacio de Banach \mathcal{B} y un espacio métrico \mathcal{M} con la norma y distancia generadas por la definición dada del producto escalar que determine \mathcal{H} . Igualmente se podría considerar el espacio topológico \mathcal{T} generado a partir de los conjuntos abiertos asociados a la métrica derivada de la definición de la distancia. Esquemáticamente, el espacio de Hilbert \mathcal{H} se encontraría en el interior de la intersección de los espacios representados en la Fig. 8.2.

En general, en los espacios de señal \mathcal{F}_K se suele empezar por la definición de la norma, ya que ésta suele estar relacionada con algún parámetro físico, por ejemplo la energía de la señal, generando así los espacios normados o de Banach \mathcal{B} si son completos. A partir de ésta se pueden encontrar fácilmente las definiciones de distancia que generen los espacios métricos y los conjuntos abiertos que describen la topología del espacio. A su vez, las normas que cumplan la ley del paralelogramo pueden provenir de la definición de un producto escalar, encontrando, asimismo, los espacios de Hilbert \mathcal{H} ³.

²Estrictamente hablando, un espacio de Hilbert no es simplemente un espacio vectorial dotado de un producto escalar, también debería ser completo con respecto a la topología generada por la norma inducida por ese producto escalar. En caso de no ser completo, se estaría hablando de un espacio pre-Hilbert o prehilbertiano. Para una mayor definición técnica del espacio de Hilbert, ver [64], [105]-[106].

³Un espacio de Banach es un espacio normado completo. Todo espacio de Hilbert es a su vez un espacio de

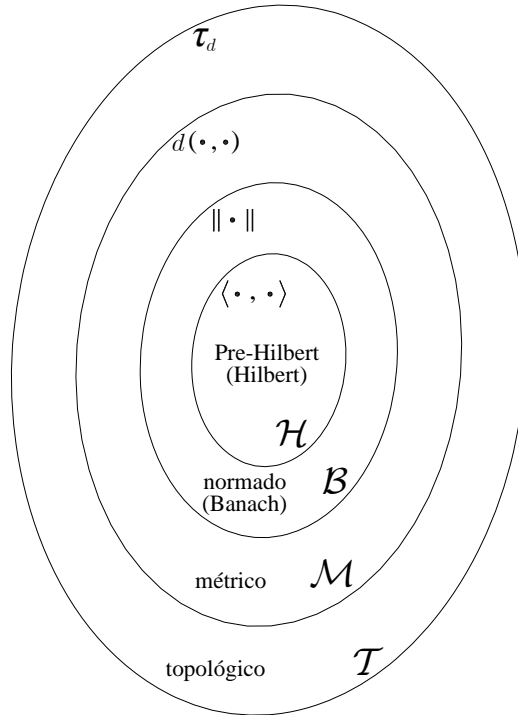


Figura 8.2: Estructura conjunto de los espacios topológicos, métricos, de Banach y de Hilbert. Todo espacio de Hilbert con un producto escalar es a su vez de Banach con la norma inducida, que es métrico con la distancia inducida por la norma y topológico con la topología de bolas generadas por la distancia.

8.2.1. Espacios de Banach

Un espacio normado es un espacio vectorial provisto de una norma⁴. Recordando del Apdo. 2.3.2 del Cap. 2, una norma es un funcional entre el espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y el el conjunto de los reales no negativos definido como

$$\begin{cases} \|\cdot\| : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ a(\tau) \longmapsto \|a(\tau)\| \end{cases} \quad (8.8)$$

Si a partir de la definición de norma el espacio es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy⁵ es convergente, se dice que el espacio es de Banach \mathcal{B} .

Para cada espacio de señal, las normas habituales que se pueden definir son las siguientes: para

Banach. El inverso no es, en general, cierto. Para que un espacio de Banach fuera también un espacio de Hilbert, la norma definida debería cumplir la identidad del paralelogramo. Ver Ap. B.14.

⁴Ver definición detallada de espacio de Banach en el Ap. B.3.

⁵Ver definición de sucesión de Cauchy en el Ap. B.5.

$1 \leq p < \infty$ se define la p -norma como⁶

$$\|x_0(n)\|_p = \left(\sum_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.9)$$

$$\|x(n)\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.10)$$

$$\|f_0(x)\|_p = \left(\int_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.11)$$

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.12)$$

generando, respectivamente, los siguientes espacios normados

$$l^p(\langle N_0 \rangle) = \left\{ x_0(n) : \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^p < \infty \right\}, \quad (8.13)$$

$$l^p(\mathbb{Z}) = \left\{ x(n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}, \quad (8.14)$$

$$\mathcal{L}^p(\langle X_0 \rangle) = \left\{ f_0(x) : \int_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad (8.15)$$

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\}. \quad (8.16)$$

Por su parte, para $p = \infty$ se definen las normas infinito para cada espacio como^{7 8}

$$\|x_0(n)\|_{\infty} = \max_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n)|, \quad (8.17)$$

$$\|x(n)\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|, \quad (8.18)$$

$$\|f_0(x)\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x)| = \min_{x \in \langle X_0 \rangle} \{M \geq 0 : |f_0(x)| \leq M, \text{ ctp}\}, \quad (8.19)$$

$$\|f(x)\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \min_{x \in \mathbb{R}} \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M, \text{ ctp}\}, \quad (8.20)$$

⁶Puesto que estas definiciones de norma son bien conocidas, no se va a demostrar que cumplen las condiciones necesarias para serlo. Su demostración se puede realizar a mano o encontrar en diversas referencias bibliográficas como [105]-[106].

⁷ess sup indica el supremo esencial, es decir, el supremo de la señal sin tener en cuenta conjuntos de medida nula. Este tipo de normas implican funciones esencialmente acotadas.

⁸La indicación *ctp* indica *en casi todo punto*, es decir, expectuando un conjunto de medida nula. Existen otras indicaciones para este hecho, como *cpd*, *casi por doquier*, o *cs*, *casi siempre*, también en español, o la abreviatura inglesa *ae*, iniciales de *almost everywhere*. En textos más antiguos también se utiliza el término *pp* del francés *presque partout*. De aquí en adelante, para indicar esta circunstancia, se empleará el término *ctp*.

generando los espacios

$$l^\infty(\langle N_0 \rangle) = \left\{ x_0(n) : \max_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n)| < \infty \right\}, \quad (8.21)$$

$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ x(n) : \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < \infty \right\}, \quad (8.22)$$

$$\mathcal{L}^\infty(\langle X_0 \rangle) = \left\{ f_0(x) : \text{ess sup}_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x)| < \infty \right\}, \quad (8.23)$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty \right\}. \quad (8.24)$$

Es importante hacer notar las siguientes consideraciones para los espacios normados obtenidos:

- Los espacios $l^p(\langle N_0 \rangle)$ y $l^\infty(\langle N_0 \rangle)$ (que se pueden generalizar como $l^p(\langle N_0 \rangle)$ permitiendo a p variar entre $1 \leq p \leq \infty$) son espacios de dimensión finita de valor N_0 , por lo que las condiciones (8.13) y (8.21) siempre se van a cumplir para cualquier secuencia $x_0(n)$ periódica de periodo N_0 . Se puede interpretar estas señales como las componentes de vectores del espacio \mathbb{C}^{N_0} , por tanto son p -sumables y acotadas, generan siempre un espacio completo, por tanto de Banach, y todas las normas, para $1 \leq p \leq \infty$ son equivalentes.
- Los espacios normados $l^p(\mathbb{Z})$ con $1 \leq p \leq \infty$, que se generan a partir de (8.10) y (8.18) cuando la variable es discreta, son espacios de Banach (ver tema 2 de [108]).
- Finalmente, los espacios de variable continua $\mathcal{L}^p(\langle X_0 \rangle)$ y $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$ (espacios de funciones p -integrables en un intervalo de longitud X_0 y espacios funciones p -integrables a lo largo de todo \mathbb{R} , respectivamente) con la integral de Lebesgue, y los espacios $\mathcal{L}^\infty(\langle X_0 \rangle)$ y $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ (espacios de funciones esencialmente acotadas en un intervalo de longitud X_0 y espacios de funciones esencialmente acotadas en todo \mathbb{R} , respectivamente), no son completos y, por tanto, no son de Banach. De hecho, las definiciones (8.11), (8.12), (8.19) y (8.20) no son realmente una norma, sino una seminorma⁹. Es fácil comprobar que, bajo estas definiciones, dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que difieran en un conjunto de medida nula¹⁰ tendrían la misma norma. Así, por ejemplo, el hecho de que la seminorma de una función sea cero, no implica que la función sea nula para todos sus puntos, ya que cualquier otra función en la que se defina cualquier otro valor diferente del cero sobre un conjunto de medida nula, también tendrá seminorma cero, como se puede ver en la Fig. 8.3, es decir,

$$\|f(x)\|_p = 0 \not\Rightarrow f(x) = 0. \quad (8.25)$$

Esto hace que cualquier sucesión de Cauchy no sea convergente, puesto que el límite de la sucesión, en norma, no sería único.

Así, por ejemplo, sea la sucesión de funciones de la Fig. 8.4 generada por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-ax^2}, \quad a > 0, \quad (8.26)$$

es claro que es una sucesión de Cauchy, ya que, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un n_0 tal que para todo $n, m > n_0$ se cumple que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_p < \varepsilon, \quad (8.27)$$

⁹Ver definición de seminorma en el Ap. B.4. A pesar de las diferencias entre una norma y una seminorma, una vez aclaradas éstas, denotaremos, como norma, por abuso del lenguaje, también las definiciones de aquéllas que no cumplan estrictamente las condiciones para ser norma pero sí seminorma.

¹⁰Ver definición de medida de un conjunto y conjunto de medida nula en el Ap. B.18.

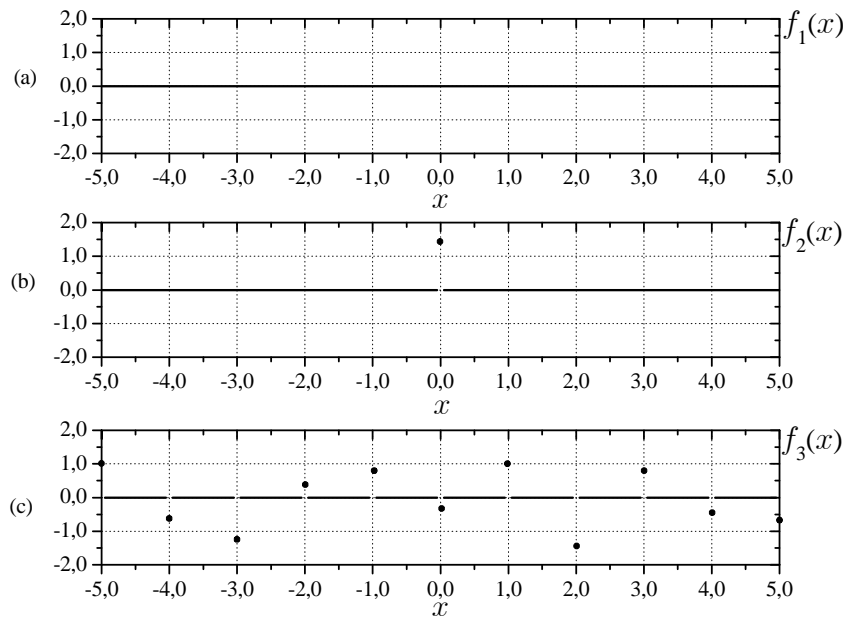


Figura 8.3: Diferentes funciones que tienen todas norma nula puesto que difieren de la función constante igual a 0, gráfica (a), en un conjunto numerable de puntos.

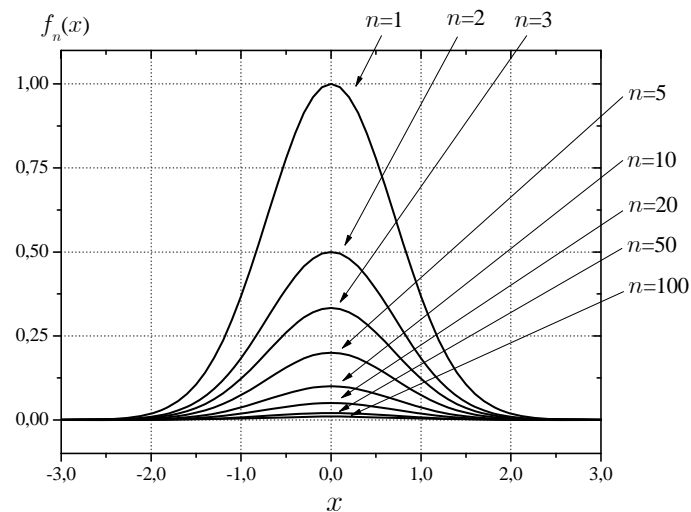


Figura 8.4: Representación de algunas funciones de la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-ax^2}$ con $a = 1$, comprobando como la función límite es $f(x) = 0$.

puesto que

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f_m(x)\|_p &= \left\| \frac{1}{n}e^{-ax^2} - \frac{1}{m}e^{-ax^2} \right\|_p = \\
&= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \left\| e^{-ax^2} \right\|_p = \\
&= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \left(\sqrt{\frac{\pi}{ap}} \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon
\end{aligned} \tag{8.28}$$

y se puede encontrar un valor de n_0 por el cual

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{ap}} \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall n, m > n_0. \tag{8.29}$$

Sin embargo, $f_n(x)$ tiene muchos límites, ya que cualquier función $f(x)$ cuya norma sea 0 es límite de esta sucesión, como pueden ser, por ejemplo

$$f_1(x) = 0 \quad \forall x \implies \|f_1(x)\|_p = 0, \tag{8.30}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \pi & x = 0 \end{cases} \implies \|f_2(x)\|_p = 0, \tag{8.31}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & x \neq kX_0 \\ k & x = kX_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, X_0 \in \mathbb{R} \implies \|f_3(x)\|_p = 0, \tag{8.32}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \implies \|f_4(x)\|_p = 0, \tag{8.33}$$

$$f_i(x) = \dots \tag{8.34}$$

todas estas funciones son límite de $f_n(x)$. Así pues, la sucesión, aún siendo de Cauchy, no es convergente y, por tanto, el espacio normado que genera no es de Banach.

Para conseguir la completitud y, por tanto, generar espacios de Banach, hay que establecer la siguiente relación de equivalencia¹¹ en \mathcal{L}^p ¹², [112]:

- Sea \sim la relación de equivalencia definida sobre \mathcal{L}^p de la siguiente forma:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{ctp}, \tag{8.35}$$

o bien

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0, \tag{8.36}$$

o bien

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p dx = 0, \tag{8.37}$$

siendo $\mu(\mathcal{A})$ la medida de Lebesgue del conjunto \mathcal{A} , $\Omega \equiv \langle X_0 \rangle$ para el conjunto de las funciones periódicas de variable continua y $\Omega \equiv \mathbb{R}$ para el conjunto de las funciones de variable continua¹³.

¹¹Ver definición de relación de equivalencia en el Ap. B.19.

¹²En caso de no especificar, la nomenclatura \mathcal{L}^p representa tanto $\mathcal{L}^p(\langle X_0 \rangle)$ como $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ o, en general, cualquier $\mathcal{L}^p(\Omega)$ con $\Omega = (a, b)$ siendo $a < b$ arbitrarios, para $1 \leq p \leq \infty$.

¹³ Ω podría identificar también cualquier otro tipo de intervalo de la forma (a, b) con $a < b$ arbitrarios si estuviéramos considerando un conjunto de señales que sólo estuvieran definidas en ese dominio, por ejemplo el de las funciones definidas sólo para valores reales positivos $f(r)$ donde $\Omega \equiv (0, \infty)$.

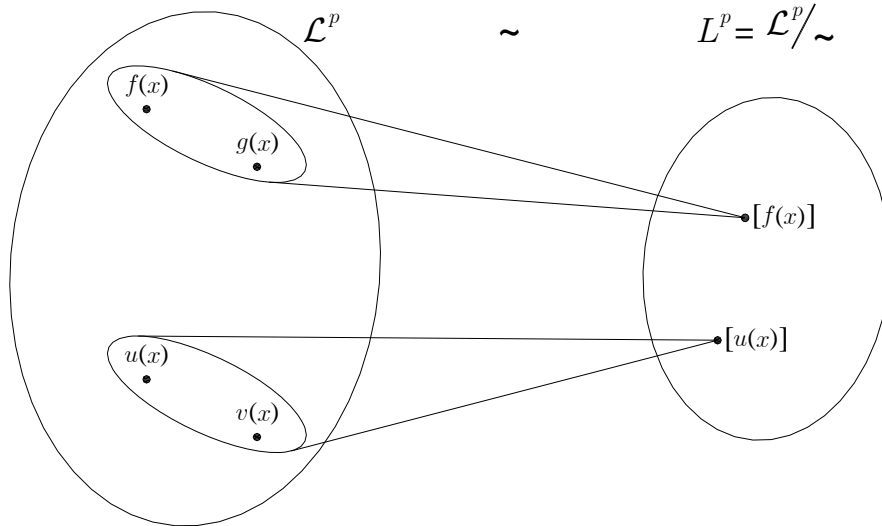


Figura 8.5: Relación de equivalencia por la cual se pasa del espacio \mathcal{L}^p al espacio L^p tomando como clase de equivalencia aquéllas funciones que difieran sólo en un conjunto de medida nula.

Las tres definiciones (8.35), (8.36) y (8.37) son la misma y se puede expresar de la siguiente manera: *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes si y sólo si difieren en un conjunto de medida nula.* En el Ap. D.19 se comprueba que realmente se trata de una relación de equivalencia. Se crea así un conjunto de clases de equivalencia en los que el representante de cada clase puede expresarse como

$$[f(x)] = \{g(x) \in \mathcal{L}^p : f(x) \sim g(x)\} \quad (8.38)$$

y así

$$g(x) \in [f(x)] \Leftrightarrow g(x) \sim f(x) \quad (8.39)$$

y por tanto,

$$[g(x)] = [f(x)]. \quad (8.40)$$

A partir de esta relación de equivalencia se puede encontrar el conjunto cociente definido como

$$L^p = \mathcal{L}^p / \sim \quad (8.41)$$

es decir, L^p es el conjunto de todas las clases de equivalencia $[f(x)]$ tales que

$$[f(x)] \in L^p \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{L}^p. \quad (8.42)$$

La Fig. 8.5 muestra una representación esquemática de estas clases de equivalencia.

Sobre la estructura de espacio vectorial de L^p , las definiciones (8.11), (8.12), (8.19) y (8.20) cumplen realmente las condiciones para ser norma (donde $f(x)$ es cualquier representante de la clase de equivalencia) y hacen que, a través del teorema de Riesz-Fischer¹⁴, el espacio L^p sea un espacio normado completo y, por lo tanto, un espacio de Banach.

La definición de norma

$$\|[f(x)]\|_p = \left(\int_{\Omega} |[f(x)]|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (8.43)$$

¹⁴Ver el teorema de Riesz-Fischer en el Ap. C.2.

no depende del representante escogido. Así, seleccionando otro representante de la misma clase de equivalencia,

$$g(x) \in [f(x)], \quad g(x) \sim f(x) \quad (8.44)$$

se tiene que

$$\| [g(x)] \|_p = \left(\int_{\Omega} |[g(x)]|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} |[f(x)]|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \| [f(x)] \|_p \quad (8.45)$$

y, aunque $g(x) \neq f(x)$ en \mathcal{L}^p , ambos pertenecen a la misma clase de equivalencia, luego son el mismo elemento en L^p y, por tanto, tienen la misma norma. De esta manera ya no existe la problemática de que dos funciones con norma cero puedan ser diferentes, ni que una sucesión de Cauchy pueda tener varios límites. De hecho, en el ejemplo anterior, la sucesión de Cauchy generada por $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-ax^2}$ es convergente en L^p , ya que todos los posibles límites $f_i(x)$ son el mismo en L^p puesto que todos difieren tan sólo en un conjunto de medida nula.

En el ámbito práctico, no se suele hacer distinción entre función y clase de equivalencia. Para simplificar la notación y haciendo abuso del lenguaje, una vez definidos y entendidos los espacios L^p para cada $1 \leq p \leq \infty$, se considerará cada elemento de estos espacios de Banach como una función y no como una clase de equivalencia, asimilando que dos funciones que difieran en un conjunto de medida nula son la misma.

Estas definiciones de norma generan los espacios de Banach

$$\mathcal{B} = (\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \|\cdot\|_p). \quad (8.46)$$

8.2.2. Espacios métricos

Todo espacio normado, en concreto los espacios de Banach \mathcal{B} , son espacio métricos \mathcal{M} , así que, a partir de las definiciones de norma expuestas anteriormente, se pueden encontrar las definiciones de distancia entre dos funciones, inducidas a partir de éstas como la norma de la diferencia¹⁵. Recordando en el Apdo. 2.3.2 del Cap. 2, una distancia es una aplicación entre dos elementos del espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y los reales no negativos definida como

$$\begin{cases} d(\cdot, \cdot) : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (a(\tau), b(\tau)) \longmapsto d(a(\tau), b(\tau)) = \|a(\tau) - b(\tau)\| \end{cases} \quad (8.47)$$

¹⁵Ver definición detallada de espacio de métrico en el Ap. B.2.

Así, para cada espacio de señal y para cada valor de $p \in [1, \infty)$ se tiene¹⁶:

$$d_p(x_0(n), y_0(n)) = \|x_0(n) - y_0(n)\|_p = \left(\sum_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n) - y_0(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.48)$$

$$d_p(x(n), y(n)) = \|x(n) - y(n)\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.49)$$

$$d_p(f_0(x), g_0(x)) = \|f_0(x) - g_0(x)\|_p = \left(\int_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x) - g_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.50)$$

$$d_p(f(x), g(x)) = \|f(x) - g(x)\|_p = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8.51)$$

mientras que para $p = \infty$,

$$d_\infty(x_0(n), y_0(n)) = \|x_0(n) - y_0(n)\|_\infty = \max_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n) - y_0(n)|, \quad (8.52)$$

$$d_\infty(x(n), y(n)) = \|x(n) - y(n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n) - y(n)|, \quad (8.53)$$

$$d_\infty(f_0(x), g_0(x)) = \|f_0(x) - g_0(x)\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x) - g_0(x)|, \quad (8.54)$$

$$d_\infty(f(x), g(x)) = \|f(x) - g(x)\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|. \quad (8.55)$$

Las definiciones de distancia permiten identificar cuándo dos funciones son iguales. Si bien en los espacios l^p dos funciones son la misma si son iguales punto a punto, en los espacios L^p dos funciones son iguales si pertenecen a la misma clase de equivalencia, es decir, si son iguales salvo en un conjunto de medida nula.

Estas definiciones de distancia generan los espacios métricos

$$\mathcal{M} = (\mathcal{F}_K, d_p). \quad (8.56)$$

8.2.3. Espacios topológicos

Todo espacio métrico \mathcal{M} es un espacio topológico \mathcal{T} ¹⁷. A partir de las definiciones de distancia mostradas anteriormente, se pueden encontrar los conjuntos abiertos base que generan la topología de \mathcal{T} . Estos conjuntos están formados por la unión arbitraria de bolas abiertas con centro $a(\tau)$ y radio r , definidas de la siguiente manera:

$$B_{d_p}(a(\tau), r) = \{b(\tau) \in \mathcal{F}_K : d_p(a(\tau), b(\tau)) < r\}, \quad (8.57)$$

donde $a(\tau)$ y $b(\tau)$ son funciones genéricas de \mathcal{F}_K , $r \geq 0$ es un número real, y donde se puede comprobar claramente cómo la definición de bola abierta depende directamente de la definición de distancia.

La bola unitaria centrada en el origen se define como

$$B_{d_p}(0, 1) = \{b(\tau) \in \mathcal{F}_K : d_p(b(\tau), 0) < 1\} = \left\{ b(\tau) \in \mathcal{F}_K : \|b(\tau)\|_p < 1 \right\}, \quad (8.58)$$

¹⁶ Puesto que estas definiciones de distancia son bien conocidas, no se va a demostrar que cumplen las condiciones necesarias para serlo. Su demostración se puede realizar a mano o encontrar en diversas referencias bibliográficas como [105]-[106].

¹⁷ Ver definición detallada de espacio de topológico en el Ap. B.1.

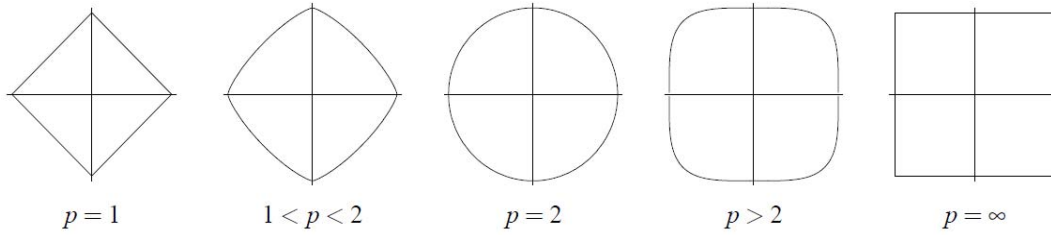


Figura 8.6: Representación de las bolas de un espacio de dimensión 2 para diferentes valores de p .

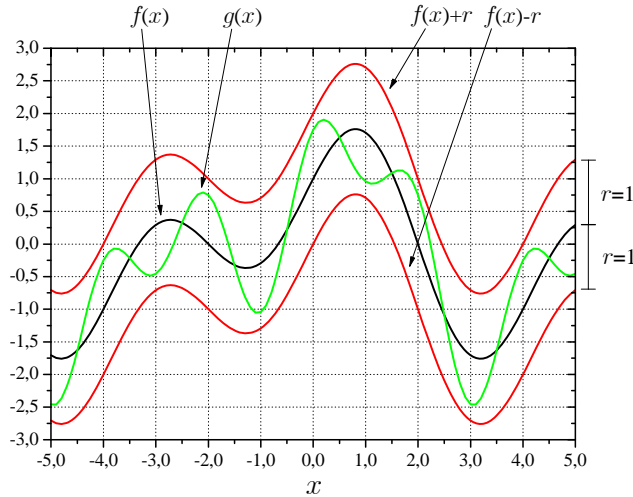


Figura 8.7: Ejemplo de una bola de radio $r = 1$ definida a partir de la distancia del supremo. La función $f(x)$ (en negro) es el centro de la bola. $f(x) + r$ y $f(x) - r$ (en rojo) son la frontera de la bola. La función $g(x)$ (en verde) se encuentra en el interior de la bola de centro $f(x)$ y radio $r = 1$, ya que no sale de las fronteras marcadas.

es decir, las funciones cuya norma sea estrictamente inferior a 1. La función 0 representa la función $0(\tau)$, que será idénticamente 0 en los espacios de variable discreta ($x(n) = 0 \forall n$) y 0 salvo en un conjunto de medida nula para los espacios de variable continua ($f(x) = 0 \text{ cpt}$).

Estas bolas dependen de la naturaleza del espacio y del valor de p , así, por ejemplo, en un espacio de dimensión 2, $l^p(\mathbb{R}^2)$, se pueden representar las bolas unitarias como se muestra en la Fig. 8.6.

Para los espacios de funciones de variable continua L^∞ , las bolas se definen como

$$B_{d_\infty}(f(x), r) = \left\{ g(x) \in L^\infty : \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)| < r \right\}, \quad (8.59)$$

pudiendo representarse como en la Fig. 8.7.

Sin embargo, para L^2 , las bolas se definen como

$$B_{d_2}(f(x), r) = \left\{ g(x) \in L^2 : \left(\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < r \right\}, \quad (8.60)$$

siendo la bola unitaria

$$B_{d_2}(0, 1) = \left\{ g(x) \in L^2 : \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < 1 \right\} = \{g(x) \in L^2 : \|g(x)\| < 1\}, \quad (8.61)$$

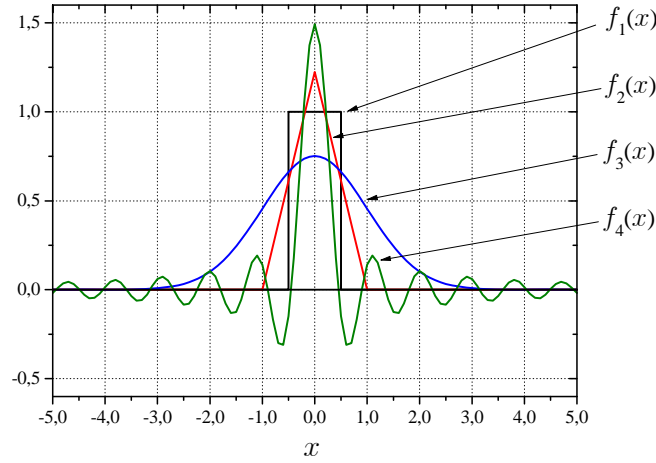


Figura 8.8: Ejemplo de algunas funciones cuya p -norma con $p = 2$ es 1.

$$f_1(x) = P_1(x), \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}T_1(x), \quad f_3(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_4(x) = \sqrt{\frac{7}{\pi}} \operatorname{sinc}(7x).$$

pero en este caso no se puede representar gráficamente. Tan sólo se pueden dibujar algunas funciones que formen parte de la frontera de dicha bola como se muestra en la Fig. 8.8.

La topología generada por las bolas anteriormente definidas permitiría determinar diferentes propiedades de los conjuntos de señales como son:

- Conjunto abierto y conjunto cerrado,
- Interior, exterior y frontera de un conjunto,
- Adherencia de un conjunto, puntos de acumulación y puntos aislados en un conjunto,
- Compacidad, conectividad y arcoconectividad de conjuntos,
- Separabilidad, subconjunto denso, etc.

Todas estas propiedades son interesantes desde el punto de vista teórico y se pueden encontrar descritas, por ejemplo, en [105] o en [106], pero no son objeto de esta tesis. Algunas definiciones de estas propiedades que sí se utilizarán a lo largo del presente desarrollo se pueden encontrar en el Ap. B.

La definición de abiertos en los espacios de señal genera los espacios topológicos

$$\mathcal{T} = (\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, B_{d_p}). \quad (8.62)$$

8.2.4. Espacios de Hilbert

Un espacio prehilbertiano $\hat{\mathcal{H}}$ es un conjunto con una definición de producto escalar¹⁸. Recordando del Apdo. 2.3.2 en el Cap. 2, un producto escalar es una forma hermitiana positiva y no degenerada¹⁹ entre dos elementos del espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y el cuerpo de los complejos \mathbb{C}

¹⁸Ver definición detallada de espacio de prehilbertiano y de espacio de Hilbert en el Ap. B.9.

¹⁹Ver definición de forma hermitiana en el Ap. B.8.

definido como

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (a(\tau), b(\tau)) \longmapsto \langle a(\tau), b(\tau) \rangle \end{cases} \quad (8.63)$$

Todo producto escalar induce una norma definida como

$$\|a(\tau)\| = \langle a(\tau), a(\tau) \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (8.64)$$

y generando, por tanto, un espacio normado. Si toda sucesión de Cauchy es convergente con respecto a la norma inducida, el espacio es completo, por tanto el espacio normado inducido es de Banach \mathcal{B} y el espacio prehilbertiano pasa a ser un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach, pero no al revés. Para que un espacio de Banach pueda ser a la vez un espacio de Hilbert, la norma definida en \mathcal{B} tiene que cumplir la ley del paralelogramo²⁰. En el Ap. D.20 se demuestra que sólo las normas definidas en la Secc. 8.2.1 con un valor de $p = 2$ cumplen la ley del paralelogramo, de forma que los únicos espacios de Banach que a su vez son espacios de Hilbert son los l^2 para variable discreta y los L^2 para variable continua.

A continuación, en la Tabla 8.1 se muestran, para cada espacio de señal, el producto escalar definido y el espacio de Hilbert generado por ese producto escalar.

Espacio de Hilbert	Producto escalar
$l^2(\langle N_0 \rangle) = \left\{ x_0(n) : \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) ^2 < \infty \right\}$	$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n)$
$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ x(n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 < \infty \right\}$	$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n)$
$L^2(\langle X_0 \rangle) = \left\{ f_0(x) : \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) ^2 dx < \infty \right\}$	$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx$
$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx < \infty \right\}$	$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx$

Tabla 8.1: Espacios de Hilbert de señales y sus productos escalares asociados

Los espacios de señal, junto con estas definiciones de producto interno o producto escalar, generan los espacios de Hilbert,

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \langle \cdot, \cdot \rangle). \quad (8.65)$$

Los espacios de Hilbert de dimensión finita, como es el espacio $l^2(\langle N_0 \rangle)$ son conocidos como espacios euclídeos.

Puesto que todos los espacios de Hilbert se generarán a partir de la norma con $p = 2$, de aquí en adelante se obvia este parámetro considerando siempre, salvo que se indique lo contrario, cualquier definición de distancia y norma con el valor $p = 2$.

²⁰Referirse al Ap. B.14.

8.3. Formalismo de Dirac de Bras y Kets

El formalismo de Dirac de Bras y Kets es una manera breve y elegante de generalizar los conceptos de vectores, matrices, funcionales lineales y las relaciones entre ellos. Fue introducido en 1930 por Paul A. M. Dirac en su monografía sobre los principios de la mecánica cuántica, [72], donde provó que era una gran herramienta de cálculo a pesar de encontrar grandes dificultades para determinar una justificación matemática de estos cálculos dentro de los espacios de Hilbert. Como parte de este formalismo, Dirac introdujo la conocida función delta de Dirac, una entidad formal sin comparación en la teoría clásica de funciones. Fue Laurent M. Schwartz quien dio una definición precisa del significado de la delta de Dirac como un funcional sobre el espacio de las funciones test, [54]. Esto dio lugar al desarrollo de la teoría de distribuciones, una nueva rama dentro del análisis funcional. Israel M. Gelfand desarrolló esta teoría e introdujo los espacios de Hilbert equipados (RHS), [56]-[57] donde, combinando los espacios de Hilbert con la teoría de distribuciones, se daba la base matemática necesaria para sustentar el formalismo de Dirac de Bras y Kets.

8.3.1. Generalización del producto interno

La nomenclatura proviene del término inglés Brackets (corchetes) tratando de identificar a los elementos que actúan en un producto interno de manera independiente. Así, un bra tiene la forma $\langle a|$ mientras que un ket es de la forma $|b\rangle$. La unión de un bra con un ket forma el bracket $\langle a|b\rangle$. Esta representación tiene dos forma de ser interpretada:

1. Por un lado, visto en términos de espacios de dimensión finita, los bras y kets se corresponden con vectores fila y columna respectivamente.

$$\langle a| = \left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \right), \quad (8.66)$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix}. \quad (8.67)$$

Así, la unión de un bra con un ket no es más que un producto de un vector fila por un vector columna dando lugar a al producto interno de esos dos vectores

$$\langle a|b\rangle = \left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \right) \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \dots + a_N b_N^*. \quad (8.68)$$

2. Por otro lado y de forma más general y abstracta, siendo aplicable también a los espacios de dimensión infinita, los kets se corresponden con funcionales lineales²¹ sobre los bras, así

$$\begin{cases} |a\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle b| \longmapsto \langle b|a\rangle, \end{cases} \quad (8.69)$$

²¹Ver definición de funcional lineal en el Ap. B.15.

siendo \mathfrak{B} el espacio de los bras²² que forman el dominio del ket $|a\rangle$.

Igualmente se puede definir de manera inversa, siendo los bras los funcionales antilineales²³ sobre los kets

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a| : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathbb{C} \\ |b\rangle \longmapsto \langle a|b\rangle, \end{array} \right. \quad (8.70)$$

siendo \mathfrak{K} el espacio donde se encuentran los kets²⁴ del dominio del bra $\langle a|$. A pesar de que es más común la primera definición, ambas, aún siendo distintas y por tanto necesarias las dos, son equivalentes, debido a la correspondencia unívoca a partir de las propiedades hermíticas o adjuntas entre bras y kets, de forma que

$$|a\rangle \equiv \langle a|^* \quad (8.71)$$

Esta terminología es más general e incluye a la anterior, por lo que el producto de un bra con un ket puede ser, en algunos casos, el producto escalar bien conocido, aunque su formalización e interpretación vienen determinadas a partir del Teorema de Representación de Riesz²⁵.

8.3.2. Producto externo. Operadores

Se puede definir el producto externo entre un ket y un bra de la siguiente manera, obteniéndose un operador:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{K}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathbb{F} \\ (|b\rangle, \langle a|) \longmapsto \mathbf{F} \equiv |b\rangle \langle a|. \end{array} \right. \quad (8.72)$$

Este operador siempre tiene que ser entendido en la forma en la que, al aplicarlo por la izquierda sobre un ket, se obtenga otro ket

$$\left\{ \begin{array}{l} |b\rangle \langle a| : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{K} \\ |\psi\rangle \longmapsto |b\rangle \langle a|\psi\rangle = |b\rangle \alpha = |\alpha b\rangle \end{array} \right. \quad (8.73)$$

o, igualmente, al aplicarlo por la derecha sobre un bra, se obtenga otro bra

$$\left\{ \begin{array}{l} |b\rangle \langle a| : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B} \\ \langle \varphi| \longmapsto \langle \varphi|b\rangle \langle a| = \beta \langle a| = \langle \beta a|. \end{array} \right. \quad (8.74)$$

Visto en términos de operadores, al aplicar un operador \mathbf{F} por la izquierda a un ket, se obtiene un nuevo ket

$$\mathbf{F} |\psi\rangle = |\chi\rangle, \quad (8.75)$$

mientras que al aplicarlo por la derecha sobre un bra, se obtiene un nuevo bra

$$\langle \varphi| \mathbf{F} = \langle \phi|. \quad (8.76)$$

Es importante remarcar que no tendría sentido realizar las operaciones en el orden inverso, es decir, aplicar un operador a un ket por la derecha o a un bra por la izquierda. Basta con darse cuenta de que en casos de dimensión finita, los operadores se corresponderían con una matriz

²²Posteriormente, en el Apdo. 8.3.6 se definirá con mayor rigurosidad cómo se forma el espacio de los bras.

²³Ver definición de funcional antilineal en el Ap. B.16.

²⁴En el Apdo. 8.3.6 se definirá con mayor rigurosidad cómo se forma el espacio de los kets.

²⁵Ver Teorema de Representación de Riesz en el Ap. C.3.

$N \times N$, por lo que, para que el producto de matrices y vectores tenga sentido, debe aplicarse por la izquierda a los kets, que serían vectores columna $N \times 1$ para obtener un nuevo ket $N \times 1$, mientras que al aplicarlos a los bras, que serían vectores fila $1 \times N$, tendría que hacerse por la derecha, para obtener un nuevo bra $1 \times N$. Las combinaciones inversas no tendrían sentido.

Resulta posible unificar en una sola notación la acción conjunta de un operador con el producto interno entre un bras y kets. Sea

$$\mathbf{A} |w\rangle = |v\rangle, \quad (8.77)$$

con \mathbf{A} un operador. Tomando el bra $\langle u|$, el producto interno entre $\langle u|$ y $|v\rangle$ es

$$\langle u| \mathbf{A} |w\rangle = \langle u|v\rangle = \alpha \in \mathbb{C}. \quad (8.78)$$

De la misma manera puede verse la aplicación del operador \mathbf{A} al bra $\langle u|$ dando otro bra $\langle t|$

$$\langle t| = \langle u| \mathbf{A}, \quad (8.79)$$

y el producto $\langle t|$ por $|w\rangle$ sería

$$\langle u| \mathbf{A} |w\rangle = \langle t|w\rangle = \alpha \in \mathbb{C}, \quad (8.80)$$

dando el mismo resultado. Es posible, por tanto, la asociatividad en términos de un operador cuando se aplica conjuntamente a un bra por la derecha y a un ket por la izquierda, así

$$(\langle u| \mathbf{A}) |w\rangle = \langle u| (\mathbf{A} |w\rangle) = \langle u| \mathbf{A} |w\rangle \quad (8.81)$$

Si el operador \mathbf{A} admite una representación como producto externo de un ket con un bra de la forma

$$\mathbf{A} \equiv |a\rangle \langle a'|, \quad (8.82)$$

el producto entre $\langle u|$ y $|v\rangle$ se puede representar como

$$\langle u|a\rangle \langle a'|w\rangle = v\omega = \alpha \in \mathbb{C}, \quad (8.83)$$

el producto de dos escalares con los que se obtendría nuevamente el mismo resultado.

Por otro lado, si se tiene un conjunto numerable ortonormal de kets $|\varphi_n\rangle$ que sea base de un espacio de Hilbert, el operador identidad se puede representar como

$$\mathbf{I} \equiv \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|, \quad (8.84)$$

por tanto, cualquier elemento (bra o ket) se puede representar en términos de esa base como

$$|\psi\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|\psi\rangle, \quad (8.85)$$

$$\langle \psi| = \sum_n \langle \psi|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|, \quad (8.86)$$

lo cual concuerda con la representación de una señal en términos de una base vista en el Apdo. 2.3.3 del Cap. 2, donde

$$\langle \varphi_n|\psi\rangle = \langle \psi|\varphi_n\rangle^* \quad (8.87)$$

representaría los coeficientes del elemento ψ en la base φ_n .

Si la base no es numerable, igualmente se puede representar el operador identidad a partir de una representación integral de la forma²⁶

$$\mathbf{I} \equiv \int |\varphi\rangle \langle\varphi| d\varphi, \quad (8.88)$$

por lo que, de la misma manera, cualquier elemento puede ser representado en términos de esa base como

$$|\chi\rangle = \int |\varphi\rangle \langle\varphi|\chi\rangle d\varphi, \quad (8.89)$$

$$\langle\chi| = \int \langle\chi|\varphi\rangle \langle\varphi| d\varphi \quad (8.90)$$

siendo

$$\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\chi|\varphi\rangle^* \quad (8.91)$$

los coeficientes del elemento χ en esa base φ .

8.3.3. Propiedades

Los bras y kets disponen de las siguientes propiedades:

- Adición:

$$\langle\varphi| \pm \langle\phi| = \langle\varphi \pm \phi|, \quad (8.92)$$

$$|\psi\rangle \pm |\chi\rangle = |\psi \pm \chi\rangle. \quad (8.93)$$

- Escalado:

$$k \langle\varphi| = \langle k\varphi|, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (8.94)$$

$$k |\psi\rangle = |k^*\psi\rangle, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (8.95)$$

- Conmutatividad:

$$\langle\varphi| \pm \langle\phi| = \langle\phi| \pm \langle\varphi|, \quad (8.96)$$

$$|\psi\rangle \pm |\chi\rangle = |\chi\rangle \pm |\psi\rangle. \quad (8.97)$$

- Asociatividad:

$$\langle\varphi| \pm \langle\phi \pm \eta| = \langle\varphi \pm \phi| \pm \langle\eta|, \quad (8.98)$$

$$|\psi\rangle \pm |\chi \pm \theta\rangle = |\psi \pm \chi\rangle \pm |\theta\rangle. \quad (8.99)$$

- Distributividad:

$$k \langle\varphi \pm \phi| = \langle k\varphi| \pm \langle k\phi|, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (8.100)$$

$$k |\psi \pm \chi\rangle = |k^*\psi\rangle \pm |k^*\chi\rangle, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (8.101)$$

$$(k_1 \pm k_2) \langle\varphi| = \langle k_1\varphi| \pm \langle k_2\varphi|, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (8.102)$$

$$(k_1 \pm k_2) |\psi\rangle = |k_1^*\psi\rangle \pm |k_2^*\psi\rangle, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C} \quad (8.103)$$

²⁶El término $d\varphi$ representa el diferencial en la variable en la que se defina de la función φ .

- Producto interno:

$$\langle \varphi | \cdot | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle = c \in \mathbb{C}, \quad (8.104)$$

$$\langle \psi | \cdot | \varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle^* = c^* \in \mathbb{C}. \quad (8.105)$$

- Linealidad del producto interno:

$$\langle \varphi | (|k_1\psi_1\rangle \pm |k_2\psi_2\rangle) = k_1^* \langle \varphi | \psi_1 \rangle \pm k_2^* \langle \varphi | \psi_2 \rangle, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (8.106)$$

$$(\langle k_1\varphi_1 | \pm \langle k_2\varphi_2 |) | \psi \rangle = k_1 \langle \varphi_1 | \psi \rangle \pm k_2 \langle \varphi_2 | \psi \rangle, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}. \quad (8.107)$$

- Ortogonalidad:

$$\langle \varphi |, | \psi \rangle \text{ ortogonales} \Leftrightarrow \langle \varphi | \psi \rangle = 0. \quad (8.108)$$

- Definición positiva:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0, \quad (8.109)$$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv 0. \quad (8.110)$$

- Producto externo:

$$\mathbf{F} \equiv | \psi \rangle \langle \varphi | \quad (8.111)$$

- Linealidad del producto externo:

$$| \psi \rangle (\langle k_1\varphi_1 | \pm \langle k_2\varphi_2 |) = k_1 | \psi \rangle \langle \varphi_1 | \pm k_2 | \psi \rangle \langle \varphi_2 | = k_1 \mathbf{F}_1 \pm k_2 \mathbf{F}_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C} \quad (8.112)$$

$$(|k_1\psi_1\rangle \pm |k_2\psi_2\rangle) \langle \varphi | = k_1^* | \psi_1 \rangle \langle \varphi | \pm k_2^* | \psi_2 \rangle \langle \varphi | = k_1^* \mathbf{F}_1 \pm k_2^* \mathbf{F}_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C} \quad (8.113)$$

- Asociatividad:

$$(\langle \varphi | \mathbf{F} | \psi \rangle) = \langle \varphi | (\mathbf{F} | \psi \rangle) = \langle \varphi | \mathbf{F} | \psi \rangle. \quad (8.114)$$

- Hermiticidad:

$$\langle \chi | = \langle \psi | \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}^\dagger | \psi \rangle = | \chi \rangle, \quad (8.115)$$

$$\langle \varphi | \mathbf{F} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbf{F}^\dagger | \varphi \rangle, \quad (8.116)$$

$$\langle \varphi | \mathbf{F}^\dagger \mathbf{G}^\dagger | \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbf{G} \mathbf{F} | \varphi \rangle, \quad (8.117)$$

donde \mathbf{F}^\dagger representa el operador hermítico conjugado (o adjunto) de \mathbf{F} . Si un operador cumple que $\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{F}$ se dice que es hermítico, y si, además, coinciden sus dominios, se dice que el operador es autoadjunto. Cuando la dimensión es finita, todo operador hermítico es también autoadjunto.

- Autobras:

$$\langle \varphi | \mathbf{A} = a \langle \varphi | \quad (8.118)$$

si $\langle \varphi |$ es un autobra²⁷ del operador \mathbf{A} siendo $a \in \mathbb{C}$ el autovalor.

- Autokets:

$$\mathbf{A} | \psi \rangle = a | \psi \rangle \quad (8.119)$$

si $| \psi \rangle$ es un autoket²⁸ del operador \mathbf{A} siendo $a \in \mathbb{C}$ el autovalor.

Los autobras y autokets son comunmente utilizados en los problemas de mecánica cuántica debido a sus buenas propiedades, ya que pueden generar una base del espacio, son fácilmente aplicables a los operadores utilizados y sus autovalores generan el análisis espectral de dichos operadores.

²⁷También conocido como bra propio o, según la terminología anglosajona universalmente utilizada, eigenbra.

²⁸Ket propio o eigenket.

8.3.4. Ventajas e inconvenientes de la notación de Dirac

Además de las propiedades anteriormente descritas, una de las ventajas por las que es utilizada la notación de Dirac de **Bras** y **Kets** es por su sencillez a la hora de realizar cálculos que pueden ser conceptualmente complejos. La notación se reduce a la mínima expresión, indicando en cada bra o ket el nombre del vector o función que se está considerando. Se pierde por tanto una de las nociones importantes que se utilizan en la Teoría General de Señales y Sistemas, que es la de la descripción de la variable de la función considerada así como la identificación de la misma dentro de un posible conjunto. Variables y parámetros necesarios para representar cualquier elemento del espacio de señal. Si bien sería perfectamente posible describir la Teoría General de Señales y Sistemas utilizando la notación de Dirac de **Bras** y **Kets**, su simplicidad en cuanto a la notación podría resultar más perjudicial que beneficiosa, en orden a perder la clara referencia de las variables y parámetros que intervienen en las funciones que describen los problemas físicos que se traten, pudiendo resultar una notación un tanto confusa.

Por otro lado, en la mecánica cuántica, que es donde mayoritariamente se aplica la notación de Dirac de **Bras** y **Kets**, únicamente se consideran funciones base que sean autofunciones de los operadores implicados en cada problema, cambiando de base para cada operador. Esto tiene la ventaja en la facilidad de los cálculos y en el análisis espectral del operador. Además, las funciones base son escogidas de forma que no sólo sean autofunciones del operador, sino que también sus autovalores se correspondan con el parámetro que define cada función base. Así, si una función base, con la notación de la Teoría General de Señales y Sistemas, es $\varphi(x; \xi)$, al paso por un operador \mathbf{P} de la que es autofunción, el autovalor sería simplemente ξ , es decir²⁹,

$$\mathbf{P}[\varphi(x; \xi)] = \xi\varphi(x; \xi), \quad (8.120)$$

que en notación de Dirac sería

$$\mathbf{P}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle. \quad (8.121)$$

A pesar de que claramente la notación es más sencilla aunque no tan clara, este hecho choca de lleno con la generalización que se pretende realizar en la Teoría General de Señales y Sistemas con respecto al Análisis Espectral Generalizado (ver Cap. 5) donde se pretende realizar el análisis espectral de un operador bajo cualquier transformada, es decir, escogido cualquier conjunto de funciones base, sean éstas o no autofunciones del operador en cuestión. Para ello es necesaria la notación habitual mostrada en el Cap. 2.

La gran ventaja de la notación de Dirac de **Bras** y **Kets** es la generalización del producto interno dentro de un espacio de Hilbert, separando cada elemento para poder unificar en una sólo notación el producto escalar bien conocido junto con los funcionales lineales y antilineales que dan lugar a las distribuciones. Este unificación, para la que se necesitan los RHS, es uno de los avances importantes en la descripción de la Teoría General de Señales y Sistemas y que le confiere una mayor rigurosidad matemática, sobre todo para los espacios de dimensión infinita.

A continuación se describen, para los espacios de dimensión finita y los de dimensión infinita, las particularidades de la notación de Dirac de **Bras** y **Kets** y su relación con la notación habitual en la Teoría General de Señales y Sistemas.

8.3.5. Espacios de dimensión finita

La transcripción del formalismo de Dirac de **Bras** y **Kets** a los espacios de señal de dimensión finita es bien sencilla. Como se había expuesto en el Apdo. 8.3.1, en dimensión finita los bras representan vectores fila mientras que los kets representan vectores columna, así, el producto

²⁹Referirse a [65] o [66] para analizar y comprobar este hecho.

interno entre un bra con un ket es el conocido producto escalar. Sean

$$\langle a| = \left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \right) \quad (8.122)$$

y

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix}, \quad (8.123)$$

su producto interno es la suma finita del producto ordenado de cada una de las componentes del bra y del ket,

$$\langle a|b\rangle = \left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \right) \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \dots + a_N b_N^* = \sum_{n=1}^N a_n b_n^*. \quad (8.124)$$

Desde el punto de vista de la Teoría General de Señales y Sistemas, el único espacio de dimensión finita es el de las señales periódicas de variable discreta,

$$\mathcal{F}_K \equiv \mathcal{D}(N_0). \quad (8.125)$$

Sean $x_0(n)$ e $y_0(n)$ dos señales de $\mathcal{D}(N_0)$. En términos de bras se podrían representar como³⁰

$$x_0(n) \equiv \langle x|, \quad (8.126)$$

$$y_0(n) \equiv \langle y|, \quad (8.127)$$

pero, como se había comentado anteriormente, es conveniente mantener la notación completa para no perder la referencia de la variable. La representación de estas funciones en términos de bras y kets se corresponderá, por tanto, con

$$x_0(n) \equiv \langle x_0(n)|, \quad (8.128)$$

$$y_0(n) \equiv \langle y_0(n)|, \quad (8.129)$$

siendo su producto escalar

$$\langle x_0(n)|y_0(n)\rangle = \left(x_0(0) \quad x_0(1) \quad \dots \quad x_0(N_0-1) \right) \begin{pmatrix} y_0^*(0) \\ y_0^*(1) \\ \vdots \\ y_0^*(N_0-1) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n) y_0^*(n). \quad (8.130)$$

Es fácil darse cuenta de que la notación habitual del producto escalar³¹ es consecuente con la notación de producto interno entre bras y kets y representan lo mismo

$$\langle x_0(n), y_0(n)\rangle \equiv \langle x_0(n)|y_0(n)\rangle. \quad (8.131)$$

³⁰Igualmente se podrían representar como kets, aunque su representación significaría el conjugado de la señal.

³¹Dado que tanto $x_0(n)$ como $y_0(n)$ son funciones periódicas, el producto escalar puede definirse como en (8.130) o a lo largo de cualquier otro periodo de longitud N_0 .

Escogiendo un conjunto de funciones que jueguen el papel de una base, $e(n; k)$ ³², su representación en términos de Dirac sería

$$e(n; k) \equiv |e_k\rangle \equiv \langle e(n; k)|. \quad (8.132)$$

Si son ortogonales, su producto interno sería una delta de Kronecker que no tiene por qué estar normalizada,

$$\langle e(n; k) | e(n; k') \rangle = A\delta(k - k') \quad (8.133)$$

con A la energía de las funciones base³³. Así, el operador identidad vendría determinado a partir del producto externo por

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N_0-1} |e(n; k)\rangle \langle e(n; k)| \quad (8.134)$$

y cualquier función del espacio $x_0(n)$ puede ser representada en términos de esa base como

$$\langle x_0(n) | = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N_0-1} \langle x_0(n) | e(n; k)\rangle \langle e(n; k) |, \quad (8.135)$$

$$|x_0(n)\rangle = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N_0-1} |e(n; k)\rangle \langle e(n; k) | x_0(n)\rangle, \quad (8.136)$$

comprobando que se cumple que

$$\langle x_0(n) | e(n; k)\rangle = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n) e^*(n; k) = \langle e(n; k) | x_0(n)\rangle^* \quad (8.137)$$

son los coeficientes de $x_0(n)$ en la base $e(n; k)$.

Por otro lado, cualquier operador \mathbf{F} puede ser representado a través de una matriz \mathbf{A} . La acción de dicho operador sobre una función no es más que el producto de una matriz por un vector, así si

$$\mathbf{F}[x_0(n)] = y_0(n), \quad (8.138)$$

la señal de salida puede expresarse en términos de bras como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[x_0(n)] &\equiv \langle x_0(n) | \mathbf{A} = \\ &= \left(x_0(0) \quad x_0(1) \quad \dots \quad x_0(N_0 - 1) \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N_0} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_01} & a_{N_02} & \dots & a_{N_0N_0} \end{pmatrix} = \\ &= \left(y_0(0) \quad y_0(1) \quad \dots \quad y_0(N_0 - 1) \right) = \langle y_0(n) | \end{aligned} \quad (8.139)$$

³²Recordar del Cap. 2 que $e(n; k)$ no se trata de funciones de dos variables, sino de un conjunto de funciones de variable n ennumeradas por el parámetro k .

³³Suponiendo que la norma inducida por el producto escalar mida la energía de las señales y que todas tengan la misma, lo cual es lo más habitual.

o también en términos de kets como

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[x_0(n)] &\equiv \mathbf{A}^\dagger |x_0(n)\rangle = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{N_0 1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{N_0 2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N_0}^* & a_{2N_0}^* & \cdots & a_{N_0 N_0}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^*(0) \\ x_0^*(1) \\ \vdots \\ x_0^*(N_0 - 1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} y_0^*(0) \\ y_0^*(1) \\ \vdots \\ y_0^*(N_0 - 1) \end{pmatrix} = |y_0(n)\rangle. \tag{8.140}
\end{aligned}$$

Las funciones que sean autofunciones de un operador \mathbf{F} , igualmente pueden representarse a través de una matriz \mathbf{A} . Si se cumple que

$$\mathbf{F}[x_0(n)] = \lambda x_0(n), \tag{8.141}$$

en forma matricial con la notación de Dirac será

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[x_0(n)] &\equiv \langle x_0(n) | \mathbf{A} = \\
&= \begin{pmatrix} x_0(0) & x_0(1) & \cdots & x_0(N_0 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N_0} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_0 1} & a_{N_0 2} & \cdots & a_{N_0 N_0} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_0(0) & \lambda x_0(1) & \cdots & \lambda x_0(N_0 - 1) \end{pmatrix} = \lambda \langle x_0(n) | \tag{8.142}
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[x_0(n)] &\equiv \mathbf{A}^\dagger |x_0(n)\rangle = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{N_0 1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{N_0 2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N_0}^* & a_{2N_0}^* & \cdots & a_{N_0 N_0}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^*(0) \\ x_0^*(1) \\ \vdots \\ x_0^*(N_0 - 1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^* x_0^*(0) \\ \lambda^* x_0^*(1) \\ \vdots \\ \lambda^* x_0^*(N_0 - 1) \end{pmatrix} = \lambda^* |x_0(n)\rangle. \tag{8.143}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Utilizando, por ejemplo, la base $e(n; k) = e^{jk\Omega_0 n}$, se puede comprobar por un lado que es ortogonal,

$$\langle e^{jk\Omega_0 n} | e^{jk'\Omega_0 n} \rangle = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j(k-k')\Omega_0 n} = N_0 \delta(k - k'), \quad (8.144)$$

por otro lado, se puede construir la matriz identidad a partir del producto externo como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} |e^{jk\Omega_0 n}\rangle \langle e^{jk\Omega_0 n}| = \\ & = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\Omega_0} \\ e^{-j2k\Omega_0} \\ \vdots \\ e^{-j(N_0-1)k\Omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{jk\Omega_0} & e^{j2k\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)k\Omega_0} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \begin{pmatrix} 1 & e^{jk\Omega_0} & e^{j2k\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)k\Omega_0} \\ e^{-jk\Omega_0} & 1 & e^{jk\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-2)k\Omega_0} \\ e^{-j2k\Omega_0} & e^{-jk\Omega_0} & 1 & \dots & e^{j(N_0-3)k\Omega_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(N_0-1)k\Omega_0} & e^{-j(N_0-2)k\Omega_0} & e^{-j(N_0-3)k\Omega_0} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}, \quad (8.146) \end{aligned}$$

así, cualquier señal $x_0(n)$ del espacio se puede expresar en términos de esta base como

$$\langle x_0(n) | = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \langle x_0(n) | e^{jk\Omega_0 n} \rangle \langle e^{jk\Omega_0 n} |, \quad (8.147)$$

donde se ve claro que

$$\langle x_0(n) | e^{jk\Omega_0 n} \rangle = a(k) \quad (8.148)$$

son los coeficientes, para cada k , que permiten reconstruir la señal $x_0(n)$ como una combinación lineal (en este caso un sumatorio finito) de los elementos de la base. Estos coeficientes, además, representan el Desarrollo en Serie de Fourier de la señal $x_0(n)$.

Comparando la expresión en términos de bras y kets con la expresión general en términos de la Teoría General de Señales y Sistemas, se puede ver que son muy similares,

$$\begin{cases} \langle x_0(n) | = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \langle x_0(n) | e^{jk\Omega_0 n} \rangle \langle e^{jk\Omega_0 n} |, \\ x_0(n) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \langle x_0(n), e^{jk\Omega_0 n} \rangle e^{jk\Omega_0 n}. \end{cases} \quad (8.149)$$

Este conjunto de funciones base, además, son siempre autofunciones de cualquier sistema que sea lineal e invariante, por tanto, un operador $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ se puede representar de forma matricial a partir de su respuesta al impulso $h(n)$. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(N_0-1) \\ h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & h(N_0-2) \\ h(-2) & h(-1) & h(0) & \dots & h(N_0-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(-(N_0-1)) & h(-(N_0-2)) & h(-(N_0-3)) & \dots & h(0) \end{pmatrix}. \quad (8.150)$$

Dado que

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[e(n; k)] = a(k) e(n; k), \quad (8.151)$$

se comprueba que

$$\begin{aligned} & \langle e(n; k) | \mathbf{A} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & e^{jk\Omega_0} & \dots & e^{jk\Omega_0(N_0-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) & h(-1) & \dots & h(-(N_0-1)) \\ h(1) & h(0) & \dots & h(-(N_0-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N_0-1) & h(N_0-2) & \dots & h(0) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a(k) & a(k) e^{jk\Omega_0} & \dots & a(k) e^{jk\Omega_0(N_0-1)} \end{pmatrix} = a(k) \langle e(n; k) |, \end{aligned} \quad (8.152)$$

siendo

$$a(k) = \mathbf{DSF}[e(n; k)] \quad (8.153)$$

los autovalores para cada k .

Igualmente, en términos de kets,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger |e(n; k)\rangle & = \begin{pmatrix} h^*(0) & h^*(1) & \dots & h^*(N_0-1) \\ h^*(-1) & h^*(0) & \dots & h^*(N_0-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^*(-(N_0-1)) & h^*(-(N_0-2)) & \dots & h^*(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\Omega_0} \\ \vdots \\ e^{-jk\Omega_0(N_0-1)} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a^*(k) \\ a^*(k) e^{-jk\Omega_0} \\ \vdots \\ a^*(k) e^{-jk\Omega_0(N_0-1)} \end{pmatrix} = a(k) \langle e(n; k) |. \end{aligned} \quad (8.154)$$

Como se puede comprobar, en dimensión finita no existe ningún problema referente al espacio de señal considerado. La notación de Dirac de Bras y Kets es un mero formalismo de la representación de vectores, matrices y productos entre ellos. No existen distribuciones y no es necesario modificar el espacio de señal inicial $\mathcal{D}(N_0)$, siendo éste un espacio de Hilbert completo con la definición habitual de producto escalar

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n) y_0^*(n). \quad (8.155)$$

8.3.6. Espacios de dimensión infinita

En los espacios de dimensión infinita, ya no se pueden considerar los bras y kets como vectores, sino como funcionales y aplicaciones entre funciones. El concepto de la notación de Dirac en los espacios de dimensión infinita es el de generalizar los vectores, no viéndolos ya como un conjunto finito de elementos sino como como una serie infinita. Es importante recordar que hay dos tipos de infinito considerados, infinito numerable e infinito no numerable, así, una función $x(n)$, con $n \in \mathbb{Z}$, es una secuencia infinita numerable de elementos mientras que $f(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, presenta un conjunto no numerable de elementos. A pesar de que estas funciones no se pueden identificar con vectores, puede ser útil mantener este concepto en mente para entender el formalismo de Dirac en los espacios de dimensión infinita.

La definición que hay que hacer en este caso de los bras y kets es la explicada en el punto 2 del Apdo. 8.3.1, entendiéndolos como funcionales lineales o antilineales.

En primer lugar, recordamos la primera definición, considerando a los kets como funcionales lineales sobre los bras. Recordemos que, en este caso, podemos identificar los bras $\langle a|$ con cualquier función $a(\tau)$ ³⁴ del espacio de señal original $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ siendo

$$\langle a| \equiv \langle a(\tau)| \equiv a(\tau) \quad (8.156)$$

y manteniendo en la notación del bra la identificación de la variable. Sea $|d\rangle \equiv |d(\tau)\rangle$ un ket que sea un funcional lineal sobre los bras. Definimos \mathfrak{B} como el espacio de los bras $\langle a(\tau)|$ que sean del dominio del funcional $|d(\tau)\rangle$. De esta forma, se puede definir el producto bra-ket como

$$\left\{ \begin{array}{l} |d(\tau)\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle a(\tau)| \longmapsto \langle a(\tau) | d(\tau)\rangle. \end{array} \right. \quad (8.157)$$

Por otro lado, a partir de la segunda definición, se puede considerar a los bras como funcionales antilineales sobre los kets. Identificando los kets $|a\rangle$ con cualquier función $a(\tau)$ del espacio $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera

$$|a\rangle \equiv |a(\tau)\rangle \equiv a^*(\tau). \quad (8.158)$$

Sea $\langle d| \equiv \langle d(\tau)|$ un bra que sea un funcional antilineal sobre los kets. Definimos \mathfrak{K} el espacio de los kets $|a(\tau)\rangle$ que sean del dominio del funcional $\langle d(\tau)|$. De esta forma, se define el producto bra-ket como

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle d(\tau)| : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathbb{C} \\ |a(\tau)\rangle \longmapsto \langle d(\tau) | a(\tau)\rangle. \end{array} \right. \quad (8.159)$$

Tanto en uno como en otro caso el término $\langle a(\tau) | d(\tau)\rangle = \langle d(\tau) | a(\tau)\rangle^*$ se corresponde con un número complejo y ha de ser entendido como una aplicación. En algunos casos puede corresponderse con el producto escalar conocido, pero no siempre. Aplicándolo a los diferentes espacios, se define como:

- Funciones de variable continua:

Considerando los ket como funcionales lineales,

$$\langle a(\tau) | d(\tau)\rangle \equiv \langle f(x) | d(x)\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d^*(x) dx. \quad (8.160)$$

³⁴Con esta notación, $a(\tau)$ se puede referir tanto a las señales de variable discreta $x(n)$ como a las de variable continua $f(x)$ y $f_0(x)$. Más adelante se harán las consideraciones particulares oportunas.

Se demuestra la linealidad ya que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f(x) + \beta g(x) | d(x) \rangle &= \int_{x=-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) d^*(x) dx = \\
&= \alpha \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d^*(x) dx + \beta \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) d^*(x) dx = \\
&= \alpha \langle f(x) | d(x) \rangle + \beta \langle g(x) | d(x) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.161}$$

Considerando los bras como funcionales antilineales,

$$\langle d(\tau) | a(\tau) \rangle \equiv \langle d(x) | f(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} d(x) f^*(x) dx. \tag{8.162}$$

Y se demuestra la antilinealidad,

$$\begin{aligned}
\langle d(x) | \alpha f(x) + \beta g(x) \rangle &= \int_{x=-\infty}^{\infty} d(x) (\alpha f(x) + \beta g(x))^* dx = \\
&= \alpha^* \int_{x=-\infty}^{\infty} d(x) f^*(x) dx + \beta^* \int_{x=-\infty}^{\infty} d(x) g^*(x) dx = \\
&= \alpha^* \langle d(x) | f(x) \rangle + \beta^* \langle d(x) | g(x) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.163}$$

En ambos casos, si el producto $f(x) d^*(x)$ (o $d(x) f^*(x)$) es integrable, la aplicación $\langle f(x) | d(x) \rangle$ (respectivamente $\langle d(x) | f(x) \rangle$) es el conocido producto escalar para este espacio; pero si no lo es, o alguna de las dos funciones no pertenece al espacio, igualmente la expresión es válida y en algunos casos dará origen a la consideración de la teoría de distribuciones³⁵.

■ Funciones periódicas de variable continua:

Tomando los kets como funcionales lineales,

$$\langle a(\tau) | d(\tau) \rangle \equiv \langle f_0(x) | d(x) \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) d^*(x) dx, \tag{8.164}$$

siendo clara la linealidad ya que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f_0(x) + \beta g_0(x) | d(x) \rangle &= \int_{x=\langle X_0 \rangle} (\alpha f_0(x) + \beta g_0(x)) d^*(x) dx = \\
&= \alpha \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) d^*(x) dx + \beta \int_{x=\langle X_0 \rangle} g_0(x) d^*(x) dx = \\
&= \alpha \langle f_0(x) | d(x) \rangle + \beta \langle g_0(x) | d(x) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.165}$$

Por otro lado, considerando los bras como funcionales antilineales,

$$\langle d(\tau) | a(\tau) \rangle \equiv \langle d(x) | f_0(x) \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} d(x) f_0^*(x) dx. \tag{8.166}$$

Probando la antilinealidad como

$$\begin{aligned}
\langle d(x) | \alpha f_0(x) + \beta g_0(x) \rangle &= \int_{x=\langle X_0 \rangle} d(x) (\alpha f_0(x) + \beta g_0(x))^* dx = \\
&= \alpha^* \int_{x=\langle X_0 \rangle} d(x) f_0^*(x) dx + \beta^* \int_{x=\langle X_0 \rangle} d(x) g_0^*(x) dx = \\
&= \alpha^* \langle d(x) | f_0(x) \rangle + \beta^* \langle d(x) | g_0(x) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.167}$$

³⁵ Ver definiciones y propiedades de las distribuciones en el Ap. B.17.

Igualmente, si el producto $f_0(x) d^*(x)$ (o $d(x) f_0^*(x)$) fuera integrable en un periodo X_0 , la aplicación $\langle f_0(x) | d(x) \rangle$ (respectivamente $\langle d(x) | f_0(x) \rangle$) es el producto escalar definido en este espacio; pero no tiene por qué, y la expresión indicaría la obtención de un número complejo, dando lugar muchas veces a las distribuciones.

- Funciones de variable discreta:

A partir de los kets como funcionales lineales,

$$\langle a(\tau) | d(\tau) \rangle \equiv \langle x(n) | d(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) d^*(n), \quad (8.168)$$

donde la linealidad se demuestra fácilmente

$$\begin{aligned} \langle \alpha x(n) + \beta y(n) | d(n) \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x(n) + \beta y(n)) d^*(n) = \\ &= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) d^*(n) + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) d^*(n) = \\ &= \alpha \langle x(n) | d(n) \rangle + \beta \langle y(n) | d(n) \rangle. \end{aligned} \quad (8.169)$$

Y a partir de los bras como funcionales antilineales,

$$\langle d(\tau) | a(\tau) \rangle \equiv \langle d(n) | x(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) x^*(n). \quad (8.170)$$

La antilinealidad queda demostrada ya que

$$\begin{aligned} \langle d(n) | \alpha x(n) + \beta y(n) \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) (\alpha x(n) + \beta y(n))^* = \\ &= \alpha^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) x^*(n) + \beta^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) y^*(n) = \\ &= \alpha^* \langle d(n) | x(n) \rangle + \beta^* \langle d(n) | y(n) \rangle. \end{aligned} \quad (8.171)$$

Si el producto $x(n) d^*(n)$ (equivalentemente $d(n) x^*(n)$) es sumable, la aplicación $\langle x(n) | d(n) \rangle$ (equivalentemente $\langle d(n) | x(n) \rangle$) no es más que el producto escalar que se ha definido en este espacio. Si no, la expresión también es válida representando un número complejo, dando lugar a la consideración de **funciones generalizadas**³⁶.

En cualquier caso, la forma general de tratar la expresión $\langle a(\tau) | d(\tau) \rangle$ es la de considerar el ket $|d(\tau)\rangle$ como un funcional lineal sobre el bra $\langle a(\tau)|$ o, equivalentemente, tratar la expresión $\langle d(\tau) | a(\tau) \rangle$ considerando el bra $\langle d(\tau)|$ como un funcional antilineal sobre el ket $|a(\tau)\rangle$. Es fácil comprobar que

$$\langle a(\tau) | d(\tau) \rangle = \langle d(\tau) | a(\tau) \rangle^* \quad (8.172)$$

en todos los casos.

A pesar de que ambas formas de tratar los bras y los kets son equivalentes, ya que los resultados se relacionan a partir de un número y su conjugado como se muestra en (8.172), son formalizaciones diferentes y, por tanto necesarias las dos, teniendo que construir la teoría para ambos casos.

Estos funcionales pueden verse como aplicaciones sobre las funciones, lo cual enlaza directamente con el **Teorema de Representación de Riesz**³⁷ que dice que cualquier funcional lineal acotado³⁸ **D**

³⁶Ver definición de funciones generalizadas en el Ap. B.17.

³⁷Ver enunciado del Teorema de Representación de Riesz en el Ap. C.3.

³⁸Ver definición de funcional lineal acotado en el Ap. B.15.

en un espacio L^p puede ser representado por una función o función generalizada³⁹ $d(x) \in L^q$ en la forma⁴⁰

$$\mathbf{D}[\cdot] = \int_x (\cdot)_x d^*(x) dx, \quad (8.176)$$

cumpléndose que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (8.177)$$

Así, para una función $f(x) \in L^p$, se tiene que, si \mathbf{D} es un funcional lineal acotado sobre L^p , existe una función o función generalizada $d(x) \in L^q$ tal que

$$\mathbf{D}[f(x)] = \int_x f(x) d^*(x) dx. \quad (8.178)$$

De la misma manera, sea $\tilde{\mathbf{D}}$ un funcional antilineal acotado⁴¹ sobre L^p , entonces existe una función o función generalizada en $d(x) \in L^q$ tal que, para cada $f(x) \in L^p$

$$\tilde{\mathbf{D}}[f(x)] = \int_x d(x) f^*(x) dx. \quad (8.179)$$

Para el caso de los espacios de variable discreta l^p , sea \mathbf{D} un funcional lineal acotado sobre el espacio l^p , existe entonces una función $d(n) \in l^q$ tal que, para toda $x(n) \in l^p$ se tiene que

$$\mathbf{D}[x(n)] = \sum_n x(n) d^*(n), \quad (8.180)$$

mientras que si $\tilde{\mathbf{D}}$ es un funcional antilineal acotado sobre l^p , existe $d(n) \in l^q$ tal que, para toda función $x(n) \in l^p$,

$$\tilde{\mathbf{D}}[x(n)] = \sum_n d(n) x^*(n). \quad (8.181)$$

En el caso de espacios de variable discreta no hay distribuciones, pero sí puede haber funciones de interés que no pertenezcan al espacio. Por ejemplo, la función de variable discreta $e^{j\Omega n}$ para un valor cualquiera de Ω no pertenece a $l^p(\mathbb{Z})$ para $1 \leq p < \infty$, sin embargo es una función que sería interesante considerar. Más adelante se verá cómo tratar a este tipo de funciones.

Esto conlleva algunos resultados importantes:

³⁹Como se ha comentado anteriormente, las funciones generalizadas en el caso de variable continua introducen directamente el concepto de distribución.

⁴⁰Para los siguientes casos, en las integrales y sumatorios, para aliviar la notación, tan sólo se indicará el índice de la integral o la suma, teniendo en cuenta que

$$\int_x \equiv \int_{x=-\infty}^{\infty} \quad (8.173)$$

ó

$$\int_x \equiv \int_{x=\langle X_0 \rangle} \quad (8.174)$$

representando ambos una suma infinita no numerable, y

$$\sum_n \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (8.175)$$

representado una suma infinita numerable.

⁴¹Ver definición de funcional antilineal acotado en el Ap. B.16.

- Esta forma de interpretar las aplicaciones entre funciones en los espacios de señal como funcionales lineales y antilineales lleva directamente a la consideración de los espacios duales y antiduales del espacio de señal original, siendo L^q (l^q) el espacio dual y antidual de L^p (l^p).
- Como se había visto anteriormente, los espacios de Hilbert de señales son los espacios L^p (l^p) cuando $p = 2$, lo que implica que $q = 2$. Esto da lugar al Teorema de Riesz-Fréchet⁴² que demuestra que los espacios de Hilbert son isomorfos a sus duales y antiduales. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, \mathcal{H}' es su espacio dual y \mathcal{H}^\times es su espacio antidual, existe un isomorfismo lineal isométrico entre \mathcal{H} y \mathcal{H}' y un isomorfismo antilineal isométrico entre \mathcal{H} y \mathcal{H}^\times de forma que se pueda escribir

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}^\times \quad (8.182)$$

- Se relaciona directamente los funcionales con el formalismo de Dirac y con la notación de producto interno. Así, puede representarse el mismo concepto de tres maneras diferentes:

$$\mathbf{D}[f(x)] = \langle f(x) | d(x) \rangle = \int_x f(x) d^*(x) dx, \quad (8.183)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}[f(x)] = \langle d(x) | f(x) \rangle = \int_x d(x) f^*(x) dx. \quad (8.184)$$

$$\mathbf{D}[x(n)] = \langle x(n) | d(n) \rangle = \sum_n x(n) d^*(n), \quad (8.185)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}[x(n)] = \langle d(n) | x(n) \rangle = \sum_n d(n) x^*(n). \quad (8.186)$$

Esto supone varias cosas:

- Iremos dejando la notación de Dirac de Bras y Kets para volver a la notación habitual del producto interno en los espacios de señal, sabiendo que

$$\langle a(\tau) | d(\tau) \rangle \equiv \langle a(\tau), d(\tau) \rangle, \quad (8.187)$$

y no perdiendo de vista el concepto original por el cual el formalismo de Dirac fue introducido, este es, la interpretación del producto interno en un espacio de Hilbert como un funcional; ya que con la notación habitual de la Teoría General de Señales y Sistemas es posible formalizar el concepto que relaciona las funciones del espacio de Hilbert con los funcionales lineales y antilineales.

- Este producto interno no lo vemos ya como el producto escalar habitual, sino como un funcional aplicado a las funciones del espacio de Hilbert que devuelve un número complejo; aunque en algunos casos, ese producto interno sí se corresponda con el producto escalar ordinario definido en el espacio de Hilbert correspondiente.
- La definición del producto escalar dentro del espacio de Hilbert sigue, obviamente, existiendo, ya que es la que define el propio espacio de Hilbert; pero con esa misma notación se representan también los funcionales lineales y antilineales.

En los espacios de dimensión infinita, es posible escoger diferentes conjuntos de funciones que jueguen el papel de una base, ya sea ésta de variable continua o discreta, numerable o no

⁴²Ver enunciado del Teorema de Riesz-Fréchet en el Ap. C.4.

numerable, así

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R} \quad (8.188)$$

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; m), \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, \quad (8.189)$$

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega), \quad n \in \mathbb{Z}, \Omega \in \mathbb{R}, \quad (8.190)$$

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; n'), \quad n, n' \in \mathbb{Z}. \quad (8.191)$$

Su representación en términos de la notación de Dirac será

$$e(\tau; \mu) \equiv \langle \mu | \quad (8.192)$$

es decir, indicando el parámetro que describe cada uno de los elementos⁴³; sin embargo, para no perder la notación de la variable, identificaremos las funciones con los siguientes bras:

$$e(\tau; \mu) \equiv \langle e(\tau; \mu) |, \quad (8.194)$$

$$e(x; \xi) \equiv \langle e(x; \xi) |, \quad (8.195)$$

$$e(x; m) \equiv \langle e(x; m) |, \quad (8.196)$$

$$e(n; \Omega) \equiv \langle e(n; \Omega) |, \quad (8.197)$$

$$e(n; n') \equiv \langle e(n; n') |. \quad (8.198)$$

Si estas funciones base son ortogonales, su producto interno es una delta de Dirac para aquéllas cuyo enumerador sea un número real

$$\langle e(x; \xi) | e(x; \xi') \rangle = A_\xi \delta(\xi - \xi'), \quad (8.199)$$

$$\langle e(n; \Omega) | e(n; \Omega') \rangle = A_\Omega \delta(\Omega - \Omega'), \quad (8.200)$$

y una delta de Kronecker para aquéllas en las que el parámetro que las identifica sea un número entero

$$\langle e(x; m) | e(x; m') \rangle = A_m \delta(m - m'), \quad (8.201)$$

$$\langle e(n; n') | e(n; n'') \rangle = A_{n'} \delta(n' - n''). \quad (8.202)$$

Estas funciones base pueden no estar normalizadas, por eso aparecen las constantes A_ξ , A_Ω , A_m , $A_{n'}$. En general, la ortogonalidad se puede representar como

$$\langle e(\tau; \mu) | e(\tau; \mu') \rangle = A \tilde{\delta}(\mu - \mu'), \quad (8.203)$$

siendo $\tilde{\delta}(\mu)$ una representación general que puede indicar una delta de Dirac⁴⁴ o una delta de Kronecker.

⁴³Este tipo de notación es usada en la mecánica cuántica y puede resultar confusa para quien no esté habituado. Muchas veces los nombres de los operadores, las autofunciones y sus autovalores son el mismo, por ejemplo

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad (8.193)$$

indicando A un operador, $|a\rangle$ una autofunción (autoket en este caso) y a su autovalor. Esto es debido a que las funciones base son escogidas de forma que sean autofunciones del operador y que su autovalor coincida con el enumerador de esa función base, por tanto, hay mucha información que es sobreentendida. Como esto no ocurre en los casos de la Teoría General de Señales y Sistemas, se hará siempre notación explícita a la variable y al parámetro que la identifica dentro de un conjunto.

⁴⁴De hecho, el elemento matemático delta de Dirac $\delta(x)$ surge a partir de esta notación de bras y kets, tratando de ser una generalización de la ortogonalidad de funciones base de energía finita (8.133), pero para conjuntos de funciones base que no tienen energía finita. Ver [65].

De esta forma, el operador identidad puede representarse a partir del producto externo de estas funciones base como

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{A} \mathbf{CL}_\mu [|e(\tau; \mu)\rangle \langle e(\tau; \mu)|], \quad (8.204)$$

así, cualquier señal $a(\tau)$ del espacio puede ser expresada en términos de esa base como

$$\langle a(\tau)| = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_\mu [\langle a(\tau) | e(\tau; \mu)\rangle \langle e(\tau; \mu)|], \quad (8.205)$$

$$|a(\tau)\rangle = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_\mu [|e(\tau; \mu)\rangle \langle e(\tau; \mu) | a(\tau)\rangle]. \quad (8.206)$$

Para cada diferente espacio de dimensión infinita, estas expresiones se pueden particularizar como:

- Variable continua, enumerador continuo,

$$\langle f(x)| = \frac{1}{A_\xi} \int_\xi \langle f(x) | e(x; \xi)\rangle \langle e(x; \xi)| d\xi, \quad (8.207)$$

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{A_\xi} \int_\xi |e(x; \xi)\rangle \langle e(x; \xi) | f(x)\rangle d\xi, \quad (8.208)$$

siendo

$$\langle f(x) | e(x; \xi)\rangle = \int_x f(x) e^*(x; \xi) dx = \langle e(x; \xi) | f(x)\rangle^* \quad (8.209)$$

los coeficientes de $f(x)$ en la base $e(x; \xi)$.

- Variable continua, enumerador discreto,

$$\langle f_0(x)| = \frac{1}{A_m} \sum_m \langle f_0(x) | e(x; m)\rangle \langle e(x; m)|, \quad (8.210)$$

$$|f_0(x)\rangle = \frac{1}{A_m} \sum_m |e(x; m)\rangle \langle e(x; m) | f_0(x)\rangle, \quad (8.211)$$

siendo

$$\langle f_0(x) | e(x; m)\rangle = \int_x f_0(x) e^*(x; m) dx = \langle e(x; m) | f_0(x)\rangle^* \quad (8.212)$$

los coeficientes de $f_0(x)$ en la base $e(x; m)$.

- Variable discreta, enumerador continuo,

$$\langle x(n)| = \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega \langle x(n) | e(n; \Omega)\rangle \langle e(n; \Omega)| d\Omega, \quad (8.213)$$

$$|x(n)\rangle = \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega |e(n; \Omega)\rangle \langle e(n; \Omega) | x(n)\rangle d\Omega, \quad (8.214)$$

siendo

$$\langle x(n) | e(n; \Omega)\rangle = \sum_n x(n) e^*(n; \Omega) = \langle e(n; \Omega) | x(n)\rangle^* \quad (8.215)$$

los coeficientes de $x(n)$ en la base $e(n; \Omega)$.

- Variable discreta, enumerador discreto,

$$\langle x(n)| = \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} \langle x(n) | e(n; n')\rangle \langle e(n; n')|, \quad (8.216)$$

$$|x(n)\rangle = \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} |e(n; n')\rangle \langle e(n; n') | x(n)\rangle, \quad (8.217)$$

siendo

$$\langle x(n) | e(n; n') \rangle = \sum_n x(n) e^*(n; n') = \langle e(n; n') | x(n) \rangle^* \quad (8.218)$$

los coeficientes de $x(n)$ en la base $e(n; n')$.

- Podría darse la circunstancia de que en algún caso se necesitase una base mixta, es decir, que tenga parte numerable y parte no numerable⁴⁵. En este caso las funciones base serían una combinación de $e(x; \xi)$ y $e(x; m)$ para el caso de variable continua o de $e(n; \Omega)$ y $e(n; n')$ para el caso de variable discreta. El operador identidad para cada caso sería

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{A_\xi} \int_\xi |e(x; \xi)\rangle \langle e(x; \xi)| d\xi + \frac{1}{A_m} \sum_m |e(x; m)\rangle \langle e(x; m)|, \quad (8.219)$$

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega |e(n; \Omega)\rangle \langle e(n; \Omega)| d\Omega + \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} |e(n; n')\rangle \langle e(n; n')|. \quad (8.220)$$

Así, cada función $f(x)$ de variable continua podría escribirse como

$$\langle f(x) | = \frac{1}{A_\xi} \int_\xi \langle f(x) | e(x; \xi)\rangle \langle e(x; \xi)| d\xi + \frac{1}{A_m} \sum_m \langle f(x) | e(x; m)\rangle \langle e(x; m)| \quad (8.221)$$

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{A_\xi} \int_\xi |e(x; \xi)\rangle \langle e(x; \xi) | f(x)\rangle d\xi + \frac{1}{A_m} \sum_m |e(x; m)\rangle \langle e(x; m) | f(x)\rangle \quad (8.222)$$

donde los coeficientes de $f(x)$ en esta base serían

$$\begin{aligned} \langle f(x) | e(x; \xi)\rangle + \langle f(x) | e(x; m)\rangle &= \\ &= \int_x f(x) e^*(x; \xi) dx + \int_x f(x) e^*(x; m) dx = \\ &= \langle e(x; \xi) | f(x)\rangle^* + \langle e(x; m) | f(x)\rangle^* \end{aligned} \quad (8.223)$$

Mientras que las de variable discreta $x(n)$ se representarían por

$$\langle x(n) | = \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega \langle x(n) | e(n; \Omega)\rangle \langle e(n; \Omega)| d\Omega + \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} \langle x(n) | e(n; n')\rangle \langle e(n; n')| \quad (8.224)$$

$$|x(n)\rangle = \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega |e(n; \Omega)\rangle \langle e(n; \Omega) | x(n)\rangle d\Omega + \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} |e(n; n')\rangle \langle e(n; n') | x(n)\rangle \quad (8.225)$$

donde los coeficientes de $x(n)$ en esta base serían

$$\begin{aligned} \langle x(n) | e(n; \Omega)\rangle + \langle x(n) | e(n; n')\rangle &= \\ &= \sum_n x(n) e^*(n; \Omega) + \sum_n x(n) e^*(n; n') = \\ &= \langle x(n) | e(n; \Omega)\rangle^* + \langle x(n) | e(n; n')\rangle^* \end{aligned} \quad (8.226)$$

Hay que recordar que el cálculo de los coeficientes en todos los casos tiene que ser entendido como un funcional sobre la función original. En el caso general tenemos que

$$\alpha(\mu) = \langle a(\tau) | e(\tau; \mu)\rangle, \quad (8.227)$$

⁴⁵Ejemplos de este estilo pueden verse en [65] para algunos problemas físicos que tengan una parte del espectro continuo y otra parte discreto.

es decir, consideramos un funcional lineal $|e(\tau; \mu)\rangle$ para cada μ que, al aplicarlos a $\langle a(\tau)|$, dan lugar a cada uno de los coeficientes $\alpha(\mu)$, para cada μ . De forma matemática

$$\begin{cases} |e(\tau; \mu)\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle a(\tau)| \longmapsto \langle a(\tau) | e(\tau; \mu)\rangle = \alpha(\mu). \end{cases} \quad (8.228)$$

De la misma manera se puede considerar $\langle e(\tau; \mu)|$ como un funcional antilineal actuando sobre el ket $|a(\tau)\rangle$ de forma que

$$\begin{cases} \langle e(\tau; \mu)| : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathbb{C} \\ |a(\tau)\rangle \longmapsto \langle e(\tau; \mu) | a(\tau)\rangle = \alpha^*(\mu). \end{cases} \quad (8.229)$$

En este punto se puede ver que es posible prescindir de la notación de bras y ket y volver a la representación original del producto interno definido para cada espacio, pero recordando el nuevo concepto de producto interno como un funcional sobre las funciones, devolviendo un número complejo. En algunos casos este producto interno representará lo mismo que el producto escalar original definido en el espacio de Hilbert. Llamando \mathbf{T}_μ al conjunto de funcionales, para cada μ , representados por $e(\tau; \mu)$, se puede escribir

$$\begin{cases} \mathbf{T}_\mu : \mathcal{F}_K \longrightarrow \mathbb{C} \\ a(\tau) \longmapsto \mathbf{T}_\mu[a(\tau)] = \langle a(\tau) | e(\tau; \mu)\rangle \equiv \langle a(\tau), e(\tau; \mu)\rangle = \alpha(\mu). \end{cases} \quad (8.230)$$

Así, las representaciones de las señales en términos de una base tienen la expresión conocida según la notación de la Teoría General de Señales y Sistemas vista en el Apdo. 2.3.3 del Cap. 2. Las ecuaciones (8.207), (8.210), (8.213) y (8.216) pueden escribirse, respectivamente, como

$$f(x) = \frac{1}{A_\xi} \int_\xi \langle f(x), e(x; \xi)\rangle e(x; \xi) d\xi, \quad (8.231)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{A_m} \sum_m \langle f_0(x), e(x; m)\rangle e(x; m), \quad (8.232)$$

$$x(n) = \frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega \langle x(n), e(n; \Omega)\rangle e(n; \Omega) d\Omega \quad (8.233)$$

$$x(n) = \frac{1}{A_{n'}} \sum_{n'} \langle x(n), e(n; n')\rangle e(n; n'). \quad (8.234)$$

Dado un operador \mathbf{F} , la salida del sistema representado por ese operador cuando la entrada es el bra $\langle a(\tau)|$ sería el bra⁴⁶

$$\langle a(\tau) | \mathbf{F} = \langle b(\tau) |, \quad (8.235)$$

y en términos de kets,

$$\mathbf{F}^\dagger |a(\tau)\rangle = |b(\tau)\rangle. \quad (8.236)$$

En los casos de dimensión infinita, el operador \mathbf{F} no se puede representar mediante una matriz, ya que las dimensiones de ésta deberían ser, en su caso, infinitas. Si los bras y kets son autobras

⁴⁶Por simplicidad, vamos a suponer igual la variable de la señal de entrada que la de salida.

y autokets del operador \mathbf{F} , la salida se correspondería con el mismo bra o ket escalado por el autovalor correspondiente,

$$\langle a(\tau) | \mathbf{F} = \alpha \langle a(\tau) |, \quad (8.237)$$

$$\mathbf{F}^\dagger |a(\tau)\rangle = \alpha^* |a(\tau)\rangle. \quad (8.238)$$

En el caso de que cada una de las funciones $e(\tau; \mu)$ del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ sean autofunciones del operador \mathbf{F} , para cada una de ellas habrá un autovalor, así, en términos de autobras y autokets,

$$\langle e(\tau; \mu) | \mathbf{F} = \alpha(\mu) \langle e(\tau; \mu) |, \quad (8.239)$$

$$\mathbf{F}^\dagger |e(\tau; \mu)\rangle = \alpha^*(\mu) |e(\tau; \mu)\rangle, \quad (8.240)$$

indicando con $\alpha(\mu_0)$ el autovalor correspondiente a la autofunción $e(\tau; \mu_0)$ ⁴⁷. En general, con la notación habitual de la Teoría de Señales y Sistemas, la expresión de las autofunciones y los autovalores de un operador se representan como

$$\mathbf{F}[e(\tau; \mu)] = \alpha(\mu) e(\tau; \mu). \quad (8.244)$$

Ejemplos

1. Considerando el conjunto de funciones base $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$, se puede comprobar que son ortogonales

$$\langle e^{j\xi x} | e^{j\xi' x} \rangle = \int_x e^{j\xi x} e^{-j\xi' x} dx = 2\pi\delta(\xi - \xi'), \quad (8.245)$$

siendo $\delta(\xi - \xi')$ una delta de Dirac y entendiendo la integral como un funcional⁴⁸

$$\left\{ \begin{array}{l} |e^{j\xi' x}\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle e^{j\xi x} | \longmapsto \langle e^{j\xi x} | e^{j\xi' x} \rangle = \int_x e^{j\xi x} e^{-j\xi' x} dx = 2\pi\delta(\xi - \xi'). \end{array} \right. \quad (8.246)$$

⁴⁷En la notación habitualmente utilizada en los problemas de mecánica cuántica, los autobras y autokets tan solo se identifican con el enumerador del mismo dentro del conjunto y el autovalor se identifica con ese mismo parámetro, puesto que siempre se escogen funciones base que sean autofunciones del operador y que, además, su autovalor coincida con el enumerador, ya que éste se corresponde con algún parámetro físico (ver [65]-[66]). Su notación es, por tanto,

$$\langle \mu | \mathbf{F} = \mu \langle \mu |, \quad (8.241)$$

siendo

$$e(\tau; \mu) \equiv \langle \mu |, \quad (8.242)$$

$$\alpha(\mu) = \mu. \quad (8.243)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, esta notación no se puede utilizar en la Teoría General de Señales y Sistemas debido a que ésta debe ser más general, ya que no siempre las funciones base son autofunciones del sistema y mucho menos que los autovalores sean el propio enumerador de cada función dentro del conjunto. Basta con fijarse en la transformada de Fourier $H(\xi)$ de un sistema lineal e invariante de variable continua, que se corresponde con los autovalores de las exponenciales complejas $e^{j\xi x}$, pero que no cumple que $H(\xi) = \xi$. Es por ello que en la notación habitual de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas hay que mantener la identificación de las variables de las funciones y de los parámetros que las identifican.

⁴⁸Hay que tener cuidado con el tratamiento de este funcional, puesto que las funciones a las que se aplica no son estrictamente del dominio de ese funcional, de hecho puede verse como el resultado no siempre es un número complejo, ya que éste puede ser infinito. Este funcional será visto como una aplicación entre elementos de un espacio dual, dando lugar a funciones generalizadas o distribuciones. Más adelante, en la Secc. 8.6 se desarrollará más profundamente este tipo de aplicaciones.

También se comprueba que se puede generar el operador identidad como⁴⁹

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} |e^{j\xi u}\rangle \langle e^{j\xi x}| = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} e^{-j\xi u} e^{j\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(x - u) = \delta(x - u), \quad (8.247)$$

así, aplicándolo a una señal $f(x)$,

$$\mathbf{I}[f(x)] = \int_u f(u) \delta(x - u) du = f(x). \quad (8.248)$$

De esta manera, cualquier señal $f(x)$ se puede expresar en términos de esa base como

$$\langle f(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \langle f(u) | e^{j\xi u} \rangle \langle e^{j\xi x} |, \quad (8.249)$$

donde se ve claramente que

$$\langle f(u) | e^{j\xi u} \rangle = F(\xi) \quad (8.250)$$

son los coeficientes que representan $f(x)$ como una combinación lineal (en este caso una integral) de los elementos de la base. Además, estos coeficientes se corresponden con la Transformada de Fourier de $f(x)$.

Comparando la expresión (8.249) con el la notación habitual de la Teoría General de Señales y Sistemas, se ve que son muy similares

$$\langle f(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \langle f(u) | e^{j\xi u} \rangle \langle e^{j\xi x} |, \quad (8.251)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \langle f(u), e^{j\xi u} \rangle e^{j\xi x}, \quad (8.252)$$

representando ambas el mismo concepto.

2. El conjunto de funciones base infinito numerable $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ es un conjunto ortogonal

$$\langle e^{jm\xi_0 x} | e^{jm'\xi_0 x} \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = X_0 \delta(m - m'), \quad (8.253)$$

siendo $\delta(m - m')$ una delta de Kronecker. En este caso, aunque la integral pueda verse como un funcional de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} |e^{jm'\xi_0 x}\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle e^{jm\xi_0 x} | \longmapsto \langle e^{jm\xi_0 x} | e^{jm'\xi_0 x} \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = \begin{cases} X_0 & m = m' \\ 0 & m \neq m', \end{cases} \end{array} \right. \quad (8.254)$$

también puede interpretarse como el producto escalar ordinario ya que la integral está perfectamente definida.

⁴⁹En general, en la expresión $|e^{j\xi u}\rangle \langle e^{j\xi x}|$ deberían escribirse ambos, ket y bra, sobre x , pero para no tener problemas con las variables al realizar los cálculos, se cambia en el ket la x por u , manteniendo este hecho en los desarrollos posteriores. Así, el operador identidad queda identificado por una delta $\delta(x - u)$ siendo u esta variable auxiliar, de forma que al aplicarlo a una función $f(x)$, se intercambie la x por u para realizar el desarrollo, no afectando en absoluto al resultado final.

En la práctica no es necesario cambiar el nombre de las variables ya que normalmente siempre se realizará primero el cálculo de los coeficientes $\langle f(x) | e^{j\xi x} \rangle = F(\xi)$, desapareciendo la x y no interfiriendo, por tanto, en los cálculos posteriores.

Esta consideración es aplicable al resto de los ejemplos.

Este conjunto de funciones base también generan el operador identidad

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{X_0} \sum_m |e^{jm\xi_0 u}\rangle \langle e^{jm\xi_0 x}| = \frac{1}{X_0} \sum_m e^{-jm\xi_0 u} e^{jm\xi_0 x} = \frac{1}{X_0} X_0 \delta_0(x-u) = \delta_0(x-u) \quad (8.255)$$

un tren periódico de deltas de Dirac de periodo X_0 . Así, aplicándolo a una señal $f_0(x)$,

$$\mathbf{I}[f_0(x)] = \int_{u=\langle X_0 \rangle} f_0(u) \delta_0(x-u) du = f_0(x). \quad (8.256)$$

Esto hace que cualquier señal $f_0(x)$ se pueda expresar en término de esa base como

$$\langle f_0(x) | = \frac{1}{X_0} \sum_m \langle f_0(u) | e^{jm\xi_0 u} \rangle \langle e^{jm\xi_0 x} |, \quad (8.257)$$

donde

$$\langle f_0(u) | e^{jm\xi_0 u} \rangle = a(m) \quad (8.258)$$

son los coeficientes que permiten expresar $f_0(x)$ como una combinación lineal (en este caso un sumatorio infinito) de los elementos de la base. Estos coeficientes son el Desarrollo en Serie de Fourier de $f_0(x)$.

La ecuación (8.257) es muy semejante a la expresión de la representación de una señal en una base con la notación de la Teoría General de Señales y Sistemas,

$$\langle f_0(x) | = \frac{1}{X_0} \sum_m \langle f_0(u) | e^{jm\xi_0 u} \rangle \langle e^{jm\xi_0 x} |, \quad (8.259)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{X_0} \sum_m \langle f_0(u) | e^{jm\xi_0 u} \rangle e^{jm\xi_0 x}, \quad (8.260)$$

que es la que habitualmente utilizamos.

3. Por último consideremos el conjunto de funciones base también numerable $e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$ deltas de Kronecker, para señales de variable discreta.

Puede comprobarse que es un conjunto ortogonal

$$\langle \delta(n - n') | \delta(n - n'') \rangle = \sum_n \delta(n - n') \delta(n - n'') = \delta(n' - n''), \quad (8.261)$$

con $\delta(n' - n'')$ una delta del Kronecker. Al igual que en el ejemplo anterior, a pesar de que este sumatorio pueda verse como una aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} |\delta(n - n'')\rangle : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \delta(n - n') | \longmapsto \langle \delta(n - n') | \delta(n - n'') \rangle = \sum_n \delta(n - n') \delta(n - n'') = \begin{cases} 1 & n' = n'' \\ 0 & n' \neq n'', \end{cases} \end{array} \right. \quad (8.262)$$

el sumatorio está perfectamente definido y se puede interpretar como el producto escalar ordinario definido en el espacio de señales de variable discreta.

El operador identidad se construye, a partir de estas funciones base como

$$\mathbf{I} \equiv \sum_{n'} |\delta(l - n')\rangle \langle \delta(n - n')| = \sum_{n'} \delta(l - n') \delta(n - n') = \delta(n - l) \quad (8.263)$$



Figura 8.9: Representación general de un sistema lineal \mathbf{F}_L a partir de una caja negra.

una delta de Kronecker. Por tanto, para cualquier señal $x(n)$

$$\mathbf{I}[x(n)] = \sum_l x(l) \delta(n-l) = x(n). \quad (8.264)$$

De esta manera, cualquier señal $x(n)$ se puede expresar en términos de esta base como

$$\langle x(n) | = \sum_{n'} \langle x(l) | \delta(l-n') \rangle \langle \delta(n-n') |, \quad (8.265)$$

donde

$$\langle x(l) | \delta(l-n') \rangle = x(n') \quad (8.266)$$

son los coeficientes de $x(n)$ en la base $\{\delta(n-n')\}_{n'}$.

Finalmente es fácil observar que (8.265) es semejante a la representación general de una señal en términos de una base utilizada en la Teoría General de Señales y Sistemas,

$$\langle x(n) | = \sum_{n'} \langle x(l) | \delta(l-n') \rangle \langle \delta(n-n') |, \quad (8.267)$$

$$x(n) = \sum_{n'} \langle x(l) | \delta(l-n') \rangle \delta(n-n'). \quad (8.268)$$

8.4. Necesidad de los RHS

Con lo visto hasta ahora puede empezar a intuirse que los espacios de Hilbert no son suficientes para albergar completamente los espacios de señal.

En primer lugar, al dotar al espacio de señal de un producto escalar, generamos un espacio de Hilbert, lo cual ya nos impone una primera condición: las señales tienen que ser de cuadrado integrable o cuadrado sumable. Como habíamos visto, en los espacios de dimensión finita no hay problema, puesto que todas las señales son de cuadrado sumable, es decir,

$$\forall x_0(n), \quad \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^2 < \infty; \quad (8.269)$$

pero en los espacios de dimensión infinita son muchas las funciones que no cumplen esta primera restricción, quedándose fuera muchas funciones importantes y que interesaría considerar en los espacios de señal, como son

$$e^{j\xi x} \notin L^2(\mathbb{R}), \quad (8.270)$$

$$e^{j\Omega n} \notin l^2(\mathbb{Z}), \quad (8.271)$$

ya que éstas pueden ser consideradas funciones base y definir la transformada de Fourier de los espacios de señal de variable continua y variable discreta respectivamente.

Otra razón enlaza con la teoría de operadores cuando tratamos con variable continua. En general, recordando del Apdo. 2.4.3 del Cap. 2, un sistema lineal lo definimos a través de un

operador lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ como el de la Fig. 8.9. La señal de salida $g(x)$ de ese sistema cuando la entrada es $f(x)$ viene representada como⁵⁰

$$g(x) = \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[f(x)]; \quad (8.272)$$

sin embargo, dado que toda señal $f(x)$ puede expresarse en términos de deltas como

$$f(x) = \int_{x'} f(x') \delta(x - x') dx', \quad (8.273)$$

la señal de salida se correspondería con

$$g(x) = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \left[\int_{x'} f(x') \delta(x - x') dx' \right] = \int_{x'} f(x') \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[\delta(x - x')] dx' = \int_{x'} f(x') h(x; x') dx', \quad (8.274)$$

siendo $h(x; x')$ el conjunto de respuestas al impulso. De esta manera el sistema quedaría representado matemáticamente por este conjunto de funciones,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} \equiv h(x; x'). \quad (8.275)$$

Sin embargo, tanto $\delta(x - x')$ como, en general, $h(x; x') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[\delta(x - x')]$ no son funciones de $L^2(\mathbb{R})$, de hecho ni siquiera son funciones propiamente dichas, sino funciones generalizadas o distribuciones. Estos elementos matemáticos también son requeridos en nuestro espacio de señal, debido a la importancia que tienen a la hora de representar funciones, operadores y transformaciones de señales a través de sistemas. Además, estas distribuciones son los núcleos de los funcionales que habían sido introducidos en la Secc. 8.3.1, ya que las integrales que aparecen en (8.274) no pueden ser consideradas ni integrales de Riemann ni de Lebesgue, sino como núcleos de funcionales que, al aplicarlos a $f(x)$, devuelven un número complejo, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{x'} : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f(x) \longmapsto f(x'), \end{array} \right. \quad (8.276)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{x'} : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f(x) \longmapsto g(x'), \end{array} \right. \quad (8.277)$$

donde $\mathbf{D}_{x'}$ y $\mathbf{H}_{x'}$ son funcionales cuyos núcleos son $\delta(x - x')$ y $h(x; x')$ respectivamente, por lo que, debido a su interés, es necesario introducirlas en el espacio de señal final.

Por último, y también relativo a los operadores, es posible que los operadores utilizados en un problema no sean acotados⁵¹, es decir, que su acción sobre una función produzca una nueva función pero que no pertenezca al espacio. En otras palabras, si \mathbf{P} es un operador y $a(\tau) \in \mathcal{H}$, puede suceder que

$$\mathbf{P}[a(\tau)] = b(\tau) \notin \mathcal{H}. \quad (8.278)$$

Algunos de estos operadores son tan comunes como el operador derivada \mathbf{D} en variable continua. Es posible que una función $f(x)$ sea de cuadrado integrable pero su derivada no lo sea, así, por ejemplo, sea

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} = x \operatorname{sinc}(x^2), \quad (8.279)$$

$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ya que, de [124],

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\pi} < \infty, \quad (8.280)$$

⁵⁰ Consideremos, por simplicidad, que la variable de la señal de salida es la misma que la de entrada.

⁵¹ Recordar definición de operador acotado en la Secc. 2.4 del Cap. 2 sobre el resumen de la Teoría General.

pero

$$f'(x) = \mathbf{D}[f(x)] = \frac{df(x)}{dx} = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \quad (8.281)$$

no pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right|^2 dx = \infty. \quad (8.282)$$

Esto implica que habría que reducir el conjunto de funciones requeridas, de manera que sea invariantes por todos los operadores empleados en el problema. De esta manera, si se utiliza por ejemplo el operador derivada, habría que restringirse al dominio del operador \mathbf{D} , quedándose con el conjunto

$$\text{Dom}\{\mathbf{D}\} = \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad (8.283)$$

donde $\text{Dom}\{\mathbf{D}\}$ indica el dominio del operador derivada.

Estas condiciones nos llevan a la construcción de los Espacios de Hilbert Equipados (RHS) tal como se muestra en el siguiente apartado.

8.5. Construcción de los RHS

En este apartado se va a desarrollar la forma general en la que se construyen los Espacios de Hilbert Equipados y posteriormente se particularizará para los casos concretos de los espacios de señal.

En primer lugar comentar que los espacios de Hilbert equipados sólo es necesario construirlos en los espacios de señal de dimensión infinita, ya que, como se ha visto, en los espacios de dimensión finita, el simple espacio de Hilbert es suficientes, así que nos centraremos exclusivamente en los espacios de dimensión infinita.

Las consideraciones de la Secc. 8.4 puede parecer contradictorias, ya que, por un lado, se necesita reducir el espacio a aquéllas funciones que permanezcan dentro del espacio tras la acción por los operadores considerados, pero, por otro lado, es necesario ampliar el espacio para albergar a todas las funciones y distribuciones que no pertenezcan al espacio de Hilbert inicialmente considerado. En lugar de ser una contradicción, son necesarias ambas consideraciones, de hecho ampliar el espacio depende directamente de haberlo reducido primero.

Tras haber definido el espacio inicial con las funciones que intervienen y el producto escalar correspondiente, así como la norma y la distancia inducidas, podemos decir que el punto de partida es un espacio de Hilbert \mathcal{H} tal como se muestra en la Fig. 8.10. Sin embargo este espacio primeramente hay que reducirlo, y para ello hay que tener en cuenta cuáles son los operadores que van a intervenir en el problema a analizar, es decir, *la definición del espacio depende de los operadores del problema considerado*, lo cual ya es un primer resultado importante. Tal como se había comentado anteriormente, es interesante considerar para la reducción sólo aquellas funciones que permanezcan dentro del espacio tras la acción de un operador, es decir, buscar un subespacio para el que el operador sea acotado.

Sea \mathbf{P} un operador, si

$$a(\tau) \in \mathcal{H}, \quad (8.284)$$

entonces

$$\mathbf{P}[a(\tau)] \in \mathcal{H}. \quad (8.285)$$

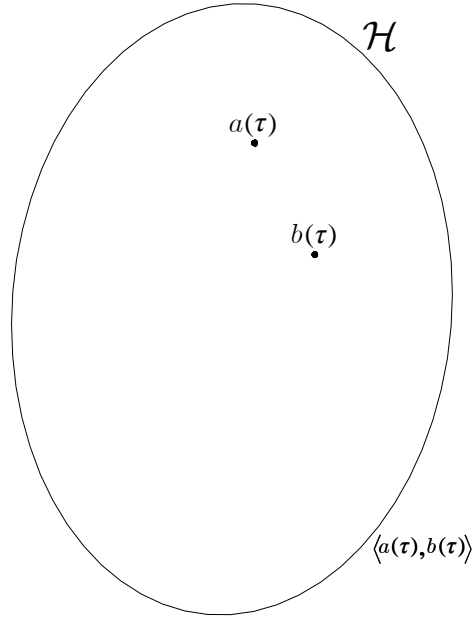


Figura 8.10: Representación general de un espacio de Hilbert \mathcal{H} con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

De esta manera nos podemos quedar con el subespacio

$$\text{Dom } \{\mathbf{P}\} = \{a(\tau) \in \mathcal{H} : \mathbf{P}[a(\tau)] \in \mathcal{H}\}, \quad (8.286)$$

es decir, el dominio del operador \mathbf{P} . Sin embargo, este proceso se puede reiterar indefinidamente y se querrá que la función resultante continúe perteneciendo al espacio de Hilbert original, por tanto

$$\mathbf{P}^n [a(\tau)] \in \mathcal{H}. \quad (8.287)$$

Además, esto se tiene que considerar para todos los operadores que intervengan en el problema, así, para otro operador \mathbf{Q} , se querrá también reducir el conjunto de funciones a aquellas $a(\tau)$ que cumplan

$$\mathbf{Q}^n [a(\tau)] \in \mathcal{H}, \quad (8.288)$$

y esto también se tendrá que cumplir para todas las combinaciones posibles entre ellos. Esto hace que el subespacio final Φ considerado sea la intersección de todos los posibles subespacios obtenidos al contemplar aquellas funciones que permanecen dentro del espacio al aplicarles cada acción sucesiva de los operadores que intervienen en el problema, por tanto,

$$\Phi = \bigcap_{\substack{n,m=0 \\ \mathbf{A}, \mathbf{B}=\mathbf{F}_i, i=1 \div N}}^{\infty} \text{Dom } \{\mathbf{A}^n \mathbf{B}^m\}, \quad (8.289)$$

siendo \mathbf{F}_i cada uno de los N operadores que intervengan en el problema analizado.

Φ es el subespacio maximal invariante generado por los operadores \mathbf{F}_i porque es el subdominio más grande del espacio de Hilbert \mathcal{H} que permanece invariante por cualquier acción reiterada de los operadores \mathbf{F}_i , es decir,

$$\mathbf{F}_i [\Phi] \subset \Phi. \quad (8.290)$$

Φ , además, es subespacio denso⁵² de \mathcal{H} en el que los operadores que no eran acotados en \mathcal{H} sí lo son en Φ . Está claro que $\Phi \subset \mathcal{H}$, por lo que esto nos lleva a la estructura de espacio esquematizada en la Fig. 8.11.

⁵²Ver definición de subespacio denso en el Ap. B.12.

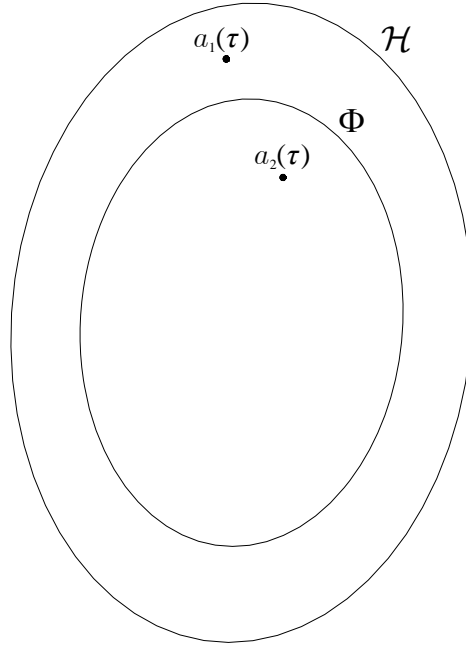


Figura 8.11: Estructura de un espacio de Hilbert \mathcal{H} con un subespacio denso Φ .

Una vez restringido el espacio de Hilbert \mathcal{H} original al subespacio Φ , se puede seguir el procedimiento inverso, es decir, agrandar el espacio \mathcal{H} . Esto significa dotar al espacio de Hilbert con las funciones generalizadas que no pertenezcan a ese espacio, esto es, equiparlo. Por tanto este es el paso fundamental en el desarrollo de los RHS. Pero este agrandamiento se realiza de dos formas distintas, similares pero complementarias y necesarias las dos. Una vez obtenido el subespacio Φ , se construyen los espacios dual (o dual lineal) Φ' y antidual (o dual antilineal) Φ^\times a éste.

Definimos $\Phi'_{\mathbf{F}}$ como el conjunto de los funcionales lineales sobre Φ

$$\Phi'_{\mathbf{F}} = \{ \mathbf{D} : \Phi \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D} \text{ es lineal} \} \quad (8.291)$$

que se construye como

$$\mathbf{D}[\phi] = \langle \phi, d \rangle \quad \forall \phi \in \Phi, \quad (8.292)$$

siendo d^* el núcleo del funcional lineal \mathbf{D} . De esta manera consideramos el subespacio Φ' como el conjunto de los núcleos de cada uno de los funcionales lineales \mathbf{D} , así

$$\Phi' = \{ d^*, \text{ tq } \mathbf{D}[\phi] = \langle \phi, d \rangle, \mathbf{D} \in \Phi'_{\mathbf{F}} \}, \quad (8.293)$$

de esta forma en $\Phi'_{\mathbf{F}}$ hay funcionales lineales mientras que en Φ' hay funciones, funciones generalizadas o distribuciones, ninguna de las cuales pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{H} y existiendo una correspondencia biyectiva entre los elementos de $\Phi'_{\mathbf{F}}$ y los de Φ' .

Hay que recordar que el producto escalar de (8.292) no es un producto escalar ordinario sino un funcional lineal. Es fácil ver que es lineal ya que

$$\mathbf{D}[\alpha\phi + \beta\varphi] = \langle \alpha\phi + \beta\varphi, d \rangle = \alpha \langle \phi, d \rangle + \beta \langle \varphi, d \rangle \quad (8.294)$$

debido a la linealidad por la primera componente habitual en el producto escalar.

De la misma manera, se definimos $\Phi^\times_{\mathbf{F}}$ como el conjunto de los funcionales antilineales sobre Φ

$$\Phi^\times_{\mathbf{F}} = \{ \tilde{\mathbf{D}} : \Phi \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}} \text{ es antilineal} \} \quad (8.295)$$

construido como

$$\tilde{\mathbf{D}}[\phi] = \langle d, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Phi, \quad (8.296)$$

siendo d el núcleo del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{D}}$. De esta manera consideramos el subespacio Φ^\times como el conjunto de los núcleos de cada uno de los funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{D}}$, así

$$\Phi^\times = \left\{ d, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}[\phi] = \langle d, \phi \rangle, \tilde{\mathbf{D}} \in \Phi_{\mathbf{F}}^\times \right\}, \quad (8.297)$$

de esta forma en $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ se encuentran los funcionales antilineales mientras que en Φ^\times están las funciones, funciones generalizadas o distribuciones que no pertenecen al espacio de Hilbert \mathcal{H} y existiendo una correspondencia biyectiva entre los elementos de $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ y los de Φ^\times .

Es preciso recordar nuevamente que el producto escalar de (8.296) no es un producto escalar ordinario sino un funcional antilineal. Se puede comprobar fácilmente que es antilineal ya que

$$\tilde{\mathbf{D}}[\alpha\phi + \beta\varphi] = \langle d, \alpha\phi + \beta\varphi \rangle = \alpha^* \langle d, \phi \rangle + \beta^* \langle d, \varphi \rangle \quad (8.298)$$

debido a la antilinealidad de la segunda componente de la forma bilineal del producto escalar.

Dado que la notación utilizada para la construcción de los funcionales lineales y antilineales es la del producto escalar, se puede asimilar también a la notación utilizada en la nomenclatura de Dirac de Bras y Kets. Así, se tendría

$$\mathbf{D}[\phi] = \langle \phi | d \rangle, \quad (8.299)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}[\phi] = \langle d | \phi \rangle. \quad (8.300)$$

Esto hace que los espacios dual y antidual se correspondan con los espacios de los funcionales bras y kets introducidos en la Secc. 8.3.6. El espacio $\Phi'_{\mathbf{F}}$ se corresponde con el espacio de los funcionales kets $|d\rangle$, siendo $\Phi \equiv \mathfrak{B}$ el espacio de los bras $\langle \phi |$ dominio de estos kets, funcionales lineales. Del mismo modo, el espacio $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ se corresponde con los funcionales antilineales bras $\langle d |$, siendo en este caso $\Phi \equiv \mathfrak{K}$ el espacio de los kets $|\phi\rangle$ dominio de estos bras funcionales antilineales.

Como se puede comprobar, tanto $\Phi'_{\mathbf{F}}$ como $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ son espacios cuyos elementos son funcionales, al contrario que \mathcal{H} y Φ , cuyos elementos son funciones; sin embargo, tal como se ha visto anteriormente, por cada funcional \mathbf{D} y $\tilde{\mathbf{D}}$ de $\Phi'_{\mathbf{F}}$ y $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$, respectivamente, existe una función núcleo d^* y d (funciones generalizadas o distribuciones, ya que estamos considerando el caso de espacios de señal) pertenecientes a Φ' y Φ^\times , respectivamente, que identifican de manera unívoca cada funcional, es decir, existe una correspondencia biyectiva entre funcional y núcleo como la que se muestra en la Fig. 8.12. Es importante remarcar que estas funciones núcleo no se encuentran en \mathcal{H} , como parece razonable, por lo que se corresponden con funciones que quedan fuera del espacio de Hilbert y que desde un principio se querían incluir. Ejemplos de estas funciones son las distribuciones (en el caso de variable continua), las exponenciales complejas, las funciones constantes y todas aquéllas que no sean de cuadrado integrable o de cuadrado sumable, según el espacio de Hilbert considerado. En general, trabajaremos con los espacios Φ' y Φ^\times porque contienen los núcleos de los funcionales, que serán funciones, funciones generalizadas o distribuciones, y que resultarán más fáciles de comparar y operar con el resto de funciones del espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Por otro lado, a pesar de que tanto $\Phi'_{\mathbf{F}}$ como $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ sean funcionales que actúen sobre Φ , no tienen elementos en común, lo cual es fácil de ver a partir de su definición a través de los bras y los kets, ya que $\Phi'_{\mathbf{F}}$ estaría formado por los kets mientras que $\Phi_{\mathbf{F}}^\times$ por los bras, y no hay ningún elemento que sea bra y ket a la vez. Aún así, sí es cierto que se puede encontrar un bra a partir de un ket, y viceversa, a través de su conjugado. Esto se relaciona con el hecho de que un funcional lineal $\mathbf{D} \in \Phi'_{\mathbf{F}}$ tenga por núcleo d^* mientras que el funcional antilineal $\tilde{\mathbf{D}} \in \Phi_{\mathbf{F}}^\times$ tenga

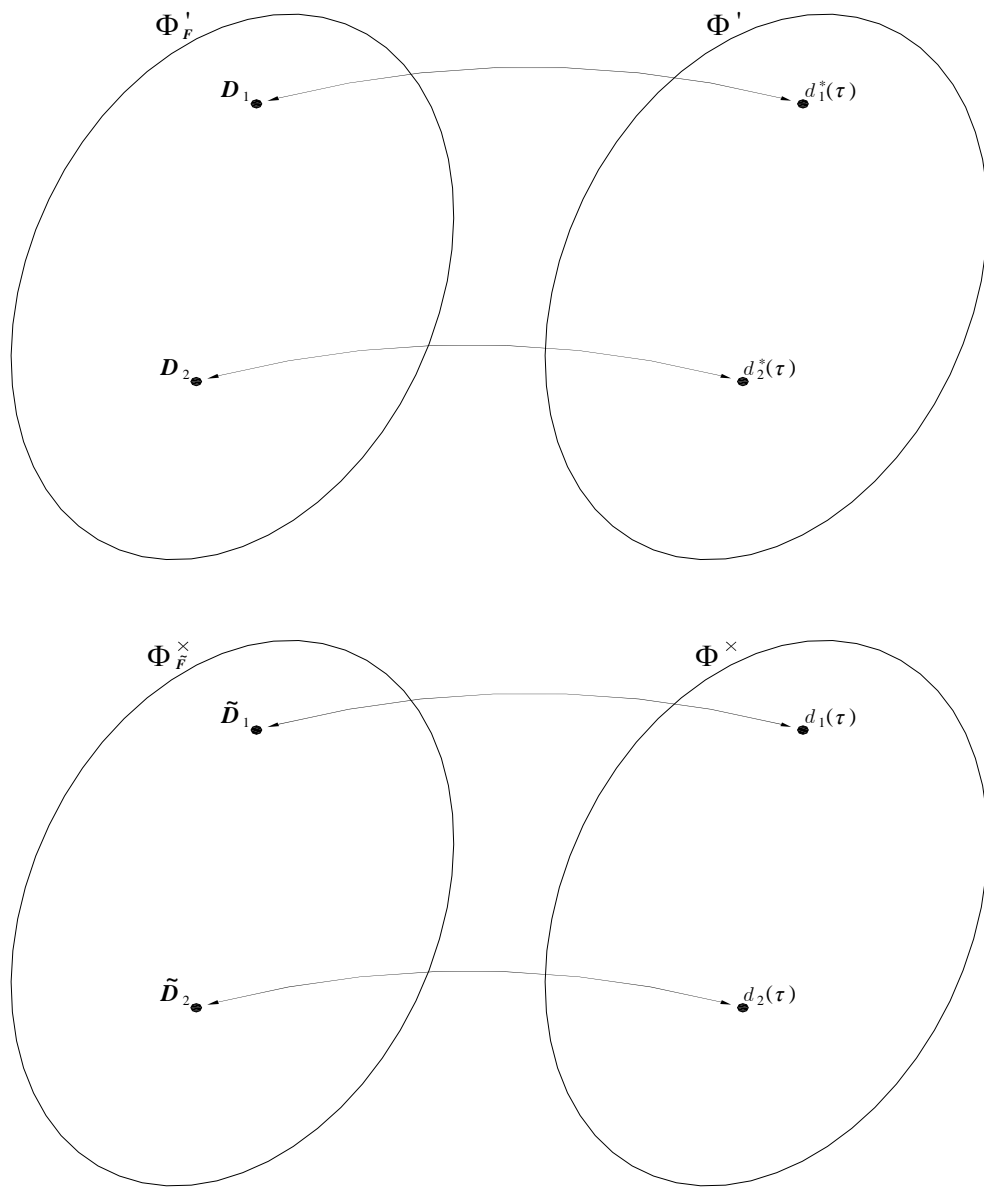


Figura 8.12: Representación esquemática de la correspondencia unívoca entre funcionales y sus núcleos. Para cada funcional lineal de Φ'_F existe una función de Φ' que es núcleo de ese funcional, mientras que para cada funcional antilineal de $\Phi^{\times}_{\tilde{F}}$ existe también una función de Φ^{\times} que es núcleo de este funcional.

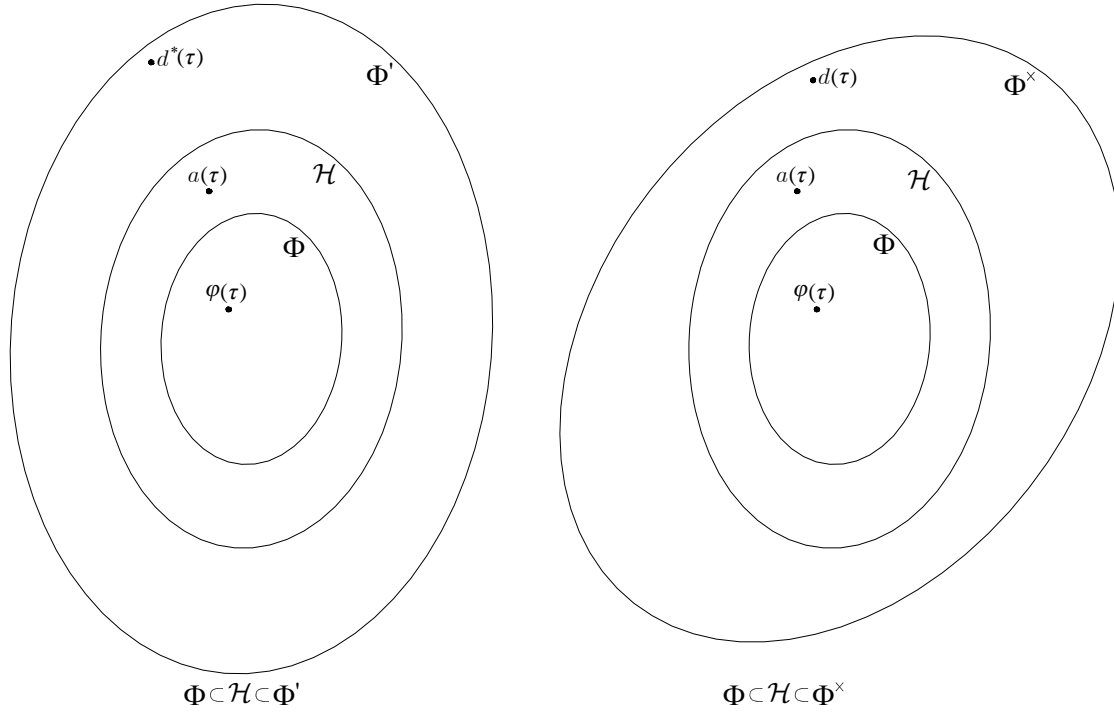


Figura 8.13: Representación esquemática de los espacios dual Φ' y antidual Φ^\times . Ambos contienen al espacio de Hilbert \mathcal{H} y al subespacio denso Φ .

por núcleo d , es decir, la función conjugada de d^* . Por tanto, puede comprobarse que tanto $\Phi'_{\mathbf{F}}$ como $\Phi^\times_{\tilde{\mathbf{F}}}$, aún siendo espacios diferentes, tienen el mismo número de elementos.

Finalmente, teniendo en cuenta el resultado (8.182) en el que se probaba que $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = \mathcal{H}^\times$ a través del teorema de Riesz-Fréchet, se pueden escribir las dos tripletas de Gelfand que describen los Espacios de Hilbert Equipados:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (8.301)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times, \quad (8.302)$$

y que esquemáticamente se muestran en las Figs. 8.13 y 8.14. Además, la representación de la Fig. 8.14 da a entender que cualquier elemento de \mathcal{H} se puede comportar como núcleo de un funcional lineal o antilineal. En efecto, considerando $h \in \mathcal{H}$, se pueden definir los funcionales lineal y antilineal

$$\mathbf{H}[\phi] = \langle \phi, h \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi, \quad (8.303)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}[\phi] = \langle h, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi \quad (8.304)$$

que, evidentemente, estarán bien definidos, ya que tanto ϕ como h y h^* son elementos del espacio de Hilbert y hacen que se pueda interpretar el producto escalar de forma natural que, por definición, dará como resultado un número complejo.

Una vez definidos los espacios Φ' y Φ^\times , se puede definir la acción de los operadores sobre los elementos de estos espacios. Estas acciones siempre tienen que ser entendidas a partir de su aplicación a funciones $\phi \in \Phi$ ⁵³. Sea \mathbf{F} un operador y $a \in \Phi'$, entonces,

$$\langle \phi, \mathbf{F}[a] \rangle \equiv \langle \mathbf{F}^\dagger[\phi], a \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi. \quad (8.305)$$

⁵³Debido a la generalidad del desarrollo, se omite cualquier tipo de variable referente a las funciones, ya que el desarrollo también es válido para espacios de Hilbert que no sean espacios de señal.

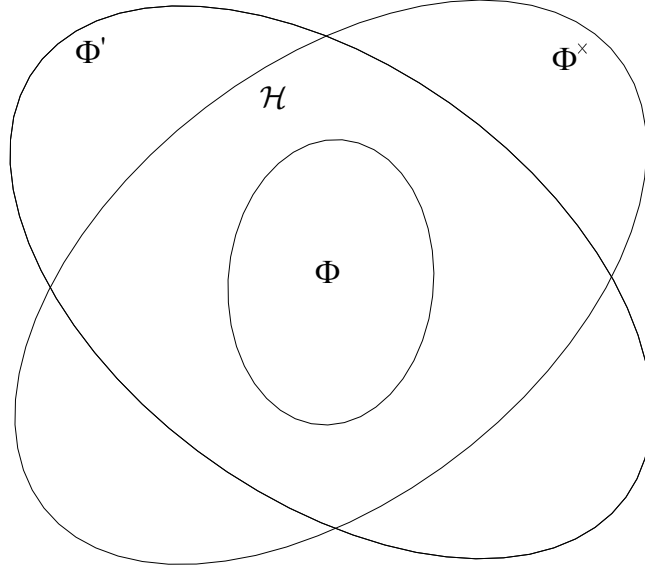


Figura 8.14: Representación del espacio de Hilbert \mathcal{H} junto con su espacio denso Φ y los espacios dual Φ' y antidual Φ^\times .

Igualmente, si $b \in \Phi^\times$,

$$\langle \mathbf{F}[b], \phi \rangle \equiv \langle b, \mathbf{F}^\dagger[\phi] \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi. \quad (8.306)$$

Lo que en términos de bras y kets sería

$$\langle \phi | \mathbf{F} | a \rangle \equiv \langle \mathbf{F} \phi | a \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi, \quad (8.307)$$

$$\langle b | \mathbf{F} | \phi \rangle \equiv \langle b | \mathbf{F}^\dagger \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi. \quad (8.308)$$

Finalmente remarcar que, aunque los funcionales de $\Phi'_{\mathbf{F}}$ y $\Phi^\times_{\mathbf{F}}$ estén definidos sobre Φ , también pueden aplicarse sobre elementos de \mathcal{H} o incluso sobre los propios elementos de Φ' y Φ^\times ; sin embargo, no se puede asegurar que la aplicación de estos funcionales a elementos que no sean de Φ vayan a dar como resultado un número complejo, es decir, puede ser que haya valores en los que no quede definida la aplicación. En los siguientes casos particulares se mostrarán ejemplos de este hecho.

8.6. Algunas estructura finales de los espacios de señal

En los siguientes apartados se va a desarrollar la construcción de los RHS para conocer algunos ejemplos de estructuras finales de cada uno de los espacios de señal. Una vez determinado el espacio de Hilbert \mathcal{H} , se determina el subespacio Φ y después se encuentran sus espacios dual Φ' y antidual Φ^\times .

8.6.1. Funciones periódicas de variable discreta

Espacio de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\langle N_0 \rangle)$.

Este es el espacio de las funciones complejas $x_0(n)$ de variable discreta y periódicas de periodo N_0 . El espacio de Hilbert en el que se encuentran estas funciones es el de las funciones de cuadrado sumable en un periodo, es decir

$$\mathcal{H} = l^2(\langle N_0 \rangle) = \left\{ x_0(n) : \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^2 < \infty \right\}. \quad (8.309)$$

Toda función periódica de variable discreta es de cuadrado sumable en un periodo, luego pertenece al espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$ y, por tanto, no es necesario ampliar el espacio con los RHS. El producto escalar en este espacio

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n) \quad (8.310)$$

está perfectamente definido para todas las funciones $x_0(n)$ e $y_0(n)$ de $l^2(\langle N_0 \rangle)$.

Bases y dimensión del espacio.

Como ya se había comentado, este espacio de Hilbert es un espacio de dimensión N_0 y, por tanto, finita, por lo que no necesita de los RHS. Todo conjunto de N_0 funciones que sean linealmente independientes será una base del espacio, así, por ejemplo, el conjunto formado por los N_0 trenes de deltas de Kronecker espaciadas N_0

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta_0(n - n')\}_{n'} \subset l^2(\langle N_0 \rangle) \quad (8.311)$$

donde n' toma valores entre 0 y $N_0 - 1$, es un conjunto de N_0 funciones linealmente independientes que son base del espacio $l^2(\langle N_0 \rangle)$. Cualquier función $x_0(n)$ del espacio se puede expresar en términos de esta base como

$$x_0(n) = \sum_{n'=0}^{N_0-1} d(n') \delta_0(n - n'), \quad (8.312)$$

donde

$$d(n') = \langle x_0(n), \delta_0(n - n') \rangle = \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n - n') = x_0(n') \quad (8.313)$$

genera un conjunto de N_0 valores perfectamente definidos, ya que son los propios valores de $x_0(n)$ en un periodo.

Asimismo, el conjunto de exponenciales de Fourier discretas

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k \subset l^2(\langle N_0 \rangle) \quad (8.314)$$

donde k varía entre 0 y $N_0 - 1$ y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$. Este conjunto de funciones definen el conocido desarrollo en serie de Fourier, **DSF**, para señales discretas periódicas, así, cualquier señal del espacio $x_0(n)$ puede representarse en términos de esta base como

$$x_0(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} a(k) e^{jk\Omega_0 n} = \mathbf{DSF}^{-1}[a(k)], \quad (8.315)$$

donde

$$a(k) = \frac{1}{N_0} \langle x_0(n), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \mathbf{DSF}[x_0(n)] \quad (8.316)$$

es un conjunto de N_0 valores perfectamente definido.

Las expresiones (8.312) y (8.315) se pueden comparar con (8.205), donde se representaba una señal en términos de una base a través de la nomenclatura de Dirac de bras y kets, así

$$\langle x_0(n) | = \sum_{n'=0}^{N_0-1} \langle x_0(n) | \delta_0(n - n') \rangle \langle \delta_0(n - n') |, \quad (8.317)$$

$$\langle x_0(n) | = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=0}^{N_0-1} \langle x_0(n) | e^{jk\Omega_0 n} \rangle \langle e^{jk\Omega_0 n} |, \quad (8.318)$$

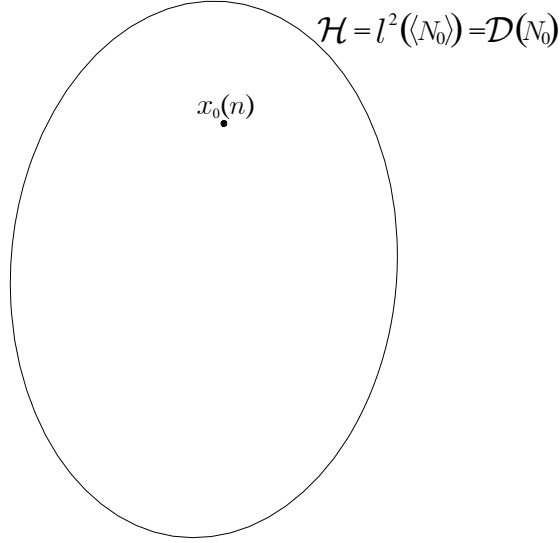


Figura 8.15: Espacio de Hilbert del conjunto de funciones periódicas de variable discreta $x_0(n)$.

o, comparándola con (8.206), también se puede representar como

$$|x_0(n)\rangle = \sum_{n'=0}^{N_0-1} |\delta_0(n-n')\rangle \langle \delta_0(n-n') | x_0(n) \rangle, \quad (8.319)$$

$$|x_0(n)\rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n'=0}^{N_0-1} |e^{jk\Omega_0 n}\rangle \langle e^{jk\Omega_0 n} | x_0(n) \rangle. \quad (8.320)$$

Las ecuaciones para realizar el cambio de base entre los conjuntos $e(n; n') = \{\delta_0(n-n')\}_{n'}$ y $e(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ pueden encontrarse en la Secc. 4.5.8 del capítulo sobre cambios de base.

En resumen, el espacio de funciones complejas periódicas de variable discreta es un espacio de dimensión finita y, por tanto, el espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$ es un *espacio separable*⁵⁴.

Estructura final del espacio.

La estructura final de este espacio es simplemente el espacio de Hilbert original, al que también podemos llamar $\mathcal{D}(N_0)$, tal como se muestra en la Fig. 8.15.

8.6.2. Funciones de variable discreta

Espacio de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$.

Este espacio incluye las funciones complejas $x(n)$ de variable discreta y se corresponde con el espacio de funciones de cuadrado sumable

$$\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ x(n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \right\}. \quad (8.321)$$

Esta restricción excluye a algunas funciones importantes que interesaría considerar, como son, por ejemplo, todas las funciones periódicas, o las exponenciales complejas $e^{j\Omega n}$ (periódicas si

⁵⁴Ver definición de espacio separable en el Ap. B.13.

$\frac{2\pi}{\Omega} \in \mathbb{Q}$), que serían la base de la transformada de Fourier de funciones de variable discreta. Es por ello que es necesaria la construcción de los RHS para poder incluir este tipo de funciones.

Subespacio $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Primeramente hay que generar un subespacio Φ . A pesar de no considerar a priori ningún operador relacionado con ningún problema físico, vamos a tener en cuenta un operador que genera un subespacio denso en $l^2(\mathbb{Z})$, éste es el operador \mathbf{Q} definido como

$$\mathbf{Q}[x(n)] = nx(n), \quad (8.322)$$

es decir, el operador multiplicación por n , ya que el subespacio generado tendrá, como se verá en el Apdo. 8.7.2, propiedades importantes a la hora de realizar la transformada de Fourier. De esta manera, el espacio Φ es el generado por la intersección de la acción sucesiva de este operador, así

$$\Phi = \bigcap_{k=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{Q}^k \}, \quad (8.323)$$

siendo $\text{Dom} \{ \mathbf{Q} \}$ el dominio del operador \mathbf{Q} . Por tanto, el subespacio Φ queda definido como⁵⁵

$$\Phi = \left\{ x(n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k x(n)|^2 < \infty, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ x(n) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} |n^k x(n)| = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad (8.324)$$

es decir, funciones que tienden a cero más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|n|}$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. En este conjunto se encuentran funciones como

$$x_1(n) = e^{-an^2}, \quad a > 0, \quad (8.325)$$

$$x_2(n) = P_{2N+1}(n), \quad N \in \mathbb{N}, \quad (8.326)$$

mientras que no están funciones como

$$x_3(n) = \text{sinc}(an), \quad a > 0, \quad (8.327)$$

$$x_4(n) = \frac{1}{b^2 + n^2}, \quad b > 0, \quad (8.328)$$

como muestra la Fig. 8.16, a pesar de que las cuatro funciones sí pertenecen a $l^2(\mathbb{Z})$. A este subespacio Φ lo denominamos $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Es importante remarcar que si en el problema que se considere hay otros operadores involucrados, este subespacio Φ puede ser diferente.

Espacios dual $\Phi' = \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y antidual $\Phi^\times = \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

Para encontrar el espacio dual $\Phi' = \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, buscamos el conjunto de funcionales lineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Sea

$$\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}(\mathbb{Z}) = \{ \mathbf{D} : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D} \text{ es lineal} \}, \quad (8.329)$$

así, para cada $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, se tiene

$$\mathbf{D}[x(n)] = \langle x(n), d(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) d^*(n), \quad (8.330)$$

⁵⁵Definiendo \mathbb{N}_0 como $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

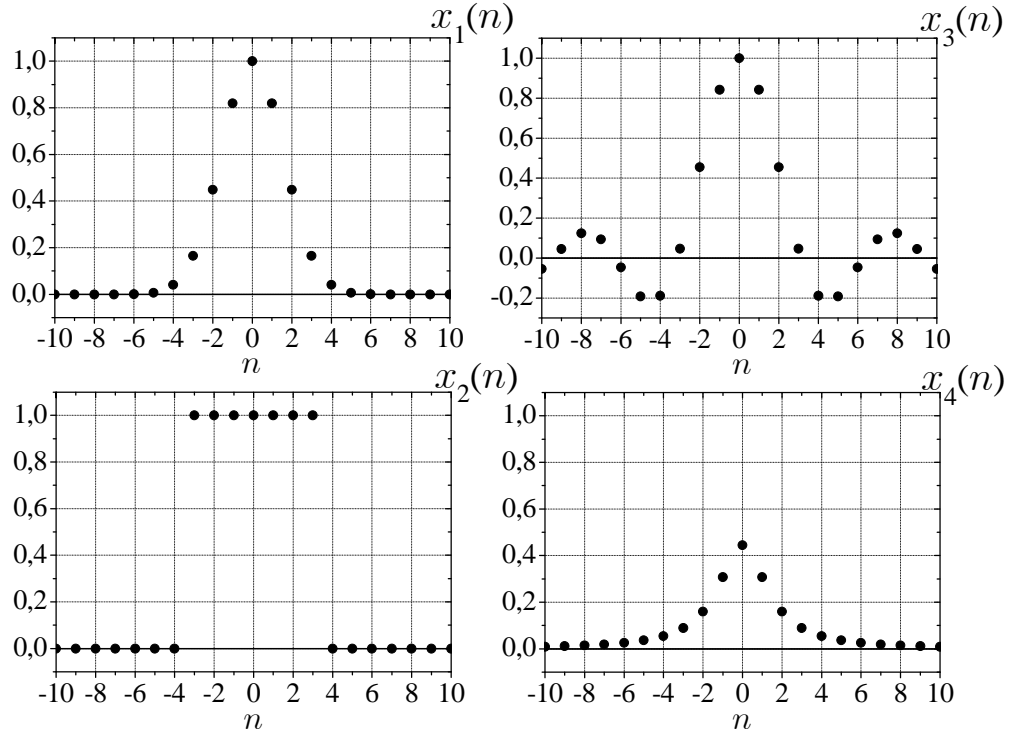


Figura 8.16: Las funciones $x_1(n) = e^{-0,2n^2}$ y $x_2(n) = P_7(n)$ son funciones del subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ mientras que las funciones $x_3(n) = \text{sinc}(n)$ y $x_4(n) = \frac{1}{1,5^2+n^2}$ son de $l^2(\mathbb{Z})$ pero no de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

donde $d^*(n)$ es el núcleo del funcional \mathbf{D} . Se construye, por tanto, el espacio $\Phi' = \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ como el conjunto de núcleos de cada uno de los funcionales lineales \mathbf{D} , así

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \{d^*(n), \text{ tq } \mathbf{D}[x(n)] = \langle x(n), d(n) \rangle, \mathbf{D} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{F}}(\mathbb{Z})\}. \quad (8.331)$$

El funcional \mathbf{D} , identificado con el producto escalar definido en este espacio como

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n), \quad (8.332)$$

está bien definido, ya que en este espacio no hay distribuciones, y, por tanto, es simplemente la suma en n del producto de la función $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ con $d^*(n)$, sabiendo que $d^*(n)$ no pertenece a $l^2(\mathbb{Z})$. Este producto será siempre un valor definido y finito ya que la definición del funcional lineal dada en (8.329) lo garantiza.

De la misma manera, para encontrar el espacio antidual $\Phi^\times = \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, primeramente se busca el conjunto de funcionales antilineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^\times(\mathbb{Z}) = \{\tilde{\mathbf{D}} : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}} \text{ es antilineal}\}. \quad (8.333)$$

Para cada $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, se tiene

$$\tilde{\mathbf{D}}[x(n)] = \langle d(n), x(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) x^*(n), \quad (8.334)$$

donde $d(n)$ es el núcleo del funcional $\tilde{\mathbf{D}}$. El espacio $\Phi^\times = \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ se construye a partir de los núcleos de estos funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{D}}$ como

$$\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) = \{d(n), \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}[x(n)] = \langle d(n), x(n) \rangle, \tilde{\mathbf{D}} \in \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^\times(\mathbb{Z})\}. \quad (8.335)$$

Esta identificación del funcional antilineal con el producto escalar, al igual que en el caso del espacio dual, está bien definida, obteniéndose siempre un número complejo finito.

Bases y dimensión del espacio.

En este espacio se puede encontrar un conjunto de funciones base dentro de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, éste es el conjunto de deltas de Kronecker desplazadas⁵⁶,

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'} \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z}), \quad (8.336)$$

ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k \delta(n - n')|^2 = |(n')^{2k}| < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.337)$$

Cada función $x(n)$ del espacio se puede expresar en términos de esta base como

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} a(n') \delta(n - n') \quad (8.338)$$

siendo

$$a(n') = \langle x(n), \delta(n - n') \rangle = x(n'). \quad (8.339)$$

Además, debido a las propiedades de la delta discreta, este resultado es válido para cualquier función $x(n)$ ya sea de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $l^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, ya que los coeficientes que reconstruyen la señal son la propia señal expresada en n' .

Este conjunto se corresponde con un conjunto infinito numerable, por lo que se puede determinar que el espacio de funciones complejas de variable discreta es de dimensión infinita numerable.

Asimismo, se puede encontrar un conjunto de funciones base dentro del espacio dual $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, que es

$$e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (8.340)$$

ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{j\Omega n}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty. \quad (8.341)$$

Esta base, que se corresponde con la conocida **transformada de Fourier, TF**, de señales discretas, es un conjunto infinito no numerable descrito por el parámetro continuo $\Omega \in [0, 2\pi)$. Cada función $x(n)$ se podrá expresar en términos de esta base como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \mathbf{TF}^{-1}[X(\Omega)], \quad (8.342)$$

siendo

$$X(\Omega) = \langle x(n), e^{j\Omega n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \mathbf{TF}[x(n)], \quad (8.343)$$

teniendo en cuenta que el producto escalar define un funcional lineal sobre $x(n)$. Debido a que $e(n; \Omega) = e^{j\Omega n}$ son funciones de $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, sólo se puede asegurar que $X(\Omega)$ esté perfectamente definida en todos sus puntos siempre que $x(n)$ pertenezca a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Si no es así, puede haber valores de Ω para los que $X(\Omega)$ no esté definida.

⁵⁶Resulta sencillo comprobar que este conjunto de funciones es una base del espacio y que, además, es ortogonal.

Esta misma base puede definirse en el espacio antidual $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, expresando cada señal como

$$x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} e^{-j\Omega n} X^*(\Omega) d\Omega, \quad (8.344)$$

siendo

$$X^*(\Omega) = \langle e^{j\Omega n}, x(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} x^*(n). \quad (8.345)$$

Se pueden relacionar las ecuaciones (8.342) y (8.344) con la notación de Dirac de bras y kets para expresar una señal en términos de una base con las ecuaciones (8.205) y (8.206) respectivamente, vistas en la Secc. 8.3.6, siendo

$$\langle x(n) | = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \langle x(n) | e^{j\Omega n} \rangle \langle e^{j\Omega n} | d\Omega, \quad (8.346)$$

$$|x(n)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} |e^{j\Omega n}\rangle \langle e^{j\Omega n} | x(n) \rangle d\Omega. \quad (8.347)$$

A pesar de que el conjunto $\{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ es un conjunto infinito no numerable, no se puede decir que el espacio sea de dimensión infinita no numerable, ya que este conjunto de funciones no pertenece al espacio de Hilbert. Al existir un conjunto numerable $\{\delta(n-n')\}_{n'}$ que es base ortogonal del espacio de funciones complejas de variable discreta, se puede asegurar que el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ es un *espacio separable*.

Las ecuaciones para realizar el cambio de base entre los conjuntos de funciones $e(n; n') = \{\delta(n-n')\}_{n'}$ y $e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ pueden encontrarse en la Secc. 4.5.5 en el capítulo sobre cambios de base.

A partir del conjunto de funciones base $e(n; n') = \{\delta(n-n')\}_{n'} \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ se puede probar que $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ es denso en $l^2(\mathbb{Z})$ en base a la siguiente demostración:

Dem.: Sea $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$. Hay que comprobar que existe una sucesión de Cauchy dentro de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ que tenga por límite $x(n)$. De esta forma se probaría que se puede aproximar $x(n)$ por una función $y(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ tan bien como se quiera, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \text{ tq } d^2(x(n), y(n)) < \varepsilon \quad (8.348)$$

o dicho de otra manera, la adherencia⁵⁷ de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ es $l^2(\mathbb{Z})$, es decir,

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{Z})} = l^2(\mathbb{Z}). \quad (8.349)$$

Por un lado, $x(n)$ se puede representar como

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \delta(n-n'). \quad (8.350)$$

Fijando $m \in \mathbb{N}$, sea la función

$$S_m(n) = \sum_{n'=-m}^m x(n') \delta(n-n') \quad (8.351)$$

⁵⁷Ver definición de adherencia de un conjunto en el Ap. B.11.

que es una función de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ puesto que es una combinación lineal finita de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Está claro que $\{S_m(n)\}_m$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ que tiende a $x(n)$. Vemos que esta sucesión es de Cauchy, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \text{ tq } \|S_m(n) - S_k(n)\|^2 < \varepsilon, \forall m, k > P. \quad (8.352)$$

Entonces, con $m > k$,

$$\begin{aligned} \|S_m(n) - S_k(n)\|^2 &= \left\| \sum_{n'=-m}^m x(n') \delta(n-n') - \sum_{n'=-k}^k x(n') \delta(n-n') \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \delta(n-n') + \sum_{n'=k+1}^m x(n') \delta(n-n') \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \delta(n-n') \right\|^2 + \left\| \sum_{n'=k+1}^m x(n') \delta(n-n') \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \delta(n-n') \right|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n'=k+1}^m x(n') \delta(n-n') \right|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \delta(n-n') \right) \left(\sum_{n''=-m}^{-k-1} x(n'') \delta(n-n'') \right)^* + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n'=k+1}^m x(n') \delta(n-n') \right) \left(\sum_{n''=k+1}^m x(n'') \delta(n-n'') \right)^* = \\ &= \left(\sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \sum_{n''=-m}^{-k-1} x^*(n'') + \sum_{n'=k+1}^m x(n') \sum_{n''=k+1}^m x^*(n'') \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n') \delta(n-n'') = \\ &= \left(\sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') \sum_{n''=-m}^{-k-1} x^*(n'') + \sum_{n'=k+1}^m x(n') \sum_{n''=k+1}^m x^*(n'') \right) \delta(n'-n'') = \\ &= \sum_{n'=-m}^{-k-1} x(n') x^*(n') + \sum_{n'=k+1}^m x(n') x^*(n') = \\ &= \sum_{n'=-m}^{-k-1} |x(n')|^2 + \sum_{n'=k+1}^m |x(n')|^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m > k > P, \end{aligned} \quad (8.353)$$

puesto que, al ser $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, existirá un $P \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n'=k+1}^m |x(n')|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $m > k > P$, ya que $x(n)$ debe tender a 0 cuando $|n|$ tiende a infinito. Dado que $\{S_m(n)\}_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Hilbert y, por tanto, completo, es convergente a $x(n)$. Tomando $y(n) = S_P(n)$ se tiene la función deseada.

Estructura final del espacio.

La estructura final del espacio de señal de funciones complejas de variable discreta para este caso es la que se muestra en la Fig. 8.17.

Las dos tripletas de Gelfand que generan la estructura de espacio de Hilbert equipado para este conjunto de funciones son

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (8.354)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \quad (8.355)$$

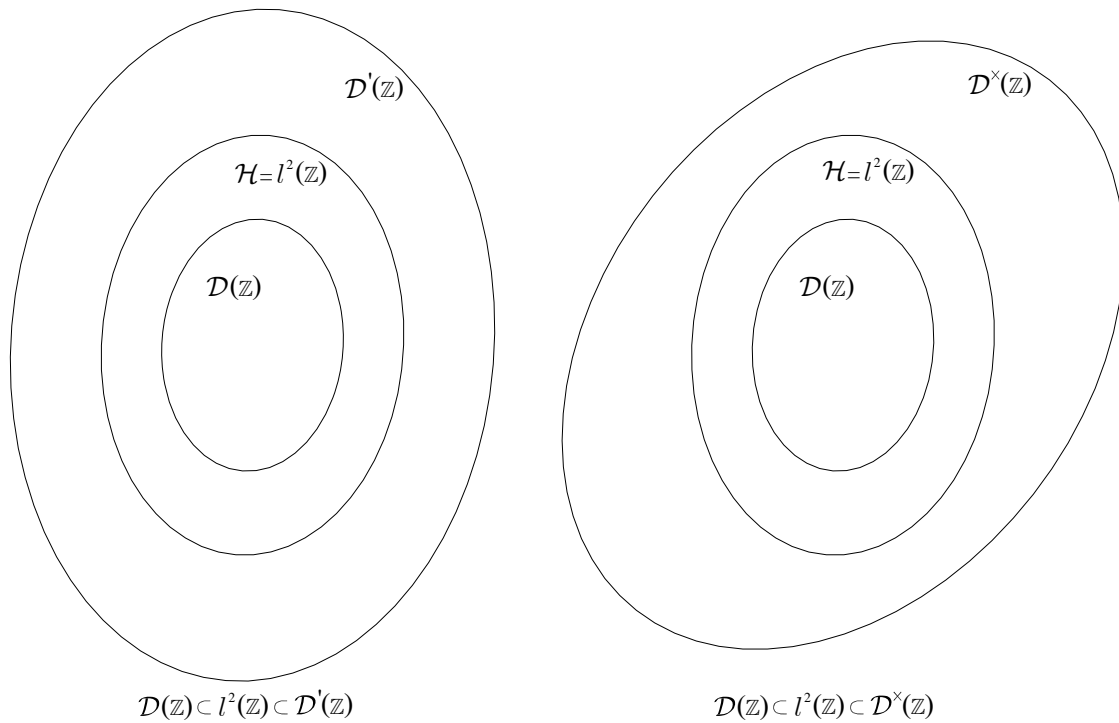


Figura 8.17: Espacios de Hilbert equipados del conjunto de funciones de variable discreta $x(n)$.

donde se pueden incluir todas las funciones complejas de variable discreta.

8.6.3. Funciones periódicas de variable continua

Espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\langle X_0 \rangle)$

Este es el espacio de las funciones $f_0(x)$ complejas periódicas de periodo X_0 de variable continua. El espacio de Hilbert generado por estas funciones es el de las funciones de cuadrado integrable en un periodo X_0 ,

$$\mathcal{H} \equiv L^2(\langle X_0 \rangle) = \left\{ f_0(x) : \int_{x=\langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^2 dx < \infty \right\}. \quad (8.356)$$

Este conjunto abarca una gran cantidad de funciones periódicas, ya que, al tener que ser integrables tan sólo en un periodo, se alivian muchos problemas de convergencia que podrían tener las funciones de variable continua; sin embargo, quedan excluidas las distribuciones como pueden ser el tren de deltas periódico $\delta_0(x - x')$. Es por ello que es necesaria la construcción de los RHS en este espacio.

Subespacio $\Phi = \mathcal{P}(X_0)$.

El primer paso para construir los espacios de Hilbert equipados es encontrar un subespacio Φ que sea denso en \mathcal{H} . Aunque en principio no se considera ningún operador, para encontrar el subespacio Φ donde puedan actuar las distribuciones, vamos a considerar el operador \mathbf{D} definido como

$$\mathbf{D}[f_0(x)] = \frac{df_0(x)}{dx}, \quad (8.357)$$

es decir, el operador derivada puesto que, como se verá más adelante en el Apdo. 8.7.3, tendrá grandes ventajas a la hora de aplicar el desarrollo en serie de Fourier a las señales de este

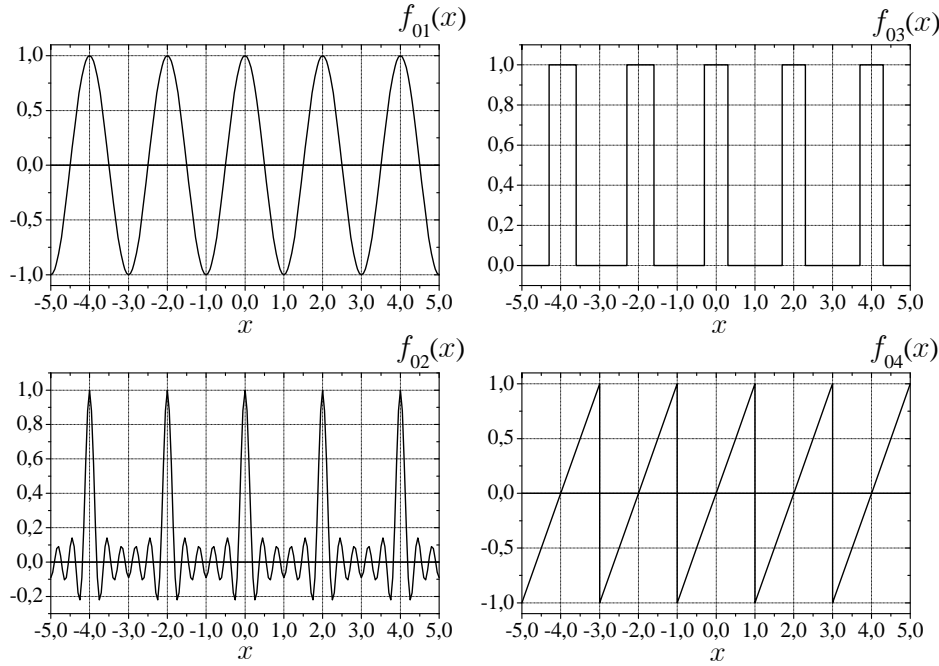


Figura 8.18: Las funciones $f_{01}(x) = \cos(\xi_0 x)$ y $f_{02}(x) = \frac{1}{11} \frac{\sin(5,5\pi x)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$ ($N = 5$) son funciones de $L^2(\langle X_0 \rangle)$ y también de $\mathcal{P}(X_0)$ porque son funciones infinitamente derivables, mientras que $f_{03}(x) = P_{0,0,6}(x)$ y $f_{04}(x) = x$ son de $L^2(\langle X_0 \rangle)$ pero no de $\mathcal{P}(X_0)$ porque ni siquiera son continuas.

espacio. Así, el subespacio Φ será el formado por la intersección infinita de la acción sucesiva del operador derivada, siendo por tanto

$$\Phi = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Dom} \{\mathbf{D}^n\}, \quad (8.358)$$

siendo $\text{Dom} \{\mathbf{D}\}$ el dominio del operador \mathbf{D} , es decir, el conjunto de funciones derivables. Por tanto, el subespacio Φ queda definido como

$$\Phi = \left\{ f_0(x) : \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left| \frac{d^k f_0(x)}{dx^k} \right|^2 dx < \infty, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{f_0(x) \in \mathcal{C}^\infty(\langle X_0 \rangle)\}, \quad (8.359)$$

es decir, funciones periódicas infinitamente diferenciables y, por tanto, continuas. En este conjunto se encuentran funciones como

$$f_{01}(x) = \cos(\xi_0 x), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad (8.360)$$

$$f_{02}(x) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\xi_0 x\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0 x}{2}\right)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (8.361)$$

pero no están las funciones

$$f_{03}(x) = P_{0,\Delta}(x), \quad (8.362)$$

$$f_{04}(x) = x, \quad (8.363)$$

como se muestra en la Fig. 8.18, aún siendo estas cuatro funciones de cuadrado integrable en un periodo X_0 . A este subespacio lo denominamos $\Phi = \mathcal{P}(X_0)$.

Hay que notar que, de considerar otros operadores en un problema a analizar, el espacio Φ podría ser diferente.

Espacios dual $\Phi' = \mathcal{P}'(X_0)$ y antidual $\Phi^\times = \mathcal{P}^\times(X_0)$.

Una vez reducido el espacio $L^2(\langle X_0 \rangle)$ a $\mathcal{P}(X_0)$, se puede encontrar el espacio dual $\Phi' = \mathcal{P}'(X_0)$. Para ello se buscan los funcionales lineales sobre el subespacio $\mathcal{P}(X_0)$, así

$$\mathcal{P}'_{\mathbf{F}}(X_0) = \{\mathbf{D} : \mathcal{P}(X_0) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D} \text{ es lineal}\}. \quad (8.364)$$

De esta forma, para cada $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ se tiene

$$\mathbf{D}[f_0(x)] = \langle f_0(x), d(x) \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) d^*(x) dx, \quad (8.365)$$

siendo $d^*(x)$ el núcleo de \mathbf{D} . A partir de aquí se construye el espacio $\Phi' = \mathcal{P}'(X_0)$ como el conjunto de los núcleos de cada uno de los funcionales lineales \mathbf{D} como

$$\mathcal{P}'(X_0) = \{d^*(x), \text{ tq } \mathbf{D}[f_0(x)] = \langle f_0(x), d(x) \rangle, \mathbf{D} \in \mathcal{P}'_{\mathbf{F}}(X_0)\}. \quad (8.366)$$

El funcional \mathbf{D} , definido como el producto escalar

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx, \quad (8.367)$$

no tiene por qué corresponderse con el producto escalar ordinario, ya que, en general, las funciones $d^*(x)$ se corresponderán con distribuciones o, cuanto menos, estarán fuera del espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$ y, por tanto, el significado de la integral no representa más que una aplicación sobre la función $f_0(x)$, representándose de esta manera para unificarlo con el producto escalar utilizado entre funciones que sí pertenecen al espacio de Hilbert. El símbolo de la integral, por tanto, no identifica ni una integral de Riemann ni de Lebesgue. Aún así, el resultado del funcional de la expresión (8.365) siempre será un número complejo perfectamente definido debido a la definición del funcional dada en (8.364).

De la misma manera, el espacio antidual $\Phi^\times = \mathcal{P}^\times(X_0)$ se encuentra a partir de todos los funcionales antilineales sobre el subespacio $\mathcal{P}(X_0)$, así

$$\mathcal{P}^\times_{\tilde{\mathbf{F}}}(X_0) = \{\tilde{\mathbf{D}} : \mathcal{P}(X_0) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}} \text{ es antilineal}\}. \quad (8.368)$$

Para cada $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ se tiene

$$\tilde{\mathbf{D}}[f_0(x)] = \langle d(x), f_0(x) \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} d(x) f_0^*(x) dx \quad (8.369)$$

siendo $d(x)$ el núcleo del funcional $\tilde{\mathbf{D}}$. Se construye entonces el espacio $\Phi^\times = \mathcal{P}^\times(X_0)$ como el conjunto de los núcleos de cada uno de los funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{D}}$ como

$$\mathcal{P}^\times(X_0) = \{d(x), \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}[f_0(x)] = \langle d(x), f_0(x) \rangle, \tilde{\mathbf{D}} \in \mathcal{P}^\times_{\tilde{\mathbf{F}}}(X_0)\}, \quad (8.370)$$

y recordando nuevamente que la expresión del funcional antilineal como una integral no se corresponde con el producto escalar ordinario, sino como un funcional aplicado sobre $f_0(x)$ del que se obtiene un número complejo.

Bases y dimensión del espacio.

En este espacio se puede encontrar un conjunto de funciones base dentro de $\mathcal{P}(X_0)$ que es⁵⁸

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; m) = \left\{ e^{jm\xi_0 x} \right\}_m \subset \mathcal{P}(X_0), \quad (8.371)$$

ya que

$$\int_{x=\langle X_0 \rangle} \left| \frac{d^k e^{jm\xi_0 x}}{dx^k} \right|^2 dx = \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left| (jm\xi_0)^k e^{jm\xi_0 x} \right|^2 dx = \int_{x=\langle X_0 \rangle} |m\xi_0|^{2k} dx = X_0 |m\xi_0|^{2k} < \infty. \quad (8.372)$$

De esta manera, cualquier función $f_0(x)$ se puede representar en términos de esta base como

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = \mathbf{DSF}^{-1} [a(m)], \quad (8.373)$$

siendo

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \langle f_0(x), e^{jm\xi_0 x} \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \mathbf{DSF} [f_0(x)] \quad (8.374)$$

que define el conocido desarrollo en serie de Fourier, **DSF**. Sin embargo este desarrollo se puede asegurar para aquellas funciones $f_0(x)$ que pertenezcan a $\mathcal{P}(X_0)$ ya que, de no ser así, y aunque $a(m)$ pudiera estar definida en todos los puntos, la reconstrucción a partir de la ecuación (8.373) no garantiza la perfecta definición de $f_0(x)$ en todos sus puntos, ya que puede haber puntos de discontinuidad o singularidades⁵⁹.

Éste es un conjunto infinito numerable, por lo que la dimensión del espacio de funciones complejas periódicas de variable continua se puede decir que es infinita numerable.

Pero también se puede encontrar una base dentro del espacio dual $\mathcal{P}'(X_0)$, que es⁶⁰

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{ \delta_0(x - x') \}_{x'} \subset \mathcal{P}'(X_0) \quad (8.375)$$

con $x' \in [0, X_0)$, ya que $\int_{x=\langle X_0 \rangle} |\delta_0(x - x')|^2 dx$ no está definido. Éste es un conjunto infinito no numerable de distribuciones delta de Dirac periódicas de periodo X_0 . Así, cada función $f_0(x)$ se puede expresar en términos de esta base como

$$f_0(x) = \int_{x'=0}^{X_0} F(x') \delta_0(x - x') dx', \quad (8.376)$$

siendo

$$F(x') = \langle f_0(x), \delta_0(x - x') \rangle = f_0(x'). \quad (8.377)$$

Dado que $e(x; x') = \{ \delta_0(x - x') \}_{x'}$ son funciones de $\mathcal{P}'(X_0)$, sólo se puede asegurar la perfecta definición de $F(x')$ para aquellas funciones $f_0(x)$ que sean de $\mathcal{P}(X_0)$. En caso contrario, no se puede asegurar la definición de $F(x')$ en todos sus puntos.

⁵⁸Para comprobar que este conjunto es una base del espacio y que es ortogonal, referirse a [80].

⁵⁹A pesar de que $a(m)$ siempre vaya a estar bien definido según (8.374) ya sea $f_0(x)$ una función de $\mathcal{P}(X_0)$, de $L^2(\langle X_0 \rangle)$ o de $\mathcal{P}^\times(X_0)$ (no de $\mathcal{P}'(X_0)$ porque $f_0(x)$ se localiza en la primera componente), al aplicar la reconstrucción de $f_0(x)$ según (8.373) el sumatorio puede no ser convergente. El problema surge a partir de las funciones $e^{jm\xi_0 x}$, que sí son de cuadrado integrable en x a lo largo de un periodo X_0 para cada m , pero no son de cuadrado sumable en m para cada valor fijo de x . En este caso la expresión (8.373) se está viendo desde el espacio de funciones de variable discreta, por lo que el \mathbf{DSF}^{-1} ha de verse como un conjunto de funcionales lineales, para cada x , sobre $a(m)$, por lo que para asegurar la convergencia, $a(m)$ debería ser una función de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, lo cual sólo se consigue cuando $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$. Puede verse la demostración en la Secc. 8.7.3.

⁶⁰Este conjunto de funciones pertenece al espacio dual lineal, $\mathcal{P}'(X_0)$, porque ocupa la segunda componente del producto escalar.

Por las propiedades de la función delta de Dirac, se puede determinar fácilmente que este conjunto es una base del espacio y que todas sus funciones son ortogonales.

De la misma manera puede definirse esta base en el espacio antidual $\mathcal{P}^\times(X_0)$ expresando cada señal como

$$f_0^*(x) = \int_{x'=0}^{X_0} \delta_0(x-x') F^*(x') dx', \quad (8.378)$$

siendo

$$F^*(x') = \langle \delta_0(x-x'), f_0(x) \rangle = f_0^*(x'). \quad (8.379)$$

Se pueden relacionar las expresiones (8.376) y (8.378) con la notación de Dirac de bras y kets a través de las expresiones (8.205) y (8.206), siendo

$$\langle f_0(x) | = \int_{x'=0}^{X_0} \langle f_0(x) | \delta_0(x-x') \rangle \langle \delta_0(x-x') | dx', \quad (8.380)$$

$$|f_0(x)\rangle = \int_{x'=0}^{X_0} | \delta_0(x-x') \rangle \langle \delta_0(x-x') | f_0(x) \rangle dx'. \quad (8.381)$$

Aún siendo el conjunto $\{\delta_0(x-x')\}_{x'}$ un conjunto infinito no numerable, no se puede decir que este espacio sea de dimensión infinita no numerable, ya que este conjunto no pertenece al espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$. Al haber encontrado un conjunto numerable $\{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ que es base ortogonal del espacio, se puede asegurar que el espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$ es un *espacio separable*.

Las ecuaciones para realizar el cambio de base entre los conjuntos de funciones $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ y $e(x; x') = \{\delta_0(x-x')\}_{x'}$ pueden encontrarse en la Secc. 4.5.3 del capítulo sobre cambios de base.

A partir del conjunto de funciones base $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m \subset \mathcal{P}(X_0)$ se puede probar que $\mathcal{P}(X_0)$ es denso en $L^2(\langle X_0 \rangle)$ en base a la siguiente demostración:

Dem.: Sea $f_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle)$. Hay que comprobar que existe una sucesión de Cauchy dentro de $\mathcal{P}(X_0)$ que tenga por límite $f_0(x)$. De esta forma se probaría que se puede aproximar $f_0(x)$ por una función $g_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ tan bien como se quiera, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g_0(x) \in \mathcal{P}(X_0) \text{ tq } d^2(f_0(x), g_0(x)) < \varepsilon \quad (8.382)$$

o dicho de otra manera, la adherencia de $\mathcal{P}(X_0)$ es $L^2(\langle X_0 \rangle)$, es decir,

$$\overline{\mathcal{P}(X_0)} = L^2(\langle X_0 \rangle). \quad (8.383)$$

Por un lado, $f_0(x)$ se puede representar como

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (8.384)$$

siendo $a(m)$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $f_0(x)$, es decir

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (8.385)$$

Fijando $k \in \mathbb{N}$, sea la función

$$S_k(x) = \sum_{m=-k}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} \quad (8.386)$$

que es una función de $\mathcal{P}(X_0)$ puesto que es una combinación lineal finita de funciones de $\mathcal{P}(X_0)$. Está claro que $\{S_k(x)\}_k$ es una sucesión en $\mathcal{P}(X_0)$ que tiende a $f_0(x)$. Vemos que esta sucesión es de Cauchy, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \|S_k(x) - S_r(x)\|^2 < \varepsilon, \forall k, r > N. \quad (8.387)$$

Entonces, con $k > r$,

$$\begin{aligned} \|S_k(x) - S_r(x)\|^2 &= \left\| \sum_{m=-k}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} - \sum_{m=-r}^r a(m) e^{jm\xi_0 x} \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) e^{jm\xi_0 x} + \sum_{m=r+1}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) e^{jm\xi_0 x} \right\|^2 + \left\| \sum_{m=r+1}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} \right\|^2 = \\ &= \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left| \sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) e^{jm\xi_0 x} \right|^2 dx + \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left| \sum_{m=r+1}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} \right|^2 dx = \\ &= \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left(\sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) e^{jm\xi_0 x} \right) \left(\sum_{m'=-k}^{-r-1} a(m') e^{jm'\xi_0 x} \right)^* dx + \\ &+ \int_{x=\langle X_0 \rangle} \left(\sum_{m=r+1}^k a(m) e^{jm\xi_0 x} \right) \left(\sum_{m'=r+1}^k a(m') e^{jm'\xi_0 x} \right)^* dx = \\ &= \left(\sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) \sum_{m'=-k}^{-r-1} a^*(m') + \sum_{m=r+1}^k a(m) \sum_{m'=r+1}^k a^*(m') \right) \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} e^{-jm'\xi_0 x} dx = \\ &= \left(\sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) \sum_{m'=-k}^{-r-1} a^*(m') + \sum_{m=r+1}^k a(m) \sum_{m'=r+1}^k a^*(m') \right) X_0 \delta(m - m') = \\ &= X_0 \sum_{m=-k}^{-r-1} a(m) a^*(m) + X_0 \sum_{m=r+1}^k a(m) a^*(m) = \\ &= X_0 \sum_{m=-k}^{-r-1} |a(m)|^2 + X_0 \sum_{m=r+1}^k |a(m)|^2 < X_0 \frac{\varepsilon}{2X_0} + X_0 \frac{\varepsilon}{2X_0} < \varepsilon, \forall k > r > N \quad (8.388) \end{aligned}$$

puesto que, para que se cumpla (8.384) con $f_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle)$, $a(m)$ tiene que tender a 0 cuando $|m|$ tiende a infinito⁶¹, por tanto existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=r+1}^k |a(m)|^2 < \frac{\varepsilon}{2X_0}$ cuando $k > r > N$. Dado que $\{S_k(x)\}_k \subset \mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle)$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Hilbert y, por tanto, completo, es convergente a $f_0(x)$. Tomando $g_0(x) = S_N(x)$ se tiene la función deseada.

Estructura final del espacio.

La estructura final del espacio de señal de funciones complejas periódicas de variable continua para este caso es la que se muestra en la Fig. 8.19.

⁶¹Se puede ver la demostración formal de este hecho en el Apdo. 8.7.3.

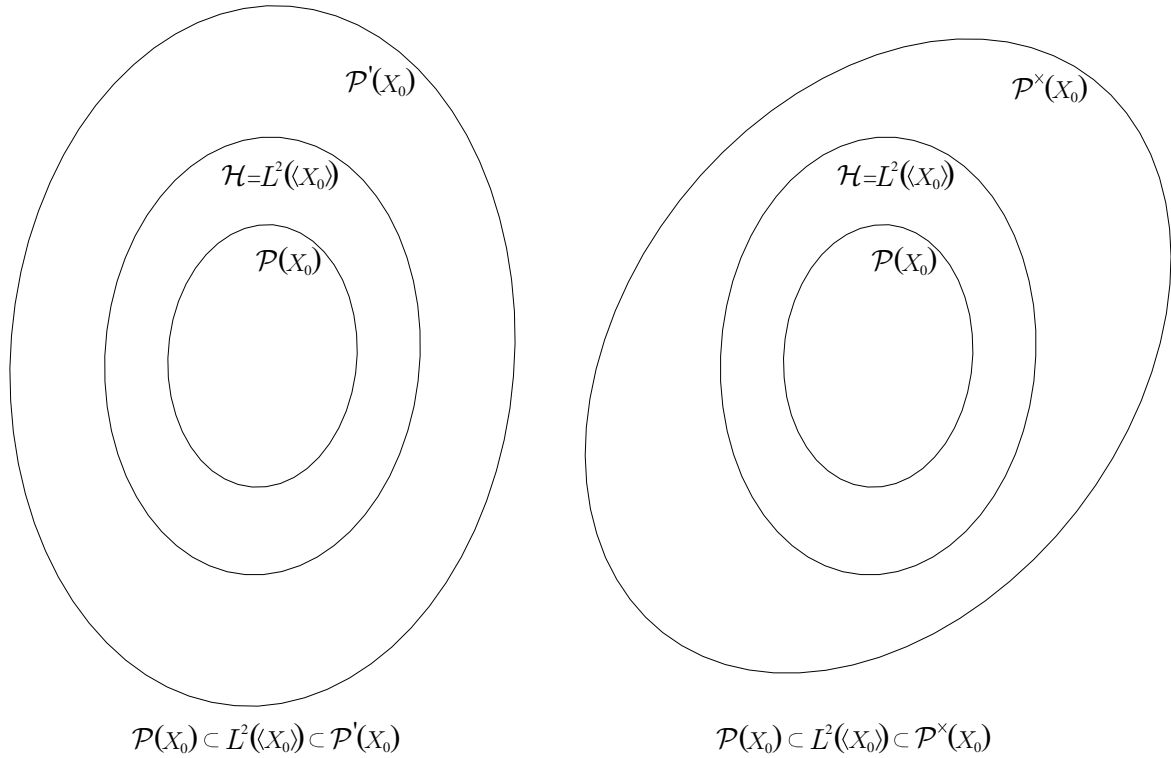


Figura 8.19: Espacios de Hilbert equipados del conjunto de funciones periódicas de variable continua $f_0(x)$.

Las dos triplas de Gelfand que generan la estructura de espacio de Hilbert equipado para este conjunto de funciones son

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(X_0), \quad (8.389)$$

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}^\times(X_0), \quad (8.390)$$

donde se pueden incluir todas las funciones y distribuciones complejas periódicas de variable continua real.

8.6.4. Funciones de variable continua

Espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.

En este espacio se contemplan todas las funciones complejas $f(x)$ de variable continua. El espacio de Hilbert generado por estas funciones es el de las funciones de cuadrado integrable

$$\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}. \quad (8.391)$$

Sin embargo esta restricción deja fuera una gran cantidad de funciones que sería interesante considerar, como son, por ejemplo, las exponenciales complejas $e^{j\xi x}$, con $\xi \in \mathbb{R}$, las funciones constantes, cualquier función periódica o las distribuciones. Es por ello que resulta necesario considerar los espacios de Hilbert equipados para incorporar todo este tipo de funciones y distribuciones. Para este espacio de señal vamos a construir tres tipos posibles de estructuras de espacios de Hilbert equipados

Subespacio Φ .

Primeramente, para construir un espacio de Hilbert equipado, es necesario restringir el espacio de Hilbert original $L^2(\mathbb{R})$ a un subespacio denso Φ . Aunque en principio no se considera ningún operador relacionado con algún tipo de problema físico a analizar, vamos a construir tres tipos de estructura de espacio de Hilbert equipado diferentes para este espacio aplicando diferentes condiciones para generar un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R})$.

1. En primer lugar consideremos el operador \mathbf{D} definido como

$$\mathbf{D}[f(x)] = \frac{df(x)}{dx}, \quad (8.392)$$

es decir, el operador derivada. Con este operador se puede crear el subespacio Φ_1 generado por su acción sucesiva, siendo

$$\Phi_1 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Dom}\{\mathbf{D}^n\}, \quad (8.393)$$

donde $\text{Dom}\{\mathbf{A}\}$ indica el dominio del operador \mathbf{A} . De esta manera, el subespacio Φ_1 queda definido como

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|^2 dx < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \\ &= \left\{ f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f^n(x)| = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (8.394)$$

es decir, el conjunto de funciones infinitamente diferenciables⁶² (y por tanto continuas) y de cuadrado integrable. A este conjunto de funciones lo denominamos

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad (8.395)$$

que, como se verá en el Apdo. 8.7.4, será interesante a la hora de realizar la transformada de Hilbert de las funciones de este espacio. En este conjunto se encuentran funciones como

$$f_1(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} P_2(x), \quad (8.396)$$

$$f_2(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0, \quad (8.397)$$

$$f_3(x) = \text{sinc}(ax), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (8.398)$$

representadas en la Fig. 8.20.

2. Consideremos ahora los operadores \mathbf{Q} y \mathbf{D} , siendo

$$\mathbf{Q}[f(x)] = xf(x) \quad (8.399)$$

y \mathbf{D} definido como en (8.392). Estos son los operadores multiplicación por x y derivada⁶³. De esta manera, el subespacio Φ_2 estará formado por la acción conjunta sucesiva de estos dos operadores, siendo

$$\Phi_2 = \bigcap_{n,m=0}^{\infty} \text{Dom}\{\mathbf{Q}^n \mathbf{D}^m\}. \quad (8.402)$$

⁶²La diferenciabilidad es lo mismo que la derivabilidad en funciones de una variable.

⁶³En los problemas de mecánica cuántica, estos operadores tienen un significado físico y se conocen como los operadores *posición* y *momento*, respectivamente, y son utilizados para medir dichas magnitudes de una partícula. El operador momento se identifica en este caso con la letra \mathbf{P} . Además, las autofunciones de estos operadores son, respectivamente, las deltas de Dirac y las exponenciales complejas, ya que

$$\mathbf{Q}[\delta(x-x')] = x\delta(x-x') = x'\delta(x-x'), \quad (8.400)$$

$$\mathbf{P}[e^{j\xi x}] = \frac{de^{j\xi x}}{dx} = j\xi e^{j\xi x}, \quad (8.401)$$

funciones que no pertenecen al espacio de Hilbert.

Finalmente este subespacio queda definido como

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \left\{ f(x) : \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| x^n \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right|^2 dx < \infty, \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \right\} = \\ &= \left\{ f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^n f^{(m)}(x) \right| = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \right\},\end{aligned}\quad (8.403)$$

es decir, el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables que decrecen más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Este conjunto de funciones se conoce como funciones de buen comportamiento (tal como se las llamaba hasta ahora en la nomenclatura de la Teoría General de Señales y Sistemas), funciones de decrecimiento rápido, funciones temperadas o funciones de Schwartz y se representan por $\Phi_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En este conjunto se encuentran funciones como (8.396) y (8.397) pero no (8.398) ya que, a pesar de que también sea una función continua, infinitamente derivable y de cuadrado integrable, no decrece más rápido que un polinomio, ya que $x \operatorname{sinc}(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax)$, que es periódica y, por tanto, no tiende a cero ni es de cuadrado integrable.

Es fácil darse cuenta de que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ ya que toda función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es infinitamente derivable, pero no toda función infinitamente derivable decrece más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, como se ha visto en el ejemplo anterior.

La estructura generada por este subespacio posee propiedades interesantes, como se verá en el Apdo. 8.7.5 al realizar la transformada de Fourier.

3. Un tercer subespacio puede ser un subconjunto de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en el que las funciones sean de soporte finito. En este caso estaríamos hablando de las denominadas funciones test $\Phi_3 = \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ ⁶⁴ definidas como

$$\Phi_3 = \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{f(x) \text{ tq } f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ y } \operatorname{supp}\{f(x)\} = X \subset \mathbb{R} \text{ compacto}\}.\quad (8.404)$$

Dado que son de soporte finito⁶⁵ en un compacto⁶⁶, no se le exige que decrezca más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, puesto que, debido a que a partir de un punto la función será nula, se trata de una condición más fuerte. Es por tanto que se cumple que $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$. En este espacio se encuentra la función (8.396) pero no las funciones (8.397) ni (8.398), ya que no son de soporte compacto.

De considerar en el análisis de cualquier problema físico con funciones de variable continua otros operadores, el subespacio Φ podría ser diferente. Ejemplos de esto pueden encontrarse en las Refs. [65]-[66], donde el subespacio Φ es una modificación de las funciones de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, o en la Ref. [67], donde el subespacio Φ es otro diferente a los anteriormente vistos, tratándose de funciones infinitamente derivables que decrecen más rápido que una gaussiana.

Espacios dual Φ' y antidual Φ^\times .

El siguiente paso en la construcción de los RHS es encontrar el espacio dual. Una vez reducido el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ a un subespacio denso Φ , se puede expandir al espacio dual Φ' , que es el conjunto de los núcleos todos los funcionales lineales sobre Φ . Para cada uno de los tres subespacios definidos anteriormente vamos a construir sus espacios duales.

⁶⁴En algunas referencias bibliográficas como [56] y [63] utilizan para este subconjunto la nomenclatura $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, pero aquí, para no confundirlo con el conjunto de funciones de variable discreta, utilizamos el término $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

⁶⁵El soporte de una función es el conjunto de valores para los que la función es diferente de 0, es decir

$$\operatorname{supp}\{f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.\quad (8.405)$$

⁶⁶En un espacio normado, un conjunto compacto es un conjunto cerrado y acotado.

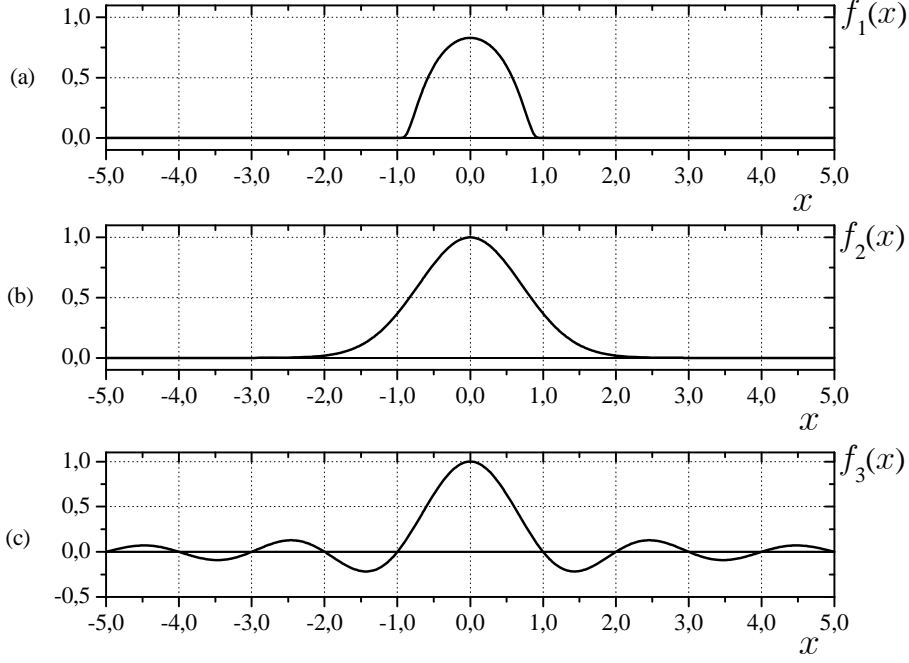


Figura 8.20: (a) $f_1(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} P_2(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.
 (b) $f_2(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.
 (c) $f_3(x) = \text{sinc}(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.

1. Para el subespacio $\Phi_1 = \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ se define $\mathcal{C}_{L^2 \mathbf{F}}^{\infty'}(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{C}_{L^2 \mathbf{F}}^{\infty'}(\mathbb{R}) = \{ \mathbf{D}_1 : \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D}_1 \text{ es lineal} \}, \quad (8.406)$$

así, para cada $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\mathbf{D}_1[f(x)] = \langle f(x), d_1(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d_1^*(x) dx, \quad (8.407)$$

donde $d_1^*(x)$ es el núcleo del funcional \mathbf{D}_1 . El espacio dual $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ se construye a partir de estos núcleos como

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) = \{ d_1^*(x), \text{ tq } \mathbf{D}_1[f(x)] = \langle f(x), d_1(x) \rangle, \mathbf{D}_1 \in \mathcal{C}_{L^2 \mathbf{F}}^{\infty'}(\mathbb{R}) \}. \quad (8.408)$$

El funcional \mathbf{D}_1 , aunque se defina de la misma manera que el producto escalar definido en este espacio de Hilbert como

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx, \quad (8.409)$$

en general no se corresponde con el producto escalar ordinario, ya que $d_1^*(x)$ no es una función del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ y, generalmente, podrá ser una distribución, por lo que el significado de la integral no se corresponde con una integral de Riemann o de Lebesgue, sino que representa una aplicación sobre $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, eso sí, dando como resultado, al igual que el producto escalar, un número complejo.

De la misma manera, se define $\mathcal{C}_{L^2 \tilde{\mathbf{F}}}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ como el conjunto donde se encuentran los funcionales antilineales sobre $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ siendo

$$\mathcal{C}_{L^2 \tilde{\mathbf{F}}}^{\infty \times}(\mathbb{R}) = \{ \tilde{\mathbf{D}}_1 : \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_1 \text{ es antilineal} \}. \quad (8.410)$$

Para cualquier función $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{D}}_1[f(x)] = \langle d_1(x), f(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} d_1(x) f^*(x) dx, \quad (8.411)$$

siendo $d_1(x)$ el núcleo de $\tilde{\mathbf{D}}_1$, por tanto, el espacio antidual $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ se construye con los núcleos de estos funcionales antilineales como

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) = \left\{ d_1(x), \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_1[f(x)] = \langle d_1(x), f(x) \rangle, \tilde{\mathbf{D}}_1 \in \mathcal{C}_{L^2 \tilde{\mathbf{F}}}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \right\} \quad (8.412)$$

y recordando que el significado de la integral no indica un producto escalar ordinario sino un funcional sobre $f(x)$ del que se obtiene un número complejo.

2. Considerando ahora el subespacio $\Phi_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definimos $\mathcal{S}'_{\mathbf{F}}(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{S}'_{\mathbf{F}}(\mathbb{R}) = \{ \mathbf{D}_2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D}_2 \text{ es lineal} \}, \quad (8.413)$$

de forma que, para cada $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\mathbf{D}_2[f(x)] = \langle f(x), d_2(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d_2^*(x) dx, \quad (8.414)$$

siendo $d_2^*(x)$ el núcleo del funcional \mathbf{D}_2 . El espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se construye a partir de los núcleos de estos funcionales lineales, así

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ d_2^*(x), \text{ tq } \mathbf{D}_2[f(x)] = \langle f(x), d_2(x) \rangle, \mathbf{D}_2 \in \mathcal{S}'_{\mathbf{F}}(\mathbb{R}) \} \quad (8.415)$$

Al igual que antes, aunque el funcional se defina de la misma manera que el producto escalar de este espacio de Hilbert, en general no se corresponde con el producto escalar ordinario, sino que representa una aplicación sobre $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dando como resultado, al igual que el producto escalar, un número complejo. Esta definición de espacio dual da lugar a las denominadas **distribuciones temperadas**⁶⁷.

El espacio antidual $\Phi^\times = \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ se construye a partir de los funcionales antilineales sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En primer lugar sea

$$\mathcal{S}_{\mathbf{F}}^\times(\mathbb{R}) = \left\{ \tilde{\mathbf{D}}_2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_2 \text{ es antilineal} \right\}, \quad (8.416)$$

así, para cualquier función $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{D}}_2[f(x)] = \langle d_2(x), f(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} d_2(x) f^*(x) dx, \quad (8.417)$$

siendo $d_2(x)$ el núcleo de $\tilde{\mathbf{D}}_2$. El espacio antidual $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ se genera a partir de cada uno de los núcleos de los funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{D}}_2$ como

$$\mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) = \left\{ d_2(x), \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_2[f(x)] = \langle d_2(x), f(x) \rangle, \tilde{\mathbf{D}}_2 \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}^\times(\mathbb{R}) \right\}. \quad (8.418)$$

El significado de la integral así como del producto escalar indica un funcional antilineal sobre $f(x)$ obteniéndose un número complejo.

⁶⁷Ver definición de distribuciones temperadas en el Ap. B.17.6.

Dado que las inclusiones en los espacios duales son al revés que en los subespacios del espacio de Hilbert⁶⁸, se tiene que

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (8.419)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \quad (8.420)$$

3. Finalmente, para el subespacio $\Phi_3 = \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se construye su espacio dual $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ a partir de los funcionales lineales sobre $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. Sea

$$\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{D}_3 : \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D}_3 \text{ es lineal}\}, \quad (8.421)$$

así, para cada $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\mathbf{D}_3[f(x)] = \langle f(x), d_3(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d_3^*(x) dx, \quad (8.422)$$

donde $d_3^*(x)$ es el núcleo del funcional \mathbf{D}_3 . El espacio dual $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ consta de todos los núcleos de los funcionales lineales, así

$$\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{d_3^*(x), \text{ tq } \mathbf{D}_3[f(x)] = \langle f(x), d_3(x) \rangle, \mathbf{D}_3 \in \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})\}. \quad (8.423)$$

Esta definición de espacio dual da lugar a las distribuciones ordinarias⁶⁹, un conjunto más general que las distribuciones temperadas.

De la misma manera, el espacio antidual $\mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se construye a partir de los funcionales antilineales sobre $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. Sea

$$\mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{\tilde{\mathbf{D}}_3 : \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_3 \text{ es antilineal}\}. \quad (8.424)$$

Para cada $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ es

$$\tilde{\mathbf{D}}_3[f(x)] = \langle d_3(x), f(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} d_3(x) f^*(x) dx, \quad (8.425)$$

donde $d_3(x)$ es el núcleo del funcional $\tilde{\mathbf{D}}_3$. Finalmente, el espacio antidual $\mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ consiste en todos los núcleos de los funcionales antilineales, así

$$\mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{d_3(x), \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}_3[f(x)] = \langle d_3(x), f(x) \rangle, \tilde{\mathbf{D}}_3 \in \mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})\}. \quad (8.426)$$

Al igual que en los casos anteriores, los productos escalares y las integrales definen funcionales sobre $f(x)$ de los que se obtiene un número complejo.

Considerando los tres espacios duales construidos para este espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ es fácil comprobar la inclusión

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \quad (8.427)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \quad (8.428)$$

⁶⁸Esto es fácil de entender ya que, debido a que el espacio dual a uno dado es el conjunto de funcionales que se pueden aplicar sobre ese espacio, cuanto más pequeño sea éste, menos restricciones impondrá y más aplicaciones se podrán definir sobre él.

En los casos extremos, considerando el subespacio generado únicamente por el $\{0\}$ (para espacio de señal sería la función nula $f(x) = 0$), cualquier tipo de funcional que se quiera definir se podrá aplicar sobre el $\{0\}$ (que, además, siempre dará como resultado el valor 0). Y en el caso de considerar como subespacio el propio espacio de Hilbert, los funcionales definidos sobre este subespacio sólo podrán ser aquéllos cuyos núcleos sean también una función del espacio de Hilbert, para poder asegurar que $\langle f(x), d(x) \rangle$ sea un número complejo.

⁶⁹Ver definición de distribuciones ordinarias en el Ap. B.17.5.

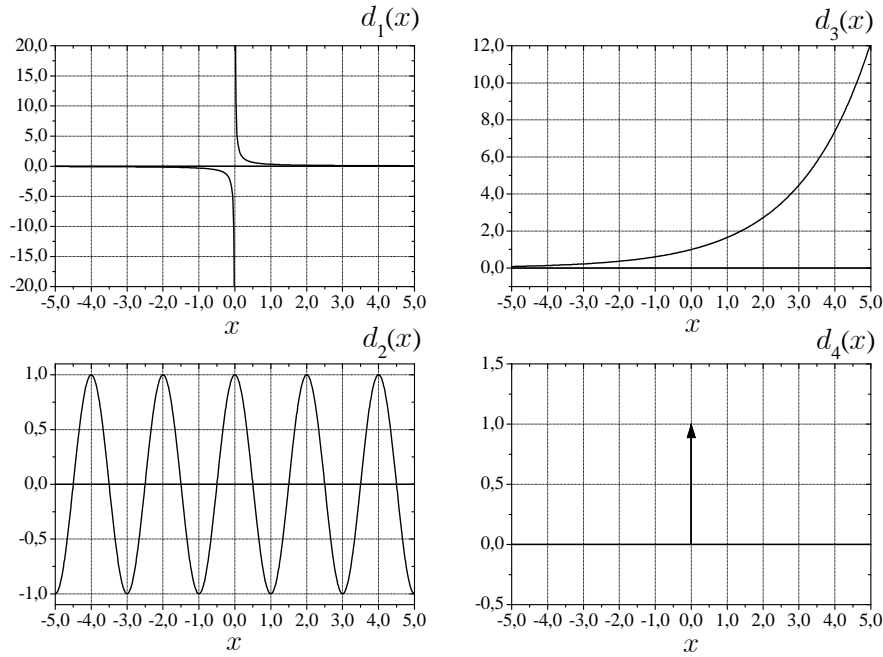


Figura 8.21: Distribuciones del espacio $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

$d_1(x) = \frac{1}{\pi x} \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, $d_2(x) = \cos(\pi x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$,
 $d_3(x) = e^{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, $d_4(x) = \delta(x) \in \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ aunque $d_4(x)$ se puede extender a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y a $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ a partir de la prolongabilidad de distribuciones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

así, en $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se tienen funciones como las representadas en la Fig. 8.21⁷⁰,

$$d_1(x) = \frac{1}{ax}, \quad a \neq 0, \quad (8.429)$$

$$d_2(x) = \cos(\xi_0 x), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad (8.430)$$

$$d_3(x) = e^{bx}, \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (8.431)$$

$$d_4(x) = \delta(x), \quad (8.432)$$

sin embargo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ no se encuentra (8.431) y en $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ tampoco está si quiera (8.430). Algunas distribuciones definidas en $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, como la delta de Dirac $\delta(x)$, pueden ser extendidas a subconjuntos más pequeños como $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ a partir de la prolongabilidad de distribuciones en $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ ⁷¹ por lo que pueden considerarse también dentro de los espacios duales más pequeños.

Bases y dimensión del espacio.

Dentro de este espacio de señal se puede encontrar un conjunto numerable de funciones localizado en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que hagan de base del espacio. Éste es⁷²

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; k) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\}_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (8.433)$$

⁷⁰En $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ también estarán estas funciones que se describen, pero, cuando se consideren como núcleos de funcionales antilineales, deberán colocarse en la primera componente del producto interno, al revés de si se considerasen como núcleos de funcionales lineales, que irían en la segunda.

Sin pérdida de generalidad, consideramos estas funciones pertenecientes al espacio dual lineal $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

⁷¹Ver prolongabilidad de distribuciones en el Ap. B.17.7.

⁷²La definición de este conjunto de funciones como base de este espacio se puede encontrar en [120], [121].

para $k \in \mathbb{N}_0$, donde $H_k(x)$ representa los polinomios de Hermite y, de [51],

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right|^2 dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k!2^k\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_k^2(x) dx = \delta(k) < \infty \quad (8.434)$$

y, además, dado que

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, \quad (8.435)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}} (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right|^2 dx < \infty \end{aligned} \quad (8.436)$$

puesto que las funciones gaussianas y sus derivadas decrecen más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$, por lo que las funciones base

$$e(x; k) = \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (8.437)$$

De esta manera, cualquier función $f(x)$ se puede expresar en términos de esta base como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \quad (8.438)$$

siendo

$$a(k) = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \quad (8.439)$$

que definen el desarrollo en serie de Hermite inverso y directo, respectivamente. La convergencia tanto de (8.438) como de (8.439) sólo se puede asegurar para funciones $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para el resto de funciones puede haber puntos en los que $f(x)$ no esté perfectamente definido puesto que puede haber puntos de discontinuidad o singularidades.

Este conjunto de funciones $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\}_k$ son un conjunto infinito numerable, por lo que se puede decir que la dimensión del espacio de funciones complejas de variable continua es infinita numerable.

Podemos encontrar, también, otros conjuntos de funciones base en los espacios duales:

1. Se puede encontrar también un conjunto de funciones que hagan el papel de una base dentro del espacio dual $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ como son⁷³

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'} \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \quad (8.440)$$

⁷³Se puede comprobar que este conjunto de funciones es una base del espacio de funciones de variable continua en [1].

con $x' \in \mathbb{R}$ y que son las funciones que definen la transformada de Hilbert, **TH**. Cada una de estas funciones no pertenece al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi(x-x')} \right|^2 dx = \infty. \quad (8.441)$$

Se trata de un conjunto infinito no numerable de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ y cada función $f(x)$ del espacio puede expresarse a partir de esta base como

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{\pi(x-x')} dx' = \mathbf{TH}^{-1}[F(x')], \quad (8.442)$$

donde

$$F(x') = \left\langle f(x), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx = \mathbf{TH}[f(x)], \quad (8.443)$$

El par (8.442)-(8.443) representan la transformada de Hilbert inversa, \mathbf{TH}^{-1} y la transformada de Hilbert directa (o simplemente transformada de Hilbert) **TH**, pero sólo se puede asegurar la convergencia de estas integrales y su correcta definición cuando $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, ya que $\frac{1}{\pi(x-x')} \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ para cada x' . Esto hace que las integrales que aparecen no puedan ser consideradas como integrales de Riemann o de Lebesgue sino como funcionales lineales, tal como se mostraba en la expresión (8.407), es decir, como una aplicación sobre $F(x')$ para cada x en el primer caso y como una aplicación sobre $f(x)$ para cada x' en el segundo, de la que se obtiene un número complejo. Para el resto de funciones $f(x) \notin \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ se puede definir igualmente la transformada de Hilbert pero de una manera generalizada, es decir, que no se puede asegurar que ni los coeficientes $F(x')$ ni la reconstrucción de la señal $f(x)$ vayan a estar definidas en todos sus puntos, ya que, por la propia definición de los funcionales, sólo se puede asegurar la convergencia cuando éstos se aplican a funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Igualmente puede definirse esta base sobre el espacio dual antilineal $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ siendo

$$f^*(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{F^*(x')}{\pi(x-x')} dx', \quad (8.444)$$

donde

$$F^*(x') = \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, f(x) \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f^*(x)}{\pi(x-x')} dx. \quad (8.445)$$

Por otro lado, se pueden interpretar las expresiones (8.442) y (8.444) bajo la notación de Dirac de bras y kets según las expresiones obtenidas en (8.205) y (8.206) ya que, de la teoría general,

$$\langle a(\tau) | = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu} [\langle a(\tau) | e(\tau; \mu) \rangle \langle e(\tau; \mu) |], \quad (8.446)$$

$$|a(\tau) \rangle = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu} [|e(\tau; \mu) \rangle \langle e(\tau; \mu) | a(\tau) \rangle] \quad (8.447)$$

y, particularizándolo para el caso de la transformada de Hilbert se tiene

$$\langle f(x) | = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x) \left| \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')} \right| dx', \quad (8.448)$$

$$|f(x) \rangle = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')} \right| f(x) \rangle dx'. \quad (8.449)$$

2. Asimismo, se puede encontrar otro conjunto de funciones que hagan el papel de una base dentro del espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y que son⁷⁴

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \left\{ e^{j\xi x} \right\}_{\xi} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (8.450)$$

con $\xi \in \mathbb{R}$ y que son las funciones que definen la bien conocida transformada de Fourier, **TF**. Este conjunto no pertenece al espacio de funciones de cuadrado integrable ya que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |e^{j\xi x}|^2 dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} dx = \infty. \quad (8.451)$$

Se trata, por tanto, de otro conjunto infinito no numerable que vive en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Cada función $f(x)$ del espacio se puede expresar en términos de esta base como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi = \mathbf{TF}^{-1}[F(\xi)], \quad (8.452)$$

siendo

$$F(\xi) = \left\langle f(x), e^{j\xi x} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx = \mathbf{TF}[f(x)]. \quad (8.453)$$

El par (8.452)-(8.453) son las conocidas transformada de Fourier inversa \mathbf{TF}^{-1} y transformada de Fourier directa (o simplemente transformada de Fourier) **TF**. Sin embargo, a pesar de que cada una de las funciones $e^{j\xi x}$ son funciones continuas e infinitamente derivables, sólo se puede asegurar la convergencia de (8.452) y (8.453) y la definición en todos los puntos de la función resultado cuando $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ya que $e^{j\xi x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$, por lo que las integrales que aparecen no pueden ser consideradas, en general, como integrales de Riemann o de Lebesgue, sino a partir de la definición original de los funcionales vista en (8.413), es decir, como una aplicación sobre $F(\xi)$ para cada x en (8.452) o sobre $f(x)$ para cada ξ en (8.453), de donde se obtiene un número complejo. Para el resto de funciones $f(x) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se puede definir igualmente la transformada de Fourier, pero de una forma generalizada. Esto hace que, tanto $F(\xi)$ como la reconstrucción de $f(x)$ puedan no estar definidas en alguno de sus puntos, ya que, por la propia definición de los funcionales, sólo se puede asegurar la convergencia cuando éstos se aplican a funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De la misma manera puede definirse esta base en el espacio antidual $\mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$ expresando cada señal como

$$f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} F^*(\xi) d\xi, \quad (8.454)$$

siendo

$$F^*(\xi) = \left\langle e^{j\xi x}, f(x) \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{j\xi x} f^*(x) dx. \quad (8.455)$$

Además, se pueden interpretar las expresiones (8.452) y (8.454) en términos de la notación de Dirac de bras y kets como

$$\langle f(x) | = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \langle f(x) | e^{j\xi x} \rangle \langle e^{j\xi x} | d\xi, \quad (8.456)$$

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} |e^{j\xi x}\rangle \langle e^{j\xi x} | f(x)\rangle d\xi. \quad (8.457)$$

Las ecuaciones para realizar el cambio de base entre los conjuntos de funciones base $e(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$ y $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_{\xi}$ puede verse en la Secc. 4.5.2 del capítulo sobre los cambios de base.

⁷⁴Una gran cantidad de referencias bibliográficas prueban que este conjunto es una base de este espacio. Ver, por ejemplo [48], [51], [52], [61], [80].

3. Finalmente, se podría definir otro conjunto de funciones de $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ que hicieran el papel de una base, siendo

$$e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{\delta(x - x')\}_{x'} \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \quad (8.458)$$

con $x' \in \mathbb{R}^{75}$. En este caso estaríamos tratando con una base ideal de deltas desplazadas y que está claro que no son funciones del espacio de Hilbert puesto que son distribuciones. Se trara de un conjunto infinito no numerable que vive en $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. Cada función $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ podrá expresarse en términos de esta base como

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (8.459)$$

siendo

$$f(x') = \langle f(x), \delta(x - x') \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx \quad (8.460)$$

y donde es bien claro que tanto (8.459) como (8.460) tienen que interpretarse como funcionales lineales que se aplican sobre $f(x')$ para cada x en el primer caso y sobre $f(x)$ para cada x' en el segundo, puesto que no se puede hablar de integrales ni de Riemann ni de Lebesgue. El conjunto $\{\delta(x - x')\}_{x'}$ define una transformada que se podría llamar identidad y representarse como \mathbf{T}_{δ} , puesto que la actuación de dicha transformada sobre una señal devuelve la misma señal definida sobre el parámetro x' . No en vano la delta de Dirac $\delta(x)$ es el elemento neutro de la convolución, pudiendo expresar tanto (8.460) como (8.459) en la forma

$$f(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x) * \delta(x), \quad (8.461)$$

$$f(x') = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x') * \delta(x'). \quad (8.462)$$

Esto hace que también se pueda realizar la representación (8.460) para cualquier función $f(x)$ aunque no sea de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, puesto que, por la propiedad de prolongabilidad de distribuciones en $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})^{76}$, se pueden relajar las condiciones de $f(x)$.

Esta base también se puede definir en el espacio antidual $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ representando cada señal como

$$f^*(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f^*(x') dx' \quad (8.463)$$

donde

$$f^*(x') = \langle \delta(x - x'), f(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f^*(x) dx. \quad (8.464)$$

Las expresiones (8.459) y (8.463) se pueden interpretar también, respectivamente, en términos de bras y kets como

$$\langle f(x) | = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \langle f(x) | \delta(x - x') \rangle \langle \delta(x - x') | dx' \quad (8.465)$$

$$|f(x)\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} |\delta(x - x')\rangle \langle \delta(x - x') | f(x) \rangle dx. \quad (8.466)$$

⁷⁵ Este conjunto de funciones también es base del espacio (una base ideal) como se comentó en el Apdo. 2.3.5 del Cap. 2 sobre el resumen de la GSST.

⁷⁶ Referirse al Ap. B.17.7.

Aunque los conjuntos $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$, $e(x; x') = \left\{\frac{1}{\pi(x-x')}\right\}_{x'}$ y $e(x; x') = \{\delta(x-x')\}_{x'}$ sean conjuntos de funciones base infinito no numerables, no se puede decir que la base del espacio sea infinita no numerable, ya que estas funciones no pertenecen al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ y, además, se ha encontrado un conjunto de funciones numerable que sí pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$. Es por ello que se puede determinar que el espacio de señales complejas de variable continua es de dimensión infinita numerable, y por tanto, al existir una base numerable, el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ es un *espacio separable*⁷⁷.

En [63] se demuestra que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con la topología inducida en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y, a partir del conjunto de funciones base $e(x; k) = \left\{\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_k(x)\right\}_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ se puede probar también que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ son densos en $L^2(\mathbb{R})$ en base a la siguiente demostración:

Dem.: Sea $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Hay que comprobar que existe una sucesión de Cauchy dentro de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que tenga por límite $f(x)$. De esta forma se probaría que se puede aproximar $f(x)$ por una función $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tan bien como se quiera, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ tq } d^2(f(x), g(x)) < \varepsilon \quad (8.467)$$

o dicho de otra manera, la adherencia de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ es $L^2(\mathbb{R})$, es decir,

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \overline{\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}). \quad (8.468)$$

Por un lado, $f(x)$ se puede representar como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x), \quad (8.469)$$

siendo $a(k)$ los coeficientes del desarrollo en serie de Hermite de $f(x)$, es decir,

$$a(k) = \mathbf{DSHm}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx. \quad (8.470)$$

Fijando $n \in \mathbb{N}$, sea la función

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \quad (8.471)$$

que es una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puesto que es una combinación lineal finita de funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Está claro que $\{S_n(x)\}_n$ es una sucesión en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que tiende a $f(x)$. Vemos que esta sucesión es de Cauchy, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \|S_n(x) - S_m(x)\|^2 < \varepsilon, \forall n, m > N. \quad (8.472)$$

⁷⁷Se puede ver la demostración de que $L^2(\mathbb{R})$ es separable en [121].

Entonces, con $n > m$,

$$\begin{aligned}
& \|S_n(x) - S_m(x)\|^2 = \\
& = \left\| \sum_{k=0}^n a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) - \sum_{k=0}^m a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\|^2 = \quad (8.473) \\
& = \left\| \sum_{k=m+1}^n a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\|^2 = \\
& = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=m+1}^n a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right|^2 dx = \\
& = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=m+1}^n a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right) \left(\sum_{k'=m+1}^n a(k') \frac{1}{\sqrt{k'!2^{k'}\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x'^2}{2}} H_{k'}(x) \right)^* dx = \\
& = \sum_{k=m+1}^n a(k) \sum_{k'=m+1}^n a^*(k') \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \frac{1}{\sqrt{k'!2^{k'}\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x'^2}{2}} H_{k'}(x) dx = \\
& = \sum_{k=m+1}^n a(k) \sum_{k'=m+1}^n a^*(k') \delta(k - k') = \\
& = \sum_{k=m+1}^n a(k) a^*(k) = \\
& = \sum_{k=m+1}^n |a(k)|^2 < \varepsilon, \forall n > m > N \quad (8.474)
\end{aligned}$$

puesto que, para que se cumpla (8.469) con $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, $a(k)$ tiene que decrecer conforme k aumenta, por lo que existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m+1}^n |a(k)|^2 < \varepsilon$ cuando $n > m > N$.

Dado que $\{S_n(x)\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Hilbert y, por tanto, completo, es convergente a $f(x)$. Tomando $g(x) = S_N(n)$ se tiene la función deseada.

Estructura final del espacio.

Finalmente, las estructuras descritas anteriormente del espacio de funciones complejas de variable continua son las que se muestran en la Figs. 8.22, 8.23 y 8.24.

Las dos tripletas de Gelfand que generan los espacios de Hilbert equipados para los ejemplos de este caso son

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}), \quad (8.475)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}), \quad (8.476)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (8.477)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (8.478)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \quad (8.479)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^\times(\mathbb{R}), \quad (8.480)$$

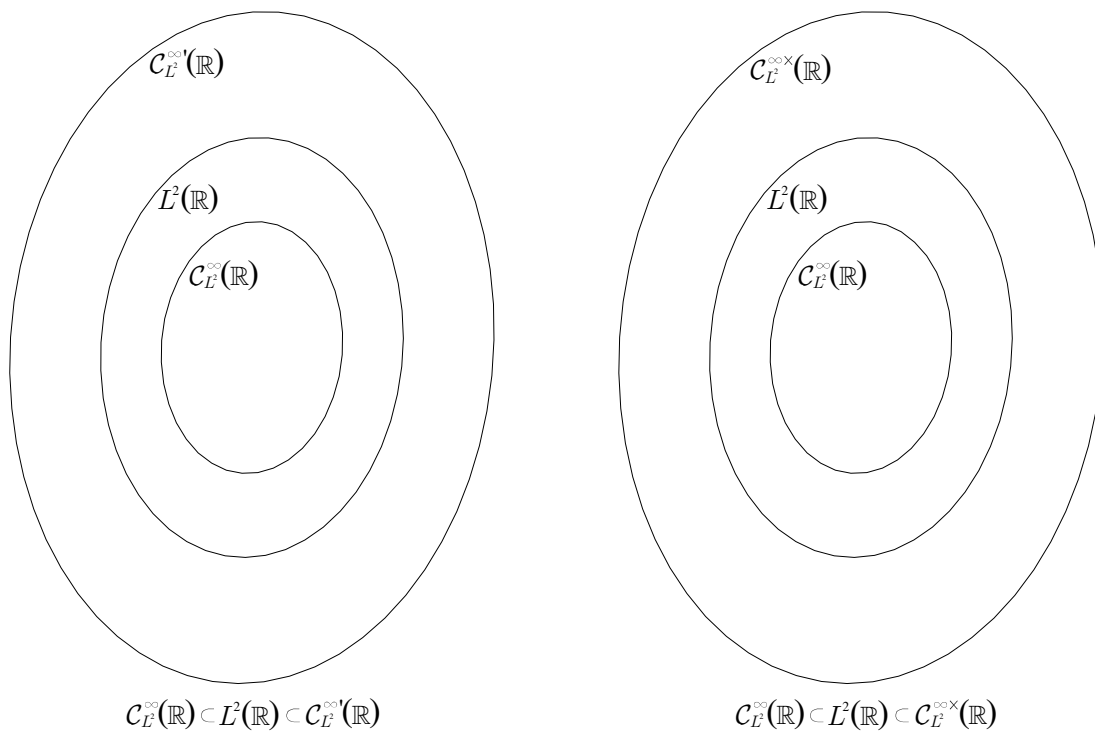


Figura 8.22: Espacios de Hilbert equipados del conjunto de funciones de variable continua $f(x)$ siendo $\Phi = \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.

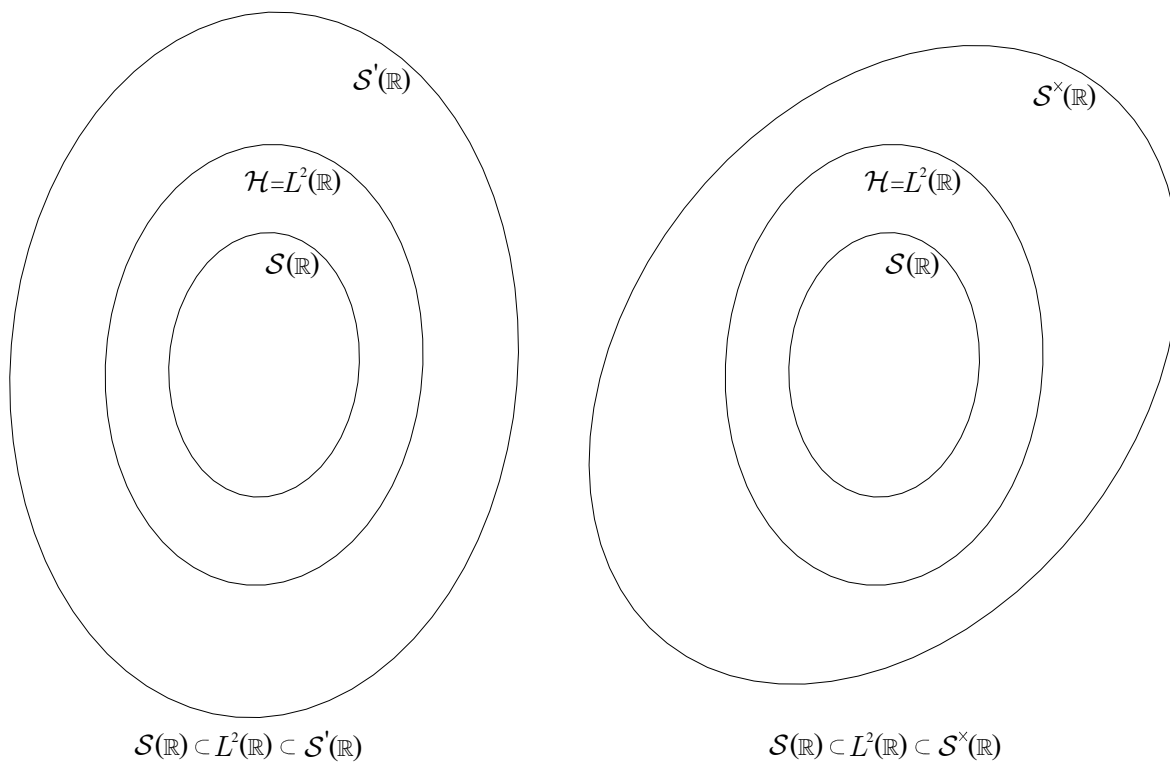


Figura 8.23: Espacios de Hilbert equipados del conjunto de funciones de variable continua $f(x)$ siendo $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

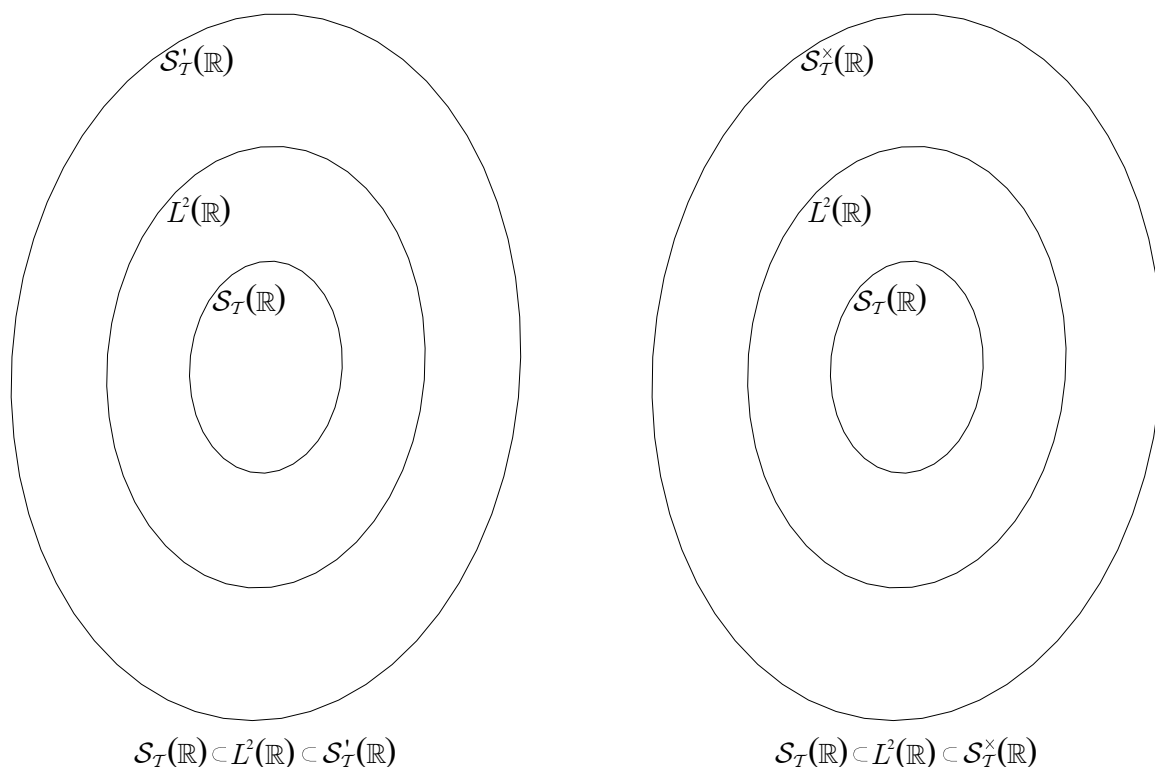


Figura 8.24: Espacios de Hilbert equipados del conjunto de funciones de variable continua $f(x)$ siendo $\Phi = \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$.

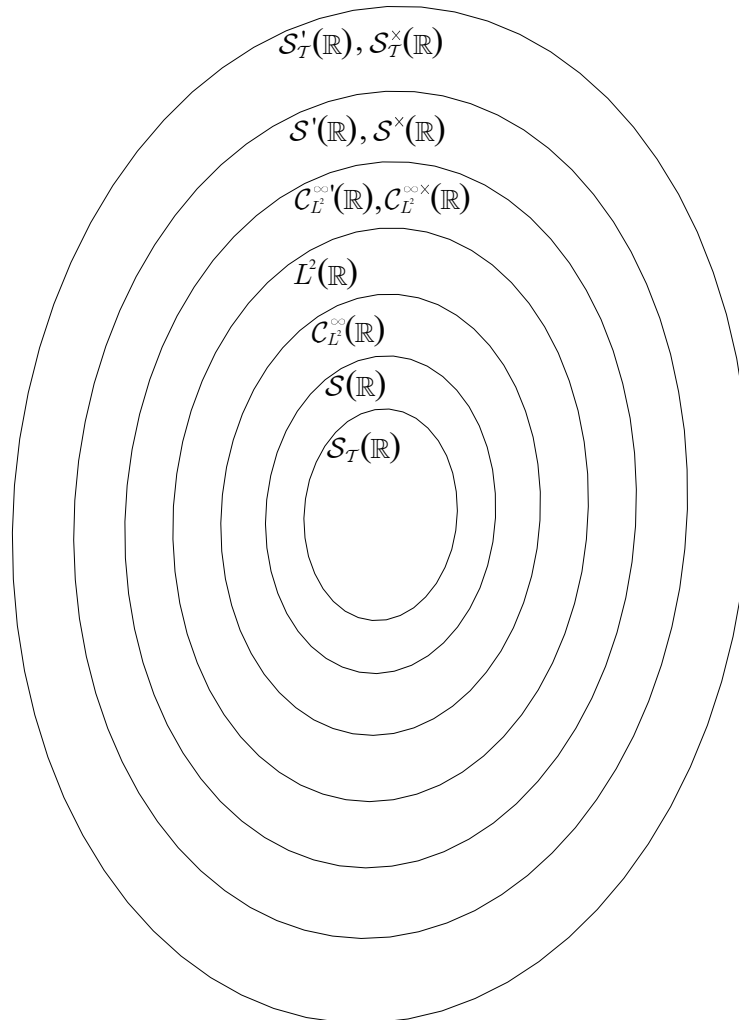
donde se pueden incluir todo tipo de funciones y distribuciones de variable continua. Representando todos los subespacios en un mismo esquema se obtiene el mostrado en la Fig. 8.25.

De aquí en adelante, por simplicidad, se representarán juntos los espacios dual lineal Φ' y dual antilineal Φ^\times para cada caso particular, aún sabiendo que son espacios diferentes.

8.7. Relación entre los RHS a través de transformadas

Una vez determinada la estructura final de cada uno de los espacios de señal y habiendo construido los RHS, resulta interesante estudiar las relaciones entre éstos a través de las transformadas, es decir, dada una función de un espacio $a(\tau) \in \mathcal{F}_K$, estudiar en qué espacio se identificaría su transformada $\alpha(\mu) = \mathbf{T}[a(\tau)]$ según la base $e(\tau; \mu)$. Está claro que, dependiendo de la naturaleza del parámetro μ , el conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$, que podemos considerar como una nueva función, residirá en un espacio o en otro. Si μ es un parámetro discreto, $\alpha(\mu)$ pertenecerá a un espacio de variable discreta, mientras que si μ es un parámetro continuo, $\alpha(\mu)$ pertenecerá a un espacio de variable continua.

Resulta evidente que, para cualquier espacio, si el conjunto de funciones base que se eligen son las deltas desplazadas $e(\tau; \mu) \equiv e(\tau; \tau') = \left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'}$, el conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$ va a pertenecer al mismo espacio que la señal original $a(\tau)$, ya que estos coeficientes no son más que la misma señal expresada en términos de τ' , es decir, $\alpha(\mu) \equiv \alpha(\tau') = a(\tau')$. Recordar que si el espacio escogido es de variable discreta, $\left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'} \equiv \{ \delta(n - n') \}_{n'}$ es un conjunto de deltas de Kronecker, pertenecientes al espacio de Hilbert correspondiente, ya que son de cuadrado sumable, mientras que si el espacio escogido es de variable continua, $\left\{ \tilde{\delta}(\tau - \tau') \right\}_{\tau'} \equiv \{ \delta(x - x') \}_{x'}$ es un conjunto de deltas de Dirac, pertenecientes siempre a los espacios duales,



$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_L^{\infty'}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_T(\mathbb{R}) \\ \mathcal{S}_T(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_L^{\infty \times}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times_T(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Figura 8.25: Representación esquemática de los 3 ejemplos de espacios de Hilbert equipados construidos para el conjunto de funciones de variable continua. A partir del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ se encuentran los subespacios $\mathcal{C}_L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_T(\mathbb{R})$ y, a partir de éstos, se construyen los espacios duales y antiduales $\mathcal{C}_L^{\infty'}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_L^{\infty \times}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}'_T(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times_T(\mathbb{R})$. Aunque se representen en un mismo espacio los espacios duales y antiduales, esto es por sencillez, ya que hay que tener en cuenta que son espacios diferentes.

ya que son distribuciones.

El procedimiento para comprobar a qué espacio pertenecen los coeficientes $\alpha(\mu) = \mathbf{T}[a(\tau)]$ es, primero, identificar la naturaleza del parámetro μ y comprobar si $\alpha(\mu)$ es una función periódica o no. Una vez esto, se localiza $\alpha(\mu)$ en un espacio de señal y comprueba a qué subespacio, Φ , \mathcal{H} o Φ' , Φ^\times pertenece⁷⁸. El análisis general dependerá, evidentemente, de la naturaleza del conjunto de funciones base escogido, es decir, de la transformada empleada para el cálculo de los coeficientes $\alpha(\mu)$. A modo de ejemplo y, dado que es de uso generalizado y es aplicable a los cuatro espacios de señal más conocidos (variable discreta periódica, variable discreta, variable continua periódica y variable continua), se realizará el estudio de la relación entre los espacios de señal para las transformadas más conocidas, utilizadas y analizadas en la bibliografía: la transformada de Fourier, **TF**, la transformada de Hilbert, **TH**, y el desarrollo en serie de Fourier, **DSF**.

Todas las transformadas empleadas en los ejemplos se toman directamente de las tablas de las siguientes referencias o basadas en las propiedades que aparecen en las mismas, [1], [2], [52], [61], [80].

8.7.1. DSF señales periódicas de variable discreta

Se define el desarrollo en serie de Fourier, **DSF**, de una señal periódica de periodo N_0 de variable discreta $x_0(n)$ a través del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ como

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \quad (8.481)$$

donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, siendo N_0 el periodo de la señal.

Como se había probado en la Secc. 8.6.1, todas las funciones periódicas de variable discreta pertenecen al espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$, sin que se requiera la construcción de los RHS en este espacio de señal. Dado que el conjunto de funciones base $e(n; k)$ está enumerado por el parámetro k , que es discreto y varía entre 0 y $N_0 - 1$, parece razonable pensar que los coeficientes $a(k)$ ⁷⁹ también pertenecerán a este espacio. Sólo habría que comprobar la condición para pertenecer a este espacio de Hilbert, que es

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} |a(k)|^2 < \infty, \quad (8.482)$$

⁷⁸Para el análisis de la transformada de una señal es indiferente verla en el espacio Φ' que en el Φ^\times , ya que ambos son espacios duales y las propiedades que los diferencian son la linealidad o la antilinealidad. Por cada elemento de Φ' existe uno y sólo uno de Φ^\times , por lo que para estudiar su transformada basta con considerar tan sólo uno de los dos espacios ya que para el otro se cumplirá igualmente. Por lo general, utilizaremos en espacio Φ' aunque se verá que ocurre lo mismo para el espacio Φ^\times .

⁷⁹Recordar que $a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)]$ son los coeficientes que reconstruyen $x_0(n)$ en la base $\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$.

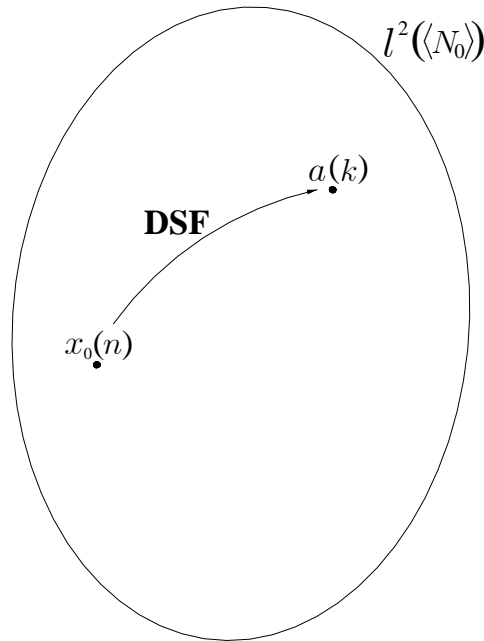


Figura 8.26: Los coeficientes $a(k)$ del **DSF** de una señal $x_0(n)$ periódica de periodo N_0 de variable discreta son también periódicos de variable discreta de periodo N_0 , es decir, pertenecen al mismo espacio que la señal original.

y se demuestra, dado que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N_0-1} |a(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{N_0-1} \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \right) \left(\frac{1}{N_0} \sum_{m \in \langle N_0 \rangle} x_0(m) e^{-jk\Omega_0 m} \right)^* = \\
 &= \frac{1}{N_0^2} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m \in \langle N_0 \rangle} x_0^*(m) \sum_{k=0}^{N_0-1} e^{-jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 m} = \\
 &= \frac{1}{N_0^2} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m \in \langle N_0 \rangle} x_0^*(m) N_0 \delta_0(m-n) = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) x_0^*(n) = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^2 < \infty, \tag{8.483}
 \end{aligned}$$

ya que $x_0(n) \in l^2(\langle N_0 \rangle)$ y, por tanto, es de cuadrado sumable. Se ha hecho uso del resultado (D.105) del Ap. D.15 para el desarrollo del sumatorio en la tercera igualdad.

Hay que reseñar que $a(k)$, aunque k sólo esté definido para N_0 valores, puede considerarse una señal periódica de periodo N_0 sin más que periodificarla a ese valor. Por tanto se demuestra que el **DSF** de una señal periódica de variable discreta es también otra señal periódica de variable discreta, por lo que, considerando el desarrollo en serie de Fourier como un operador, se puede decir que el **DSF** es un **automorfismo**⁸⁰ dentro de $l^2(\langle N_0 \rangle)$. Esta relación se puede representar a través del esquema de la Fig. 8.26.

Ejemplo

⁸⁰Ver definición de automorfismo en el Ap. B.7.

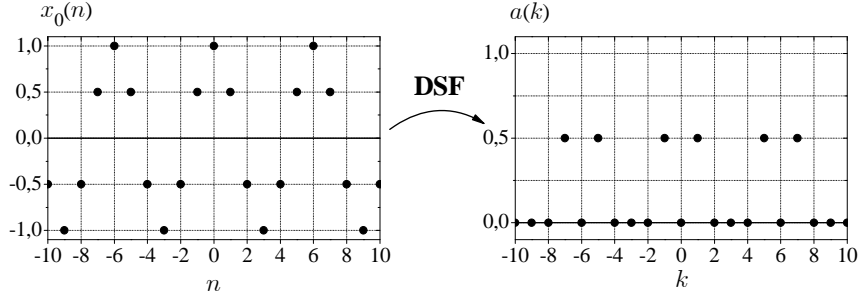


Figura 8.27: Ejemplo de cómo el desarrollo en serie de Fourier $a(k)$ de una función $x_0(n) \in l^2(\langle 6 \rangle)$ también pertenece a $l^2(\langle 6 \rangle)$.

Sea

$$x_0(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) \in l^2(\langle 6 \rangle). \quad (8.484)$$

Se demuestra que es una función de $l^2(\langle 6 \rangle)$ ya que es discreta y periódica de periodo $N_0 = 6$, y toda función discreta y periódica es de cuadrado sumable. Su desarrollo en serie de Fourier es

$$a(k) = \mathbf{DSF}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \pm 6m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0, & k \neq \pm 1 \pm 6m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (8.485)$$

que también es una función de $l^2(\langle 6 \rangle)$, puesto que también es discreta y periódica de periodo 6. Ambas funciones se representan en la Fig. 8.27.

8.7.2. TF señales de variable discreta

Consideremos el espacio de Hilbert equipado para las funciones de variable discreta generado a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, es decir

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (8.486)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}). \quad (8.487)$$

Se define la transformada de Fourier, **TF**, de una señal de variable discreta $x(n)$ a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ como

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}. \quad (8.488)$$

Hay que tener una cierta precaución con la definición de esta transformada, puesto que el conjunto de funciones base $\{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ no son funciones de cuadrado sumable para cada $\Omega \in [0, 2\pi)$, por lo que el cálculo de la transformada de Fourier tiene que ser visto como la aplicación de un conjunto infinito no numerable de funcionales lineales, para cada Ω , sobre la función $x(n)$, definiéndola entonces como

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\Omega : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} \\ x(n) \mapsto X(\Omega). \end{cases} \quad (8.489)$$

Esta definición impone una restricción al cálculo de la transformada de Fourier, permitiéndola sólo para aquellas funciones que sean de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, las cuales su **TF** estará perfectamente definida en todos sus puntos. Sin embargo, también es posible realizar la transformada de Fourier para

aquellas funciones que no pertenezcan a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, pero no se va a poder asegurar que estén definidas en todos sus puntos, pudiendo haber lugares en los que haya discontinuidades o singularidades, como se mostrará en los ejemplos sucesivos.

El conjunto de funciones base $e(n; \Omega)$ están descritos por el parámetro continuo $\Omega \in [0, 2\pi)$, por lo que los coeficientes $X(\Omega)$ no van a pertenecer al espacio de señales de variable discreta, sino al de variable continua y periódicas de periodo 2π ya que, aunque $X(\Omega)$ en principio sólo esté definido para valores entre 0 y 2π , se puede periodificar según este periodo sin que cambien las características de la señal. Ahora bien, es necesario conocer a qué subespacio del espacio de señales periódicas de variable continua, $\mathcal{P}(2\pi)$, $L^2(\langle 2\pi \rangle)$ o $\mathcal{P}'(2\pi)$, $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ ⁸¹ pertenecerá la **TF** de una señal de variable discreta, dependiendo de si esta pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $l^2(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

- Si $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k x(n)|^2 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.490)$$

Sea $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)]$. En primer lugar comprobamos si $X(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle)$, es decir, si es de cuadrado integrable:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega=0}^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega &= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\Omega m} \right)^* d\Omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m) \int_{\Omega=0}^{2\pi} e^{-j\Omega n} e^{j\Omega m} d\Omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m) 2\pi \delta(m-n) = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \end{aligned} \quad (8.491)$$

ya que $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$ y por lo tanto, de cuadrado sumable. Realmente el resultado (8.491) no es más que la identidad de Parseval⁸². En segundo lugar hay que ver si $X(\Omega)$ pertenece a $\mathcal{P}(2\pi)$, es decir, si

$$\int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k} \right|^2 d\Omega < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.492)$$

⁸¹Se demostrará que los subespacios a los que puede pertenecer $X(\Omega)$ son alguno de los subespacios del espacio de Hilbert equipado generado por el subespacio $\mathcal{P}(2\pi)$.

⁸²Ver identidad de Parseval en el Ap. B.10.

Para ello se demuestra que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k} \right|^2 d\Omega &= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \frac{d^k}{d\Omega^k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \right|^2 d\Omega = \\
&= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d^k}{d\Omega^k} e^{-j\Omega n} \right|^2 d\Omega = \\
&= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-jn)^k e^{-j\Omega n} \right|^2 d\Omega = \\
&= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-jn)^k e^{-j\Omega n} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (-jm)^k e^{-j\Omega m} \right)^* d\Omega = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) n^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m) m^k \int_{\Omega=0}^{2\pi} e^{-j\Omega n} e^{j\Omega m} d\Omega = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) n^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m) m^k 2\pi \delta(m-n) = \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) n^k x^*(n) n^k = \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^k x(n) \right|^2 < \infty
\end{aligned} \tag{8.493}$$

porque $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. De esta forma se demuestra que si $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, entonces $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)] \in \mathcal{P}(2\pi)$.

Ejemplo

Sea

$$x_1(n) = \delta(n-2) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}). \tag{8.494}$$

Se demuestra que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^k \delta(n-2) \right|^2 = 2^{2k} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.495}$$

Su transformada de Fourier es

$$X_1(\Omega) = \mathbf{TF}[\delta(n-2)] = e^{-j2\Omega}, \tag{8.496}$$

y que es una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ ya que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| \frac{d^k e^{-j2\Omega}}{d\Omega^k} \right|^2 d\Omega &= \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| (-2j)^k e^{-j2\Omega} \right|^2 d\Omega = \\
&= 2^{2k} \int_{\Omega=0}^{2\pi} d\Omega = \\
&= 2\pi 2^{2k} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned} \tag{8.497}$$

Pueden verse sus representaciones en la Fig. 8.28(a).

- Si $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ pero $x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, por las demostraciones (8.491) y (8.493), se puede asegurar que $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)] \in L^2((2\pi))$ pero $X(\Omega) \notin \mathcal{P}(2\pi)$, ya que, para eso, tendría que ser $x(n)$ una señal perteneciente a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

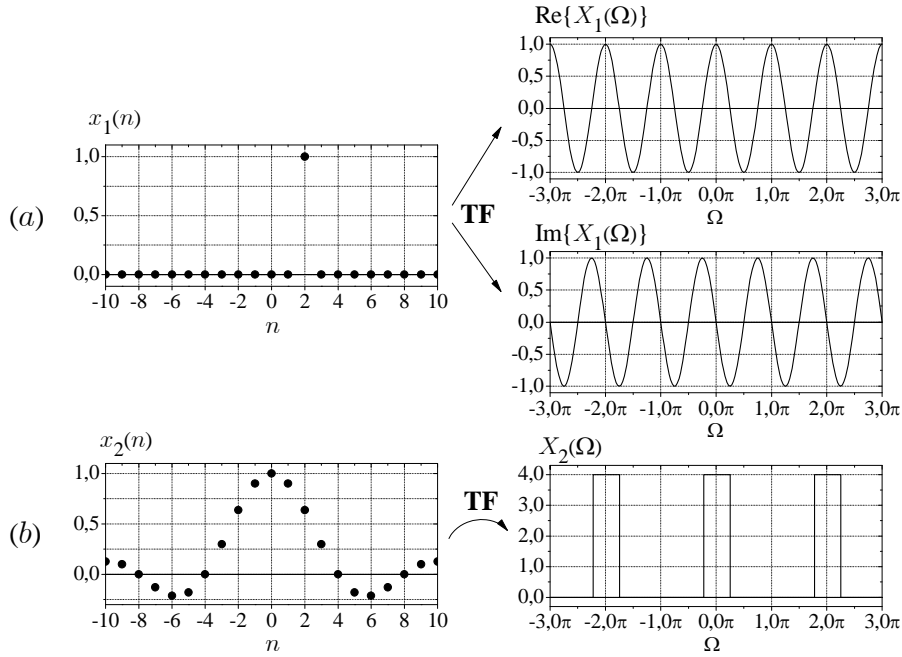


Figura 8.28: Ejemplos de cómo la transformada de Fourier de funciones discretas de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ se localizan en $\mathcal{P}(2\pi)$ mientras que las de $l^2(\mathbb{Z})$ van a parar a $L^2(\langle 2\pi \rangle)$, pero fuera de $\mathcal{P}(2\pi)$.

Ejemplo

Sea

$$x_2(n) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (8.498)$$

que es una función de $l^2(\mathbb{Z})$ ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right|^2 = \mathbf{TF} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right]_{\Omega=0} = 4 T_{0,\Delta}(\Omega)|_{\Omega=0} = 4 < \infty \quad (8.499)$$

pero no es de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ porque

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^k \text{sinc}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\left(\frac{\pi}{4}n\right)^2} = \infty, \quad \forall k \geq 1. \quad (8.500)$$

Su transformada de Fourier es

$$X_2(\Omega) = \mathbf{TF} \left[\text{sinc}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] = 4P_{0,\frac{\pi}{2}}(\Omega), \quad (8.501)$$

que es una función de $L^2(\langle 2\pi \rangle)$ porque

$$\int_{\Omega=0}^{2\pi} \left| 4P_{0,\frac{\pi}{2}}(\Omega) \right|^2 d\Omega = 32\pi < \infty, \quad (8.502)$$

pero no es una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ porque no es continua. Ambas funciones vienen representadas en la Fig. 8.28(b).

- Si $x(n) \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ se tiene que $x(n)$ es el núcleo de un funcional lineal \mathbf{X}

$$\begin{cases} \mathbf{X} : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} \\ u(n) \mapsto \langle u(n), x(n) \rangle \end{cases} \quad (8.503)$$

y además,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \infty \quad (8.504)$$

por no ser una función de $l^2(\mathbb{Z})$.

Sea $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)]$. En este caso estamos hablando de una transformada generalizada, puesto que $x(n)$ no es de cuadrado sumable. Al igual que en los casos anteriores, por la definición de las funciones base de la transformada de Fourier, la señal $X(\Omega)$ será de variable continua y periódica de periodo 2π . Para ver si pertenece al espacio dual $\mathcal{P}'(2\pi)$ hay que comprobarlo a partir de la definición de funcionales lineales aplicados a una función cualquiera $u(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, así

$$\begin{aligned} \langle u(n), x(n) \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) x^*(n) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} U(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega x^*(n) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} U(\Omega) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \right)^* d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} U(\Omega) X^*(\Omega) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle U(\Omega), X(\Omega) \rangle, \end{aligned} \quad (8.505)$$

es decir, que $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)]$ es también núcleo de un funcional lineal pero del espacio $\mathcal{P}'(2\pi)$. La señal $U(\Omega)$ es una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ puesto que, como se ha demostrado anteriormente, al ser $u(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, su transformada pertenece al subespacio $\mathcal{P}(2\pi)$. Es importante remarcar que, según (8.505),

$$X^*(\Omega) = (\mathbf{TF}[x(n)])^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \right)^* = \langle e^{j\Omega n}, x(n) \rangle \quad (8.506)$$

está definido como la acción de un funcional lineal aplicado a cada una de las funciones $e^{j\Omega n}$ que no son de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, o como la aplicación de un conjunto de funcionales antilineales, definidos por cada una de las funciones base $\{e^{j\Omega n}\}_{\Omega}$, aplicados a $x(n)$, por lo que puede ser que $X(\Omega)$ no quede definido para algunos valores de $\Omega \in [0, 2\pi)$, como se verá en los siguientes ejemplos.

La demostración sería idéntica para una función $x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, obteniéndose que $X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)] \in \mathcal{P}^\times(2\pi)$.

Ejemplos

1. Sea

$$x_3(n) = \Gamma(n). \quad (8.507)$$

Está claro que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Gamma(n)|^2 = \infty, \quad (8.508)$$

por lo que $x_3(n) \notin l^2(\mathbb{Z})$. Su transformada de Fourier es

$$X_3(\Omega) = \mathbf{TF}[\Gamma(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi\delta_0(\Omega) \quad (8.509)$$

que claramente no es una función de $L^2(2\pi)$ sino del espacio dual $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ por contener la distribución delta de Dirac.

En la Fig. 8.30(c) se muestran estas dos funciones.

2. Sea

$$x(n) = x_0(n) \quad (8.510)$$

una señal periódica de periodo N_0 . Se demuestra que $x(n) \notin l^2(\mathbb{Z})$ puesto que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n - kN_0) \right|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n - kN_0) \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n - lN_0) \right)^* = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n - kN_0) \tilde{x}^*(n - lN_0) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n - kN_0)|^2 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} |\tilde{x}(n - kN_0)|^2 = \end{aligned} \quad (8.511)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A = \infty, \quad (8.512)$$

donde $\tilde{x}(n)$ es la señal definida a lo largo de un periodo N_0 y que se periodifica, $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n - kN_0)|^2$ es la energía de esa señal, y teniendo en cuenta que $\tilde{x}(n - kN_0) \tilde{x}^*(n - lN_0)$ es sólo distinto de 0 cuando $k = l$, ya que $\tilde{x}(n)$ sólo está definido a lo largo de un periodo de longitud N_0 .

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbf{TF}[x(n)] = \\ &= \mathbf{TF} \left[\sum_{k=0}^{N_0-1} a(k) e^{jk\Omega_0 n} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} a(k) \mathbf{TF} \left[e^{jk\Omega_0 n} \right] = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{N_0-1} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \delta(\Omega - k\Omega_0), \end{aligned} \quad (8.513)$$

con $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$. Es periódica 2π y además pertenece al espacio $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ por estar formada por un tren de deltas de Dirac modulado, siendo $a(k)$ el desarrollo en serie de Fourier de $x_0(n)$ los coeficientes que modulan las deltas de Dirac.

Esto demuestra claramente que el conjunto de funciones periódicas de variable discreta puede ser interpretado dentro de los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ por no ser

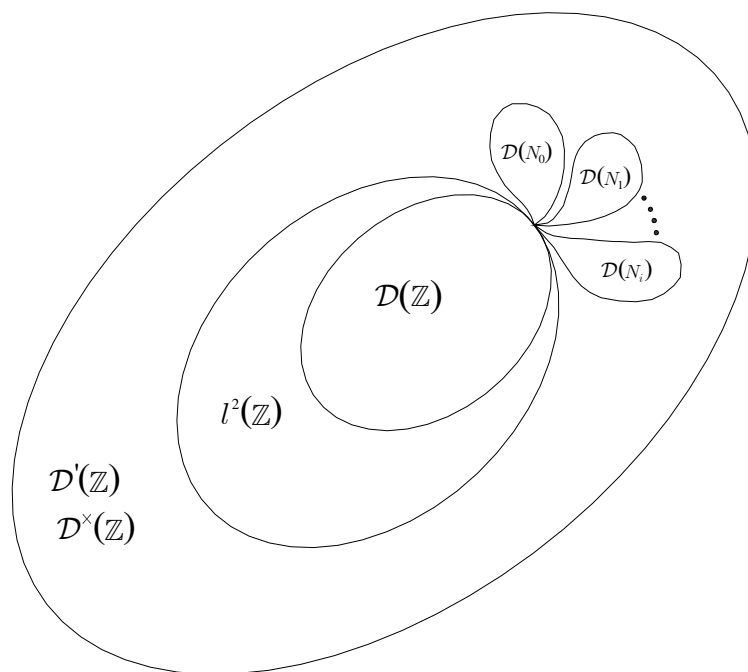


Figura 8.29: El conjunto de las funciones periódicas de variable discreta puede considerarse dentro del conjunto general de funciones de variable discreta localizándolas en los subespacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ ó $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, puesto que no son de cuadrado sumable. Todos los subespacios intersecan en la función $x(n) = 0$.

funciones de cuadrado sumable. Su transformada de Fourier, además, pertenecerá a los espacios duales de funciones periódicas de variable continua $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$, respectivamente, como se ha demostrado. Yendo aún más lejos, el conjunto de las funciones periódicas de periodo N_0 es un subespacio dentro de los espacios duales, puesto que i) la función $x_0(n) = 0$ es periódica de periodo N_0 , ii) la suma de dos funciones periódicas de periodo N_0 es también otra función periódica del mismo periodo y iii) el producto por escalares mantiene la periodicidad. Pero esto se puede repetir para cualquier otro periodo $N_i \in \mathbb{N}$, por lo que hay un número infinito numerable (tantos como números naturales) de subespacios de funciones periódicas de variable discreta dentro de los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. Esto se puede representar en gráficamente en la Fig. 8.29. La transformada de Fourier de estas funciones será siempre un tren de deltas modulado y periódico 2π dentro de los espacios $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$.

El hecho de poder situar el conjunto de funciones periódicas de variable discreta de periodo N_0 dentro de los espacios duales de funciones de variable discreta genera el hecho de poder representar un mismo conjunto de funciones dentro de estructuras de espacio vectorial diferentes. Por un lado, el conjunto de funciones periódicas de periodo N_0 , como se ha visto anteriormente, forma una estructura de espacio de Hilbert perfectamente definida, con el producto escalar visto en la ecuación (8.310) de la Secc. 8.6.1, donde el conjunto de funciones base que definen el desarrollo en serie de Fourier $e(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ son funciones del espacio $l^2(\langle N_0 \rangle)$, mientras que considerando este conjunto dentro del espacio de funciones de variable discreta, pertenecen siempre a los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, de la misma manera que el conjunto de funciones base que definen la transformada de Fourier, $e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ puesto que también son funciones periódicas y, por tanto, no son de cuadrado sumable. De esta manera, un mismo conjunto de funciones se puede considerar dentro de estructuras diferentes y, por tanto, de espacios diferentes. Resulta más generalista

considerar las funciones periódicas como un subconjunto dentro de las funciones de variable discreta, puesto que en este espacio se pueden aglutinar todas las funciones periódicas sean del periodo que sean, mientras que en los espacios de Hilbert definidos sólo para las funciones periódicas, sólo se pueden considerar las que sean de un periodo concreto N_0 , teniendo que definir un espacio de Hilbert diferente para cada conjunto de funciones periódicas de un periodo $N_i \in \mathbb{N}$. La cuestión que se plantea está en que, dado que el conjunto de funciones que se considera es el mismo (funciones periódicas de variable discreta de periodo N_0), ¿qué relación existirá entre la identificación de este conjunto dentro del espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$ con la identificación dentro de los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$?, ya que la estructura de ambos no tiene nada que ver y el conjunto de funciones base escogidas no son ni pueden ser el mismo. La respuesta a esta relación se encuentra en el **Cambio de Base Generalizado (GTC⁸³)**, que se desarrolla en el Cap. 4 y donde se explica detalladamente la relación entre los coeficientes de un conjunto de funciones expresados en una base y los coeficientes de ese mismo conjunto de funciones expresados en otra base, aún cuando estas bases y, por tanto, el conjunto de funciones original, se encuentre en espacios de estructuras diferentes. Estas relaciones se consiguen a partir de dos conjuntos de funciones $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ que permiten relacionar los coeficientes de una señal de una a otra base y viceversa. En este caso, este conjunto de funciones son

$$\varepsilon(\mu'; \mu) \equiv \varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j \frac{N_0-1}{2} (\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2} (\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} (\Omega - k\Omega_0)\right)}, \quad (8.514)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') \equiv \tilde{\varepsilon}(\Omega, k) = 2\pi \delta_0(\Omega - k\Omega_0). \quad (8.515)$$

Este conjunto de funciones no sólo permite relacionar los coeficientes de una señal en una u otra base, sino que, además, la sitúa dentro del espacio de señal correspondiente al de la nueva base. En este caso, si el conjunto de funciones de variable discreta periódicas de periodo N_0 se localizan dentro del espacio $l^2(\langle N_0 \rangle)$, sus coeficientes van a pertenecer al mismo espacio, mientras que si se localizan dentro de los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, sus coeficientes vivirán en los espacios duales $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ respectivamente.

El desarrollo general sobre los cambios de base se puede seguir en el Cap. 4.

Ejemplos

a) Sea

$$x_4(n) = \cos(\pi n) \quad (8.516)$$

una señal periódica de periodo $N_4 = 2$. Su transformada de Fourier es

$$X_4(\Omega) = \mathbf{TF}[\cos(\pi n)] = \pi \delta_0(\Omega - \pi) + \pi \delta_0(\Omega + \pi), \quad (8.517)$$

periódica de periodo 2π , que claramente pertenece a $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ por contener deltas de Dirac, como puede verse en la Fig. 8.30(d).

b) Sea el tren de deltas de Kronecker

$$x_5(n) = \delta_0(n) \quad (8.518)$$

con un periodo $N_5 = 3$. Su transformada de Fourier es otro tren de deltas, pero esta vez de Dirac,

$$X_5(\Omega) = \frac{2\pi}{N_5} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_5) \quad (8.519)$$

⁸³Generalized Transform Change

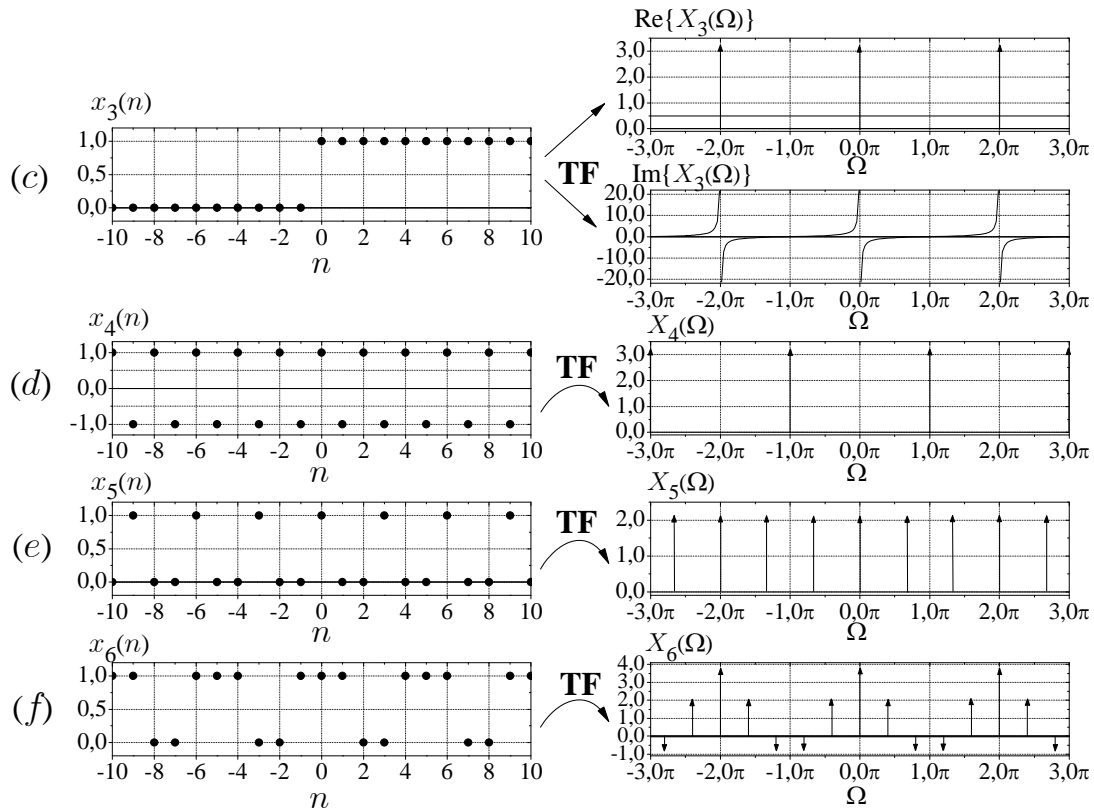


Figura 8.30: Ejemplos de cómo la transformada de Fourier de funciones discretas de $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ (ó $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$) se localizan en $\mathcal{P}'(2\pi)$ (ó $\mathcal{P}^\times(2\pi)$).

con $N_5 = 3$ y $\Omega_5 = \frac{2\pi}{N_5} = \frac{2\pi}{3}$, que nuevamente es fácil ver que es una función de los espacios duales por contener deltas de Dirac, como representa la Fig. 8.30(e).

c) Sea el tren de pulsos discreto

$$x_6(n) = P_{0,3}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_3(n - 5k) \quad (8.520)$$

de anchura $2N + 1 = 3$ y periodo $N_6 = 5$. Su transformada de Fourier es

$$X_6(\Omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_6} \frac{\sin(m\Omega_6(N + \frac{1}{2}))}{\sin(m\frac{\Omega_6}{2})} \delta(\Omega - m\Omega_6) \quad (8.521)$$

siendo $N = 1$ y $\Omega_6 = \frac{2\pi}{N_6} = \frac{2\pi}{5}$. Al contener deltas de Dirac se prueba que pertenece a los espacios duales de las funciones periódicas de variable continua de periodo 2π , $\mathcal{P}'(2\pi)$ o $\mathcal{P}^\times(2\pi)$. Pueden visualizarse en la Fig. 8.30(f).

Resumiendo, la transformada de Fourier de señales de variable discreta, **TF**, relaciona los siguientes subespacios:

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(2\pi), \quad (8.522)$$

$$l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\langle 2\pi \rangle), \quad (8.523)$$

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}'(2\pi), \quad (8.524)$$

$$\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}^\times(2\pi), \quad (8.525)$$

representándolo esquemáticamente como se muestra en la Fig. 8.31.

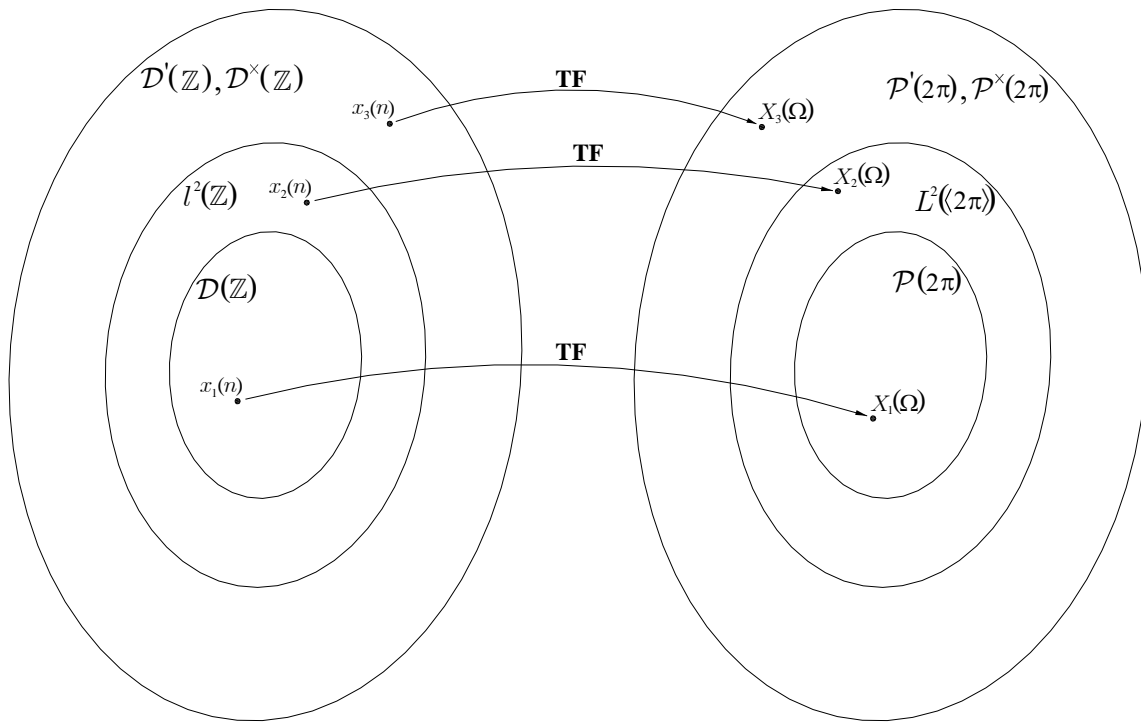


Figura 8.31: Los coeficientes $X(\Omega)$ de la **TF** de señales de variable discreta $x(n)$ pertenecen al espacio de funciones periódicas de variable continua de periodo 2π . Los coeficientes también respetan el subespacio original al que pertenece la señal que representan, localizándose en el subespacio análogo al de la función original, dentro del conjunto de las funciones periódicas de periodo 2π .

8.7.3. DSF señales periódicas de variable continua

Consideremos el espacio de Hilbert equipado para las funciones periódicas de variable continua generado por el subespacio $\Phi = \mathcal{P}(X_0)$, es decir,

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(X_0), \quad (8.526)$$

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(X_0). \quad (8.527)$$

Se define el **desarrollo en serie de Fourier, DSF**, de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua $f_0(x)$ a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m \subset \mathcal{P}(X_0)$ como

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (8.528)$$

El conjunto de funciones base $e(x; m)$ es un conjunto descrito por el parámetro discreto $m \in \mathbb{Z}$, por lo que el conjunto de coeficientes, considerados como una nueva señal, pertenecerá al espacio de funciones de variable discreta. Para conocer a qué subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $l^2(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ ⁸⁴ pertenecerá $a(m)$, hay que analizar sus propiedades a partir del subespacio $\mathcal{P}(X_0)$, $L^2(\langle X_0 \rangle)$ o $\mathcal{P}'(X_0)$, $\mathcal{P}^\times(X_0)$ al que pertenezca la señal original $f_0(x)$.

- Si $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ entonces

$$\int_{x \in \langle X_0 \rangle} \left| \frac{d^k f_0(x)}{dx^k} \right|^2 dx < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.529)$$

⁸⁴Se demostrará que los subespacios a los que puede pertenecer $a(m)$ son alguno de los subespacios del espacio de Hilbert equipado generado por el subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Sea $a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)]$. Para ver a qué espacio pertenece, primero comprobamos si es de cuadrado sumable, así

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a(m)|^2 = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \right) \left(\frac{1}{X_0} \int_{y \in \langle X_0 \rangle} f_0(y) e^{-jm\xi_0 y} dy \right)^* = \\
&= \frac{1}{X_0^2} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \int_{y \in \langle X_0 \rangle} f_0^*(y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\xi_0 x} e^{jm\xi_0 y} dy dx = \\
&= \frac{1}{X_0^2} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \int_{y \in \langle X_0 \rangle} f_0^*(y) X_0 \delta_0(y-x) dy dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) f_0^*(x) dx = \\
&= \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^2 dx < \infty \tag{8.530}
\end{aligned}$$

ya que $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle)$ y, por tanto, es de cuadrado integrable a lo largo de un periodo de longitud X_0 y donde se ha utilizado el resultado del Ap. D.6 para resolver la suma infinita. Esta relación se corresponde con la identidad de Parseval. El siguiente paso para comprobar si $a(m) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ es estudiar si se cumple que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m^k a(m)|^2 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.531}$$

Para ello se comprueba que

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m^k a(m)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| m^k \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \right|^2 = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) m^k e^{-jm\xi_0 x} dx \right|^2 = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{1}{(-j\xi_0)^k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-jm\xi_0 x} dx \right|^2 = \\
&= \frac{1}{X_0^2 \xi_0^{2k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{d^k}{dx^k} e^{-jm\xi_0 x} dx \right) \left(\int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f_0(x') \frac{d^k}{dx'^k} e^{-jm\xi_0 x'} dx' \right)^* = \\
&= \frac{1}{X_0^2 \xi_0^{2k}} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{d^k}{dx^k} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f_0^*(x') \frac{d^k}{dx'^k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\xi_0 x} e^{jm\xi_0 x'} dx' dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{X_0^2 \xi_0^{2k}} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{d^k}{dx^k} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} f_0^*(x') \frac{d^k}{dx'^k} X_0 \delta_0(x' - x) dx' dx = \\
&= \frac{1}{X_0 \xi_0^{2k}} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{d^k}{dx^k} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} (-1)^k \frac{d^k}{dx'^k} f_0^*(x') \delta_0(x' - x) dx' dx = \\
&= \frac{1}{X_0 \xi_0^{2k}} (-1)^k \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \frac{d^k}{dx'^k} f_0^*(x') \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) \frac{d^k}{dx^k} \delta_0(x' - x) dx dx' = \\
&= \frac{1}{X_0 \xi_0^{2k}} (-1)^k \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \frac{d^k}{dx'^k} f_0^*(x') \int_{x \in \langle X_0 \rangle} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_0(x) \delta_0(x' - x) dx dx' = \\
&= \frac{1}{X_0 \xi_0^{2k}} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \frac{d^k}{dx'^k} f_0^*(x') \frac{d^k}{dx'^k} f_0(x') dx' = \\
&= \frac{1}{X_0} \frac{1}{\xi_0^{2k}} \int_{x' \in \langle X_0 \rangle} \left| \frac{d^k}{dx'^k} f_0(x') \right|^2 dx' < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \tag{8.532}
\end{aligned}$$

puesto que $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ y donde se ha utilizado por dos veces la siguiente propiedad de las distribuciones:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}^n \rangle = (-1)^n \langle \varphi^n, \mathbf{T} \rangle \tag{8.533}$$

donde \mathbf{T} representa un funcional lineal y que, en este caso, se corresponde con la distribución tren de deltas de Dirac $\delta_0(x' - x)$. Ver Apdo. B.17.4. Por tanto se demuestra que si $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$, entonces $a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Ejemplo

Sea

$$f_{01}(x) = e^{j\xi_0 x} \in \mathcal{P}(X_0). \tag{8.534}$$

Se comprueba que

$$\begin{aligned}
\int_{x \in \langle X_0 \rangle} \left| \frac{d^k}{dx^k} e^{j\xi_0 x} \right|^2 dx &= \int_{x \in \langle X_0 \rangle} \left| (j\xi_0)^k e^{j\xi_0 x} \right|^2 dx = \\
&= \xi_0^{2k} X_0 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.535}
\end{aligned}$$

Su desarrollo en serie de Fourier es

$$a_1(m) = \mathbf{DSF} \left[e^{j\xi_0 x} \right] = \delta(n-1), \tag{8.536}$$

donde se comprueba que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| m^k \delta(m-1) \right|^2 = 1 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{8.537}$$

por lo que $a_1(m) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. En la Fig. 8.32(a) pueden verse ambas funciones con un periodo $X_0 = 2$.

- Si $f_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle)$ pero $f_0(x) \notin \mathcal{P}(X_0)$, por las demostraciones (8.530) y (8.532) se prueba que $a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] \in l^2(\mathbb{Z})$ por ser $f_0(x)$ de cuadrado integrable, pero $a(m) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ porque para que lo fuera, $f_0(x)$ tendría que ser una función del subespacio $\mathcal{P}(X_0)$, pero no lo es.

Ejemplo

Sea

$$f_{02}(x) = P_{0,1}(x) \in L^2(\langle 2 \rangle) \tag{8.538}$$

un tren de pulsos de periodo $X_0 = 2$ y de ancho $\Delta = 1$. Está claro que es una función de cuadrado integrable en un periodo pero no es de $\mathcal{P}(2)$ porque no es derivable. Su desarrollo en serie de Fourier es

$$a_2(m) = \mathbf{DSF}[P_{0,1}(x)] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}m\right). \quad (8.539)$$

Se comprueba que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}m\right) \right|^2 = \frac{1}{4} \mathbf{TF}\left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2}m\right)\right]_{x=0} = \frac{1}{4} 2 T_{0,1}(x)|_{x=0} = \frac{1}{2} < \infty, \quad (8.540)$$

pero

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| m^k \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}m\right) \right|^2 = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^{2k} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}m\right)}{\left(\frac{\pi}{2}m\right)^2} = \infty, \quad \forall k \geq 1 \quad (8.541)$$

por lo que se demuestra que $a_2(m) \in l^2(\mathbb{Z})$, pero $a_2(m) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. En la Fig. 8.32(b) se representan estas dos funciones.

- Si $f_0(x) \in \mathcal{P}'(X_0)$ entonces $f_0(x)$ es el núcleo de un funcional lineal \mathbf{F}_0 , así

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0 : \mathcal{P}(X_0) \rightarrow \mathbb{C} \\ u_0(x) \mapsto \langle u_0(x), f_0(x) \rangle. \end{array} \right. \quad (8.542)$$

Sea $a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)]$. En este caso, el desarrollo en serie de Fourier será un desarrollo generalizado, puesto que $f_0(x) \notin L^2(\langle X_0 \rangle)$. Para comprobar si $a(m)$ es también un funcional lineal del espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, se sigue la demostración siguiente:

$$\begin{aligned} \langle u_0(x), f_0(x) \rangle &= \int_{x \in \langle X_0 \rangle} u_0(x) f_0^*(x) dx = \\ &= \int_{x \in \langle X_0 \rangle} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) e^{jm\xi_0 x} f_0^*(x) dx = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) \left(\int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \right)^* = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) X_0 a^*(m) = \\ &= X_0 \langle p(m), a(m) \rangle, \end{aligned} \quad (8.543)$$

por lo que $a(m)$ es también núcleo de un funcional lineal de $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, siendo $u_0(x)$ cualquier función de $\mathcal{P}(X_0)$. La función $p(m)$ existe y está definida en $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ya que, como se había demostrado anteriormente, si $u_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$, su desarrollo en serie de Fourier existirá y estará definido en $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Una aclaración importante es que el símbolo de la integral en (8.543) no se corresponde, en este caso, con una integral de Riemann o de Lebesgue, ya que estamos hablando de funcionales, por lo que el símbolo de la integral representa la aplicación que de $u_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$ obtiene un número complejo. Esta interpretación se mantiene a lo largo de toda la demostración y es la utilizada para definir el desarrollo de serie de Fourier generalizado, ya que la expresión

$$a^*(m) = (\mathbf{DSF}[f_0(x)])^* = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} e^{jm\xi_0 x} f_0^*(x) dx = X_0 \langle e^{jm\xi_0 x}, f_0(x) \rangle \quad (8.544)$$

no es más que el funcional lineal definido por $f_0(x)$ aplicado sobre cada uno de los elementos de la base $\{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ para obtener cada uno de los números complejos $a^*(m)$. Además, dado que cada una de las funciones base $e^{jm\xi_0 x}$ son funciones de $\mathcal{P}(X_0)$, se puede asegurar que $a(m)$ está definido para todo $m \in \mathbb{Z}$, y como $a(m) \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, también es cierto que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a(m)|^2 = \infty. \quad (8.545)$$

Para el caso de que $f_0(x) \in \mathcal{P}^\times(X_0)$, la demostración sería equivalente, obteniéndose que $a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ y definiéndose el desarrollo en serie de Fourier generalizado como

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = X_0 \langle f_0(x), e^{jm\xi_0 x} \rangle = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (8.546)$$

Ejemplo

Sea

$$f_{03}(x) = \delta'_0(x), \quad X_0 = 1. \quad (8.547)$$

Está claro que es una función de $\mathcal{P}'(1)$ (o de $\mathcal{P}^\times(1)$ según cómo se considere) puesto que es una distribución. Su desarrollo en serie de Fourier es

$$a_3(m) = \mathbf{DSF}[\delta'_0(x)] = jm\xi_0 \mathbf{DSF}[\delta_0(x)] = jm\xi_0 \frac{1}{X_0} = j2\pi m. \quad (8.548)$$

También es fácil comprobar que $a_3(m) \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ (o $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ respectivamente) ya que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |j2\pi m|^2 = 4\pi^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 = \infty. \quad (8.549)$$

En la Fig. 8.32(c) aparecen estas dos funciones, representando sólo la parte imaginaria de $a_3(m)$ puesto que su parte real es nula.

Finalmente, el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas de variable continua relaciona los siguientes espacios:

$$\mathcal{P}(X_0) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}), \quad (8.550)$$

$$L^2(\langle X_0 \rangle) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}), \quad (8.551)$$

$$\mathcal{P}'(2\pi) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (8.552)$$

$$\mathcal{P}^\times(2\pi) \rightarrow \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \quad (8.553)$$

que se representan gráficamente en el esquema de la Fig. 8.33.

8.7.4. TH señales de variable continua

Consideremos el espacio de Hilbert equipado para el conjunto de funciones de variable continua construido a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}), \quad (8.554)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}). \quad (8.555)$$

Se define la transformada de Hilbert, **TH**, de señales $f(x)$ de variable continua a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$ como

$$F(x') = \mathbf{TH}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx. \quad (8.556)$$

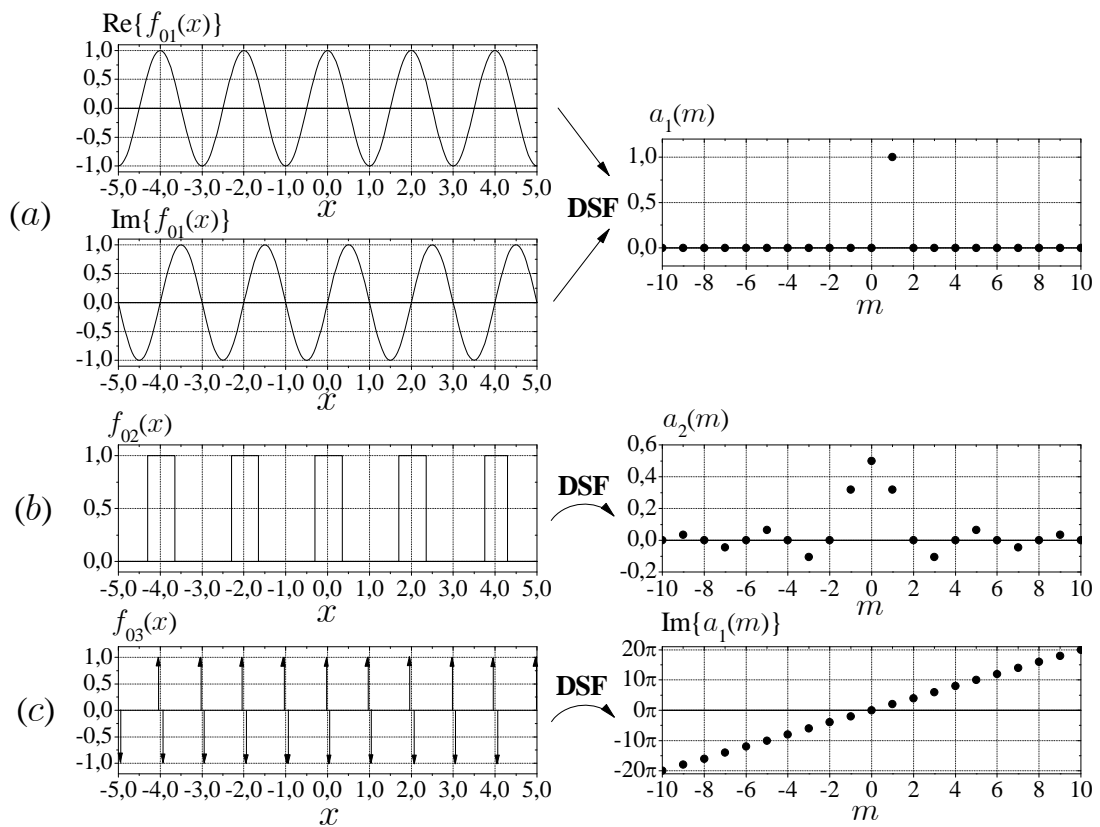


Figura 8.32: Ejemplos de cómo el desarrollo en serie de Fourier de funciones periódicas de $\mathcal{P}(X_0)$ se localizan en $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, los desarrollos de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ en $l^2(\mathbb{Z})$ y los de $\mathcal{P}'(X_0)$ (ó $\mathcal{P}^\times(X_0)$) se localizan en $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ (ó $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$) .

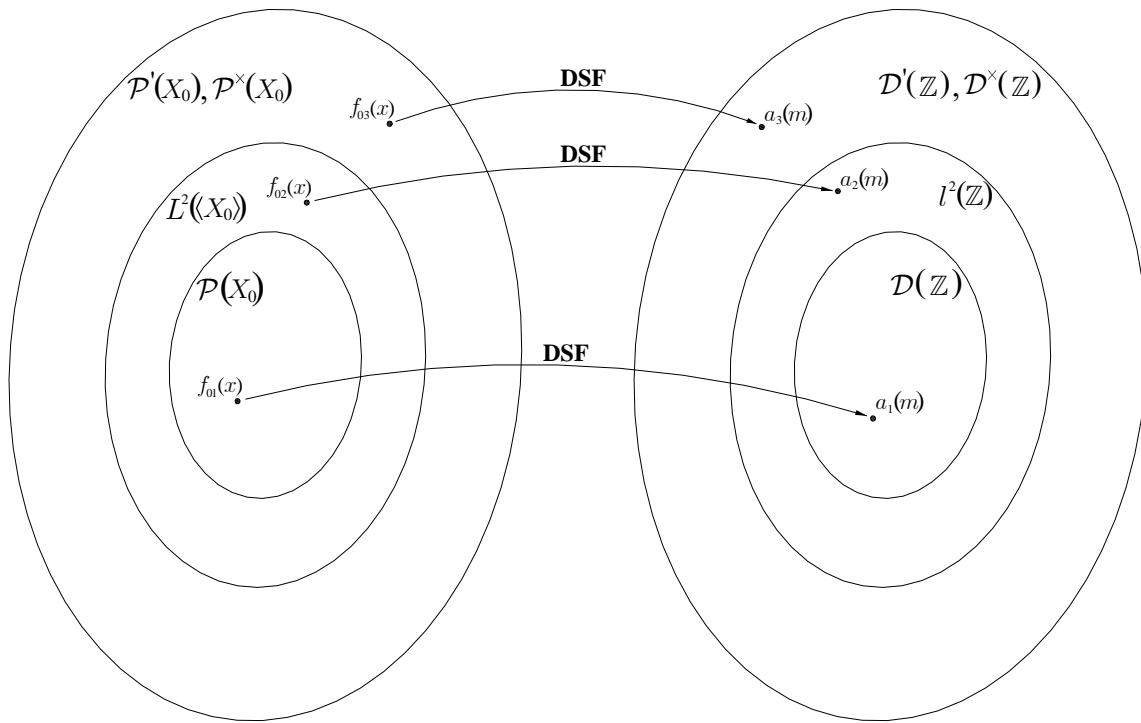


Figura 8.33: Los coeficientes $a(m)$ del **DSF** de señales periódicas de variable continua $f_0(x)$ de cualquier periodo pertenecen al espacio de funciones de variable discreta. Los coeficientes también respetan el subespacio original al que pertenece la señal que representan, localizándose en el subespacio análogo al de la función original, dentro del conjunto de las funciones de variable discreta.

Según esta definición, la transformada de Hilbert no puede ser vista como una integral de Riemann o de Lebesgue, ya que cada una de las funciones del conjunto $\left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$ no es de cuadrado integrable, por lo que tiene que ser interpretada desde el punto de vista de funcionales lineales, así, para cada $x' \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{cases} \mathbf{HB}_{x'} : \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) \mapsto F(x'). \end{cases} \quad (8.557)$$

Aunque según esta definición parezca que sólo se puede realizar la transformada de Hilbert a funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, lo cierto es que se puede extender, de forma generalizada, a otro tipo de funciones, aunque únicamente se puede asegurar la perfecta definición de $F(x')$ en todos sus puntos cuando $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

El conjunto de funciones base $e(x; x')$ es un conjunto descrito por el parámetro $x' \in \mathbb{R}$, por lo que el conjunto de coeficientes⁸⁵ $F(x')$, visto como una señal, pertenecerá también al conjunto de funciones de variable continua. Habrá que determinar a qué subespacio $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ ⁸⁶ pertenecerá $F(x')$ dependiendo de cuál sea al que pertenezca $f(x)$.

- Si $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, entonces se cumple que⁸⁷

$$\int_x \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|^2 dx < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.559)$$

⁸⁵ Recordar que $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$ son los coeficientes que reconstruyen $f(x)$ en la base $\left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'}$.

⁸⁶ Se demostrará que los subespacios a los que puede pertenecer $F(x')$ son los mismos que a los que pertenece $f(x)$.

⁸⁷ Para aliviar la notación, se indicará en las sucesivas integrales únicamente la variable de integración, sabiendo

Sea $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$. Comprobamos si esta señal es de cuadrado integrable,

$$\begin{aligned}
\int_{x'} |F(x')|^2 dx' &= \int_{x'} \left(\int_x \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx \right) \left(\int_y \frac{f(y)}{\pi(y-x')} dy \right)^* dx' = \\
&= \int_x f(x) \int_y f^*(y) \int_{x'} \frac{1}{\pi(x-x')} \frac{1}{\pi(y-x')} dx' dy dx = \\
&= \int_x f(x) \int_y f^*(y) \delta(x-y) dy dx = \\
&= \int_x f(x) f^*(x) dx = \\
&= \int_x |f(x)|^2 dx < \infty
\end{aligned} \tag{8.560}$$

ya que $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. La demostración (8.560) no es más que la relación de Parseval del espacio de funciones de variable continua bajo la transformada de Hilbert.

El siguiente paso es comprobar si $F(x') \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, al igual que $f(x)$. Hay que comprobar, para ello, si

$$\int_{x'} \left| \frac{d^n}{dx'^n} F(x') \right|^2 dx' < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{8.561}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{x'} \left| \frac{d^n}{dx'^n} F(x') \right|^2 dx' &= \int_{x'} \left| \frac{d^n}{dx'^n} \int_x \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx \right|^2 dx' = \\
&= \int_{x'} \left| \int_x f(x) \frac{d^n}{dx'^n} \frac{1}{\pi(x-x')} dx \right|^2 dx' = \\
&= \int_{x'} \left| \int_x f(x) (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\pi(x-x')} dx \right|^2 dx' = \\
&= \int_{x'} \left(\int_x f(x) \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\pi(x-x')} dx \right) \left(\int_y f(y) \frac{d^n}{dy^n} \frac{1}{\pi(y-x')} dy \right)^* dx' = \\
&= \int_x f(x) \frac{d^n}{dx^n} \int_y f^*(y) \frac{d^n}{dy^n} \int_{x'} \frac{1}{\pi(x-x')} \frac{1}{\pi(y-x')} dx' dy dx = \\
&= \int_x f(x) \frac{d^n}{dx^n} \int_y f^*(y) \frac{d^n}{dy^n} \delta(x-y) dy dx = \\
&= \int_x f(x) \frac{d^n}{dx^n} \int_y (-1)^n \frac{d^n}{dy^n} f^*(y) \delta(x-y) dy dx = \\
&= (-1)^n \int_y \frac{d^n}{dy^n} f^*(y) \int_x f(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x-y) dx dy = \\
&= (-1)^n \int_y \frac{d^n}{dy^n} f^*(y) \int_x (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) \delta(x-y) dx dy = \\
&= \int_y \frac{d^n}{dy^n} f^*(y) \frac{d^n}{dy^n} f(y) dy = \\
&= \int_y \left| \frac{d^n}{dy^n} f(y) \right|^2 dy < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{8.562}$$

que todas ellas, salvo que se indique lo contrario, están definidas para todo \mathbb{R} , es decir,

$$\int_x \equiv PV \int_{x=-\infty}^{\infty}, \tag{8.558}$$

donde PV indica el valor principal de la integral.

puesto que $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ y donde se ha utilizado la igualdad

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\pi(x-x')} = \frac{n!}{\pi(x-x')^{n+1}} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\pi(x-x')} \quad (8.563)$$

y, en dos ocasiones, la propiedad de las distribuciones:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}^k \rangle = (-1)^k \langle \varphi^k, \mathbf{T} \rangle \quad (8.564)$$

donde \mathbf{T} representa un funcional lineal y que, en este caso, se corresponde con la distribución delta de Dirac $\delta(x-y)$. Ver Apdo. B.17.4. Por tanto se demuestra que si $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, entonces también $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)] \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo

Sea una función sinc

$$f_1(x) = \text{sinc}(ax), \quad (8.565)$$

que es una función de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ puesto que

$$f_1(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f_1^n(x)| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.566)$$

Su transformada de Hilbert es

$$F_1(x') = \mathbf{TH}[\text{sinc}(ax)] = \frac{\cos(ax') - 1}{ax'} \quad (8.567)$$

que también es una función de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ ya que, al igual que $f_1(x) = \text{sinc}(ax)$,

$$F_1(x') \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x'| \rightarrow \infty} |F_1^n(x')| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (8.568)$$

Ambas funciones pueden verse, para un valor de $a = 5$, en la Fig. 8.34(a).

- Si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ pero $f(x) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, por las demostraciones (8.560) y (8.562) se prueba directamente que $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)] \in L^2(\mathbb{R})$ pero no es de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ ya, para eso, $f(x)$ tendría que ser también de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo

Sea una función pulso

$$f_2(x) = P_2(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (8.569)$$

que es una función de cuadrado integrable ya que

$$\int_x |P_2(x)|^2 dx = \int_{x=-1}^1 dx = 2 < \infty, \quad (8.570)$$

pero no de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ ya que es discontinua. Su transformada de Hilbert es

$$F_2(x') = \mathbf{TH}[P_2(x)] = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{x'-1}{x'+1} \right| \quad (8.571)$$

que también es de cuadrado integrable puesto que, de [124],

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{x'-1}{x'+1} \right| \right|^2 dx' = 2 \int_{x'=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{x'-1}{x'+1} \right| \right|^2 dx' = 2, \quad (8.572)$$

pero no es de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ ya que no es derivable en $x' = \pm 1$. La representación de estas dos señales puede visualizarse en la Fig. 8.34(b).

- Si $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$, entonces $f(x)$ es el núcleo de un funcional lineal \mathbf{F} representado como

$$\begin{cases} \mathbf{F} : \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ u(x) \mapsto \langle u(x), f(x) \rangle. \end{cases} \quad (8.573)$$

Sea $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$ que estará descrita como una transformada generalizada ya que $f(x) \notin \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$. Se comprueba que $F(x')$ es también el núcleo de un funcional lineal de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ a partir de las propiedades de éstos. Sea entonces

$$\begin{aligned} \langle u(x), f(x) \rangle &= \int_x u(x) f^*(x) dx = \\ &= \int_x \int_{x'} \frac{U(x')}{\pi(x-x')} dx' f^*(x) dx = \\ &= \int_{x'} U(x') \left(\int_x \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx \right)^* dx' = \\ &= \int_{x'} U(x') F^*(x') dx' = \\ &= \langle U(x'), F(x') \rangle \end{aligned} \quad (8.574)$$

siendo $u(x)$ una función cualquiera de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ que, por tanto, tiene su transformada de Hilbert $U(x')$ bien definida y que, además, debido a la demostración (8.562), es también otra función de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, por lo que se demuestra que $F(x')$ es también el núcleo de un funcional lineal de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$.

Conviene recordar que el signo de la integral de (8.574) no puede ser interpretado como una integral de Riemann ni de Lebesgue sino como un funcional que, aplicado a $u(x)$, devuelve un número complejo.

De la expresión (8.574) se puede extraer que

$$F^*(x') = (\mathbf{TH}[f(x)])^* = \int_x \frac{f^*(x)}{\pi(x-x')} dx = \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, f(x) \right\rangle = \mathbf{F} \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right] \quad (8.575)$$

donde $f(x)$ representa el núcleo del funcional lineal \mathbf{F} . Sin embargo, dicho funcional está siendo aplicado a funciones que no son de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, en este caso $\frac{1}{\pi(x-x')}$ para cada $x' \in \mathbb{R}$, lo cual no cumple estrictamente la definición de funcional lineal puesto que sólo se debería aplicar a funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, pero se considera una definición generalizada de la transformada de Hilbert, sabiendo que, en muchos casos, el resultado no va a estar bien definido en todos sus puntos ya que, como se ha demostrado en (8.574), el resultado será también el núcleo de otro funcional, que se puede corresponder con una distribución o una función no definida en todos sus puntos.

Igualmente, se puede definir la transformada de Hilbert generalizada a partir de (8.557), siendo $\frac{1}{\pi(x-x')}$, para cada $x' \in \mathbb{R}$ el núcleo del funcional lineal que se aplica sobre $f(x)$, así

$$F(x') = \int_x \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx = \left\langle f(x), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \mathbf{HB}_{x'}[f(x)], \quad (8.576)$$

cuyo resultado, $F(x')$, nuevamente sería núcleo de otro funcional.

Esto nos lleva al caso de considerar $f(x) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$. Según un procedimiento análogo, se obtiene que $F(x') = \mathbf{TH}[f(x)] \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ y se define la transformada de Hilbert generalizada a partir de $f(x)$ como núcleo de un funcional antilineal $\tilde{\mathbf{F}}$ como

$$F(x') = \mathbf{TH}[f(x)] = \int_x \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx = \left\langle f(x), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \tilde{\mathbf{F}} \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right]. \quad (8.577)$$

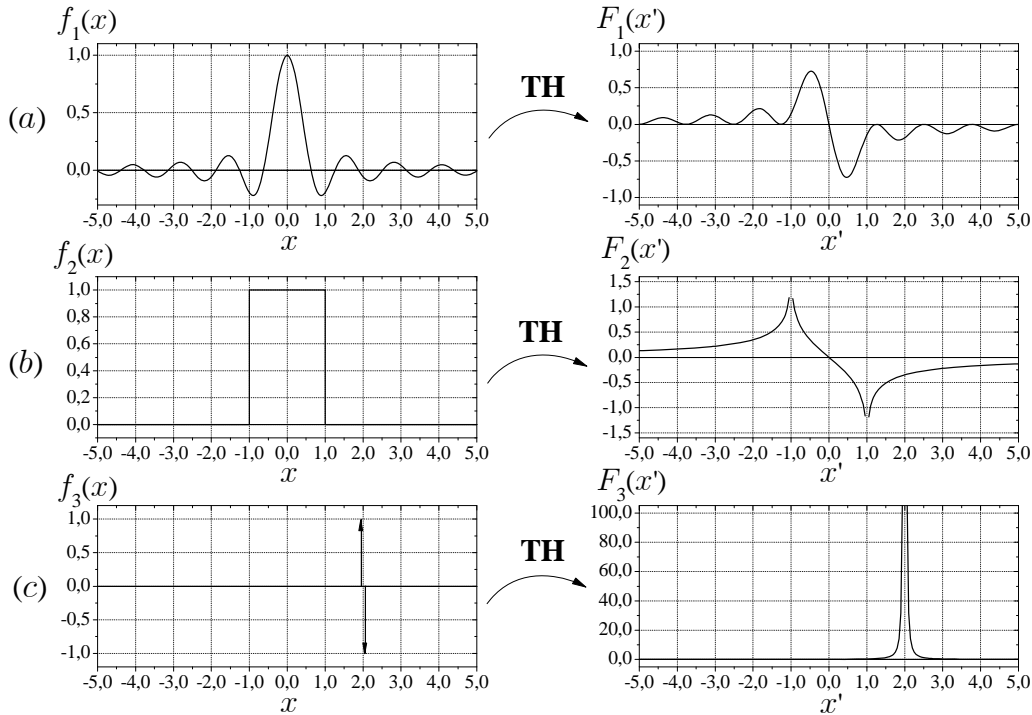


Figura 8.34: Ejemplos de cómo la transformada de Hilbert de funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ se localizan en el propio $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, la transformada de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ caen también en $L^2(\mathbb{R})$ y la de funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}$ (ó $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}$ (\mathbb{R})) se localizan también en $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}$ (ó $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}$ (\mathbb{R})).

Comparando (8.576) con (8.577) se llega a la conclusión de que es indiferente considerar la transformada de Hilbert de funciones $f(x)$ que estén fuera del espacio $L^2(\mathbb{R})$ como el resultado de un conjunto de funcionales lineales cuyos núcleos son cada una de las funciones base de la transformada de Hilbert, $\frac{1}{\pi(x-x')}$ para cada $x' \in \mathbb{R}$, sobre la función $f(x)$, que considerar $f(x)$ como el núcleo de un funcional antilineal que se aplica sobre cada una de las funciones $\frac{1}{\pi(x-x')}$ para cada $x' \in \mathbb{R}$. Resulta más natural la primera interpretación puesto que, como se ha visto en (8.557), es más general y se puede aplicar tanto a funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ como de $L^2(\mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo

Sea la distribución derivada de delta localizada en $x = a$,

$$f_3(x) = \delta'(x - a) \quad (8.578)$$

que, obviamente, no es de $L^2(\mathbb{R})$. Su transformada de Hilbert es

$$F_3(x') = \mathbf{TH} [\delta'(x - a)] = \int_x \frac{\delta'(x - a)}{\pi(x - x')} dx = \frac{1}{\pi(a - x')^2} \quad (8.579)$$

que tampoco es de cuadrado integrable puesto que

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi(a - x')^2} \right|^2 dx' = \frac{1}{\pi^2} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a - x')^4} dx' = \infty. \quad (8.580)$$

La Fig. 8.34(c) muestra la representación de $f_3(x)$ y $F_3(x')$ para un valor de $a = 2$.

La expresión (8.579) puede ser interpretada de dos maneras:

- a) $\delta'(x-a)$ se corresponde con el núcleo de un funcional antilineal que se aplica sobre cada una de las funciones base $\frac{1}{\pi(x-x')}$ para cada $x' \in \mathbb{R}$, pudiendo condicionar la función resultado $F_3(x')$ como núcleo de otro funcional antilineal, así

$$F_3(x') = \tilde{\mathbf{D}}' \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right] = \left\langle \delta'(x-a), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_x \frac{\delta'(x-a)}{\pi(x-x')} dx. \quad (8.581)$$

- b) Cada una de las funciones $\frac{1}{\pi(x-x')}$ para cada $x' \in \mathbb{R}$ es núcleo del funcional lineal que define la transformada de Hilbert en cada punto, y es aplicado sobre $f_3(x) = \delta'(x-a)$, obteniéndose como resultado $F_3(x')$ que puede ser interpretado como el núcleo de otro funcional lineal según se ha visto en (8.574), así

$$F_3(x') = \mathbf{HB}_{x'} [\delta'(x-a)] = \left\langle \delta'(x-a), \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_x \frac{\delta'(x-a)}{\pi(x-x')} dx. \quad (8.582)$$

Finalmente se concluye que la transformada de Hilbert, \mathbf{TH} , relaciona los siguientes espacios

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}), \quad (8.583)$$

$$L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (8.584)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}'^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_{L^2}'^\infty(\mathbb{R}), \quad (8.585)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}), \quad (8.586)$$

por lo que la transformada de Hilbert, considerada como un operador, es un **automorfismo** dentro de cada uno de los subespacios anteriormente considerados del espacio de funciones de variable continua, ya que convierte funciones de un subespacio en otras de ese mismo subespacio. Esta relación se puede representar a partir del esquema de la Fig. 8.35.

Sería interesante también comprobar qué pasaría si considerásemos la transformada de Hilbert dentro del espacio de Hilbert equipado generado a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y no $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$. Es fácil comprobar que en este RHS la transformada de Hilbert no es un automorfismo. Si bien es cierto que, como se ha demostrado, la transformada de Hilbert de una función de $L^2(\mathbb{R})$ será también una función de cuadrado integrable, no se puede asegurar que si $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces $H(x') = \mathbf{TH}[f(x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ⁸⁸. De hecho se demuestra lo contrario⁸⁹:

- : Sea $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sea $H(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$. Si $H(x')$ fuese una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier también debería serlo; sin embargo, $\mathbf{TF}[H(x')] = -j \text{sign}(\xi') F(\xi')$ que no es continua, en general, en $\xi' = 0$, por lo que no va a ser de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, luego $H(x')$ tampoco lo será. Esquemáticamente se muestra en la Fig. 8.36.

Ejemplo

Sea

$$f(x) = e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (8.588)$$

⁸⁸Se denomina aquí con la letra H a la transformada de Hilbert $H(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$ para diferenciarla de la transformada de Fourier $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$.

⁸⁹Para entender esta demostración hay que analizar primero la transformada de Fourier de señales de variable continua del Apdo. 8.7.5 entre funciones del subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para poder aplicar la propiedad que relaciona la transformada de Fourier con la transformada de Hilbert de una señal,

$$\mathbf{TF}[\mathbf{TH}[f(x)]] = -j \text{sign}(\xi') \mathbf{TF}[f(x)], \quad (8.587)$$

[1], [52], [61].

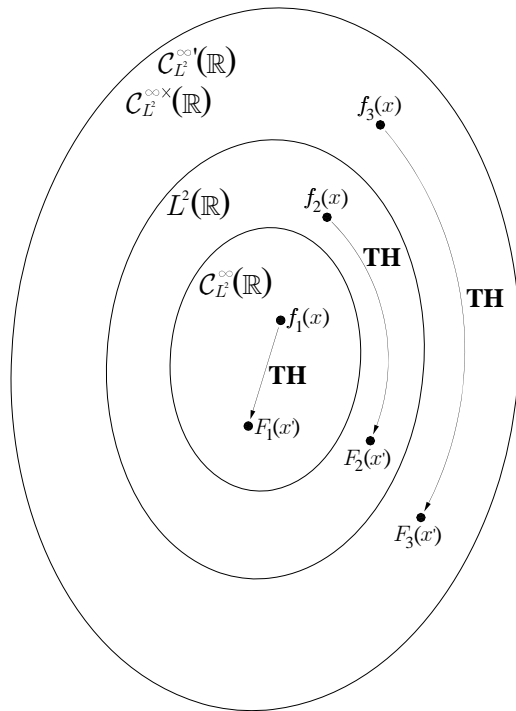


Figura 8.35: Los coeficientes $F(x')$ de la **TH** de señales de variable continua $f(x)$ también pertenecen al mismo espacio de señal. Además, estos coeficientes también respetan el subespacio original al que pertenece la señal que representan, localizándose en el mismo subespacio que la función original.

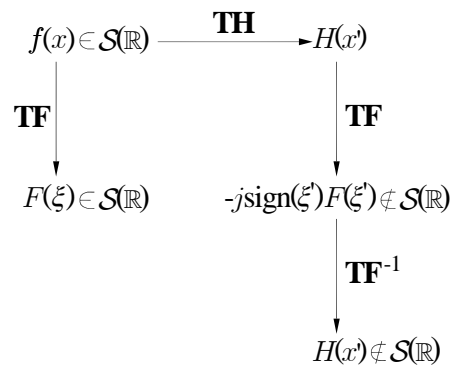


Figura 8.36: Esquema que muestra cómo la transformada de Hilbert no es un automorfismo en el subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

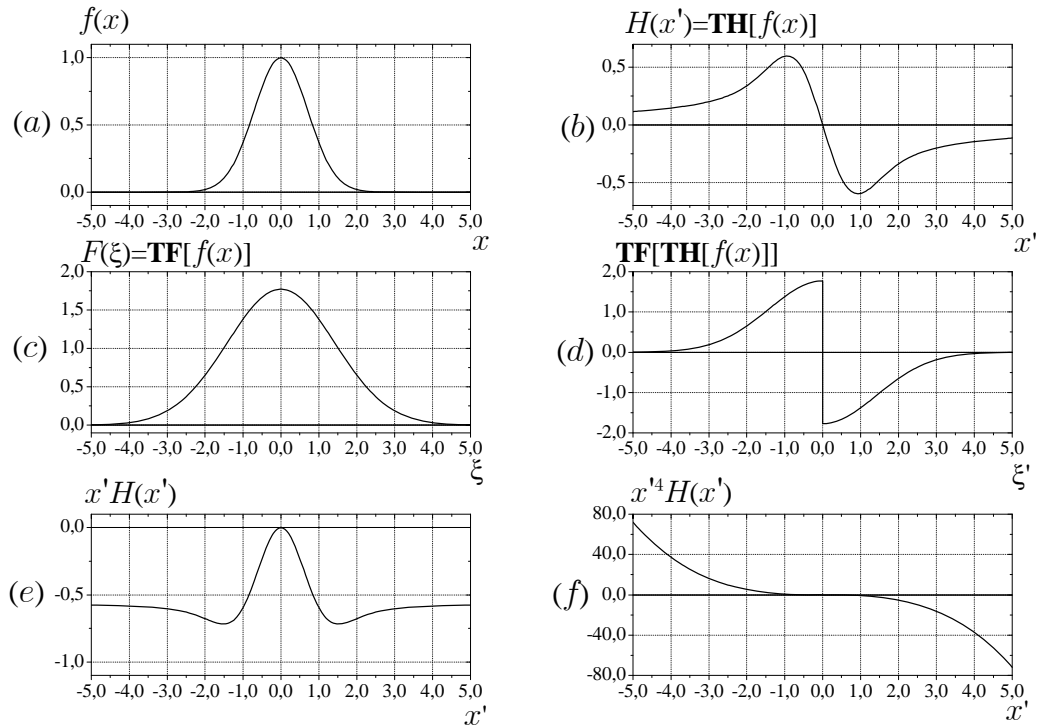


Figura 8.37: (a) $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, (b) $H(x') = \mathbf{TH}[f(x)]$, (c) $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$, (d) $\mathbf{TF}[\mathbf{TH}[f(x)]]$, (e) y (f) representan dos polinómios que multiplican a $H(x')$ y que demuestran que $H(x') \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ya que deberían tender a 0 cuando x' tiende a infinito.

su transformada de Hilbert $H(x')$ no es de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puesto que

$$F(\xi) = \mathbf{TF}\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (8.589)$$

y

$$\mathbf{TF}[H(x')] = -j\sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{sign}(\xi') e^{-\frac{\xi'^2}{4a}} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow H(x') \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (8.590)$$

La Fig. 8.37 muestra, para $a = 1$, las representaciones gráficas de este ejemplo.

8.7.5. TF señales de variable continua

Consideremos el espacio de Hilbert equipado para el conjunto de funciones de variable continua construido a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (8.591)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}). \quad (8.592)$$

Se define la transformada de Fourier, \mathbf{TF} , de señales $f(x)$ de variable continua a partir del conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ como

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (8.593)$$

Hay que tener en cuenta que, según esta definición, la transformada de Fourier no se define a partir de una integral de Riemann o de Lebesgue, sino a partir de un funcional lineal, puesto

que el conjunto de funciones base $\{e^{j\xi x}\}_\xi$ no pertenece al espacio de funciones de cuadrado integrable, así, la transformada de Fourier puede definirse como un conjunto infinito no numerable de funcionales lineales para cada $\xi \in \mathbb{R}$ definidos como

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\xi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) \mapsto F(\xi). \end{cases} \quad (8.594)$$

Pero esta definición restringiría la posibilidad de realizar la transformada de Fourier a únicamente funciones que pertenezcan a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. El hecho es que, para estas funciones, se puede asegurar que la **TF** esté perfectamente definida en todos sus puntos. Para funciones $f(x)$ que no sean de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ también se puede realizar la transformada de Fourier, pero no se asegura que esté definida en todos sus puntos, pudiendo haber discontinuidades o singularidades, como se verá en los ejemplos sucesivos.

Este conjunto de funciones base $e(x; \xi)$ es un conjunto descrito por el parámetro continuo $\xi \in \mathbb{R}$, por lo que el conjunto de coeficientes $F(\xi)$, visto como una señal, pertenecerá, igualmente, a alguno de los subespacios de funciones de variable continua $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ ⁹⁰, dependiendo de a qué subespacio pertenezca la función original $f(x)$.

- Si $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces se cumple que⁹¹

$$\int_x \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right|^2 dx < \infty, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (8.596)$$

Sea $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$. Primero se comprueba que esta señal es de cuadrado integrable, así

$$\begin{aligned} \int_\xi |F(\xi)|^2 d\xi &= \int_\xi \left(\int_x f(x) e^{-j\xi x} dx \right) \left(\int_{x'} f(x') e^{-j\xi x'} dx' \right)^* d\xi = \\ &= \int_x f(x) \int_{x'} f^*(x') \int_\xi e^{-j\xi x} e^{j\xi x'} d\xi dx' dx = \\ &= \int_x f(x) \int_{x'} f^*(x') 2\pi \delta(x' - x) dx' dx = \\ &= 2\pi \int_x f(x) f^*(x) dx = \\ &= 2\pi \int_x |f(x)|^2 dx < \infty \end{aligned} \quad (8.597)$$

puesto que $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Las integrales se pueden intercambiar porque son convergentes. La demostración (8.597) no es más que la prueba de la **relación de Parseval** para el espacio de funciones de variable continua bajo la transformada de Fourier.

Ahora hay que comprobar si $F(\xi)$ también pertenece, al igual que $f(x)$, a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para ello se comprueba si

$$\int_\xi \left| \xi^m \frac{d^n}{d\xi^n} F(\xi) \right|^2 d\xi < \infty, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (8.598)$$

⁹⁰Se demostrará que los subespacios a los que puede pertenecer $F(\xi)$ son los mismos que a los que pertenece $f(x)$.

⁹¹Para aliviar la notación, se indicará en las sucesivas integrales únicamente la variable de integración, sabiendo que todas ellas, salvo que se indique lo contrario, están definidas para todo \mathbb{R} , es decir,

$$\int_x \equiv \int_{x=-\infty}^{\infty} \quad (8.595)$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi} \left| \xi^m \frac{d^m}{d\xi^m} F(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\xi} \left| \xi^m \frac{d^m}{d\xi^m} \int_x f(x) e^{-j\xi x} dx \right|^2 d\xi = \\
& = \int_{\xi} \left| \int_x f(x) \xi^m \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-j\xi x} dx \right|^2 d\xi = \\
& = \int_{\xi} \left| \int_x f(x) \xi^m (-jx)^n e^{-j\xi x} dx \right|^2 d\xi = \\
& = \int_{\xi} \left| \int_x f(x) (-jx)^n \frac{1}{(-j)^m} \frac{d^m}{dx^m} e^{-j\xi x} dx \right|^2 d\xi = \\
& = \int_{\xi} \left| \int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} e^{-j\xi x} dx \right|^2 d\xi = \\
& = \int_{\xi} \left(\int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} e^{-j\xi x} dx \right) \left(\int_{x'} x'^m f(x') \frac{d^m}{dx'^m} e^{-j\xi x'} dx' \right)^* d\xi = \\
& = \int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} \int_{x'} x'^m f^*(x') \frac{d^m}{dx'^m} \int_{\xi} e^{-j\xi x} e^{j\xi x'} d\xi dx' dx = \\
& = \int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} \int_{x'} x'^m f^*(x') \frac{d^m}{dx'^m} 2\pi \delta(x' - x) dx' dx = \\
& = 2\pi \int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} \int_{x'} x'^m (-1)^m \frac{d^m}{dx'^m} f^*(x') \delta(x' - x) dx' dx = \\
& = 2\pi (-1)^m \int_{x'} x'^m \frac{d^m}{dx'^m} f^*(x') \int_x x^n f(x) \frac{d^m}{dx^m} \delta(x' - x) dx dx' = \\
& = 2\pi (-1)^m \int_{x'} x'^m \frac{d^m}{dx'^m} f^*(x') \int_x x^n (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x) \delta(x' - x) dx dx' = \\
& = 2\pi \int_{x'} x'^m \frac{d^m}{dx'^m} f^*(x') x'^n \frac{d^m}{dx'^m} f(x') dx' = \\
& = 2\pi \int_{x'} \left| x'^m \frac{d^m}{dx'^m} f(x') \right|^2 dx' < \infty, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \tag{8.599}
\end{aligned}$$

puesto que $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y donde se ha utilizado por dos veces la propiedad de las distribuciones:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}^k \rangle = (-1)^k \langle \varphi^k, \mathbf{T} \rangle \tag{8.600}$$

donde \mathbf{T} representa un funcional lineal y que, en este caso, se corresponde con la distribución delta de Dirac $\delta(x' - x)$. Ver Apdo. B.17.4. Por tanto se demuestra que si $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces también $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ejemplo

Sea la función gaussiana

$$f_1(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{8.601}$$

que es una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ porque

$$f_1(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^n f_1^m(x) \right| = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{8.602}$$

Su transformada de Fourier es

$$F_1(\xi) = \mathbf{TF} \left[e^{-x^2} \right] = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \tag{8.603}$$

que también es una gaussiana por lo que $F_1(\xi) = \mathbf{TF}[f_1(x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ambas funciones se muestran en la Fig. 8.38(a).

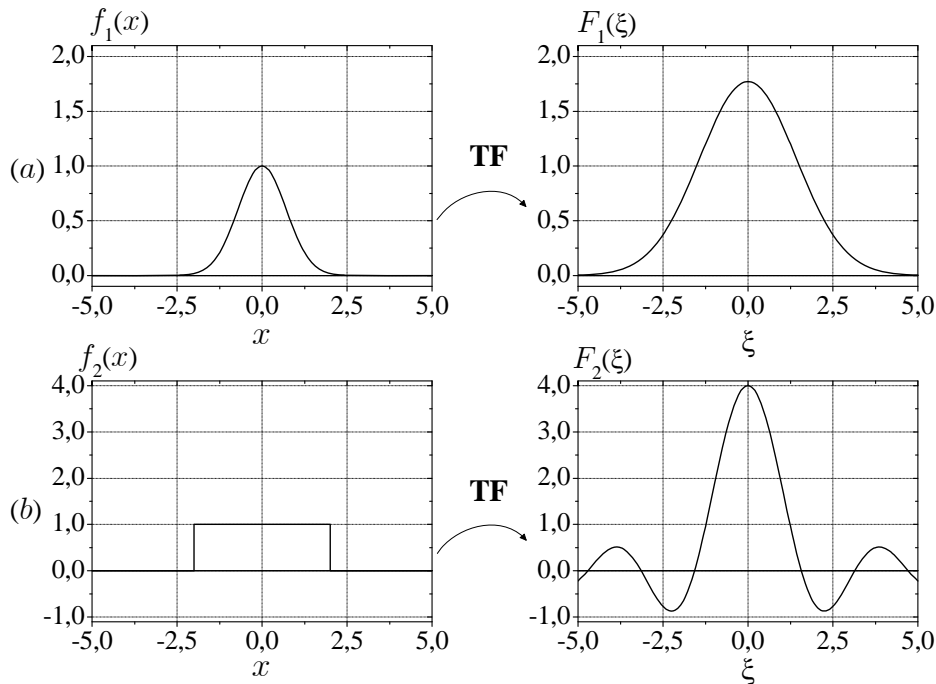


Figura 8.38: Ejemplos de cómo la transformada de Fourier de funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se localizan en el mismo espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y la transformada de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ caen también en $L^2(\mathbb{R})$.

- Si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ pero $f(x) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por las demostraciones (8.597) y (8.599) se concluye que $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] \in L^2(\mathbb{R})$ pero $F(\xi) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ya que $f(x)$ tendría que ser también una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para darse ese caso.

Ejemplo

Sea

$$f_2(x) = P_4(x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (8.604)$$

que es una función de $L^2(\mathbb{R})$, pero no es de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ porque no es continua. Su transformada de Fourier es

$$F_2(\xi) = \mathbf{TF}[P_4(x)] = 4 \operatorname{sinc}(2\xi) \quad (8.605)$$

que también es de $L^2(\mathbb{R})$, ya que

$$\int_{\xi} |4 \operatorname{sinc}(2\xi)|^2 d\xi = 16 \mathbf{TF}[\operatorname{sinc}^2(2\xi)]_{x=0} = 16 \frac{1}{4} 2\pi T_8(x) \Big|_{x=0} = 8\pi \quad (8.606)$$

pero no es de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ porque, por ejemplo,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi^2 4 \operatorname{sinc}(2\xi)| = 2 \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi \sin(2\xi)| = \infty. \quad (8.607)$$

Las funciones de este ejemplo se pueden ver en la Fig. 8.38(b).

- Si $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, entonces $f(x)$ es el núcleo de un funcional lineal \mathbf{F} representado como

$$\begin{cases} \mathbf{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ u(x) \mapsto \langle u(x), f(x) \rangle. \end{cases} \quad (8.608)$$

Sea $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$. Esta transformada se describirá en términos de una transformada generalizada, ya que $f(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. Se comprueba que $F(\xi)$ es también el núcleo de un

funcional lineal de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la siguiente manera, a partir de las propiedades de $f(x)$ como núcleo de un funcional lineal, así

$$\begin{aligned}
\langle u(x), f(x) \rangle &= \int_x u(x) f^*(x) dx = \\
&= \int_x \frac{1}{2\pi} \int_\xi U(\xi) e^{j\xi x} d\xi f^*(x) dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_\xi U(\xi) \left(\int_x f(x) e^{-j\xi x} dx \right)^* d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_\xi U(\xi) F^*(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \langle U(\xi), F(\xi) \rangle, \tag{8.609}
\end{aligned}$$

siendo $u(x)$ una función cualquiera de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que, por tanto, tiene su transformada de Fourier $U(\xi)$ bien definida y que, además, debido a la demostración (8.599), es también otra función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, por lo que se demuestra que $F(\xi)$ es también el núcleo de un funcional lineal de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Nuevamente hay que destacar que el símbolo de la integral en este caso no se corresponde, en general, con una integral de Riemann o de Lebesgue, puesto que estamos trabajando con funcionales y lo que identifican es una aplicación entre la función $u(x)$ y los números complejos. En algunos casos esta aplicación sí se puede corresponder con una integral convencional cuando el funcional $f(x)$ sea una función que, aunque no sea de cuadrado integrable, sí esté definida en todos sus puntos (recordando que, por la definición del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, y por extensión a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, dos funciones que se diferencien en un conjunto de medida nula son la misma función), aunque no se pueda asegurar la convergencia de dicha integral.

También es importante resaltar que la definición de la transformada generalizada que se extrae de (8.609) es

$$F^*(\xi) = (\mathbf{TF}[f(x)])^* = \int_x e^{j\xi x} f^*(x) dx = \langle e^{j\xi x}, f(x) \rangle = \mathbf{F}[e^{j\xi x}] \tag{8.610}$$

donde $f(x)$ es el núcleo del funcional lineal \mathbf{F} . Sin embargo, este funcional se está aplicando sobre funciones que no son de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, en este caso $e^{j\xi x}$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$, lo cual no cumple estrictamente con la definición de funcional lineal de (8.594), ya que éste se debería aplicar sobre una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es por esto que se trata de una definición generalizada de transformada de Fourier y que, en la mayoría de los casos, no va a estar bien definida en todos sus puntos, ya que el resultado, como se ha demostrado en (8.609), será el núcleo de otro funcional lineal, lo cual puede ser una función que no sea de cuadrado integrable o una distribución, y esto implica, en concordancia con lo anterior, que puede haber puntos en los que no esté definida.

Igualmente se puede definir la transformada de Fourier generalizada a partir de (8.594), siendo el conjunto de funcionales lineales generados a partir de cada una de las funciones $e^{j\xi x}$, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, aplicado sobre $f(x)$ como

$$F(\xi) = \int_x f(x) e^{-j\xi x} dx = \langle f(x), e^{j\xi x} \rangle = \mathbf{F}_\xi[f(x)], \tag{8.611}$$

cuyo resultado, $F(\xi)$, sería igualmente el núcleo de otro funcional.

Esto lleva directamente a considerar el caso de que $f(x) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. El procedimiento es análogo, obteniéndose que $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ y definiéndose la transformada de

Fourier generalizada a partir de $f(x)$ como núcleo del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{F}}$ de la siguiente manera,

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_x f(x) e^{-j\xi x} dx = \langle f(x), e^{j\xi x} \rangle = \tilde{\mathbf{F}}[e^{j\xi x}]. \quad (8.612)$$

En este caso se puede comparar (8.612) con (8.611) viendo que se obtiene el mismo resultado al considerar $f(x)$ como núcleo de un funcional antilineal aplicado a cada una de las funciones base $e^{j\xi x}$ que considerar cada una de estas funciones base como un funcional lineal aplicado sobre la función $f(x)$, lo cual es la definición más general para la transformada de Fourier, como se decía en (8.594), ya que cada una de las funciones base $\{e^{j\xi x}\}_\xi$ son siempre funciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (o de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ si se consideran como núcleos de funcionales antilineales), mientras que $f(x)$ se puede considerar dentro de cualquier subespacio de funciones de variable continua, ya sea de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ (o de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ cuando se considera $e^{j\xi x}$ dentro de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$).

Ejemplos

1. Sea

$$f_3(x) = \Gamma(x). \quad (8.613)$$

Se trata de una función que no es de $L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$\int_x |\Gamma(x)|^2 dx = \int_{x=0}^{\infty} dx = \infty. \quad (8.614)$$

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} F_3(\xi) &= \mathbf{TF}[\Gamma(x)] = \\ &= \int_x \Gamma(x) e^{-j\xi x} dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{-j\xi x} dx = \\ &= \pi\delta(\xi) + \frac{1}{j\xi}, \end{aligned} \quad (8.615)$$

definiéndose como el resultado de aplicar cada funcional lineal representado por $e^{j\xi x}$, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, a $\Gamma(x)$. Está claro que es una función de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ (según dónde se haya considerado $f_3(x)$) porque contiene la distribución delta de Dirac. Se puede comprobar que $F(\xi)$ no está bien definida en $\xi = 0$ si no es por la teoría de distribuciones, por lo que se cumple la \mathbf{TF} del núcleo de un funcional no garantiza la perfecta definición de todos sus puntos. En la Fig. 8.39(c) se representa este ejemplo.

2. Sea

$$f_4(x) = 1 \quad (8.616)$$

una función constante de valor 1. Debido a que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} 1^2 dx = \infty, \quad (8.617)$$

está claro que es una función del espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. Su transformada de Fourier es

$$F_4(\xi) = \mathbf{TF}[1] = 2\pi\delta(\xi), \quad (8.618)$$

que igualmente es una función del espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ ya que contiene la distribución delta de Dirac. La Fig. 8.39(d) muestra este ejemplo.

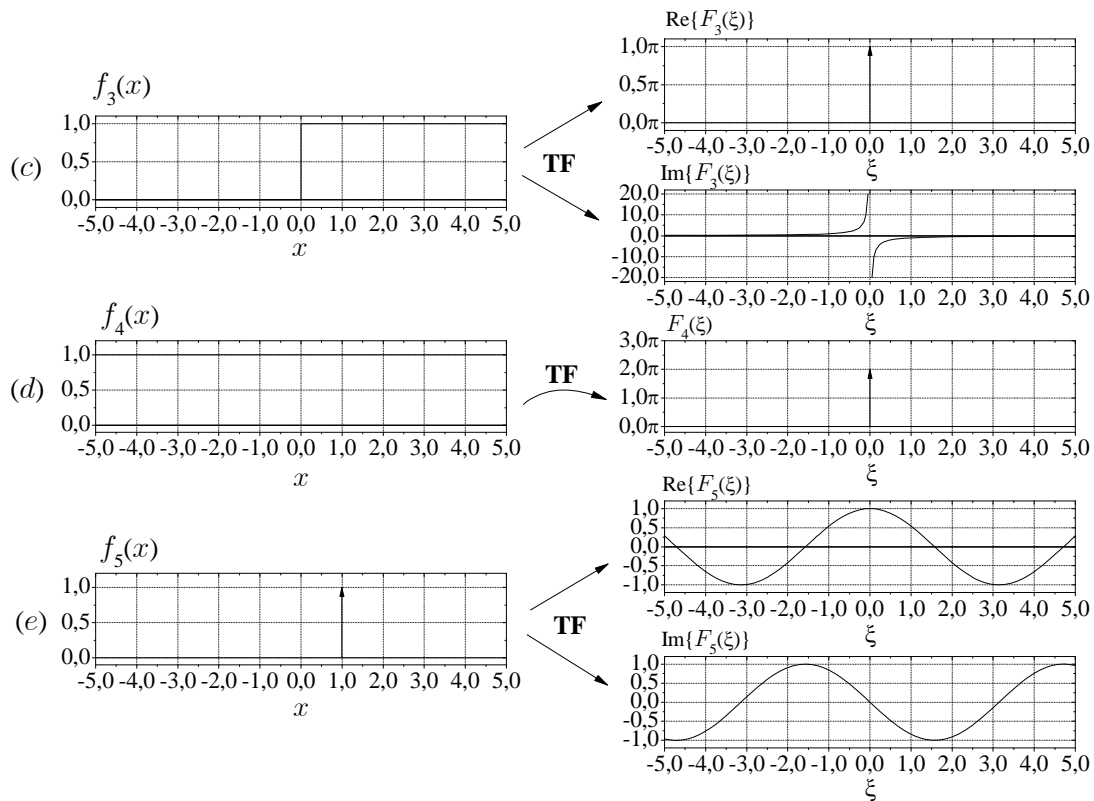


Figura 8.39: Ejemplos de cómo la transformada de Fourier de funciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$) se localizan en el mismo espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$).

3. Sea

$$f_5(x) = \delta(x - 1) \quad (8.619)$$

una distribución delta de Dirac localizada en $x = 1$. Claramente es una función de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ por ser una distribución. Su transformada de Fourier, entendida en términos de una transformada generalizada a partir de funcionales es

$$\begin{aligned} F_5(\xi) &= \mathbf{TF}[\delta(x - 1)] = \\ &= \int_x \delta(x - 1) e^{-j\xi x} dx = \\ &= e^{-j\xi}. \end{aligned} \quad (8.620)$$

En este caso $F_5(\xi) = e^{j\xi}$ está definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$, pero no es una función de cuadrado integrable, ya que

$$\int_{\xi} |e^{j\xi}|^2 d\xi = \int_{\xi} d\xi = \infty, \quad (8.621)$$

por lo que $F_5(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. En la Fig. 8.39(e) se representan las funciones de este ejemplo.

4. Sea

$$f(x) = f_0(x) \quad (8.622)$$

cualquier señal periódica de periodo X_0 . Se demuestra que $f(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ porque

$$\begin{aligned}
\int_x |f(x)|^2 dx &= \int_x |f_0(x)|^2 dx = \\
&= \int_x \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x - pX_0) \right|^2 dx = \\
&= \int_x \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x - pX_0) \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x - qX_0) \right)^* dx = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_x \tilde{f}(x - pX_0) \tilde{f}^*(x - qX_0) dx = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_x \left| \tilde{f}(x - pX_0) \right|^2 dx = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} \left| \tilde{f}(x - pX_0) \right|^2 dx = \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} A = \infty, \tag{8.623}
\end{aligned}$$

siendo $\tilde{f}(x)$ la función que se periodifica y que sólo está definida a lo largo de un periodo de longitud X_0 y $A = \int_{x \in \langle X_0 \rangle} \left| \tilde{f}(x - pX_0) \right|^2 dx$, si es que $\tilde{f}(x)$ es de cuadrado integrable a lo largo de un periodo X_0 , si no, ya estaría claro que $f(x)$ no sería de $L^2(\mathbb{R})$, y teniendo en cuenta que el producto $\tilde{f}(x - pX_0) \tilde{f}^*(x - qX_0)$ sólo es distinto de 0 cuando $p = q$, ya que las funciones $\tilde{f}(x)$ sólo están definidas a lo largo de un periodo X_0 .

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \mathbf{TF}[f_0(x)] = \\
&= \mathbf{TF} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} \right] = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \mathbf{TF} \left[e^{jm\xi_0 x} \right] = \\
&= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0), \tag{8.624}
\end{aligned}$$

siendo

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)]. \tag{8.625}$$

Es fácil comprobar que es una función de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ porque contiene la distribución delta de Dirac.

Este ejemplo muestra que, en el espacio de señales de variable continua, el subconjunto de funciones periódicas de periodo X_0 se encuentra siempre dentro de los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ y que su transformada de Fourier va a pertenecer también a estos mismos espacios duales, puesto que siempre estarán representados en términos de deltas de Dirac. Más aún, el subconjunto de funciones periódicas de periodo X_0 es un subespacio del conjunto de funciones de variable continua, dentro de los espacios

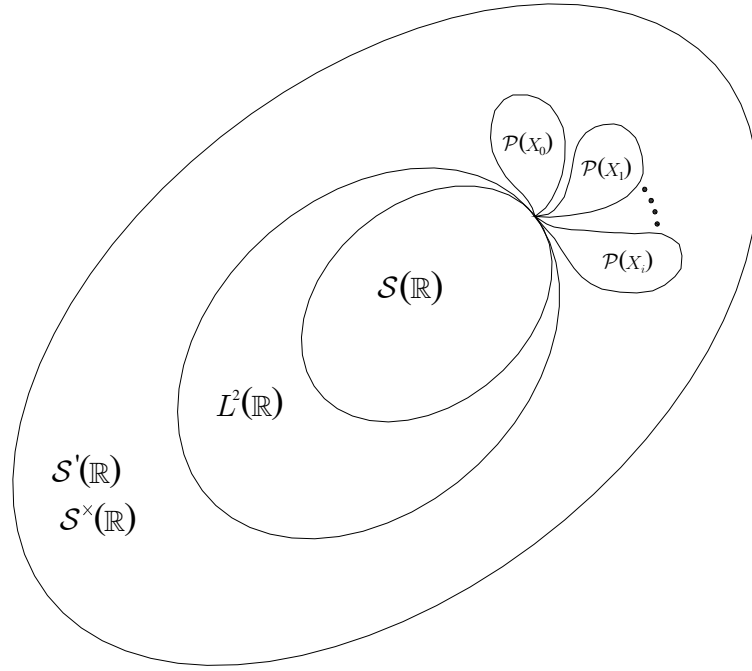


Figura 8.40: El conjunto de las funciones periódicas de variable continua puede considerarse dentro del conjunto general de funciones de variable continuas localizándolas en los subespacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, puesto que no son de cuadrado integrable. Los subespacios $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ se dibujan juntos por simplicidad. Todos los subespacios intersecan en la función $f(x) = 0$.

duales, ya que i) la función $f_0(x) = 0$ es periódica de periodo X_0 , ii) la suma de dos funciones periódicas de periodo X_0 es otra función periódica de periodo X_0 y iii) el producto de una función periódica de periodo X_0 por un escalar es igualmente otra función periódica de periodo X_0 . De la misma manera el subconjunto de funciones periódicas de periodo X_1 es también otro subespacio dentro de los espacios duales de las funciones de variable continua por los mismos motivos. Así, para cada periodo $X_i \in \mathbb{R}^+$, las funciones periódicas de periodo X_i forman un subespacio dentro de los espacio duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. Existe, por tanto, un número infinito no numerable de subespacios de funciones periódicas dentro de los espacios duales, tantos como posibles periodos. Este hecho se podría representar en la Fig. 8.40. Sin embargo no es cierto que su transformada, aunque pertenezca al mismo espacio dual, se encuentre en el mismo subespacio de funciones periódicas de periodo X_i . Lo que sí se puede asegurar es que su transformada estará contruida a partir de un tren de deltas de Dirac equiespaciadas en $\xi_i = \frac{2\pi}{X_i}$ que modulan los coeficientes $a(m)$ del desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica. Este conjunto de funciones también es un subespacio dentro de los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ para cada $\xi_i \in \mathbb{R}^+$ y que podemos denominar $\mathcal{Q}(\xi_i)$ definiéndose como⁹²

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\xi_i) &= \{F(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : F(\xi) = 0 \forall \xi \neq m\xi_i, \forall m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \left\{ F(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : F(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m) \delta(\xi - m\xi_i) \right\}. \end{aligned} \quad (8.626)$$

Es un subespacio puesto que la suma de dos funciones de $\mathcal{Q}(\xi_i)$ es también una función

⁹²Las funciones se pueden definir indistintamente sobre la variable ξ o sobre cualquier variable continua, por ejemplo x . Asimismo, también se puede definir de igual manera $F(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $F(\xi) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

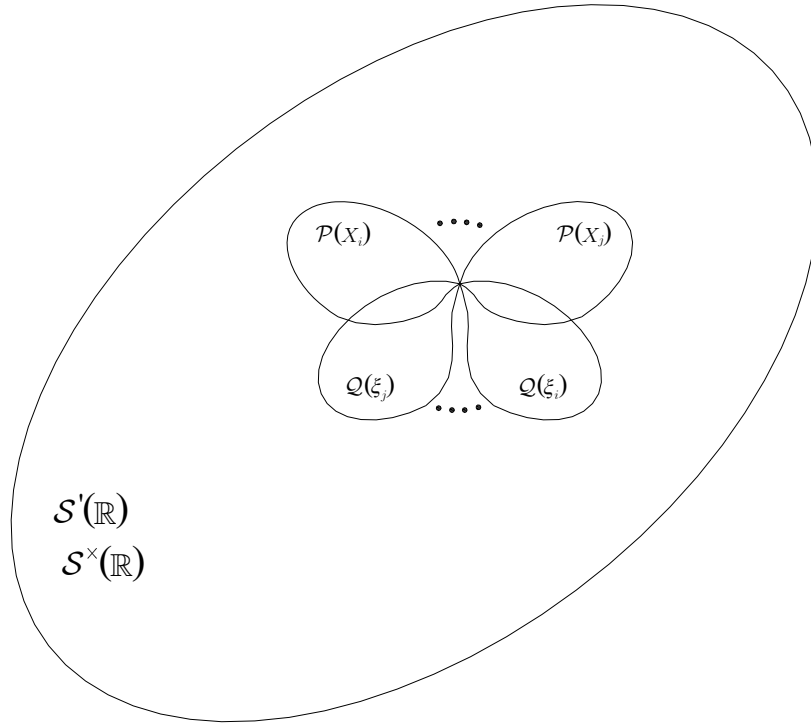


Figura 8.41: Dentro de los espacios $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, además de los subespacios de las funciones periódicas $\mathcal{P}(X_i)$, también se encuentran los subespacios de las funciones ξ_j -espaciadas, $\mathcal{Q}(\xi_j)$. La intersección de estos subespacios son la función nula y los trenes de deltas cuyo periodo X_i sea, precisamente, la separación entre deltas ξ_j .

de $\mathcal{Q}(\xi_i)$, el producto por escalares también y contiene a la función $F(\xi) = 0$ puesto que

$$F(\xi) = 0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0(m) \delta(\xi - m\xi_i) \quad (8.627)$$

para cualquier valor de ξ_i . El subespacio $\mathcal{Q}(\xi_i)$ interseca con $\mathcal{P}(X_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ en aquéllas funciones periódicas definidas sólo en valores múltiplos de $X_j = \xi_i$, es decir,

$$f(x) \in \mathcal{Q}(\xi_i) \cap \mathcal{P}(X_j) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\delta(\xi - m\xi_i), \quad (8.628)$$

lo cual sólo ocurre para los trenes de Delta de periodo $X_j = \xi_i$ o para la función nula. Estos subespacios de representan en la Fig. 8.41.

Esto plantea un nuevo interrogante, puesto que el conjunto de las funciones periódicas de un periodo X_0 forman un espacio de Hilbert con la definición de producto escalar vista en (8.367) en la Secc. 8.6.3, donde el conjunto de funciones base que definen el desarrollo en serie de Fourier $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ son funciones del espacio $\mathcal{P}(X_0)$, mientras que este conjunto de funciones periódicas, visto desde el espacio de funciones de variable continua, pertenece siempre a los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, al igual que el conjunto de funciones base que definen la transformada de Fourier $e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$, puesto que también son periódicas. Es decir, al mismo conjunto de funciones se le puede dar diferente estructura. Si bien una función periódica

$f_0(x)$ puede pertenecer a cualquier subespacio de las ternas

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(X_0) \quad (8.629)$$

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}^\times(X_0) \quad (8.630)$$

en el espacio de funciones periódicas de variable continua, cuando se considera $f_0(x)$ en el espacio de funciones de variable continua, siempre pertenecerá a los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, es decir, no será una función sino el núcleo de un funcional, puesto que cualquier función periódica no es de cuadrado integrable, es decir, no pertenece al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Resulta obvio decir que sobre el espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$, su subespacio denso $\mathcal{P}(X_0)$ y sus duales $\mathcal{P}'(X_0)$ y $\mathcal{P}^\times(X_0)$ sólo hay funciones periódicas de periodo X_0 , mientras que el espacio de funciones de variable continua se encuentran todos los subconjuntos de funciones periódicas de cualquier periodo $X_i \in \mathbb{R}^+$. La pregunta está en que, puesto que el conjunto de funciones periódicas es el mismo, qué relación existirá al considerarlas sobre la estructura de las funciones periódicas, con el espacio de Hilbert, producto escalar, norma, distancia y conjunto de funciones base definidos, con la estructura general de funciones de variable continua, siendo el espacio de Hilbert, la definición de producto escalar, norma, distancia y conjunto de funciones base, diferentes. Para responder a este interrogante hay que acudir al **Cambio de Base Generalizado (GTC)**, desarrollado en el Cap. 4, donde se explica la relación entre un mismo conjunto de funciones expresado en bases diferentes, ya sean pertenecientes al mismo espacio de señal o a otro diferente, con otra estructura, como es el caso comentado. Esta relación se consigue a partir de los dos conjuntos de funciones $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$, que posibilitan la realización de dicho cambio de base generalizado y que permiten relacionar los coeficientes en ambas bases. En este caso, estos conjuntos de funciones son

$$\varepsilon(\mu'; \mu) \equiv \varepsilon(m; \xi) = \text{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right), \quad (8.631)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') \equiv \tilde{\varepsilon}(\xi; m) = 2\pi\delta(\xi - m\xi_0). \quad (8.632)$$

Igualmente, este cambio no sólo relaciona los coeficientes de las señales según el espacio en el que se localicen, sino que, además, los sitúa dentro del subespacio al que tienen que pertenecer, es decir, en el caso de las funciones periódicas consideradas dentro de alguno de los subespacios de las funciones periódicas de variable continua $\mathcal{P}(X_0)$, $L^2(\langle X_0 \rangle)$, $\mathcal{P}'(X_0)$ y $\mathcal{P}^\times(X_0)$, sus coeficientes deberán pertenecer a los subespacios $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $l^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, respectivamente, mientras que si se consideran las funciones periódicas dentro del espacio de funciones de variable continua, tanto las funciones como sus coeficientes pertenecerán a los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. Más información sobre este cambio en la Secc. 4.5.4 y en general sobre los cambios de base en el Cap. 4.

Ejemplos

a) Sea

$$f_6(x) = \cos(\pi x) \quad (8.633)$$

que es una función periódica de periodo $X_6 = 2$. Su transformada de Fourier es

$$F_6(\xi) = \mathbf{TF}[\cos(\pi x)] = \pi\delta(\xi - \pi) + \pi\delta(\xi + \pi), \quad (8.634)$$

que claramente es una función de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ por contener deltas. La separación entre deltas es $\xi_6 = \frac{2\pi}{X_6} = \pi$, teniendo en cuenta que sólo son dos valores de deltas los que no están ponderados por 0. En la Fig. 8.42(f) se muestra la representación de estas funciones.

b) Sea el tren de deltas

$$f_7(x) = \delta_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 4k) \quad (8.635)$$

de periodo $X_7 = 4$. Su transformada de Fourier es otro tren de deltas

$$F_7(\xi) = \mathbf{TF}[\delta_0(x)] = \frac{2\pi}{X_7} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - m\xi_7), \quad (8.636)$$

donde $\xi_7 = \frac{2\pi}{X_7} = \frac{\pi}{2}$, que se corresponde con el equiespaciado de las señales. Es claro que $F_7(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ por estar formado por deltas de Dirac. Este es el único caso (a parte de la función nula) en el que la señal transformada $F_7(\xi)$ pertenece también a un subespacio periódico, en este caso de periodo $\xi_7 = \frac{2\pi}{X_7} = \frac{\pi}{2}$. La Fig. 8.42(g) muestra la representación de las funciones de este ejemplo.

c) Sea el tren de pulsos

$$f_8(x) = P_{0,2}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_2(x - 3k) \quad (8.637)$$

de periodo $X_8 = 3$ y anchura $\Delta = 2$. Su transformada de Fourier es

$$F_8(\xi) = \mathbf{TF}[P_{0,2}(x)] = \frac{2\pi\Delta}{X_8} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_8}\right) \delta(\xi - m\xi_8) \quad (8.638)$$

siendo $\xi_8 = \frac{2\pi}{X_8} = \frac{2\pi}{3}$. Pertenecen a los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ por estar formado por deltas de Dirac, cuya separación es también $\xi_8 = \frac{2\pi}{X_8} = \frac{2\pi}{3}$. Se pueden ver representadas las funciones de este ejemplo en la Fig. 8.42(h).

Finalmente se puede concluir que la transformada de Fourier, \mathbf{TF} , relaciona los siguientes espacios:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (8.639)$$

$$L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (8.640)$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (8.641)$$

$$\mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (8.642)$$

por lo que la transformada de Fourier de funciones de variable continua, considerada como un operador, es un **automorfismo** dentro de cada uno de los subespacios del espacio de funciones de variable continua, ya que convierte funciones de un subespacio en otras del mismo subespacio (ver también su demostración en [63], [65]). Esta relación se puede representar a partir del esquema de la Fig. 8.43.

Resulta interesante también comprobar qué pasaría si considerásemos la transformada de Fourier dentro del espacio de Hilbert equipado generado a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y no $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Resulta muy sencillo comprobar que en este RHS la transformada de Fourier no es un automorfismo, es decir, no se puede asegurar que si $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ entonces $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. De hecho se demuestra lo contrario:

: Sea $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. Pero como $f(x)$ es de soporte finito, $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$ será de soporte infinito según se demuestra a continuación:

$$f(x) = f_p(x) P_{\Delta}(x) \quad (8.643)$$

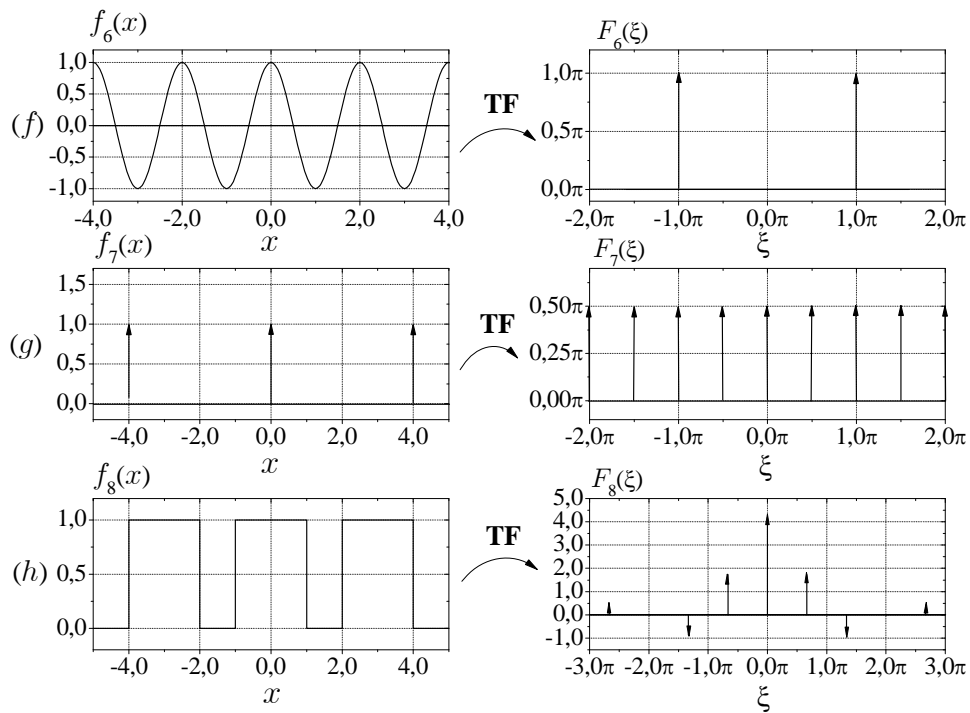


Figura 8.42: Ejemplos de cómo la transformada de Fourier de funciones periódicas localizadas en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$) caen también en el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ó $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$) ya que siempre van a estar representadas en términos de deltas de Dirac.

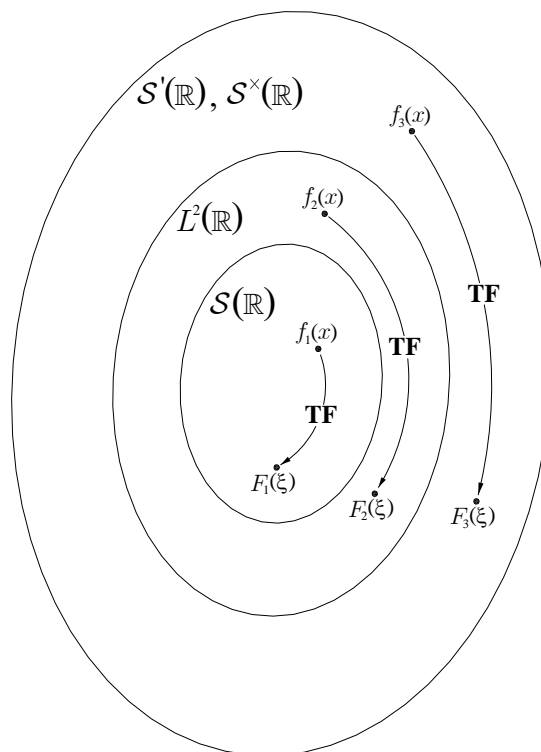


Figura 8.43: Los coeficientes $F(\xi)$ de la **TF** de señales de variable continua $f(x)$ también pertenecen al mismo espacio de señal. Además, estos coeficientes también respetan el subespacio original al que pertenece la señal que representan, localizándose en el mismo subespacio que la función original.

siendo $f_p(x)$ una versión periodificada de $f(x)$ con un periodo $\Delta > X$ el soporte de $f(x)$ y $P_\Delta(x)$ un pulso. Sin pérdida de generalidad suponemos que el soporte de $f(x)$ es simétrico respecto al 0, sino, sólo es cuestión de hacer un cambio de variable para centrarlo. Puesto que $f(x)$ es de soporte finito, en $f_p(x)$ no habrá solapamiento,

$$f_p(x) = f(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta), \quad (8.644)$$

así, realizando la transformada de Fourier se tiene

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \mathbf{TF}[f(x)] = \mathbf{TF}[f_p(x)P_\Delta(x)] = \\ &= \mathbf{TF}\left[\left(f(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta)\right)P_\Delta(x)\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{TF}\left[f(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta)\right] * \mathbf{TF}[P_\Delta(x)] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{TF}[f(x)]\mathbf{TF}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta)\right] * \mathbf{TF}[P_\Delta(x)] = \\ &= \frac{1}{2\pi}F(\xi)\frac{2\pi}{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi - \frac{2\pi}{\Delta}m\right) * \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\xi)\delta\left(\xi - \frac{2\pi}{\Delta}m\right) * \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\delta\left(\xi - \frac{2\pi}{\Delta}m\right) * \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\left(\xi - \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right). \end{aligned} \quad (8.645)$$

Si $F(\xi) = 0 \forall |\xi| > \xi_c$, entonces existiría M tal que $F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right) = 0 \forall |m| > M$ con $\frac{2\pi}{\Delta}M \geq \xi_c$, por lo que la serie se reduciría a una suma finita,

$$F(\xi) = \sum_{m=-M}^M F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\left(\xi - \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right). \quad (8.646)$$

Las funciones sinc tienen los ceros en $\xi = \frac{2\pi}{\Delta}(k+m) \forall k \in \mathbb{Z} - \{-m\}$. Sea un valor $k+\varepsilon > M$ con $\varepsilon \in (0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi}{\Delta}(k+\varepsilon)\right) &= \sum_{m=-M}^M F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\left(\frac{2\pi}{\Delta}(k+\varepsilon) - \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right) = \\ &= \sum_{m=-M}^M F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\operatorname{sinc}(\pi(k-m+\varepsilon)) = \\ &= \sum_{m=-M}^M F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\frac{(-1)^{k-m}\sin(\pi\varepsilon)}{\pi(k-m+\varepsilon)} = 0 \end{aligned} \quad (8.647)$$

para todos los valores de ε , lo cual implica que $F\left(\frac{2\pi}{\Delta}m\right) = 0 \forall m$ que indicaría que $F(\xi) = 0$ y $f(x) = 0$ que sería la única función de soporte finito cuya transformada de Fourier fuese también de soporte finito. Es por eso que, si $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, $F(\xi) \notin \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ salvo para $f(x) = 0$.

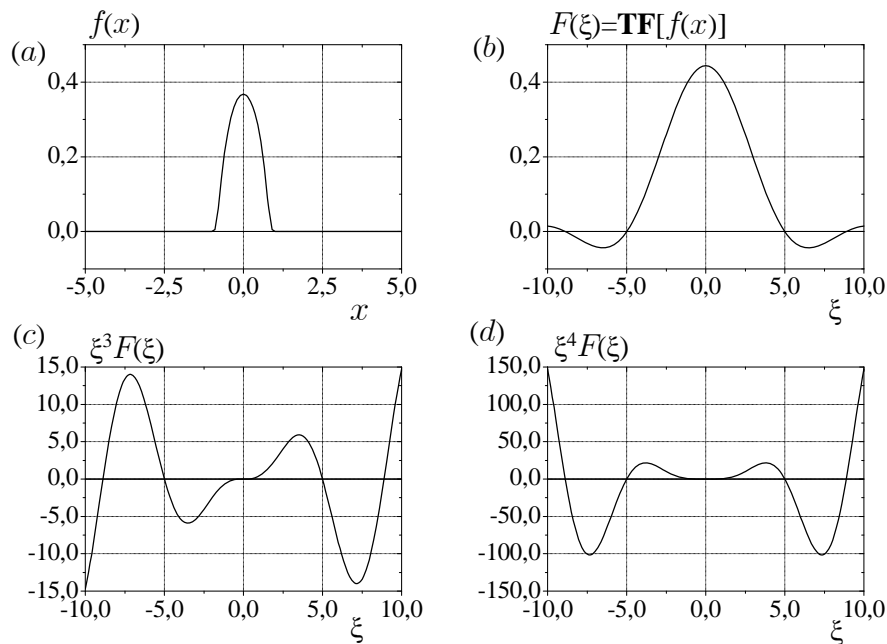


Figura 8.44: (a) $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} P_2(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, (b) $F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)]$, (c) y (d) representan dos polinómios que multiplican a $F(\xi)$ y que demuestran que $F(\xi)$ no pertenece a $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ ni a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ya que ni son de soporte finito ni tienden a 0 cuando ξ tiende a infinito.

Ejemplo

Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}). \quad (8.648)$$

Gráficamente, como muestra la Fig. 8.44, se puede comprobar como su transformada de Fourier no es de soporte finito, por lo que no es una función de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

Un conjunto de funciones base que definan una transformada que fuera un automorfismo en $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ sería el conjunto $\{\delta(x-x')\}_{x'}$ que definiría una transformada identidad \mathbf{T}_{δ} . Obviamente si una función $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ está claro que $\mathbf{T}_{\delta}[f(x)] = f(x') \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ puesto que será la misma función pero expresada en x' . Está claro que éste es un caso trivial y no tiene mucho interés. De las transformadas estudiadas hasta ahora definidas en el espacio de funciones de variable continua, a parte de este caso trivial, no se conoce ninguna que sea automorfismo dentro del espacio de Hilbert equipado generado por el subespacio $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

8.8. Isomorfismos

8.8.1. $L^2(\langle X_0 \rangle)$ isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$

Una conclusión importante que se obtiene a partir de los resultados de las Seccs. 8.7.2 y 8.7.3 es que la transformada de Fourier de señales de variable discreta envía funciones de los espacios de variable discreta a los periódicos de variable continua, y viceversa, el desarrollo en serie de Fourier envía funciones de los espacios de señales periódicas de variable continua a los de variable discreta. Esta relación se realiza uno a uno, es decir, por cada función $f_0(x) \in \mathcal{P}(X_0)$, $L^2(\langle X_0 \rangle)$, $\mathcal{P}'(X_0)$ o $\mathcal{P}^{\times}(X_0)$ existe una función $a(m) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $l^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ o $\mathcal{D}^{\times}(\mathbb{Z})$, respectivamente, y viceversa. Esto lleva a pensar que exista una relación directa entre estos

dos espacios de señal, y de hecho se puede demostrar, a partir del teorema C.5 que dice que todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$, que estos dos espacios son isomorfos⁹³, es decir, son el mismo. Puesto que el espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$ es un espacio de Hilbert separable por contener un conjunto de funciones base infinito numerable, $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$, se puede demostrar que

$$L^2(\langle X_0 \rangle) \cong l^2(\mathbb{Z}) \quad (8.649)$$

donde el isomorfismo \mathcal{I} que lo genera es precisamente el propio desarrollo en serie de Fourier:

$$\begin{cases} \mathcal{I} : L^2(\langle X_0 \rangle) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ f_0(x) \mapsto \mathcal{I}[f_0(x)] = a(m), \end{cases} \quad (8.650)$$

siendo

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \langle f_0(x), e(x; m) \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \mathbf{DSF}[f_0(x)] \quad (8.651)$$

y

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e(x; m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = \mathbf{DSF}^{-1}[a(m)]. \quad (8.652)$$

Se comprueba que \mathcal{I} , que no es más que el desarrollo en serie de Fourier, es un isomorfismo porque cumple las siguientes propiedades:

1. \mathcal{I} es lineal,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\alpha f_0(x) + \beta g_0(x)] &= \mathbf{DSF}[\alpha f_0(x) + \beta g_0(x)] = \\ &= \alpha \mathbf{DSF}[f_0(x)] + \beta \mathbf{DSF}[g_0(x)] = \\ &= \alpha \mathcal{I}[f_0(x)] + \beta \mathcal{I}[g_0(x)]. \end{aligned} \quad (8.653)$$

2. \mathcal{I} es biyectivo:

- a) \mathcal{I} es inyectivo, es decir,

$$\mathcal{I}[f_0(x)] = \mathcal{I}[g_0(x)] \Rightarrow f_0(x) = g_0(x). \quad (8.654)$$

Sean

$$a(m) = \mathcal{I}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx, \quad (8.655)$$

$$b(m) = \mathcal{I}[g_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x \in \langle X_0 \rangle} g_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \quad (8.656)$$

Como $a(m) = b(m)$ entonces

$$\int_{x \in \langle X_0 \rangle} (f_0(x) - g_0(x)) e^{-jm\xi_0 x} dx = 0, \quad \forall m \quad (8.657)$$

por lo que $f_0(x) = g_0(x)$ *ctp* puesto que $(f_0(x) - g_0(x)) = \mathbf{DSF}^{-1}[0] = 0$, pero por la definición de $L^2(\langle X_0 \rangle)$ como espacio de Banach tomando como clases de equivalencia las funciones que difieran sólo en un conjunto de puntos de medida nula, se concluye que $f_0(x) = g_0(x)$ y, por tanto, \mathcal{I} es inyectivo.

⁹³ Ver definición de isomorfismo en el Ap. B.6.

b) \mathcal{I} es exhaustivo, es decir,

$$\forall a(m) \in l^2(\mathbb{Z}), \exists f_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle) \text{ tq } \mathcal{I}[f_0(x)] = a(m). \quad (8.658)$$

Sea $a(m) \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces sea la serie

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} \quad (8.659)$$

de donde se extraen las sumas parciales $S_p(x)$ para cada x ,

$$S_p(x) = \sum_{m=-\infty}^p a(m) e^{jm\xi_0 x}, \quad (8.660)$$

así, para $p > q$,

$$\|S_p(x) - S_q(x)\|^2 = X_0 \sum_{m=q+1}^p |a(m)|^2 \quad (8.661)$$

dado que $\langle e^{jm\xi_0 x}, e^{jm'\xi_0 x} \rangle_x = X_0 \delta(m - m')$. Como $a(m) \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces tiene que tender a 0 cuando m tiende a infinito, por lo que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \sum_{m=q+1}^{\infty} |a(m)|^2 < \frac{\varepsilon}{X_0}, \quad q \geq N, \quad (8.662)$$

por lo que

$$\|S_p(x) - S_q(x)\|^2 = X_0 \sum_{m=q+1}^p |a(m)|^2 < X_0 \sum_{m=q+1}^{\infty} |a(m)|^2 < X_0 \frac{\varepsilon}{X_0} = \varepsilon \quad (8.663)$$

para $p, q > N$, así la serie $S_p(x)$ es de Cauchy y, como $L^2(\langle X_0 \rangle)$ es un espacio completo por ser de Banach, por ser un espacio de Hilbert, la serie $S_p(x)$ converge

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = f_0(x) \quad (8.664)$$

cumpliéndose para cualquier valor de x . Además, $f_0(x)$ es periódica de periodo X_0 puesto que

$$\begin{aligned} f_0(x + X_0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0(x+X_0)} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} e^{jm\frac{2\pi}{X_0} X_0} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = f_0(x). \end{aligned} \quad (8.665)$$

Luego, para cada $a(m) \in l^2(\mathbb{Z})$ existe un $f_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle)$ tal que $\mathcal{I}[f_0(x)] = a(m)$.

3. \mathcal{I} es invertible, es decir, existe \mathcal{I}^{-1} . Se define \mathcal{I}^{-1} como

$$\mathcal{I}^{-1}[a(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}. \quad (8.666)$$

Se comprueba que es el inverso de \mathcal{I} puesto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{-1}[\mathcal{I}[f_0(x)]] &= \mathcal{I}^{-1}\left[\frac{1}{X_0}\int_{x'\in\langle X_0\rangle}f_0(x')e^{-jm\xi_0x'}dx'\right]= \\
&= \frac{1}{X_0}\int_{x'\in\langle X_0\rangle}f_0(x')\mathcal{I}^{-1}\left[e^{-jm\xi_0x'}\right]dx'= \\
&= \frac{1}{X_0}\int_{x'\in\langle X_0\rangle}f_0(x')\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-jm\xi_0x'}e^{jm\xi_0x}dx'= \\
&= \frac{1}{X_0}\int_{x'\in\langle X_0\rangle}f_0(x')X_0\delta_0(x-x')dx'= \\
&= \int_{x'\in\langle X_0\rangle}f_0(x')\delta_0(x-x')dx'= \\
&= f_0(x), \tag{8.667}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta el resultado del sumatorio demostrado en el Ap. D.6.

Por tanto \mathcal{I} es un isomorfismo y se demuestra que los dos espacios son isomorfos.

$$L^2(\langle X_0\rangle)\cong l^2(\mathbb{Z}). \tag{8.668}$$

Hay que remarcar que no se ha tenido en cuenta el periodo X_0 de las señales $f_0(x)$, por lo que $l^2(\mathbb{Z})$ es isomorfo a $L^2(\langle X_0\rangle)$ para cualquier periodo $X_0\in\mathbb{R}^+$. Además, debido a las conclusiones de las Seccs. 8.7.2 y 8.7.3, donde se probaba que la transformada de Fourier envía señales de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ a $\mathcal{P}(X_0)$, y viceversa, el desarrollo en serie de Fourier envía señales de $\mathcal{P}(X_0)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, por lo que también serán isomorfos los subespacios densos $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{P}(X_0)$ y sus duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{P}'(X_0)$, $\mathcal{P}^\times(X_0)$, respectivamente, por estar contruidos a partir de ellos. De esta manera se concluye que

$$\mathcal{P}(X_0)\cong\mathcal{D}(\mathbb{Z}), \tag{8.669}$$

$$L^2(\langle X_0\rangle)\cong l^2(\mathbb{Z}), \tag{8.670}$$

$$\mathcal{P}'(X_0)\cong\mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \tag{8.671}$$

$$\mathcal{P}^\times(X_0)\cong\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \tag{8.672}$$

representándose gráficamente en la Fig. 8.45.

8.8.2. $L^2(\mathbb{R})$ isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$

De la misma manera se puede probar que el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ es también isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$, puesto que contiene un conjunto de funciones base infinito numerable $e(x;k)=\left\{\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_k(x)\right\}_k$, con $H_k(x)=(-1)^ke^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}$, que definen el desarrollo en serie de Hermite⁹⁴ y que hace que el espacio $L^2(\mathbb{R})$ sea separable, por lo que, a partir del teorema C.5, se puede determinar que

$$L^2(\mathbb{R})\cong l^2(\mathbb{Z}), \tag{8.673}$$

siendo el isomorfismo \mathcal{J} el desarrollo en serie de Hermite, aunque con una pequeña consideración,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}:L^2(\mathbb{R})\rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ f(x)\mapsto\mathcal{J}[f(x)]=b(n), \end{array}\right. \tag{8.674}$$

⁹⁴Referirse a las expresiones (8.438) y (8.439) de la Secc. 8.6.4.

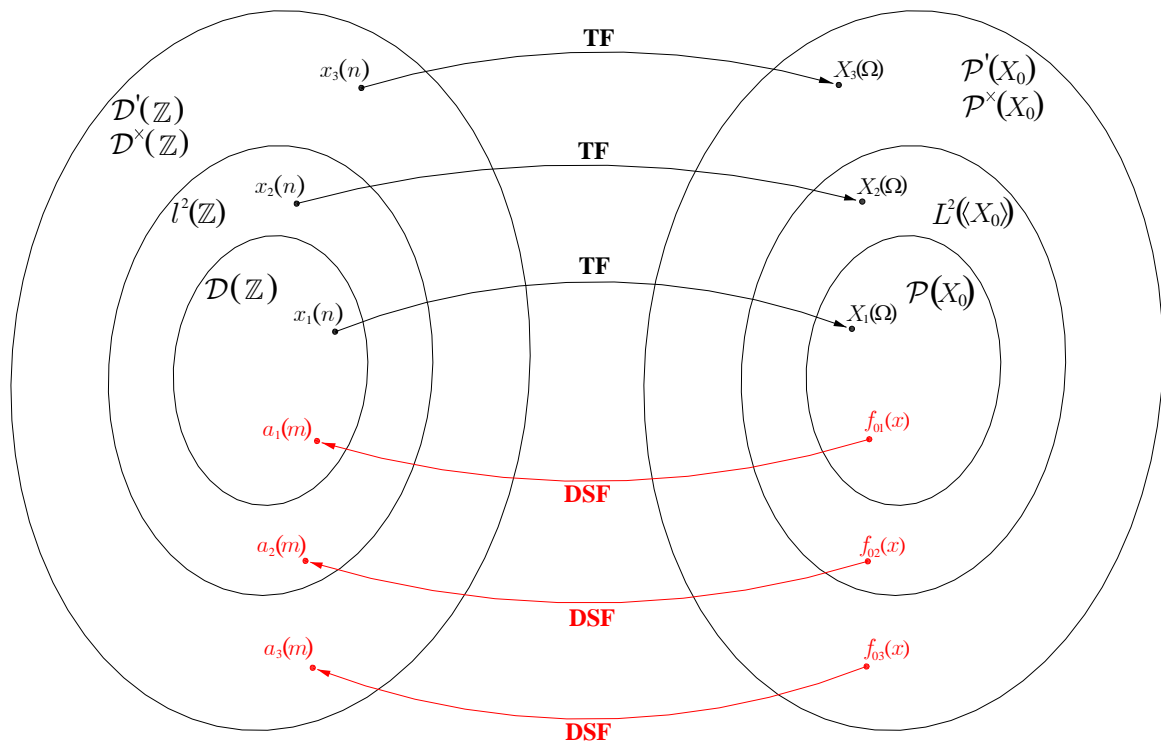


Figura 8.45: El espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ es isomorfo al espacio $L^2(\langle X_0 \rangle)$, de hecho es isomorfo a cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Existe, por tanto, un isomorfismo entre ambos espacios, que se corresponde, en este caso, con la transformada de Fourier. Para cada elemento de $l^2(\mathbb{Z})$ o de cualquier otro subespacio asociado, existe un único elemento en $L^2(\langle X_0 \rangle)$ o en los subespacios asociados correspondientes, y viceversa. Esto hace que ambos espacios de Hilbert sean formalmente idénticos, de forma que lo que se cumpla en uno se cumple en el otro de manera automática.

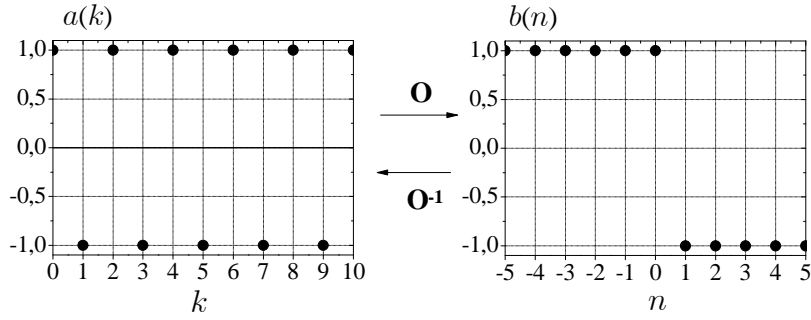


Figura 8.46: Las posiciones del eje negativo de $b(n)$ se corresponden con las posiciones pares de $a(k)$ y viceversa, y las posiciones del eje positivo de $b(n)$ son las posiciones impares de $a(k)$ y viceversa. Lo que haya en el 0 de una función siempre va al 0 de la otra.

siendo

$$\begin{aligned}
 b(n) &= \mathbf{O}[a(k)] = \mathbf{O} \left[\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\rangle \right] = \\
 &= \mathbf{O} \left[\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \right] = \\
 &= \mathbf{O}[\mathbf{DSHm}[f(x)]], \quad k \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned} \tag{8.675}$$

donde el operador \mathbf{O} indica una ordenación definida como⁹⁵

$$b(n) = \mathbf{O}[a(k)] = \begin{cases} a(-2n), & n \leq 0 \\ a(2n-1), & n > 0, \end{cases} \tag{8.676}$$

de esta manera $b(n)$ tiene una variación de $n \in \mathbb{Z}$, ya que $a(k)$ sólo la tenía para valores no negativos. Por otro lado

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a(k) \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \\
 &= \mathbf{DSHm}^{-1}[\mathbf{O}^{-1}[b(n)]]
 \end{aligned} \tag{8.677}$$

siendo

$$a(k) = \mathbf{O}^{-1}[b(n)] = \begin{cases} b\left(\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar} \\ b\left(-\frac{k}{2}\right), & k \text{ par,} \end{cases} \tag{8.678}$$

para poder obtener una variación de k de 0 a ∞ para poder así realizar el desarrollo en serie de Hermite inverso. La Fig. 8.46 muestra un ejemplo de esta ordenación.

⁹⁵Esta ordenación \mathbf{O} no tiene por qué ser única. Se puede reorganizar la señal $a(k)$ como se quiera para obtener otra señal $b(n)$ que tenga un dominio sobre todo \mathbb{Z} y no sólo sobre \mathbb{N}_0 . Lógicamente, otra ordenación $\tilde{\mathbf{O}}$ daría lugar a otra señal $\tilde{b}(n)$.

Los operadores \mathbf{O} y \mathbf{O}^{-1} son lineales, ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}[p_1 a_1(k) + p_2 a_2(k)] &= \begin{cases} p_1 a_1(-2n) + p_2 a_2(-2n), & n \leq 0 \\ p_1 a_1(2n-1) + p_2 a_2(2n-1), & n > 0, \end{cases} = \\
&= p_1 \begin{cases} a_1(-2n), & n \leq 0 \\ a_1(2n-1), & n > 0, \end{cases} + p_2 \begin{cases} a_2(-2n), & n \leq 0 \\ a_2(2n-1), & n > 0, \end{cases} = \\
&= p_1 \mathbf{O}[a_1(k)] + p_2 \mathbf{O}[a_2(k)] \quad (8.679)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}^{-1}[q_1 b_1(n) + q_2 b_2(n)] &= \begin{cases} q_1 b_1\left(\frac{k+1}{2}\right) + q_2 b_2\left(\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar} \\ q_1 b_1\left(-\frac{k}{2}\right) + q_2 b_2\left(-\frac{k}{2}\right), & k \text{ par,} \end{cases} = \\
&= q_1 \begin{cases} b_1\left(\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar} \\ b_1\left(-\frac{k}{2}\right), & k \text{ par,} \end{cases} + q_2 \begin{cases} b_2\left(\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar} \\ b_2\left(-\frac{k}{2}\right), & k \text{ par,} \end{cases} = \\
&= q_1 \mathbf{O}^{-1}[b_1(n)] + q_2 \mathbf{O}^{-1}[b_2(n)] \quad (8.680)
\end{aligned}$$

y también inversos, puesto que

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}^{-1}[\mathbf{O}[a(k)]] &= \mathbf{O}^{-1} \left[\begin{cases} a(-2n), & n \leq 0 \\ a(2n-1), & n > 0, \end{cases} \right] = \\
&= \begin{cases} a\left(-2\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar, } \frac{k+1}{2} \leq 0 \\ a\left(-2\left(-\frac{k}{2}\right)\right), & k \text{ par, } -\frac{k}{2} \leq 0 \\ a\left(2\frac{k+1}{2}-1\right), & k \text{ impar, } \frac{k+1}{2} > 0 \\ a\left(2\left(-\frac{k}{2}\right)-1\right), & k \text{ par, } -\frac{k}{2} > 0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} a(-k-1), & k \text{ impar, } k \leq -1 \\ a(k), & k \text{ par, } k \geq 0 \\ a(k), & k \text{ impar, } k > -1 \\ a(-k-1), & k \text{ par, } k < 0 \end{cases} = \\
&= a(k) \quad (8.681)
\end{aligned}$$

ya que $a(k)$ sólo está definido para $k \geq 0$, y

$$\begin{aligned}
\mathbf{O} [\mathbf{O}^{-1} [b(n)]] &= \mathbf{O} \left[\begin{cases} b\left(\frac{k+1}{2}\right), & k \text{ impar} \\ b\left(-\frac{k}{2}\right), & k \text{ par,} \end{cases} \right] = \\
&= \begin{cases} b\left(\frac{-2n+1}{2}\right), & n \leq 0, \quad -2n \text{ impar} \\ b\left(\frac{2n-1+1}{2}\right), & n > 0, \quad 2n-1 \text{ impar} \\ b\left(-\frac{-2n}{2}\right), & n \leq 0, \quad -2n \text{ par} \\ b\left(-\frac{2n-1}{2}\right), & n > 0, \quad 2n-1 \text{ par} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} b\left(\frac{-2n+1}{2}\right), & n \leq 0, \quad -2n \text{ impar} \\ b(n), & n > 0, \quad 2n-1 \text{ impar} \\ b(n), & n \leq 0, \quad -2n \text{ par} \\ b\left(-\frac{2n-1}{2}\right), & n > 0, \quad 2n-1 \text{ par} \end{cases} = \\
&= b(n) \tag{8.682}
\end{aligned}$$

porque ni $-2n$ puede ser impar ni $2n-1$ puede ser par.

Se comprueba que \mathcal{J} es un isomorfismo ya que

1. \mathcal{J} es lineal,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} [\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \mathbf{O} [\mathbf{DSHm} [\alpha f(x) + \beta g(x)]] = \\
&= \mathbf{O} [\alpha \mathbf{DSHm} [f(x)] + \beta \mathbf{DSHm} [g(x)]] = \\
&= \alpha \mathbf{O} [\mathbf{DSHm} [f(x)]] + \beta \mathbf{O} [\mathbf{DSHm} [g(x)]] = \\
&= \alpha \mathcal{J} [f(x)] + \beta \mathcal{J} [g(x)]. \tag{8.683}
\end{aligned}$$

2. \mathcal{J} es biyectivo:

a) \mathcal{J} es inyectivo, es decir,

$$\mathcal{J} [f(x)] = \mathcal{J} [g(x)] \Rightarrow f(x) = g(x). \tag{8.684}$$

Sean

$$b(n) = \mathcal{J} [f(x)] = \mathbf{O} \left[\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \right], \tag{8.685}$$

$$c(n) = \mathcal{J} [g(x)] = \mathbf{O} \left[\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \right]. \tag{8.686}$$

Como $b(n) = c(n)$ entonces

$$\mathbf{O} \left[\int_{x=-\infty}^{\infty} (f(x) - g(x)) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \right] = 0, \quad \forall k \tag{8.687}$$

por lo que $f(x) = g(x)$ *ctp* puesto que $(f(x) - g(x)) = \mathbf{DSHm}^{-1} [0] = 0$, pero por la definición de $L^2(\mathbb{R})$ como espacio de Banach tomando como clases de equivalencia las funciones que difieran sólo en un conjunto de puntos de medida nula, se concluye que $f(x) = g(x)$ y, por tanto, \mathcal{J} es inyectivo.

b) \mathcal{J} es exhaustivo, es decir,

$$\forall b(n) \in l^2(\mathbb{Z}), \exists f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathcal{J}[f(x)] = b(n). \quad (8.688)$$

Sea $b(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces sea la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \quad (8.689)$$

de donde se extraen las sumas parciales $S_p(x)$ para cada x ,

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x), \quad (8.690)$$

así, para $p > q$,

$$\begin{aligned} \|S_p(x) - S_q(x)\|^2 &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=q+1}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right|^2 dx = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=q+1}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{k'=q+1}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k'!2^{k'}\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{k'}(x) \right)^* dx = \\ &= \sum_{k=q+1}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \sum_{k'=q+1}^p (\mathbf{O}^{-1}[b(n)])^* \times \\ &\quad \times \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \frac{1}{\sqrt{k'!2^{k'}\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{k'}(x) dx = \\ &= \sum_{k=q+1}^p \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \sum_{k'=q+1}^p (\mathbf{O}^{-1}[b(n)])^* \delta(k - k') = \\ &= \sum_{k=q+1}^p |\mathbf{O}^{-1}[b(n)]|^2 \end{aligned} \quad (8.691)$$

dado que, de [51],

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \frac{1}{\sqrt{k'!2^{k'}\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{k'}(x) dx = \delta(k - k'). \quad (8.692)$$

Como $b(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ y por tanto también $\mathbf{O}^{-1}[b(n)]$, entonces tiene que tender a 0 cuando n tiende a infinito, por lo que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \text{ tq } \sum_{k=q+1}^{\infty} |\mathbf{O}^{-1}[b(n)]|^2 < \varepsilon, \quad q \geq M, \quad (8.693)$$

por lo que

$$\|S_p(x) - S_q(x)\|^2 = \sum_{k=q+1}^p |\mathbf{O}^{-1}[b(n)]|^2 < \sum_{k=q+1}^{\infty} |\mathbf{O}^{-1}[b(n)]|^2 < \varepsilon \quad (8.694)$$

para $p, q > N$, así la serie $S_p(x)$ es de Cauchy y, como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio completo por ser de Banach, por ser un espacio de Hilbert, la serie $S_p(x)$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = f(x) \quad (8.695)$$

cumpléndose para cualquier valor de x . Luego, para cada $b(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ existe un $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{J}[f(x)] = b(n)$.

3. \mathcal{J} es invertible, es decir, existe \mathcal{J}^{-1} . Se define \mathcal{J}^{-1} como

$$\mathcal{J}^{-1}[b(n)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{O}^{-1}[b(n)] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x). \quad (8.696)$$

Se comprueba que es el inverso de \mathcal{J} puesto que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}[\mathcal{J}[f(x)]] &= \mathcal{J}^{-1}\left[\mathbf{O}\left[\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x') dx'\right]\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{O}^{-1}\left[\mathbf{O}\left[\frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x') dx'\right]\right] \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x') dx' \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x') \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx' = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (8.697)$$

donde se ha tenido en cuenta que, de [51]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x') \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \delta(x-x'). \quad (8.698)$$

Por tanto \mathcal{J} es un isomorfismo y se demuestra que los dos espacios son isomorfos⁹⁶.

$$L^2(\mathbb{R}) \cong l^2(\mathbb{Z}). \quad (8.700)$$

Uniéndolo al resultado de la Secc. 8.8.1, se puede concluir que los tres espacios de señal de dimensión infinita son isomorfos, es decir,

$$L^2(X_0) \cong l^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(\mathbb{R}) \quad (8.701)$$

⁹⁶No se demuestra si los subespacios $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ son isomorfos. Para ello habría que probar si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |k^p a(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| k^p \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx \right|^2 < \infty, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0, \quad (8.699)$$

lo cuál no resulta sencillo a priori. La intuición dice que sí, puesto que, de la misma forma que se probó que $\mathcal{P}(X_0)$ es isomorfo a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ a partir de un conjunto de funciones $e(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m \subset \mathcal{P}(X_0)$, también el conjunto de funciones base que definen el desarrollo en serie de Hermite, $e(x; k) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right\}_k$ son funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que daría a pensar que los coeficientes obtenidos $a(k)$ también sean de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Sin embargo, su demostración queda para futuros trabajos previo análisis riguroso del desarrollo en serie de Hermite, tal como se ha hecho con la transformada de Hilbert o las transformadas de Bessel de orden ν en [1].

y, por tanto, son el mismo, puesto que los tres son espacios de Hilbert separables de dimensión infinita y, por el teorema C.5, son isomorfos. Esto quiere decir que, dada una función de uno de estos espacios, se puede encontrar una y sólo una función de los otros espacios a través de las siguientes relaciones⁹⁷:

$$a(n) \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \mathbf{DSHm}^{-1}[\mathbf{O}^{-1}[a(n)]] \in L^2(\mathbb{R}), \\ u_0(x) = \mathbf{DSF}^{-1}[a(n)] \in L^2(\langle X_0 \rangle). \end{cases} \quad (8.702)$$

$$f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a(n) = \mathbf{O}[\mathbf{DSHm}[f(x)]] \in l^2(\mathbb{Z}), \\ u_0(x) = \mathbf{DSF}^{-1}[\mathbf{O}[\mathbf{DSHm}[f(x)]]] \in L^2(\langle X_0 \rangle). \end{cases} \quad (8.703)$$

$$u_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle) \Rightarrow \begin{cases} a(n) = \mathbf{DSF}[u_0(x)] \in l^2(\mathbb{Z}), \\ f(x) = \mathbf{DSHm}^{-1}[\mathbf{O}^{-1}[\mathbf{DSF}[u_0(x)]]] \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (8.704)$$

Estas relaciones se muestran gráficamente en la Fig. 8.47 y también se muestra un ejemplo de una misma función representada en los diferentes espacios en la Fig. 8.48.

Como se ha visto, los 3 espacios de señal son isomorfos, es decir, son el mismo, lo que quiere decir que tendrán las mismas propiedades, entre ellas la dimensión. Al encontrar en cada uno de ellos un conjunto infinito numerable de funciones que hacen el papel de una base, se puede determinar que la dimensión de estos espacios es infinita numerable, pero hay que tener en cuenta una consideración importante con respecto a la dimensión, esto es la de observar que no es lo mismo dimensión en el sentido algebraico de un espacio vectorial (dimensión de Hamel) que dimensión en el sentido de un espacio de Hilbert (dimensión de Hilbert), [62]. La dimensión de Hamel es el cardinal del conjunto de funciones base que hagan que pueda expresar cada elemento del espacio como una combinación lineal finita de los elementos de la base; sin embargo, la dimensión de Hilbert es simplemente el cardinal del conjunto del mínimo número de funciones necesarias para expresar cada elemento del espacio como una combinación lineal generalizada, ya sea una suma, una serie o una integral, de esas funciones. En este sentido, el espacio de polinomios, por ejemplo, posee una base infinita numerable $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ pues cada polinomio puede expresarse como una combinación lineal finita de estos elementos; sin embargo, en los espacios de señal analizados, cada función $f(x)$, $f_0(x)$ o $x(n)$ no puede expresarse como una combinación lineal finita de los elementos de la base numerable $e(x; k)$, $e(x; m)$ o $e(n; n')$, sino que requiere de todos ellos. Desde el punto de vista de la dimensión de Hilbert, se trata de espacios de dimensión infinita numerable, pero desde el punto de vista de la dimensión de Hamel, deben ser considerados como espacios vectoriales de dimensión infinita no numerable, puesto que, aunque la base que estemos considerando sea numerable, deberá existir otra no numerable de la que se pueda extraer, para cada elemento del espacio, un subconjunto finito por el cual ese elemento pueda ser expresado como una combinación lineal finita de este subconjunto de la base. El hecho de tener que considerar una suma infinita requiere del concepto de límite, concepto para el cual debe existir una topología definida en el espacio y esto ocurre en todos los espacios de Hilbert, ya que, como se ha visto en la Secc. 8.2, en todo espacio de Hilbert se puede definir una topología a partir de los abiertos generados por la distancia inducida por el producto escalar, propio de todo espacio de Hilbert. En un espacio vectorial no tiene por qué haber definida una topología, por lo que no se puede aplicar el concepto de límite y, por tanto, el de sumas infinitas, de ahí la diferencia entre los conceptos de dimensión

⁹⁷ Es importante remarcar que quedan como parámetros libres el periodo del conjunto de señales periódicas X_0 y el tipo de ordenación \mathbf{O} que se tome. Fijados estos dos parámetros, las relaciones son fijas. Para otros valores de estos parámetros se obtendrán otras relaciones entre las funciones, aunque también serán relaciones de uno a uno.

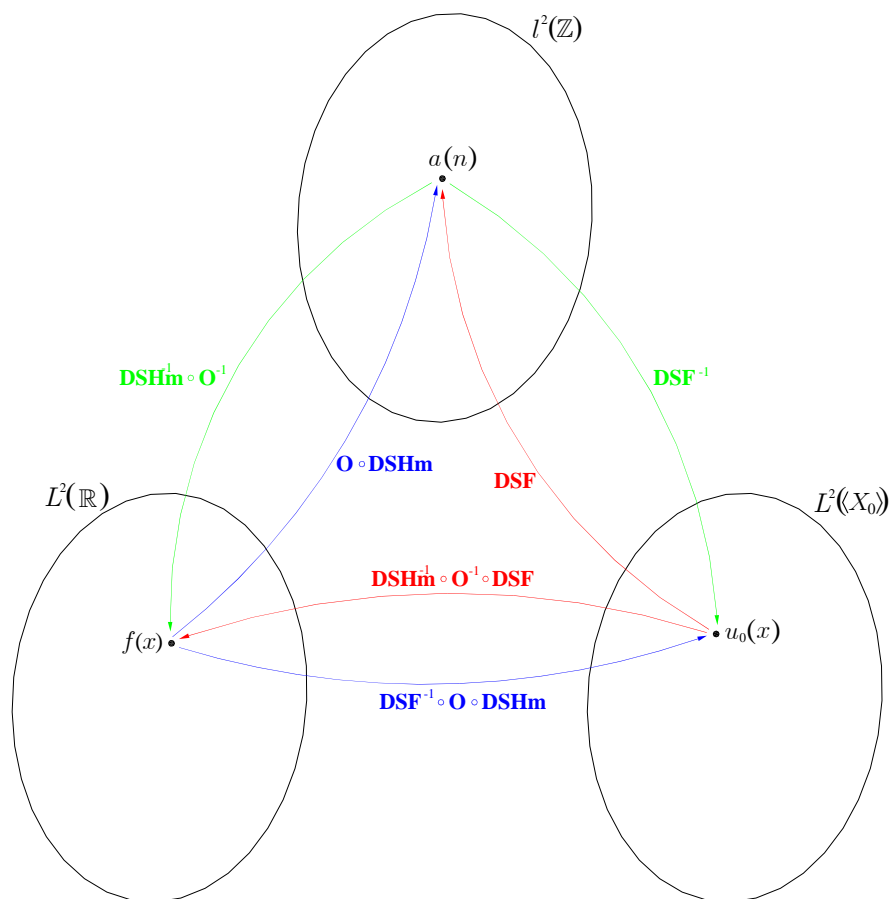


Figura 8.47: Los espacios de Hilbert separables de dimensi3n infinita son isomorfos. Esto ocurre con los espacios de Hilbert de se1al $l^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\langle X_0 \rangle)$, por tanto existe un isomorfismo entre cada par de ellos que relaciona un3vocamente cada se1al de un espacio con una sola se1al de otro espacio. Los isomorfismos se muestran en las flechas que relacionan cada par de espacios. En verde se indican los isomorfismos por los cuales se puede obtener una funci3n de $L^2(\mathbb{R})$ y de $L^2(\langle X_0 \rangle)$ a partir de una de $l^2(\mathbb{Z})$. En azul c3mo obtener funci3nes de $l^2(\mathbb{Z})$ y $L^2(\langle X_0 \rangle)$ a partir de una de $L^2(\mathbb{R})$ y en rojo las relaciones para obtener una funci3n de $l^2(\mathbb{Z})$ y de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de una del espacio $L^2(\langle X_0 \rangle)$.

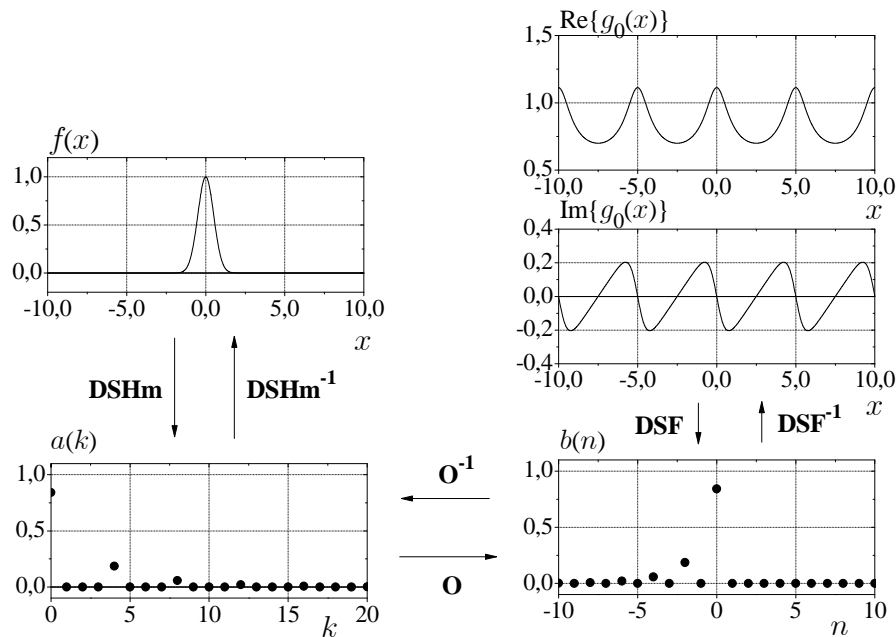


Figura 8.48: Ejemplo de una función $f(x) = e^{-2x^2} \in L^2(\mathbb{R})$ de la que se puede obtener una función $b(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ y otra $g_0(x) \in L^2(\langle X_0 \rangle)$ a partir de los isomorfismos definidos.

de un espacio vectorial y dimensión de un espacio de Hilbert. En muchos casos, cuando se trata con espacios de Hilbert, se obvia esta diferenciación de conceptos y simplemente se habla de dimensión en el sentido de Hilbert, por lo que, para estos espacios de señal, la dimensión sería infinita numerable. No habría lugar a dudas en espacios de Hilbert de dimensión finita ya que ahí siempre coincidirían la dimensión de Hamel con la de Hilbert.

8.9. Resumen de las condiciones para construir los RHS

Los espacios de Hilbert equipados en la teoría de la señal se construyen para unificar bajo un mismo marco las funciones pertenecientes a un espacio de Hilbert y las que quedan fuera de éste, ya sean distribuciones, en variable continua, o funciones de norma infinita. En espacios de Hilbert de dimensión finita no es necesario desarrollar los RHS, ya que toda función está bien definida y es de norma finita, por tanto, sólo se requerirán los RHS en los espacios de *dimensión infinita*.

La construcción de los RHS requiere, por tanto, agrandar el espacio de Hilbert \mathcal{H} original. Para ello es necesario *conocer a priori los operadores* que se van a aplicar sobre las funciones del espacio de Hilbert *y el análisis espectral* que se quiera realizar. Una vez determinados, se reduce primeramente el espacio de Hilbert original a Φ , *un subespacio denso maximal invariante* por la acción de todos los operadores, donde son todos acotados, de la forma

$$\Phi = \bigcap_{\substack{n,m=0 \\ \mathbf{A}, \mathbf{B} = \mathbf{F}_i, i=1 \div N}}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{A}^n \mathbf{B}^m \}. \quad (8.705)$$

Si Φ es numerable, es decir, si se puede encontrar un conjunto de funciones que hagan el papel de base en Φ que sea numerable, entonces el espacio de Hilbert \mathcal{H} es *separable*. A partir de este subespacio Φ se generan los *espacios dual lineal* Φ' y *dual antilineal* Φ^\times a partir del conjunto de *funcionales lineales* $\Phi'_{\mathbf{F}}$ y *funcionales antilineales* $\Phi^\times_{\mathbf{F}}$, respectivamente, que actúan sobre Φ . Es por eso que es necesario realizar una *generalización del producto escalar*, de forma que no

se vea ya como una forma bilineal entre dos elementos del espacio vectorial $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ donde se haya definido un producto escalar, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (a(\tau), b(\tau)) \longmapsto \langle a(\tau), b(\tau) \rangle \end{array} \right. \quad (8.706)$$

sino como un funcional actuando sobre una función de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , obteniendo un número complejo, ya sea lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ a(\tau) \longmapsto \mathbf{D}[a(\tau)] = \langle a(\tau), d(\tau) \rangle, \end{array} \right. \quad (8.707)$$

o antilineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{D}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ a(\tau) \longmapsto \tilde{\mathbf{D}}[a(\tau)] = \langle d(\tau), a(\tau) \rangle. \end{array} \right. \quad (8.708)$$

El conjunto de funcionales lineales y antilineales que actúen sobre Φ serán los que den lugar a los espacios duales Φ' y Φ^\times , así

$$\Phi'_{\mathbf{F}} = \{ \mathbf{D} : \Phi \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \mathbf{D} \text{ es lineal} \}, \quad (8.709)$$

$$\Phi' = \{ d^*, \text{ tq } \mathbf{D}[\phi] = \langle \phi, d \rangle, \mathbf{D} \in \Phi'_{\mathbf{F}} \}, \quad (8.710)$$

y

$$\Phi^\times_{\tilde{\mathbf{F}}} = \{ \tilde{\mathbf{D}} : \Phi \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}} \text{ es antilineal} \}, \quad (8.711)$$

$$\Phi^\times = \{ d, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}[\phi] = \langle d, \phi \rangle, \tilde{\mathbf{D}} \in \Phi^\times_{\tilde{\mathbf{F}}} \}. \quad (8.712)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que, por el teorema de Riesz-Fréchet, un *espacio de Hilbert es isomorfo a su dual y antidual*, es decir $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}' \cong \mathcal{H}^\times$, se llega a las dos tripletas de Gelfand que describen los Espacios de Hilbert Equipados:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}' \subset \Phi', \quad (8.713)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^\times \subset \Phi^\times, \quad (8.714)$$

8.10. Conclusiones

El estudio, desarrollo y adecuación de la Teoría de los Espacios de Hilbert Equipados (RHS) a la Teoría General de Señales y Sistemas (GSST) ha supuesto un gran avance en cuanto a la formalización rigurosa matemática de los espacios de señal. La problemática inicial que se planteaba al generar un espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ de dimensión infinita, tras definir una métrica, una norma y un producto escalar, era el encontrarse con elementos que interesaba integrar en ese espacio pero que no encajaban de una manera natural, como eran, en general, las distribuciones. Además, este tipo de elementos matemáticos planteaba una dualidad en cuanto a la definición del producto escalar y el símbolo de las integrales, puesto que, en cuanto intervenía una distribución, ya no se podía hablar del producto escalar como la integral de una función por el conjugado de la otra en el sentido de Riemann o Lebesgue, sino como una aplicación sobre una función de la que se obtenía un número complejo. Esta problemática hacía que se tuviera que tratar de diferente manera las integrales cuando intervenían en ellas funciones integrables o distribuciones. Se podía hacer una aproximación intuitiva de lo que significaba una integral con una distribución, considerando ésta como límite de una sucesión de funciones integrables, pero

no resultaba del todo claro y mucho menos servía como demostración rigurosa. La inclusión de los RHS en la GSST viene a dar solución a este problema, pero además resuelve otros más que se podían plantear.

En primer lugar, recordar que los espacios de señal de dimensión finita no requieren de RHS, como es el de las funciones periódicas de variable discreta $\mathcal{D}(N_0)$. En consecuencia, todas las consideraciones posteriores se refieren a espacios de señal de dimensión infinita.

La construcción de los espacios de señal deber ser considerada a partir de un espacio de Hilbert \mathcal{H} y no a partir simplemente de un espacio vectorial $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ como se hacía hasta ahora. Esto hace que se construya directamente un espacio vectorial que es de Banach, métrico y también topológico, pero genera las primeras restricciones en las señales ya que, para que pertenezcan al espacio de Hilbert, su norma tiene que ser finita. Aunque puede parecer contradictorio, para incluir el resto de funciones, es preciso reducir el espacio de Hilbert \mathcal{H} a uno más pequeño Φ , que sea denso dentro de \mathcal{H} , para después poder equiparlo con estas funciones. Este subespacio $\Phi \subset \mathcal{H}$ tiene la particularidad de que va a estar construido teniendo en cuenta las condiciones en las que van a ser usadas las funciones del espacio de Hilbert, es decir, cuáles son los operadores que van a actuar sobre ellas y cuál va a ser, en su caso, el análisis espectral que se quiere realizar. Esto lleva a poder construir diferentes subespacios Φ para un mismo espacio de Hilbert.

Una vez determinado Φ , se pueden añadir las funciones que queden fuera del espacio de Hilbert considerándolas como núcleos de funcionales lineales Φ' y antilineales Φ^\times sobre Φ . Pero, para esto, ha sido necesario generalizar el concepto de producto escalar, propio de un espacio de Hilbert, pasando de ser una forma hermitiana a un conjunto de funcionales lineales o antilineales, fijando una de las componentes con una función núcleo, ya sea ésta del espacio de Hilbert \mathcal{H} , que dará lugar al producto escalar ordinario, o de fuera del espacio, que dará lugar a los funcionales que no pueden ser descritos como un producto escalar, como son, por ejemplo, las distribuciones.

Esta generalización del producto escalar se ha llevado a cabo a través de la notación de Dirac de bras y kets, que consiste en una generalización de los conceptos de vectores y matrices y sus relaciones entre ellos, considerando las dos componentes de un producto escalar por separado, de forma independiente, de manera que al actuar un bra sobre un ket se obtuviese un número complejo al igual que un producto escalar (de ahí el término de bra y ket, obteniendo al juntarlos un bracket, corchete en inglés, símbolo del producto escalar). Sin embargo, la notación de Dirac habitual de los bras y kets no resulta muy útil en la teoría de señal, puesto que, aunque sea una notación más simple, se pierde parte de la información que aporta la notación de la GSST, ya que, por ejemplo una función de una base se representaría por $|\xi\rangle$ como un ket en la notación de Dirac, pero por $|e(x; \xi)\rangle$ como un ket en la notación de la GSST, donde se puede comprobar que ésta última aporta más información, como es el tipo de base y la variable en la que se describe. Es por eso que la notación de Dirac se ha empleado para introducir el concepto de funcional y generalizar el producto escalar pero, posteriormente, se ha continuado con la notación habitual de la GSST sabiendo que se puede realizar una traducción de cada señal a un bra o un ket y, por tanto, para cada señal se puede considerar un funcional lineal o antilineal cuyo núcleo sea dicha señal, ya sea ésta de norma finita o infinita.

Pero no sólo las distribuciones quedan fuera del espacio de Hilbert y han de ser añadidas, sino también, como se ha dicho anteriormente, cualquier función que no sea de norma finita. Esto lleva a considerar los RHS no sólo en los espacios de señal de variable continua, donde se definen habitualmente, sino también en los de variable discreta, ya que, aunque aquí no existan distribuciones, también hay funciones importantes que se quieren considerar como son los conjuntos de funciones base que definen la transformada de Fourier en variable discreta $\{e^{j\Omega n}\}_{\Omega}$ con $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$.

Todo este desarrollo ha llevado a considerar los espacios de señal, no como un conjunto de

funciones, sino a partir de la construcción de un par de ternas que describen los espacios de Hilbert equipados,

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (8.715)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times, \quad (8.716)$$

y que dan cabida a todo tipo de funciones que se quieran considerar para cualquier problema físico, ya que, como se había comentado, la definición de Φ y, por tanto, de Φ' y Φ^\times dependen de las condiciones del problema.

Se han construido algunas estructuras de espacios de Hilbert equipados para los espacios de señal habitualmente considerados, mostrando que para el espacio de señales periódicas de variable discreta no son necesarios los RHS ya que es de dimensión finita, mientras que para el espacio de señales de variable discreta, y los espacios de señales de variable continua, ya sean periódicos o no, sí es necesaria dicha construcción. Además se han construido varios ejemplos de RHS dentro del espacio de funciones de variable continua. Se ha probado también cómo es posible considerar los espacios de señales periódicos (de variable discreta o continua) dentro de los espacios de señal no periódicos, incluyéndolos dentro de los espacios duales, lo cual se relaciona directamente con los cambios de base de conjuntos de funciones vistos dentro de espacios de señal diferentes.

Se ha estudiado, asimismo, la relación a través de diferentes transformadas entre los espacios de Hilbert equipados construidos. Dependiendo de la naturaleza de la base que define la transformada considerada $e(\tau; \mu)$, la transformación de funciones de un determinado subespacio de un RHS cae dentro de ese mismo subespacio si el parámetro μ es de la misma naturaleza que la variable τ , o en un subespacio equivalente del RHS definido para las funciones cuya variable sea de la misma naturaleza que μ .

Finalmente, y relacionado con esto último, para todos los espacios de señal estudiados de dimensión infinita se ha encontrado un subconjunto numerable dentro de los subespacios densos Φ , lo que hace que los espacios de Hilbert sean separables y, por tanto, todos ellos sean isomorfos. Esto quiere decir que se puede encontrar una relación biunívoca entre ellos, haciendo que todos los espacios de señal de dimensión infinita sean el mismo, y, por tanto, tengan las mismas propiedades. Una de estas propiedades es la dimensión, que es claro que es una dimensión infinita, pero teniendo en consideración que será un infinito numerable si se habla de dimensión de Hilbert o infinita no numerable considerando como dimensión la de Hamel, ya que cada señal de cada espacio no puede ser expresada como una combinación lineal finita del conjunto de funciones base encontrado en cada espacio, por lo que deberá existir otro conjunto no numerable del que sí se pueda extraer un subconjunto finito que permita reconstruir cada señal como una combinación lineal de dicho subconjunto.

9. Cambios de Base desde el Punto de Vista de los RHS

9.1. Introducción

El objetivo de este capítulo consiste en interpretar las ecuaciones del cambio de base estudiadas en el Cap. 4 desde el punto de vista de la nueva estructura de los espacios de Hilbert equipados (RHS) aplicados a los señal de señal.

Como se ha visto en el Cap. 8, los espacios de Hilbert equipados constan de dos ternas

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (9.1)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times, \quad (9.2)$$

por lo que es necesario identificar en qué subespacio se localiza cada función o conjunto de funciones que se considere. Esto determinará las relaciones que se deban establecer entre los conjuntos, en este caso, de funciones base escogidas.

En primer lugar recordar, del Cap. 4, cuáles son las expresiones que llevan a las ecuaciones del cambio de base. Dado un espacio de señal $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y escogidos dos conjuntos de funciones que jueguen el papel de una base $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, una señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ puede representarse mediante una combinación lineal generalizada de cada una de estas bases por unos coeficientes como

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)], \quad (9.3)$$

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{e}(\tau; \mu')]. \quad (9.4)$$

Considerando que cada uno de los conjuntos de estas funciones bases son ortogonales, los coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ se obtienen, respectivamente, como

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle, \quad (9.5)$$

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{\tilde{A}} \langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (9.6)$$

donde

$$\langle e(\tau; \mu_i), e(\tau; \mu_j) \rangle_{\tau} = A \tilde{\delta}(\mu_i - \mu_j), \quad i, j \in \mathbb{I}, \quad (9.7)$$

$$\langle \tilde{e}(\tau; \mu'_i), \tilde{e}(\tau; \mu'_j) \rangle_{\tau} = \tilde{A} \tilde{\delta}(\mu'_i - \mu'_j), \quad i, j \in \mathbb{J}. \quad (9.8)$$

De aquí, proyectando cada uno de los elementos de una base sobre cada uno de los elementos de la otra, se obtienen dos conjuntos de funciones

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (9.9)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{\tilde{A}} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle, \quad (9.10)$$

que son los necesarios para realizar los cambios de base, es decir, obtener los coeficientes de la señal en una base conociendo los coeficientes de esa misma señal en la otra base, obteniéndose las ecuaciones finales¹

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)], \quad (9.11)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')]. \quad (9.12)$$

¹Se puede ver todo el desarrollo detallado en la Secc. 4.2 del Cap. 4.

9.2. Relación del cambio de base con la notación de Dirac de Bras y Kets

De la ecuación obtenida como resultado para el cambio de base se tiene

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')]. \quad (9.13)$$

Desarrollando tanto $\tilde{\alpha}(\mu')$ como $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ según (9.6) y (9.10) respectivamente, se obtiene que²

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\frac{1}{\tilde{A}} \langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle_{\tau} \frac{1}{\tilde{A}} \langle \tilde{e}(\tau'; \mu'), e(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \right]. \quad (9.14)$$

Dado que cada uno de los productos escalares puede considerarse como una constante para el otro producto escalar, puede introducirse uno dentro del otro de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle_{\tau} \langle \tilde{e}(\tau'; \mu'), e(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'}^* \right] = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu'} \left[\langle a(\tau), \langle \tilde{e}(\tau; \mu') \tilde{e}^*(\tau'; \mu'), e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \rangle_{\tau} \right] \end{aligned} \quad (9.15)$$

y, puesto que el parámetro μ' es constante para ambos productos escalares, se puede introducir la combinación lineal generalizada $\mathbf{CL}_{\mu'}$ dentro de ellos, abarcando únicamente las funciones que dependen de μ' ,

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \langle a(\tau), \langle \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{e}(\tau; \mu') \tilde{e}^*(\tau'; \mu')], e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \rangle_{\tau}. \quad (9.16)$$

Haciendo uso de la relación entre la combinación lineal generalizada y el producto escalar visto en la Secc. 3.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \langle a(\tau), \langle \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{e}(\tau; \mu') \tilde{e}^*(\tau'; \mu')], e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \rangle_{\tau} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \langle a(\tau), \langle \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), \tilde{e}(\tau'; \mu') \rangle_{\mu'}, e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \rangle_{\tau} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \langle a(\tau), \langle \tilde{A}\tilde{\delta}(\tau - \tau'), e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} \rangle_{\tau}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}(\tau - \tau'), e^*(\tau'; \mu) \rangle_{\tau'} &= \langle e(\tau'; \mu), \tilde{\delta}(\tau - \tau') \rangle_{\tau'} = \\ &= \mathbf{CL}_{\tau'} [e(\tau'; \mu) \tilde{\delta}(\tau - \tau')] = \mathbf{CL}_{\tau'} [\tilde{\delta}(\tau - \tau') e(\tau'; \mu)] = e(\tau; \mu), \end{aligned} \quad (9.18)$$

se llega a la expresión

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{\tilde{A}} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \quad (9.19)$$

es decir, la expresión inicial del cálculo de los coeficientes de una señal en una base.

De esta demostración se desprende un resultado interesante: comparando las ecuaciones (9.14) y (9.19), es decir, la expresión del cambio de base y el cálculo de los coeficientes de una señal en una base,

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle_{\tau} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}] \quad (9.20)$$

²Ambos productos escalares que aparecen dentro de la combinación lineal son sobre la variable τ , variable real del problema; pero, para evitar duplicidades y posibles confusiones y, dado que la variable al realizar el producto escalar puede considerarse una variable muda, en el segundo producto escalar irá denotada como τ' , pero teniendo en cuenta que la naturaleza es exactamente la misma que τ .

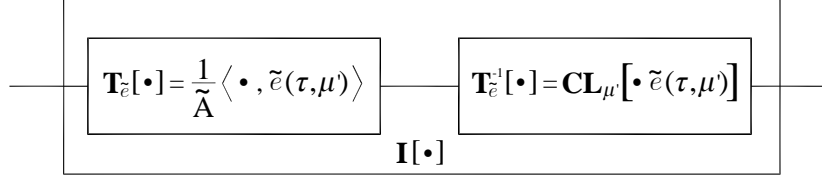


Figura 9.1: Esquema representativo de la combinación de dos sistemas correspondientes a los operadores transformada (sobre la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$) y transformada inversa (sobre la misma base). La combinación de ambos genera el sistema identidad.

y

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \quad (9.21)$$

se puede determinar que, considerando como un operador la expresión

$$\frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle \cdot, \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle \tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (9.22)$$

este operador se corresponde con el operador identidad en el dominio real:

$$\mathbf{I}[\cdot] \equiv \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle \cdot, \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle \tilde{e}(\tau; \mu')]. \quad (9.23)$$

En efecto, no es difícil comprobar que lo que realmente significa este operador es la composición de los operadores transformada directa y transformada inversa según la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$ puesto que el producto escalar interior es el cálculo de los coeficientes de la señal en esa base y la combinación lineal es la reconstrucción de la señal original a partir de esos coeficientes, es decir, no es más que el desarrollo de la expresión

$$\mathbf{I}[\cdot] = (\mathbf{T}_{\tilde{e}}^{-1} \circ \mathbf{T}_{\tilde{e}})[\cdot] = \mathbf{T}_{\tilde{e}}^{-1}[\mathbf{T}_{\tilde{e}}[\cdot]] \quad (9.24)$$

y cuya interpretación esquemática se muestra en la Fig. 9.1.

Para una señal cualquiera se tiene que

$$a(\tau) = \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle \tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (9.25)$$

y para el cálculo de los coeficientes de esa señal en una base cualquiera $e(\tau; \mu)$ la expresión es

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau} = \frac{1}{AA} \langle \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau'), \tilde{e}(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \tilde{e}(\tau; \mu')], e(\tau; \mu) \rangle_{\tau} = \\ &= \frac{1}{AA} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle \langle a(\tau'), \tilde{e}(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}] = \\ &= \frac{1}{AA} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau'), \tilde{e}(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}], \end{aligned} \quad (9.26)$$

que es la expresión (9.14) que se corresponde con el cambio de base.

Esto quiere decir que la ecuación del cambio de base es un caso particular del operador identidad identificado en (9.23), ya que un cambio de base no altera la señal en el dominio real, simplemente modifica la expresión de sus coeficientes. Dicho operador identidad se podrá formar a partir de cualquier conjunto de funciones que jueguen el papel de una base ortogonal,

$$\langle e(\tau; \mu_i), e(\tau; \mu_j) \rangle = A \tilde{\delta}(\mu_i - \mu_j), \quad i, j \in \mathbb{I}, \quad (9.27)$$

como puede ser también un conjunto de deltas

$$\langle \tilde{\delta}(\tau - \tau_i), \tilde{\delta}(\tau - \tau_j) \rangle = \tilde{\delta}(\tau_i - \tau_j), \quad i, j \in \mathbb{K}, \quad A = 1, \quad (9.28)$$

donde \mathbb{I} y \mathbb{K} representan dos enumeradores.

En la notación de Dirac de bras y kets (ver Secc. 8.3), donde se considera cada función como una generalización de un vector, puede verse el operador identidad (9.23) como

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [|\tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|]. \quad (9.29)$$

De hecho, por las propiedades de los bras y kets, se puede ver como

$$\begin{aligned} \langle a(\tau) | \mathbf{I} &= \langle a(\tau) | \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [|\tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] = \\ &= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau) | \tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] \\ &= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{A} \tilde{\alpha}(\mu') \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] = \\ &= \langle a(\tau) |, \end{aligned} \quad (9.30)$$

confirmando que se trata del operador identidad.

Y, volviendo a la relación entre (9.20) y (9.21), considerando el bra

$$a(\tau) \equiv \langle a(\tau) | \quad (9.31)$$

y el ket

$$e^*(\tau; \mu) \equiv |e(\tau; \mu)\rangle, \quad (9.32)$$

y dado que

$$\frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [|\tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] \quad (9.33)$$

representa el operador identidad, la expresión del cálculo de los coeficientes de una señal en una base dada por

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{A} \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle \quad (9.34)$$

puede igualmente expresarse como

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \frac{1}{A} \langle a(\tau) | e(\tau; \mu) \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \langle a(\tau) | \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [|\tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] | e(\tau; \mu) \rangle = \\ &= \frac{1}{AA} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau) | \tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu') | e(\tau; \mu) \rangle], \end{aligned} \quad (9.35)$$

que es la expresión del cambio de base, ya que, de (9.10),

$$\langle \tilde{e}(\tau; \mu') | e(\tau; \mu) \rangle = A \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu'), \quad (9.36)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \frac{1}{A} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau) | e(\tau; \mu) \rangle \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')] = \\ &= \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')], \end{aligned} \quad (9.37)$$

llegando nuevamente, y quizá de forma más sencilla que en el desarrollo de la Secc. 4.2, a la expresión del cambio de base vista en (9.12).

En definitiva, el cambio de base puede ser visto simplemente por la inclusión del operador

$$\frac{1}{\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu'} [|\tilde{e}(\tau; \mu')\rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu')|] \quad (9.38)$$

dentro del cálculo de los coeficientes, así

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu'} [\langle a(\tau) | \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle \langle \tilde{e}(\tau; \mu') | e(\tau; \mu) \rangle] \quad (9.39)$$

y

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \frac{1}{\tilde{A}\tilde{A}} \mathbf{CL}_{\mu} [\langle a(\tau) | e(\tau; \mu) \rangle \langle e(\tau; \mu) | \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle] \quad (9.40)$$

9.3. Interpretación del cambio de base bajo los RHS

Uno de los problemas principales que han surgido en los espacios de señal de dimensión infinita es que muchas veces el conjunto de funciones que se escoge para que juegue el papel de una base no cumple todos los requisitos para serlo, principalmente porque está compuesto por funciones que no pertenecen al espacio de señal inicial. Esta problemática se ha resuelto con la incorporación de los espacios de Hilbert equipados, en los que se incluyen los espacios dual Φ' y antidual Φ^\times de un subespacio denso Φ de \mathcal{H} , el espacio de Hilbert inicial. En estos espacios duales se pueden encontrar todas aquéllas funciones que, aún no perteneciendo al espacio de Hilbert \mathcal{H} , son importantes o interesantes de considerar, y la manera de interpretarlas es considerándolas como núcleos de funcionales lineales y antilineales, respectivamente, sobre las funciones de Φ . De esta manera se pueden incluir todos aquellos conjuntos de funciones base que no pertenezcan al espacio de Hilbert, considerándolos dentro de los espacios duales. Todas las ecuaciones para llegar a las expresiones de los cambios de base resumidas en la Secc. 9.1 son igualmente válidas, incluso cuando se consideran bases no pertenecientes al espacio de Hilbert, ya que se ha llegado a resultados concretos y correctos que se han obtenido en el Cap. 4 sobre los cambios de base sin tener en cuenta los RHS ni los espacios duales, pero haciendo uso, aunque de manera un tanto velada, de la teoría de distribuciones. Pero la interpretación bajo los RHS no puede ser la misma, ya que intervienen en el desarrollo productos escalares –como los de las ecuaciones (9.5)-(9.6), pero sobre todo (9.9)-(9.10), ya que determinan los conjuntos de funciones para el cambio de base– que no pueden ser considerados como tales cuando alguno de los elementos a los que se aplica no forman parte del espacio de Hilbert, como es el caso de algunas funciones base.

El hecho de considerar los RHS hace que la función original $a(\tau)$ pueda pertenecer también a cualquiera de los subespacios de la terna de los RHS, en concreto a alguno de los espacios duales. Esto haría que para realizar el cálculo de sus coeficientes $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ en las bases $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, respectivamente, sí habría que tener en cuenta que la proyección de $a(\tau)$ sobre cada elemento de cada base no sería un producto escalar estricto, independientemente del subespacio donde se localizase la base escogida, sino que habría que acudir a la aplicación de funcionales lineales y/o antilineales; pero eso no sería objeto de la interpretación expresa de los cambios de base, sino del estudio directo de los RHS, los espacios duales y los funcionales que se ha visto en el Cap. 8.

Para realizar una interpretación cuidadosa de los cambios de base bajo los RHS, se van a distinguir tres situaciones principales de localización de los conjuntos de funciones base dentro de los subespacios de los RHS:

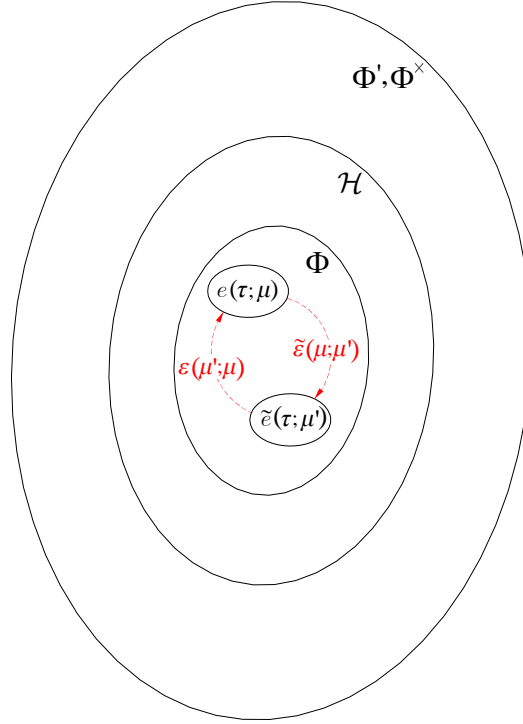


Figura 9.2: Representación de una estructura de espacio de Hilbert equipado en el que las dos bases escogidas pertenecen al subespacio denso Φ . Se representan, asimismo, los conjuntos de funciones para realizar los cambios entre estas dos bases.

1. Ambas bases, $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ pertenecen al subespacio denso Φ .

Este caso no presenta mayor dificultad, puesto que, dado que las bases pertenecen a $\Phi \subset \mathcal{H}$, los productos escalares entre los elementos de la base para encontrar los conjuntos de funciones $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ están perfectamente definidos, siendo

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (9.41)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle, \quad (9.42)$$

siempre productos escalares entre elementos de un espacio de Hilbert, como se puede comprobar en la representación de la Fig. 9.2.

2. Una base $e(\tau; \mu)$ pertenece al subespacio Φ y la otra, $\tilde{e}(\tau; \mu')$, a un espacio dual.

En este caso, el cálculo de los conjuntos de funciones (9.9)-(9.10) para realizar el cambio de base no puede interpretarse como un producto escalar, ya que uno de los elementos no pertenece al espacio de Hilbert tal como se muestra en la Fig. 9.3. Es por ello que en este caso hay que recurrir a la interpretación del producto escalar como funcionales.

La expresión

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle \quad (9.43)$$

debe ser interpretada como un conjunto de funcionales lineales $\tilde{E}_{\mu'}$, para cada μ' , que actúan sobre cada una de las funciones $e(\tau; \mu)$, para cada μ , donde el núcleo del funcional

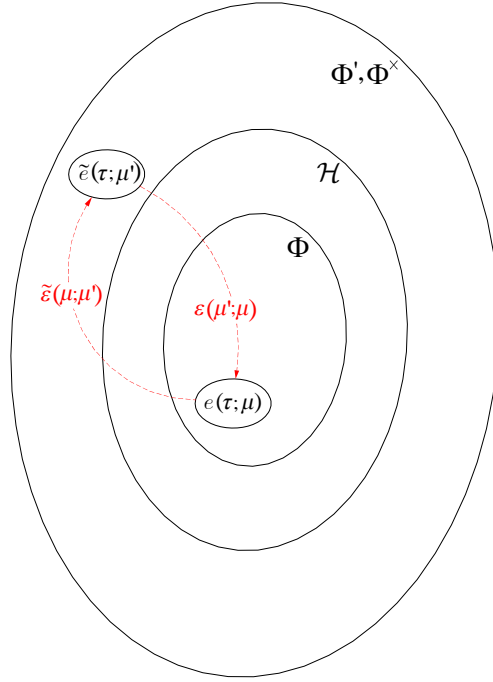


Figura 9.3: Representación de una estructura de espacio de Hilbert equipada en el que una de las bases escogidas pertenecen al subespacio denso Φ y la otra a uno de los espacios duales de éste. Se representan, asimismo, los conjuntos de funciones para realizar los cambios entre estas dos bases.

$\tilde{\mathbf{E}}_{\mu'}$ es $\tilde{e}^*(\tau; \mu')$, para cada μ' , siendo $\tilde{e}^*(\tau; \mu') \subset \Phi'$. De esta forma³

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \tilde{\mathbf{E}}_{\mu'} [e(\tau; \mu)] \quad (9.44)$$

es el resultado de la aplicación de un conjunto de funcionales lineales sobre un conjunto de funciones. Dado que $e(\tau; \mu) \subset \Phi$, cada uno de los valores resultado de $\varepsilon(\mu'; \mu)$ estará bien definido.

De la misma manera, la expresión

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle \quad (9.45)$$

ha de ser también interpretada como un conjunto de funcionales antilineales $\overline{\tilde{\mathbf{E}}}_{\mu'}$, para cada μ' , que actúan sobre cada una de las funciones $e(\tau; \mu)$, para cada μ , donde el núcleo del funcional $\overline{\tilde{\mathbf{E}}}_{\mu'}$ es $\tilde{e}(\tau; \mu')$, para cada μ' , siendo $\tilde{e}(\tau; \mu') \subset \Phi^\times$. Así,

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \overline{\tilde{\mathbf{E}}}_{\mu'} [e(\tau; \mu)] \quad (9.46)$$

es el resultado de la aplicación de un conjunto de funcionales antilineales sobre un conjunto de funciones. Puesto que $e(\tau; \mu) \subset \Phi$, cada uno de los valores resultado de $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ estará bien definido.

³A pesar de la notación con gorrito, el funcional $\tilde{\mathbf{E}}_{\mu'}$ es un funcional lineal, para cada μ' , ya que trata de representar cada uno de los funcionales asociados al conjunto de funciones base $\tilde{e}(\tau; \mu')$. El funcional antilineal correspondiente se representa como $\overline{\tilde{\mathbf{E}}}_{\mu'}$, para cada μ' .

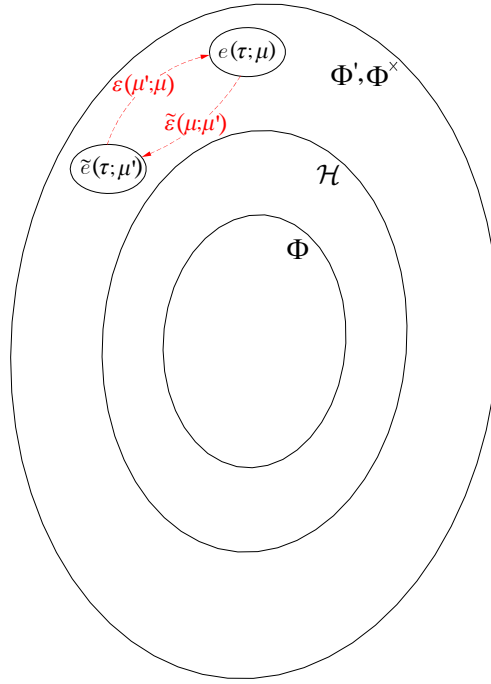


Figura 9.4: Representación de una estructura de espacio de Hilbert equipado en el que las dos bases escogidas pertenecen a los subespacios duales del subespacio Φ . Se representan, asimismo, los conjuntos de funciones para realizar los cambios entre estas dos bases.

Este caso muestra, más aún, una particularidad ciertamente importante. El hecho de considerar una base dentro del espacio de Hilbert y otra que no pertenece a éste hace que sea más que probable que la cardinalidad de ambas bases no sea la misma, como se ha visto en muchos casos particulares del Cap. 4. Esto hace que pueda existir una cierta ambigüedad a la hora de determinar la dimensión del espacio, ya que todas las bases definidas en un mismo espacio deberían tener el mismo número de elementos. Es por ello que para determinar dicha dimensión hay que considerar siempre la cardinalidad del conjunto de funciones que pertenece al espacio de Hilbert y que, por tanto, cumplen todas las condiciones para ser base.

3. Ambas bases, $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$ pertenecen a los espacios duales.

En este caso tampoco se puede considerar el producto escalar para el cálculo de los conjuntos de funciones (9.9)-(9.10) como tal, ya que ninguna función pertenece propiamente al espacio de Hilbert, según se representa en la Fig. 9.4, por lo que hay que recurrir nuevamente a los funcionales. Puesto que ambos conjuntos pertenecen a los espacios duales, existen dos posibles interpretaciones para el cálculo de cada uno de los conjuntos $\varepsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$. Por un lado, para el cálculo de

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (9.47)$$

se puede considerar, al igual que en el caso anterior, el conjunto de funcionales lineales $\tilde{\mathbf{E}}_{\mu'}$, para cada μ' , que actúan sobre cada una de las funciones $e(\tau; \mu)$, para cada μ , donde el núcleo del funcional $\tilde{\mathbf{E}}_{\mu'}$ es $\tilde{e}^*(\tau; \mu')$, para cada μ' , siendo $\tilde{e}^*(\tau; \mu') \subset \Phi'$, así

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \tilde{\mathbf{E}}_{\mu'} [e(\tau; \mu)], \quad (9.48)$$

pero como $e(\tau; \mu) \notin \mathcal{H}$ para cada μ , no se puede asegurar la correcta definición de todos los valores de $\varepsilon(\mu'; \mu)$. De la misma manera, se puede considerar el conjunto de funcionales antilineales $\overline{\mathbf{E}}_\mu$, para cada μ , actuando sobre $\tilde{e}(\tau; \mu')$, para cada μ' , siendo $e(\tau; \mu) \subset \Phi^\times$ cada uno de los núcleos de los funcionales $\overline{\mathbf{E}}_\mu$, para cada μ . De esta manera, también se puede representar

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \overline{\mathbf{E}}_\mu [\tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (9.49)$$

pero, nuevamente, dado que $\tilde{e}(\tau; \mu') \notin \mathcal{H}$ para cada μ' , no se puede asegurar la correcta definición de cada uno de los valores de $\varepsilon(\mu'; \mu)$.

Igualmente, para el cálculo de

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle \quad (9.50)$$

existen dos posibilidades. Por un lado, como en el caso anterior, se puede considerar el conjunto de funcionales antilineales $\overline{\mathbf{E}}_{\mu'}$, para cada μ' , que actúan sobre cada una de las funciones $e(\tau; \mu)$, para cada μ , donde el núcleo del funcional $\overline{\mathbf{E}}_{\mu'}$ es $\tilde{e}(\tau; \mu')$, para cada μ' , siendo $\tilde{e}(\tau; \mu') \subset \Phi^\times$. Así,

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \overline{\mathbf{E}}_{\mu'} [e(\tau; \mu)] \quad (9.51)$$

da como resultado un conjunto de elementos que pueden no estar perfectamente definidos, ya que $e(\tau; \mu) \notin \mathcal{H}$ para cada μ . Asimismo, también se puede interpretar como la actuación del conjunto de funcionales lineales \mathbf{E}_μ , para cada μ , sobre $\tilde{e}(\tau; \mu')$, para cada μ' , donde $e^*(\tau; \mu)$ representa, para cada μ , el núcleo del funcional \mathbf{E}_μ , siendo $e^*(\tau; \mu) \subset \Phi'$. De esta manera,

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \mathbf{E}_\mu [\tilde{e}(\tau; \mu')], \quad (9.52)$$

pero el resultado no se puede asegurar para todos los valores de μ y μ' puesto que $\tilde{e}(\tau; \mu') \notin \mathcal{H}$ para cada μ' .

Un caso particular importante de esta situación es aquél en el que se consideran las funciones periódicas dentro de los espacios duales de funciones no periódicas. En este caso se puede escoger una base genérica $e(\tau; \mu)$ del espacio dual y otra $\tilde{e}(\tau; \mu')$ que pertenezca únicamente al subconjunto de funciones periódicas de un periodo determinado. Ésta será, en general, un subconjunto de la primera, es decir, $\tilde{e}(\tau; \mu') \subset e(\tau; \mu)$, como muestra gráficamente la Fig. 9.5, pero que será una base perfectamente definida si sólo se considera dentro del espacio de funciones periódicas. Al ser un subconjunto tendrá cardinalidad diferente, por lo que realizar la proyección de $\tilde{e}(\tau; \mu')$ sobre $e(\tau; \mu)$ con el producto escalar definido para el espacio general para obtener $\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')$ resulta sencillo, ya que simplemente consiste en quedarse con las funciones de $e(\tau; \mu)$ que están en $\tilde{e}(\tau; \mu')$ y la interpretación para hacerlo es la misma que la explicada anteriormente; pero la proyección inversa, es decir $e(\tau; \mu)$ sobre $\tilde{e}(\tau; \mu')$ con el producto escalar definido sólo para las funciones periódicas para obtener $\varepsilon(\mu'; \mu)$ no es de fácil interpretación, ya que se hay muchas funciones que no pertenecen a ese espacio y se entenderían como elementos ficticios dentro del espacio de funciones periódicas, ya que matemáticamente se puede hacer pero no tienen interpretación, puesto que no pertenecen al espacio y, por tanto, no aportan nada como base a las funciones periódicas. Sin embargo, esto permite también pasar de un espacio a otro en el que se represente el mismo tipo de funciones, a partir del cambio de base generalizado.

No se considera el caso en el que la base pertenezca al espacio de Hilbert \mathcal{H} y no al subespacio denso Φ , ya la construcción de éste va a estar determinada por la base que se escoja para poder realizar el posible análisis espectral, en definitiva, por la transformada que se defina, por lo que la base siempre pertenecerá a Φ o a sus espacios duales Φ' y Φ^\times .

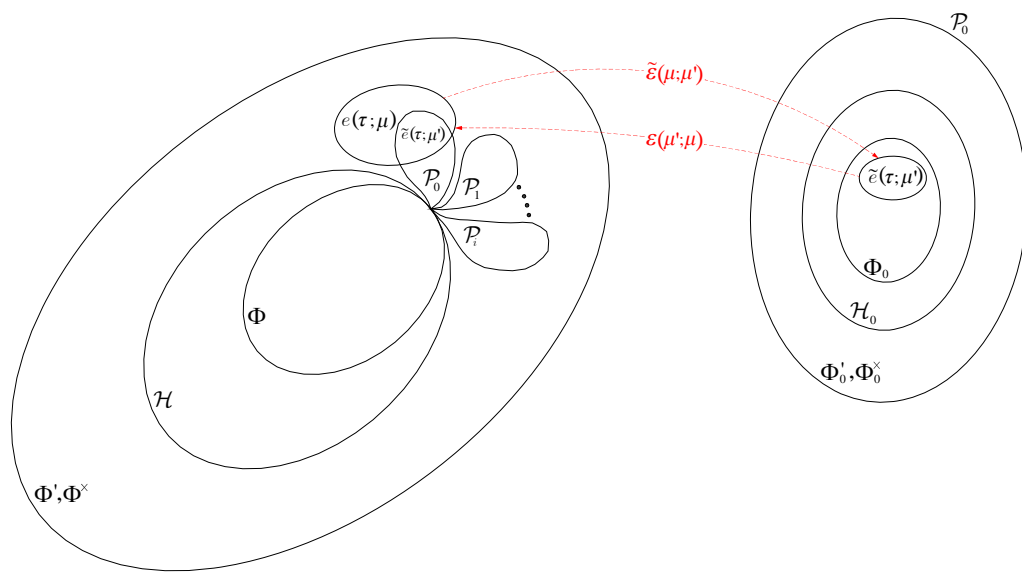


Figura 9.5: A la izquierda, representación de una estructura de espacio de Hilbert equipado junto con los conjuntos de funciones periódicas dentro de los espacios duales de Φ . Una de las bases escogidas del espacio general se encuentra dentro de los espacios duales, mientras que la otra, que es un subconjunto de la anterior, se localiza dentro del conjunto de las funciones periódicas. El espacio de Hilbert generado únicamente por el conjunto de funciones periódicas se muestra a la derecha, donde la base escogida sí que pertenece al subespacio denso Φ_0 con el álgebra definida en este espacio. Se representan, asimismo, los conjuntos de funciones para realizar los cambios entre estas dos bases y entre estos dos espacios.

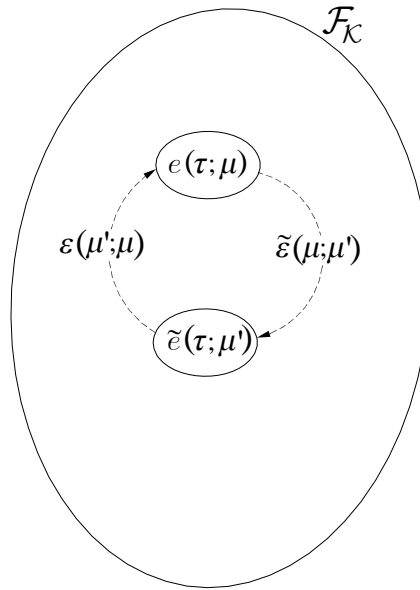


Figura 9.6: Espacio vectorial euclideo donde se representan dos bases. Los conjuntos de funciones para realizar los cambios de base en este caso se corresponden con las conocidas matrices para el cambio de base, ya que este espacio es de dimensión finita.

Remarcar también que, aunque se distingan estas tres situaciones, se podrían unificar todas en el sentido de la actuación de funcionales lineales y antilineales, ya que éstas engloban el caso particular de que los núcleos de estos funcionales pertenezcan al espacio de Hilbert \mathcal{H} , o más concretamente al subespacio denso Φ , y puedan ser interpretados como un producto escalar ordinario.

Finalmente, hacer notar que, en todos los casos, los conjuntos de funciones $\epsilon(\mu'; \mu)$ y $\tilde{\epsilon}(\mu; \mu')$ se podrán localizar dentro de algún subespacio de algún RHS concreto, dependiendo de la naturaleza de los parámetros μ y μ' , según la base, y por tanto, la transformada que se esté considerando, de acuerdo con los resultados obtenidos en la Secc. 8.7 del Cap. 8 sobre relaciones de los RHS a través de transformadas.

9.4. Casos particulares

A continuación se describen los casos particulares de cambios de base que se han expuesto en la Secc. 4.5 del Cap. 4 bajo la interpretación de los RHS.

9.4.1. Espacios euclideos de dimensión finita

En los espacios de dimensión finita no es necesario construir los RHS porque todas las funciones pertenecen al espacio de Hilbert, por lo que los cambios de base se realizan por medio de la construcción de las matrices del cambio de base sin necesidad de acudir a ningún tipo de teoría de distribuciones ni uso de funcionales. El esquema general del cambio de base en este caso es el que se muestra en la Fig. 9.6.

9.4.2. Espacio de funciones $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$

Este espacio se corresponde con el espacio de funciones de variable continua $f(x)$. Con la notación $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ se denotaban, en la versión GSST-v1d, todas las funciones de variable

continua. La construcción de los RHS para este espacio, según la versión GSST-v2, parte del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. El producto escalar definido en este espacio es

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx. \quad (9.53)$$

Escogiendo para este espacio los conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ con $\xi \in \mathbb{R}$, que definen la transformada de Fourier, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; x') = \left\{\frac{1}{\pi(x-x')}\right\}_{x'}$ con $x' \in \mathbb{R}$, que define la transformada de Hilbert, los subespacios que se pueden generar son $\Phi_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R})^4$ a partir de $e(x; \xi)$ y $\Phi_2 = \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ a partir de $\tilde{e}(x; x')$ junto con sus espacios duales y antiduales correspondientes. Dado que, tanto $e(x; \xi)$ como $\tilde{e}(x; x')$ son conjuntos de funciones que no son de cuadrado integrable, es decir, no pertenecen al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ sino a sus duales, y puesto que $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, nos quedaremos con las ternas

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (9.54)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}). \quad (9.55)$$

Estos dos conjuntos de funciones base poseen una cantidad infinita no numerable de elementos pero, al localizarse en los espacios duales, se trata de lo que se denomina ‘pseudobases’ y no definen la dimensión del espacio de señal correspondiente, sino que deberá existir otro conjunto dentro de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que sí sea base, como es, por ejemplo, el conjunto de polinomios de Hermite definidos en el Apdo. 8.6.4 del Cap. 8.

Este caso particular se corresponde con la situación 3 en el que ambos conjuntos de funciones base se encuentran en los espacios duales tal como muestra la Fig. 9.7, por lo que no es posible aplicar el producto escalar como tal, sino que hay que considerar cada una de las funciones base como núcleos de funcionales lineales y antilineales. Los conjuntos para realizar los cambios de base son

$$\varepsilon(x'; \xi) = \left\langle e^{j\xi x}, \frac{1}{\pi(x-x')} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\xi x}}{\pi(x-x')} dx = j \operatorname{sign}(\xi) e^{j\xi x'}, \quad (9.56)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; x') = \left\langle \frac{1}{\pi(x-x')}, e^{j\xi x} \right\rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x}}{\pi(x-x')} dx = -j \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'}, \quad (9.57)$$

pero los productos escalares y las integrales que aparecen no pueden ser entendidos como tales, sino como funcionales.

Por un lado, puede calcularse $\varepsilon(x'; \xi)$ como

$$\varepsilon(x'; \xi) = \mathbf{HB}_{x'} \left[e^{j\xi x} \right], \quad (9.58)$$

donde $\mathbf{HB}_{x'}$ es un funcional lineal cuyo núcleo es $\frac{1}{\pi(x-x')}$, para cada x' , por lo que $\left\{\frac{1}{\pi(x-x')}\right\}_{x'} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, o bien como

$$\varepsilon(x'; \xi) = \tilde{\mathbf{F}}_\xi \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right], \quad (9.59)$$

siendo $\tilde{\mathbf{F}}_\xi$ un funcional antilineal cuyo núcleo es $e^{j\xi x}$, para cada ξ , por lo que $\{e^{j\xi x}\}_\xi \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. En ambos casos, dado que cada una de las funciones sobre las que se aplican los funcionales no son de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, no se puede asegurar la correcta definición de $\varepsilon(x'; \xi)$ en todos sus puntos.

⁴Hay que tener cuidado en no confundir la notación $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ referida a la versión GSST-v1d, que indica el conjunto de todas las funciones (y distribuciones) de variable continua, con la notación de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ utilizada en la versión GSST-v2, que indica sólo el conjunto de funciones de variable continua que son infinitamente derivables, decrecen a 0 más rápido que la inversa de cualquier polinomio conforme x tiende a infinito y que tanto ellas como sus derivadas multiplicadas por cualquier polinomio son de cuadrado integrable.

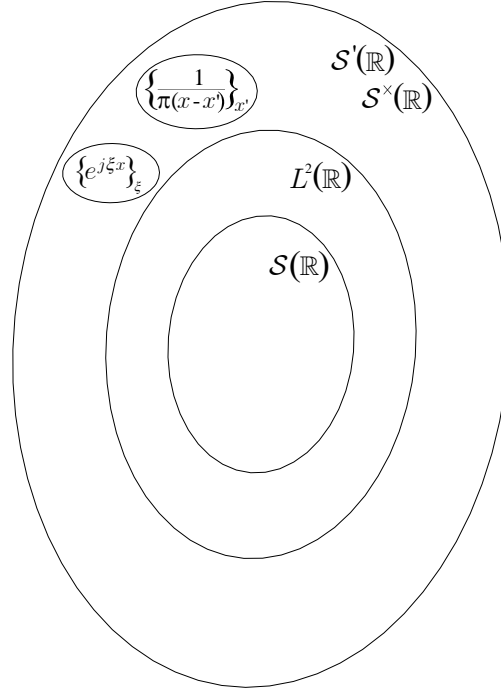


Figura 9.7: Estructura del espacio de Hilbert de funciones de variable continua en el que se representan los conjuntos de funciones base que definen la transformada de Fourier y la transformada de Hilbert localizados en los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

Por otro lado, para el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(\xi; x')$ se tiene algo semejante, interpretándolo como

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; x') = \widetilde{\mathbf{H}\mathbf{B}}_{x'} \left[e^{j\xi x} \right], \quad (9.60)$$

siendo $\widetilde{\mathbf{H}\mathbf{B}}_{x'}$ un funcional antilineal cuyo núcleo es $\frac{1}{\pi(x-x')}$, para cada x' , por lo que $\left\{ \frac{1}{\pi(x-x')} \right\}_{x'} \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, o bien como

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; x') = \mathbf{F}_\xi \left[\frac{1}{\pi(x-x')} \right], \quad (9.61)$$

donde \mathbf{F}_ξ es un funcional lineal con núcleo $e^{-j\xi x}$, para cada ξ , por lo que $\{e^{-j\xi x}\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

9.4.3. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0)$

Este espacio se corresponde con el espacios de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua, $f_0(x)$. La construcción de los RHS, para este espacio, parte del espacio de Hilbert $L^2(\langle X_0 \rangle)$, donde el producto escalar definido es

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx. \quad (9.62)$$

Escogiendo para este espacio los conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; x') = \{\delta_0(x-x')\}_{x'}$, con $x' \in \langle X_0 \rangle$, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier, se puede generar el subespacio $\Phi = \mathcal{P}(X_0)$ ⁵ que,

⁵Hay que tener cuidado en no confundir la notación $\mathcal{P}(X_0)$ referida a la versión GSST-v1d, que indica el conjunto de todas las funciones (y distribuciones) periódicas de periodo X_0 de variable continua, con la notación de $\mathcal{P}(X_0)$ utilizada en la versión GSST-v2, que indica sólo el conjunto de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua y que sean infinitamente derivables.

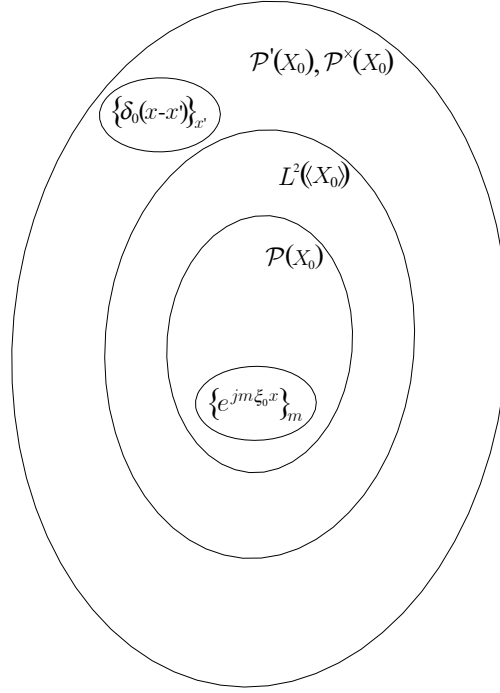


Figura 9.8: Estructura del espacio de Hilbert de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua en el que se representa el conjunto de funciones base que definen una transformada identidad en los espacios duales $\mathcal{P}'(X_0)$ y $\mathcal{P}^\times(X_0)$ y el conjunto de funciones base que define el desarrollo en serie de Fourier localizado en el espacio $\mathcal{P}(X_0)$.

junto con su dual y antidual generan las ternas

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(X_0), \quad (9.63)$$

$$\mathcal{P}(X_0) \subset L^2(\langle X_0 \rangle) \subset \mathcal{P}^\times(X_0), \quad (9.64)$$

que definen este espacio de Hilbert equipado. Este caso particular se corresponde con la situación 2, en la que una de las bases pertenece al subespacio denso, $\tilde{e}(x; m) \in \mathcal{P}(X_0)$ mientras que la otra no, $e(x; x') \in \mathcal{P}'(X_0), \mathcal{P}^\times(X_0)$, como muestra la Fig. 9.8, por lo que hay que tener una cierta precaución a la hora de interpretar los productos escalares que aparecen, ya que no son tales, sino que conjuntos de funcionales. Se puede apreciar también que la cardinalidad de ambos conjuntos no es la misma, como se ha sugerido anteriormente, ya que $e(x; x')$ posee un conjunto infinito no numerable de elementos ($\text{card}(\{\delta_0(x-x')\}_{x'}) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$), mientras que $\tilde{e}(x; m)$ contiene un número infinito numerable ($\text{card}(\{e^{jm\xi_0 x}\}_m) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$). Puesto que $\tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m \subset \mathcal{P}(X_0)$, la dimensión del espacio es infinita numerable.

Los conjuntos para realizar los cambios de base en este caso son

$$\varepsilon(m; x') = \frac{1}{X_0} \langle \delta_0(x-x'), e^{jm\xi_0 x} \rangle = \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 x'}, \quad (9.65)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x'; m) = \langle e^{jm\xi_0 x}, \delta_0(x-x') \rangle = e^{jm\xi_0 x'}. \quad (9.66)$$

Estos productos escalares tienen que ser interpretados como funcionales. Por un lado,

$$\varepsilon(m; x') = \frac{1}{X_0} \tilde{\mathbf{D}}_{x'} [e^{jm\xi_0 x}], \quad (9.67)$$

siendo $\tilde{\mathbf{D}}_{x'}$ un funcional antilineal con núcleo $\delta_0(x - x')$, para cada x' , por lo que $\{\delta_0(x - x')\}_{x'} \subset \mathcal{P}^\times(X_0)$. Puesto que $e^{jm\xi_0 x}$ son todas, para cada m , funciones de $\mathcal{P}(X_0)$, se puede asegurar que $\varepsilon(m; x')$ está correctamente definido para todos sus puntos.

Por otro lado,

$$\tilde{\varepsilon}(x'; m) = \mathbf{D}_{x'} \left[e^{jm\xi_0 x} \right], \quad (9.68)$$

donde $\mathbf{D}_{x'}$ representa un funcional lineal cuyo núcleo es $\delta_0(x - x')$, para cada x' , por lo que $\{\delta_0(x - x')\}_{x'} \subset \mathcal{P}'(X_0)$. Al igual que antes, dado que $e^{jm\xi_0 x}$ son todas funciones de $\mathcal{P}(X_0)$, para cada m , se puede asegurar que $\tilde{\varepsilon}(x'; m)$ está correctamente definido para todos sus puntos.

9.4.4. Espacio de funciones $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{S}(-\infty, \infty)$

En este caso particular se consideran también el conjunto de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua $f_0(x)$, pero dentro del espacio de todas las funciones de variable continua. Al igual que el caso 9.4.2, el espacio de Hilbert original es $L^2(\mathbb{R})$ y el producto escalar definido es

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx. \quad (9.69)$$

Tomando como conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(x; \xi) = \{e^{j\xi x}\}_\xi$ con $\xi \in \mathbb{R}$, que definen la transformada de Fourier, las ternas que definen el espacio de Hilbert equipado en este caso son

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (9.70)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (9.71)$$

y es en los espacios duales donde se localizan el conjunto de funciones periódicas, ya que cualquiera de ellas no va a ser de cuadrado integrable y, por tanto, no pertenecerá al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Pero, por otro lado, como se ha visto en el caso 9.4.3, en el espacio de funciones periódicas de periodo X_0 se puede definir el producto escalar

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx \quad (9.72)$$

y el conjunto de funciones base $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(x; m) = \{e^{jm\xi_0 x}\}_m$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier. Nos encontraríamos en el caso particular de la situación 3 donde se considera el conjunto de funciones periódicas dentro de los espacios duales de un espacio más general y donde el conjunto de funciones base escogido es un subconjunto de la base escogida en el espacio general, así

$$\left\{ e^{jm\xi_0 x} \right\}_m \subset \left\{ e^{j\xi x} \right\}_\xi. \quad (9.73)$$

Gráficamente, el esquema de los RHS es el que se muestra en la Fig. 9.9. Se puede comprobar también que la cardinalidad de cada conjunto es distinta, ya que $\text{card}\left(\left\{e^{j\xi x}\right\}_\xi\right) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ y $\text{card}\left(\left\{e^{jm\xi_0 x}\right\}_m\right) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

En este caso, la interpretación del cálculo de $\varepsilon(m; \xi)$ no es la misma que la de $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ por encontrarse considerada en espacios diferentes. Estos conjuntos para realizar el cambio de base

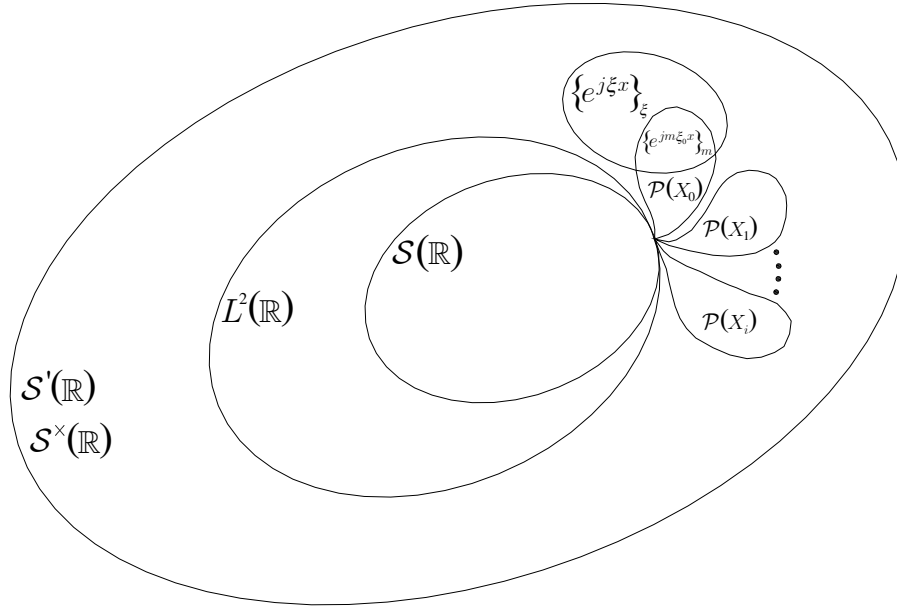


Figura 9.9: Estructura del espacio de Hilbert de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua dentro de los espacios duales de las funciones de variable continua $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, en el que se representa el conjunto de funciones base que definen la transformada de Fourier en estos mismo espacios duales y el conjunto de funciones base que define el desarrollo en serie de Fourier, localizado también en estos espacios duales, pero como subconjunto de la primera base, dentro también del conjunto de funciones periódicas de periodo X_0 de variable continua.

son

$$\begin{aligned} \varepsilon(m; \xi) &= \frac{1}{X_0} \langle e^{j\xi x}, e^{jm\xi_0 x} \rangle = \\ &= \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} e^{j\xi x} e^{-jm\xi_0 x} dx = \text{sinc} \left(\frac{X_0}{2} (\xi - m\xi_0) \right), \end{aligned} \quad (9.74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\xi; m) &= \langle e^{jm\xi_0 x}, e^{j\xi x} \rangle = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x} e^{-j\xi x} dx = 2\pi\delta(\xi - m\xi_0), \end{aligned} \quad (9.75)$$

donde se puede comprobar que ambos productos escalares son diferentes porque están definidos en espacios diferentes.

Por un lado, el cálculo de $\varepsilon(m; \xi)$ se realiza sin mayores problemas matemáticamente, puesto que todas las funciones que intervienen son de cuadrado integrable en un periodo de longitud X_0 , por lo que nos encontraríamos en la situación 1, donde el producto escalar está bien definido y puede ser considerado como tal; sin embargo no resulta sencillo de interpretar porque una de las componentes del producto escalar no pertenece al espacio, ya que $e^{j\xi x}$ no es una función periódica de periodo X_0 para la mayoría de los valores de $\xi \in \mathbb{R}$, de ahí que aparezca la función sinc, de la que se obtendrá cualquier valor para un ξ arbitrario, que no resulta interesante, pero siempre será nula para valores de $\xi = k\xi_0$, que sí generan funciones periódicas de periodo X_0 , salvo para $k = m$, que dará como resultado 1, obteniendo el resultado esperado, que es la proyección de un conjunto de funciones sobre un subconjunto suyo.

Por otro lado, el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ sí que resulta fácil de interpretar, ya que lo que se está realizando es la proyección de un conjunto de funciones sobre otro mayor, de forma que nos

quedamos con aquéllas del conjunto mayor que coinciden con las del pequeño, pero no resulta sencillo de calcular matemáticamente, ya que las funciones que intervienen en el producto escalar no son de cuadrado integrable, por lo que no se puede hablar estrictamente de producto escalar y hay que acudir a los funcionales. De un lado $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ puede interpretarse como

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = \mathbf{F}_\xi \left[e^{jm\xi_0 x} \right], \quad (9.76)$$

siendo \mathbf{F}_ξ un funcional lineal cuyo núcleo es $e^{-j\xi x}$, para cada ξ , por lo que $\{e^{-j\xi x}\}_\xi \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De otro lado, también se puede interpretar como

$$\tilde{\varepsilon}(\xi; m) = \widetilde{\mathbf{DSF}}_m \left[e^{j\xi x} \right], \quad (9.77)$$

donde $\widetilde{\mathbf{DSF}}_m$ representa un funcional antilineal con núcleo $e^{jm\xi_0 x}$, para cada m , así $\{e^{jm\xi_0 x}\}_m \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En ambos casos, dado que cada una de las funciones sobre las que se aplican los funcionales no son de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, no se puede asegurar la correcta definición de $\tilde{\varepsilon}(\xi; m)$ en todos sus puntos, como así se muestra en el resultado final, ya que $2\pi\delta(\xi - m\xi_0)$ no está definida para los valores en los que $\xi = m\xi_0$.

9.4.5. Espacio de funciones $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$

Este espacio se corresponde con el conjunto de funciones de variable discreta $x(n)$. En este caso, la construcción de los RHS parte del espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$, donde el producto escalar definido es

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n). \quad (9.78)$$

Escogiendo los conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$, con $n' \in \mathbb{Z}$, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$ con $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, que definen la transformada de Fourier en variable discreta, se puede generar el subespacio $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})^6$ que, junto con sus duales, generan las ternas

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (9.79)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \quad (9.80)$$

que definen el espacio de Hilbert equipado para este caso, que se corresponde con la situación 2, ya que una base pertenece al subespacio denso, $e(n; n') \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, mientras que la otra no, $\tilde{e}(n; \Omega) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, como se muestra en la Fig. 9.10. Es fácil también darse cuenta que la cardinalidad de ambos conjuntos no es la misma, pasando de un conjunto infinito numerable ($\text{card}(\{\delta(n - n')\}_{n'}) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$) a uno infinito no numerable ($\text{card}(\{e^{j\Omega n}\}_\Omega) = \text{card}(\{\Omega \in \langle 2\pi \rangle\}) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$). Dado que $e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'} \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, se puede concluir que la base de este espacio es infinita numerable.

Los conjuntos para realizar los cambios de base son

$$\varepsilon(\Omega; n') = \langle \delta(n - n'), e^{j\Omega n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n') e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n'}, \quad (9.81)$$

$$\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = \langle e^{j\Omega n}, \delta(n - n') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} \delta(n - n') = e^{j\Omega n'}, \quad (9.82)$$

⁶Hay que tener cuidado en no confundir la notación $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ referida a la versión GSST-v1d, que indica el conjunto de todas las funciones de variable discreta, con la notación de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ utilizada en la versión GSST-v2, que indica sólo el conjunto de funciones de variable discreta que decrecen a 0 más rápido que la inversa de cualquier potencia de n conforme n tiende a infinito y que todas ellas multiplicadas por cualquier potencia de n son de cuadrado sumable.

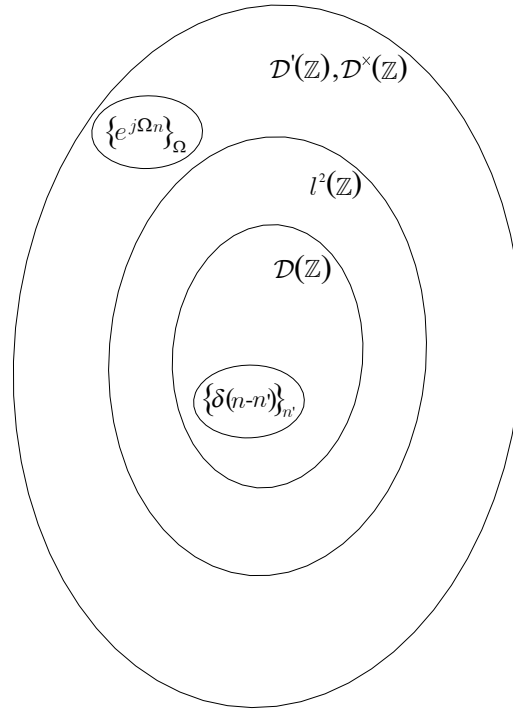


Figura 9.10: Estructura del espacio de Hilbert de funciones de variable discreta en el que se representa el conjunto de funciones base que definen una transformada identidad en el subespacio denso $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y el conjunto de funciones base que define la transformada de Fourier localizado en los espacios duales $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

pero estos productos escalares tienen que ser interpretados como funcionales, ya que en ambos una de las componentes, $e^{j\Omega n}$, no es de cuadrado sumable⁷. Por un lado,

$$\varepsilon(\Omega; n') = \mathbf{F}_\Omega [\delta(n - n')], \quad (9.83)$$

donde \mathbf{F}_Ω es un funcional lineal con núcleo $e^{-j\Omega n}$, para cada Ω , por lo que $\{e^{-j\Omega n}\}_\Omega \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$. Por otro lado,

$$\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega) = \tilde{\mathbf{F}}_\Omega [\delta(n - n')], \quad (9.84)$$

siendo $\tilde{\mathbf{F}}_\Omega$ un funcional antilineal cuyo núcleo es $e^{j\Omega n}$, para cada Ω , así que $\{e^{j\Omega n}\}_\Omega \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. Puesto que, en ambos casos, cada una de las funciones $\delta(n - n')$, para cada n' , son de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, se puede asegurar que los conjuntos $\varepsilon(\Omega; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; \Omega)$ están bien definidos en todos sus puntos.

9.4.6. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso I

En este caso consideramos el conjunto de funciones de variable discreta periódicas de periodo N_0 , $x_0(n)$, pero dentro del conjunto general de funciones de variable discreta. Al igual que en el caso 9.4.5, el espacio de Hilbert del que se parte es $l^2(\mathbb{Z})$ y el producto escalar definido es

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n). \quad (9.85)$$

⁷Recordar que las deltas de Kronecker son funciones perfectamente definidas y pertenecen a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, es decir, sí son de cuadrado sumable y tienden a 0 más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|n|}$ cuando n tiende a ∞ .

Tomando como conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega$, con $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, que definen la transformada de Fourier en variable discreta se generan las ternas

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (9.86)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \quad (9.87)$$

y es en estos espacios duales donde se localizan las funciones periódicas, ya que ninguna de ellas no va a ser de cuadrado sumable y, por tanto, no pertenecerá al espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$. Pero, por otro lado, en el espacio de funciones periódicas de periodo N_0 se puede definir el producto escalar

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n) \quad (9.88)$$

y el conjunto de funciones base $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$, con $k \in \langle N_0 \rangle$ y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, que definen el desarrollo en serie de Fourier en variable discreta. Sería el caso particular de la situación 3 donde se considera el conjunto de funciones periódicas dentro de los espacios duales de un espacio más general y donde el conjunto de funciones base escogido es un subconjunto de la base escogida en el espacio general, ya que

$$\left\{ e^{jk\Omega_0 n} \right\}_k \subset \left\{ e^{j\Omega n} \right\}_\Omega. \quad (9.89)$$

Se puede comprobar también que la cardinalidad de cada conjunto es distinta, ya que uno posee un conjunto infinito no numerable de elementos ($\text{card}(\{e^{j\Omega n}\}_\Omega) = \text{card}(\{\Omega \in \langle 2\pi \rangle\}) = \text{card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$), mientras que el otro posee un número finito, ($\text{card}(\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k) = \text{card}(\{k \in \langle N_0 \rangle\}) = N_0$). Gráficamente, el esquema de los RHS es el que se muestra en la Fig. 9.11. De la misma manera que ocurría en el caso 9.4.4, la interpretación del cálculo de $\varepsilon(k; \Omega)$ no es la misma que la de $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ por encontrarse considerada en espacios diferentes. Estos conjuntos para realizar el cambio de base son

$$\begin{aligned} \varepsilon(k; \Omega) &= \frac{1}{N_0} \left\langle e^{j\Omega n}, e^{jk\Omega_0 n} \right\rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j\Omega n} e^{-jk\Omega_0 n} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega - k\Omega_0)\right)}, \end{aligned} \quad (9.90)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega; k) = \left\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{j\Omega n} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 n} e^{-j\Omega n} = 2\pi \delta_0(\Omega - k\Omega_0), \quad (9.91)$$

y se puede comprobar que ambos productos escalares son diferentes porque están definidos en distintos espacios.

El cálculo de $\varepsilon(k; \Omega)$ se realiza sin mayores problemas matemáticamente, debido a que todas las funciones que intervienen son de cuadrado sumable en un intervalo de longitud N_0 , por lo que se correspondería con la situación 1, donde el producto escalar está bien definido y puede ser considerado como tal; sin embargo no resulta sencilla su interpretación porque una de las componentes del producto escalar no pertenece al espacio, ya que $e^{j\Omega n}$ no es una función periódica de periodo N_0 para la mayoría de los valores de $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, de ahí que aparezca como resultado la función $\frac{\sin}{\sin}$, de la que se obtendrá cualquier valor para un Ω arbitrario, que no resulta interesante, pero siempre será nula para valores de $\Omega = m\Omega_0$, que sí generan funciones periódicas de periodo N_0 , salvo para $m = k$, que dará como resultado 1, obteniendo el resultado esperado, que es la proyección de un conjunto de funciones sobre un subconjunto suyo.

Para el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ la interpretación sí que resulta sencilla, ya que lo que se está haciendo es proyectar un conjunto de funciones sobre otro mayor, de forma que sólo se seleccionan aquéllas del conjunto mayor que coinciden con las del pequeño; pero lo que no resulta sencillo es su cálculo

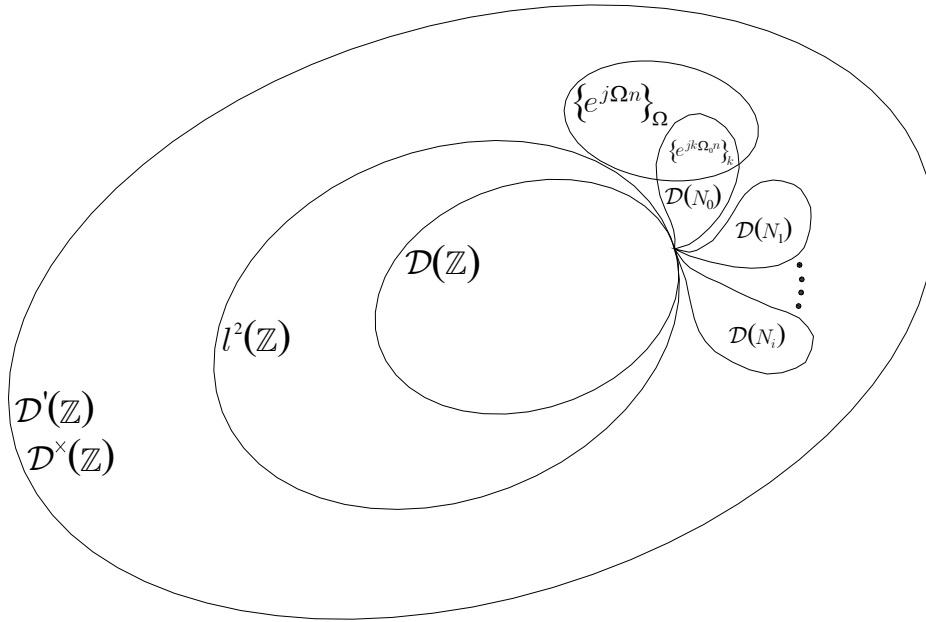


Figura 9.11: Estructura del espacio de Hilbert de funciones periódicas de periodo N_0 de variable discreta dentro de los espacios duales de las funciones de variable discreta $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, en el que se representa el conjunto de funciones base que definen la transformada de Fourier en estos mismo espacios duales y el conjunto de funciones base que define el desarrollo en serie de Fourier localizado también en estos espacios duales, pero como subconjunto de la primera base, dentro también del conjunto de funciones periódicas de periodo N_0 de variable discreta.

matemático, ya que las funciones que intervienen en el producto escalar no son de cuadrado sumable, por lo que no se puede hablar estrictamente de producto escalar y hay que acudir a los funcionales⁸. De un lado $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ puede interpretarse como

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega; k) = \mathbf{F}_\Omega [e^{jk\Omega_0 n}], \quad (9.92)$$

siendo \mathbf{F}_Ω un funcional lineal cuyo núcleo es $e^{-j\Omega n}$, para cada Ω , por lo que $\{e^{-j\Omega n}\}_\Omega \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$. De otro lado, también se puede interpretar como

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega; k) = \widetilde{\mathbf{DSF}}_k [e^{j\Omega n}], \quad (9.93)$$

donde $\widetilde{\mathbf{DSF}}_k$ representa un funcional antilineal con núcleo $e^{jk\Omega_0 n}$, para cada k , así $\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. En ambos casos, dado que cada una de las funciones sobre las que se aplican los funcionales no son de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, no se puede asegurar la correcta definición de $\tilde{\varepsilon}(\Omega; k)$ en todos sus puntos, como se puede comprobar en el resultado final, ya que $2\pi\delta_0(\Omega - k\Omega_0)$ no está definida para los valores en los que $\Omega = k\Omega_0$.

9.4.7. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0) \subset \mathcal{D}(-\infty, \infty)$. Caso II

La situación es la misma que en el caso anterior, con el mismo tipo de funciones y productos escalares. Simplemente se va a escoger otro tipo de conjuntos que hagan el papel de base. Por un lado se tiene $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta(n - n')\}_{n'}$ con $n' \in \mathbb{Z}$ y por el otro lado, la base $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$ con $k \in \langle N_0 \rangle$ y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, que define el desarrollo en serie de

⁸En este caso se trata de funcionales de variable discreta. No intervienen distribuciones pero sí funciones que no son de cuadrado sumable.

Fourier de funciones periódicas de variable discreta. Es fácil comprobar que no tienen la misma cardinalidad, en este caso se pasa de un conjunto con un número infinito numerable de elementos ($\text{card}(\{\delta(n-n')\}_{n'}) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$) a un conjunto finito de elementos ($\text{card}(\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k) = \text{card}(\{k \in \langle N_0 \rangle\}) = N_0$).

En este espacio, a pesar de no contar con la base que define la transformada de Fourier y que genera de forma natural el subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, vamos a considerarlo igualmente para poder incluir en los espacios duales el conjunto de funciones periódicas. Por tanto, en este caso las ternas que definen el espacio de Hilbert equipado son las mismas que en el caso anterior, es decir,

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (9.94)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}). \quad (9.95)$$

En este caso nos encontramos en la situación 2, en la que una base pertenece al subespacio denso $e(n; n') \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, mientras que la otra no, $\tilde{e}(n; k) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ por no ser de cuadrado sumable. La estructura de este caso es la que se muestra en la Fig. 9.12. Nuevamente, la interpretación de los conjuntos $\varepsilon(k; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ va a ser diferente por encontrarse definidos sobre espacios distintos. Los conjuntos para realizar el cambio de base son

$$\begin{aligned} \varepsilon(k; n') &= \frac{1}{N_0} \langle \delta(n-n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} \delta(n-n') e^{-jk\Omega_0 n} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'} \bar{P}_{N_0}(n'), \end{aligned} \quad (9.96)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(n'; k) &= \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta(n-n') \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 n} \delta(n-n') = \\ &= e^{jk\Omega_0 n'}, \end{aligned} \quad (9.97)$$

donde se puede comprobar que ambos productos escalares son diferentes al estar definidos en distintos espacios⁹.

El cálculo de $\varepsilon(k; n')$ no supone mayor problema matemáticamente, debido a que todas las funciones que intervienen son de cuadrado sumable en un intervalo de longitud N_0 , por lo que se correspondería con la situación 1, donde el producto escalar está bien definido y puede ser considerado como tal; sin embargo no resulta sencilla su interpretación porque una de las componentes del producto escalar no pertenece al espacio, ya que $\delta(n-n')$ no es una función periódica de periodo N_0 para ningún valor de $n' \in \mathbb{Z}$. La función resultado no deja de ser un eventanado de las exponenciales complejas, y su interpretación sólo sería válida cuando n' no perteneciera al intervalo del sumatorio de longitud N_0 , ya que así se estaría considerando la función nula, que sí es periódica de periodo N_0 y daría como resultado del producto escalar también la función nula. En caso contrario, el resultado es el conjunto de funciones necesario para realizar el cambio de base y también de espacio.

Para realizar el cálculo de $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$, su interpretación sí que es fácil, ya que lo que se está haciendo es proyectar un conjunto de funciones de variable discreta sobre otro, pero su cálculo matemático hay que realizarlo con cuidado ya que en el producto escalar intervienen funciones que no son de cuadrado sumable, como son $e^{jk\Omega_0 n}$, para cada $k \in \langle N_0 \rangle$, por lo que hay que recurrir al uso de los funcionales. Así, $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ ha de efectuarse como

$$\tilde{\varepsilon}(n'; k) = \widetilde{\mathbf{DSF}}_k [\delta(n-n')], \quad (9.99)$$

⁹La función $\bar{P}_{N_0}(n')$ se define como

$$\bar{P}_{N_0}(n') = \begin{cases} 1 & \text{si } n' \in \langle N_0 \rangle \\ 0 & \text{si } n' \notin \langle N_0 \rangle \end{cases} \quad (9.98)$$

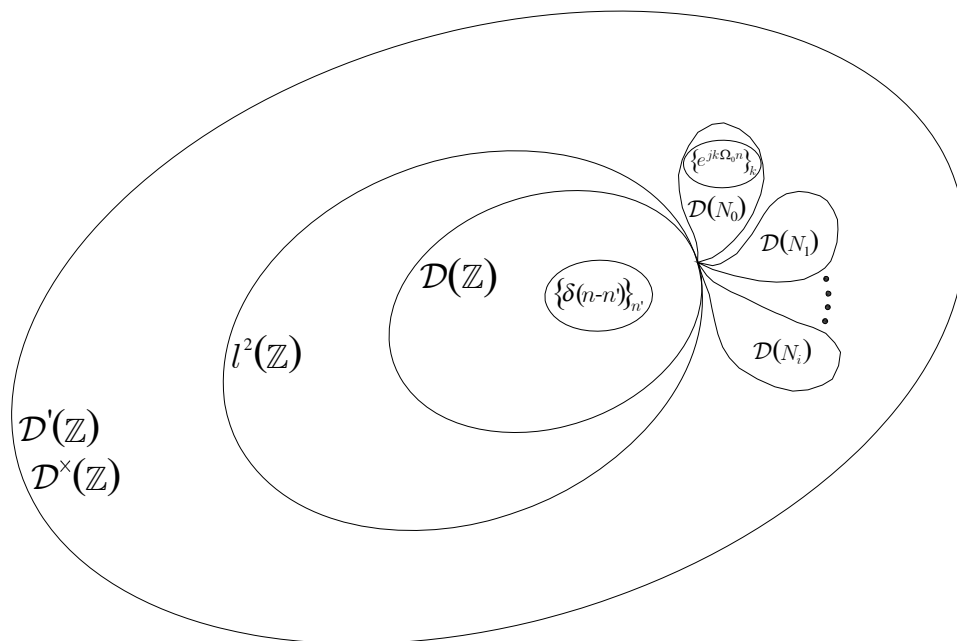


Figura 9.12: Estructura del espacio de Hilbert de funciones periódicas de periodo N_0 de variable discreta dentro de los espacios duales de las funciones de variable discreta $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, en el que se representa el conjunto de funciones base que definen una transformada identidad dentro del subespacio denso $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, y el conjunto de funciones base que define el desarrollo en serie de Fourier localizado en esos espacios duales, pero dentro del conjunto de funciones periódicas de periodo N_0 de variable discreta.

donde \widetilde{DSF}_k representa, al igual que en el caso anterior, 9.4.6, un funcional antilineal con núcleo $e^{jk\Omega_0 n}$, para cada k , por lo que $\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. Además, puesto que cada una de las funciones sobre las que se aplica $\delta(n - n') \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, se puede asegurar la correcta definición de $\tilde{\epsilon}(n'; k)$ en todos sus puntos.

9.4.8. Espacio de funciones $\mathcal{D}(N_0)$

En este espacio se consideran las funciones complejas de variable discreta $x_0(n)$ y periódicas de periodo N_0 con el producto escalar definido como

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n). \quad (9.100)$$

Escogiendo los conjuntos de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(n; n') = \{\delta_0(n - n')\}_{n'}$, con $n' \in \langle N_0 \rangle$, y $\tilde{e}(\tau; \mu') \equiv \tilde{e}(n; k) = \{e^{jk\Omega_0 n}\}_k$, con $k \in \langle N_0 \rangle$ y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, que define el desarrollo en serie de Fourier discreto, no es necesaria la construcción de ningún tipo de espacio de Hilbert equipado puesto que nos encontramos en un caso de dimensión finita de valor N_0 , por lo que todas las funciones son de cuadrado sumable en un intervalo de longitud N_0 y todos los productos escalares están bien definidos, así que no es necesario acudir al uso de los funcionales¹⁰. El espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$ es suficiente y es claro que la cardinalidad de ambos es finita y de valor N_0 ($\text{card}(\{\delta_0(n - n')\}_{n'}) = \text{card}(\{n' \in \langle N_0 \rangle\}) = \text{card}(\{e^{jk\Omega_0 n}\}_k) = \text{card}(\{k \in \langle N_0 \rangle\}) = N_0$, por lo que se confirma, además, que la dimensión del espacio es finita y de valor N_0 .

¹⁰Si bien es cierto, como se ha comentado anteriormente, el producto escalar es un caso particular del uso de funcionales, por lo que se podría generalizar este caso también con el uso de funcionales cuyos núcleos son funciones de cuadrado sumable en un intervalo de longitud N_0 , pero no resulta de gran interés.

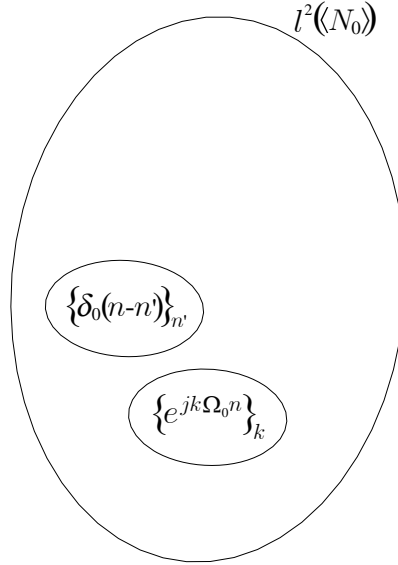


Figura 9.13: Espacio de Hilbert $l^2(\langle N_0 \rangle)$ de funciones de variable discreta, periódicas de periodo N_0 y, por tanto, de dimensión finita de valor N_0 . En este espacio se representan dos bases, una que define una transformada identidad y otra que define el desarrollo en serie de Fourier. Ambas bases son de N_0 elementos, por lo que el cambio de base se puede realizar mediante matrices. En este espacio no es necesaria la construcción de ningún tipo de RHS.

La estructura para el cambio de base en este caso es la que se muestra en la Fig. 9.13. Los conjuntos de funciones para realizar los cambios de base son

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(k; n') &= \frac{1}{N_0} \langle \delta_0(n - n'), e^{jk\Omega_0 n} \rangle = \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \delta_0(n - n') e^{-jk\Omega_0 n} = \\
 &= \frac{1}{N_0} e^{-jk\Omega_0 n'}, \tag{9.101}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}(n'; k) &= \langle e^{jk\Omega_0 n}, \delta_0(n - n') \rangle = \\
 &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{jk\Omega_0 n} \delta_0(n - n') = \\
 &= e^{jk\Omega_0 n'}, \tag{9.102}
 \end{aligned}$$

que claramente se puede comprobar que provienen de productos escalares bien definidos, por lo que, asimismo, los conjuntos $\varepsilon(k; n')$ y $\tilde{\varepsilon}(n'; k)$ estarán bien definidos en todos sus puntos.

10. Ejemplos RHS

Para la realización de las transformadas que aparecen en los ejemplos y demostraciones de este capítulo se han hecho uso de las tablas sobre transformadas que se pueden encontrar en las Refs. [51], [52], [61], [80].

10.1. Operador derivada en variable continua

Sea el sistema físico por el que se obtiene la tensión $v(t)$ en bornes de una bobina de inductancia L a partir de la corriente $i(t)$ que la atraviesa. La representación esquemática del problema físico y su interpretación a través de una caja negra desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas como un operador lineal e invariante $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ se muestran en la Fig. 10.1, siendo

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[\cdot] \equiv L \frac{d(\cdot)}{dt}. \quad (10.1)$$

El objetivo de este ejemplo es encontrar la estructura de los espacios de Hilbert equipados propios de este problema así como poder localizar las funciones que intervienen dentro de cada uno de los subespacios.

En primer lugar vamos a describir algunos subespacios importantes referentes a este sistema.

- *Dominio del operador*, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$:

El dominio de este operador será el conjunto de todas las funciones que sean derivables, es decir,

$$\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \quad (10.2)$$

En el caso de funciones que no pertenezcan a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, habrá que aplicar el operador de forma generalizada desde el punto de vista de la teoría de distribuciones, obteniéndose como resultado un función que no esté definida en aquellos puntos donde la función original no sea derivable.

- *Núcleo del operador*, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$:

El núcleo de este operador será el conjunto de funciones cuya derivada sea nula, es decir,

$$\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \left\{ f(t) : L \frac{df(t)}{dt} = 0 \right\}, \quad (10.3)$$

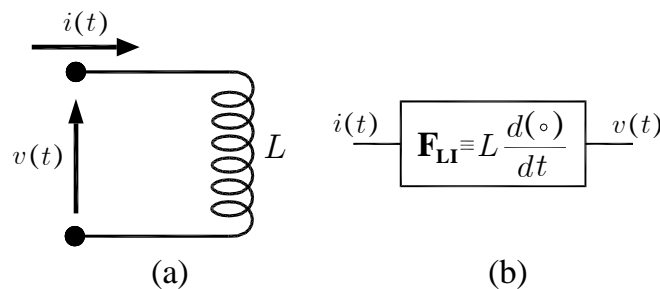


Figura 10.1: (a) Cálculo de la tensión $v(t)$ en bornes de una bobina de inductancia L cuando la atraviesa una corriente variable con el tiempo $i(t)$.

(b) Representación en forma de caja negra del sistema descrito en (a).

por tanto,

$$\text{Ker } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \{f(t) = K, K \in \mathbb{C}\}, \quad (10.4)$$

es decir, el conjunto de las funciones constantes.

Dado que el núcleo del operador no es únicamente la función nula $f(t) = 0$, el operador no es inyectivo y, por tanto, no es invertible, lo cual es obvio puesto que el candidato a ser operador inverso de $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}$, sería el operador integral

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}[\cdot] \equiv \int (\cdot) dt, \quad (10.5)$$

pero que no define una sólo función sino todo un conjunto de funciones que difieren en una constante.

- *Conjunto de autofunciones del operador, Eig* $\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$:

Las autofunciones de este operador serán las funciones cuya derivada sea ella misma multiplicada por una constante, así

$$\text{Eig } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \left\{ f(t) : L \frac{df(t)}{dt} = \alpha f(t) \right\}, \quad (10.6)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} Lf'(t) &= \lambda f(t), \\ \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{\lambda}{L}, \\ \frac{d}{dt} \text{Ln}(f(t)) &= \frac{\lambda}{L}, \\ \text{Ln}(f(t)) &= \int \frac{\lambda}{L} dt = \frac{\lambda}{L} t + C, \\ f(t) &= e^{\frac{\lambda}{L} t + C} = Ae^{\frac{\lambda}{L} t}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

es decir, el conjunto de todas las exponenciales, donde $A, \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\text{Eig } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \left\{ f(t) = Ae^{\frac{\lambda}{L} t}, A, \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \quad (10.8)$$

La constante A no cambia la forma de las señales, sólo su escala. Supongamos $\text{Re}\{A\} > 0$ y $\text{Im}\{A\} > 0$ (en caso contrario se obtendrían las mismas señales pero en negativo, simétricas respecto al eje t) y veamos diferentes casos para varios valores del parámetro λ .

- Para $\lambda = 0$ se tienen las funciones constantes, cuya acción por el operador, como se ha visto anteriormente, es la función nula.
- Para $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}^+$ se tienen exponenciales crecientes.
- Para $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}^-$ lo que se tienen son exponenciales decrecientes.
- Para $\lambda = j\beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$, se tienen funciones senos y cosenos. En este caso se encuentran las funciones base de la transformada de Fourier, cuando $A = 1$ y $\lambda = j\xi L$.
- En caso de que $\lambda = \alpha + j\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tienen senos y cosenos amortiguados.

10.1.1. Estructura de los espacios de Hilbert equipados

Las dos ternas que definen los espacios de Hilbert equipados son

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (10.9)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (10.10)$$

Dada la naturaleza de las señales que intervienen nos encontramos en un espacio de funciones de variable continua, por lo que consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ con el producto escalar definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt. \quad (10.11)$$

Para este ejemplo vamos a construir dos espacios de Hilbert equipados diferentes. Por un lado determinaremos es subespacio Φ_1 a partir, únicamente, del operador $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, y por otro lado, teniendo en cuenta también los operadores \mathbf{Q} y \mathbf{D} que nos generen un subespacio Φ_2 adecuado para poder realizar el análisis espectral bajo la transformada de Fourier.

Para encontrar el subespacio Φ_1 buscamos el conjunto de funciones que cumpla

$$\Phi_1 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^n \}, \quad (10.12)$$

donde

$$\text{Dom} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} \} = \left\{ f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tq } \int_{t=-\infty}^{\infty} \left| L \frac{df(t)}{dt} \right|^2 dt < \infty \right\}, \quad (10.13)$$

se trata, por tanto, de funciones que sean infinitamente derivables y de cuadrado integrable, es decir,

$$\Phi_1 = \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}). \quad (10.14)$$

La estructura, en este caso, para los espacios de Hilbert equipados es

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}), \quad (10.15)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}). \quad (10.16)$$

Para encontrar el subespacio Φ_2 tenemos que encontrar el subespacio que cumpla

$$\Phi_2 = \bigcap_{n,m,k=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{Q}^n \mathbf{D}^m \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^k \}, \quad (10.17)$$

siendo

$$\mathbf{Q}[f(t)] = tf(t), \quad (10.18)$$

$$\mathbf{D}[f(t)] = \frac{df(t)}{dt}, \quad (10.19)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[f(t)] = L \frac{df(t)}{dt}. \quad (10.20)$$

Puesto que el operador del sistema $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ es una ligera modificación del operador derivada \mathbf{D} , ya que es simplemente éste multiplicado por una constante L , que no aporta nada al dominio de definición del operador, sea cual sea su valor, podemos obtener el subespacio Φ como

$$\Phi_2 = \bigcap_{n,m=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{Q}^n \mathbf{D}^m \}, \quad (10.21)$$

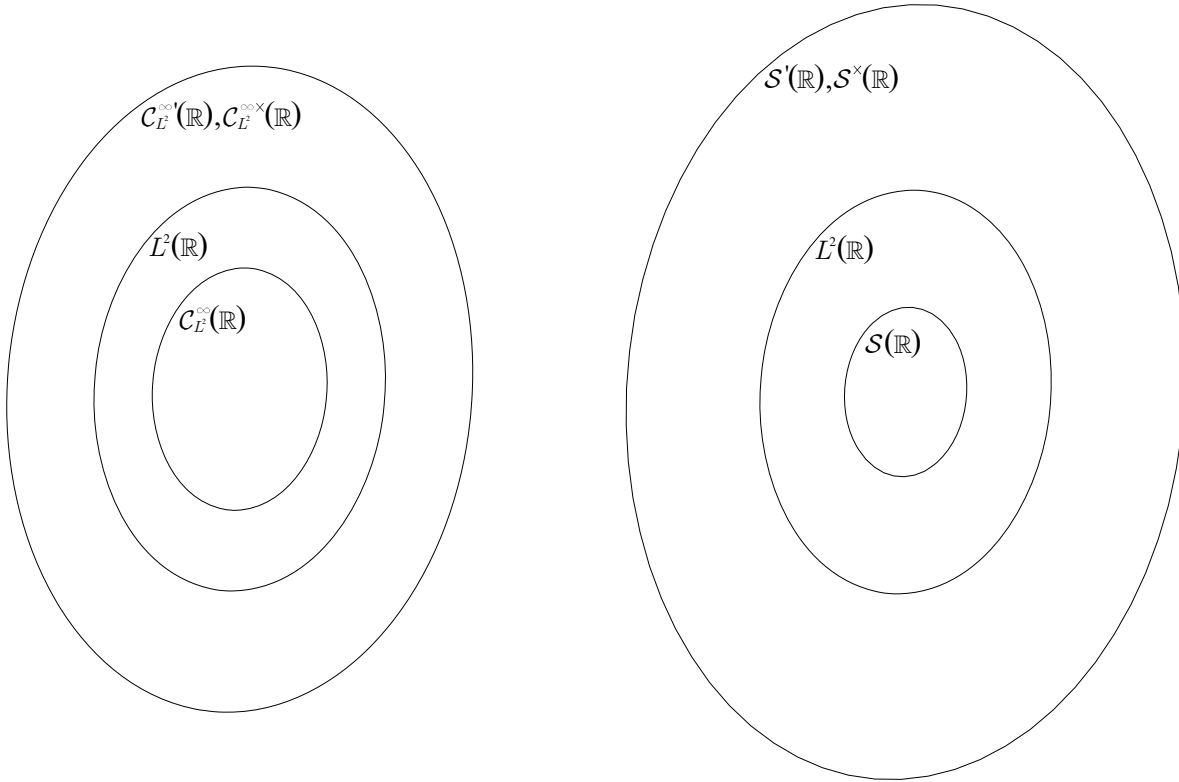


Figura 10.2: Representación esquemática de dos posibles espacios de Hilbert equipados para adecuar las funciones que intervienen en el problema de la bobina. También se representa esquemáticamente cómo el subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es más pequeño que $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ y, por tanto, los espacios duales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ son más grandes que $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$.

que se corresponde con las funciones de Schwartz. Así, $\Phi_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y, por tanto, la estructura de los espacios de Hilbert equipados queda de la siguiente manera,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (10.22)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}). \quad (10.23)$$

Es evidente que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \quad (10.24)$$

y, por tanto,

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (10.25)$$

$$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}). \quad (10.26)$$

Ambos espacios de Hilbert equipados se pueden representar tal como aparecen en la Fig. 10.2. Asimismo, se puede añadir el subespacio de las funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y sus espacios dual $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y antidual $\mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ donde se encuentran todas las distribuciones ordinarias, sabida cuenta de que $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ ¹, representando todos éstos junto con los subespacios $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$ y $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$, anteriormente definidos, como se muestra en la Fig. 10.3.

¹Referirse al Ap. B.17 y la Ref. [63].

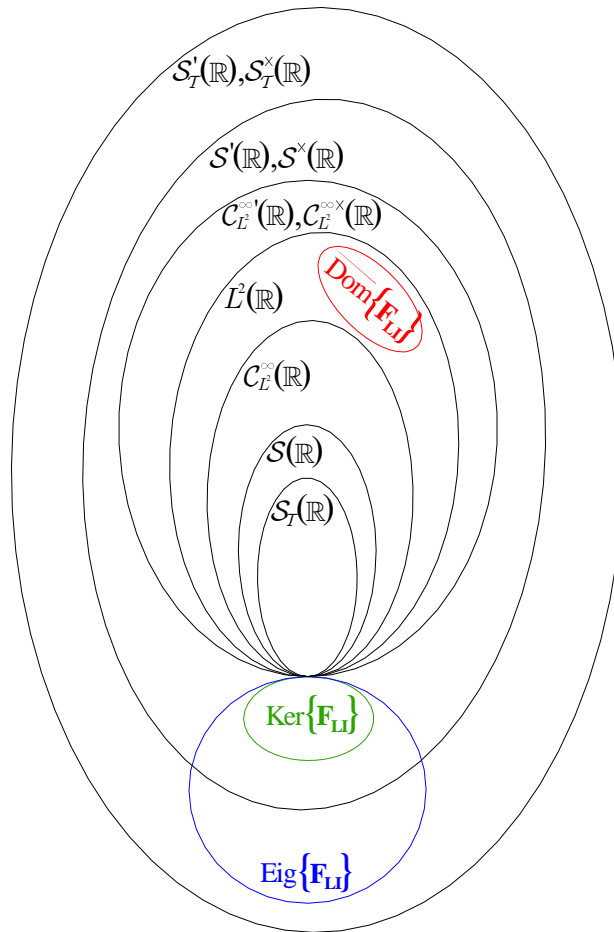


Figura 10.3: Representación dentro de un mismo esquema de todos los espacios de Hilbert equipados construidos para este ejemplo junto con los subespacios generados por el operador.

El dominio, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$ en rojo, son todas las funciones derivables. Dado que todas las funciones de $C_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, así como todos sus subconjuntos, son derivables y, por tanto, todos sus espacios duales también, las únicas funciones que no pertenezcan al dominio del operador serán algunas dentro del espacio $L^2(\mathbb{R})$, representado por el complementario del dominio, $\overline{\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}}$, puesto que habrá otras funciones de $L^2(\mathbb{R})$ que, aún no siendo infinitamente derivables, sí lo serán al menos una vez y pertenecerán al dominio del operador. El núcleo del operador, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$ en verde, está formado por todas las funciones constantes, que pertenecen a los espacios duales de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

El conjunto de autofunciones del operador, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$ en azul, son todos los tipos de exponenciales. Algunas de ellas, como e^{ax} con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, no pertenecen a los espacios duales de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sino sólo a los de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

La única función que pertenece a todos los subespacios es la función nula $f(t) = 0$.

10.1.2. Análisis del sistema en el dominio real

En primer lugar, cualquier función puede representarse en términos de deltas como

$$i(t) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} i(t') \delta(t-t') dt', \quad (10.27)$$

lo cual se puede representar mediante la estructura²

$$i(t) = \langle i(t'), \delta(t-t') \rangle \quad (10.28)$$

para que cada t ; pero la expresión (10.28) no se corresponde con el producto escalar definido en (10.11), puesto que $\delta(t-t') \notin L^2(\mathbb{R})$ y de $i(t')$ aún no se han dado condiciones. De hecho, puesto que $\delta(t-t') \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la expresión (10.28) ha de verse como un conjunto de funcionales lineales, para cada t , aplicados a $i(t')$, es decir

$$i(t) = \mathbf{D}_t [i(t')] \quad (10.29)$$

donde el conjunto de funcionales lineales \mathbf{D}_t , cuyos núcleos son $\delta(t-t')$ para cada t , lo que hace es devolver el valor de $i(t')$ en el punto t ³.

Por otro lado, puesto que estamos tratando con un sistema lineal e invariante, para poder analizarlo en el dominio real sólo es necesario conocer la respuesta al impulso $h(t)$, así

$$h(t) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[\delta(t)] = L \frac{d\delta(t)}{dt} = L\delta'(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (10.30)$$

se puede llegar a la misma conclusión para el análisis de la función de salida del sistema $v(t)$, ya que

$$v(t) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} i(t') h(t-t') dt', \quad (10.31)$$

que, expresado como⁴

$$v(t) = \langle i(t'), h(t-t') \rangle = \langle i(t'), L\delta'(t-t') \rangle \quad (10.32)$$

tiene que ser visto como un conjunto de funcionales lineales, para cada t , aplicados a $i(t')$, así

$$v(t) = \mathbf{H}_t [i(t')], \quad (10.33)$$

donde \mathbf{H}_t es el conjunto de funcionales lineales con núcleos $h(t-t') = L\delta'(t-t')$ para cada t , que devuelve el valor de la derivada de $i(t')$ en el punto t y multiplicada por la constante L ⁵.

No debería sorprender la similitud entre las expresiones

$$v(t) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}} [i(t)] \quad \text{y} \quad (10.34)$$

$$v(t) = \mathbf{H}_t [i(t')]. \quad (10.35)$$

A pesar de que la primera represente un operador y la segunda un conjunto de funcionales lineales, éste viene determinado por el conjunto de respuestas al impulso, el cual, como se ha dicho en el Cap. 2 introductorio a la teoría general, el conjunto de respuestas al impulso de un sistema representa de forma matemática las propiedades físicas de ese sistema, de esta forma

²Sabiendo que $\delta(t)$ es un elemento real.

³Desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación del bra $\langle i(t') |$ sobre el conjunto de kets $|\delta(t-t')\rangle$.

⁴Teniendo en cuenta que, en este caso, $h(t)$ también es real.

⁵También, desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación del bra $\langle i(t') |$ sobre el conjunto de kets $|h(t-t')\rangle = |L\delta'(t-t')\rangle$.

dicho sistema puede verse como un operador (ecuación (10.34)) o como un funcional (ecuación (10.35)).

Consideremos ahora la pertenencia de $i(t)$ a los diferentes subespacios para analizar la señal de salida $v(t)$.

I) Sea $i(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En este caso el conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t[i(t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle$ quedan perfectamente definidos para todo t , puesto que ésta es la condición que define un funcional lineal como se ha visto en (8.291) del Apdo. 8.5. Además, la señal de salida $v(t)$ también será siempre una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ya que, por la propia definición de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, éstas son infinitamente derivables y, dado que el operador que define el sistema es simplemente una derivada, la señal de salida será también infinitamente derivable y, además, como $i(t)$ y todas sus derivadas decrecen más rápido que la inversa de cualquier polinomio por ser de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $v(t)$, al ser una de esas derivadas, también lo hará. Así, por tanto, $v(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Sea, por ejemplo, un pulso gaussiano

$$i(t) = e^{-at^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (10.36)$$

la señal de salida también es una función de Schwartz,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -2Lte^{-at^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (10.37)$$

II) Sea $i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, $i(t) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Para este caso el conjunto de funcionales $\mathbf{H}_t[i(t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle$ también van a estar bien definidos para todo t , puesto que $h(t-t') \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ para cada t . En este caso también la señal de salida $v(t)$ será una función de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ porque la propia salida es simplemente la derivada de la señal de entrada, pero no de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, como se podrá demostrar fácilmente más adelante en el análisis espectral.

Sea, por ejemplo, una señal sinc

$$i(t) = \text{sinc}(at) = \frac{\sin(at)}{at}, \quad (10.38)$$

la señal de salida será,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{(\cos(at) - \text{sinc}(at))}{t}, \quad (10.39)$$

que es una función de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, pero no de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ⁶.

III) Sea $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

En este caso no se puede asegurar que el conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t[i(t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle$ queden perfectamente definidos para todo t , puesto que el hecho de que $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ no garantiza que sea una función derivable. Se podría diferenciar aquí dos casos:

⁶Según las propiedades de los RHS a través de la transformada de Fourier vistas en la Secc. 8.7.5,

$$V(\omega) = \mathbf{TF}[v(t)] = j\omega LI(\omega) = j\omega L \frac{\pi}{a} P_{2a}(\omega), \quad (10.40)$$

que no es derivable en $\omega = \pm a$, por tanto $V(\omega) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ luego $v(t) = \mathbf{TF}^{-1}[V(\omega)] \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$

a) $i(t) \in \text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$.

$i(t)$ sí será una función derivable, aunque no infinitamente derivable. A pasar de que $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$, no se puede asegurar que $v(t) \in L^2(\mathbb{R})$, como se había visto en el ejemplo (8.279) siendo

$$i(t) = \frac{\sin(t^2)}{t} \quad (10.41)$$

que es una función derivable y de cuadrado integrable, pero su derivada no es de $L^2(\mathbb{R})$ como se demostraba en (8.282).

Pero también es cierto que se pueden encontrar funciones $i(t)$ que, siendo de cuadrado integrable pero no infinitamente derivables, tienen su derivada también perteneciente a $L^2(\mathbb{R})$, como es el caso de la señal

$$i(t) = (\cos(\omega_0 t) + 1) P_{T_0}(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.42)$$

ya que

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) P_{T_0}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (10.43)$$

aunque, en este caso, $v(t)$ ya no será derivable.

b) $i(t) \notin \text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$.

En este caso se trata de funciones de cuadrado integrable pero no derivables en todo su dominio. Al no ser derivables, hay que aplicarles la derivada de manera generalizada. Se pueden hacer, nuevamente, dos distinciones:

i) $i(t)$ continua:

Al ser continua pero no derivable en algunos puntos, su derivada generalizada será discontinua en los puntos de no derivabilidad. Sin embargo esto no asegura que sea una función de cuadrado integrable. Volviendo al ejemplo (10.41), si tomamos

$$i_a(t) = \left| \frac{\sin(t^2)}{t} \right| \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.44)$$

pero no es una función derivable en los puntos $t = \sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Su función derivada será discontinua en esos puntos, pero además, no será de cuadrado integrable, ya que

$$v_a(t) = L \frac{di_a(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \begin{cases} i(t) & \text{si } i(t) > 0 \\ -i(t) & \text{si } i(t) \leq 0 \end{cases} = L \begin{cases} i'(t) & \text{si } i(t) > 0 \\ -i'(t) & \text{si } i(t) \leq 0 \end{cases} \quad (10.45)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{t=-\infty}^{\infty} |v_a(t)|^2 dt &= L^2 \int_{t=-\infty}^{\infty} \left| \begin{cases} i'(t) & \text{si } i(t) > 0 \\ -i'(t) & \text{si } i(t) \leq 0 \end{cases} \right|^2 dt = \\ &= L^2 \int_{t=-\infty}^{\infty} |i'(t)|^2 dt = \infty. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Pero también puede darse el caso de funciones continuas no derivables de cuadrado integrable cuya derivada generalizada también sea de cuadrado integrable, por ejemplo, una función triangular,

$$i(t) = T_{T_0}(t), \quad (10.47)$$

que obviamente es continua y de cuadrado integrable, pero no derivable en $t = \pm T_0$ y $t = 0$. En este caso, la señal de salida $v(t)$ sería

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{T_0} P_{T_0} \left(t + \frac{T_0}{2} \right) - \frac{L}{T_0} P_{T_0} \left(t - \frac{T_0}{2} \right) \quad (10.48)$$

que es de cuadrado integrable.

ii) $i(t)$ discontinua:

En este caso, la derivada de una función discontinua siempre estará expresada en términos de deltas de Dirac en los puntos de las discontinuidades, así, a pesar de que $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $v(t)$ no será nunca una función de $L^2(\mathbb{R})$. Por ejemplo, sea un pulso rectangular

$$i(t) = P_{T_0}(t), \quad (10.49)$$

cuya señal de salida es

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (10.50)$$

que no estará definida en $t = \pm \frac{T_0}{2}$, puesto que el pulso no es derivable en esos puntos. Realizando una derivada generalizada, se obtendría que

$$v(t) = L\delta(t + T_0/2) - L\delta(t - T_0/2), \quad (10.51)$$

lo cual prueba que la señal de salida no pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ aunque $i(t)$ sí.

IV) Sea $i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ ⁷.

Aquí no se puede asegurar que el resultado del conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t[i(t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle$ sea una función perfectamente definida para todo t ya que $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$. Sin embargo sí se puede asegurar que la señal de salida $v(t)$ será también una función de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ puesto que

$$\begin{aligned} v(t) &\in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \langle v(t), u(t) \rangle \text{ perfectamente definido con } u(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}), \\ \langle v(t), u(t) \rangle &= \left\langle L \frac{di(t)}{dt}, u(t) \right\rangle = -L \left\langle i(t), \frac{du(t)}{dt} \right\rangle, \end{aligned} \quad (10.54)$$

donde se ha utilizado la propiedad de las distribuciones

$$\langle \varphi, \mathbf{T}^k \rangle = (-1)^k \langle \varphi^k, \mathbf{T} \rangle \quad (10.55)$$

y, dado que $i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ y $u(t)$ es infinitamente derivable, y por tanto, $\frac{du(t)}{dt}$ también, se concluye que $v(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$.

Sea, por ejemplo, una función escalón

$$i(t) = \Gamma(t), \quad (10.56)$$

⁷Según la definición hecha en (10.32), en este caso $i(t)$ tiene que ser de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ y no de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ puesto que ocupa la primera componente del producto escalar. En este caso se podría ver $v(t)$ como el resultado del conjunto de funcionales lineales \mathbf{H}_t , tal como aparece en (10.33), o como el resultado del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{I}}$ sobre cada una de las funciones $h(t-t')$ definido como

$$v(t) = \tilde{\mathbf{I}}[h(t-t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle. \quad (10.52)$$

Para verlo como un funcional lineal tendría que considerarse el producto escalar de manera inversa, siendo $\tilde{\mathbf{H}}_t$ un conjunto de funcionales antilineales, tal como muestra la ecuación (10.113). En este caso, $i(t)$ sí sería de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.

que no es derivable, pero tomando una derivada generalizada, la señal de salida será

$$v(t) = L\delta(t) \quad (10.57)$$

que es otra función de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$, ya que

$$\langle L\delta(t), u(t) \rangle = Lu^*(0) \quad (10.58)$$

ya que $u(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ y, por tanto, definida en todos sus puntos.

V) Sea $i(t) \in \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$, $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$.

Tampoco se puede asegurar que el conjunto $\mathbf{H}_t[i(t')] = \langle i(t'), h(t-t') \rangle$ produzca un resultado perfectamente definido para todo t puesto que se está actuando entre dos elementos que no son de $L^2(\mathbb{R})$. De la misma manera que en el caso anterior, se puede demostrar que $v(t)$ siempre pertenecerá a $\mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$ ya que

$$v(t) \in \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \langle v(t), s(t) \rangle \text{ perfectamente definido con } s(t) \in \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R}), \quad (10.59)$$

$$\langle v(t), s(t) \rangle = \left\langle L \frac{di(t)}{dt}, s(t) \right\rangle = -L \left\langle i(t), \frac{ds(t)}{dt} \right\rangle, \quad (10.60)$$

y, dado que $i(t) \in \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$ y $s(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y por tanto, $\frac{ds(t)}{dt}$ también, se concluye que $v(t) \in \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$.

Consideremos, por ejemplo, una señal cosenoidal⁸

$$i(t) = \cos(\omega_0 t), \quad (10.62)$$

que es derivable y por tanto perteneciente al dominio de $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ pero no es de cuadrado integrable. La salida estará bien definida, siendo

$$v(t) = -\omega_0 L \sin(\omega_0 t) \quad (10.63)$$

que es otra función derivable y perteneciente a $\mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$.

Hay un caso en el que hay que poner especial atención. Éste es el caso del conjunto de funciones pertenecientes al núcleo del operador, es decir, $i(t) = K \in \mathbb{C}$, ya que $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} \subset \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$. Para estas funciones, la señal de salida del sistema será siempre la función nula,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \forall t, \quad (10.64)$$

pero esta función, al ser el elemento neutro, va a pertenecer a todos los subespacios, en concreto a $\mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$, aunque también es cierto que es una función de cuadrado integrable, también es infinitamente diferenciable y decrece más rápido que la inversa de cualquier polinomio, por lo que también será una función de $L^2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}$ y de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

⁸Es importante hacer notar que funciones como $e^{j\omega_0 t}$, $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, $i(t) = K \in \mathbb{C}$ (funciones relacionadas con las bases de la transformada de Fourier) son funciones de $\mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$ (o de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si se considerasen en la segunda componente) y no de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ (respectivamente de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$) ya que, si aplicáramos, por ejemplo, $e^{j\omega_0 t}$ a una función de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$, es decir, que sea infinitamente derivable pero sin exigirle que decrezca más rápido que un polinomio, puede ocurrir que esa aplicación no esté bien definida para algunos puntos, como sería el caso, por ejemplo, de aplicarlo a una función sinc, así

$$\left\langle e^{j\omega_0 t}, \text{sinc}(at) \right\rangle = \frac{\pi}{a} P_{2a}(\omega_0), \quad (10.61)$$

que no está definido para $\omega_0 = \pm a$.

A través de estos ejemplos se prueba que el operador mantiene la pertenencia al subespacio correspondiente cuando la señal de entrada $i(t)$ sea de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ o de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, pero no se puede decir nada cuando $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ en cuyo caso la señal de salida puede permanecer o cambiar de espacio. Esto no es de extrañar, puesto que la construcción de los subespacios $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, o más en general Φ , viene determinada siempre por la definición del operador $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, así como sus espacio duales y antiduales $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}$ y $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}$, o más en general, Φ' y Φ^\times , mientras que el espacio de Hilbert \mathcal{H} es independiente de cualquiera sea el operador considerado, por lo que es normal que las señales de Φ , Φ' y Φ^\times mantengan su pertenencia al subespacio a través del operador, puesto que así está definido Φ , por contra de \mathcal{H} .

10.1.3. Análisis del sistema en el dominio espectral

Realizamos el análisis en el dominio espectral bajo las dos transformadas que hay analizadas para el espacio de señales de variable continua: la transformada de Fourier y la transformada de Hilbert, pero realizaremos su análisis para aquéllos espacios de Hilbert equipados en los que la transformada sea un automorfismo dentro de cada uno de los subespacios que forman esos espacios de Hilbert equipados. Así, comenzaremos el análisis espectral de los espacios de Hilbert equipados según la definición del subespacio Φ_1 vista en (10.12), con $\Phi_1 = \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ y donde la transformada de Hilbert es un automorfismo, como se demuestra en el Apdo. 8.7.4, y posteriormente lo haremos según la definición del subespacio Φ_2 hecha en (10.21), con $\Phi_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donde la transformada de Fourier es también un automorfismo.

Análisis espectral bajo la transformada de Hilbert

Consideremos el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu) \equiv e(t; t') = \left\{ \frac{1}{\pi(t-t')} \right\}_{t'}$, $\subset \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}$ (\mathbb{R}), es decir, una base dentro del espacio dual lineal de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$. La transformada de Hilbert tanto de las señales de entrada como de salida del sistema, es decir, sus coeficientes en la dicha base, se calculan a través de las expresiones

$$I(t') = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{i(t)}{\pi(t-t')} dt = \left\langle i(t), \frac{1}{\pi(t-t')} \right\rangle, \quad (10.65)$$

$$V(t') = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{\pi(t-t')} dt = \left\langle v(t), \frac{1}{\pi(t-t')} \right\rangle, \quad (10.66)$$

donde hay que tener en cuenta que los productos escalares no son tales, sino que tienen que ser vistos como funcionales lineales, para cada t' aplicados sobre $i(t)$ o $v(t)$, respectivamente, así

$$I(t') = \mathbf{HB}_{t'}[i(t)], \quad (10.67)$$

$$V(t') = \mathbf{HB}_{t'}[v(t)], \quad (10.68)$$

donde $\mathbf{HB}_{t'}$ indica el conjunto de funcionales lineales con núcleo $\frac{1}{\pi(t-t')}$, para cada t' , que devuelve la transformada de Hilbert de la función que se le aplica en el punto t'^9 . Es evidente la semejanza entre las expresiones (10.67) y (10.68) con las de la aplicación de la transformada de Hilbert como un operador,

$$I(t') = \mathbf{TH}[i(t)], \quad (10.69)$$

$$V(t') = \mathbf{TH}[v(t)], \quad (10.70)$$

⁹Desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación de los bras $\langle i(t) |$ y $\langle v(t) |$ sobre el conjunto de kets $\left| \frac{1}{\pi(t-t')} \right\rangle$, para cada t' .

aunque con la salvedad de que en este caso estamos hablando de un operador que actúa sobre una función obteniéndose otra y en el caso anterior se trataba de un conjunto de funcionales lineales aplicados a una función de los cuales se obtenía un número por cada valor de t' .

Según se había visto en el Apdo. 8.7.4, la transformada de Hilbert mantiene la pertenencia de una señal al subespacio al que pertenece la función original, así,

$$\text{si } i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}), \quad (10.71)$$

$$\text{si } i(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.72)$$

$$\text{si } i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}), \quad (10.73)$$

de esta manera resulta sencillo conocer a qué subespacio pertenecerá una señal en el dominio espectral si se conoce a qué subespacio pertenece en el dominio real. Así, las reglas para saber a qué subespacio pertenece $V(t')$ conociendo a cuál pertenece $I(t')$ o incluso $i(t)$ son las mismas que para el análisis en el dominio real, es decir, las de conocer a qué subespacio pertenece $v(t)$ sabiendo a cuál pertenece la señal de entrada $i(t)$.

Al tratarse de un sistema lineal e invariante, una de las propiedades de las que se puede hacer uso para su análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Hilbert es su cálculo a través de una convolución, como se demuestra en [1] y [61]:

$$V(t') = I(t') * h(t') = i(t') * H(t'), \quad (10.74)$$

donde

$$H(t') = \mathbf{TH}[h(t)] = \mathbf{TH}[L\delta'(t)] = \frac{L}{\pi(t-t')^2} \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R}) \quad (10.75)$$

es la transformada de Hilbert de la respuesta al impulso.

Veamos el análisis para funciones de diferentes subespacios:

I) Sea $i(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

Dado que en este caso siempre se puede asegurar que $v(t) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, es fácil comprobar que tanto $I(t')$ como $V(t')$ serán funciones de cuadrado integrable e infinitamente derivables, es decir, funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$. Los funcionales (10.67) y (10.68) están perfectamente definidos ya que tanto $i(t)$ como $v(t)$ son funciones de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, por lo que $I(t')$ y $V(t')$ no tendrán singularidades o éstas serán evitables, cosa que es evidente ya que son infinitamente derivables.

Sea, por ejemplo,

$$i(t) = \text{sinc}(at) \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') = \frac{\cos(at') - 1}{at'} \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}), \quad (10.76)$$

así,

$$V(t') = \frac{\cos(at') - 1}{at'} * L\delta'(t') = -L \frac{at' \sin(at') + \cos(at') - 1}{at'^2} \in \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R}) \quad (10.77)$$

ya que son funciones trigonométricas divididas por un polinomio. La Fig. 10.4 muestra la representación gráfica de este ejemplo.

II) Sea $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$

Para este caso no se puede asegurar, como se había visto en el análisis en el dominio real, que $v(t)$ sea también una función de $L^2(\mathbb{R})$. Los funcionales (10.67) y (10.68) pueden no estar bien definidos para todos los valores de t' , ya que $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ y de $v(t)$ no se puede decir nada.

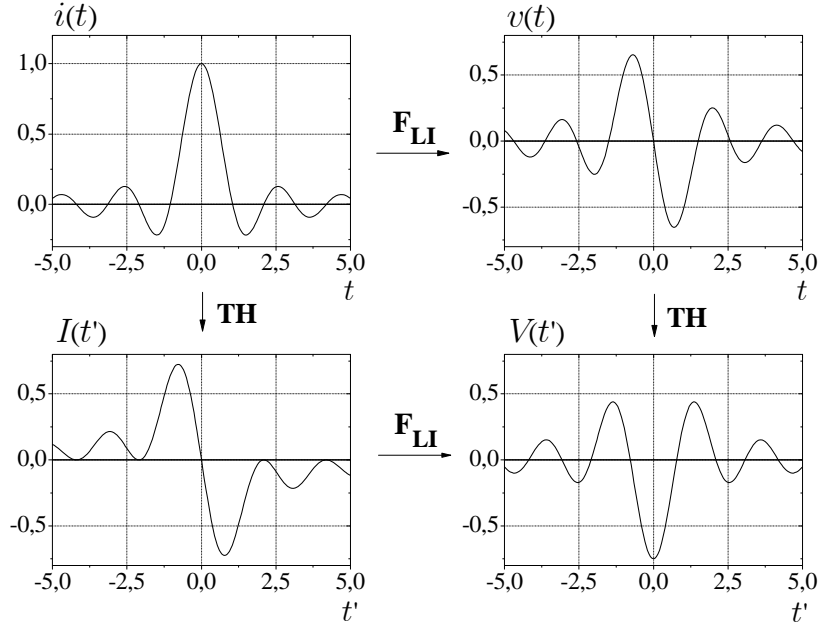


Figura 10.4: Función de entrada al sistema $i(t) = \text{sinc}(3t)$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Hilbert $I(t')$ y $V(t')$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Hilbert. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

Sea, por ejemplo, una función de entrada triangular

$$i(t) = T_{T_0}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') = \frac{t'}{T_0\pi} \text{Ln} \left| \frac{t'^2}{t'^2 - T_0^2} \right| + \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{t' - T_0}{t' + T_0} \right| \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.78)$$

Su transformada de Hilbert es¹⁰

$$\begin{aligned} I(t') &= \mathbf{TH}[T_{T_0}(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{T_{T_0}(t)}{\pi(t-t')} dt = \\ &= \frac{t'}{T_0\pi} \text{Ln} \left| \frac{t'^2}{t'^2 - T_0^2} \right| + \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{t' - T_0}{t' + T_0} \right|. \end{aligned} \quad (10.79)$$

La señal de salida en el dominio espectral es

$$\begin{aligned} V(t') &= \left(\frac{t'}{T_0\pi} \text{Ln} \left| \frac{t'^2}{t'^2 - T_0^2} \right| + \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{t' - T_0}{t' + T_0} \right| \right) * L\delta'(t') = \\ &= \frac{L}{T_0\pi} \text{Ln} \left| \frac{t'^2}{t'^2 - T_0^2} \right| \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \quad (10.80)$$

pero no es de $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$ porque la función no es derivable en $t' = \pm T_0$ ni en $t' = 0$. En la Fig. 10.5 se representa este ejemplo.

Sea, por otro lado, una función pulso de entrada

$$i(t) = P_{T_0}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{t' - T_0/2}{t' + T_0/2} \right| \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.81)$$

¹⁰Ver la demostración completa en el Ap. D.17.

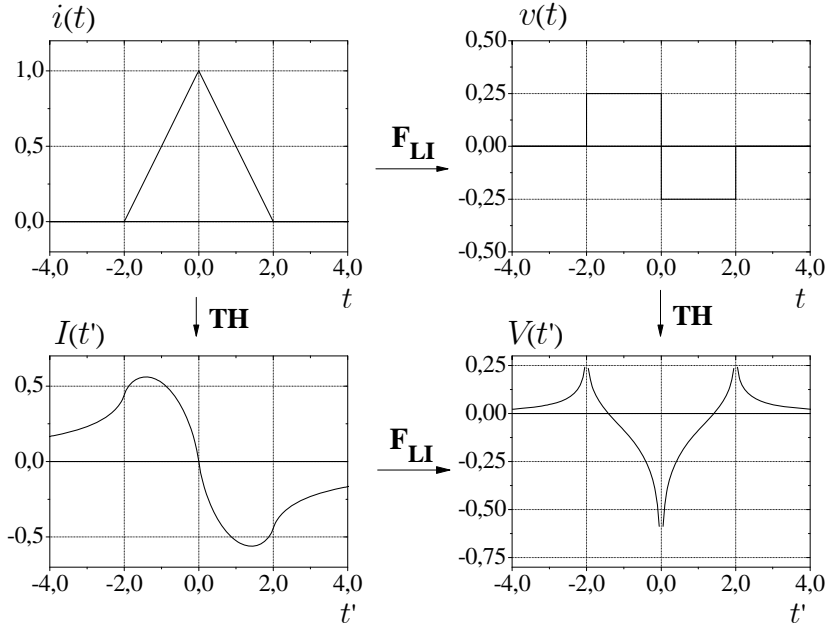


Figura 10.5: Señal de entrada al sistema $i(t) = T_{T_0}(t)$, función triángulo con $T_0 = 2$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Hilbert $I(t')$ y $V(t')$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Hilbert. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $L^2(\mathbb{R})$ pero no a $C_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$.

la señal de salida en el dominio espectral es

$$V(t') = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{t' - T_0/2}{t' + T_0/2} \right| * L\delta'(t') = \frac{L}{\pi} \left(\frac{1}{t' - T_0/2} - \frac{1}{t' + T_0/2} \right) \quad (10.82)$$

que no es una función de cuadrado integrable. Se representan estas funciones en la Fig. 10.6.

III) Sea $i(t) \in C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ ¹¹.

Para este último caso sí se puede asegurar que $v(t) \in C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$, lo que hace que tanto $I(t')$ como $V(t')$ sean también de $C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$. Los conjuntos de funcionales (10.67) y (10.68) pueden no estar bien definidos para algún valor de t' puesto que ni $i(t)$ ni $v(t)$ son funciones de $C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$.

Sea $i(t)$ una función escalón

$$i(t) = \Gamma(t) \in C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \Rightarrow I(t') = -\frac{1}{\pi} \text{Ln} |t'| \in C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}). \quad (10.84)$$

¹¹Según la definición hecha en (10.65), en este caso $i(t)$ tiene que ser de $C_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ y no de $C_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$ puesto que ocupa la primera componente del producto escalar. En este caso se podría ver $I(t')$ como el resultado del conjunto de funcionales lineales $\mathbf{HB}_{t'}$, tal como aparece en (10.67), o como el resultado del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{I}}$ sobre cada una de las funciones $\frac{1}{\pi(t-t')}$ definido como

$$I(\omega) = \tilde{\mathbf{I}} \left[\frac{1}{\pi(t-t')} \right] = \left\langle i(t), \frac{1}{\pi(t-t')} \right\rangle. \quad (10.83)$$

Para verlo como un funcional lineal tendría que considerarse el producto escalar de manera inversa, siendo $\widetilde{\mathbf{HB}}_{t'}$ un conjunto de funcionales antilineales, tal como muestra más adelante la expresión (10.114) y, en este caso, $i(t)$ sí sería de $C_{L^2}^{\infty'}(\mathbb{R})$.

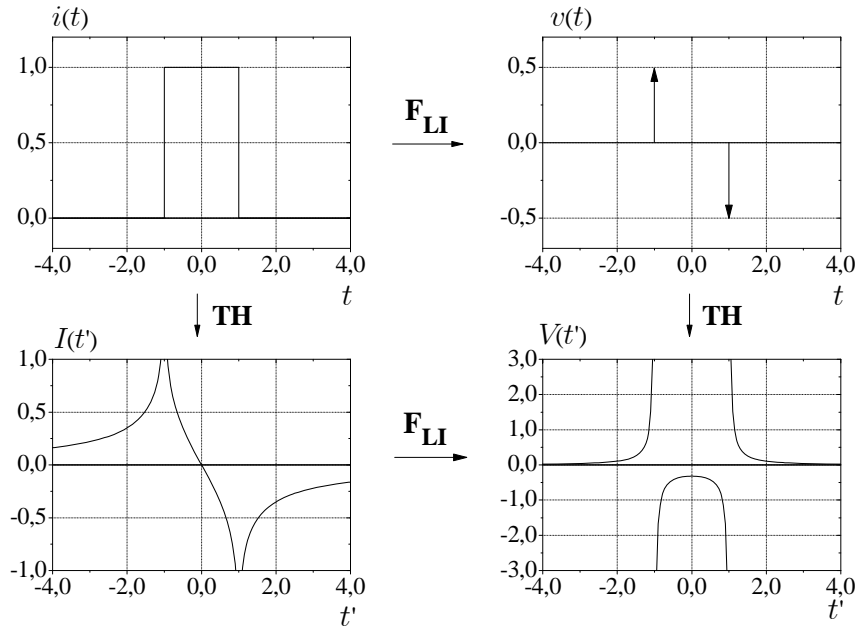


Figura 10.6: Señal de entrada al sistema $i(t) = P_{T_0}(t)$, función pulso con $T_0 = 2$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Hilbert $I(t')$ y $V(t')$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Hilbert. En este ejemplo la señal de entrada es de $L^2(\mathbb{R})$ pero la de salida no lo es, por lo que es un caso en el que el operador hace cambiar el espacio de la señal.

Su transformada de Hilbert es¹²

$$I(t') = \mathbf{TH}[\Gamma(t)] = -\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'|. \quad (10.85)$$

Su señal de salida en el dominio espectral será

$$V(t') = -\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'| * L\delta'(t') = -\frac{L}{\pi t'} \in \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R}) \quad (10.86)$$

porque no es una señal de cuadrado integrable. En la Fig. 10.7 se representan las funciones de este ejemplo.

Con estos ejemplos se comprueba que es fácil conocer la pertenencia a un subespacio de la estructura de los RHS de la señal de salida en el dominio espectral $V(t')$ si se conoce a qué subespacio pertenece esa señal en el dominio real, $v(t)$. Más aún, es posible conocer a qué subespacio pertenece $V(t')$ simplemente conociendo a qué subespacio pertenece la señal de entrada $i(t)$ en el dominio real, siempre que ésta sea de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$, pero no se puede decir nada si $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $i(t) \notin \mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$. Esto resulta lógico, ya que el subespacio $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ está generado teniendo en cuenta el operador $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$ y, consecuentemente, también $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$, pero esto no ocurre para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ que es independiente del operador empleado, lo cual hace que parezca razonable que se mantengan las propiedades de la pertenencia a un subespacio cuando las señales son de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$ pero no cuando son simplemente de $L^2(\mathbb{R})$.

Análisis espectral bajo la transformada de Fourier

¹²Ver demostración completa en el Ap. D.18.

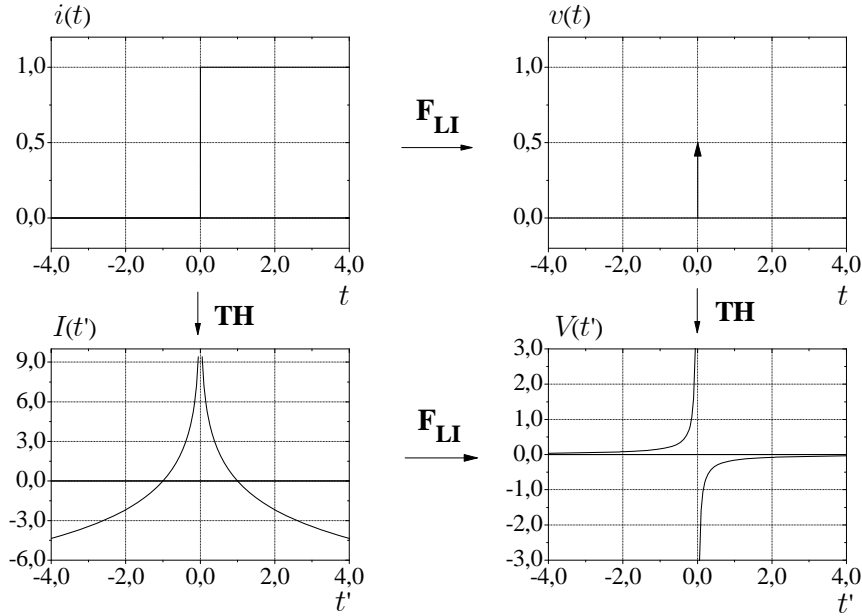


Figura 10.7: Función de entrada al sistema $i(t) = \Gamma(t)$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Hilbert $I(t')$ y $V(t')$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Hilbert. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Consideremos ahora el análisis de este sistema en el dominio espectral a través de la transformada de Fourier. Esto quiere decir que el conjunto de funciones base escogidas son $e(\tau; \mu) \equiv e(t; \omega) = \{e^{j\omega t}\}_{\omega} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, es decir que es una base dentro del espacio dual lineal de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La transformada de las señales de entrada y de salida, es decir, sus coeficientes en la base $e(t; \omega)$, son calculados a partir de las expresiones bien conocidas

$$I(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \langle i(t), e^{j\omega t} \rangle, \quad (10.87)$$

$$V(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = \langle v(t), e^{j\omega t} \rangle, \quad (10.88)$$

donde los productos escalares no son tales, sino que han de ser interpretados como un conjunto de funcionales lineales, para cada ω , sobre $i(t)$ o $v(t)$, respectivamente, así

$$I(\omega) = \mathbf{F}_{\omega}[i(t)], \quad (10.89)$$

$$V(\omega) = \mathbf{F}_{\omega}[v(t)], \quad (10.90)$$

siendo \mathbf{F}_{ω} el conjunto de funcionales lineales con núcleo $e^{-j\omega t}$, para cada ω , que devuelve la transformada de Fourier de la función a la que se le aplica¹³. Nuevamente, las expresiones (10.89) y (10.90) son semejantes a la aplicación de la transformada de Fourier como un operador,

$$I(\omega) = \mathbf{TF}[i(t)], \quad (10.91)$$

$$V(\omega) = \mathbf{TF}[v(t)], \quad (10.92)$$

aunque la interpretación es diferente, ya que en el primer caso estamos hablando de un conjunto de funcionales lineales que devuelve un valor para cada ω mientras que en el segundo se trata de un operador sobre una función.

¹³Desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación de los bras $\langle i(t) |$ y $\langle v(t) |$ sobre el conjunto de kets $|e^{j\omega t}\rangle$.

Tal como se ha visto en la Secc. 8.7.5, la transformada de Fourier mantiene la pertenencia de una señal dentro del subespacio al que pertenece, es decir,

$$\text{si } i(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (10.93)$$

$$\text{si } i(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.94)$$

$$\text{si } i(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (10.95)$$

por lo que resultará sencillo conocer a qué subespacio pertenece la señal en el dominio espectral si se conoce su pertenencia en el dominio real. No es fácil, por otro lado, conocer a qué subespacio pertenecerán los coeficientes de la señal de salida aún cuando se conozcan los de la de entrada, puesto que, como se había visto en el análisis en el dominio real, el sistema puede hacer cambiar la pertenencia a un subespacio de la señal de salida con respecto a la de entrada, especialmente cuando $i(t)$ o $I(\omega)$ son de $L^2(\mathbb{R})$.

Una de las propiedades útiles que también se pueden emplear en este caso para conocer la pertenencia de $V(\omega)$ a un subespacio es tener en cuenta que el sistema es lineal e invariante, por lo que

$$V(\omega) = H(\omega)I(\omega), \quad (10.96)$$

donde

$$H(\omega) = \mathbf{TF}[h(t)] = \mathbf{TF}[L\delta'(t)] = j\omega L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (10.97)$$

Veamos diferentes casos:

I) Sea $i(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Como se había visto en el dominio real, $v(t)$ siempre será una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, por lo que tanto $I(\omega)$ como $V(\omega)$ también serán funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Los funcionales (10.89) y (10.90) están perfectamente definidos para todo ω , por ser $i(t)$ y $v(t)$ funciones de Schwartz. Recurriendo al ejemplo anterior, sea $i(t)$ un pulso gaussiano,

$$i(t) = e^{-at^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (10.98)$$

así

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = j\sqrt{\frac{\pi}{a}} L\omega e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (10.99)$$

puesto que se trata de una gaussiana multiplicada por un polinomio. La representación de las funciones de este ejemplo se visualiza en la Fig. 10.8.

II) Sea $i(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $i(t) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Está claro que $I(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ e $I(\omega) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, como se había dicho antes, pero no se puede decir nada sobre $V(\omega)$. Los funcionales (10.89) y (10.90) pueden no estar perfectamente definidos para todo ω porque $i(t)$ no es una función de Schwartz y de $v(t)$ no se puede asegurar nada. Viendo los ejemplos anteriores, sea $i(t)$ un pulso rectangular

$$i(t) = P_{T_0}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{T_0}{2}\omega\right) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.100)$$

por tanto

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = 2jL \sin\left(\frac{T_0}{2}\omega\right) \notin L^2(\mathbb{R}) \quad (10.101)$$

sino que $V(\omega) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ ¹⁴ por tratarse de una función seno. Como ya se había visto en el dominio real, $v(t) = L\delta(t + T_0/2) - L\delta(t - T_0/2) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, por lo que era de esperar que $V(\omega)$ también fuese de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. En la Fig. 10.9 se representa esta situación.

¹⁴Tal como se están llevando a cabo las definiciones de la transformada de Fourier como funcionales lineales,

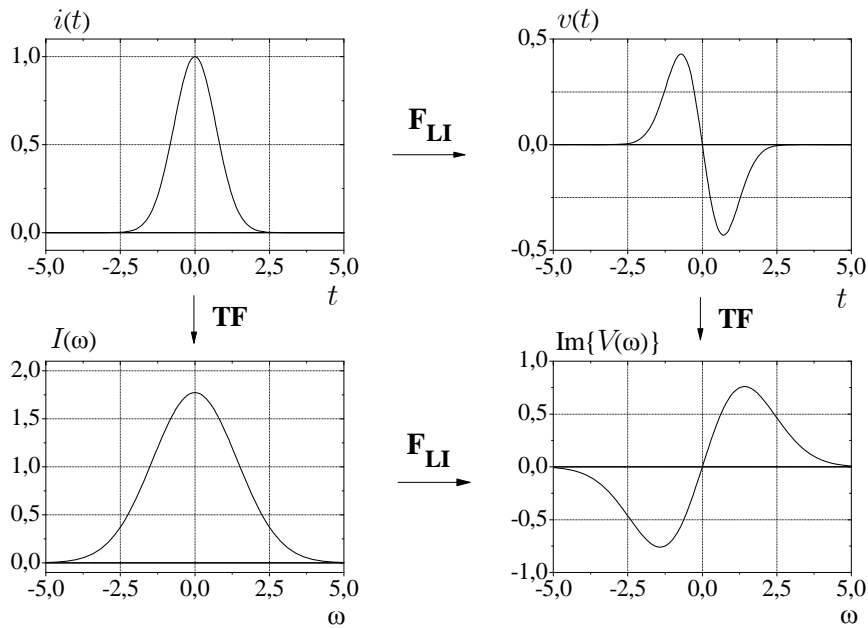


Figura 10.8: Función de entrada al sistema $i(t) = e^{-at^{-2}}$ con un valor de $a = 1$, junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

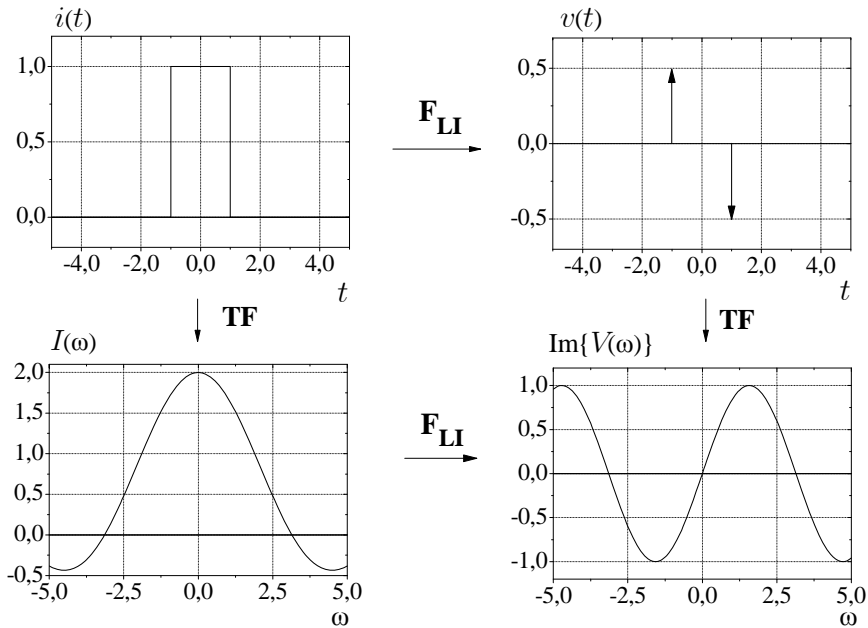


Figura 10.9: Señal de entrada al sistema $i(t) = P_{T_0}(t)$, función pulso de ancho $T_0 = 2$, junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo la señal de entrada pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ pero no a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sin embargo la de salida no es de $L^2(\mathbb{R})$ sino de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ al estar formada por distribuciones en el dominio real y por funciones que no son de cuadrado integrable en el dominio espectral. Este es un ejemplo de que el sistema puede cambiar el subespacio de la señal de entrada.

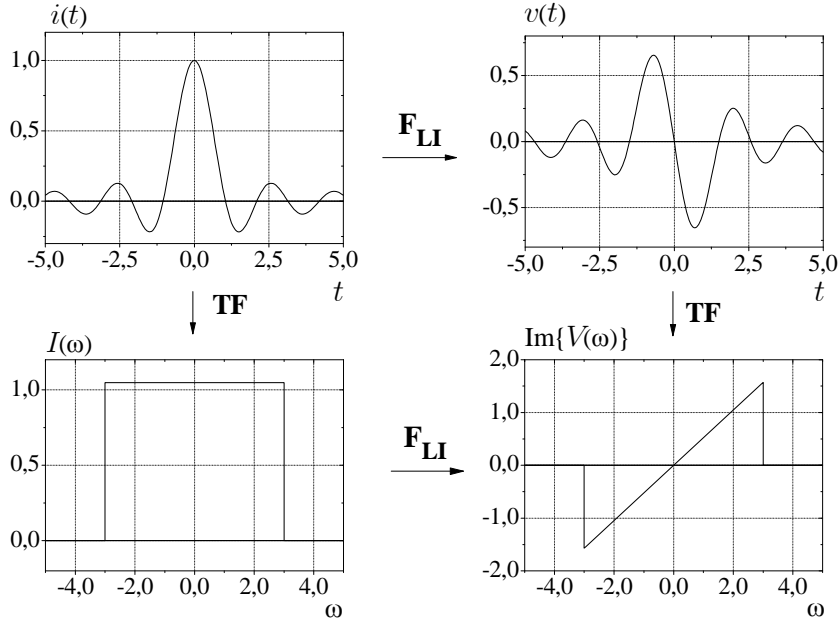


Figura 10.10: Señal de entrada al sistema $i(t) = \text{sinc}(3t)$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo todas las señales son de $L^2(\mathbb{R})$ pero no de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Sea, por otro lado, la función

$$i(t) = \text{sinc}(at) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = \frac{\pi}{a} P_{2a}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10.103)$$

es, por tanto,

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = j\frac{\pi}{a} L\omega P_{2a}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (10.104)$$

por ser una función acotada definida en un intervalo finito, pero que no es de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por no ser continua, lo cual es de esperar porque, como se había visto en el dominio real, $v(t) = L \frac{\cos(at) - \text{sinc}(at)}{t} \in L^2(\mathbb{R})$, pero $v(t) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Estas gráficas se pueden visualizar en la Fig. 10.10.

III) Sea $i(t) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ ¹⁵.

las señales ocupan la primera componente mientras que son los núcleos de estos funcionales los que ocupan la segunda, para que sea lineal, por lo que las señales resultado de estas aplicaciones también se corresponderán con funciones que ocuparían la primera componente de un producto escalar, lo que hace que, en caso de que estas no sean de cuadrado integrable, tengan que ser del espacio antidual $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

Desde el punto de vista de la notación de Dirac de bras y kets, los núcleos de los funcionales lineales se corresponden con los kets, mientras que las funciones se corresponden con los bras. La aplicación de un conjunto de kets (funcionales lineales) sobre un bra puede asociarse con la aplicación de un operador sobre un bra tal como se había visto en las parejas (10.89)-(10.91) y (10.90)-(10.92), siendo el resultado, por tanto, será otro bra,

$$\langle f | \mathbf{F} = \langle g | \quad (10.102)$$

que, en caso de no ser de cuadrado integrable, será un elemento del espacio dual antilineal $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

¹⁵Al igual que los razonamientos anteriores, según la definición hecha en (10.87), en este caso $i(t)$ tiene que ser de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ y no de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puesto que ocupa la primera componente del producto escalar. En este caso se podría ver $I(\omega)$ como el resultado del conjunto de funcionales lineales $\mathbf{F}\omega$, tal como aparece en (10.89), o como el resultado del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{I}}$ sobre cada una de las funciones $e^{j\omega t}$ definido como

$$I(\omega) = \tilde{\mathbf{I}}[e^{j\omega t}] = \langle i(t), e^{j\omega t} \rangle. \quad (10.105)$$

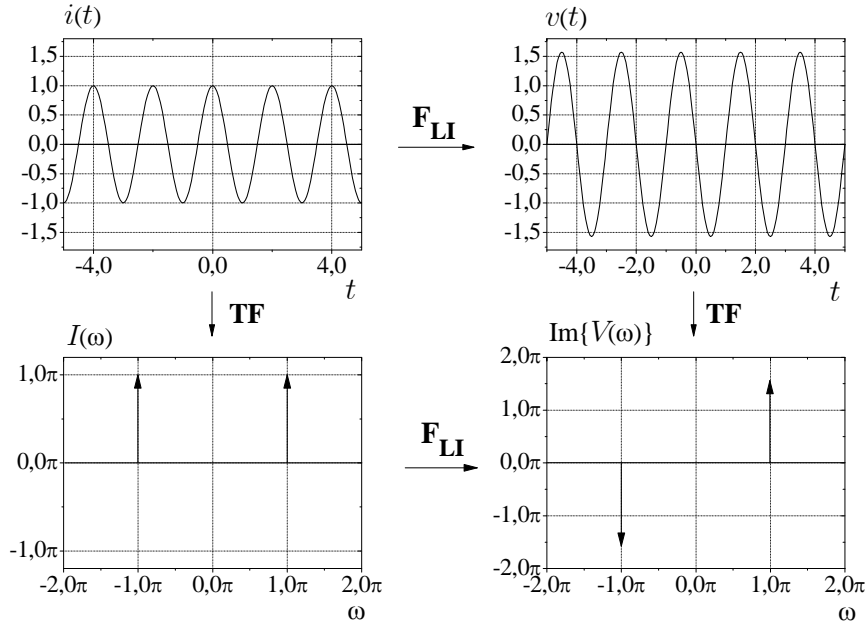


Figura 10.11: Función de entrada al sistema $i(t) = \cos(\pi t)$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

En este caso tampoco los funcionales (10.89) y (10.90) pueden asegurar que $I(\omega)$ y $V(\omega)$ queden perfectamente definidos para todo ω porque $i(t)$ no es una función de Schwartz y de $v(t)$ no se sabe nada. Lo que sí es claro es que $I(\omega) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ por ser la transformada de Fourier de una función de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. Según los ejemplos vistos en el análisis en el dominio real, sea $i(t)$ una señal cosenoidal

$$i(t) = \cos(\omega_0 t) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (10.106)$$

así

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = j\omega_0 L(\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (10.107)$$

ya que $v(t) = -\omega_0 L \sin(\omega_0 t) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ como se pueden ver en la Fig. 10.11.

Siendo $i(t)$ una función escalón

$$i(t) = \Gamma(t) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (10.108)$$

la señal de salida en el dominio espectral

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = j\omega L \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) = L \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \quad (10.109)$$

por ser una función constante, siendo $v(t) = L\delta(t)$ también de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, tal como se muestran en la Fig. 10.12.

Sin embargo, un caso especial es el de considerar como entrada una señal constante, que se corresponde con las funciones del núcleo del operador $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$

$$i(t) = K \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}) \Rightarrow I(\omega) = 2\pi K\delta(\omega) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R}), \quad (10.110)$$

Para verlo como un funcional lineal tendría que considerarse el producto escalar de manera inversa, siendo $\tilde{\mathbf{F}}_\omega$ un conjunto de funcionales antilineales, tal como muestra la ecuación (10.116). En este caso, $i(t)$ sí sería de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

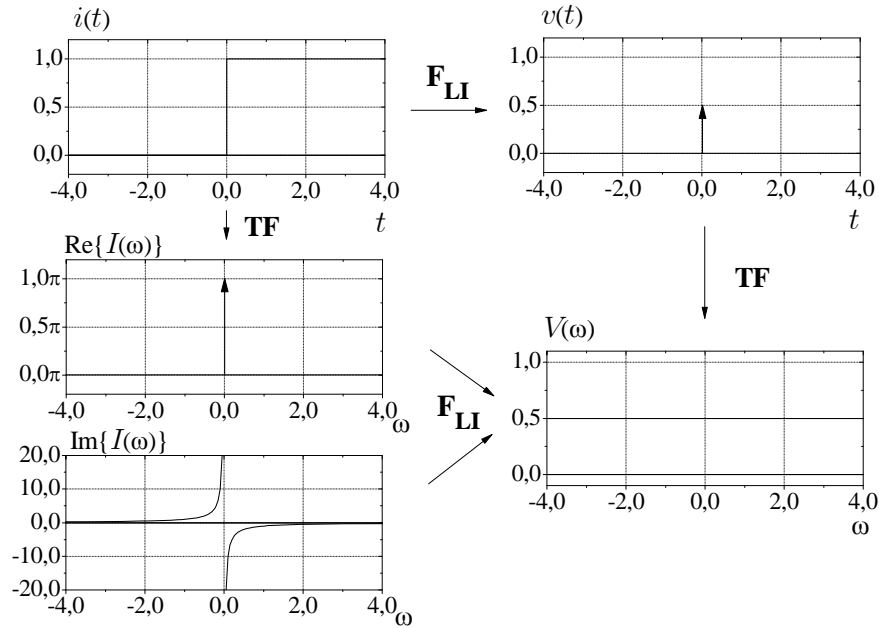


Figura 10.12: Función de entrada al sistema $i(t) = \Gamma(t)$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo todas las funciones pertenecen al espacio $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$.

pero

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) = 2\pi jKL\omega\delta(\omega) = 0 \quad \forall \omega, \quad (10.111)$$

y la función constante nula es común a todos los subespacios de cualquier espacio vectorial, por lo que $v(t) = 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pero también $v(t) = 0 \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$. La representación de estas funciones puede verse en la Fig. 10.13.

De esta manera se prueba que no es del todo posible conocer la pertenencia de $V(\omega)$ a un subespacio concreto dentro de los espacios de Hilbert equipados con sólo conocer en qué subespacio vive $i(t)$ o $I(\omega)$ puesto que, como se ha visto también en el análisis del sistema en el dominio real, el operador puede hacer cambiar la pertenencia de la señal de salida a un subespacio con respecto al subespacio al que pertenece la señal de entrada. Lo que sí se puede determinar es a qué subespacio pertenecerá $V(\omega)$ si se sabe dónde vive $v(t)$ ya que, por las propiedades de la transformada de Fourier dentro de esta estructura de espacio de Hilbert equipado, vistas en la Secc. 8.7.5, ésta no cambia de subespacio. Sin embargo, se puede localizar el subespacio donde vive $V(\omega)$ conociendo el de $i(t)$ en el caso de que $i(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, porque se asegura que $v(t)$ sea también una función de Schwartz y, por tanto, hace que $V(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, como era previsible, ya que en la propia definición del subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ interviene el operador considerado, por lo que es de esperar que este subespacio posea propiedades más ventajosas que los otros. Es cierto que también, consecuentemente, la definición de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ está determinada por el operador y, en general, si la señal de entrada $i(t) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ se puede asegurar que también $V(\omega) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$, con la salvedad de que a este subespacio pertenecen las funciones del núcleo del operador, que las llevarán siempre a la función nula, que no sólo es de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ sino de cualquier subespacio. Para el caso de las señales de entrada que sean del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ pero no de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ no se puede decir nada de las señales de salida tanto en el dominio real como en el espectral.

En todos estos ejemplos, tanto para el análisis en el dominio real como en el espectral, se ha considerado el conjunto de funcionales dentro del subespacio dual lineal, ya sea $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$,

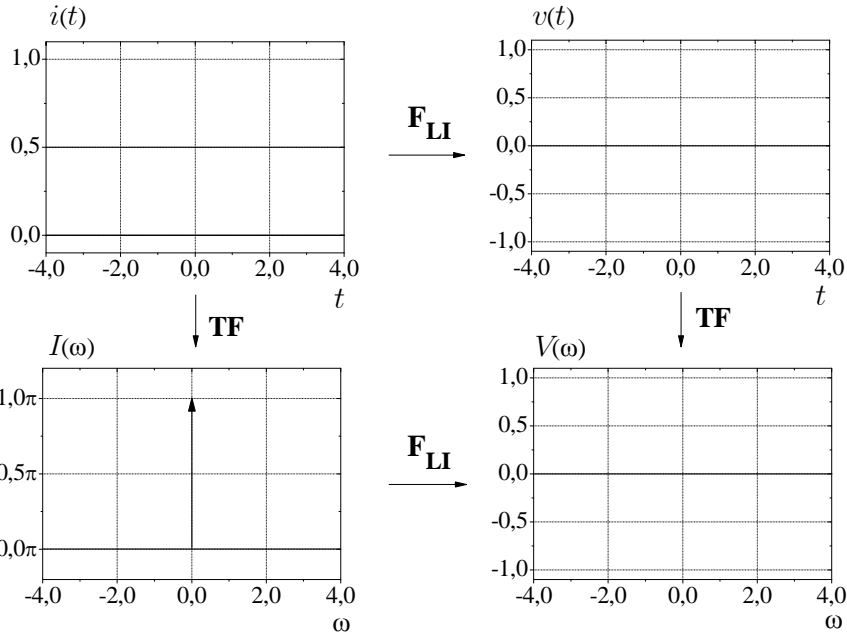


Figura 10.13: Función de entrada al sistema $i(t) = K$ constante de valor $K = \frac{1}{2}$ junto con la función de salida $v(t)$ y las respectivas transformadas de Fourier $I(\omega)$ y $V(\omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo la señal de entrada pertenece a $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ pero la de salida es la función nula, por ser $i(t) \in \text{Ker}\{\mathbf{F}_{LI}\}$, por lo que se puede considerar la salida perteneciente a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o a cualquier otro subespacio por tratarse del elemento neutro.

debido a la propia estructura de las ecuaciones, donde los elementos no pertenecientes a $L^2(\mathbb{R})$, como con $\delta(t-t')$, $h(t-t')$, $e^{j\omega t}$ o $\frac{1}{\pi(t-t')}$, estaban considerados en la segunda componente del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Resulta sencillo recolocar las ecuaciones para que aparezcan en la primera componente, haciendo que pertenezcan al subespacio dual antilineal, $\mathcal{S}^\times(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}_{L^2}^\infty(\mathbb{R})$, siendo

$$i^*(t) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} \delta(t-t') i^*(t') dt' = \langle \delta(t-t'), i(t') \rangle = \tilde{\mathbf{D}}_t [i(t')], \quad (10.112)$$

$$v^*(t) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} h(t-t') i^*(t') dt' = \langle h(t-t'), i(t') \rangle = \tilde{\mathbf{H}}_t [i(t')], \quad (10.113)$$

$$I^*(t') = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t-t')} i^*(t) dt = \left\langle \frac{1}{\pi(t-t')}, i(t) \right\rangle = \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{B}_{t'}} [i(t)] \quad (10.114)$$

$$V^*(t') = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t-t')} v^*(t) dt = \left\langle \frac{1}{\pi(t-t')}, v(t) \right\rangle = \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{B}_{t'}} [v(t)] \quad (10.115)$$

$$I^*(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} i^*(t) dt = \langle e^{j\omega t}, i(t) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_\omega [i(t)], \quad (10.116)$$

$$V^*(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} v^*(t) dt = \langle e^{j\omega t}, v(t) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_\omega [v(t)], \quad (10.117)$$

de esta manera se obtienen los conjuntos de funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{D}}_t$, $\tilde{\mathbf{H}}_t$ y $\tilde{\mathbf{F}}_\omega$, que, aplicados a las mismas funciones que los lineales, obtienen el resultado conjugado.

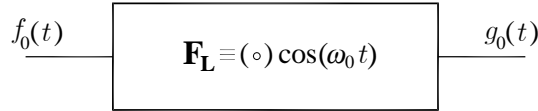


Figura 10.14: Representación en forma de caja negra del operador modulador en amplitud.

10.2. Operador modulador en variable continua

Sea el sistema modulador mostrado en la Fig. 10.14 en el que la señal de salida $g_0(t)$ de variable continua se obtiene mediante la señal $m(t) = \cos(\omega_0 t)$ modulada en amplitud por la señal de entrada periódica de periodo T_0 , $f_0(t)$. El sistema se puede interpretar a partir de la teoría de señales y sistema mediante un operador lineal no invariante \mathbf{F}_L definido como

$$\mathbf{F}_L[\cdot] \equiv (\cdot) \cos(\omega_0 t). \quad (10.118)$$

Construyamos los espacios de Hilbert equipados para este problema donde se puedan localizar las funciones y funcionales que intervienen en él.

Lo primero que se hace es localizar algunos subespacios importantes referentes a este problema concreto. Al considerar funciones periódicas de variable continua, el espacio de Hilbert de partida es $\mathcal{H} = L^2(\langle T_0 \rangle)$.

- *Dominio del operador*, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\}$:

El dominio de este operador será el conjunto de todas las funciones que puedan ser multiplicadas por un coseno, es decir, todas,

$$\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\} = \{f_0(t)\}, \quad (10.119)$$

teniendo en cuenta que si $f_0(t)$ se corresponde con una distribución, el producto de ésta por una función se define como se muestra en el Ap. B.17.4,

$$\langle \varphi, g\mathbf{d} \rangle = \langle g^* \varphi, \mathbf{d} \rangle, \quad (10.120)$$

siendo \mathbf{d} la distribución, g la función a multiplicar y φ cualquier función del subespacio Φ que se definirá más adelante.

Al ser $m(t) = \cos(\omega_0 t)$ una función también periódica de periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, la función resultado será igualmente periódica de periodo T_0 . Con otro tipo de función moduladora $m(t)$ habría que hacer otro estudio, puesto que podría darse el caso de que el espacio de llegada fuese distinto al de partida, por ejemplo de funciones de otro periodo T_1 o no periódicas.

- *Núcleo del operador*, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\}$:

El núcleo de este operador será el conjunto de funciones cuyo producto por $\cos(\omega_0 t)$ sea nulo, es decir,

$$\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\} = \{f_0(t) : f_0(t) \cos(\omega_0 t) = 0, \forall t\}. \quad (10.121)$$

En matemáticas fundamentales, si el producto de dos factores es nulo, al menos uno de ellos tiene que ser nulo, como $\cos(\omega_0 t)$ no va a ser 0 para todo t , sólo cabría la posibilidad de considerar la función nula¹⁶ como núcleo del operador; pero teniendo en cuenta la teoría

¹⁶Recordar que nos encontramos en el espacio $L^2(\langle T_0 \rangle)$, por lo que la función nula representa cualquier función de medida nula, es decir, cualquiera que sea 0 para todos sus puntos salvo en un conjunto de medida nula.

de distribuciones, puede darse el caso de que el producto de dos funciones sea nulo sin tener que serlo ninguna de las dos, por ejemplo, sea $f_0(t) = \delta_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right)$, en ese caso

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \delta_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right) \cos(\omega_0 t) = \delta_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right) \cos\left(\frac{2\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{4}\right) = \\ &= \delta_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (10.122)$$

y lo mismo pasaría para la delta centrada en $t = \frac{3T_0}{4}$ o cualquier otra distribución que muestree en los nulos de la función moduladora.

Dado que

$$m(t) \delta^n(t - t_0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k m^{(k)}(t_0) \delta^{n-k}(t - t_0), \quad (10.123)$$

siendo $m(t) = \cos(\omega_0 t)$, las únicas funciones que pueden dar como resultado la función nula son

$$\delta_0(t), \delta_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right), \delta'_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right), \delta'_0\left(t - \frac{3T_0}{4}\right) \quad (10.124)$$

puesto que para mayores órdenes tendría que cumplirse que derivadas de orden par e impar de $m(t)$ se anulasen en el mismo punto, lo cual no puede ser.

El núcleo de este operador, por tanto, se corresponde con el conjunto

$$\begin{aligned} \text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\} &= \{K_1 \delta_0(t)\}_{K_1} \cup \left\{K_2 \delta_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right\}_{K_2} \cup \\ &\cup \left\{K_3 \delta'_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right\}_{K_3} \cup \left\{K_4 \delta'_0\left(t - \frac{3T_0}{4}\right)\right\}_{K_4}, \quad K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (10.125)$$

donde también se incluye, para $K_i = 0$, la función nula.

Si no se consideran las distribuciones, el núcleo del operador tan sólo es la función nula, por lo que el operador será invertible, siendo su operador inverso

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}}^{-1}[\cdot] = (\cdot) \frac{1}{\cos(\omega_0 t)} = (\cdot) \sec(\omega_0 t), \quad (10.126)$$

pero no podría ser invertible considerando las distribuciones que aparecen en el núcleo ya que el operador inverso no estaría definido para esas funciones.

■ *Conjunto de autofunciones del operador, Eig* $\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$:

Las autofunciones de este operador serán aquéllas que al multiplicarlas por $\cos(\omega_0 t)$ den como resultado ellas mismas multiplicadas por una constante, así

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\} = \{f_0(t) : f_0(t) \cos(\omega_0 t) = \alpha f_0(t)\}, \quad (10.127)$$

por tanto, si $f_0(t) \neq 0$,

$$\cos(\omega_0 t) = \alpha, \quad (10.128)$$

lo cual no puede ser porque para cualquier valor de $\omega_0 \neq 0$ la función $\cos(\omega_0 t)$ no va a ser constante. Por otro lado, si $f_0(t) = 0$ se tiene

$$0 \cos(\omega_0 t) = 0 \quad (10.129)$$

por lo que la función $f_0(t) = 0$ sí que pertenece al conjunto de autofunciones del operador. Sin embargo, por el mismo razonamiento que para la obtención de las funciones del núcleo

del operador, también es posible obtener autofunciones en términos de las distribuciones, ya que, si $f_0(t) = \delta_0(t - t_0)$, con $t_0 \in [0, T_0)$,

$$g_0(t) = \delta_0(t - t_0) \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t_0) \delta_0(t - t_0) \quad (10.130)$$

siendo $\alpha = \cos(\omega_0 t_0)$ el autovalor de la autofunción $\delta_0(t - t_0)$. Por otro lado, también se cumple que si $f_0(t) = \delta'_0(t - t_0)$,

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \delta'_0(t - t_0) \cos(\omega_0 t) = \\ &= \cos(\omega_0 t_0) \delta'_0(t - t_0) + \omega_0 \sin(\omega_0 t_0) \delta_0(t - t_0) \end{aligned} \quad (10.131)$$

que será autofunción para los valores de t_0 que hagan que $\sin(\omega_0 t_0) = 0$, como son $t_0 = 0$ y $t_0 = \frac{T_0}{2}$. Además, todas las funciones del núcleo también pertenecen al conjunto de autofunciones puesto que son funciones de autovalor 0. Así

$$\begin{aligned} \text{Eig}\{\mathbf{F}_L\} &= \text{Ker}\{\mathbf{F}_L\} \cup \{K_1 \delta_0(t - t_0)\}_{K_1, t_0} \cup \{K_2 \delta'_0(t)\}_{K_2} \cup \\ &\cup \left\{ K_3 \delta'_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \right\}_{K_3}, \quad K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{C}, t_0 \in [0, T_0), \end{aligned} \quad (10.132)$$

donde $K_1 \cos(\omega_0 t_0)$ es el autovalor de la autofunción correspondiente a $K_1 \delta_0(t - t_0)$, K_2 el autovalor correspondiente a $K_2 \delta'_0(t)$ y $-K_3$ el correspondiente a $K_3 \delta'_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$.

10.2.1. Estructura de los espacios de Hilbert equipados

Las dos ternas que definen los espacios de Hilbert equipados son

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (10.133)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (10.134)$$

Al ser el espacio de Hilbert de partida $\mathcal{H} = L^2(\langle T_0 \rangle)$, el producto escalar definido es

$$\langle f_0(t), g_0(t) \rangle = \int_{\langle T_0 \rangle} f_0(t) g_0^*(t) dt. \quad (10.135)$$

Para encontrar el subespacio denso Φ , hay que encontrar el conjunto de funciones que cumpla

$$\Phi = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Dom}\{\mathbf{F}_L^n\}, \quad (10.136)$$

siendo

$$\mathbf{F}_L[f_0(t)] = f_0(t) \cos(\omega_0 t). \quad (10.137)$$

Por tanto, para determinar Φ hay que encontrar el conjunto de funciones $f_0(t)$ que cumplan

$$\Phi = \left\{ f_0(t) \text{ tq } \int_{\langle T_0 \rangle} |f_0(t) \cos^n(\omega_0 t)|^2 dt < \infty \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (10.138)$$

Puesto que $|\cos^n(\omega_0 t)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\int_{\langle T_0 \rangle} |f_0(t) \cos^n(\omega_0 t)|^2 dt \leq \int_{\langle T_0 \rangle} |f_0(t)|^2 dt < \infty. \quad (10.139)$$

En este caso el operador utilizado no modifica en nada el espacio de Hilbert original, ya que la condición (10.139) es la misma que la de las funciones de $L^2(\langle T_0 \rangle)$, por lo que el subespacio

denso Φ sería igual que el propio espacio de Hilbert y, por consiguiente, los espacios duales también serían los mismos que \mathcal{H} , obteniéndose

$$\Phi = \mathcal{H} = \Phi' = \Phi^\times = L^2(\langle T_0 \rangle). \quad (10.140)$$

A pesar de que el espacio $L^2(\langle T_0 \rangle)$ contiene la mayor parte de funciones interés práctico, quedaría fuera la posibilidad de introducir funciones generalizadas como son las distribuciones. Para poder considerar también este tipo de funciones y además poder realizar el análisis espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier, es necesario considerar también el operador derivada \mathbf{D} obteniendo el subespacio

$$\Phi = \bigcap_{n,m=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{L}}^n \mathbf{D}^m \} \quad (10.141)$$

siendo

$$\mathbf{D}[f_0(t)] = \frac{df_0(t)}{dt}, \quad (10.142)$$

así

$$\Phi = \left\{ f_0(t) \text{ tq } \int_{\langle T_0 \rangle} \left| \cos^n(\omega_0 t) \frac{d^m f_0(t)}{dt^m} \right|^2 dt < \infty \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (10.143)$$

y, dado que $|\cos^n(\omega_0 t)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}_0$, se tiene

$$\Phi = \left\{ \int_{\langle T_0 \rangle} \left| \frac{d^m f_0(t)}{dt^m} \right|^2 dt < \infty, \forall m \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad (10.144)$$

por lo que el subespacio denso Φ se corresponde con $\mathcal{P}(T_0)$, es decir, el conjunto de funciones infinitamente derivables y de cuadrado integrable a lo largo de un periodo T_0 . La estructura final de los RHS para este ejemplo es

$$\mathcal{P}(T_0) \subset L^2(\langle T_0 \rangle) \subset \mathcal{P}'(T_0), \quad (10.145)$$

$$\mathcal{P}(T_0) \subset L^2(\langle T_0 \rangle) \subset \mathcal{P}^\times(T_0). \quad (10.146)$$

La representación de estas ternas junto con los subespacios $\text{Dom} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \}$, $\text{Ker} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \}$ y $\text{Eig} \{ \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \}$, anteriormente definidos, se muestra en la Fig. 10.15.

10.2.2. Análisis del sistema en el dominio real

Para comenzar, recordar que cualquier señal $f_0(t)$ se puede expresar en términos de deltas como¹⁷

$$f_0(t) = \int_{t'=\langle T_0 \rangle} f_0(t') \delta_0(t-t') dt' = \langle f_0(t'), \delta_0(t-t') \rangle. \quad (10.147)$$

Este producto escalar no va a estar bien definido ya que interviene la distribución $\delta_0(t-t') \notin L^2(\langle T_0 \rangle)$ y de $f_0(t')$ no se han dado condiciones. De hecho, puesto que $\delta_0(t-t') \in \mathcal{P}'(T_0)$, la expresión (10.147) ha de verse como un conjunto de funcionales lineales, para cada t , aplicados a $f_0(t')$, es decir

$$f_0(t) = \mathbf{D}_t[f_0(t')] \quad (10.148)$$

donde el conjunto de funcionales lineales \mathbf{D}_t , cuyos núcleos son $\delta_0(t-t')$ para cada t , lo que hace es devolver el valor de $f_0(t')$ en el punto t' ¹⁸.

¹⁷Teniendo en cuenta que la distribución $\delta_0(t)$ es real y periódica de periodo T_0 .

¹⁸Desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación del bra $\langle f_0(t') |$ sobre el conjunto de kets $|\delta_0(t-t')\rangle$.

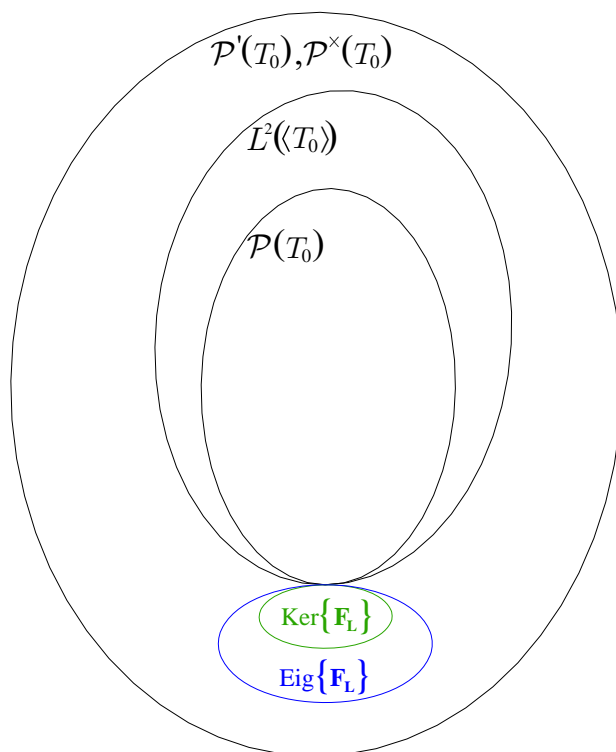


Figura 10.15: Representación dentro de un mismo esquema de todos los espacios de Hilbert equipados construidos para este ejemplo junto con los subespacios generados por el operador. El núcleo del operador, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\}$ en verde, está formado por la función nula y los trenes de deltas y sus derivadas que tomen valores en los nullos de la función moduladora o de sus sucesivas derivadas.

El conjunto de autofunciones del operador, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_L\}$ en azul, se corresponde con los todos los trenes de deltas de periodo T_0 . La intersección del núcleo y las autofunciones son el tren de deltas desplazado $T_0/4$ y el tren de deltas desplazado $3T_0/4$. Estos dos subespacios se localizan en $\mathcal{P}'(T_0)$ y $\mathcal{P}^\times(T_0)$ ya que están formados por distribuciones. El dominio, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\}$ se corresponde con todas las funciones periódicas de periodo T_0 . La única función que pertenece a todos los subespacios es la función nula $f_0(t) = 0$.

Por otro lado, al tratarse de un sistema lineal no invariante, es necesario conocer todo el conjunto de respuestas al impulso $h(t; t')$ para realizar el análisis en el dominio real. Se tiene que

$$h(t; t') = \mathbf{F}_L [\delta_0(t - t')] = \delta_0(t - t') \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t') \quad (10.149)$$

y nuevamente no van a ser funciones de $L^2(\langle T_0 \rangle)$ sino de $\mathcal{P}(T_0)$. Así que en este caso, para analizar la señal de salida, ocurre lo mismo, ya que

$$g_0(t) = \int_{t' \in \langle T_0 \rangle} f_0(t') h(t; t') dt', \quad (10.150)$$

que, expresado como¹⁹

$$g_0(t) = \langle f_0(t'), h(t; t') \rangle = \langle f_0(t'), \cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t') \rangle \quad (10.151)$$

tiene que ser visto como un conjunto de funcionales lineales, para cada t , aplicados a $f_0(t')$, así

$$g_0(t) = \mathbf{H}_t [f_0(t')], \quad (10.152)$$

donde \mathbf{H}_t es el conjunto de funcionales lineales con núcleos $h(t; t') = \cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t')$ para cada t , que devuelve el valor del producto de $f_0(t')$ por $\cos(\omega_0 t')$ en el punto t^{20} .

Se obtienen dos resultados semejantes,

$$g_0(t) = \mathbf{F}_L [f_0(t)] \quad y \quad (10.153)$$

$$g_0(t) = \mathbf{H}_t [f_0(t')]. \quad (10.154)$$

A pesar de que la primera ecuación represente un operador y la segunda un conjunto de funcionales lineales, éste viene determinado por el conjunto de respuestas al impulso, el cual, como se comentaba en el Cap. 2, el conjunto de respuestas al impulso de un sistema representa de forma matemática las propiedades físicas de ese sistema, de esta forma dicho sistema puede verse como un operador (10.153) o como un funcional (10.154).

Se consideran ahora los diferentes casos de pertenencia de $f_0(t)$ a los distintos subespacios para analizar la señal de salida $g_0(t)$.

i) Sea $f_0(t) \in \mathcal{P}(T_0)$.

En este caso el conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t [f_0(t')] = \langle f_0(t'), h(t; t') \rangle$ quedan perfectamente definidos para todo t , puesto que ésta es la condición que define un funcional lineal como se ha visto en (8.291) del Apdo. 8.5. Además, la señal de salida $g_0(t)$ también será siempre una función de $\mathcal{P}(T_0)$ ya que, por la propia definición de $\mathcal{P}(T_0)$, éstas son infinitamente derivables y de cuadrado integrable y, dado que el operador que define el sistema lo que hace es multiplicar dos funciones de este tipo, el resultado también lo será, por tanto, $g_0(t) \in \mathcal{P}(T_0)$.

Sea, por ejemplo, la función cosenoidal

$$f_0(t) = \cos(\omega_0 t) \in \mathcal{P}(T_0). \quad (10.155)$$

La señal de salida

$$g_0(t) = \cos^2(\omega_0 t) \quad (10.156)$$

también será una función de $\mathcal{P}(T_0)$ ya que sus derivadas serán productos senos y cosenos que son infinitamente derivables y de cuadrado integrable a lo largo de un periodo T_0 .

¹⁹Teniendo en cuenta que, en este caso, $h(t; t')$ también son reales.

²⁰También, desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación del bra $\langle f_0(t') |$ sobre el conjunto de kets $|h(t; t')\rangle = |\cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t')\rangle$.

ii) Sea $f_0(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle)$, pero $f_0(t) \notin \mathcal{P}(T_0)$.

En este caso no se puede asegurar que el conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t[f_0(t')] = \langle f_0(t'), h(t; t') \rangle$ queden perfectamente definidos para todo t , puesto que el hecho de que $f_0(t) \notin \mathcal{P}(T_0)$ no garantiza que sea una función continua. Lo que sí se puede garantizar es que la señal de salida $g_0(t)$ sí será una función de $L^2(\langle T_0 \rangle)$ por ser el producto de dos funciones de $L^2(\langle T_0 \rangle)$ pero no será de $\mathcal{P}(T_0)$ por el hecho de que uno de sus factores no lo es.

Sea, por ejemplo, un tren de pulsos,

$$f_0(t) = P_{0,\Delta}(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle) \quad (10.157)$$

con $\Delta < T_0$. La señal de salida es

$$g_0(t) = P_{0,\Delta}(t) \cos(\omega_0 t) \quad (10.158)$$

que es claramente una función de $L^2(\langle T_0 \rangle)$ por ser producto de dos funciones de $L^2(\langle T_0 \rangle)$ pero no de $\mathcal{P}(T_0)$ porque no va a ser infinitamente derivable en $t = \pm \frac{\Delta}{2}$.

iii) Sea $f_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0)$ ²¹.

En este caso tampoco se puede asegurar que el conjunto de funcionales lineales $\mathbf{H}_t[f_0(t')] = \langle f_0(t'), h(t; t') \rangle$ esté perfectamente definido para todo t , puesto que $f_0(t) \notin \mathcal{P}(T_0)$. Sin embargo sí se puede asegurar que la señal de salida $g_0(t)$ será también una función de $\mathcal{P}^\times(T_0)$ ya que

$$g_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0) \Leftrightarrow \langle g_0(t), u_0(t) \rangle \text{ perfectamente definido con } u_0(t) \in \mathcal{P}(T_0), \quad (10.161)$$

$$\langle g_0(t), u_0(t) \rangle = \langle f_0(t) \cos(\omega_0 t), u_0(t) \rangle = \langle f_0(t), u_0(t) \cos(\omega_0 t) \rangle, \quad (10.162)$$

y, dado que $f_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0)$ y $u_0(t) \cos(\omega_0 t) \in \mathcal{P}(T_0)$, se puede concluir que $g_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0)$. Se ha aplicado en (10.162) la propiedad de las distribuciones

$$\langle g\mathbf{T}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{T}, g^*\varphi \rangle \quad (10.163)$$

siendo φ y g funciones de $\mathcal{P}(T_0)$ y \mathbf{T} una distribución de $\mathcal{P}^\times(T_0)$ como se puede ver en el Ap. B.17.4.

Sea como función de entrada, por ejemplo, un tren de deltas

$$f_0(t) = \delta_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0). \quad (10.164)$$

La señal de salida será

$$g_0(t) = \delta_0(t) \cos(\omega_0 t) = \delta_0(t) \quad (10.165)$$

²¹Según la definición hecha en (10.151), en este caso $f_0(t)$ tiene que ser de $\mathcal{P}^\times(T_0)$ y no de $\mathcal{P}'(T_0)$ puesto que ocupa la primera componente del producto escalar. En este caso se podría ver $g_0(t)$ como el resultado del conjunto de funcionales lineales \mathbf{H}_t , tal como aparece en (10.152), o como el resultado del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{F}}$ sobre cada una de las funciones $h(t; t')$ definido como

$$g_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}[h(t; t')] = \langle f_0(t'), h(t; t') \rangle. \quad (10.159)$$

Para verlo como un funcional lineal tendría que considerarse el producto escalar con las componentes intercambiadas, siendo $\tilde{\mathbf{H}}_t$ un conjunto de funcionales antilineales,

$$g_0(t) = \tilde{\mathbf{H}}_t[f_0(t')] = \langle h(t; t'), f_0(t') \rangle. \quad (10.160)$$

En este caso, $f_0(t)$ sí sería de $\mathcal{P}'(T_0)$.

que es la misma señal de entrada ya que es una autofunción del operador y , por las propiedades de la delta de Dirac,

$$\begin{aligned}
\delta_0(t) \cos(\omega_0 t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \cos(\omega_0 t) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \cos(\omega_0 kT_0) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} kT_0\right) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \cos(2\pi k) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \delta_0(t), \tag{10.166}
\end{aligned}$$

por lo que está claro que $g_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0)$.

10.2.3. Análisis del sistema en el dominio espectral

Consideremos el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas de periodo T_0 de variable continua para realizar el análisis espectral de este sistema. El conjunto de funciones base escogidas es, por tanto, $e(\tau; \mu) \equiv e(t; m) = \{e^{jm\omega_0 t}\}_m \subset \mathcal{P}(T_0)$, ya que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $e^{jm\omega_0 t}$ es una función infinitamente derivable y de cuadrado integrable en un periodo de longitud T_0 . Las señales de entrada y salida en el dominio espectral, es decir, los coeficientes de estas señales según la base $e(t; m)$ son el desarrollo en serie de Fourier definido como

$$a(m) = \int_{t=\langle T_0 \rangle} f_0(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \langle f_0(t), e^{jm\omega_0 t} \rangle, \tag{10.167}$$

$$b(m) = \int_{t=\langle T_0 \rangle} g_0(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \langle g_0(t), e^{jm\omega_0 t} \rangle. \tag{10.168}$$

Estos productos escalares estarán bien definidos en función de la naturaleza de $f_0(t)$ y de $g_0(t)$.

Es importante hacer notar que el desarrollo en serie de Fourier de señales de variable continua se corresponde con funciones de variable discreta, por lo que no estaremos trabajando, en el dominio espectral, con la misma estructura de espacios de Hilbert equipados que teníamos en el dominio real. Sin embargo, recurriendo a los resultados de la Secc. 8.7.3, se puede determinar la siguiente relación a través del desarrollo en serie de Fourier:

$$\text{si } f_0(t) \in \mathcal{P}(T_0) \Rightarrow a(m) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}), \tag{10.169}$$

$$\text{si } f_0(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle) \Rightarrow a(m) \in l^2(\mathbb{Z}), \tag{10.170}$$

$$\text{si } f_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0) \Rightarrow a(m) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \tag{10.171}$$

siendo $l^2(\mathbb{Z})$ el conjunto de función de variable discreta de cuadrado sumable, $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ el conjunto de funciones de variable discreta de cuadrado sumable que tienden a 0 conforme m tiende a infinito más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|m|}$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ el conjunto de los funcionales antilineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. De esta forma resulta sencillo conocer a qué subespacio pertenecerá una señal en el dominio espectral si se conoce a qué subespacio pertenece en el dominio real. Además, en este ejemplo concreto, también es posible conocer la pertenencia a un subespacio de la señal de salida conociendo la de la señal de entrada, puesto que es el mismo, por tanto,

determinando la señal de entrada $f_0(t)$ y conociendo a qué subespacio pertenece, se determina instantáneamente dónde se localizan tanto $g_0(t)$, como $a(m)$ e $b(m)$.

Dado que estamos tratando con un sistema lineal no invariante, es posible hacer uso de las ecuaciones del Análisis Espectral Generalizado (ver Cap. 5) para obtener las expresiones de la señal de salida del sistema en el dominio espectral y determinar así a qué subespacio pertenece ésta. De esta manera, a partir de las expresiones (5.44) y (5.45) sobre el análisis espectral generalizado para operadores que actúan sobre el mismo espacio y utilizando el mismo conjunto de funciones base tanto en el espacio de partida como en el de llegada, la señal de salida en el dominio espectral se puede representar como

$$b(m) = T_0 \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \mathbf{H}_*(m; m'), \quad (10.172)$$

siendo

$$\mathbf{H}_*(m; m') = \frac{1}{T_0^2} \langle \langle h(t; t'), e(t; m) \rangle_t, e^*(t'; m') \rangle_{t'}. \quad (10.173)$$

Para este caso se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(m; t') &= \frac{1}{T_0} \langle h(t; t'), e(t; m) \rangle_t = \\ &= \frac{1}{T_0} \langle \cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t'), e^{jm\omega_0 t} \rangle_t = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t=\langle T_0 \rangle} \cos(\omega_0 t') \delta_0(t - t') e^{-jm\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cos(\omega_0 t') e^{-jm\omega_0 t'}, \end{aligned} \quad (10.174)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(m; m') &= \frac{1}{T_0} \left\langle \frac{1}{T_0} \cos(\omega_0 t') e^{-jm\omega_0 t'}, e^{-jm'\omega_0 t'} \right\rangle_{t'} = \\ &= \frac{1}{T_0^2} \int_{t=\langle T_0 \rangle} \cos(\omega_0 t') e^{-jm\omega_0 t'} e^{jm'\omega_0 t'} = \\ &= \frac{1}{T_0^2} \int_{t=\langle T_0 \rangle} \cos(\omega_0 t') e^{-j(m-m')\omega_0 t'} = \\ &= \frac{T_0}{2T_0^2} (\delta(m - m' + 1) + \delta(m - m' - 1)) = \\ &= \frac{1}{2T_0} (\delta(m' - (m + 1)) + \delta(m' - (m - 1))), \end{aligned} \quad (10.175)$$

de esta manera y de forma general, conocida la señal de entrada en el dominio espectral, la señal de salida se puede expresar como

$$\begin{aligned} b(m) &= T_0 \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \mathbf{H}_*(m; m') = \\ &= T_0 \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m') \frac{1}{2T_0} (\delta(m' - (m + 1)) + \delta(m' - (m - 1))) = \\ &= \frac{1}{2} (a(m + 1) + a(m - 1)). \end{aligned} \quad (10.176)$$

De este resultado también se puede ver de forma clara que si $a(m)$ pertenece a un subespacio, $b(m)$ también pertenecerá a ese mismo subespacio porque no deja de ser un par de réplicas de $a(m)$ desplazadas.

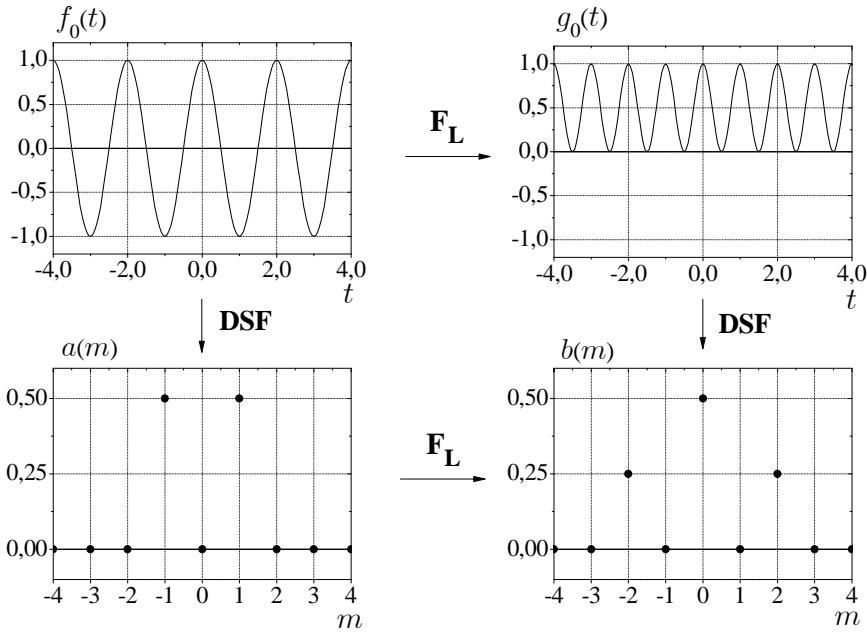


Figura 10.16: Función de entrada al sistema $f_0(t) = \cos(\pi t)$ por lo que $T_0 = 2$, junto con la función de salida $g_0(t)$ y los respectivos desarrollos en serie de Fourier $a(m)$ y $b(m)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{P}(T_0)$ y a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ en el dominio espectral.

Se analizan ahora los casos de pertenencia de $f_0(t)$ a los distintos subespacios para analizar la señal de salida en el dominio espectral $b(m)$.

i) Sea $f_0(t) \in \mathcal{P}(T_0)$.

Los productos escalares en (10.167) y (10.168) están bien definidos por se sus dos componentes funciones del espacio de Hilbert $L^2(\langle T_0 \rangle)$. Como se ha probado anteriormente, $g_0(t)$ también será una función de $\mathcal{P}(T_0)$, por lo que se puede asegurar que tanto $a(m)$ como $b(m)$ serán funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Haciendo uso del ejemplo en el dominio real,

$$f_0(t) = \cos(\omega_0 t) \in \mathcal{P}(T_0) \Rightarrow a(m) = \frac{1}{2}(\delta(m-1) + \delta(m+1)) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}). \quad (10.177)$$

$a(m) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ puesto que dos deltas, aún multiplicadas por cualquier polinomio, serán siempre de cuadrado sumable. Por otro lado

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \cos^2(\omega_0 t) \in \mathcal{P}(T_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow b(m) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\delta(m) + \delta(m+2)) + \frac{1}{2}(\delta(m-2) + \delta(m)) \right) = \\ &= \frac{1}{4}\delta(m-2) + \frac{1}{2}\delta(m) + \frac{1}{4}\delta(m+2) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (10.178)$$

En la Fig. 10.16 se representan estas funciones.

ii) Sea $f_0(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle)$ pero $f_0(t) \notin \mathcal{P}(T_0)$.

En este caso también los productos escalares definidos en (10.167) y (10.168) estarán bien definidos debido a que, nuevamente, sus dos componentes pertenecen a $L^2(\langle T_0 \rangle)$. De la

misma manera que antes, se puede asegurar que $g_0(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle)$ pero no a $\mathcal{P}(T_0)$ y que tanto $a(m)$ como $b(m)$ son funciones de $l^2(\mathbb{Z})$.

Sea $f_0(t)$ un tren de pulsos,

$$f_0(t) = P_{0,\Delta}(t) \in L^2(\langle T_0 \rangle) \Rightarrow a(m) = \frac{\Delta}{T_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (10.179)$$

ya que

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Delta}{T_0} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) \right|^2 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{T_0} \right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) = \\ &= \mathbf{TF} \left[\left(\frac{\Delta}{T_0} \right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) \right]_{\Omega=0} = 1 < \infty \end{aligned} \quad (10.180)$$

pero no es de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ya que, por ejemplo al multiplicarla por m , el resultado sería

$$ma(m) = m \frac{\Delta}{T_0} \frac{\sin\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right)}{m\pi \frac{\Delta}{T_0}} = \frac{1}{\pi} \sin\left(m\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) \quad (10.181)$$

que no es de cuadrado sumable.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g_0(t) &= P_{0,\Delta}(t) \cos(\omega_0 t) \in L^2(\langle T_0 \rangle) \Rightarrow \\ \Rightarrow b(m) &= \frac{\Delta}{2T_0} \left(\operatorname{sinc}\left((m+1)\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) + \operatorname{sinc}\left((m-1)\pi \frac{\Delta}{T_0}\right) \right) \in l^2(\mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (10.182)$$

Las graficas de las funciones de este ejemplo se representan en la Fig. 10.17.

iii) Sea $f_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0)$.

En este caso los productos escalares (10.167) y (10.168) no van a estar bien definidos dado que $f_0(t) \notin L^2(\langle T_0 \rangle)$ ni tampoco $g_0(t)$, por lo que tendrán que ser considerados como funcionales antilineales aplicados sobre cada una de las funciones $e^{jm\omega_0 t}$, para cada $m \in \mathbb{Z}$, vistos como

$$a(m) = \langle f_0(t), e^{jm\omega_0 t} \rangle = \tilde{\mathbf{F}}[e^{jm\omega_0 t}], \quad (10.183)$$

$$b(m) = \langle g_0(t), e^{jm\omega_0 t} \rangle = \tilde{\mathbf{G}}[e^{jm\omega_0 t}], \quad (10.184)$$

donde $f_0(t)$ y $g_0(t)$ son los núcleos de los funcionales antilineales $\tilde{\mathbf{F}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$, respectivamente. Lo que sí se puede asegurar es que tanto $a(m)$ como $b(m)$ serán también los núcleos de funcionales antilineales dentro de $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

Sea, por ejemplo,

$$f_0(t) = \delta_0(t) \in \mathcal{P}^\times(T_0) \Rightarrow a(m) = \frac{1}{T_0} \forall m \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \quad (10.185)$$

que está claro que no son de cuadrado sumable, al ser una función constante.

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \delta_0(t) \cos(\omega_0 t) \in \mathcal{P}^\times(T_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow b(m) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0} \right) = \frac{1}{T_0} \forall m \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (10.186)$$

lo cual es obvio ya que se había probado que $g_0(t) = f_0(t)$ por lo que se tiene que dar que $b(m) = a(m)$, como así resulta. Estas funciones se representan en la Fig. 10.18.

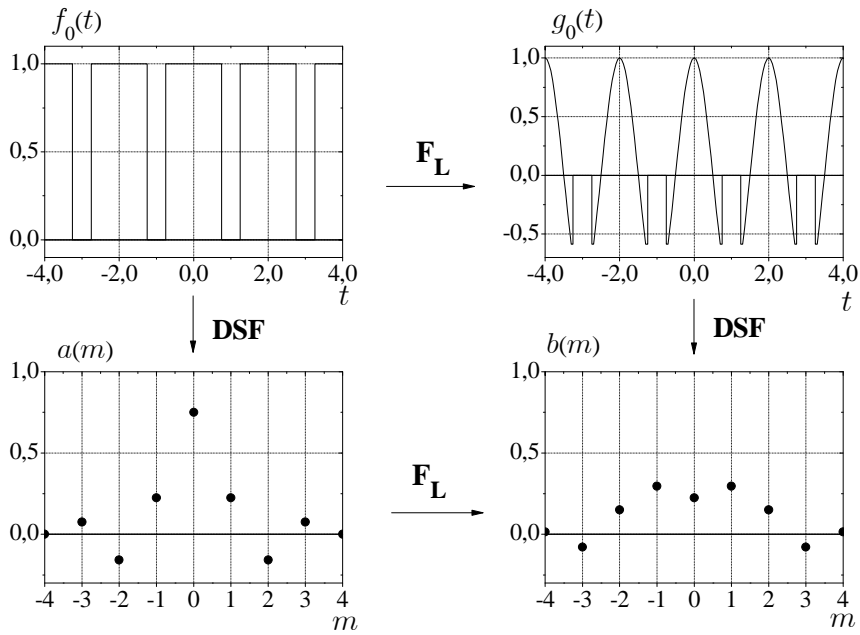


Figura 10.17: Función de entrada al sistema $f_0(t) = P_{0,\Delta}(t)$ tren de pulsos de periodo $T_0 = 2$ y ancho $\Delta = 1,5$ junto con la función de salida $g_0(t)$ y los respectivos desarrollos en serie de Fourier $a(m)$ y $b(m)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $L^2(\langle T_0 \rangle)$ pero no a $\mathcal{P}(T_0)$, mientras que en el dominio espectral son de $l^2(\mathbb{Z})$ pero no de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

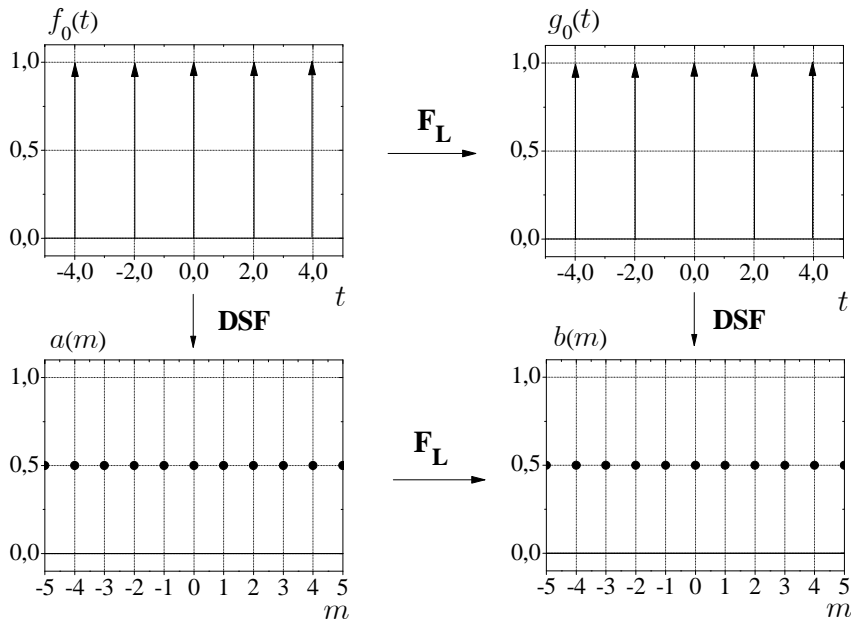


Figura 10.18: Función de entrada al sistema $f_0(t) = \delta_0(t)$ tren de deltas de periodo $T_0 = 2$ junto con la función de salida $g_0(t)$ y los respectivos desarrollos en serie de Fourier $a(m)$ y $b(m)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo el desarrollo en serie de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{P}^\times(T_0)$ y en el dominio espectral a $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

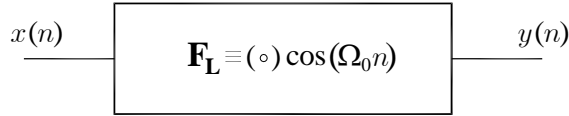


Figura 10.19: Representación en forma de caja negra del operador modulador en amplitud para funciones de variable discreta.

Con estos ejemplos y las demostraciones previas se ha comprobado que es posible determinar a qué subespacio pertenece tanto la señal de entrada en el dominio espectral $a(m)$ como la señal de salida en ambos dominios, el real $g_0(t)$, y espectral $b(m)$, conociendo a qué subespacio pertenece la señal de entrada en el dominio real $f_0(t)$ puesto que el operador lineal \mathbf{F}_L mantiene la pertenencia a un subespacio y el desarrollo en serie de Fourier lleva cada señal al mismo subespacio dentro del espacio de las funciones de variable discreta.

10.3. Operador modulador en variable discreta

Sea el sistema modulador mostrado en la Fig. 10.19 en el que la señal de salida $y(n)$ de variable discreta se obtiene mediante la señal $p(n) = \cos(\Omega_0 n)$ modulada en amplitud de por la señal de entrada $x(n)$. El sistema se puede interpretar a partir de la teoría de señales y sistema mediante un operador lineal no invariante \mathbf{F}_L definido como

$$\mathbf{F}_L[\cdot] \equiv (\cdot) \cos(\Omega_0 n). \quad (10.187)$$

Vamos a construir los espacios de Hilbert equipados para este problema concreto y a localizar las funciones y funcionales que intervienen en él.

Primeramente se localizan algunos subespacios importantes referentes a este problema concreto. Al considerar funciones de variable discreta, el espacio de Hilbert de partida es $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$.

- *Dominio del operador*, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\}$:

El dominio de este operador será el conjunto de todas las funciones que puedan ser multiplicadas por un coseno, es decir, todas,

$$\text{Dom}\{\mathbf{F}_L\} = \{x(n)\}. \quad (10.188)$$

- *Núcleo del operador*, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\}$:

El núcleo de este operador será el conjunto de funciones cuyo producto por $\cos(\Omega_0 n)$ sea nulo, es decir,

$$\text{Ker}\{\mathbf{F}_L\} = \{x(n) : x(n) \cos(\Omega_0 n) = 0, \forall n\}. \quad (10.189)$$

Dado que se trata del producto de dos factores, al menos uno de ellos tiene que ser nulo, pero como $\cos(\Omega_0 n)$ no va a ser 0 para todo n , sólo cabría la posibilidad de considerar la función nula, $x(n) = 0$, como núcleo del operador; pero también es posible considerar la función $\delta(n - n_0)$, que hace las veces de muestreador de la función que multiplica, si se encuentra algún valor de n_0 que muestree el coseno cuando éste vale 0. Para ello se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} \delta(n - n_0) \cos(\Omega_0 n) &= \cos(\Omega_0 n_0) \delta(n - n_0) = 0 \delta(n - n_0) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Omega_0 n_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Omega_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2n_0}, \end{aligned} \quad (10.190)$$

por lo que, para aquéllos valores de Ω_0 que cumplan la ecuación (10.190) para $k, n_0 \in \mathbb{Z}$ y estén comprendidos en el intervalo $[0, 2\pi)$, la función $\delta(n - n_0)$ será una función del núcleo del operador, así como cualquiera de la forma $\delta(n - (2p + 1)n_0)$ con $p \in \mathbb{Z}$, ya que

$$\begin{aligned} & \delta(n - (2p + 1)n_0) \cos\left((2k + 1)\frac{\pi}{2n_0}n\right) = \\ & = \cos\left((2k + 1)\frac{\pi}{2n_0}(2p + 1)n_0\right) \delta(n - (2p + 1)n_0) = \\ & = \cos((2k + 1)(2p + 1)\pi) \delta(n - (2p + 1)n_0) = \\ & = \cos((2q + 1)\pi) \delta(n - (2p + 1)n_0) = 0, \end{aligned} \quad (10.191)$$

siendo

$$q = 2pk + p + k. \quad (10.192)$$

De esta manera, el núcleo del operador es

$$\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\} = \{A\delta(n - (2p + 1)n_0)\}_{A,p}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (10.193)$$

siempre que se cumpla la ecuación (10.190) para Ω_0 , donde se incluye el caso $x(n) = 0$ tomando $A = 0$.

Si no se cumple (10.190), el núcleo del operador tan sólo es la función nula, por lo que el operador será invertible, siendo su operador inverso

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}}^{-1}[\cdot] = (\cdot) \frac{1}{\cos(\Omega_0 n)} = (\cdot) \sec(\Omega_0 n), \quad (10.194)$$

pero no podría ser invertible considerando cuando se cumple la ecuación (10.190) ya que el operador inverso no estaría definido para $\delta(n - (2p + 1)n_0)$ con $p \in \mathbb{Z}$.

■ *Conjunto de autofunciones del operador, Eig* $\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$:

Las autofunciones de este operador serán aquéllas que al multiplicarlas por $\cos(\Omega_0 n)$ den como resultado ellas mismas multiplicadas por una constante, así

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\} = \{x(n) : x(n) \cos(\Omega_0 n) = \alpha x(n)\}, \quad (10.195)$$

por tanto, si $x(n) \neq 0$,

$$\cos(\Omega_0 n) = \alpha, \quad (10.196)$$

lo cual no puede ser porque para cualquier valor de $\Omega_0 \neq 0$ la función $\cos(\Omega_0 n)$ no va a ser constante. Por otro lado, si $x(n) = 0$ se tiene

$$0 \cos(\omega_0 t) = 0 \quad (10.197)$$

por lo que la función $x(n) = 0$ sí que pertenece al conjunto de autofunciones del operador. Sin embargo, por el mismo razonamiento anterior, las funciones delta actúan como un muestreador obteniendo un valor constante de la función a la que multiplican, obteniéndose para una función $\delta(n - n_0)$,

$$y(n) = \delta(n - n_0) \cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n_0) \delta(n - n_0), \quad (10.198)$$

siendo $\alpha = \cos(\Omega_0 n_0)$ el autovalor de la autofunción $\delta(n - n_0)$. Así

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\} = \{A\delta(n - n_0)\}_{n_0}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad n_0 \in \mathbb{Z}, \quad (10.199)$$

con $A \cos(\Omega_0 n_0)$ el autovalor de la autofunción correspondiente a los valores A y n_0 .

10.3.1. Estructura de los espacios de Hilbert equipados

Las dos ternas que definen los espacios de Hilbert equipados son

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (10.200)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (10.201)$$

Dado que la naturaleza de las señales que intervienen son de variable discreta no periódicas, consideraremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$ con el producto escalar definido como

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n). \quad (10.202)$$

Para encontrar el subespacio denso Φ , hay que encontrar el conjunto de funciones a los que se le pueda aplicar sucesivamente el operador \mathbf{F}_L , pero añadiremos también la condición del operador \mathbf{Q} para encontrar un subespacio en el que la transformada de Fourier sea un morfismo entre los subespacios de Hilbert, por lo que el espacio Φ es el que cumpla.

$$\Phi = \bigcap_{p,q=0}^{\infty} \text{Dom} \{ \mathbf{Q}^p \mathbf{F}_L^q \}, \quad (10.203)$$

siendo

$$\mathbf{Q}[x(n)] = nx(n), \quad (10.204)$$

$$\mathbf{F}_L[x(n)] = x(n) \cos(\Omega_0 n). \quad (10.205)$$

Para determinar Φ hay que encontrar el conjunto de funciones $x(n)$ que cumplan

$$\Phi = \left\{ x(n) \text{ tq } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p \cos^q(\Omega_0 n) x(n)|^2 < \infty \forall p, q \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (10.206)$$

Puesto que $|\cos^q(\Omega_0 n)| \leq |n^q| \forall n \neq 0$, se tiene que

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n^p \cos^q(\Omega_0 n) x(n)|^2 + 0 \leq \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n^{p+q} x(n)|^2 + 0 < \infty, \text{ si } p \neq 0, \forall q \in \mathbb{N}_0, \quad (10.207)$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\cos^q(\Omega_0 n) x(n)|^2 + |x(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty, \text{ si } p = 0, \forall q \in \mathbb{N}_0, \quad (10.208)$$

por lo que el subconjunto Φ se corresponde con el subconjunto $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, es decir, el conjunto de funciones de variable discreta que tienden a 0 más rápido que la inversa de cualquier potencia de n cuando n tiende a ∞ . La estructura final de los RHS para este ejemplo es la de la Fig. 10.20.

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \quad (10.209)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}). \quad (10.210)$$

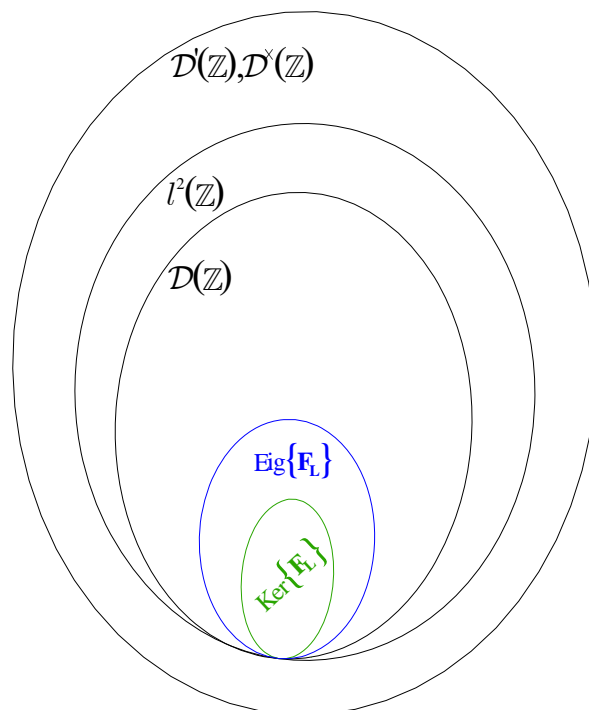


Figura 10.20: Representación dentro de un mismo esquema de todos los espacios de Hilbert equipados construidos para este ejemplo junto con los subespacios generados por el operador. El núcleo del operador, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ en verde, está formado por la función nula y por las del tipo $A\delta(n - (2p + 1)n_0)$ cuando se cumpla que $\Omega_0 = (2k + 1)\frac{\pi}{2n_0}$. El conjunto de autofunciones del operador, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ en azul, se corresponde con el conjunto de todas las deltas de Kronecker. Estos dos subespacios se localizan en $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ porque son funciones cuyo producto por cualquier potencia de n es de cuadrado sumable. El dominio, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ se corresponde con todas las funciones de variable discreta. La única función que pertenece a todos los subespacios es la función nula $x(n) = 0$.

10.3.2. Análisis del sistema en el dominio real

En primer lugar, cualquier señal $x(n)$ se puede expresar en términos de deltas como²²

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \delta(n-n') = \langle x(n'), \delta(n-n') \rangle. \quad (10.211)$$

Este producto escalar estará bien definido en función de la naturaleza de $x(n')$, puesto que por parte del conjunto de funciones $\delta(n-n')$, para cada n , está bien definido al ser funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Cada caso concreto de $x(n')$ se verá más adelante.

Al tratarse de un sistema lineal no invariante, es necesario conocer todo el conjunto de respuestas al impulso $h(n; n')$ para realizar el análisis en el dominio real. Se tiene que

$$h(n; n') = \mathbf{F}_L [\delta(n-n')] = \delta(n-n') \cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n') \delta(n-n'). \quad (10.212)$$

Está claro que $h(n; n') \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, como funciones de n para cada n' o como funciones de n' para cada n . La señal de salida del sistema se representará por²³

$$y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') h(n; n') = \langle x(n'), h(n; n') \rangle, \quad (10.213)$$

producto escalar que estará bien definido nuevamente dependiendo de la naturaleza de $x(n')$, puesto que por parte de $h(n; n')$ sí lo está²⁴.

Analicemos a continuación los diferentes casos particulares de pertenencia de la señal de entrada $x(n)$ a los diferentes subespacios.

i) Sea $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

En este caso, los productos escalares que aparecen en (10.211) y (10.213) están perfectamente definidos sin necesidad de recurrir a funcionales. Resulta interesante comprobar si la señal de salida $y(n)$ es también una función de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, para ello estudiamos la convergencia de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p \cos(\Omega_0 n) x(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p x(n)|^2 < \infty \quad (10.216)$$

ya que $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Además esto está claro puesto que, por la construcción de $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, la señal de salida tiene que pertenecer también a Φ . Si la función moduladora $p(n)$ fuese otra distinta, también se podría asegurar que $y(n) \in \Phi$, aunque a lo mejor $\Phi \neq \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ si $p(n)$ no se pudiera acotar por una potencia de n de cualquier grado.

Así, por ejemplo, sea

$$x(n) = P_{2N+1}(n) \quad (10.217)$$

²²Teniendo en cuenta que la función $\delta(n)$ es una función real.

²³Sabiendo que, en este caso, cada una de las funciones $h(n; n')$ son reales.

²⁴A pesar de que tanto $\delta(n-n')$ como $h(n; n')$ son conjuntos de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y no sea necesario el uso de funcionales lineales, también se pueden asumir las expresiones (10.211) y (10.213) desde el punto de vista de funcionales lineales generalizando el concepto de producto escalar cuando se fija la segunda componente, así (10.211) y (10.213) pueden interpretarse como:

$$x(n) = \mathbf{D}_n [x(n')], \quad (10.214)$$

$$y(n) = \mathbf{H}_n [x(n')], \quad (10.215)$$

donde \mathbf{D}_n y \mathbf{H}_n representan los funcionales lineales cuyos núcleos son $\delta(n-n')$ y $h(n; n')$ respectivamente, para cada n .

una función pulso. La señal de salida

$$y(n) = \cos(\Omega_0 n) P_{2N+1}(n) \quad (10.218)$$

también es de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p \cos(\Omega_0 n) P_{2N+1}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^N |n^p \cos(\Omega_0 n)|^2 < \infty. \quad (10.219)$$

ii) Sea $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, $x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

En este caso, también los productos escalares (10.211) y (10.213) están perfectamente definidos, por lo que no son necesarios los funcionales. Para comprobar si la señal de salida $y(n)$ es también de $l^2(\mathbb{Z})$ basta con estudiar la convergencia de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n) x(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (10.220)$$

porque $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ y $|\cos(\Omega_0 n)| \leq 1$. Así, $y(n) \in l^2(\mathbb{Z})$. Pero sería interesante también comprobar si puede pertenecer al subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Para ello se estudia la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p \cos(\Omega_0 n) x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p x(n)|^2 \cos^2(\Omega_0 n), \quad (10.221)$$

pero para que esta serie fuese convergente, una condición necesaria es que sus términos tiendan a 0 cuando $|n|$ tiende a infinito, lo cual no se cumple puesto que ni $|n^p x(n)|^2$, porque $x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, ni $\cos^2(\Omega_0 n)$ tienden a 0 cuando $|n|$ tiende a infinito.

Sea, por ejemplo, una señal sinc,

$$x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z}), \quad x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z}), \quad (10.222)$$

la señal de salida

$$y(n) = \cos(\Omega_0 n) \text{sinc}(an) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \quad (10.223)$$

ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n) \text{sinc}(an)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(an)|^2 < \infty, \quad (10.224)$$

pero

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p \cos(\Omega_0 n) \text{sinc}(an)|^2 = \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^{p-1} \cos(\Omega_0 n) \sin(an)|^2 = \infty, \end{aligned} \quad (10.225)$$

por lo que $y(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Otra cosa distinta sería si considerásemos otro tipo de función moduladora. Si por ejemplo $p(n)$ fuese una señal no acotada (lo cual sería ciertamente imposible en problema físico,

puesto que habría que considerar un sistema de energía infinita) como $p(n) = e^n$, la señal de salida $y(n) = p(n)x(n)$ no se podría asegurar que perteneciese a $l^2(\mathbb{Z})$, ya que si $x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$y(n) = e^n \text{sinc}(an) \notin l^2(\mathbb{Z}). \quad (10.226)$$

Y si por ejemplo $p(n)$ fuese una señal de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ como $p(n) = e^{-bn^2}$, podría darse el caso de que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2$ fuese convergente aún no siéndolo $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p x(n)|^2$, ya que si $x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$y(n) = e^{-bn^2} \text{sinc}(an) \quad (10.227)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^p e^{-bn^2} \text{sinc}(an) \right|^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^{p-1} e^{-bn^2} \text{sin}(an) \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^{p-1} e^{-bn^2} \right|^2 < \infty, \end{aligned} \quad (10.228)$$

por lo que, para este caso, $y(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

iii) Sea $x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ ²⁵.

En este caso los productos escalares (10.211) y (10.213) ya no son tales porque una de sus componentes no pertenece al espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$, tendiendo que acudir a la consideración de éstos como núcleos de funcionales, así

$$x(n) = \langle x(n'), \delta(n-n') \rangle = \tilde{\mathbf{X}}[\delta(n-n')] \quad (10.229)$$

$$y(n) = \langle x(n'), h(n;n') \rangle = \tilde{\mathbf{X}}[h(n;n')] \quad (10.230)$$

es un funcional antilineal para cada n . De hecho, a partir del mismo funcional se puede determinar la propia señal $x(n)$ o la señal de salida $y(n)$ dependiendo de qué conjunto de funciones se le pasen. El funcional antilineal está bien definido puesto que, por la propia definición de funcional, está aplicado a funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ como son $\delta(n-n')$ y $h(n;n')$. Es interesante comprobar si la señal de salida también será de $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ o no. Sólo basta comprobar si es de cuadrado sumable, así

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n) x(n)|^2 = \infty \quad (10.231)$$

puesto que ninguno de los factores es de cuadrado sumable, por lo que $y(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ para cualquier $x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. Sea, por ejemplo, una señal cosenoidal

$$x(n) = \cos(\Omega_1 n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \quad (10.232)$$

la señal de salida será

$$y(n) = \cos(\Omega_0 n) \cos(\Omega_1 n) = \frac{1}{2} (\cos((\Omega_0 + \Omega_1)n) + \cos((\Omega_0 - \Omega_1)n)) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}). \quad (10.233)$$

Ahora bien, con otra función moduladora, por ejemplo $p(n) = e^{-bn^2}$, podría darse el caso de que, para una señal de entrada $x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$, se diera una señal de salida $y(n) \notin \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$. Siendo la misma señal cosenoidal

$$x(n) = \cos(\Omega_1 n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}), \quad (10.234)$$

²⁵ $x(n)$ tiene que considerarse en $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ porque, según la definición del producto escalar de (10.211) y (10.213), la función va en la primera componente, lo que le corresponde con el núcleo de un funcional antilineal.

la señal de salida

$$y(n) = e^{-bn^2} \cos(\Omega_1 n) \quad (10.235)$$

sería, no sólo de $l^2(\mathbb{Z})$ sino también de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^p e^{-bn^2} \cos(\Omega_1 n) \right|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^p e^{-bn^2} \right|^2 < \infty \quad (10.236)$$

ya que $e^{-bn^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

En estos ejemplos se comprueba que, para este caso concreto de modulador, sí es posible conocer la pertenencia de la señal de salida a un subespacio de los espacios de Hilbert equipados conociendo a cuál pertenece la señal de entrada y que estos coinciden. Sin embargo, con otro tipo de funciones moduladoras, no se podría asegurar salvo que las funciones de entrada pertenezcan al subespacio $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ²⁶, ya que entonces sí se puede decir que la señal de salida también será de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Lógico por otra parte ya que la propia definición de este subespacio tiene en cuenta el operador lineal \mathbf{F}_L empleado, cosa que no pasa en el propio espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$.

10.3.3. Análisis del sistema en el dominio espectral

Consideremos la transformada de Fourier de señales de variable discreta para realizar el análisis espectral de este sistema. El conjunto de funciones base escogidas son, por tanto, $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_{\Omega} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$, ya que, para cada $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, $e^{j\Omega n}$ no es una función de cuadrado sumable, por lo que se trata de una base dentro del espacio dual lineal. Las señales de entrada y salida en el dominio espectral, es decir, los coeficientes de estas señales según la base $e(n; \Omega)$ son la transformada de Fourier definida como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \langle x(n), e^{j\Omega n} \rangle, \quad (10.237)$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\Omega n} = \langle y(n), e^{j\Omega n} \rangle, \quad (10.238)$$

donde los productos escalares no son tales, sino que han de ser interpretados como un conjunto de funcionales lineales, para cada Ω , sobre $x(n)$ e $y(n)$, así,

$$X(\Omega) = \mathbf{F}_{\Omega}[x(n)], \quad (10.239)$$

$$Y(\Omega) = \mathbf{F}_{\Omega}[y(n)], \quad (10.240)$$

siendo \mathbf{F}_{Ω} el conjunto de funcionales lineales cuyo núcleo es $e^{-j\Omega n}$, para cada Ω , devolviendo la transformada de Fourier a la señal que se le aplica²⁷. Puede observarse que las expresiones (10.239) y (10.240) son semejantes a aplicar a las funciones $x(n)$ e $y(n)$ la transformada de Fourier como un operador,

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x(n)], \quad (10.241)$$

$$Y(\Omega) = \mathbf{TF}[y(n)], \quad (10.242)$$

pero entendiendo que la interpretación es diferente, puesto que en el primer caso estamos trabajando con un conjunto de funcionales lineales, devolviendo un valor para cada Ω , mientras

²⁶ Podría darse el caso de que la función moduladora generase un operador de forma que al construir el subespacio Φ éste no fuera propiamente $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Aún así, se seguiría cumpliendo la propiedad de que la señal de salida sea una función de ese subespacio Φ .

²⁷ Desde el punto de vista de la notación de Dirac, puede entenderse como la aplicación de los bras $\langle x(n)|$ e $\langle y(n)|$ sobre el conjunto de kets $|e^{j\Omega n}\rangle$.

que en el segundo caso trabajamos con un operador sobre la función, devolviendo una nueva función.

Es importante hacer notar que la transformada de Fourier de señales de variable discreta se corresponde con funciones de variable continua periódicas de periodo 2π , por lo que no estaremos trabajando, en el dominio espectral, con la misma estructura de espacios de Hilbert equipados que teníamos en el dominio real. Sin embargo, recurriendo a los resultados de la Secc. 8.7.2, se puede determinar la siguiente relación a través de la transformada de Fourier:

$$\text{si } x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in \mathcal{P}(2\pi), \quad (10.243)$$

$$\text{si } x(n) \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle), \quad (10.244)$$

$$\text{si } x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in \mathcal{P}^\times(2\pi), \quad (10.245)$$

siendo $L^2(\langle 2\pi \rangle)$ el conjunto de función de variable continua periódicas de periodo 2π de cuadrado integrable, $\mathcal{P}(2\pi)$ el conjunto de funciones de variable continua periódicas de periodo 2π de cuadrado integrable en un periodo e infinitamente diferenciables, y $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ el conjunto de los funcionales antilineales sobre $\mathcal{P}(2\pi)$. De esta forma resulta sencillo conocer a qué subespacio pertenecerá una señal en el dominio espectral si se conoce a qué subespacio pertenece en el dominio real. Además, en este ejemplo concreto, también es posible conocer la pertenencia a un subespacio de la señal de salida conociendo la de la señal de entrada, puesto que es el mismo, por tanto, determinando la señal de entrada $x(n)$ y conociendo a qué subespacio pertenece, es fácil conocer dónde se localizan tanto $y(n)$, como $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. Sin embargo, si la señal moduladora que define el sistema fuese otra, como se ha visto en el análisis en el dominio real, no siempre será posible determinar a qué subespacio pertenecerá la señal de salida, puesto que el operador la puede llevar a otro. El único caso en que se podría asegurar a qué subespacio pertenecería la señal de salida cuando se conoce la de entrada sería en el caso de que $x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, por lo que siempre se cumpliría que $y(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y, por tanto, $X(\Omega) \in \mathcal{P}(2\pi)$ e $Y(\Omega) \in \mathcal{P}(2\pi)$.

Dado que estamos tratando con un sistema lineal no invariante, es posible hacer uso de las ecuaciones del Análisis Espectral Generalizado para obtener las expresiones de la señal de salida del sistema en el dominio espectral y determinar así a qué subespacio pertenece ésta. De esta manera, a partir de las expresiones (5.44) y (5.45) sobre el análisis espectral generalizado para operadores que actúan sobre el mismo espacio y utilizando el mismo conjunto de funciones base tanto en el espacio de partida como en el de llegada, la señal de salida en el dominio espectral se puede representar como

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega') \mathbf{H}_*(\Omega; \Omega') d\Omega', \quad (10.246)$$

siendo

$$\mathbf{H}_*(\Omega; \Omega') = \langle \langle h(n; n'), e(n; \Omega) \rangle_n, e^*(n'; \Omega') \rangle_{n'}. \quad (10.247)$$

En el caso de este ejemplo,

$$\begin{aligned} H(\Omega; n') &= \langle h(n; n'), e(n; \Omega) \rangle_n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\Omega_0 n) \delta(n - n') e^{-j\Omega n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi \delta_0(\Omega - \Omega_0) + \pi \delta_0(\Omega + \Omega_0) \right) * e^{-j\Omega n'} = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-j(\Omega - \Omega_0)n'} + e^{-j(\Omega + \Omega_0)n'} \right) \end{aligned} \quad (10.248)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_* (\Omega; \Omega') &= \langle H (\Omega; n'), e^* (n'; \Omega') \rangle_{n'} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(e^{-j(\Omega-\Omega_0)n'} + e^{-j(\Omega+\Omega_0)n'} \right) e^{j\Omega'n'} = \\
&= \frac{1}{2} (2\pi\delta_0 (\Omega - \Omega_0 - \Omega') + 2\pi\delta_0 (\Omega + \Omega_0 - \Omega')) = \\
&= \pi\delta_0 (\Omega' - (\Omega + \Omega_0)) + \pi\delta_0 (\Omega' - (\Omega - \Omega_0)), \tag{10.249}
\end{aligned}$$

así, de forma general, conocida la señal de entrada en el dominio espectral, la señal de salida se puede expresar como

$$\begin{aligned}
Y (\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'=(2\pi)} X (\Omega') \mathbf{H}_* (\Omega; \Omega') d\Omega' = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'=(2\pi)} X (\Omega') (\pi\delta_0 (\Omega' - (\Omega + \Omega_0)) + \pi\delta_0 (\Omega' - (\Omega - \Omega_0))) d\Omega' = \\
&= \frac{1}{2} (X (\Omega - \Omega_0) + X (\Omega + \Omega_0)), \tag{10.250}
\end{aligned}$$

lo cual es razonable puesto que un modulador en amplitud, o más concretamente, multiplicar la señal de entrada por un coseno, lo que hace es separar el espectro de la señal en dos trozos con la mitad de amplitud y colocarlos en centrados en torno a $+\Omega_0$ y $-\Omega_0$, que es la pulsación del coseno que se modula. De este resultado también se puede ver de forma clara que si $X (\Omega)$ pertenece a un subespacio, $Y (\Omega)$ también pertenecerá a ese mismo subespacio porque no deja de ser un par de réplicas de $X (\Omega)$ desplazadas. La interpretación de la ecuación (10.250) tiene que ser entendida en términos de funcionales lineales puesto que el conjunto $\mathbf{H}_* (\Omega; \Omega') \in \mathcal{P}' (2\pi)$ para cada Ω' . A pesar de que el conjunto de respuestas al impulso $h (n; n') = \cos (\Omega_0 n) \delta (n - n')$ sí es un conjunto de funciones de $\mathcal{D} (\mathbb{Z})$, no se puede decir lo mismo de $\mathbf{H}_* (\Omega; \Omega')$, ya que las deltas que intervienen en su expresión son deltas de Dirac y, por tanto, funciones que no pertenecen a un espacio de Hilbert, mientras que las deltas que intervienen en $h (n; n')$ son deltas de Kronecker que sí son funciones de cuadrado sumable. La ecuación (10.250), desde el punto de vista de funcionales, puede verse entonces como

$$Y (\Omega) = \mathbf{H}_{*\Omega} [X (\Omega')] \tag{10.251}$$

donde $\mathbf{H}_{*\Omega}$ representa el funcional lineal, para cada Ω , que devuelve el valor de $X (\Omega')$ evaluado en $\Omega - \Omega_0$ y en $\Omega + \Omega_0$, sumado y dividido por 2.

Analícemos ahora los diferentes casos:

i) Sea $x (n) \in \mathcal{D} (\mathbb{Z})$.

Los conjuntos de funcionales (10.239) y (10.240) van a estar perfectamente definidos para todos los valores de Ω por ser $x (n)$ una función de $\mathcal{D} (\mathbb{Z})$. Como se había probado anteriormente, $y (n)$ será también una función de $\mathcal{D} (\mathbb{Z})$, por lo que se puede determinar que tanto $X (\Omega)$ como $Y (\Omega)$ serán funciones de $\mathcal{P} (2\pi)$. Haciendo uso del ejemplo en el dominio real, sea $x (n)$ una función pulso,

$$x (n) = P_{2N+1} (n) \in \mathcal{D} (\mathbb{Z}) \Rightarrow X (\Omega) = \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \Omega \right)}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)} \in \mathcal{P} (2\pi), \tag{10.252}$$

así

$$Y (\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) (\Omega - \Omega_0) \right)}{\sin \left(\frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) (\Omega + \Omega_0) \right)}{\sin \left(\frac{\Omega + \Omega_0}{2} \right)} \right) \in \mathcal{P} (2\pi). \tag{10.253}$$

Este ejemplo se visualiza en la Fig. 10.21.

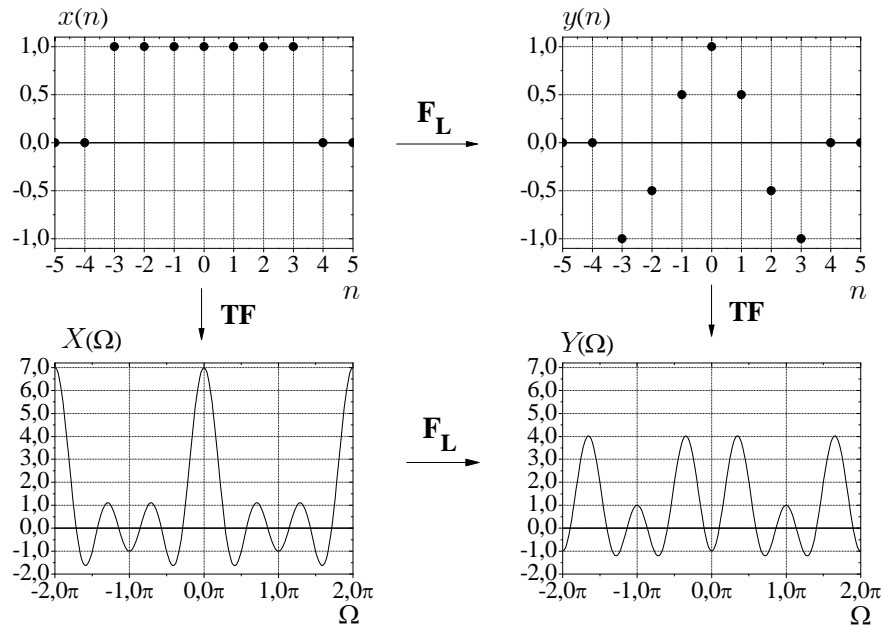


Figura 10.21: Señal de entrada al sistema $x(n) = P_{2N+1}(n)$, función pulso con un valor de $N = 3$ junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ y en el dominio espectral a $\mathcal{P}(2\pi)$.

ii) Sea $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, $x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Los conjuntos de funcionales (10.239) y (10.240) pueden no estar bien definidos para algunos valores de Ω , puesto que $x(n)$, y por tanto $y(n)$, no son funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Lo que sí se puede asegurar es que tanto $X(\Omega)$ como $Y(\Omega)$ van a ser funciones de $L^2(\langle 2\pi \rangle)$. Sea $x(n)$ una señal sinc

$$x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) = \frac{\pi}{a} P_{0,2a}(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle), \quad (10.254)$$

entonces

$$Y(\Omega) = \frac{\pi}{2a} (P_{0,2a}(\Omega - \Omega_0) + P_{0,2a}(\Omega + \Omega_0)) \in L^2(\langle 2\pi \rangle) \quad (10.255)$$

pero no puede ser una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ porque no es una función derivable. La Fig. 10.22 muestra gráficamente las funciones de este ejemplo.

iii) Sea $x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$.

Los conjuntos de funcionales (10.239) y (10.240) pueden nuevamente no estar bien definidos para algunos valores de Ω , puesto que $x(n)$, y por tanto $y(n)$, no son funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ni siquiera de un espacio de Hilbert. Lo que sí es cierto es que $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ serán funciones de $\mathcal{P}^\times(2\pi)$. Sea $x(n)$ una señal cosenoidal

$$x(n) = \cos(\Omega_1 n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) = \pi \delta_0(\Omega - \Omega_1) + \pi \delta_0(\Omega + \Omega_1) \in \mathcal{P}^\times(2\pi), \quad (10.256)$$

luego

$$Y(\Omega) = \frac{\pi}{2} (\delta_0(\Omega - (\Omega_0 + \Omega_1)) + \delta_0(\Omega - (\Omega_0 - \Omega_1))) + \frac{\pi}{2} (\delta_0(\Omega + (\Omega_0 - \Omega_1)) + \delta_0(\Omega + (\Omega_0 + \Omega_1))) \in \mathcal{P}^\times(2\pi) \quad (10.257)$$

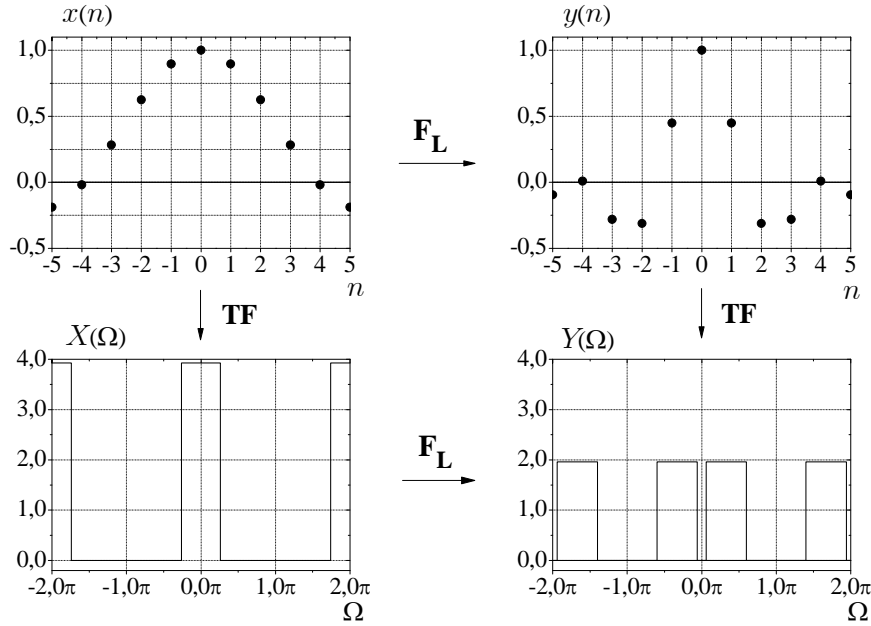


Figura 10.22: Señal de entrada al sistema $x(n) = \text{sinc}(0,8n)$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $l^2(\mathbb{Z})$ pero no a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, mientras que en el dominio espectral pertenecen a $L^2(\langle 2\pi \rangle)$ pero no a $\mathcal{P}(2\pi)$.

por ser una suma de deltas de Dirac periódicas de periodo 2π . En la Fig. 10.23 se representan estas funciones.

Con estos ejemplos y las demostraciones previas se ha comprobado que es posible determinar a qué subespacio pertenece tanto la señal de entrada en el dominio espectral $X(\Omega)$ como la señal de salida en ambos dominios, real $y(n)$, y espectral $Y(\Omega)$, conociendo a qué subespacio pertenece la señal de entrada en el dominio real $x(n)$ puesto que el operador lineal \mathbf{F}_L mantiene la pertenencia a un subespacio y la transformada de Fourier lleva cada señal al mismo subespacio dentro del espacio de las funciones de variable continua periódicas de periodo 2π .

Se puede considerar también la transformada de Fourier como funcional antilineal colocándolo en la primera componente del producto escalar, obteniendo así

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} x^*(n) = \langle e^{j\Omega n}, x(n) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_{\Omega}[x(n)], \quad (10.258)$$

$$Y^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} y^*(n) = \langle e^{j\Omega n}, y(n) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_{\Omega}[y(n)], \quad (10.259)$$

así como considerar también el análisis espectral generalizado como un funcional antilineal siendo

$$Y^*(\Omega) = \int_{\Omega'=\langle 2\pi \rangle} \mathbf{H}_*(\Omega; \Omega') X^*(\Omega') d\Omega' = \langle \mathbf{H}_*(\Omega; \Omega'), X(\Omega') \rangle = \tilde{\mathbf{H}}_{*\Omega}[X(\Omega')] \quad (10.260)$$

habida cuenta de que, en este caso, $\mathbf{H}_*(\Omega; \Omega')$ es real.

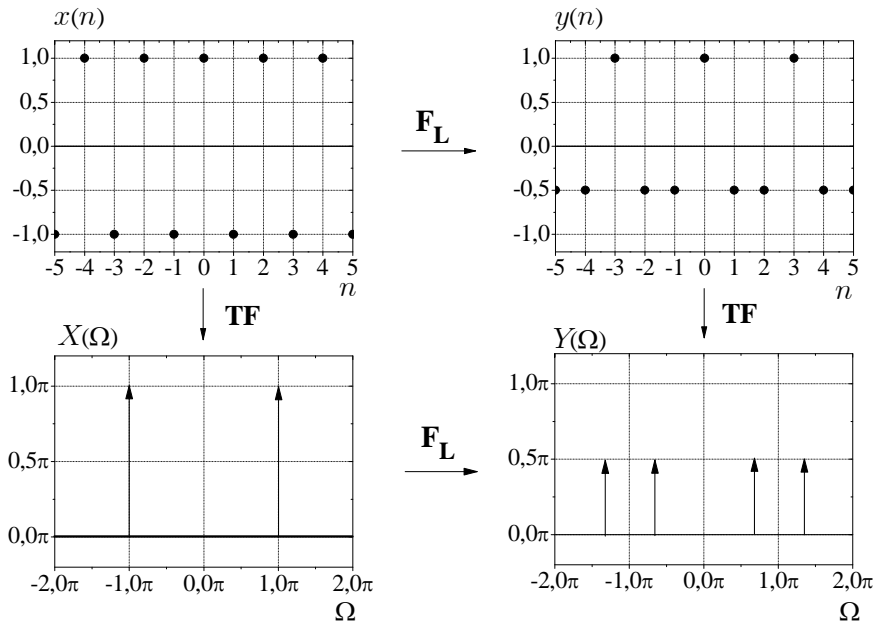


Figura 10.23: Señal de entrada al sistema $x(n) = \cos(\pi n)$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ y en el dominio espectral a $\mathcal{P}^\times(2\pi)$.

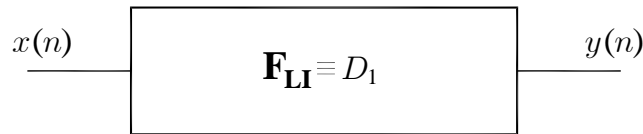


Figura 10.24: Representación en forma de caja negra del operador primera diferencia.

10.4. Operador primera diferencia en variable discreta

Sea el operador primera diferencia mostrado en la Fig. 10.24 en el que la señal de salida $y(n)$, de variable discreta, se corresponde con la señal de entrada menos ella misma desplazada una posición a la derecha. Se trata de un operador lineal e invariante representado como

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[\cdot] = D_1[\cdot] \quad (10.261)$$

y definido como

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[x(n)] = D_1[x(n)] = x(n) - x(n-1). \quad (10.262)$$

Al tratarse de funciones de variable discreta, el espacio de Hilbert de partida es $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$.

En primer lugar vamos a describir algunos subespacios importantes referentes a este sistema.

- *Dominio del operador*, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$:

El dominio de este operador será el conjunto de todas las funciones a las que se les pueda aplicar una primera diferencia, que serán todas las funciones de variable discreta,

$$\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \{x(n)\}. \quad (10.263)$$

- *Núcleo del operador, Ker {F_{LI}}*:

El núcleo de este operador será el conjunto de funciones cuya primera diferencia sea nula, es decir,

$$\text{Ker } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \{x(n) : x(n) - x(n-1) = 0\}, \quad (10.264)$$

es decir, las funciones que cumplan

$$x(n) = x(n-1), \quad (10.265)$$

por tanto,

$$\text{Ker } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \{x(n) = A, A \in \mathbb{C}\}, \quad (10.266)$$

es decir, el conjunto de las funciones constantes.

Dado que el núcleo del operador no es únicamente la función nula $x(n) = 0$, el operador no es inyectivo y, por tanto, no es invertible, ya que el candidato a ser operador inverso de $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}$, sería el operador acumulador

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}[\cdot] \equiv \sum_{k=-\infty}^n (\cdot)_k, \quad (10.267)$$

que no tendría por qué dar como resultado la función original $x(n)$, sino una que se diferenciase en una constante. Por ejemplo, sea

$$x(n) = 3 \forall n, \quad (10.268)$$

$$y(n) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[x(n)] = x(n) - x(n-1) = 3 - 3 = 0 \forall n, \quad (10.269)$$

pero

$$x(n) = \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}[y(n)] = \sum_{k=-\infty}^n y(k) = 0 \neq 3 \forall n \quad (10.270)$$

- *Conjunto de autofunciones del operador, Eig {F_{LI}}*:

Las autofunciones de este operador serán las funciones cuya primera diferencia sea la misma función multiplicada por una constante, así

$$\text{Eig } \{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \{x(n) : x(n) - x(n-1) = \alpha x(n)\}, \quad (10.271)$$

por tanto,

$$(1 - \alpha)x(n) = x(n-1),$$

aplicando la transformada de Fourier a ambos lados,

$$(1 - \alpha)X(\Omega) = e^{-j\Omega}X(\Omega) \quad (10.272)$$

donde, a parte del caso trivial $X(\Omega) = 0$, se cumple esta igualdad cuando $e^{-j\Omega} = 1 - \alpha$, pero no para todos los valores de $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, sino para uno solo en concreto, lo cual se produce cuando

$$X(\Omega) = 2\pi K \delta_0(\Omega - \Omega_0), \quad (10.273)$$

siendo por tanto los autovalores

$$\alpha = 1 - e^{-j\Omega_0} \quad (10.274)$$

y las autofunciones

$$x(n) = \mathbf{TF}^{-1}[2\pi K \delta_0(\Omega - \Omega_0)] = K e^{j\Omega_0 n} \quad (10.275)$$

es decir, el conjunto de todas las exponenciales complejas, donde $K \in \mathbb{C}$ y $\Omega_0 \in [0, 2\pi)$. Yendo más allá, se pueden considerar también las exponenciales que no sean únicamente de argumento imaginario, sino de cualquier valor complejo, así,

$$x(n) = Ke^{\beta n} \quad (10.276)$$

cumple que

$$\begin{aligned} x(n) - x(n-1) &= Ke^{\beta n} - Ke^{\beta(n-1)} = \\ &= Ke^{\beta n} - Ke^{\beta n} e^{-\beta} = \\ &= (1 - e^{-\beta}) Ke^{\beta n} = \\ &= \alpha x(n), \end{aligned} \quad (10.277)$$

siendo el autovalor

$$\alpha = 1 - e^{-\beta} \quad (10.278)$$

es decir, que cualquier exponencial discreta es autofunción de este operador, por tanto,

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\} = \left\{ x(n) = Ke^{\beta n}, K, \beta \in \mathbb{C} \right\}. \quad (10.279)$$

10.4.1. Estructura de los espacios de Hilbert equipados

Las dos ternas que definen los espacios de Hilbert equipados son

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (10.280)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (10.281)$$

Al ser $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$ el espacio de Hilbert de partida, el producto escalar está definido como

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n). \quad (10.282)$$

Para encontrar el subespacio denso Φ , hay que encontrar el conjunto de funciones a los que se le pueda aplicar sucesivamente el operador $\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}$, pero añadiremos también la condición del operador \mathbf{Q} para encontrar un subespacio en el que la transformada de Fourier sea un morfismo entre los subespacios de Hilbert, por lo que el espacio Φ es el que cumpla

$$\Phi = \bigcap_{p,q=0}^{\infty} \text{Dom}\{\mathbf{Q}^p \mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^q\}, \quad (10.283)$$

siendo

$$\mathbf{Q}[x(n)] = nx(n), \quad (10.284)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[x(n)] = D_1[x(n)] = x(n) - x(n-1). \quad (10.285)$$

Por tanto, para determinar Φ hay que encontrar el conjunto de funciones $x(n)$ que cumplan

$$\Phi = \left\{ x(n) \text{ tq } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q[x(n)]|^2 < \infty \forall p, q \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad (10.286)$$

es decir, funciones a las que se le pueda aplicar infinitamente una diferencia, que decrezcan a 0 más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|n|}$ y que además sean de cuadrado sumable. Este subespacio se corresponde con el equivalente en variable discreta al de las funciones de Schwartz

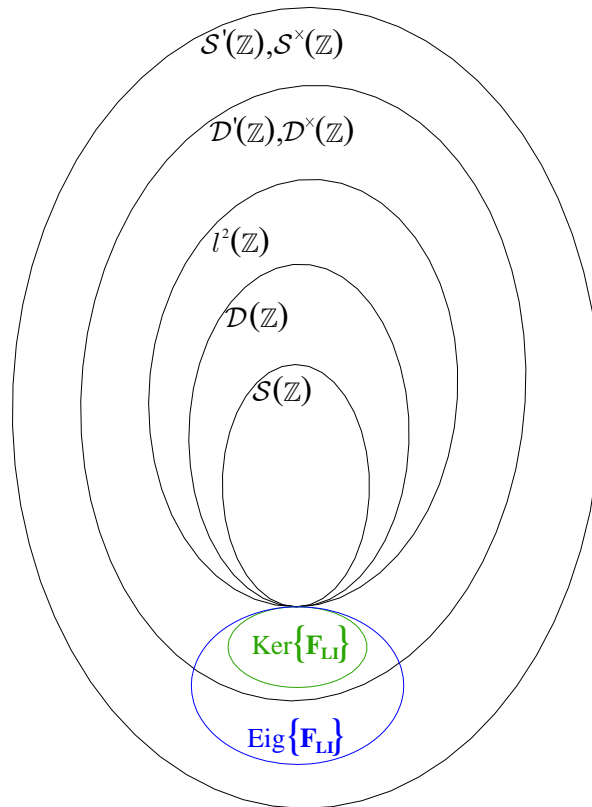


Figura 10.25: Representación dentro de un mismo esquema de todos los espacios de Hilbert equipados construidos para este ejemplo junto con los subespacios generados por el operador.

El conjunto de autofunciones del operador, $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}\mathbf{I}}\}$ en azul, son todos los tipos de exponenciales. Algunas de ellas, como e^{an} con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, no pertenecen a los espacios duales de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ sino sólo a los de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

El núcleo del operador, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}\mathbf{I}}\}$ en verde, está formado por todas las funciones constantes, que pertenecen a los espacios duales de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

El dominio, $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}\mathbf{I}}\}$ son todas las funciones de variable discreta.

La única función que pertenece a todos los subespacios es la función nula $x(n) = 0$.

en variable continua, y lo denominamos $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Está claro que $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ porque requieren de una condición más fuerte. A pesar de no ser un subespacio estudiado en el Cap. 8 sobre los RHS, trataremos de trabajar con él observando lo que ocurre. Por tanto, la estructura de los espacios de Hilbert equipados queda de la siguiente manera,

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z}), \quad (10.287)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{Z}). \quad (10.288)$$

En la Fig. 10.25 se representan estas ternas junto con los subespacios conocidos para este tipo de funciones ($\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$) así como con los subespacios $\text{Dom}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$, $\text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ y $\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\mathbf{L}}\}$ anteriormente definidos.

10.4.2. Análisis en el dominio real

Cualquier señal $x(n)$ se puede expresar en términos de deltas como²⁸

$$x(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') \delta(n-n') = \langle x(n'), \delta(n-n') \rangle. \quad (10.289)$$

Este producto escalar estará bien definido en función de la naturaleza de $x(n')$, puesto que por parte del conjunto de funciones $\delta(n-n')$, para cada n , está bien definido al ser funciones de $l^2(\mathbb{Z})$. Cada caso concreto de $x(n')$ se verá más adelante.

Al tratarse de un sistema lineal e invariante, tan sólo es necesario conocer una respuesta al impulso $h(n)$ para poder realizar el análisis en el dominio real. Se tiene que

$$h(n) = \mathbf{F}_{\mathbf{L}}[\delta(n)] = \delta(n) - \delta(n-1). \quad (10.290)$$

Está claro que $h(n) \in l^2(\mathbb{Z})$. La señal de salida del sistema se representará por²⁹

$$y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n') h(n-n') = \langle x(n'), h(n-n') \rangle = x(n) * h(n), \quad (10.291)$$

producto escalar que estará bien definido nuevamente dependiendo de la naturaleza de $x(n')$, puesto que por parte de $h(n)$ sí lo está.

A continuación se analizan los diferentes casos particulares de pertenencia de la señal de entrada $x(n)$ a los distintos subespacios de las tripletas de los RHS obtenidos para este ejemplo.

1. Sea $x(n) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

En este caso los productos escalares de (10.289) y (10.291) está bien definidos, al ser también $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$. Resulta interesante comprobar si la señal de salida $y(n)$ es también una función de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, para ello estudiamos la convergencia de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q[y(n)]|^2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q[y(n)]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q[D_1[x(n)]]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_{q+1}[x(n)]|^2 < \infty \quad (10.292)$$

ya que $x(n) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Además esto está claro puesto que, por la construcción de $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, la señal de salida tiene que pertenecer también a Φ .

Sea, por ejemplo, una gaussiana discreta

$$x(n) = e^{-n^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}), \quad (10.293)$$

la señal de salida también es una función de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$,

$$y(n) = D_1[x(n)] = e^{-n^2} - e^{-(n-1)^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}), \quad (10.294)$$

por ser la diferencia de dos funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

2. Sea $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, $x(n) \notin \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

²⁸Teniendo en cuenta que la función $\delta(n)$ es una función real.

²⁹Sabiendo que, en este caso, cada una de las funciones $h(n-n')$ son reales.

En este caso, también los productos escalares (10.289) y (10.291) están perfectamente definidos, por lo que no son necesarios los funcionales. Para comprobar si la señal de salida $y(n)$ es también de $l^2(\mathbb{Z})$ basta con estudiar la convergencia de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) - x(n-1)|^2 \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (10.295)$$

porque $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, por tanto $y(n) \in l^2(\mathbb{Z})$. Pero sería interesante también comprobar si puede pertenecer al subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Para ello se estudia la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q [y(n)]|^2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_q [y(n)]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^p D_{q+1} [x(n)]|^2, \quad (10.296)$$

pero esta serie no puede ser convergente puesto que debería ser $x(n) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y no lo es.

Veamos dos casos diferentes:

a) Sea el pulso discreto

$$x(n) = P_{2N+1}(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}), \quad (10.297)$$

pero que no es de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La señal de salida es

$$y(n) = P_{2N+1}(n) - P_{2N+1}(n-1) = \delta(n+N) - \delta(n-(N+1)) \quad (10.298)$$

que es obviamente una función de $\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$, porque dos deltas decrecen a 0 más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|n|}$, pero que no es de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ porque sus diferencias infinitas generan una función no convergente.

b) Sea la función sinc

$$x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (10.299)$$

pero no es una función de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ porque tan solo con multiplicarla por n ya genera una función que no es de cuadrado sumable. La señal de salida es

$$y(n) = \text{sinc}(an) - \text{sinc}(a(n-1)) \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (10.300)$$

pero no es de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ por la misma razón que $x(n)$ ni mucho menos de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

3. Sea $x(n) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ ³⁰.

En este caso los productos escalares (10.289) y (10.291) ya no son tales porque una de sus componentes no pertenece al espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$, tendiendo que acudir a la consideración de éstos como núcleos de funcionales, así

$$x(n) = \langle x(n'), \delta(n-n') \rangle = \tilde{\mathbf{X}}[\delta(n-n')] \quad (10.301)$$

$$y(n) = \langle x(n'), h(n-n') \rangle = \tilde{\mathbf{X}}[h(n-n')] \quad (10.302)$$

es un funcional antilineal para cada n cuyo núcleo es $x(n)$. A partir del mismo funcional se puede determinar la propia señal $x(n)$ o la señal de salida $y(n)$ del sistema dependiendo de qué conjunto de funciones se le pasen. Sin embargo, no se puede asegurar que el funcional antilineal esté bien definido ya que, a pesar de que tanto $\delta(n-n')$ como $h(n-n')$ son

³⁰ $x(n)$ tiene que considerarse en $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ porque, según la definición del producto escalar de (10.289) y (10.291), la función va en la primera componente, lo que le corresponde con el núcleo de un funcional antilineal.

funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ no lo son de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, por lo que podría darse el caso de que no quedasen bien definidos para algún valor de n' . Es interesante comprobar si la señal de salida también será de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ o no. Primero hay que comprobar si es de cuadrado sumable, así

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) - x(n-1)|^2, \quad (10.303)$$

pero pueden pasar dos cosas:

- a) Puede darse el caso de que esta serie sí sea convergente, ya sea por aplicarla a funciones del núcleo del operador como es $x(n) = A$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A|^2 = \infty, \quad (10.304)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A - A|^2 = 0 < \infty \quad (10.305)$$

o a otras funciones que no son del núcleo, como puede ser la función escalón $x(n) = \Gamma(n)$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty, \quad (10.306)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Gamma(n) - \Gamma(n-1)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1 < \infty \quad (10.307)$$

- b) También puede darse el caso de que no lo sea, tomando por ejemplo $x(n) = \cos(\Omega_0 n)$ se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n)|^2 = \infty, \quad (10.308)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n) - \cos(\Omega_0(n-1))|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\cos(\Omega_0 n) - (\cos(\Omega_0 n) \cos(\Omega_0) + \sin(\Omega_0 n) \sin(\Omega_0))|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(1 - \cos(\Omega_0)) \cos(\Omega_0 n) - \sin(\Omega_0) \sin(\Omega_0 n)|^2, \quad (10.309) \end{aligned}$$

y para $\Omega_0 = \pi$, por ejemplo, se tiene

$$x(n) = \cos(\pi n) = (-1)^n, \quad (10.310)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad (10.311)$$

y

$$\begin{aligned} y(n) &= (1 - \cos(\pi)) \cos(\pi n) - \sin(\pi) \sin(\pi n) = 2 \cos(\pi n) = 2 \quad (10.312) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^2 = \infty. \quad (10.313) \end{aligned}$$

Como conclusión decir que el espacio de Hilbert que estamos utilizando no es el habitualmente construido para el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$, y se cumple que

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z}), \quad (10.314)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{Z}), \quad (10.315)$$

por lo que no sólo es necesario que $x(n)$ no sea de cuadrado integrable para que sea una función de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$, ya que se puede dar el caso de que sea de $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$ pero no de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$. Puesto que este espacio de Hilbert equipado no está estudiado en profundidad, no se disponen aún de las herramientas necesarias para poder identificar claramente cuáles son las funciones de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$, aunque sí se puede decir que éstas serán los núcleos de los funcionales antilineales que actúen sobre las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y, respectivamente, las funciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ serán aquéllas que sean núcleo de los funcionales lineales sobre $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, por tanto, en este momento no se puede decir nada definitivo sobre las funciones de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$.

Lo que sí puede comprobarse, sin embargo, es que, a través de este ejemplo se prueba que el operador mantiene la pertenencia al subespacio correspondiente cuando la señal de entrada $x(n)$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ o $l^2(\mathbb{Z})$, pero no se puede decir nada cuando $x(n) \notin l^2(\mathbb{Z})$.

10.4.3. Análisis del sistema en el dominio espectral

Consideremos la transformada de Fourier de señales de variable discreta para realizar el análisis espectral de este sistema cuyo conjunto de funciones base es $e(\tau; \mu) \equiv e(n; \Omega) = \{e^{j\Omega n}\}_\Omega \subset \mathcal{D}'(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, ya que, para cada $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, $e^{j\Omega n}$ no es una función de cuadrado sumable, por lo que se trata de una base dentro del espacio dual lineal de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Las señales de entrada y salida en el dominio espectral, es decir, los coeficientes de estas señales según la base $e(n; \Omega)$ son la transformada de Fourier definida como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \langle x(n), e^{j\Omega n} \rangle, \quad (10.316)$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\Omega n} = \langle y(n), e^{j\Omega n} \rangle, \quad (10.317)$$

donde los productos escalares no son tales, al igual que en el ejemplo anterior (ver Secc. 10.3), sino que han de ser interpretados como un conjunto de funcionales lineales, para cada Ω , sobre $x(n)$ e $y(n)$, así,

$$X(\Omega) = \mathbf{F}_\Omega [x(n)], \quad (10.318)$$

$$Y(\Omega) = \mathbf{F}_\Omega [y(n)], \quad (10.319)$$

siendo \mathbf{F}_Ω el conjunto de funcionales lineales cuyo núcleo es $e^{-j\Omega n}$, para cada Ω , devolviendo la transformada de Fourier a la señal que se le aplica. Puede observarse que las expresiones (10.318) y (10.319) son semejantes a aplicar a las funciones $x(n)$ e $y(n)$ la transformada de Fourier como un operador,

$$X(\Omega) = \mathbf{TF} [x(n)], \quad (10.320)$$

$$Y(\Omega) = \mathbf{TF} [y(n)], \quad (10.321)$$

pero entendiendo que la interpretación es diferente, puesto que en el primer caso estamos trabajando con un conjunto de funcionales lineales, devolviendo un valor para cada Ω , mientras que en el segundo caso trabajamos con un operador sobre la función, devolviendo una nueva función.

Es importante hacer notar que la transformada de Fourier de señales de variable discreta se corresponde con funciones de variable continua periódicas de periodo 2π , por lo que, en el dominio espectral, no se tendrá la misma estructura de espacios de Hilbert equipados que se tiene en el dominio real. Según los resultados de la Secc. 8.7.2, se puede determinar la siguiente relación a través de la transformada de Fourier en variable discreta:

$$\text{si } x(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in \mathcal{P}(2\pi), \quad (10.322)$$

$$\text{si } x(n) \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in L^2((2\pi)), \quad (10.323)$$

$$\text{si } x(n) \in \mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) \in \mathcal{P}^\times(2\pi). \quad (10.324)$$

Sin embargo no es con los RHS generados a partir del subespacio $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ con el que se está trabajando, sino con $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. De todas formas, dado que $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, es posible asegurar que la transformada de Fourier de una función de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ pertenecerá a $\mathcal{P}(2\pi)$ aunque pueda ser que se pueda incluir en un subespacio más pequeño que éste, de la misma manera que la transformada de Fourier de una función de $l^2(\mathbb{Z})$ caerá en $L^2((2\pi))$. De lo que no se podrá asegurar nada es de las funciones de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ (y respectivamente de $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$) ya que, aunque algunas de ellas sean también de $\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ (o de $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z})$), no todas lo serán, dado que $\mathcal{D}^\times(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ ($\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$), por lo que no se puede asegurar que su transformada de Fourier sea de $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ (respectivamente $\mathcal{P}'(2\pi)$) o pertenezca a un subespacio mayor.

Una de las propiedades útiles que también se pueden emplear en este caso para conocer la señal en el dominio espectral es tener en cuenta que el sistema es lineal e invariante, por lo que

$$Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega), \quad (10.325)$$

donde

$$H(\Omega) = \mathbf{TF}[h(n)] = \mathbf{TF}[\delta(n) - \delta(n-1)] = 1 - e^{-j\Omega} \in \mathcal{P}(2\pi). \quad (10.326)$$

A continuación se presentan diferentes casos:

1. Sea $x(n) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Como se había visto en el dominio real, $y(n)$ siempre será una función de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, por lo que se puede decir que tanto $X(\Omega)$ como $Y(\Omega)$ serán funciones de $\mathcal{P}(2\pi)$, pero quizá también pertenezcan a un subespacio más pequeño. Los funcionales (10.318) y (10.319) están perfectamente definidos para todo Ω , por ser $x(n)$ e $y(n)$ funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Tomando el mismo ejemplo que en el análisis real, sea

$$x(n) = e^{-n^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\Omega-2\pi k)^2}{4}} \in \mathcal{P}(2\pi), \quad (10.327)$$

ya que se trata de la transformada de Fourier de una gaussiana discreta, lo que equivaldría a la suma de réplicas desplazadas cada 2π de la transformada de Fourier de la gaussiana en variable continua, por lo que es infinitamente derivable y de cuadrado integrable en un periodo 2π . La señal de salida en el dominio espectral es

$$Y(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\Omega-2\pi k)^2}{4}} \in \mathcal{P}(2\pi), \quad (10.328)$$

que igualmente será una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ ya que es el producto de dos funciones de este espacio. Estas funciones se representan en la Fig. 10.26.

2. Sea $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$, $x(n) \notin \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

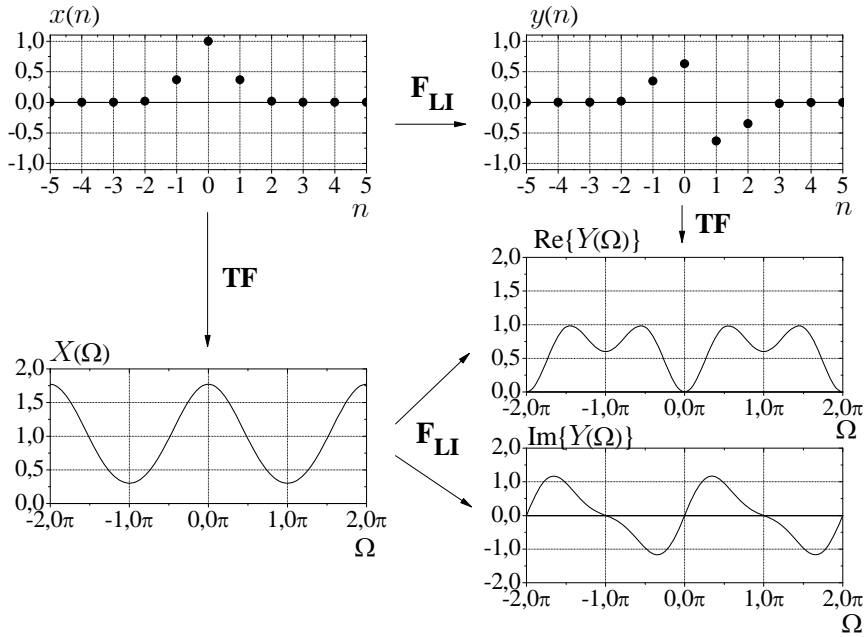


Figura 10.26: Señal de entrada al sistema $x(n) = e^{-n^2}$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y en el dominio espectral a $\mathcal{P}(2\pi)$.

En este caso está claro que $X(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle)$ pero no se puede asegurar que $X(\Omega) \notin \mathcal{P}(2\pi)$, ya que para que, para que esto pase, se tendría que dar que $x(n) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, pero eso no se asegura cuando $x(n) \notin \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, puesto que $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Además, dado que, como se ha comprobado en el análisis en el dominio real, $y(n)$ también es una función de $l^2(\mathbb{Z})$ pero no de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, así que se puede asegurar que $Y(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle)$ pero no se puede decir que $Y(\Omega) \notin \mathcal{P}(2\pi)$ por la misma razón de antes. Los funcionales (10.318) y (10.319) pueden no estar perfectamente definidos para todo Ω porque $x(n)$ e $y(n)$ no tienen por qué ser funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.

Según los ejemplos anteriores,

a) Sea el pulso discreto

$$\begin{aligned} x(n) &= P_{2N+1}(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(\Omega) &= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\Omega\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \in \mathcal{P}(2\pi) \subset L^2(\langle 2\pi \rangle), \end{aligned} \quad (10.329)$$

por ser una señal infinitamente derivable y de cuadrado integrable un periodo 2π . La señal de salida en el dominio espectral es

$$Y(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\Omega\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \in \mathcal{P}(2\pi) \subset L^2(\langle 2\pi \rangle), \quad (10.330)$$

que también será una función de $\mathcal{P}(2\pi)$ por ser producto de dos funciones de este espacio. Estas funciones se representan en la Fig. 10.27.

b) Sea la función sinc

$$x(n) = \text{sinc}(an) \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X(\Omega) = \frac{\pi}{a} P_{0,2a}(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle) \quad (10.331)$$

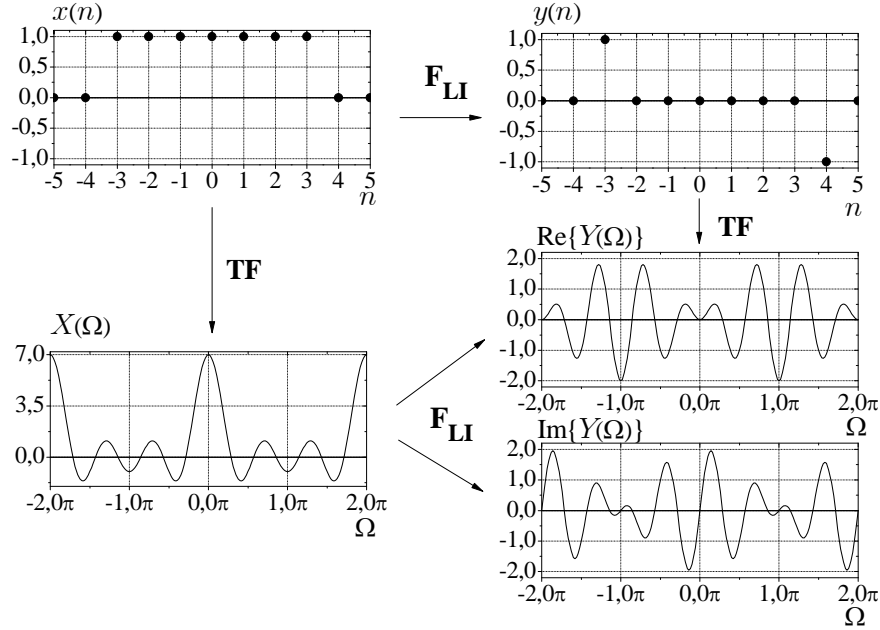


Figura 10.27: Señal de entrada al sistema $x(n) = P_{2N+1}(n)$ con un valor de $N = 3$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$ pero no a $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ mientras que en el dominio espectral pertenecen a $\mathcal{P}(2\pi) \subset L^2(\langle 2\pi \rangle)$.

e

$$Y(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega}) \frac{\pi}{a} P_{0,2a}(\Omega) \in L^2(\langle 2\pi \rangle), \quad (10.332)$$

pero no son funciones de $\mathcal{P}(2\pi)$ porque no son continuas en $\Omega = \pm a$ como se pueden ver en la Fig. 10.28.

3. Sea $x(n) \in \mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$.

En este caso tampoco los funcionales (10.318) y (10.319) pueden asegurar que $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ queden perfectamente definidos para todo Ω porque $x(n)$ no es una función de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y de $y(n)$ no se puede asegurar nada. Puesto que no se conoce cuál es el subespacio que identifica las funciones de $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ a través de la transformada de Fourier, no se puede decir nada acerca de la pertenencia de $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ a algún subespacio. Aunque sí estará claro que $X(\Omega) \notin L^2(\langle 2\pi \rangle)$ puede ser que $X(\Omega)$ pertenezca a $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ o a un subespacio mayor. Por otro lado, tal como se había visto en el análisis en el dominio real, de $y(n)$ no se puede decir nada, por lo que tampoco se tendrá información a priori sobre $Y(\Omega)$. Veamos los mismos ejemplos de este caso en el dominio real.

a) Sea una función constante

$$x(n) = A \Rightarrow X(\Omega) = 2\pi A \delta_0(\Omega) \in \mathcal{P}^\times(2\pi). \quad (10.333)$$

La señal de salida en el dominio espectral es

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = 2\pi A (1 - e^{-j\Omega}) \delta_0(\Omega) = \\ &= 2\pi A (1 - e^{-j0}) \delta_0(\Omega) = 0, \end{aligned} \quad (10.334)$$

lógico puesto que $x(n) \in \text{Ker}\{\mathbf{F}_{\text{LI}}\}$, por lo que $y(n) = 0$. En este caso, dado que la función $Y(\Omega) = 0$ pertenece a todos los subespacios, no es cierto que $Y(\Omega)$ sea únicamente de algún espacio dual. Estas funciones se representan en la Fig. 10.29.

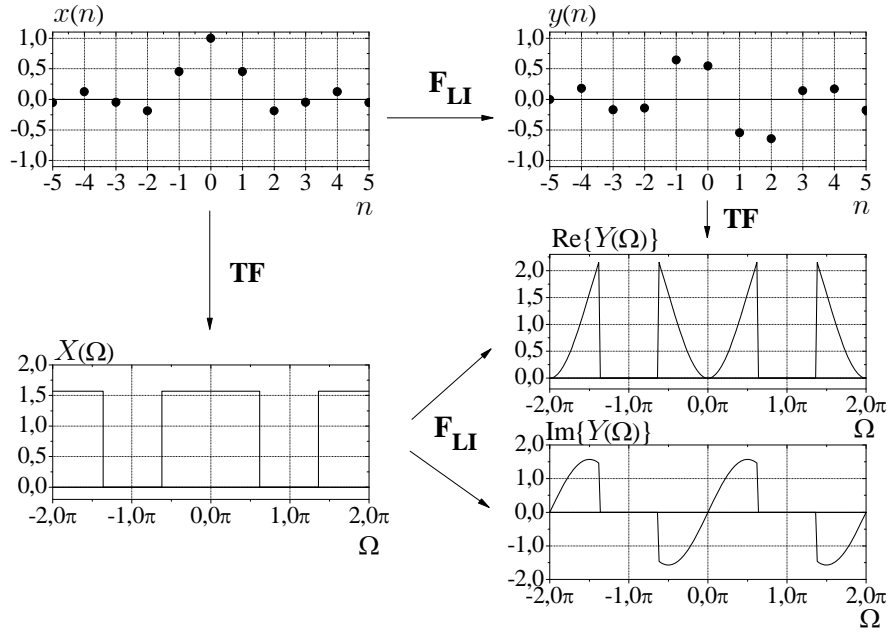


Figura 10.28: Señal de entrada al sistema $x(n) = \text{sinc}(2n)$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo las señales en el dominio real pertenecen a $l^2(\mathbb{Z})$ pero no a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, mientras que en el dominio espectral son de $L^2(\langle 2\pi \rangle)$ pero no de $\mathcal{P}(2\pi)$.

Sea la función escalón

$$x(n) = \Gamma(n) \Rightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi\delta_0(\Omega) \in \mathcal{P}^\times(2\pi). \quad (10.335)$$

La señal de salida en el dominio espectral en este caso es

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = \\ &= (1 - e^{-j\Omega}) \left(\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi\delta_0(\Omega) \right) = \\ &= 1 + \pi(1 - e^{-j\Omega})\delta_0(\Omega) = \\ &= 1 + \pi(1 - e^{-j0})\delta_0(\Omega) = 1 \quad \forall \Omega \end{aligned} \quad (10.336)$$

que es una función infinitamente derivable y de cuadrado integrable en un periodo de longitud 2π , por lo que $Y(\Omega) \in \mathcal{P}(2\pi)$. En la Fig. 10.29 se muestran representadas las funciones de este ejemplo.

b) Por otro lado sea la función coseno

$$x(n) = \cos(\pi n) \Rightarrow X(\Omega) = \pi\delta_0(\Omega - \pi) + \pi\delta_0(\Omega + \pi) \in \mathcal{P}^\times(2\pi). \quad (10.337)$$

En el dominio espectral la señal de salida es

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) = \\ &= (1 - e^{-j\Omega}) (\pi\delta_0(\Omega - \pi) + \pi\delta_0(\Omega + \pi)) = \\ &= \pi((1 - e^{-j\pi})\delta_0(\Omega - \pi) + (1 - e^{j\pi})\delta_0(\Omega + \pi)) = \\ &= 2\pi(\delta_0(\Omega - \pi) + \delta_0(\Omega + \pi)) = 2X(\Omega), \end{aligned} \quad (10.338)$$

por lo que $Y(\Omega)$ pertenecerá exactamente al mismo subespacio que $X(\Omega)$. Este ejemplo se muestra representado en la Fig. 10.31.

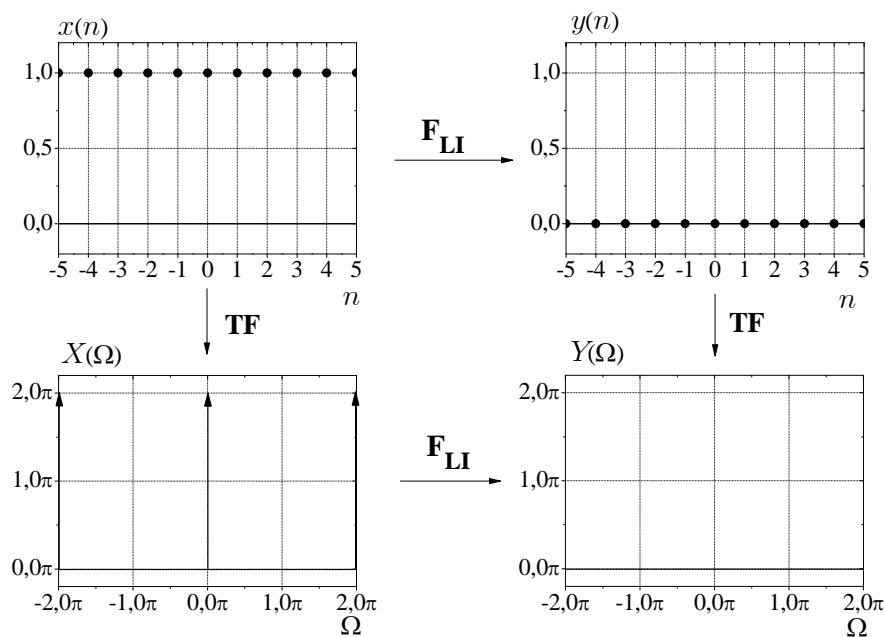


Figura 10.29: Señal de entrada al sistema constante $x(n) = A$ de valor $A = 1$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo la señal de entrada en el dominio real pertenece a $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ pero la de salida es la función nula por ser $x(n) \in \text{Ker}\{\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}\}$, por lo que $y(n) = 0$ se puede considerar dentro de cualquier espacio, ya sea $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ o el mismo $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$. En el dominio espectral sucede algo parecido, ya que la señal de entrada es de $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ pero la de salida, al ser nula, se puede considerar en cualquier subespacio, tanto $\mathcal{P}(2\pi)$ como $\mathcal{P}^\times(2\pi)$.

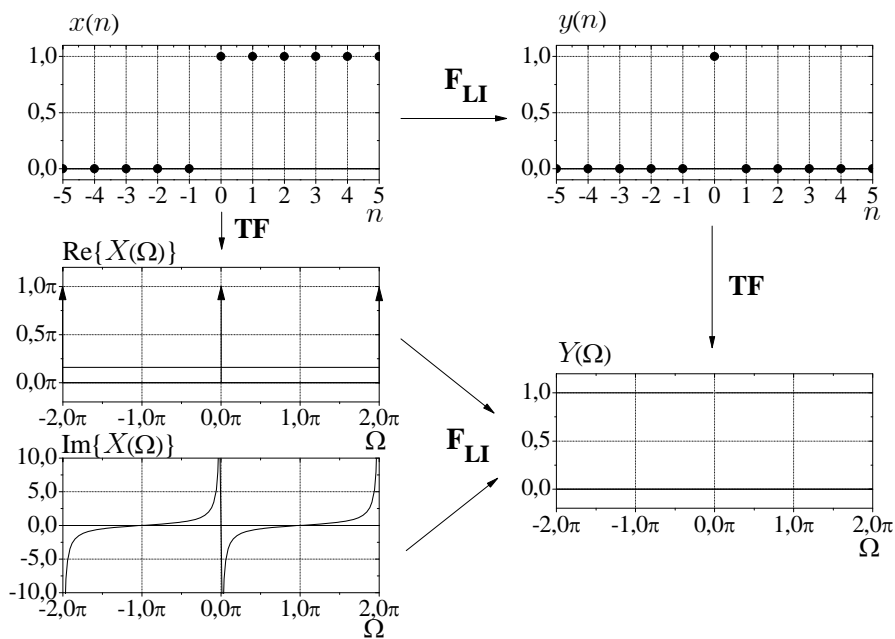


Figura 10.30: Señal de entrada al sistema $x(n) = \Gamma(n)$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo la señal de entrada en el dominio real pertenece a $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ pero la de salida a $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. En el dominio espectral sucede algo parecido, ya que la señal de entrada es de $\mathcal{P}^\times(2\pi)$ por contener deltas de Dirac, pero la de salida sí es de cuadrado integrable en un periodo, por lo que pertenece a $\mathcal{P}(2\pi)$. Este es un ejemplo de cómo este sistema puede hacer cambiar de subespacio la señal de entrada al sistema.

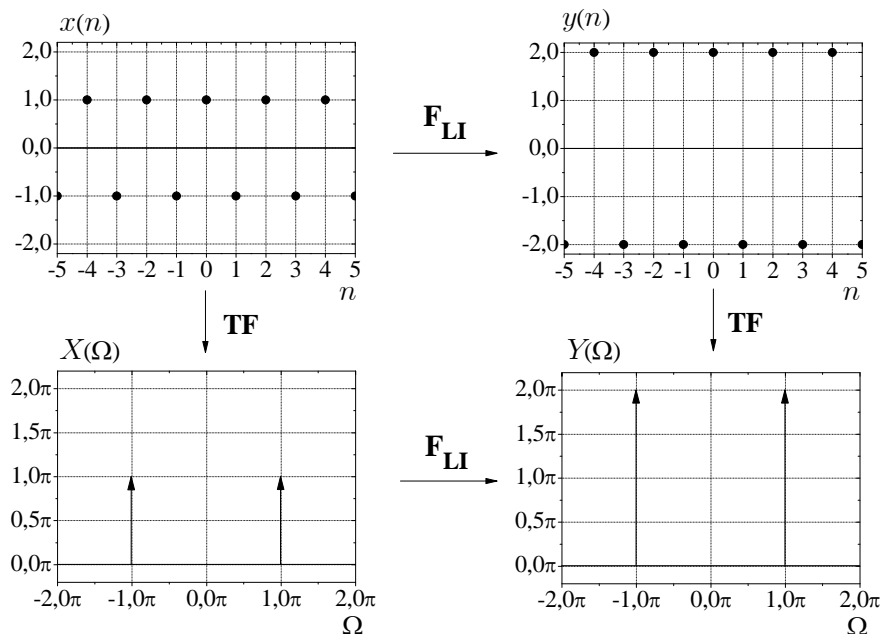


Figura 10.31: Función de entrada al sistema $x(n) = \cos(\pi n)$, junto con la función de salida $y(n)$ y las respectivas transformadas de Fourier $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$. En la parte superior se visualiza el análisis en el dominio real y en la inferior el análisis en el dominio espectral bajo la transformada de Fourier. En este ejemplo, dado que la salida es igual que la entrada multiplicada por 2, las señales en el dominio real pertenecen ambas a $\mathcal{S}^\times(\mathbb{Z})$ y las del dominio espectral a $\mathcal{P}^\times(2\pi)$.

Finalmente comentar que también se podría considerar, para realizar en análisis en el dominio espectral, la transformada de Fourier como funcional antilineal sin más que colocarlo en la primera componente del producto escalar, obteniendo así

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} x^*(n) = \langle e^{j\Omega n}, x(n) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_\Omega [x(n)], \quad (10.339)$$

$$Y^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} y^*(n) = \langle e^{j\Omega n}, y(n) \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_\Omega [y(n)], \quad (10.340)$$

de esta manera $\tilde{\mathbf{F}}_\Omega$ se correspondería con un funcional antilineal, para cada $\Omega \in \langle 2\pi \rangle$, cuyo núcleo es $e^{j\Omega n}$, así que, en este caso, cuando $x(n)$ o $y(n)$ no fuesen de $l^2(\mathbb{Z})$, deberían considerarse pertenecientes al subespacio $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ para que la operación tuviera sentido.

Con estos ejemplos y las demostraciones previas se ha comprobado que es posible determinar a qué subespacio pertenece tanto la señal de entrada en el dominio espectral $X(\Omega)$ como la señal de salida de este sistema en ambos dominios, real $y(n)$, y espectral $Y(\Omega)$, cuando la señal de entrada $x(n)$ pertenece únicamente a $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, ya que en el resto de los casos no se puede decir nada. Lo que sí es claro es que las señales en el dominio espectral a través de la transformada de Fourier serán de variable continua y periódicas de periodo 2π . Una de las cuestiones importantes a tener en cuenta en este ejemplo es que no se está trabajando con el espacio de Hilbert equipado habitual para el conjunto de funciones de variable discreta, es decir, el generado por el subespacio $\Phi = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, sino con $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Esto hace que a través de la transformada de Fourier no se pueda asegurar la pertenencia de cada señal a algún subespacio concreto, teniendo que analizar cada caso y cada ejemplo de manera particular. Además, el sistema analizado puede llevar funciones de un subespacio a otro, como pueden ser las funciones del núcleo del operador, es decir, las exponenciales complejas, ya que no son funciones de cuadrado sumable, sin embargo,

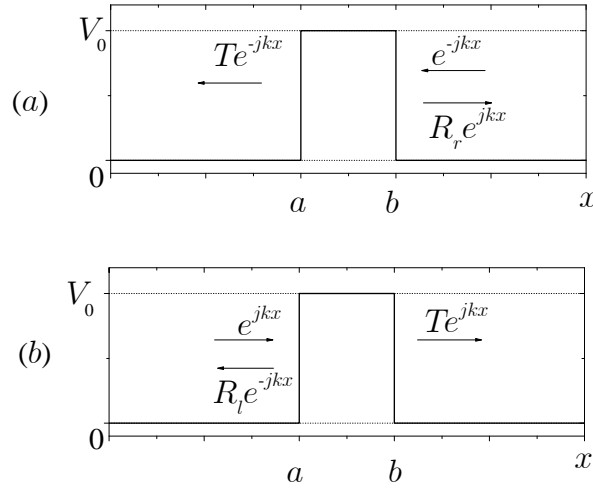


Figura 10.32: Representación esquemática del sistema. En (a) una partícula avanza hacia la izquierda chocando con una barrera de potencial de valor V_0 transmitiéndose una parte y reflejándose otra. En (b) la situación es la misma con la partícula avanzando hacia la derecha.

a la salida siempre se tiene la función nula, que obviamente es de cuadrado sumable y, por ser el elemento neutro, pertenece a todos los subespacios.

Este tipo de RHS, al igual que otros muchos, deberán ser analizados en detalle en un futuro (ver líneas futuras en el Cap. 12).

10.5. Ejemplo de mecánica cuántica desde el punto de vista de la GSST: Barrera de potencial rectangular unidimensional

El problema físico que se plantea es el de una partícula que se mueve en una dimensión y que incide en una barrera de potencial rectangular según se muestra en la Fig. 10.32.

Los valores que se quieren medir de esa partícula son la posición \mathbf{Q} , el momento \mathbf{P} y el Hamiltoniano (energía) \mathbf{H} , cuyas expresiones para calcular dichos parámetros vienen determinadas, respectivamente, según los siguientes operadores:

$$\mathbf{Q}[f(x)] = xf(x), \quad (10.341)$$

$$\mathbf{P}[f(x)] = -jh \frac{d}{dx} f(x), \quad (10.342)$$

$$\mathbf{H}[f(x)] = \left(-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) f(x), \quad (10.343)$$

siendo

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < a \\ V_0 & a < x < b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases} \quad (10.344)$$

El objetivo de este ejemplo es el de transcribir a la notación e interpretaciones de la GSST un problema típico de mecánica cuántica, descrito en [65] y [66] en el que se utilizan los conceptos de los espacios de Hilbert equipados y la notación de Dirac de Bras y Kets.

10.5.1. Obtención del conjunto de funciones base

En primer lugar se determina cuáles son las funciones que juegan el papel de una base para cada uno de los operadores y que sean, en este caso, autofunciones para cada uno de ellos cuyo autovalor sea precisamente el parámetro que las describe.

a) Para el operador posición $e(\tau; \mu) = e_{\mathbf{Q}}(x; x')$:

$$\mathbf{Q}[e_{\mathbf{Q}}(x; x')] = xe_{\mathbf{Q}}(x; x') = x'e_{\mathbf{Q}}(x; x'), \quad (10.345)$$

lo que implica

$$e_{\mathbf{Q}}(x; x') = \{\delta(x - x')\}_{x' \in \mathbb{R}}, \quad (10.346)$$

que, en notación de Bra-Kets de Dirac sería

$$\langle x' | \mathbf{Q} | x \rangle = x \langle x' | x \rangle = x' \langle x' | x \rangle, \quad (10.347)$$

por tanto,

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x - x'). \quad (10.348)$$

b) Para el operador momento $e(\tau; \mu) = e_{\mathbf{P}}(x; p)$:

$$\mathbf{P}[e_{\mathbf{P}}(x; p)] = -jh \frac{d}{dx} e_{\mathbf{P}}(x; p) = p e_{\mathbf{P}}(x; p), \quad (10.349)$$

lo que implica

$$e_{\mathbf{P}}(x; p) = \left\{ \frac{e^{j \frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} \right\}_{p \in \mathbb{R}}, \quad (10.350)$$

que, en notación de Bra-Kets de Dirac sería

$$\langle p | \mathbf{P} | x \rangle = -jh \frac{d}{dx} \langle p | x \rangle = p \langle p | x \rangle, \quad (10.351)$$

por tanto,

$$\langle p | x \rangle = \frac{e^{j \frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}}. \quad (10.352)$$

c) Para el operador Hamiltoniano $e(\tau; \mu) = e_{\mathbf{H}}(x; E)$:

$$\mathbf{H}[e_{\mathbf{H}}(x; E)] = \left(-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) e_{\mathbf{H}}(x; E) = E e_{\mathbf{H}}(x; E), \quad (10.353)$$

lo que implica dos posibles soluciones, cada una de ellas con dos tipos de funciones linealmente independientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\mathbf{H}}(x; E^+)_r = \left(\frac{m}{2\pi k h^2} \right)^{1/2} \times \begin{cases} T(k) e^{-jkx} & -\infty < x < a \\ A_r(k) e^{j\kappa x} + B_r(k) e^{-j\kappa x} & a < x < b \\ R_r(k) e^{jkx} + e^{-jkx} & b < x < \infty, \end{cases} \\ e_{\mathbf{H}}(x; E^+)_l = \left(\frac{m}{2\pi k h^2} \right)^{1/2} \times \begin{cases} e^{jkx} + R_l(k) e^{-jkx} & -\infty < x < a \\ A_l(k) e^{j\kappa x} + B_l(k) e^{-j\kappa x} & a < x < b \\ T(k) e^{jkx} & b < x < \infty, \end{cases} \end{array} \right. \quad (10.354)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\mathbf{H}}(x; E^-)_r = \left(\frac{m}{2\pi k h^2}\right)^{1/2} \times \begin{cases} T^*(k) e^{jkx} & -\infty < x < a \\ A_r^*(k) e^{-j\kappa x} + B_r^*(k) e^{j\kappa x} & a < x < b \\ R_r^*(k) e^{-jkx} + e^{jkx} & b < x < \infty, \end{cases} \\ e_{\mathbf{H}}(x; E^-)_l = \left(\frac{m}{2\pi k h^2}\right)^{1/2} \times \begin{cases} e^{-jkx} + R_l^*(k) e^{jkx} & -\infty < x < a \\ A_l^*(k) e^{-j\kappa x} + B_l^*(k) e^{j\kappa x} & a < x < b \\ T^*(k) e^{-jkx} & b < x < \infty, \end{cases} \end{array} \right. \quad (10.355)$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2m}{h^2} E}, \quad (10.356)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{h^2} (E - V_0)} \quad (10.357)$$

y las expresiones de $T(k)$, $A_r(k)$, $B_r(k)$, $R_r(k)$, $A_l(k)$, $B_l(k)$, $T^*(k)$, $A_r^*(k)$, $B_r^*(k)$, $R_r^*(k)$, $A_l^*(k)$ y $B_l^*(k)$, así como sus interpretaciones físicas, pueden encontrarse en la Ref. [66].

: Las expresiones en notación de Bra-Kets de Dirac serían

$$\langle E | \mathbf{H} | x \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \langle E | x \rangle = E \langle E | x \rangle, \quad (10.358)$$

por tanto, $\langle E | x \rangle = (10.354), (10.355)$.

10.5.2. Estructura de los espacios de Hilbert equipados

Se busca cuál es el espacio de funciones Φ cuyos elementos permanecen invariantes por la aplicación sucesiva de los operadores anteriormente descritos \mathbf{Q} , \mathbf{P} y \mathbf{H} :

$$\Phi = \bigcap_{n,m,l=0}^{\infty} \text{Dom} \left\{ \mathbf{Q}^n \mathbf{P}^m \mathbf{H}^l \right\}, \quad (10.359)$$

siendo $\text{Dom} \{ \mathbf{A} \}$ el dominio del operador \mathbf{A} .

En este caso,

$$\begin{aligned} \Phi &= \{ \varphi \in L^2 | \varphi \in C^\infty, \varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, \\ Q^n P^m H^l [\varphi(x)] &\in L^2, n, m, l = 0, 1, 2, \dots \} = \mathcal{S}(\mathbb{R} - \{a, b\}). \end{aligned} \quad (10.360)$$

Según este resultado, se ve que las funciones base escogidas, $e_{\mathbf{Q}}(x; x')$, $e_{\mathbf{P}}(x; p)$ y $e_{\mathbf{H}}(x; E)$ no pertenecen a este espacio, por lo que tienen que ser tratadas como elementos de los espacios dual lineal y dual antilineal Φ' y Φ^\times , respectivamente, de los RHS.

El espacio $\Phi'_{\mathbf{F}}$ es el espacio de los funcionales lineales sobre Φ ,³¹

$$\Phi'_{\mathbf{F}} = \{ \mathbf{D} : \Phi \rightarrow \mathbb{C} \text{ tq } \mathbf{D} \text{ lineal} \}. \quad (10.362)$$

³¹ Con el propósito de aliviar la notación, en todas las integrales que aparecen sólo se indica la variable de integración, teniendo en cuenta que su variación siempre va a ser infinita, es decir,

$$\int_x \equiv \int_{x=-\infty}^{\infty}. \quad (10.361)$$

$$\mathbf{D}[\varphi] = \int_x \varphi(x) d^*(x) dx, \quad (10.363)$$

donde $\varphi(x) \in \Phi$ y $d^*(x)$ es el núcleo del funcional lineal $\mathbf{D} \in \Phi'_{\mathbf{F}}$, por lo que $d^*(x) \in \Phi'$ tomando Φ' como el conjunto de los núcleos de los funcionales lineales, así

$$\Phi' = \{d^*, \text{ tq } \mathbf{D}[\varphi] = \langle \varphi, d \rangle, \mathbf{D} \in \Phi'_{\mathbf{F}}\}, \quad (10.364)$$

De forma general,

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi' \quad (10.365)$$

y, en el caso particular de este ejemplo,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R} - \{a, b\}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R} - \{a, b\}). \quad (10.366)$$

Expresándolo en notación de Dirac, la representación de los elementos de Φ' serían los kets del espacio dual lineal, $|d\rangle \in \Phi'$,

$$\langle \varphi | d \rangle = \int_x \langle \varphi | x \rangle \langle x | d \rangle dx. \quad (10.367)$$

Hay que diferenciar claramente el operador \mathbf{D} y su núcleo d^* , puesto que, aunque están estrechamente relacionados, son objetos diferentes.

De la misma manera, el espacio $\Phi_{\mathbf{F}}^{\times}$ es el espacio de los funcionales antilineales sobre Φ

$$\Phi_{\mathbf{F}}^{\times} = \left\{ \tilde{\mathbf{D}} : \Phi \rightarrow \mathbb{C} \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}} \text{ antilineal} \right\}. \quad (10.368)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}[\varphi] = \int_x \varphi^*(x) d(x) dx, \quad (10.369)$$

donde $\varphi(x) \in \Phi$ y $d(x)$ es el núcleo del funcional antilineal $\tilde{\mathbf{D}} \in \Phi_{\mathbf{F}}^{\times}$, por lo que $d(x) \in \Phi^{\times}$ tomando Φ^{\times} como el conjunto de los núcleos de los funcionales antilineales, así

$$\Phi^{\times} = \left\{ d, \text{ tq } \tilde{\mathbf{D}}[\varphi] = \langle d, \varphi \rangle, \tilde{\mathbf{D}} \in \Phi_{\mathbf{F}}^{\times} \right\}, \quad (10.370)$$

De forma general,

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^{\times} \quad (10.371)$$

y, en el caso particular de este ejemplo,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R} - \{a, b\}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R} - \{a, b\}). \quad (10.372)$$

Expresándolo en notación de Dirac, la representación de los elementos de Φ^{\times} serían los bras del espacio dual antilineal, $\langle d| \in \Phi^{\times}$,

$$\langle d | \varphi \rangle = \int_x \langle d | x \rangle \langle x | \varphi \rangle dx. \quad (10.373)$$

Nuevamente, hay que diferenciar entre el operador $\tilde{\mathbf{D}}$ y su núcleo d , puesto que, aunque están estrechamente relacionados, son objetos diferentes.

10.5.3. Análisis en el dominio real

Volviendo al punto de vista de la TGSS, analizamos los sistemas representados por los operadores posición \mathbf{Q} , momento \mathbf{P} y Hamiltoniano \mathbf{H} en el dominio real.

En general, cualquier función de variable continua se puede expresar como

$$f(x) = \int_{x'} f(x') \delta(x - x') dx'. \quad (10.374)$$

a) Para el operador posición \mathbf{Q} ,

$$g(x) = \mathbf{Q}[f(x)] = xf(x). \quad (10.375)$$

El conjunto de respuestas al impulso es

$$h(x; y) = \mathbf{Q}[\delta(x - y)] = x\delta(x - y) = y\delta(x - y). \quad (10.376)$$

Se trata por tanto de un sistema lineal no invariante.

Y, en general, la señal de salida para una señal de entrada dada $f(x)$, conocido el conjunto de respuestas al impulso es

$$g(x) = \int_y f(y) h(x; y) dy = \int_y f(y) x\delta(x - y) dy = xf(x). \quad (10.377)$$

b) Para el operador momento \mathbf{P} ,

$$g(x) = \mathbf{P}[f(x)] = -jh \frac{d}{dx} f(x). \quad (10.378)$$

El conjunto de respuestas al impulso es

$$h(x; x') = \mathbf{P}[\delta(x - x')] = -jh \frac{d}{dx} \delta(x - x') = -jh \delta'(x - x'). \quad (10.379)$$

Es un sistema lineal e invariante. Y la salida para una señal dada $f(x)$ es

$$g(x) = \int_{x'} f(x') h(x; x') dx' = \int_{x'} -jh f(x') \delta'(x - x') dx' = -jh f'(x). \quad (10.380)$$

c) Para el operador Hamiltoniano \mathbf{H} ,

$$g(x) = \mathbf{H}[f(x)] = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) f(x). \quad (10.381)$$

El conjunto de respuestas al impulso es

$$\begin{aligned} h(x; x') &= \mathbf{H}[\delta(x - x')] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \delta(x - x') + V(x) \delta(x - x') = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \delta''(x - x') + V(x) \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (10.382)$$

Se tiene un sistema lineal no invariante. Y la señal de salida, conocida la entrada $f(x)$ y el conjunto de respuestas al impulso es

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x'} f(x') h(x; x') dx' = \int_{x'} f(x') \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \delta''(x - x') + V(x) \delta(x - x') \right) dx' = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) + V(x) f(x). \end{aligned} \quad (10.383)$$

10.5.4. Análisis en el dominio espectral

Para la representación en el dominio espectral se tienen en cuenta el conjunto de funciones base obtenidos al principio para cada operador y se estudia cómo sería la señal de salida en el dominio espectral para ese conjunto de funciones base, es decir, el conjunto de coeficientes que representan la señal de salida como combinación lineal de los elementos de la base, y la expresión de la señal de salida en el dominio espectral en función de la de entrada en ese mismo dominio.

a) Para el operador posición \mathbf{Q} ,

$$e_{\mathbf{Q}}(x; x') = \{\delta(x - x')\}_{x'} . \quad (10.384)$$

La transformada de la señal de entrada, es decir, los coeficientes en dicha base son

$$F(x') = \langle f(x), e_{\mathbf{Q}}(x; x') \rangle = \int_x f(x) \delta(x - x') dx = f(x') . \quad (10.385)$$

Al tratarse de un sistema lineal no invariante, realizamos su estudio espectral a través del análisis espectral generalizado, es decir, a partir de la expresión

$$G(x') = \int_{y'} F(y') \mathbf{H}_*(x'; y') dy' , \quad (10.386)$$

donde

$$\mathbf{H}_*(x'; y') = \langle \langle h(x; y), e_{\mathbf{Q}}(x; x') \rangle_x , e_{\mathbf{Q}}^*(y; y') \rangle_y \quad (10.387)$$

y, recordando de (10.376),

$$h(x; y) = y\delta(x - y) . \quad (10.388)$$

Primero se obtiene $\mathbf{H}_*(x'; y')$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(x'; y') &= \int_y \int_x y\delta(x - y) \delta(x - x') dx \delta(y - y') dy = \\ &= \int_y y\delta(x' - y) \delta(y - y') dy = y'\delta(x' - y') . \end{aligned} \quad (10.389)$$

Y ahora se calcula la señal de salida en el dominio espectral

$$G(x') = \int_{y'} F(y') \mathbf{H}_*(x'; y') dy' = \int_{y'} F(y') y'\delta(x' - y') dy' = x'F(x') . \quad (10.390)$$

es decir,

$$G(x') = x'F(x') \quad (10.391)$$

En este caso, el dominio real y espectral coinciden, cosa que es evidente puesto que el conjunto de funciones base son deltas:

$$F(x') = f(x') , \quad (10.392)$$

$$G(x') = x'F(x') = x'f(x') = g(x') . \quad (10.393)$$

Se tiene un sistema lineal no invariante cuyas funciones base son autofunciones del sistema, siendo los autovalores cada uno de los valores de posición de la variable espectral x' ,

$$\mathbf{Q}[e_{\mathbf{Q}}(x; x')] = \mathbf{Q}[\delta(x - x')] = x'\delta(x - x') = x'e_{\mathbf{Q}}(x; x') \quad (10.394)$$

b) Para el operador momento \mathbf{P} ,

$$e_{\mathbf{P}}(x; p) = \left\{ \frac{e^{j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} \right\}_p. \quad (10.395)$$

La transformada de la señal de entrada, es decir, los coeficientes en dicha base son

$$F(p) = \langle f(x), e_{\mathbf{P}}(x; p) \rangle = \int_x f(x) \frac{e^{-j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} dx. \quad (10.396)$$

Realizando el análisis espectral generalizado,

$$G(p) = \int_{p'} F(p') \mathbf{H}_*(p; p') dp', \quad (10.397)$$

donde

$$\mathbf{H}_*(p; p') = \langle \langle h(x; x'), e_{\mathbf{P}}(x; p) \rangle_x, e_{\mathbf{P}}^*(x'; p') \rangle_{x'}, \quad (10.398)$$

y, recordando de (10.379),

$$h(x; x') = -jh\delta'(x - x'). \quad (10.399)$$

Por tanto, obteniendo primero $\mathbf{H}_*(p; p')$,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_*(p; p') &= \int_{x'} \int_x -jh\delta'(x - x') \frac{e^{-j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} dx \frac{e^{j\frac{p'x'}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} dx' = \\ &= \int_{x'} -jh \frac{jp e^{-j\frac{px'}{h}}}{h\sqrt{2\pi h}} \frac{e^{j\frac{p'x'}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} dx' = p\delta(p - p'). \end{aligned} \quad (10.400)$$

Se calcula la salida en el dominio espectral

$$G(p) = \int_{p'} F(p') \mathbf{H}_*(p; p') dp' = \int_{p'} F(p') p\delta(p - p') dp' = pF(p), \quad (10.401)$$

es decir,

$$G(p) = pF(p). \quad (10.402)$$

Se trata de un sistema lineal e invariante cuyas funciones base son autofunciones del operador con autovalor p , referido al momento angular,

$$\mathbf{P}[e_{\mathbf{P}}(x; p)] = \mathbf{P} \left[\frac{e^{j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} \right] = -jh \frac{d}{dx} \frac{e^{j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} = -jh \frac{jp}{h} \frac{e^{j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} = p \frac{e^{j\frac{px}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} = p e_{\mathbf{P}}(x; p). \quad (10.403)$$

c) Finalmente, la interpretación de los resultados para el operador Hamiltoniano \mathbf{H} son idénticos que para los operadores posición y momento, pero, por excesiva complejidad en las expresiones se omite su desarrollo³², recordando que, igualmente, la señal de salida en el dominio espectral $G(E)$ para este caso coincide formalmente con los casos anteriores, es decir, es la señal de entrada $F(E)$ multiplicada por un autovalor referente, en este caso, a la energía E ,

$$G(E) = E F(E). \quad (10.404)$$

³²Referirse a [66] para su completo desarrollo.

Parte III

Conclusiones y Líneas Futuras

11. Conclusiones Generales

Los resultados desarrollados en esta tesis doctoral han permitido extender en forma muy notable la versión actual de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas (GSST).

En primer lugar se han obtenido varios resultados previos sencillos (ver Cap. 3), pero de gran utilidad para desarrollos posteriores más complejos, entre los que cabe destacar la demostración de que un conjunto de funciones ortogonales son linealmente independientes o la relación entre la combinación lineal y el producto escalar en un espacio de señal, resultado muy importante puesto que relaciona los conceptos de un espacio vectorial (sumas y combinaciones lineales) con los de un espacio de Hilbert (productos escalares). Estos resultados se demuestran para dimensión infinita aunque también se pueden particularizar para los casos conocidos de dimensión finita.

En la primera parte de esta tesis se ha abordado el concepto de **Cambio de Base** o **Cambio de Transformada Generalizada** (*Generalized Transform Change*, GTC) en espacios de señal (Cap. 4). Este concepto permite generalizar la relación entre los coeficientes de una misma señal representada en bases diferentes. En otras palabras, permite explicar de forma generalizada la relación entre diferentes transformadas de una misma señal. Lo que en un espacio de dimensión finita resulta sencillo puesto que se trata de encontrar una matriz para el cambio de base, en espacios de dimensión infinita no lo es tanto porque, en primer lugar, no se puede trabajar con matrices. Tomando como condición que los conjuntos de funciones que jueguen el papel de bases en el espacio, $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{e}(\tau; \mu')$, (y que por tanto definen cada transformada) sean ortogonales, se han encontrado las expresiones generales de unos conjuntos de funciones que permiten realizar dicho cambio de base o cambio de transformada. Estas expresiones son

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (11.1)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle. \quad (11.2)$$

Estos conjuntos de funciones generalizan las conocidas matrices del cambio de base en dimensión finita, comprobándose que se reducen a éstas al trabajar en este tipo de espacios. Las ecuaciones finales para los cambios de base vienen dadas por

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)], \quad (11.3)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{CL}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')], \quad (11.4)$$

donde $\alpha(\mu)$ son los coeficientes de una señal $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ los coeficientes de la misma señal $a(\tau)$ en la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$. Lo curioso de estos conjuntos de funciones para el cambio de base es que permiten también relacionar bases que tienen diferente cardinalidad dentro de un mismo espacio de señal. Esto puede resultar llamativo puesto que todas las bases de un mismo espacio deberían tener la misma cardinalidad, sin embargo, también se tienen en cuenta algunos conjunto de funciones que, sin cumplir estrictamente todas las condiciones para ser una base, pueden hacer ese papel, como por ejemplo las distribuciones delta de Dirac (a este tipo de conjuntos las denominamos ‘pseudobases’). Estos conjuntos de funciones para el cambio de base también tienen otra particularidad, y es la de realizar el cambio para una misma señal descrita en espacios diferentes, como pueden ser, por ejemplo, las señales periódicas, que se pueden ver dentro del propio espacio de funciones periódicas o dentro de un espacio más general. A pesar de que las definiciones de producto escalar en ambos espacios van a ser diferentes, los conjuntos

de funciones en (11.1) y (11.2) también permiten realizar dicho cambio de base y, en este caso, también de espacio. Los resultados asociados a los cambios de base y cambios de espacio se demuestran rigurosamente al introducir los espacios de Hilbert equipados (RHS) como se puede comprobar en los Caps. 8 y 9.

También en la primera parte de la tesis se ha desarrollado una nueva versión del **Análisis Espectral Generalizado** (*Generalized Spectral Analysis*, GSA) (ver Cap. 5). En este concepto intervienen, no sólo las características de los espacios de señal, sino también entran en juego los operadores lineales. El concepto general de análisis espectral se corresponde con el de analizar la señal de salida de un sistema en relación con la entrada en el dominio espectral, es decir, en el dominio de los coeficientes, escogida una base en el espacio correspondiente. El análisis espectral clásico tiene en cuenta que este conjunto de funciones base son autofunciones del sistema, $e(\tau; \mu) \subset \text{Eig}\{\mathbf{F}\}$, de forma que su transformación a través del sistema serán ellas mismas multiplicadas por unos autovalores, $\mathbf{F}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau; \mu)$. De esta manera, el análisis espectral se reduce al producto de los coeficientes de la señal de entrada por estos autovalores, $\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu)$. Este tipo de análisis es ampliamente utilizado puesto que es el que resulta al analizar cualquier sistema lineal e invariante bajo la transformada de Fourier, ya que las exponenciales complejas son siempre autofunciones de este tipo de sistemas; pero este concepto no permite generalizar el análisis de sistemas lineales no invariantes bajo la Transformada de Fourier, como son las modulaciones en amplitud o la mayoría de los problemas descritos en magnitudes espaciales. En [86] se encontraron unas primeras expresiones para el análisis espectral de un sistema lineal no invariante bajo la transformada de Fourier (versión integral de la versión espectral de un operador, ‘paralela’ a la versión integral de un operador en el dominio real en términos de conjuntos de respuestas al impulso) y en [2] se desarrolló una primera versión del análisis espectral generalizado que permitía analizar cualquier sistema lineal en el dominio espectral bajo cualquier tipo de transformada, pero siempre que el operador que describe el sistema actuase sobre el mismo espacio. En esta tesis *se ha desarrollado una expresión más general* que permite que *el operador actúe entre espacios de señal diferentes* y la representación espectral se realice *bajo distintas transformadas en el espacio de partida $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y en el de llegada $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$* . De esta manera se generaliza el concepto de análisis espectral de un sistema, no entendiéndolo en el sentido de los autovalores (espectro del operador) sino como la relación entre los coeficientes $\alpha(\mu)$ de la señal de entrada $a(\tau)$ a un sistema lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ en una base $e(\tau; \mu)$ y los coeficientes $\beta(\eta)$ de la señal de salida $b(v)$ en la base $\hat{e}(v; \eta)$. La expresión general del análisis espectral generalizado es

$$\beta(\eta) = \mathbf{ACL}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (11.5)$$

expresión muy importante dado que se puede afirmar que, formalmente, el análisis espectral generalizado es conceptualmente semejante al análisis de sistemas en el dominio real,

$$b(v) = \mathbf{CL}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')], \quad (11.6)$$

siendo

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{A\hat{A}} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \quad (11.7)$$

y $h(v; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]$ son el conjunto de respuestas al impulso del sistema lineal, recordando que todas las expresiones obtenidas hacen referencia tanto a espacios de señales de variable continua como de variable discreta con sus correspondientes álgebras. Aplicando propiedades adicionales como la actuación del operador sobre el mismo espacio ($v \equiv \tau$) y que el conjunto de funciones base sean autofunciones del sistema ($\eta \equiv \mu$), estas expresiones generales se reducen a las bien conocidas, ya que

$$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu') \quad (11.8)$$

y por tanto

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu). \quad (11.9)$$

Todos los resultados descritos en esta primera parte de la tesis han dado lugar a lo que hemos denominado GSST-v1d, como se veía en el organigrama de la Fig. 1.3.

En la segunda parte de la tesis se ha desarrollado una nueva versión de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas, GSST-v2, en la que se incluyen los **Espacios de Hilbert Equipados** (*Rigged Hilbert Spaces*, RHS). La inclusión de los RHS en los espacio de señal (ver Cap. 8) supone un gran avance en el desarrollo formal de la GSST, ya que da una explicación matemática rigurosa a muchos conceptos que quedaban en el aire en versiones anteriores. El principal de estos conceptos es el referente a **la unificación bajo un mismo marco de las funciones ordinarias y las distribuciones** o, más genéricamente, las funciones de norma infinita. Esto suponía un problema puesto que no deberían ser tratadas de la misma manera debido a sus características especiales, aunque en la práctica se hiciera. Por ejemplo, a la hora de tratar un producto escalar en que interviniesen distribuciones o funciones generalizadas, había que tener cuidado puesto que no se trataba de una integral de Riemann o Lebesgue, sino de una aplicación sobre otra función de la que se obtenía un número complejo. Los RHS vienen a formalizar, dentro de un mismo marco, estas particularidades. Para ello se ha pasado por la utilización de la notación de Dirac de bras y kets, que generalizan los conceptos de vectores, matrices y aplicaciones entre ellos, de manera que al juntar un bra con un ket se obtiene un bracket (corchetes en inglés), que resulta ser el signo del producto escalar. Esto hace que se relacione cada función ordinaria, función generalizada o distribución con un bra o un ket, de forma que al juntarlos se obtenga una aplicación de uno sobre otro. De esta manera cada señal se interpreta como el núcleo de un funcional, generalizando así todo tipo de funciones. Si ambos, bra y ket, son funciones ordinarias, esta aplicación se reduce al conocido producto escalar, mientras que, si interviene alguna función generalizada, no deja de ser la aplicación de un funcional sobre otra función, obteniendo así un número complejo, al igual que en el producto escalar. Esto hace que se generalice el concepto de producto escalar, pasando de ser una forma hermitiana positiva y no degenerada a un conjunto de funcionales, fijando una función núcleo, ya sea esta una función ordinaria o no. Sin embargo, se ha observado que la notación habitual de bras y kets se queda pequeña en la teoría de señales y sistemas, ya que, a pesar de ser una notación simplificada muy sencilla, al mismo tiempo hace que se pierda información muy importante. Es por eso que se han utilizado los conceptos de la notación de Dirac en cuanto a la consideración de funcionales, pero se ha seguido manteniendo la notación habitual de la GSST en cuanto a la denominación de funciones y conjuntos de funciones con sus variables reales y variables espectrales (o parámetros identificadores de funciones).

La construcción de los RHS sólo es necesaria en los espacios de dimensión infinita, ya que en los de dimensión finita no hay posibilidad de funciones generalizadas puesto que todo está bien definido (es importante notar que, en los casos habituales, todos los espacios de señal son de dimensión infinita salvo el caso de señales discretas periódicas). El proceso de construcción de los RHS implica generar un espacio de Hilbert \mathcal{H} y encontrar un subespacio denso $\Phi \subset \mathcal{H}$ en el que se encuentren funciones que cumplan una serie de requerimientos más concretos que las del propio espacio de Hilbert y que *dependerán de los operadores* que se vayan a utilizar en el problema a analizar *así como de las funciones base* que se quieran emplear para realizar el análisis espectral. A partir de la definición de Φ se construyen los espacios dual Φ' y antidual Φ^\times donde se encuentran los núcleos de los funcionales lineales y antilineales, respectivamente, sobre Φ . La estructura final de los RHS se compone de dos tripletas de la forma

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (11.10)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (11.11)$$

Se han construido varios casos particulares de espacios de Hilbert equipados para diferentes espacios de señal, mostrando cómo dicha construcción depende de los operadores que se utilicen en el problema a analizar.

También se ha estudiado la forma de *localizar los conjuntos de funciones periódicas dentro de los espacios duales de funciones no periódicas*.

Y finalmente, se han estudiado las relaciones entre las tripletas de los RHS de diferentes espacios a través de transformadas, comprobando como, dependiendo de la naturaleza de la base que define la transformada considerada $e(\tau; \mu)$, la transformación de funciones de un determinado subespacio de un RHS cae dentro de ese mismo subespacio si el parámetro espectral μ es de la misma naturaleza que la variable real τ , o en un subespacio equivalente del RHS definido para las funciones cuya variable sea de la misma naturaleza que μ , lo que hace que se puedan establecer diferentes relaciones entre los espacios de señal, generando isomorfismos entre ellos y llegando al resultado de que todos los espacios de señal de dimensión infinita son isomorfos y, por tanto, son el mismo con las mismas propiedades.

También se han llevado a cabo varios ejemplos de aplicación práctica de los RHS a distintos espacios y operadores, así como la interpretación de algún problema de mecánica cuántica desde el punto de vista de la GSST.

Estos resultados referentes a la descripción de los RHS han dado lugar a la versión GSST-v2, tal como se mostraba en el organigrama de la Fig. 1.3.

Los mencionados anteriormente son los resultados principales de esta tesis doctoral, siendo también muchos los resultados menores intermedios que se encuentran a lo largo del desarrollo de la misma. Todas las conclusiones intermedias se han recogido en las conclusiones asociadas a los capítulos más importantes de la tesis.

Con todo ello, se puede concluir que con esta tesis doctoral se ha generado una versión de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas (GSST) mucho más versátil, ya que engloba la posibilidad de análisis de una mayor cantidad de problemas y formaliza muchos conceptos, dándole, asimismo, la rigurosidad matemática que requiere.

Cabe destacar, a modo de ejemplo, que la nueva versión generalizada ha hecho que el borrador del libro que estaba en marcha¹ se esté replanteando desde el principio incluyendo ya desde el primer momento los RHS en combinación con la GSST, con las correspondientes implicaciones que ello conlleva.

¹E. Gago-Ribas, J. Heredia Juegas, “A general approach to Signals & Systems theory”, *Electromagnetics & Signal Theory Notebooks*. GR Editores SL. (www.greditores.com). Borrador disponible.

12. Líneas Futuras

La presente Tesis Doctoral parte como continuación del Proyecto Fin de Carrera *Análisis General de la Teoría de Señales y Sistemas para su Aplicación al Modelado de Problemas Físicos* [1], en la que se describían algebraicamente algunas transformadas de interés diferentes a las usuales. Puesto que la Teoría General de Señales y Sistemas (GSST) aborda los problemas físicos desde el punto de vista algebraico, el concepto de transformada es muy importante, puesto que describe cualquier señal de un cierto espacio en términos de una “colección específica de señales que juegan el papel de una base”. Además, el concepto de transformada está íntimamente ligado al de “análisis espectral” usado habitualmente en la resolución de cualquier problema físico. Asimismo esta línea se continuó con la Tesis de Máster *Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para el Análisis de Problemas Lineales No Invariantes*, [2], donde se analizaron teórica y gráficamente las características de los conjuntos de respuestas al impulso de sistemas lineales no invariantes en función de las propiedades de dicho sistema, y se llevó a cabo una primera versión del Análisis Espectral Generalizado, de forma que se permitiera encontrar las relaciones entre las señales de entrada y de salida de un sistema lineal en el dominio espectral bajo cualquier transformada. En la presente Tesis, y tal como se ha resumido en el Cap. 11 sobre las conclusiones generales, se ha avanzado en el desarrollo de la GSST, con nuevos resultados como los Cambios de Base, una nueva versión del Análisis Espectral Generalizado para sistemas lineales operando entre espacios de señal diferentes o la nueva versión mucho más completa basada en la incorporación de los Espacios de Hilbert Equipados (RHS).

Todos los resultados descritos previamente abren nuevas posibilidades de análisis, algunas directamente relacionadas con los antecedentes de la tesis y otras nuevas que han ido surgiendo al profundizar en la GSST. Se resumen a continuación las principales líneas de investigación futuras, algunas de las cuales ya están en marcha. Dichas líneas se separan en dos grupos claramente identificados: los que tienen que ver directamente con nuevos estudios de la teoría de señal, y los que tienen que ver con la aplicación de la GSST a la resolución de problemas físicos (problemas en electromagnetismo y acústica en nuestro caso particular), además de las implementaciones de dichos resultados teóricos en la herramienta software Signals & Systems Theory.

12.1. Desarrollo de la teoría de señales y sistemas

1. Un primer punto de especial importancia es el estudio riguroso de **cuándo una cierta definición integral puede ‘asimilarse’ a una combinación lineal** en variable continua. Este aspecto ya está siendo estudiado actualmente, teniéndose para ello en cuenta definiciones diferentes a las integrales de Riemann o de Lebesgue habituales (por ejemplo, el Análisis No Estandar en términos de la integral de Henstock-Kurzweil).
2. En relación con los **conjuntos de funciones que juegan el papel de una base**, se podría plantear la relación entre estos conjuntos cuando pasan **a través de un sistema lineal**, estudiando si el conjunto resultante es también una base en el espacio de llegada o no, indicando cuáles deberían ser las condiciones para que eso sucediera y, en su caso, qué características tendría dicha base. Uno de los casos conocidos por los que se podría empezar es aquél en el que el espacio de partida y de llegada son el mismo y el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema. Es sabido que a la salida de dicho sistema se obtendría $\mathbf{F}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu)$, lo cual es de suponer que también sea una base en el espacio de llegada.

3. En relación con esto último, muchos de los desarrollos que se han realizado a lo largo de la presente Tesis han tenido en cuenta que el conjunto de funciones base que se utilizaban eran ortogonales y todas con la misma norma, es decir, $\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle = A\tilde{\delta}(\mu - \mu')$. Una de las cuestiones que cabría plantearse es cómo se podrían generalizar aún más estos resultados cuando se considere como **base un conjunto de funciones que no sean ortogonales** y que además, cada una de ellas posea una norma diferente, es decir, $\|e(\tau; \mu)\|^2 = A(\mu)$. Como se ha mostrado anteriormente, si un conjunto ortogonal de funciones base son autofunciones de un sistema, el conjunto de funciones de salida no serán, en general, de la misma norma, ya que $\langle \lambda(\mu)e(\tau; \mu), \lambda(\mu')e(\tau; \mu') \rangle = |\lambda(\mu)|^2\tilde{\delta}(\mu - \mu')$, aunque en este caso, sí serán ortogonales. La idea inicial consistiría en desarrollar un proceso de ortogonalización similar al de **Gram-Schmidt** pero para conjuntos de infinitos elementos, obteniendo un conjunto que sea ortogonal y cuyos elementos posean la misma norma, de forma que a partir de él ya se puedan aplicar los resultados conocidos.
4. Otro de los trabajos que resultaría de especial relevancia sería el de realizar un **cambio en la definición del álgebra en el espacio** correspondiente. Hasta ahora todos los estudios se han realizado definiendo un álgebra en la que el cuadrado de la norma representaba la energía de la señal y, a partir de ésta, se encontraba el producto escalar que inducía dicha norma y la distancia inducida por ésta, dando lugar a la métrica habitual. Puede ser interesante analizar lo que ocurriría cuando se define un álgebra diferente de la usual o incluso cuando se trabaja desde un álgebra en el que el producto escalar, la norma y la distancia no vengan inducidas unas por otras. Esto conllevaría redefinir el problema desde el principio, algo que está contemplado en la generalización asociada a la GSST. Este problema sería de gran interés a la hora de abordar la resolución de problemas físicos (referirse a la Secc. 12.2) donde el parámetro fundamental de ‘medida’ no fuese la energía. En este sentido, un cambio de definición en el álgebra inicial resultaría en un cambio total en la descripción y resolución de la teoría de funciones de Green, por ejemplo. A su vez, sería necesario revisar la teoría de distribuciones y en particular la definición de la $\tilde{\delta}$ en la nueva álgebra.
5. Con respecto a los espacios de Hilbert equipados (RHS), cuyo análisis y adecuación a la GSST se ha iniciado en esta tesis doctoral, continuar con su estudio tratando de **encontrar diferentes tipo de RHS que se generen a partir de diversos operadores** y buscar las relaciones entre ellos a partir de distintas transformadas vistas como un caso particular de la transformada generalizada descrita en la GSST.
6. Un punto muy importante referente al análisis de sistemas es el de poder extender la GSST al **análisis de sistemas no lineales**. Existen ya varias posibilidades en mente que se podrían desarrollar. Por un lado, se pretendería encontrar un conjunto de funciones que pudiera definir un operador no lineal \mathbf{F} de manera única, aunque este conjunto, en general, vaya a depender también de la función de entrada del sistema, por ejemplo, en variable continua, $N(x; x'; f(x'))$. Este conjunto podría generalizar también los operadores lineales, ya que, en este caso, este conjunto de funciones se reduciría al producto $N(x; x'; f(x')) = f(x')h(x; x')$, donde $h(x; x')$ sería el conocido conjunto de respuestas al impulso del sistema lineal. Otra posibilidad, esbozada en la estancia realizada en la Universidad Nacional de Rosario (UNR) en colaboración con el Prof. Pedro Marangunic de la Facultad de Ciencias Exactas, consistiría en la linealización a tramos del operador no lineal, considerando el espacio de operadores como un espacio de Banach y buscando una partición adecuada del dominio del operador, de manera que se pueda obtener una representación lineal, para cada tramo, del operador no lineal. Existe alguna referencia que trata una clase particular de operadores no lineales, [101], que puede servirnos como referencia para el análisis que intentamos realizar dentro de la GSST. El concepto final debería ser analizar si es posible encontrar “representaciones integrales de operadores no lineales” que se redujeran a las

“representaciones integrales de los operadores lineales” bajo la propiedad de linealidad citada.

7. Otra línea de gran importancia para el avance de la GSST es la de considerar espacios de **funciones de varias variables**, es decir funciones N -dimensionales, de manera que no dependan sólo de una variable. Este avance sería de gran importancia puesto que la gran mayoría de los problemas físicos asociados a magnitudes espaciales dependen de varias variables: una, si sólo se considera una variación lineal o si sólo existiera una variación temporal; dos, en el caso de de funciones que dependan de la posición en una recta y el tiempo, o de funciones que varíen en un plano; tres, en el caso de funciones con variación espacial, o con variación superficial y temporal a la vez; y cuatro, si se considera, de la forma más general, una variación espacial y temporal a la vez.
8. Por otro lado, todos los desarrollos realizados hasta el momento han sido llevados a cabo para variable discreta o real. Es por esto que una de las principales líneas futuras de investigación en esta temática de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas es realizar una profundización mayor en este aspecto. Uno de los objetivos principales de estudio es llegar a los **espacios de funciones de variable compleja**, es decir, $e(\tau; \mu)$, con $\tau \in \mathbb{C}$ y/o $\mu \in \mathbb{C}$. Algunos casos particulares que se enmarcarían dentro de esta generalización serían el análisis riguroso de transformadas de variable compleja (por ejemplo la transformada de Laplace, $e(x; \mathbf{s})$ con $\tau \equiv x \in \mathbb{R}$ y $\mu \equiv \mathbf{s} \in \mathbb{C}$, o la transformada Z, $e(n; \mathbf{z})$ con $\tau \equiv n \in \mathbb{Z}$ y $\mu \equiv \mathbf{z} \in \mathbb{C}$), así como el problema “dual” de complexificación de la variable real (uno de los principales antecedentes que dieron lugar a estos trabajos, referirse a los puntos 4, 5 y 7 de la Secc.1.2 del capítulo introductorio y al organigrama de la Fig. 1.2), por ejemplo: $e(\mathbf{z}; \xi)$ con $\tau \equiv \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ y $\mu \equiv \xi \in \mathbb{R}$.

Este campo lleva una serie de interrogantes necesitados de una amplia investigación para darles respuesta como son: ¿cómo se define un álgebra en variable compleja?, ¿por qué los coeficientes de la transformada de Laplace no son el producto escalar de la señal original sobre los elementos de la base?, ¿como se interpreta una combinación lineal en variable compleja?, ¿por qué para reconstruir una señal no es necesario utilizar todas las funciones base en la transformada de Laplace? Estos aspectos son sumamente importantes si se pretende entender y generalizar el análisis de problemas físicos “complexificados”, por ejemplo, espacio y tiempo complejos, [9], [12]-[19].

9. El hecho de complexificar la variable real del problema llevaría también a la problemática de abordar la **teoría de distribuciones en variable compleja** y su posible interpretación en términos de los RHS, trabajos que resultarían de gran importancia por su relación directa con la aplicación de la GSST a la parametrización de problemas físicos, Secc. 12.2.

Los estudios citados en los puntos 1, 6 y 7 forman parte de los análisis que se están llevando a cabo: (i) en una nueva tesis doctoral realizada por Jose Luis Ganoza Quintana dentro del Programa de Doctorado TICRM y (ii) dentro de las tareas del paquete de trabajo WP1 del proyecto “iScat”¹, del cual el doctorando forma parte. Asimismo, ambos trabajos están íntimamente relacionados con los trabajos a desarrollar en la Secc. 12.2.

12.2. Aplicación de la GSST al análisis y parametrización de problemas físicos

1. Todo el análisis referente a la Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas conecta directamente con la obtención de una **teoría de funciones de Green generalizada**,

¹“Técnicas de ‘imaging’ mediante problema inverso de dispersión: nuevos algoritmos y técnicas de medida (iScat).” Proyecto financiado el Ministerio de Ciencia e Innovación con Ref. TEC2011-24492, desde 01-01-2012 hasta 31-12-2014. Investigador Principal: Fernando Las-Heras.

tanto en su representación real como espectral. Esta teoría debería ser de vital importancia para poder generalizar la formulación, el análisis y la resolución de problemas físicos, inicialmente en variable real.

La formulación de una teoría de funciones de Green generalizada daría lugar a **analizar y parametrizar problemas físicos concretos** y enlazaría directamente con algunos problemas prácticos de gran relevancia entre los que cabe destacar:

- a) Su relación con la GSST N -dimensional (punto 7 de la Secc. 12.1).
 - b) La parametrización de *problemas directos* (en nuestro caso particular en las áreas del electromagnetismo y la acústica) en términos de la GSSTv1-d y/o la GSSTv2. Esto conllevaría el estudio de: (i) regularizar la definición de un problema desde el comienzo, es decir, definiendo claramente los diferentes espacios de señal involucrados en el problema (en particular en el caso de la GSSTv2 que tiene en cuenta los RHS); (ii) el análisis particular de sistemas definidos por operadores diferenciales junto con una serie de condiciones de contorno. Este estudio resultaría muy importante en la práctica dado que en realidad, cuando se habla del cálculo de la función de Green, se está hablando de la resolución de un conjunto infinito de respuestas al impulso (y por tanto, un conjunto infinito de funciones de Green) junto con su “problema de Green” asociado; (iii) directamente relacionado con el problema anterior, se podría estudiar, en términos de la teoría de señal generalizada, el problema de “traducir” las condiciones de contorno de un problema concreto a las condiciones de contorno referidas al problema de Green asociado –nótese que los casos que se estudian actualmente están limitados a ciertas condiciones de contorno muy particulares y a ciertos operadores diferenciales también muy particulares–.
 - c) Dichos análisis deberían llevar a poder realizar una clasificación clara y rigurosa de algunos subespacios de operadores (vistos como subconjuntos dentro del espacio general de operadores) definidos como el par “operadores diferenciales + condiciones de contorno”.
 - d) El análisis general de *problemas inversos* (en nuestro caso particular, de nuevo, en las áreas del electromagnetismo y la acústica) y su relación con el análisis de los problemas directos desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas. Estos estudios podrían dar lugar a la generalización del análisis de problemas físicos donde los problemas directos o inversos serían vistos como casos particulares de una misma teoría general.
2. La obtención de una teoría de funciones de Green generalizada en variable real conllevaría posteriormente su traducción a una **teoría de funciones de Green en variable compleja**. Este paso estaría relacionado directamente con los posibles resultados que se obtengan de los trabajos de investigación descritos en el punto 8 de la Secc. 12.1.
 3. Si los análisis descritos en el punto 8 de la Secc. 12.1 y en el punto 2 de la presente sección fuesen factibles, esto abriría las puertas a poder realizar un análisis riguroso de los resultados que se obtienen bajo la “**complexificación**” de **coordenadas reales a coordenadas complejas**, [20]-[47]. Nótese que en este sentido se plantéan ahora mismo interrogantes de gran importancia, muchos de ellos relacionados en gran medida con la *teoría de distribuciones en variable compleja* (a modo de ejemplo, remarcar que, en variable real, el conjunto de respuestas al impulso asociado a un cierto operador requiere de una definición única de la distribución delta de Dirac, mientras que, en todos los problemas que se han estudiado hasta el momento, a la hora de definir una cierta delta de Dirac en variable compleja, han dado lugar a definiciones de la misma dependientes del sistema analizado –propiedad totalmente opuesta a la que se utiliza habitualmente en variable real–). En este

sentido, el número de interrogantes que están abiertos para su estudio es realmente extenso, y las respuestas a ellos requieren no sólo de una GSST cada vez más rigurosa sino también de la resolución de problemas físicos concretos que “realimenten” los posibles refinamientos a realizar en las sucesivas versiones de la GSST que vayan surgiendo.

12.3. Implementación de los resultados teóricos en el software SST

Finalmente, todos estos resultados teóricos se pretenden **implementar en el programa Signals & Systems Theory (SST)** que se desarrolla en paralelo a los estudios teóricos. Este software trata de ser una herramienta docente que permita entender de forma general la GSST desde el punto de vista algebraico. Una implementación adecuada de los cambios de base y el análisis espectral generalizado podría abarcar una nueva versión de este software. Por otro lado, la implementación de los RHS supondría, no sólo otra nueva versión, sino también una remodelación completa del programa, redefiniendo los espacios de señal desde el principio, teniendo en cuenta el espacio de Hilbert inicial, los posibles subespacios densos de éste, así como sus espacios duales y antiduales, todos éstos dependientes del sistema a analizar así como del conjunto de funciones base que definan la transformada que se quiera utilizar para realizar el análisis espectral. La versión actual de esta herramienta software cuenta ya con su versión *v5.0.*, [89], [90], [1], [93], [97]. Se espera que las futuras versiones pueden ser útiles también no sólo a nivel docente sino también a nivel de investigación, especialmente aquéllas que tengan que ver con espacios de señales N -dimensionales y con operadores diferenciales en variables real o compleja.

13. General Conclusions

The results developed in this thesis have allowed to extend very significantly the current version of the **Generalized Signals and Systems Theory (GSST)**.

First we have obtained several simple preliminary results (see Chap. 3), but very useful for more complex later developments, among which include the demonstration that a set of orthogonal functions are linearly independent or the relationship between the linear combination and the scalar product in a signal space, very important result since it relates the concepts of a vector space (sums and linear combinations) with a Hilbert space (scalar products). These results are proven for infinite dimension but also can be particularized to the known cases of finite dimension.

In the first part of this thesis, the concept of **Basis Change** or **Generalized Transform Change (GTC)** in signal spaces has been addressed (Chap. 4). This concept allows to generalize the relationship between the coefficients of one signal represented in different basis. In other words, it allows to explain in a generalized way the relationship between different transforms of the same signal. What in the finite dimensional space is easy as it is to find a matrix for the basis change, in infinite dimensional spaces is not so because, first, it is not possible to work with matrices. Taking as a condition that the sets of function which play the role of a base in space, $e(\tau; \mu)$ and $\tilde{e}(\tau; \mu')$, (and therefore define each transform) are orthogonal, general expressions of sets of functions that allow the basis change or the transform change have been found. These expressions are

$$\varepsilon(\mu'; \mu) = \frac{1}{A} \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle, \quad (13.1)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle. \quad (13.2)$$

These sets of functions generalize the known matrices of base change in finite dimension, proving that they are reduced to them when working in such spaces. The final equations for the basis changes are described as

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{LC}_{\mu} [\alpha(\mu) \varepsilon(\mu'; \mu)], \quad (13.3)$$

$$\alpha(\mu) = \mathbf{LC}_{\mu'} [\tilde{\alpha}(\mu') \tilde{\varepsilon}(\mu; \mu')], \quad (13.4)$$

where $\alpha(\mu)$ are the coefficients of a signal $a(\tau)$ in the base $e(\tau; \mu)$ and $\tilde{\alpha}(\mu')$ the coefficients of the same signal $a(\tau)$ in the base $\tilde{e}(\tau; \mu')$. The curious thing about these sets of functions for base change is that also allow relate basis having different cardinality within a same signal space. This may seem surprising since all basis of the same space should have the same cardinality, however, some set of functions which not strictly meet all the conditions to be a base, but can play that role, are also taken into account, as, for example, Dirac delta distributions (to this type of sets we call ‘pseudobasis’). These sets of functions for base change also have another feature, and that is to perform the change for the same signal described in different spaces, such as, for example, periodic signals, which can be seen within the space of periodic functions or within a more general space. Although the definition of scalar product in both spaces will be different, the sets of function (13.1) and (13.2) also allow to perform that base change and, in this case, also the space change. The results associated with the basis changes and space

changes are demonstrated rigorously introducing the rigged Hilbert spaces (RHS) as can be seen in Chaps.8 and 9.

Also in the first part of the thesis a new version of the **Generalized Spectral Analysis** (GSA) has been developed (see Chap. 5). This concept involves, not only the characteristics of the signal spaces, but also linear operators come into play. The general concept of spectral analysis corresponds to analyzing the output signal of a system in relation to the input one in the spectral domain, it means, in the domain of the coefficients once a base of the space is chosen. The classical spectral analysis takes into account that this set of basis functions are eigenfunctions of the system, $e(\tau; \mu) \in \text{Eig}\{\mathbf{F}\}$, so that their transformation through the system will be themselves multiplied by the eigenvalues, $\mathbf{F}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu) e(\tau; \mu)$. Thus, the spectral analysis is reduced to the product of the coefficients of the input signal by these eigenvalues, $\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu)$. This type of analysis is widely used since it is that which results when analyzing any linear invariant system under the Fourier transform, as complex exponentials are always eigenfunctions of such systems; but this concept does not allow to generalize the analysis of linear non-invariant systems under the Fourier transform, such as amplitude modulation or most of the problems described in spatial magnitudes. In [86] some initial expressions for the spectral analysis of linear non-invariant system under the Fourier transform were found (integral version of the spectral version of an operator, ‘parallel’ to the integral version of an operator in the real domain in terms of sets of impulse responses) and in [2] a first version of the generalized spectral analysis allowing analyzing any linear system in the spectral domain under any kind of transform was developed, but provided that the operator which describes the system acts only on the same space. In this thesis a *more general expression* that allows *the operator acting between different signal spaces* and the spectral representation is performed *under different transforms in starting space $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ and the arrival one $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$* has been developed. Thus, the concept of spectral analysis of a system is generalized, not understanding it in the sense of the eigenvalues (spectrum of the operator) but as the relationship between the coefficients $\alpha(\mu)$ of the input signal $a(\tau)$ to a linear system $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ in the base $e(\tau; \mu)$ and the coefficients $\beta(\eta)$ of the output signal $b(v)$ in the base $\hat{e}(v; \eta)$. The general expression of the generalized spectral analysis is

$$\beta(\eta) = \mathbf{A} \mathbf{L} \mathbf{C}_{\mu'} [\alpha(\mu') \mathbf{H}_*(\eta; \mu')], \quad (13.5)$$

very important expression because we can say that, formally, the generalized spectral analysis is conceptually similar to the analysis of systems in the real domain,

$$b(v) = \mathbf{L} \mathbf{C}_{\tau'} [a(\tau') h(v; \tau')], \quad (13.6)$$

being

$$\mathbf{H}_*(\eta; \mu') = \frac{1}{AA} \langle \langle h(v; \tau'), \hat{e}(v; \eta) \rangle_v, e^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'} \quad (13.7)$$

and $h(v; \tau') = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} [\tilde{\delta}(\tau - \tau')]$ are the set of impulse responses of the linear system, recalling that all the expressions obtained refers to both signal spaces of continuous and discrete variable, with their corresponding algebras. Applying additional properties such as the operator acting on the same space ($v \equiv \tau$) and the set of basis functions are eigenfunctions of the system ($\eta \equiv \mu$), these general expressions reduce to the well known ones because

$$\mathbf{H}_*(\mu; \mu') = \frac{1}{A} \lambda(\mu) \tilde{\delta}(\mu - \mu') \quad (13.8)$$

and therefore

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu). \quad (13.9)$$

All results described in this first part of the thesis have led to what we have called GSST-v1d, as seen in the organization chart of the Fig. 1.3.

In the second part of the thesis a new version of the Generalized Signals and Systems Theory, GSST-v2, has been developed, where *Rigged Hilbert Spaces* (RHS) are included. The inclusion of the RHS in the signal spaces (see Chap. 8) represents a great progress in the formal development of GSST because it gives a rigorous mathematical explanation of many concepts that were up in the air in previous versions. The main of these concepts is related to **the unification of the ordinary functions and distributions** or, more generally, functions of infinite norm, **within the same framework**. This was a problem because they should not be treated in the same way because of their special characteristics, although in practice it was done. For example, when trying with an inner product intervening distributions or generalized functions, it had to be careful because it was not a Riemann or Lebesgue integral, but an application over another function obtaining a complex number. The RHS come to formalize, within a same framework, these peculiarities. It has gone through the use of Dirac notation of bras and kets, which generalize the concepts of vectors, matrices and applications between them, so that, to put together a bra with a ket one bracket is obtained, which turns out to be the sign of the scalar product. This makes each ordinary function, generalized function or distribution could be related to a bra or a ket, so that an application of one over another is obtained once they are put together. Thus each signal is interpreted as the kernel of a functional, generalizing all kinds of functions. If both bra and ket are ordinary functions, this application reduces to known scalar product, whereas, if involved some generalized function, it is still an application of a functional over another function, obtaining a complex number as well as the scalar product does. This generalizes the concept of scalar product, from a positive and non-degenerate hermitian form to a set of functionals, setting a kernel function, being an ordinary or a generalized function. However, it has been observed that the usual notation of bras and kets falls short for the signals and systems theory, because, despite being a simplified notation, at the same time some important information is lost. That is why the concepts of Dirac notation concerning the consideration of functional are used, but it has continued to maintain the usual notation of the GSST regarding the denomination of functions and sets of functions with their real and spectral variables (or identifiers parameters of functions).

The construction of the RHS is only required in infinite dimensional spaces, as in the finite dimensional ones there is no possibility of generalized functions since everything is well defined (it is important to note that, in the usual case, all signal spaces are infinite dimensional except for periodic discrete signals). The process of constructing the RHS involves generating a Hilbert space \mathcal{H} and finding a dense subspace $\Phi \subset \mathcal{H}$ in which functions that satisfy a number of more specific requirements than the ones of the Hilbert space and that *will depend on the operators* that will be used to analyze the problem *as well as on the set of basis functions* that will be used to perform the spectral analysis may be located. From the definition of Φ , the dual Φ' and antidual Φ^\times spaces are constructed, where the linear and antilinear functional kernels, respectively, over Φ , are located. The final structure of the RHS consists of two triplets

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi', \quad (13.10)$$

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (13.11)$$

Several particular cases of rigged Hilbert spaces for different signal spaces have been built, showing that this construction depends on the operators that are used to analyze the problem.

The way for *locating the sets of periodic functions within the dual spaces of non-periodic functions* has also been studied.

And finally, the relationship between the RHS triplets of different spaces through transforms have been studied, checking as, depending on the nature of the base which define the considered transform $e(\tau; \mu)$, the transformation of functions of a particular RHS subspace falls within the same subspace if the spectral parameter μ is of the same nature that the real variable τ , or in

an equivalent RHS subspace defined for functions whose variable is of the same nature as μ , which means that it is possible to establish different relationships between the signal spaces, generating isomorphisms between them and coming to the result that all infinite dimensional signal spaces are isomorphic and, therefore, they are the same with the same properties.

Several examples of practical application of the RHS to different spaces and operators have also been carried out, as well as the interpretation of a problem on quantum mechanics from the point of view of the GSST.

These results concerning the description of the RHS have led to GSST-v2 version, as was shown in the organization chart of the Fig. 1.3.

The above are the main results of this thesis, being also many minor intermediate results that are along of the development of it. All intermediate conclusions are reflected in the conclusions associated with the most important chapters of the thesis.

As a result, it can be concluded that, with this doctoral thesis, a version of the Generalized Signals and Systems Theory (GSST) much more versatile has been generated, as it includes the possibility of analysis of a large amount of problems and formalizes many concepts, also giving the mathematical rigor required.

It should be noted, for example, that the new generalized version has made the draft of the book which was launched¹ is being rethinking from the beginning, including from the first moment the RHS theory in combination with GSST, with the corresponding implications that entails.

¹E. Gago-Ribas, J. Heredia Juesas, "A general approach to Signals & Systems theory", *Electromagnetics & Signal Theory Notebooks*. GR Editores SL. (www.greditores.com). Draft available.

14. Future Lines

The present PhD Thesis is a continuation of the Final Degree Project *Análisis General de la Teoría de Señales y Sistemas para su Aplicación al Modelado de Problemas Físicos* [1], in which some interesting different transformations to the usual ones are described algebraically. Since the Generalized Signals and Systems Theory (GSST) addresses physical problems from the algebraic point of view, the concept of transformation is very important, as it describes any signal of a certain space in terms of a “specific collection of signals that play the role of a base”. Furthermore, the concept of transformation is closely linked to that of “spectral analysis” commonly used in the resolution of any physical problem. Also, this line was continued with the Master Thesis *Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para el Análisis de Problemas Lineales No Invariantes*, [2], where the characteristics of the sets of impulse responses of linear not invariant systems were analyzed theoretically and graphically based on the properties of the system, and a first version of the Generalized Spectral Analysis was carried out, so that it was allowed to find the relationships between the input and output of a linear system in the spectral domain under any transformation. In this thesis, and as was summarized in Chap. 13 about the general conclusions, a progress has been made in the development of the GSST, with new results as the Generalized Transform Changes (GTC), a new version of the Generalized Spectral Analysis (GSA) for linear systems operating between different signal spaces, or the new and more complete version based on the incorporation of the Rigged Hilbert Spaces (RHS).

The studies and results obtained in this thesis open up new possibilities for analysis, some directly related to the background of the thesis and new ones have emerged when deepening in the GSST. The main future lines of research, some of which are already in place, are summarized. These lines are separated into two groups clearly identifiable: those that deal directly with new studies of the signal theory, and those that deal with the application of GSST to the resolution of physical problems (electromagnetics and acoustics problems in our case), besides the implementations of such theoretical results in software tool *Signals & Systems Theory*.

14.1. Development of the signals and systems theory

1. One point of particular importance is the rigorous study of **when a certain integral definition can be ‘assimilated’ to a linear combination** in continuous variable. This aspect is currently being studied, taking into account different definitions from the usual Riemann or Lebesgue integrals (for example, the Non-standard Analysis in terms of the Henstock-Kurzweil integral).
2. In connection with the **set of functions that play the role of a base**, the relation between these sets when they pass through a linear system could be proposed, studying whether the resulting set is also a base in the arrival space or not, indicating what should be the conditions for that to happen and, if so, what characteristics such base would have. One of the known cases which could start is that wherein the departure and arrival spaces are the same and the set of basis functions are eigenfunctions of the system. It is known that, at output of the system, $\mathbf{F}[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu)$ is obtained, therefore presumably also is a base in the arrival space.
3. Regarding the latter, many of the developments that have been carried out along this thesis have been taken into account that the set of basis functions used were orthogonal and all with the same norm, it is $\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle = A\tilde{\delta}(\mu - \mu')$. One of the issues to

be asked is how could generalize these results further, when **considering as a base a set of functions that are not orthogonal** and furthermore, each one holds a different norm, it means, $\|e(\tau; \mu)\|^2 = A(\mu)$. As shown above, if an orthogonal set of basis functions are eigenfunctions of a system, the set of output functions will not have, in general, the same norm. since $\langle \lambda(\mu) e(\tau; \mu), \lambda(\mu') e(\tau; \mu') \rangle = |\lambda(\mu)|^2 \tilde{\delta}(\mu - \mu')$, although in this case, they will be orthogonal. The initial idea would be to develop an orthogonalization process similar to that of **Gram-Schmidt**, but for sets of infinite elements, obtaining a set that is orthogonal and whose elements have all the same norm, so that from it the known results can be applied.

4. Another work that would be of particular relevance would be to make a **change in the definition of algebra** in the corresponding space. Up to now, all studies have been carried out defining an algebra in which the square of the norm represented the energy of the signal and, from this, the inner product which induces such norm and the distance induced by it were found, leading the usual metric. It may be interesting to analyze what would happen when a different algebra from the usual is defined, or even when working with an algebra in which the inner product, the norm and distance do not come induced by each other. This would involve redefining the problem from the beginning, which is covered by the generalization associated with the GSST. This problem would be of great interest when addressing the resolution of physical problems (refer to Sect. 14.2) where the fundamental parameter of ‘measurement’ was not the energy. In this sense, a change in the initial algebraic definition would result in an overall change in the description and resolution of the Green’s functions theory, for example. At the same time, it would be necessary to review the theory of distributions and, in particular, the definition of the $\tilde{\delta}$ in the new algebra.
5. Regarding the rigged Hilbert spaces (RHS), whose analysis and adequation to the GSST has been begun in this thesis, to continue its study trying to **find different type of RHS generated from various operators** and find the relations between them from different transformations viewed as a particular case of the generalized transform described in the GSST.
6. A very important point concerning the analysis of systems is to be able to extend the GSST to the **analysis of nonlinear systems**. There are several possibilities in mind that could be developed. On the one hand, an attempt to find a set of functions that could define a nonlinear operator \mathbf{F} in a unique way, although this set, in general, will also depend on the input function of the system, for example, in continuous variable, $N(x; x'; f(x'))$. This set could also generalize the linear operators, since, in this case, this set of functions is reduced to the product $N(x; x'; f(x')) = f(x') h(x; x')$, where $h(x; x')$ would be the known set of impulse responses of the linear system. Another possibility, outlined in the stay at the National University of Rosario (UNR) in collaboration with Prof. Pedro Marangunic of the Faculty of Exact Sciences, consist of a piecewise linearization of the nonlinear operator, considering the operators space as a Banach space and looking for a suitable partition of the domain of the operator, so as to obtain a linear representation, for each section, of the nonlinear operator. There is some reference that deal with a particular class of nonlinear operators, [101], which can serve as reference for the analysis we tried to carry out within the GSST. The final concept should be to consider whether it is possible to find “integral representations of non-linear operators” that were reduced to “integral representations of linear operators” under the property of linearity.
7. Another line of great importance for the advancement of GSST is to consider spaces of **several variables functions**, it is, N -dimensional functions, so that they are not one variable dependent only. This development would be of great importance since the majority

of physical problems associated with spatial magnitudes depend on several variables: one, if only considered a linear variation or if there were only a temporal variation; two, in the case of functions that depend on the position along a line and time, or functions that vary in a plane; three, in the case of spatial variation functions, or both surface and temporal variation; and four, in the most general form, if a spatial and temporal variation are considered simultaneously.

8. On the other hand, all the developments made so far have been carried out for discrete or real variable. That is why one of the main future research lines in this field of the Generalized Signals and Systems Theory is to go more deeply into this point. One of the main objectives is to reach the study of the **spaces of complex variable functions**, it means, $e(\tau; \mu)$, with $\tau \in \mathbb{C}$ and/or $\mu \in \mathbb{C}$. Some particular cases would be framed within this generalization would be rigorous analysis of complex variable transforms (e.g. the Laplace transform, $e(x; \mathbf{s})$ with $\tau \equiv x \in \mathbb{R}$ and $\mu \equiv \mathbf{s} \in \mathbb{C}$, or the Z transform, $e(n; \mathbf{z})$ with $\tau \equiv n \in \mathbb{Z}$ and $\mu \equiv \mathbf{z} \in \mathbb{C}$), as well as the “dual” problem of complexification of the real variable (one of the main background which led to this work, refer to the points 4, 5 and 7 of the Sect. 1.2 of the introductory chapter and to the organization chart of the Fig. 1.2), for example: $e(\mathbf{z}; \xi)$ with $\tau \equiv \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ and $\mu \equiv \xi \in \mathbb{R}$.

This field carries a series of questions in need of extensive research to answer them, as: How an algebra is defined in complex variable?, Why the coefficients of the Laplace transform are not the scalar product of the original signal over the elements of the base?, How a linear combination is interpreted in complex variable?, Why to reconstruct a signal is not necessary to use all basis functions in the Laplace transform? These issues are extremely important if it is wanted to understand and generalize the analysis of “complexified” physical problems, for example, complex space and time, [9], [12]-[19].

9. The fact of complexifying the real variable of the problem would also lead to address the **theory of distributions in complex variable** and its possible interpretation in terms of the RHS, works that would be of great importance for their direct relevance with the application of the GSST to the parameterization of physical problems, Sect. 14.2.

The studies cited in points 1, 6 and 7 are part of the analysis that are being carried out: (i) in a new doctoral thesis by Jose Luis Quintana Ganoza within the Doctoral Program TICRM and (ii) within the tasks of the work package WP1 of project “iScat”¹, of which the doctoral student is taking part. Also, both works are closely related to the work to be developed in Sect. 14.2.

14.2. Application of the GSST to the analysis and parameterization of physical problems

1. All analyzes concerning the Generalization of the Signals and Systems Theory directly connects with obtaining a **generalized Green’s functions theory**, both in real and spectral representation. This theory should be of vital importance to generalize the formulation, analysis and resolution of physical problems, initially in real variable.

The formulation of a generalized Green’s functions theory would lead to **analyze and parameterize specific physical problems** and would link directly with some practical problems of great importance, among which include:

- a) Its relationship with the N -dimensional GSST (point 7 of the Sect. 14.1).

¹“Inverse scattering techniques for ‘imaging’: new approaches and measurement techniques (iScat).” Project funded by the Spanish Ministry of Science and Innovation with Ref. TEC2011-24492, 2012-01-01 to 2014-12-31. Head Researcher: Prof. Fernando Las Heras Andrés.

- b) The parameterization of *direct problems* (in our case in the electromagnetics and acoustics fields) in terms of the GSSTv1-d and/or GSSTv2. This would involve the study of: (i) regularize the definition of a problem from the beginning, i.e., clearly defining the different signal spaces involved in the problem (particularly in the case of GSSTv2 that takes into account the RHS); (ii) the particular analysis of systems defined by differential operators together with a set of boundary conditions. This study will be very important in practice because in reality, when talking about the calculation of the Green's function, it is talking about the resolution of an infinite set of impulse responses (and therefore, an infinite set of Green's functions) with its associated "Green's problem"; (iii) directly related to the previous problem, it could be considered, in terms of the generalized signal theory, the problem of "translating" the boundary conditions of a particular problem to the boundary conditions referred to the associated Green's problem –note that the cases that are currently being studied are limited to very particular boundary conditions and also to very specific differential operators–.
 - c) Such analyzes should lead to make a clear and rigorous classification of some subspaces of operators (viewed as subsets within the overall operators space) defined as the pair "differential operators + boundary conditions".
 - d) The general analysis of *inverse problems* (in our particular case, again, in the electromagnetics and acoustics fields) and its relationship with the analysis of the direct problems from the point of view of the signals and systems theory. These studies could lead to the generalization of the analysis of physical problems where the direct and inverse problems would be seen as particular cases of a general theory.
2. The obtention of a generalized Green's functions theory in real variable would lead to later translation into a **Green's functions theory in complex variable**. This step would be directly related to the possible results obtained from the research works described in point 8 of Sect. 14.1.
 3. If the analyzes described in point 8 of Sect. 14.1 and the point 2 of this section were feasible, this would open the doors to be able to perform a rigorous analysis of the results obtained under the "**complexification**" of **real coordinates to complex coordinates**, [20]-[47]. Note that, in this sense, some questions of great importance are now posed, many of which largely related to the *theory of complex variable distributions* (as examples, note that, in real variable, the set of impulse response associated with a certain operator requires a unique definition of the Dirac delta distribution, whereas, in all the problems that have been studied so far, when defining a complex variable Dirac delta, have given rise to definitions of the same dependent on the system analyzed –completely opposite property that is commonly used in real variable–). In this sense, the number of questions that are open for study is really extensive, and the answers to them require, not only an increasingly rigorous GSST, but also the resolution of specific physical problems, "feeding back" the possible refinements to performed in the successive versions of the emerging GSST.

14.3. Implementation of the theoretical results in the software SST

Finally, all these theoretical results are intended to be implemented in the software tool **Signals & Systems Theory (SST)** that is being developed in parallel to the theoretical studies. This software tries to be an educational tool for the understanding, in a general way, of the GSST from the algebraic point of view. A suitable implementation of the Generalized Transform Changes and the Generalized Spectral Analysis could involve a new version of this software. Furthermore, the implementation of the RHS would involve not only a new version, but also

a complete renovation of the program, redefining the signal spaces from the beginning, taking into account the initial Hilbert space, possible dense subspaces thereof as well as their dual and antidual spaces, all these dependent on the system to analyze as well as the set of basis functions which define the transform one wants to use to perform the spectral analysis. The current version of this software tool already has its version *v5.0.*, [89], [90], [1], [93], [97]. It is expected that future versions may also be useful, not only for educational level, but also for research level, especially those having related to N -dimensional signal spaces and differential operators in real or complex variables.

Parte IV

Apéndices

Apéndice A. Notación utilizada

\mathbb{N}	Conjunto de los número naturales.
\mathbb{N}_0	Conjunto de los número naturales y el 0.
\mathbb{Z}	Conjunto de los número enteros.
\mathbb{R}	Cuerpo de los reales.
\mathbb{R}^+	Conjunto de los reales positivos.
\mathbb{R}^3	Cuerpo de los reales de 3 dimensiones.
\mathbb{R}^n	Cuerpo de los reales de n dimensiones.
\mathbb{C}	Cuerpo de los complejos.
\mathbb{C}^n	Cuerpo de los complejos de n dimensiones.
\mathbb{k}	Conjunto de números.
\mathbb{k}_μ	Conjunto de números donde se define μ .
τ	Variable genérica. Variable real.
μ	Enumerador de funciones base. Variable espectral.
τ'	Enumerador de funciones del conjunto de respuestas al impulso.
μ'	Representación espectral de μ .
$a(\tau), b(\tau)$	Señal de variable genérica. Señal en el dominio real.
$\alpha(\mu), \beta(\mu)$	Coefficiente en μ . Señal en el dominio espectral.
x	Variable real continua.
n	Variable real discreta.
x'	Desplazamiento en x . Enumerador de cto. de respuestas al impulso.
n'	Desplazamiento en n . Enumerador de cto. de respuestas al impulso.
ξ, x', Ω	Variable espectral continua ($\mathbf{TF}_x, \mathbf{TH}_x, \mathbf{TF}_n$).
m, k	Variable espectral discreta ($\mathbf{DSF}_x, \mathbf{DSF}_n$).

$\tilde{\delta}(\tau)$	Delta genérica.
$\delta(x)$	Delta de Dirac.
$\delta(n)$	Delta de Kronecker.
$f(x), g(x), h(x)$	Función complejas de variable real x .
$f_0(x), g_0(x)$	Función complejas periódicas de variable real x .
$x(n), y(n), h(n)$	Función complejas de variable discreta n .
$x_0(n), y_0(n)$	Función complejas periódicas de variable discreta n .
$\text{Re}\{\cdot\}$	Parte real de una función.
$\text{Im}\{\cdot\}$	Parte imaginaria de una función.
\mathcal{V}	Espacio vectorial.
\mathcal{F}	Espacio de funciones.
\mathcal{K}	Cuerpo genérico.
$\mathcal{V}_{\mathcal{K}}, \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$	Espacio vectorial sobre el cuerpo \mathcal{K} .
$\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{K}}, \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$	Espacio de funciones sobre el cuerpo \mathcal{K} .
$\mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$	Conjunto de funciones absolutamente integrables entre $-\infty$ e ∞ .
$\mathcal{L}^1(a, b)$	Conjunto de funciones absolutamente integrables entre a y b .
$\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$	Conjunto de funciones de cuadrado integrable entre $-\infty$ e ∞ .
$\mathcal{L}^2(a, b)$	Conjunto de funciones de cuadrado integrable entre a y b .
$\mathcal{L}^p(-\infty, \infty)$	Conjunto de funciones de potencia p integrable entre $-\infty$ e ∞ .
$\mathcal{L}^p(a, b)$	Conjunto de funciones de potencia p integrable entre a y b .
$\mathcal{S}(-\infty, \infty)$	Espacio de señales de variable real (GSST-v1d).
$\mathcal{P}(X_0)$	Espacio de señales periódicas de variable real (GSST-v1d).
$\mathcal{D}(-\infty, \infty)$	Espacio de señales de variable discreta (GSST-v1d).
$\mathcal{D}(N_0)$	Espacio de señales periódicas de variable discreta (GSST-v1d).

$\ \cdot\ $	Norma de una señal.
$\ \cdot\ _p$	p -norma de una señal.
$d(\cdot, \cdot)$	Distancia entre dos señales.
$d_p(\cdot, \cdot)$	Distancia p -ésima.
B_d	Bola generada por la distancia d .
B_{d_p}	Bola generada por la distancia d_p .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto escalar entre dos señales.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau$	Producto escalar sobre la variable τ .
$E[\cdot]$	Energía de una señal.
\mathcal{T}	Espacio topológico.
\mathcal{M}	Espacio métrico.
\mathcal{N}	Espacio normado.
\mathcal{B}	Espacio de Banach.
$\hat{\mathcal{H}}$	Espacio prehilbertiano.
\mathcal{H}	Espacio de Hilbert.
Φ	Subespacio denso de \mathcal{H} .
Φ'	Espacios dual de Φ .
Φ^\times	Espacios y antidual de Φ .
$\Phi'_{\mathbf{F}}$	Conjunto de funcionales lineales sobre Φ .
$\Phi^\times_{\tilde{\mathbf{F}}}$	Conjunto de funcionales antilineales sobre Φ .
$L^p = \mathcal{L}^p/\sim$	Conjunto de clases de equivalencia de funciones de potencia p integrables.
$L^p(\mathbb{R})$	Espacio de Banach de funciones de variable continua.
$L^p(\langle X_0 \rangle)$	Espacio Banach de funciones periódicas de variable continua.

$L^2(\mathbb{R})$	Espacio de Hilbert de funciones de variable continua.
$L^2(\langle X_0 \rangle)$	Espacio de Hilbert de funciones periódicas X_0 de variable continua.
$l^2(\mathbb{Z})$	Espacio de Hilbert de funciones de variable discreta.
$l^2(\langle N_0 \rangle)$	Espacio de Hilbert de funciones periódicas N_0 de variable discreta.
$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$	Funciones test (GSST-v2).
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Funciones de Schwartz (GSST-v2).
$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$	Funciones infinitamente derivables y de cuadrado integrable (GSST-v2).
$\mathcal{P}(X_0)$	Señales periódicas de variable real infinitamente derivable (GSST-v2).
$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$	Señales de variable discreta decrecientes más rápido que $\frac{1}{ n ^p}$ (GSST-v2).
$\mathcal{S}(\mathbb{Z})$	Señales de variable discreta cuyas diferencia k -ésima decrece más rápido que $\frac{1}{ n ^p}$ (GSST-v2).
$\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \mathcal{S}^{\times}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{R})$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}'(\mathbb{R}), \mathcal{C}_{L^2}^{\infty \times}(\mathbb{R})$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{C}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{P}'(X_0), \mathcal{P}^{\times}(X_0)$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{P}(X_0)$.
$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}), \mathcal{D}^{\times}(\mathbb{Z})$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$.
$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}), \mathcal{S}^{\times}(\mathbb{Z})$	Espacios dual y antidual de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.
$\langle X_0 \rangle$	Intervalo continuo de longitud X_0 .
$\langle T_0 \rangle$	Intervalo continuo de longitud T_0 .
$\langle N_0 \rangle$	Intervalo discreto de longitud N_0 .
$e(\tau; \mu)$	Funciones base de variable τ enumeradas por μ . Espacio de partida.
$\tilde{e}(\tau; \mu')$	Funciones base de variable τ enumeradas por μ' . Espacio de partida.
$\hat{e}(v; \eta)$	Funciones base de variable v enumeradas por η . Espacio de llegada.
$\check{e}(v; \eta')$	Funciones base de variable v enumeradas por η' . Espacio de llegada.

A	Constante relativa a la base $e(\tau; \mu)$.
\tilde{A}	Constante relativa a la base $\tilde{e}(\tau; \mu')$.
\hat{A}	Constante relativa a la base $\hat{e}(v; \eta)$.
\check{A}	Constante relativa a la base $\check{e}(v; \eta')$.
$h(v; \tau')$	Conjunto de respuestas al impulso de variable τ enumeradas por τ' .
$\lambda(\mu)$	Autovalor correspondiente al parámetro μ .
$\mathbf{H}_*(\eta; \mu')$	Conjunto de funciones de transferencia.
\mathbb{F}	Espacio de operadores.
$\mathbf{F}[\cdot]$	Operador genérico.
$\mathbf{F}^{-1}[\cdot]$	Operador inverso.
$\mathbf{F}_{\mathbf{L}}[\cdot]$	Operador lineal.
$\mathbf{F}_{\mathbf{L}}^{-1}[\cdot]$	Operador lineal inverso.
$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}[\cdot]$	Operador lineal e invariante.
$\mathbf{F}_{\mathbf{LI}}^{-1}[\cdot]$	Operador lineal e invariante inverso.
$\text{Dom}\{\mathbf{F}\}$	Rango de un operador \mathbf{F} .
$\text{Imag}\{\mathbf{F}\}$	Imagen de un operador \mathbf{F} .
$\text{Ker}\{\mathbf{F}\}$	Núcleo de un operador \mathbf{F} .
$\text{Eig}\{\mathbf{F}\}$	Conjunto de autofunciones de un operador \mathbf{F} .
$\mathbf{CL}[\cdot]$	Combinación lineal.
$\mathbf{CL}_{\mu}[\cdot]$	Combinación lineal en μ .
$\mathbf{I}[\cdot]$	Operador Identidad.
$\mathbf{T}[\cdot]$	Operador Transformada.
$\mathbf{T}^{-1}[\cdot]$	Operador Transformada Inversa.

$\mathbf{T}_e [\cdot]$	Operador Transformada sobre la base $e(\tau; \mu)$.
$\mathbf{T}_{\hat{e}} [\cdot]$	Operador Transformada sobre la base $\hat{e}(v; \eta)$.
$\mathbf{T}_{e_{\tau'}} [\cdot]$	Operador Transformada sobre la base $e(\tau'; \mu')$
$\mathbf{TF} [\cdot]$	Transformada de Fourier (continua y discreta).
$\mathbf{TF}_x [\cdot]$	Transformada continua de Fourier en x .
$\mathbf{TF}_n [\cdot]$	Transformada discreta de Fourier en n .
$\mathbf{TF}^{-1} [\cdot]$	Transformada Inversa de Fourier (continua y discreta).
$\mathbf{TH}[\cdot]$	Transformada de Hilbert.
$\mathbf{TH}_x [\cdot]$	Transformada de Hilbert en x .
$\mathbf{TH}^{-1} [\cdot]$	Transformada Inversa de Hilbert.
$\mathbf{DSF}[\cdot]$	Desarrollo en Serie de Fourier (continuo y discreto).
$\mathbf{DSF}_x [\cdot]$	Desarrollo en Serie de Fourier continuo en x .
$\mathbf{DSF}_n [\cdot]$	Desarrollo en Serie de Fourier discreto en n .
$\mathbf{DSF}^{-1} [\cdot]$	Desarrollo Inverso de Fourier (continuo y discreto).
$\mathbf{DSHm}[\cdot]$	Desarrollo en Serie de Hermite.
$\mathbf{DSHm}^{-1} [\cdot]$	Desarrollo Inverso de Hermite.
$\mathbf{O}[\cdot]$	Operador reordenación de valores.
$\mathbf{O}^{-1} [\cdot]$	Operador inverso reordenación de valores.
$F(\xi), G(\xi)$	Función de la \mathbf{TF}_x .
$F(x'), G(x')$	Función de la \mathbf{TH}_x .
$X(\Omega), Y(\Omega)$	Función de la \mathbf{TF}_n .
$a(m), b(m)$	Función del \mathbf{DSF}_x .
$a(k), b(k), H(k)$	Función del \mathbf{DSF}_n .

\mathbf{D}	Funcional lineal genérico. Distribución.
$\tilde{\mathbf{D}}$	Funcional antilineal genérico.
T_μ	Funcional lineal de parámetro μ .
\tilde{T}_μ	Funcional antilineal de parámetro μ .
\mathfrak{B}	Espacio de bras.
\mathfrak{K}	Espacio de kets.
$\langle a $	Bra.
$\langle a(\tau) $	Bra de una función.
$ b\rangle$	Ket.
$ b(\tau)\rangle$	Ket de una función.
$\langle a b\rangle$	Bra-ket.
$\langle a(\tau) b(\tau)\rangle$	Aplicación entre funcionales bras y kets de funciones. Producto escalar.
$\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$	Enumeradores, contables o no contables.
$\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$	Aplicación de isomorfismo.
$\mathfrak{I}^{-1}, \mathfrak{J}^{-1}$	Aplicación de isomorfismo inverso.
\aleph_0, \aleph_1	Números transfinitos (alef cero, alef uno).
$\mathcal{G}(x)$	Función de Green.
$\Gamma(x)$	Función escalón unitario continuo o de Heaviside.
$\Gamma(n)$	Función escalón unitario discreto.
\perp	Perpendicular.
ctp	en casi todos los puntos.
tq, :	tal que.
supp	Soporte de una función.
ess sup	Supremo esencial.

Apéndice B. Definiciones

B.1. Espacio topológico

Sea E un conjunto no vacío. Un sistema \mathfrak{T} de partes de E es una topología si cumple las siguientes condiciones:

1. Al sistema \mathfrak{T} pertenecen el conjunto vacío y el total E :

$$\phi \in \mathfrak{T}, \quad E \in \mathfrak{T}. \quad (\text{B.1})$$

2. Si A_1 y A_2 son dos conjuntos cualesquiera de \mathfrak{T} , su intersección pertenece a \mathfrak{T} :

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{T}. \quad (\text{B.2})$$

3. Si \mathfrak{J} es un sistema cualquiera de conjuntos de A pertenecientes a \mathfrak{T} , su unión pertenece a \mathfrak{T} :

$$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathfrak{J}} A \in \mathfrak{T}. \quad (\text{B.3})$$

Los conjuntos A del sistema \mathfrak{T} se denominan *conjuntos abiertos*, o simplemente *abiertos*, en la topología \mathfrak{T} .

El par $\mathcal{T} = (E, \mathfrak{T})$ formado por el conjunto E y la topología \mathfrak{T} se denomina **espacio topológico**.

Los elementos de E se suelen llamar *puntos* del espacio, a pesar de que no tienen por qué ser puntos en sentido euclídeo, pudiendo ser también otro tipo de elementos como funciones.

Cuando en una teoría se sobreentiende cuál es la topología que se considera, es frecuente designar el espacio topológico (E, \mathfrak{T}) por la misma letra E que identifica el conjunto

Las tres condiciones de la definición de topología se pueden resumir diciendo que \mathfrak{T} es un sistema de partes de E que contiene al vacío ϕ y al conjunto total E , y que es cerrado respecto de las intersecciones finitas y de las uniones finitas o infinitas, [105], [106].

B.2. Espacio métrico

Dado un conjunto E no vacío, una métrica o una distancia d , definida en E es una aplicación $E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, en la que a cada par ordenado (x, y) de elementos de E le corresponde un número real no negativo, que cumple las siguientes condiciones:

1. No negatividad:

$$d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E. \quad (\text{B.4})$$

2. Definición positiva:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (\text{B.5})$$

3. Simetría:

$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E. \quad (\text{B.6})$$

4. Desigualdad triangular:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in E. \quad (\text{B.7})$$

El par $\mathcal{M} = (E, d)$ formado por el conjunto no vacío E y una distancia d definida sobre el conjunto forman un **espacio métrico**.

Dos espacios métricos son distintos cuando difieren en el conjunto E o cuando, definida sobre el mismo conjunto, la métrica es diferente.

Cuando en una teoría se utiliza siempre la misma distancia y no hay posibilidad de confusión, se habla del espacio métrico E sin indicar de manera explícita la distancia con la que se está trabajando, [105], [106].

B.3. Espacio normado y de Banach

Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo \mathbb{K} , una norma definida en E es una aplicación $\|\cdot\|$ de $E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ en la que a cada $x \in E$ le corresponde un número real no negativo que se designa por $\|x\|$ y que verifica las siguientes condiciones:

1. No negatividad:

$$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E. \quad (\text{B.8})$$

2. Definición positiva:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (\text{B.9})$$

3. Escalado:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}. \quad (\text{B.10})$$

4. Desigualdad triangular:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E. \quad (\text{B.11})$$

El par $\mathcal{N} = (E, \|\cdot\|)$ formado por el espacio vectorial E sobre el cuerpo \mathbb{K} y la norma $\|\cdot\|$ definida sobre E se conoce como **espacio normado**.

Un espacio normado $\mathcal{N} = (E, \|\cdot\|)$ es completo si toda sucesión de Cauchy (ver B.5) en \mathcal{N} es convergente hacia un $x \in E$.

Un **espacio de Banach** \mathcal{B} es un espacio normado y completo, [105], [106].

B.4. Seminorma

Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo \mathbb{K} , una **seminorma** definida en E es una aplicación $\|\cdot\|$ de $E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ en la que a cada $x \in E$ le corresponde un número real no negativo que se designa por $\|x\|$ y que verifica las siguientes condiciones:

1. No negatividad:

$$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E. \quad (\text{B.12})$$

2. Escalado:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}. \quad (\text{B.13})$$

3. Desigualdad triangular:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E. \quad (\text{B.14})$$

Una seminorma cumple las mismas propiedades que una norma salvo la definición positiva,

$$\|x\| = 0 \not\Rightarrow x = 0. \quad (\text{B.15})$$

Es cierto que si $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$, luego una seminorma se convertirá en norma cuando cumpla que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, [109].

B.5. Sucesión de Cauchy

Sea $\mathcal{N} = (E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de E converge en \mathcal{N} hacia un $x \in E$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}, \text{ tq } \|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq \nu. \quad (\text{B.16})$$

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de E es fundamental o de **Cauchy** en \mathcal{N} , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}, \text{ tq } \|x_p - x_q\| < \varepsilon, \forall p, q \geq \nu. \quad (\text{B.17})$$

Ver Ref. [105].

B.6. Isomorfismo

Un **isomorfismo** (del griego *iso-morphos*, misma forma) entre dos espacios vectoriales normados \mathcal{N} y \mathcal{N}' es una aplicación \mathcal{I} entre \mathcal{N} y \mathcal{N}' lineal, biyectiva e invertible. Si existe la aplicación \mathcal{I} , se dice que \mathcal{N} y \mathcal{N}' son **isomorfos**.

Todos los espacios vectoriales normados de dimensión finita N son espacios de Banach isomorfos.

Con el concepto matemático de isomorfismo se pretende identificar una misma estructura en ambos espacios, [109].

B.7. Automorfismo

Un **automorfismo** es un isomorfismo de un conjunto sobre sí mismo, [109].

B.8. Formas hermitianas positivas

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Una **forma hermitiana** en el espacio E es una aplicación $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x', x'', y \in E$, se tiene

$$f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y). \quad (\text{B.18})$$

2. Para todo $x, y', y'' \in E$, se tiene

$$f(x, y' + y'') = f(x, y') + f(x, y''). \quad (\text{B.19})$$

3. Para todo $x, y \in E$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene

$$f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y). \quad (\text{B.20})$$

4. Para todo $x, y \in E$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene

$$f(x, \alpha y) = \alpha^* f(x, y) \quad (\text{B.21})$$

con α^* el complejo conjugado de α .

5. Para todo $x, y \in E$, se tiene

$$f(x, y) = f^*(y, x) \quad (\text{B.22})$$

donde $f^*(y, x)$ es el complejo conjugado de $f(x, y)$.

Las condiciones 3 y 4 implican que una forma hermitiana es también una forma sesquilineal, es decir, lineal por la primera componente y antilineal por la segunda. A su vez, la condición 5 implica que, si $x = y$, $f(x, x) = f^*(x, x)$, luego $f(x, x)$ siempre es real para todo $x \in E$.

Si para dos elementos $x, y \in E$ se tiene que

$$f(x, y) = 0, \quad (\text{B.23})$$

se dice que x es ortogonal a y y, respectivamente, y es ortogonal a x .

Una forma hermitiana f se dice que es **degenerada** si existe un $y \in E$ no nulo que sea ortogonal al espacio total E respecto de la forma f , es decir,

$$\exists y \neq 0 \in E, \text{ tq } f(x, y) = 0, \forall x \in E \quad (\text{B.24})$$

Una forma hermitiana f , definida en E , es **positiva**, si para todo $x \in E$ es

$$f(x, x) \geq 0. \quad (\text{B.25})$$

Ver Ref. [105], [107].

B.9. Espacio prehilbertiano y de Hilbert

Un **espacio prehilbertiano** $\hat{\mathcal{H}}$ es un espacio vectorial E sobre un cuerpo \mathbb{K} , normado con la norma definida por una forma hermitiana positiva y no degenerada.

En un espacio prehilbertiano $\hat{\mathcal{H}}$, normado por una forma hermitiana f positiva y no degenerada, se denomina producto escalar de $x \in E$ con $y \in E$ y se designa por $\langle x, y \rangle$ al valor de $f(x, y)$, es decir

$$\langle x, y \rangle = f(x, y), \quad (\text{B.26})$$

y por tanto

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (\text{B.27})$$

Un espacio prehilbertiano completo según la norma inducida por el producto escalar se denomina **espacio de Hilbert** $\mathcal{H} = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Todo espacio de dimensión finita con un producto escalar definido es un espacio de Hilbert, [105], [106], [107], [108].

B.10. Identidad o relación de Parseval

Sea $\mathcal{H} = (\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert de funciones. Sea $\{e(\tau; \mu)\}_{\mu}$ un conjunto de funciones que jueguen el papel de una base en $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, tal que

$$\langle e(\tau; \mu), e(\tau; \mu') \rangle = A \tilde{\delta}(\mu - \mu'), \quad (\text{B.28})$$

siendo A una constante real, finita y positiva, relacionada con la energía de las funciones base cuando la norma inducida por este producto escalar identifica este parámetro físico. De esta forma, cualquier función $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se puede representar en términos de una combinación lineal generalizada de esta base a través de unos coeficientes $\alpha(\mu)$ en la forma

$$a(\tau) = \mathbf{CL}_{\mu} [\alpha(\mu) e(\tau; \mu)]. \quad (\text{B.29})$$

La **identidad o relación de Parseval** relaciona la norma de la función original con sus coeficientes, de manera que, para toda función $a(\tau)$ se tiene

$$\|a(\tau)\|^2 = \langle a(\tau), a(\tau) \rangle = A \mathbf{CL}_{\mu} [|\alpha(\mu)|^2]. \quad (\text{B.30})$$

En el caso de que la norma inducida por el producto escalar se identifique con la energía de la señal, la relación de Parseval relaciona la energía de dicha señal con la energía de sus coeficientes, [1], [51], [52], [80].

Particularizando para diferentes naturalezas de la variable τ se puede tener las expresiones mostradas en la Tabla 1.

Espacio	Trans.	Relación de Parseval
$\mathcal{P}(X_0) :$	DSF :	$\int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) ^2 dx = E[f_0(x)] = X_0 E[a(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) ^2$
$\mathcal{S}(-\infty, \infty) :$	TF :	$\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx = E[f(x)] = \frac{1}{2\pi} E[F(\xi)] = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) ^2 d\xi$
	TH :	$\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx = E[f(x)] = E[H(x')] = \int_{x'=-\infty}^{\infty} H(x') ^2 dx'$
$\mathcal{S}(0, +\infty) :$	TB_{ν} :	$\int_{x=0}^{\infty} f(x) ^2 dx = E[f(x)] = E[F(\xi)] = \int_{\xi=0}^{\infty} F(\xi) ^2 d\xi$
$\mathcal{D}(N_0) :$	DSF :	$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) ^2 = E[x_0(n)] = N_0 E[a(k)] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) ^2$
$\mathcal{D}(-\infty, \infty) :$	TF :	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = E[x(n)] = \frac{1}{2\pi} E[X(\Omega)] = \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) ^2 d\Omega$

Tabla 1: Particularizaciones de la relación de Parseval para diferentes espacios de señal.

B.11. Adherencia de un conjunto

Sea (E, \mathfrak{T}) un espacio topológico y sea un subconjunto $X \subset E$. Se dice que un punto $x \in E$ es un punto adherente de X , si en todo entorno $U(x)$ hay puntos de X , es decir,

$$U(x) \cap X \neq \emptyset. \quad (\text{B.31})$$

En un espacio de Hilbert \mathcal{H} , o simplemente un espacio normado, dado un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, un elemento $x \in \mathcal{H}$ es adherente a \mathcal{A} si existe un elemento $z \in \mathcal{A}$ que, o es x mismo, o se pueda aproximar tanto como se quiera. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} z = x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H} \quad \text{o} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists z \in \mathcal{A} \text{ tq } \|x - z\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

En términos de *bolas* definidas a partir de la métrica inducida por la norma, un elemento $x \in \mathcal{H}$ es adherente a \mathcal{A} si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $z \in \mathcal{A}$ dentro de la bola de centro x y radio ε , es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset. \quad (\text{B.33})$$

El conjunto de todos los puntos adherentes de \mathcal{A} se denomina **adherencia** o clausura topológica de \mathcal{A} y se designa por $\overline{\mathcal{A}}$, [105], [106].

B.12. Subespacio denso

Un subespacio \mathcal{A} de \mathcal{H} es **denso** en \mathcal{H} si se puede aproximar cada elemento de \mathcal{H} por un elemento de \mathcal{A} tan bien como se desee. Matemáticamente,

$$\forall x \in \mathcal{H}, \forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathcal{A} \text{ tq } \|x - z\| < \varepsilon. \quad (\text{B.34})$$

Un subespacio denso tiene la propiedad de que su adherencia coincide con el espacio \mathcal{H} ,

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{H} \quad (\text{B.35})$$

Físicamente significa que se puede sustituir x por z con una precisión ε , [65].

B.13. Espacio separable

Un espacio topológico (E, \mathfrak{T}) se dice que es **separable** si contiene un subconjunto X numerable denso en el espacio:

$$\overline{X} = E, \quad (\text{B.36})$$

donde \overline{X} indica la adherencia de X .

Si un espacio de Hilbert \mathcal{H} es separable, todo sistema ortonormal $\{e(\tau; \mu)\}_\mu \subset \mathcal{H}$ es finito o numerable, [105].

B.14. Identidad del paralelogramo

Sea \mathcal{N} un espacio normado y sean dos elementos $f, g \in \mathcal{N}$. Se define la ley o **identidad del paralelogramo** como

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2 \left(\|f\|^2 + \|g\|^2 \right), \quad (\text{B.37})$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma definida en \mathcal{N} . Los espacios normados que cumplen la relación del paralelogramo son también espacios de Hilbert \mathcal{H} .

Se llama identidad del paralelogramo porque, considerando f y g como vectores y generando un paralelogramo con ellos, la suma de los cuadrados de los lados del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales. En el caso de que f y g fuesen ortogonales, se obtendría un rectángulo y se llegaría al Teorema de Pitágoras,

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \quad (\text{B.38})$$

Ver Ref. [110].

B.15. Funcional lineal continuo

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. La aplicación \mathbf{D} que relaciona cada elemento $x \in \mathcal{H}$ con un número complejo definido se llama **funcional** en el espacio \mathcal{H} , es decir,

$$\begin{cases} \mathbf{D} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathbf{D}[x]. \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

1. Un funcional \mathbf{D} se dice que es **lineal** si cumple:

$$\mathbf{D}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathbf{D}[x] + \beta \mathbf{D}[y] \quad (\text{B.40})$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. El funcional \mathbf{D} es **continuo** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \|x - x'\| < \delta \Rightarrow |\mathbf{D}[x] - \mathbf{D}[x']| < \varepsilon. \quad (\text{B.41})$$

3. El funcional \mathbf{D} es **acotado** si existe alguna constante K tal que

$$|\mathbf{D}[x]| < K \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (\text{B.42})$$

Si no existe tal constante, el funcional es no acotado.

4. Se cumple siempre que

$$\sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1} |\mathbf{D}[x]| < \infty, \quad (\text{B.43})$$

denotando como $\sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1} |\mathbf{D}[x]|$ la norma del funcional \mathbf{D} .

Ver Ref. [107], [65].

B.16. Funcional antilineal continuo

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. La aplicación $\tilde{\mathbf{D}}$ que relaciona cada elemento $x \in \mathcal{H}$ con un número complejo definido se llama **funcional** en el espacio \mathcal{H} , es decir,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \tilde{\mathbf{D}}[x]. \end{cases} \quad (\text{B.44})$$

1. Un funcional $\tilde{\mathbf{D}}$ se dice que es **antilineal** si cumple:

$$\tilde{\mathbf{D}}[\alpha x + \beta y] = \alpha^* \tilde{\mathbf{D}}[x] + \beta^* \tilde{\mathbf{D}}[y] \quad (\text{B.45})$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, donde α^* y β^* indican el complejo conjugado de α y β , respectivamente.

2. El funcional $\tilde{\mathbf{D}}$ es **continuo** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \left| \tilde{\mathbf{D}}[x] - \tilde{\mathbf{D}}[x'] \right| < \varepsilon. \quad (\text{B.46})$$

3. El funcional $\tilde{\mathbf{D}}$ es **acotado** si existe alguna constante K tal que

$$\left| \tilde{\mathbf{D}}[x] \right| < K \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (\text{B.47})$$

Si no existe tal constante, el funcional es no acotado.

4. Se cumple siempre que

$$\sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1} \left| \tilde{\mathbf{D}}[x] \right| < \infty, \quad (\text{B.48})$$

denotando como $\sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1} \left| \tilde{\mathbf{D}}[x] \right|$ la norma del funcional $\tilde{\mathbf{D}}$.

Ver Ref. [107], [65].

B.17. Distribuciones y funciones generalizadas

B.17.1. Conjunto de funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$

Se define el conjunto de funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ como el conjunto de funciones de variable continua $f(x)$ infinitamente derivables y de soporte compacto:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) = \{f(x) \text{ tq } f(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ y } \text{supp}\{f(x)\} = X \subset \mathbb{R} \text{ compacto}\}. \quad (\text{B.49})$$

Se define el conjunto de funciones $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ como el conjunto de funciones de variable discreta $x(n)$ que decrecen a 0 conforme n tiende a infinito más rápido que la inversa de cualquier potencia de n :

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) = \left\{ x(n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n^k x(n) \right|^2 < \infty, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ x(n) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left| n^k x(n) \right| = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (\text{B.50})$$

B.17.2. Definición a partir de una sucesión de funciones

A partir de un conjunto de funciones test $\{f_n(x)\}_n \subset \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se puede definir una **distribución** $d(x)$ como el límite de una sucesión de funciones de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, así

$$d(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad (\text{B.51})$$

sin embargo, $d(x)$ no es una función test, ni siquiera es integrable. Véase, por ejemplo,

$$\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-\frac{1}{1-(nx)^2}} P_{\frac{2}{n}}(x), \quad (\text{B.52})$$

donde $n e^{-\frac{1}{1-(nx)^2}} P_{\frac{2}{n}}(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que $\delta(x) \notin \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

Esta definición resulta útil para visualizar algunas propiedades asociadas a las distribuciones, [80].

B.17.3. Definición a partir de funcionales

Una **distribución** \mathbf{T} es un mapeo del conjunto de funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ sobre los números complejos \mathbb{C} , es decir

$$\mathbf{T}: \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\text{B.53})$$

La acción de una distribución sobre una función test $\varphi(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ se puede describir de las siguientes maneras:

$$\mathbf{T}[\varphi(x)], \quad (\text{B.54})$$

$$\langle \varphi(x), \mathbf{T} \rangle, \quad (\text{B.55})$$

$$\langle \varphi(x), t(x) \rangle, \quad (\text{B.56})$$

donde $t(x)$ es el núcleo de la distribución \mathbf{T} , es decir, su representación matemática. Por cada distribución \mathbf{T} existe una y sólo una función núcleo $t(x)$ y viceversa. El uso de la notación del producto escalar es tan sólo un convenio, puesto que no siempre se puede definir la acción de una distribución sobre una función a través de una integral de Riemann ni de Lebesgue, puesto que $t(x)$ no es una función que pertenezca a algún espacio de Hilbert, de ahí que se le dé a $t(x)$ el nombre de **función generalizada**, pero recuerda la definición de distribuciones a partir del límite de funciones de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi(x), t_n(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x \varphi(x) t_n^*(x) dx \equiv \int_x \varphi(x) t^*(x) dx = \langle \varphi(x), t(x) \rangle \quad (\text{B.57})$$

siendo $t_n(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ pero $t(x) \notin \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

En este sentido, esta definición también es aplicable en los espacios de variable discreta, obteniendo funciones generalizadas que se identifican con funcionales pero que no son distribuciones. Así, el mapeo

$$\mathbf{U}: \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\text{B.58})$$

donde $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ es el espacio de funciones de variable discreta que decrecen a cero cuando n tiende a infinito más rápido que la inversa de cualquier potencia de n , también se corresponde con una función generalizada definida a partir de un funcional \mathbf{U} . La acción de \mathbf{U} sobre una función $\psi(n) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ se puede representar como

$$\mathbf{U}[\psi(n)], \quad (\text{B.59})$$

$$\langle \psi(n), \mathbf{U} \rangle, \quad (\text{B.60})$$

$$\langle \psi(n), u(n) \rangle, \quad (\text{B.61})$$

donde $u(n)$ se corresponde con el núcleo del funcional \mathbf{U} , es decir, su representación matemática. Para cada funcional \mathbf{U} existe una y sólo una función núcleo $u(n)$ y viceversa. El uso de la notación del producto escalar es empleado puesto que la aplicación del funcional sobre la función sigue la misma definición que éste, con la salvedad de que no se puede asegurar la convergencia del mismo, ya que, en general, $u(n)$ no será una función que pertenezca a un espacio de Hilbert, de ahí que se denomine función generalizada, es decir, que no será de cuadrado sumable, como pueden ser las exponenciales complejas de variable discreta $e^{j\Omega n}$.

Toda distribución puede ser vista como un funcional, pero no todo funcional es una distribución. En este sentido toda distribución se puede relacionar con una función generalizada, pero no toda función generalizada se puede asociar a una distribución, sino sólo las de variable continua, [51], [55], [56], [63].

B.17.4. Propiedades de las distribuciones

Las distribuciones deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Linealidad:

$$\langle \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x), \mathbf{T} \rangle = \alpha \langle \varphi(x), \mathbf{T} \rangle + \beta \langle \psi(x), \mathbf{T} \rangle, \quad (\text{B.62})$$

para todas las funciones $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ y para todos los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Continuidad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n(x), \mathbf{T} \rangle = 0. \quad (\text{B.63})$$

Las distribuciones disponen de las siguientes propiedades¹:

1. Linealidad:

$$\langle \varphi, \mathbf{S} + \mathbf{T} \rangle = \langle \varphi, \mathbf{S} \rangle + \langle \varphi, \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.64})$$

2. Escalado:

$$\langle \varphi, a\mathbf{T} \rangle = a \langle \varphi, \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.65})$$

3. Derivación:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}' \rangle = - \langle \varphi', \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.66})$$

4. Derivación n -ésima:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}^n \rangle = (-1)^n \langle \varphi^n, \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.67})$$

Como consecuencia, una distribución siempre puede ser diferenciada tantas veces como se desee. Su resultado siempre existe y es una nueva distribución.

5. Escalado de la variable independiente:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}(ax) \rangle = \langle \varphi, t(ax) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \varphi, t \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \varphi, \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.68})$$

6. Desplazamiento:

$$\langle \varphi, \mathbf{T}(x-a) \rangle = \langle \varphi, t(x-a) \rangle = \langle \varphi(x+a), t \rangle = \langle \varphi(x+a), \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.69})$$

7. Multiplicación por $g \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$:

$$\langle \varphi, g\mathbf{T} \rangle = \langle g^* \varphi, \mathbf{T} \rangle. \quad (\text{B.70})$$

8. Convolución:

$$\langle \varphi, \mathbf{S} * \mathbf{T} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{T}} * \varphi, \mathbf{S} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{S}} * \varphi, \mathbf{T} \rangle, \quad (\text{B.71})$$

donde

$$\tilde{\mathbf{T}}(x) = \tilde{t}(x) = t(-x) = \mathbf{T}(-x). \quad (\text{B.72})$$

Los operadores $\mathbf{S} + \mathbf{T}$, $a\mathbf{T}$, \mathbf{T}' , \mathbf{T}^n , $\mathbf{T}(ax)$, $\mathbf{T}(x-a)$, $g\mathbf{T}$, $\mathbf{S} * \mathbf{T}$, son todos distribuciones, [51], [55], [63].

¹Para aliviar la notación, salvo que sea necesario, se obvia la dependencia en x de las funciones $\varphi(x)$.

B.17.5. Distribuciones ordinarias

Sea $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones test, es decir, las funciones de variable continua, infinitamente derivables y de soporte definido sobre un compacto. Se denomina **distribución ordinaria** a toda aplicación lineal y continua \mathbf{T} entre las funciones test y los números complejos \mathbb{C} , es decir,

$$\mathbf{T} : \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\text{B.73})$$

Al conjunto de todas las distribuciones ordinarias se denomina $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$. Se pueden distinguir dos tipos de distribuciones ordinarias, las distribuciones regulares y las distribuciones no regulares, [56], [63], [55].

Distribuciones regulares

Se dice que

$$t(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |t(x)| dx < \infty \quad (\text{B.74})$$

para todo K compacto en Ω , siendo Ω un abierto de \mathbb{R} .

Si $t(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces

$$\mathbf{T}[\varphi(x)] = \int_{\Omega} \varphi(x) t^*(x) dx \quad (\text{B.75})$$

con $\varphi(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ es una distribución de $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$.

Por otro lado, la aplicación $t \mapsto \mathbf{T}$ es una aplicación lineal e inyectiva entre los espacios $L^1_{loc}(\Omega)$ y $\mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, por lo que se puede identificar la función $t(x)$ con la distribución \mathbf{T} , es decir, las distribuciones generalizan a las funciones localmente integrables, de ahí que muchas veces se denominen **funciones generalizadas**. Este tipo de distribuciones se conocen como **distribuciones regulares**.

Un resultado interesante es el de las funciones $\mathcal{C}^m(\Omega)$, es decir, funciones derivables hasta orden m , contenidas en $L^1_{loc}(\Omega)$. Todas estas funciones son distribuciones, [63].

Distribuciones no regulares

Todas aquellas distribuciones que no cumplan las condiciones para ser regulares se dice que son **distribuciones no regulares**. A este tipo pertenecen, por ejemplo, la delta de Dirac y sus derivadas, ya que la aplicación $\varphi(x) \rightarrow \varphi(a)$, para algún $a \in \mathbb{R}$, no se puede determinar a partir de ninguna función $t(x)$ que sea localmente integrable, es decir,

$$\nexists t(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) t(x) dx. \quad (\text{B.76})$$

La distribución que cumple esta aplicación es la delta de Dirac $\delta(x)$, pero la igualdad comúnmente conocida

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \delta(x) dx \quad (\text{B.77})$$

es tan sólo una notación y no se puede asociar a integrales de Riemann ni de Lebesgue. Esta notación se emplea muy habitualmente en la teoría de señal y en el análisis de sistemas lineales, debido a su fácil operatividad y a la obtención de resultados de manera eficiente; sin embargo, el empleo de esta notación como una integral hay que tomarlo con cautela, ya que, de manera rigurosa, podría dar lugar a inconsistencias, [63].

B.17.6. Distribuciones temperadas

Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de Schwartz, es decir, las funciones de variable continua, infinitamente derivables, continuas y de cuadrado integrable. Se denomina **distribución temperada** a toda aplicación lineal y continua \mathbf{T} entre las funciones de Schwartz y los números complejos \mathbb{C} , es decir,

$$\mathbf{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\text{B.78})$$

Al conjunto de todas las distribuciones temperadas se denomina $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Es evidente que las funciones test $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ son un subconjunto de las funciones de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, además son un subconjunto denso de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, por lo que toda distribución definida sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ también lo estará sobre $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, así

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (\text{B.79})$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}), \quad (\text{B.80})$$

aunque para demostrar este hecho es necesario comprobar si la restricción de \mathbf{T} definida sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, $\mathbf{T}|_{\mathcal{S}_{\mathcal{T}}}$, es lineal y continua. Los detalles se pueden encontrar en [63].

B.17.7. Prolongabilidad de distribuciones ordinarias a temperadas

Resulta interesante considerar el hecho de que una distribución $\mathbf{T} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ pueda ser prolongada a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Para ello bastaría con garantizar que \mathbf{T} fuera continua en $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$ con respecto de la convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En general la prolongación no tiene por qué ser factible.

Dada una distribución $\mathbf{T} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, es decir, $\mathbf{T} : \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, se define la **prolongación** de dicha distribución al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como aquella distribución temperada $\mathbf{T}_p : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que su restricción a $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R})$, es decir $\mathbf{T}_p|_{\mathcal{S}_{\mathcal{T}}}$, coincida con \mathbf{T} , esto es

$$\mathbf{T}_p|_{\mathcal{S}_{\mathcal{T}}} \equiv \mathbf{T}. \quad (\text{B.81})$$

Ver más detalles en [63].

B.18. Medida de Lebesgue

B.18.1. σ -álgebra del conjuntos

Sea E un conjunto y \mathfrak{M} una colección de subconjuntos de E , es decir, $\mathfrak{M} \subset \wp(E)$, siendo $\wp(E)$ el conjunto de las partes de E . Se dice que \mathfrak{M} es una **σ -álgebra de conjuntos** si cumple:

1. El conjunto total E y el vacío \emptyset pertenecen a \mathfrak{M} ,

$$E \in \mathfrak{M}, \quad (\text{B.82})$$

$$\emptyset \in \mathfrak{M}. \quad (\text{B.83})$$

2. Si un conjunto A pertenece a \mathfrak{M} , su complementario también pertenece a \mathfrak{M} ,

$$A \in \mathfrak{M} \Rightarrow E - A = \bar{A} \in \mathfrak{M}. \quad (\text{B.84})$$

3. Si $\{A_i\}_i$ es una sucesión de conjuntos en \mathfrak{M} , su unión también pertenece a \mathfrak{M} ,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}. \quad (\text{B.85})$$

Ver Refs. [105], [111].

B.18.2. Medida de un conjunto

Una **medida** en un conjunto X es una aplicación

$$\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad (\text{B.86})$$

donde \mathfrak{M} es una σ -álgebra en X que cumple:

1. μ es nula en el conjunto vacío:

$$\mu(\emptyset) = 0. \quad (\text{B.87})$$

2. μ es completamente aditiva:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad (\text{B.88})$$

siendo $\{A_i\}_i \subset \mathfrak{M}$ una sucesión de conjuntos de \mathfrak{M} disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

La tripleta (X, \mathfrak{M}, μ) es un **espacio de medida**, [105], [111].

B.18.3. Medida exterior de un conjunto

Una **medida exterior** en un conjunto X es una aplicación

$$\mu^* : \wp(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad (\text{B.89})$$

que cumple:

1. μ^* es nula en el conjunto vacío:

$$\mu^*(\emptyset) = 0. \quad (\text{B.90})$$

2. μ^* es monótona:

$$A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \quad (\text{B.91})$$

siendo A y B dos subconjuntos de X .

3. μ^* es numerablemente subaditiva:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i), \quad (\text{B.92})$$

siendo $\{A_i\}_i$ una sucesión de subconjuntos de X o, equivalentemente, de elementos de $\wp(X)$.

4. μ^* es invariante por traslaciones:

$$\mu^*(y + A) = \mu^*(\{x : x = y + z, z \in A\}) = \mu^*(A), \quad (\text{B.93})$$

siendo $y \in X$.

Toda medida en X , definida en $\wp(X)$, es una medida exterior en X , pero el recíproco no es cierto, [105], [111].

B.18.4. Conjuntos medibles en \mathbb{R}^n

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es **medible** si cumple la **condición de Carathéodory**, es decir, si para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \bar{E}), \quad (\text{B.94})$$

donde $\bar{E} = \mathbb{R}^n - E$ es el complementario de E .

Asimismo, un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto B que contenga a E , tal que

$$\mu^*(B - E) < \varepsilon, \quad (\text{B.95})$$

o un cerrado C contenido en E tal que

$$\mu^*(E - C) < \varepsilon. \quad (\text{B.96})$$

En consecuencia, si E es medible, también lo será su complementario \bar{E} . El espacio total \mathbb{R}^n y el conjunto vacío \emptyset son medibles.

Todo conjunto de medida exterior nula también es un conjunto medible.

El conjunto \mathfrak{M} de todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n que son medibles es una σ -álgebra, [105], [111].

B.18.5. Medida de Lebesgue

Se denomina medida de un conjunto medible $E \in \mathfrak{M}$ a su medida exterior. La medida definida para los conjuntos de la familia \mathfrak{M} es, pues, una aplicación de conjunto restricción a \mathfrak{M} de la medida exterior definida en $\wp(\mathbb{R}^n)$. Esta medida se designa por

$$\mu(E) = \mu^*(E) \quad \text{si } E \in \mathfrak{M}. \quad (\text{B.97})$$

La medida exterior definida en la σ -álgebra \mathfrak{M} de los conjuntos medibles es una **medida de Lebesgue**, [105], [111], [112].

B.18.6. Conjuntos de medida nula

Si Z es un subconjunto de \mathbb{R}^n que verifica $\mu^*(Z) = 0$, entonces Z es medible y se puede realizar su medida de Lebesgue, siendo $\mu(Z) = 0$. Este tipo de conjuntos se llaman **conjuntos de medida nula**.

Se puede determinar si un conjunto Z es de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, es posible hallar una familia numerable de subconjuntos $\{Z_i\}_i$ tales que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Z_i) < \varepsilon. \quad (\text{B.98})$$

Si $\{Z_i\}_i$ es una sucesión de conjuntos de medida nula, determinando $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, se tiene que

$$\mu(Z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Z_i) = 0, \quad (\text{B.99})$$

por lo que la unión numerable de conjuntos de medida nula es también un conjunto de medida nula.

Todo conjunto numerable es un conjunto de medida nula.

Cualquier variedad de dimensión $k < n$ del espacio \mathbb{R}^n tiene medida nula. [105], [111], [112].

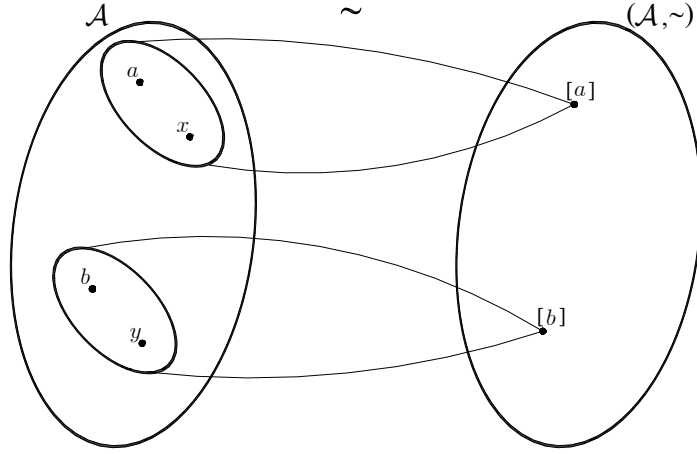


Figura B.1: $x \in [a] \Leftrightarrow x \sim a$, $[a] = \{x \in \mathcal{A} \text{ tq. } x \sim a\} \in (\mathcal{A}, \sim)$,
 $y \in [b] \Leftrightarrow y \sim b$, $[b] = \{y \in \mathcal{A} \text{ tq. } y \sim b\} \in (\mathcal{A}, \sim)$.

B.19. Relación de equivalencia

Sea un conjunto \mathcal{A} no vacío y \sim una relación sobre los elementos de \mathcal{A} . Se dice que \sim es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad reflexiva. Todo elemento de \mathcal{A} se relaciona consigo mismo

$$\forall x \in \mathcal{A}, x \sim x. \quad (\text{B.100})$$

- Propiedad simétrica. Si un elemento de \mathcal{A} está relacionado con otro, entonces ese otro también se relaciona con el primero

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, x \sim y \Rightarrow y \sim x. \quad (\text{B.101})$$

- Propiedad transitiva. Si un elemento de \mathcal{A} está relacionado con otro y este a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero se relaciona con este último

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}, x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z. \quad (\text{B.102})$$

Una relación de equivalencia \sim sobre un conjunto \mathcal{A} se denotan por un par ordenado (\mathcal{A}, \sim) .

La relación de equivalencia \sim define conjuntos disjuntos en \mathcal{A} llamados **clases de equivalencia**.

Dado un elemento $a \in \mathcal{A}$, el conjunto de todos los elementos de \mathcal{A} relacionados con a se llama clase de equivalencia y se denota por $[a]$.

$$[a] = \{x \in \mathcal{A} \text{ tq. } x \sim a\} \in (\mathcal{A}, \sim). \quad (\text{B.103})$$

Las clases de equivalencia forman una partición del conjunto \mathcal{A} .

La Fig. B.1 muestra un esquema del paso de un conjunto \mathcal{A} al conjunto (\mathcal{A}, \sim) , [113].

Apéndice C. Teoremas

C.1. Teorema del Binomio

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (\text{C.1})$$

Ver demostración en [117].

C.2. Teorema de Riesz-Fischer

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Se define la relación de equivalencia \sim sobre \mathcal{L}^p como:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{ctp}, \quad (\text{C.2})$$

o

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0, \quad (\text{C.3})$$

o bien

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p dx = 0, \quad (\text{C.4})$$

donde la indicación *ctp* indica *en casi todo punto*, es decir, exceptuando un conjunto de medida nula y siendo $\mu(\mathcal{A})$ la medida de Lebesgue¹ del conjunto \mathcal{A} .

Entonces los espacios de funciones

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \sim \quad (\text{C.5})$$

son espacios normados completos y, por tanto, de Banach.

Ver demostraciones en [114], [115], [116], [108].

C.3. Teorema de Representación de Riesz

Sea \mathbf{D} un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable. Entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$\mathbf{D}[x] = \langle x, y \rangle \quad (\text{C.6})$$

para todo $x \in \mathcal{H}$, y además $\|\mathbf{D}\| = \|y\|$, donde

$$\|\mathbf{D}\| = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1} |\mathbf{D}[x]| \quad (\text{C.7})$$

representa la norma del funcional \mathbf{D} .

Ver demostraciones en [105], [106], [107], [118], [119], [108].

¹Ver definición de medida de Lebesgue y conjunto de medida nula en el Ap. B.18.

C.4. Teorema de Riesz-Fréchet

Este teorema puede considerarse como un corolario del Teorema de Representación de Riesz.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y \mathbf{D} un funcional lineal continuo en \mathcal{H} , es decir, $\mathbf{D} \in \mathcal{H}'$, entonces existe un único $d \in \mathcal{H}$ tal que

$$\mathbf{D}[x] = \langle x, d \rangle \quad (\text{C.8})$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. La aplicación

$$d \mapsto \mathbf{D} \quad (\text{C.9})$$

es una aplicación biyectiva lineal e isométrica de \mathcal{H} sobre su espacio dual \mathcal{H}' .

De la misma manera, sea $\tilde{\mathbf{D}}$ un funcional antilineal continuo en \mathcal{H} , es decir, $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathcal{H}^\times$, entonces existe un único $d \in \mathcal{H}$ tal que

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] = \langle d, x \rangle \quad (\text{C.10})$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. La aplicación

$$d \mapsto \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{C.11})$$

es una aplicación biyectiva antilineal e isométrica de \mathcal{H} sobre su espacio antidual \mathcal{H}^\times .

Por consiguiente, un espacio de Hilbert \mathcal{H} es isométricamente isomorfo a su espacio dual \mathcal{H}' y su espacio antidual \mathcal{H}^\times ,

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}^\times. \quad (\text{C.12})$$

Ver demostración en [108]

C.5. Teorema de isomorfismos en espacios de Hilbert

Todo espacio prehilbertiano $\hat{\mathcal{H}}$ de dimensión finita N es un espacio de Hilbert separable e isomorfo a $l^2(\langle N \rangle)$, o lo que es lo mismo, al espacio \mathbb{R}^N con el producto escalar ordinario,

$$\hat{\mathcal{H}} \cong l^2(\langle N \rangle). \quad (\text{C.13})$$

Todas las bases que se pueden definir tienen la misma cardinalidad de valor N .

Todo espacio de Hilbert \mathcal{H} separable de dimensión infinita es isomorfo a $l^2(\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{H} \cong l^2(\mathbb{Z}), \quad (\text{C.14})$$

es decir, existe un isomorfismo $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$. Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal en sentido topológico (sumas infinitas), no en sentido algebraico (sumas finitas) y todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert \mathcal{H} tienen el mismo cardinal. A este cardinal común a todas ellas se le denomina dimensión hilbertiana.

Ver demostraciones en [110], [62].

Apéndice D. Demostraciones Matemáticas

D.1. TH a partir de la TF

Sean

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx, \quad (\text{D.1})$$

$$H(x') = \mathbf{TH}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx. \quad (\text{D.2})$$

La transformada de Hilbert $H(x')$ se puede encontrar a partir de la transformada de Fourier $F(\xi)$ según la ecuación del cambio de base (4.79) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j \operatorname{sign}(\xi) F(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x} e^{j\xi x'} d\xi dx = \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) I(x; x') dx, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

donde

$$\begin{aligned} I(x; x') &= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x} e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= - \int_{\xi=-\infty}^0 e^{j(x'-x)\xi} d\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} e^{j(x'-x)\xi} d\xi = B(x; x') - A(x; x'), \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

donde

$$A(x; x') = \int_{\xi=-\infty}^0 e^{j(x'-x)\xi} d\xi, \quad (\text{D.5})$$

$$B(x; x') = \int_{\xi=0}^{\infty} e^{j(x'-x)\xi} d\xi. \quad (\text{D.6})$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} A(x; x') &= \int_{\xi=-\infty}^0 e^{j(x'-x)\xi} d\xi = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x'-x)} \left[e^{j(x'-x)\xi} \right]_{-a}^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x'-x)} \left(1 - e^{-j(x'-x)a} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} B(x; x') &= \int_{\xi=0}^{\infty} e^{j(x'-x)\xi} d\xi = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x'-x)} \left[e^{j(x'-x)\xi} \right]_0^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x'-x)} \left(e^{j(x'-x)a} - 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

por tanto¹

$$\begin{aligned}
I(x; x') &= B(x; x') - A(x; x') = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x' - x)} \left(e^{j(x' - x)a} - 1 - 1 + e^{-j(x' - x)a} \right) = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{j(x' - x)} \left(e^{j(x' - x)a} + e^{-j(x' - x)a} \right) - \frac{2}{j(x' - x)} = \\
&= \frac{2}{j(x' - x)} \lim_{a \rightarrow \infty} \cos(a(x' - x)) - \frac{2}{j(x' - x)} = \\
&= \frac{2}{j} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\cos(a(x' - x)) - 1}{(x' - x)} = \\
&= \frac{2}{j} \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbf{TH} [a \operatorname{sinc}(a(x' - x))] = \\
&= \frac{2}{j} \mathbf{TH} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} a \operatorname{sinc}(a(x' - x)) \right] = \\
&= \frac{2}{j} \mathbf{TH} [\pi \delta(x' - x)] = \\
&= \frac{2}{j} \frac{\pi}{\pi(x - x')} = \\
&= \frac{2}{j(x - x')}, \tag{D.9}
\end{aligned}$$

e, introduciéndolo en (D.3),

$$\begin{aligned}
H(x') &= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) I(x; x') dx = \\
&= \frac{j}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2}{j(x - x')} dx = \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\pi(x - x')} dx = \\
&= \mathbf{TH} [f(x)]. \tag{D.10}
\end{aligned}$$

¹En la sexta y novena igualdades se hace uso de las tablas de la transformada de Hilbert de funciones conocidas, [61].

D.2. TF a partir de la TH

Sean

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx, \quad (\text{D.11})$$

$$H(x') = \mathbf{TH}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx. \quad (\text{D.12})$$

La transformada de Fourier $F(\xi)$ se puede encontrar a partir de la transformada de Hilbert $H(x')$ según la ecuación del cambio de base (4.80) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -j \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\pi(x-x')} dx \operatorname{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= -j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x'}}{\pi(x-x')} dx' dx = \\ &= -j \operatorname{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) J(x; \xi) dx, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

donde, haciendo el cambio

$$\begin{cases} u = x - x' \\ du = -dx' \end{cases}, \quad (\text{D.14})$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} J(x; \xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x'}}{\pi(x-x')} dx' = \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi(x-u)}}{\pi u} du = \\ &= e^{-j\xi x} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\xi u}}{\pi u} du = \\ &= e^{-j\xi x} C(\xi), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde

$$\begin{aligned} C(\xi) &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\xi u}}{\pi u} du = \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi u)}{\pi u} du + j \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi u)}{\pi u} du = \\ &= 0 + j \operatorname{sign}(\xi) \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(v)}{\pi \frac{1}{\xi} v} \frac{1}{\xi} dv = \\ &= j \operatorname{sign}(\xi) \frac{1}{\pi} \int_{v=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(v) dv = \\ &= j \operatorname{sign}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

donde se ha hecho el cambio de variable

$$\begin{cases} v = \xi u \\ dv = \xi du \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

y donde se ha tenido en cuenta que $\int_{v=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(v) dv = 1$ y que $\frac{\cos(\xi u)}{\pi u}$ al ser una función impar, al integrarla sobre un intervalo simétrico su resultado es nulo. Introduciendo $C(\xi)$ en (D.15),

$$J(x; \xi) = e^{-j\xi x} C(\xi) = j \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x} \quad (\text{D.18})$$

y éste en (D.13), finalmente se llega a

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -j \text{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) J(x; \xi) dx = \\ &= -j \text{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) j \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x} dx = \\ &= -j \text{sign}(\xi) j \text{sign}(\xi) \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx = \\ &= \mathbf{TF}[f(x)]. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

D.3. $\mathbf{TH} [\delta (x - x_0)]$ a partir de $\mathbf{TF} [\delta (x - x_0)]$

Sea

$$F (\xi) = \mathbf{TF} [\delta (x - x_0)] = e^{-j\xi x_0}. \quad (\text{D.20})$$

La transformada de Hilbert $H (x') = \mathbf{TH} [\delta (x - x_0)]$ se puede encontrar a partir de $F (\xi)$ según la ecuación del cambio de base (4.79) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} H (x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF (\xi) \text{sign} (\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j e^{-j\xi x_0} \text{sign} (\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \text{sign} (\xi) e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi = \\ &= \frac{j}{2\pi} \left(- \int_{\xi=-\infty}^0 e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi \right) = \\ &= \frac{j}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{\xi=0}^a e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi - \int_{\xi=-a}^0 e^{j(x'-x_0)\xi} d\xi \right) = \\ &= \frac{j}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j(x'-x_0)} e^{j(x'-x_0)\xi} \Big|_0^a - \frac{1}{j(x'-x_0)} e^{j(x'-x_0)\xi} \Big|_{-a}^0 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi(x'-x_0)} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(e^{j(x'-x_0)a} - 1 - 1 + e^{-j(x'-x_0)a} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi(x'-x_0)} \lim_{a \rightarrow \infty} (2 \cos (a(x'-x_0)) - 2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(a \frac{\cos (a(x'-x_0)) - 1}{a(x'-x_0)} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} (a \mathbf{TH} [\text{sinc} (a(x-x_0))]) = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathbf{TH} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} a \text{sinc} (a(x-x_0)) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathbf{TH} [\pi \delta (x'-x_0)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \pi \frac{1}{\pi(x_0-x')} = \\ &= \frac{1}{\pi(x_0-x')}. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

D.4. $\mathbf{TH}[\text{sinc}(ax)]$ a partir de $\mathbf{TF}[\text{sinc}(ax)]$

Sea

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[\text{sinc}(ax)] = \frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi). \quad (\text{D.22})$$

La transformada de Hilbert $H(x') = \mathbf{TH}[\text{sinc}(ax)]$ se puede encontrar a partir de $F(\xi)$ según la ecuación del cambio de base (4.79) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} H(x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} j \frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{j\pi}{2\pi a} \int_{\xi=-a}^a \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi = \\ &= \frac{j}{2a} \left(- \int_{\xi=-a}^0 e^{j\xi x'} d\xi + \int_{\xi=0}^a e^{j\xi x'} d\xi \right) = \\ &= \frac{j}{2a} \left(- \frac{1}{jx'} e^{j\xi x'} \Big|_{-a}^0 + \frac{1}{jx'} e^{j\xi x'} \Big|_0^a \right) = \\ &= \frac{j}{2a} \frac{1}{jx'} \left(e^{jax'} - 1 - 1 + e^{-jax'} \right) = \\ &= \frac{1}{2ax'} (2 \cos(ax') - 2) = \\ &= \frac{\cos(ax') - 1}{ax'}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

D.5. TF [sinc(ax)] a partir de TH [sinc(ax)]

Sea

$$H(x') = \mathbf{TH}[\text{sinc}(ax)] = \frac{\cos(ax') - 1}{ax'}. \quad (\text{D.24})$$

La transformada de Fourier $F(\xi) = \mathbf{TF}[\text{sinc}(ax)]$ se puede encontrar a partir de $H(x')$ según la ecuación del cambio de base (4.80) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= -j \text{sign}(\xi) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax') - 1}{ax'} e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= -j \text{sign}(\xi) K(\xi), \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

donde

$$\begin{aligned} K(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax') - 1}{ax'} e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(e^{jax'} + e^{-jax'}) - 1}{ax'} e^{-j\xi x'} dx' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi-a)x'} + e^{-j(\xi+a)x'} - 2e^{-j\xi x'}}{ax'} dx' = \\ &= \frac{1}{2} (K_1(\xi) + K_2(\xi) - 2K_3(\xi)), \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

donde

$$K_1(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi-a)x'}}{ax'} dx', \quad (\text{D.28})$$

$$K_2(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi+a)x'}}{ax'} dx', \quad (\text{D.29})$$

$$K_3(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\xi x'}}{ax'} dx'. \quad (\text{D.30})$$

De aquí,

$$\begin{aligned} K_1(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi-a)x'}}{ax'} dx' = \\ &= \frac{\xi - a}{a} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi-a)x'}}{(\xi - a)x'} dx' = \\ &= \frac{\zeta}{a} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\zeta x'}}{\zeta x'} dx' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\zeta}{a} \left(\int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\zeta x')}{\zeta x'} dx' - j \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta x')}{\zeta x'} dx' \right) = \\
&= -j \frac{\zeta}{a} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta x')}{\zeta x'} dx' = \\
&= -j \operatorname{sign}(\zeta) \frac{\zeta}{a} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} \frac{1}{\zeta} du = \\
&= -\frac{j\pi \operatorname{sign}(\zeta)}{a} = \\
&= -j \frac{\pi}{a} \operatorname{sign}(\xi - a), \tag{D.31}
\end{aligned}$$

donde se han utilizado los cambios

$$\zeta = \xi - a, \tag{D.32}$$

$$\begin{cases} u = \zeta x' \\ du = \zeta dx' \end{cases}. \tag{D.33}$$

Por el mismo procedimiento,

$$K_2(\xi) = -j \frac{\pi}{a} \operatorname{sign}(\xi + a), \tag{D.34}$$

$$K_3(\xi) = -j \frac{\pi}{a} \operatorname{sign}(\xi). \tag{D.35}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= -j \operatorname{sign}(\xi) K(\xi) = \\
&= -j \operatorname{sign}(\xi) \left(\frac{1}{2} (K_1(\xi) + K_2(\xi) - 2K_3(\xi)) \right) = \\
&= -j \operatorname{sign}(\xi) \left(-j \frac{\pi}{2a} \operatorname{sign}(\xi - a) - j \frac{\pi}{2a} \operatorname{sign}(\xi + a) + j \frac{\pi}{a} \operatorname{sign}(\xi) \right) = \\
&= \frac{\pi}{a} P_{2a}(\xi), \tag{D.36}
\end{aligned}$$

donde se puede comprobar gráficamente en la Fig. D.1 el resultado del cálculo expresado en (D.36).

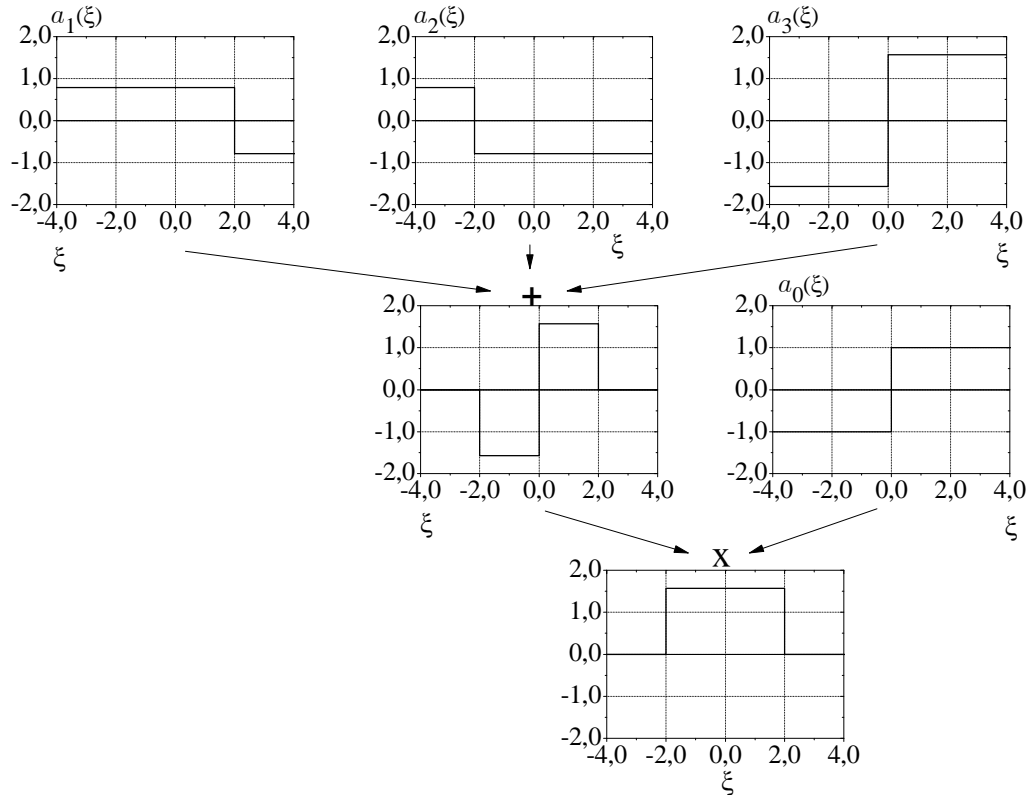


Figura D.1: Representación de las funciones que intervienen en la ecuación (D.36) para obtener un pulso. $a_1(\xi) = \frac{\pi}{2a} \text{sign}(\xi - a)$, $a_2(\xi) = \frac{\pi}{2a} \text{sign}(\xi + a)$, $a_3(\xi) = \frac{\pi}{a} \text{sign}(\xi)$, $a_1(\xi) = \text{sign}(\xi)$, con $a = 2$.

D.6. Sumatorio infinito de exponenciales complejas

Se quiere demostrar que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} = X_0\delta_0(x-x') = X_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'-kX_0), \quad (\text{D.37})$$

con $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$. Para ello se realiza la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{m=-a}^a e^{jm\xi_0 u} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-ja\xi_0 u} - e^{j(a+1)\xi_0 u}}{1 - e^{j\xi_0 u}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{j\frac{\xi_0}{2}u} \left(e^{-j(a+\frac{1}{2})\xi_0 u} - e^{j(a+\frac{1}{2})\xi_0 u} \right)}{e^{j\frac{\xi_0}{2}u} \left(e^{-j\frac{\xi_0}{2}u} - e^{j\frac{\xi_0}{2}u} \right)} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0 u\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u\right)} = \\ &= B\delta_0(u) = \\ &= B\delta_0(x'-x) = \\ &= B\delta_0(x-x'), \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

que es periódica X_0 puesto que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-(x+kX_0))} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x-kX_0)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)-jm\xi_0kX_0} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} e^{jm\xi_0kX_0} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} e^{jmk\frac{2\pi}{X_0}X_0} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} e^{jmk2\pi} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)}
\end{aligned} \tag{D.39}$$

ó visto desde la sinc,

$$\begin{aligned}
&\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0(u + kX_0)\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}(u + kX_0)\right)} = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u + \left(a + \frac{1}{2}\right)kX_0\xi_0\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u + \frac{2a+1}{2}kX_0\frac{\xi_0}{2}\right)} = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u + \frac{2a+1}{2}kX_0\frac{2\pi}{X_0}\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u + \frac{2a+1}{2}kX_0\frac{2\pi}{2X_0}\right)} = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u + (2a + 1)k\pi\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u + k\pi\right)} = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u\right)}{-\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u\right)} = \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u\right)}
\end{aligned} \tag{D.40}$$

y los nulos de la función se encuentran en las posiciones tales que

$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0u &= k\pi \\
u &= \frac{k\pi}{\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0} \\
u &= \frac{2k\pi}{(2a + 1)\frac{2\pi}{X_0}} \\
u &= \frac{kX_0}{2a + 1} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned} \tag{D.41}$$

salvo cuando $u \rightarrow kX_0$, con $k \in \mathbb{Z}$ ya que, a partir de las aproximaciones del seno cuando el argumento hace que el seno sea muy pequeño,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \approx x, \quad (\text{D.42})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x) \approx -x + \pi, \quad (\text{D.43})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \sin(x) \approx x - 2\pi, \quad (\text{D.44})$$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \sin(x) \approx (-1)^k (x - k\pi), \quad (\text{D.45})$$

$$\lim_{x \rightarrow kX_0} \sin\left(\frac{2\pi}{X_0}x\right) \approx \frac{2\pi}{X_0}(x - kX_0), \quad (\text{D.46})$$

$$\lim_{x \rightarrow kX_0} \sin\left(\frac{\pi}{X_0}x\right) \approx (-1)^k \frac{\pi}{X_0}(x - kX_0) \quad (\text{D.47})$$

así,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow kX_0} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0 u\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u\right)} &\approx \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k \left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0 (u - kX_0)}{(-1)^k \frac{\xi_0}{2}(u - kX_0)} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2a + 1 = \infty. \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Para el cálculo de B , se busca su integral antes del paso al límite, ya que se sabe que

$$\begin{aligned} B &= \int_{u=-\frac{X_0}{2}+kX_0}^{\frac{X_0}{2}+kX_0} \delta_0(u) du = \\ &= \int_{u=-\frac{X_0}{2}+kX_0}^{\frac{X_0}{2}+kX_0} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)\xi_0 u\right)}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}u\right)} du = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{\xi_0}{2}u, \quad u = -\frac{X_0}{2} + kX_0 \Rightarrow v = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \\ dv = \frac{\xi_0}{2}du, \quad u = \frac{X_0}{2} + kX_0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{\xi_0} \int_{v=-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin\left((2a+1)v\right)}{\sin(v)} dv = \\ &= \{b = 2a + 1\} = \\ &= \frac{X_0}{\pi} \int_{v=-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sin(bv)}{\sin(v)} dv = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} w = bv, \quad v = -\frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow w \rightarrow -\infty \\ dw = b dv, \quad v = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow w \rightarrow \infty, \end{array} \right\} = \\ &= \frac{X_0}{\pi} \int_{w=-\infty}^{\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{\sin(w)}{\sin\left(\frac{w}{b}\right)} dw = \\ &= \frac{X_0}{\pi} \int_{w=-\infty}^{\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{\sin(w)}{\frac{w}{b}} dw = \\ &= \frac{X_0}{\pi} \int_{w=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w)}{w} dw = \\ &= \frac{X_0}{\pi} \pi = \\ &= X_0, \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

por tanto, finalmente,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0(x'-x)} = X_0\delta_0(x-x') = X_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'-kX_0). \quad (\text{D.50})$$

D.7. DSF $[\cos(\xi_0 x)]$ a partir de $\mathbf{T}_{\delta_0}[\cos(\xi_0 x)]$

Sea

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[\cos(\xi_0 x)] = \cos(\xi_0 x'). \quad (\text{D.51})$$

El desarrollo en serie de Fourier $a(m) = \mathbf{DSF}[\cos(\xi_0 x)]$ se puede encontrar a partir de $f(x')$ según la ecuación del cambio de base (4.96) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} \cos(\xi_0 x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} \frac{e^{j\xi_0 x'} + e^{-j\xi_0 x'}}{2} e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{2X_0} \left(\int_{x'=\langle X_0 \rangle} e^{j(1-m)\xi_0 x'} dx' + \int_{x'=\langle X_0 \rangle} e^{-j(1+m)\xi_0 x'} dx' \right) = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} e^{j(1-m)\xi_0 x'} \Big|_0^{X_0} - \frac{1}{j(m+1)\xi_0} e^{-j(1+m)\xi_0 x'} \Big|_0^{X_0} \right) & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} e^{j(1-m)\xi_0 x'} \Big|_0^{X_0} + \int_{x'=\langle X_0 \rangle} dx' \right) & \text{si } m = -1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(\int_{x'=\langle X_0 \rangle} dx' + \frac{1}{j(m+1)\xi_0} e^{-j(1+m)\xi_0 x'} \Big|_0^{X_0} \right) & \text{si } m = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} \left(e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{X_0} X_0} - e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{X_0} 0} \right) - \right. & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \left. -\frac{1}{j(m+1)\xi_0} \left(e^{-j(m+1)\frac{2\pi}{X_0} X_0} - e^{-j(m+1)\frac{2\pi}{X_0} 0} \right) \right) & \\ \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} \left(e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{X_0} X_0} - e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{X_0} 0} \right) + X_0 \right) & \text{si } m = -1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(X_0 - \frac{1}{j(m+1)\xi_0} \left(e^{-j(m+1)\frac{2\pi}{X_0} X_0} - e^{-j(m+1)\frac{2\pi}{X_0} 0} \right) \right) & \text{si } m = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} (e^{-j2\pi(m-1)} - e^0) - \right. & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \left. -\frac{1}{j(m+1)\xi_0} (e^{-j2\pi(m+1)} - e^0) \right) & \\ \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} (e^{-j2\pi(m-1)} - e^0) + X_0 \right) & \text{si } m = -1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(X_0 - \frac{1}{j(m+1)\xi_0} (e^{-j2\pi(m+1)} - e^0) \right) & \text{si } m = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} (1-1) - \frac{1}{j(m+1)\xi_0} (1-1) \right) & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(-\frac{1}{j(m-1)\xi_0} (1-1) + X_0 \right) & \text{si } m = -1 \\ \frac{1}{2X_0} \left(X_0 - \frac{1}{j(m+1)\xi_0} (1-1) \right) & \text{si } m = 1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } m = -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } m = 1 \end{cases} = \\
 &= \frac{1}{2} \delta(m+1) + \frac{1}{2} \delta(m-1). \quad (\text{D.52})
 \end{aligned}$$

D.8. DSF $[P_{0,\Delta}(x)]$ a partir de $\mathbf{T}_{\delta_0}[P_{0,\Delta}(x)]$

Sea

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0}[P_{0,\Delta}(x)] = P_{\Delta}(x' - kX_0). \quad (\text{D.53})$$

El desarrollo en serie de Fourier $a(m) = \mathbf{DSF}[P_{0,\Delta}(x)]$ se puede encontrar a partir de $f(x')$ según la ecuación del cambio de base (4.96) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} P_{\Delta}(x' - kX_0) e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=kX_0-\frac{\Delta}{2}}^{kX_0+\frac{\Delta}{2}} e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left[e^{-jm\xi_0 x'} \right]_{kX_0-\frac{\Delta}{2}}^{kX_0+\frac{\Delta}{2}} = \\
 &= \frac{1}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left(e^{-jm\xi_0(kX_0+\frac{\Delta}{2})} - e^{jm\xi_0(kX_0-\frac{\Delta}{2})} \right) = \\
 &= \frac{2}{X_0} \frac{1}{2j} \frac{e^{jm\xi_0(kX_0+\frac{\Delta}{2})} - e^{jm\xi_0(kX_0-\frac{\Delta}{2})}}{m\xi_0} = \\
 &= \frac{2}{X_0} \frac{1}{2j} \frac{e^{jm\frac{2\pi}{X_0}kX_0} e^{jm\xi_0\frac{\Delta}{2}} - e^{jm\frac{2\pi}{X_0}kX_0} e^{-jm\xi_0\frac{\Delta}{2}}}{m\xi_0} = \\
 &= \frac{2}{X_0} \frac{1}{2j} \frac{e^{jmk2\pi} \left(e^{jm\xi_0\frac{\Delta}{2}} - e^{-jm\xi_0\frac{\Delta}{2}} \right)}{m\xi_0} = \\
 &= \frac{2}{X_0} \frac{1}{2j} \frac{e^{jm\xi_0\frac{\Delta}{2}} - e^{-jm\xi_0\frac{\Delta}{2}}}{m\xi_0} = \\
 &= \frac{2}{X_0} \frac{\sin\left(m\xi_0\frac{\Delta}{2}\right)}{m\xi_0} = \\
 &= \frac{2\Delta}{2X_0} \frac{\sin\left(m\frac{2\pi}{X_0}\frac{\Delta}{2}\right)}{m\frac{2\pi}{X_0}\frac{\Delta}{2}} = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \frac{\sin\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right)}{m\pi\frac{\Delta}{X_0}} = \\
 &= \frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right). \quad (\text{D.54})
 \end{aligned}$$

D.9. $\mathbf{T}_{\delta_0} [P_{0,\Delta}(x)]$ a partir de DSF $[P_{0,\Delta}(x)]$

Sea

$$a(m) = \mathbf{DSF} [P_{0,\Delta}(x)] = \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc} \left(m\pi \frac{\Delta}{X_0} \right). \quad (\text{D.55})$$

Los coeficientes $f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0} [P_{0,\Delta}(x)]$ se pueden encontrar a partir de $a(m)$ según la ecuación del cambio de base (4.97) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{X_0} \operatorname{sinc} \left(m\pi \frac{\Delta}{X_0} \right) e^{jm\xi_0 x'} = \\ &= b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(m\pi b) e^{jm\xi_0 x'} = \\ &= b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jm\pi b} - e^{-jm\pi b}}{2jm\pi b} e^{jm\frac{2\pi}{X_0} x'} = \\ &= \frac{b}{2j} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(b+\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(b-\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b} \right) = \\ &= \frac{b}{2j} (S_1(x') - S_2(x')), \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

donde se ha hecho $b = \frac{\Delta}{X_0}$ y son

$$S_1(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(b+\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b}, \quad (\text{D.57})$$

$$S_2(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(b-\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b}. \quad (\text{D.58})$$

Haciendo

$$A = \left(b + \frac{2}{X_0} x' \right), \quad (\text{D.59})$$

$$B = \left(b - \frac{2}{X_0} x' \right), \quad (\text{D.60})$$

se tiene

$$\begin{aligned} S_1(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(b+\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b} = \\ &= \frac{\left(b + \frac{2}{X_0} x' \right)}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(b+\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{\left(b + \frac{2}{X_0} x' \right) m\pi} = \\ &= \frac{A}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jAm\pi}}{Am\pi} = \\ &= \frac{A}{b} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Am\pi)}{Am\pi} + j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Am\pi)}{Am\pi} \right) = \\ &= \frac{A}{b} \left(\frac{\cos(Am\pi)}{Am\pi} \Big|_{m=0} + j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Am\pi)}{Am\pi} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

ya que $\frac{\cos(Am\pi)}{Am\pi}$ es una función discreta impar que, al sumarla a lo largo de un intervalo simétrico, su resultado será nulo. Tan sólo queda indeterminado el valor en $m = 0$, que, aunque al ser una función impar debería ser 0, no está definido. Continuando con el desarrollo, haciendo el cambio $m' = Am$,

$$\begin{aligned}
 S_1(x') &= \frac{A}{b} \left(\frac{\cos(Am\pi)}{Am\pi} \Big|_{m=0} + j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Am\pi)}{Am\pi} \right) = \\
 &= \frac{A}{b} \left(\frac{\cos(Am\pi)}{Am\pi} \Big|_{m=0} + j \sum_{m'|\frac{m'}{A} \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(m'\pi)}{m'\pi} \frac{1}{|A|} \right) = \\
 &= \frac{1}{b} \frac{\cos(Am\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} + \frac{j}{b} \text{sign}(A), \tag{D.62}
 \end{aligned}$$

puesto que la función sinc(m), al ser par, su suma es igual tanto si A es positivo como si es negativo, además,

$$\sum_{m'|\frac{m'}{A} \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(m'\pi)}{m'\pi} = 1 \tag{D.63}$$

porque

$$\text{sinc}(m'\pi) = \begin{cases} 0 & m' \neq 0 \\ 1 & m = 0, \end{cases} \tag{D.64}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 S_2(x') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(b-\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{m\pi b} = \\
 &= \frac{(b-\frac{2}{X_0}x')}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(b-\frac{2}{X_0}x')m\pi}}{(b-\frac{2}{X_0}x')m\pi} = \\
 &= \frac{B}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jBm\pi}}{Bm\pi} = \\
 &= \frac{B}{b} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Bm\pi)}{Bm\pi} - j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Bm\pi)}{Bm\pi} \right) = \\
 &= \frac{B}{b} \frac{\cos(Bm\pi)}{Bm\pi} \Big|_{m=0} - j \sum_{m'|\frac{m'}{B} \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(m'\pi)}{m'\pi} \frac{1}{|B|} = \\
 &= \frac{1}{b} \frac{\cos(Bm\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} - \frac{j}{b} \text{sign}(B), \tag{D.65}
 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
f(x') &= \frac{b}{2j} (S_1(x') - S_2(x')) = \\
&= \frac{b}{2j} \left(\frac{1}{b} \frac{\cos(Am\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} + \frac{j}{b} \operatorname{sign}(A) - \frac{1}{b} \frac{\cos(Bm\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} + \frac{j}{b} \operatorname{sign}(B) \right) = \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{\cos(Am\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} - \frac{\cos(Bm\pi)}{m\pi} \Big|_{m=0} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{sign}(A) + \operatorname{sign}(B)) = \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - (Am\pi)^2}{m\pi} \Big|_{m=0} - \frac{1 - (Bm\pi)^2}{m\pi} \Big|_{m=0} \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{sign}(A) + \operatorname{sign}(B)) = \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{m\pi} - \frac{A^2 m^2 \pi^2}{m\pi} \Big|_{m=0} - \frac{1}{m\pi} + \frac{B^2 m^2 \pi^2}{m\pi} \Big|_{m=0} + \frac{1}{2} (\operatorname{sign}(A) + \operatorname{sign}(B)) \right) = \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{m\pi} - \frac{1}{m\pi} + \frac{B^2 m^2 \pi^2}{m\pi} - \frac{A^2 m^2 \pi^2}{m\pi} \Big|_{m=0} + \frac{1}{2} (\operatorname{sign}(A) + \operatorname{sign}(B)) \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\operatorname{sign}(A) + \operatorname{sign}(B)) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sign} \left(b + \frac{2}{X_0} x' \right) + \operatorname{sign} \left(b - \frac{2}{X_0} x' \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sign} \left(\frac{\Delta}{X_0} + \frac{2}{X_0} x' \right) + \operatorname{sign} \left(\frac{\Delta}{X_0} - \frac{2}{X_0} x' \right) \right) = \\
&= P_\Delta(x'), \tag{D.66}
\end{aligned}$$

donde finalmente se ha eliminado la indeterminación de $\frac{\cos(m\pi)}{m\pi}$ en $m = 0$.

D.10. DSF $[K]$ a partir de $\mathbf{T}_{\delta_0} [K]$

Sea

$$f(x') = \mathbf{T}_{\delta_0} [K] = K. \quad (\text{D.67})$$

El desarrollo en serie de Fourier $a(m) = \mathbf{DSF} [K]$ se puede encontrar a partir de $f(x')$ según la ecuación del cambio de base (4.96) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} f(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} K e^{-jm\xi_0 x'} dx' = \\
 &= \begin{cases} \left[\frac{K}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} e^{-jm\xi_0 x'} \right]_{X_0}^{x'+X_0} & m \neq 0 \\ \frac{K}{X_0} \int_{x'=\langle X_0 \rangle} e^{-j0\xi_0 x'} dx' & m = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left(e^{-jm\xi_0(x'+X_0)} - e^{-jm\xi_0 x'} \right) & m \neq 0 \\ \frac{K}{X_0} X_0 & m = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left(e^{-jm\frac{2\pi}{X_0} X_0} e^{-jm\xi_0 x'} - e^{-jm\xi_0 x'} \right) & m \neq 0 \\ K & m = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left(e^{-j2\pi m} e^{-jm\xi_0 x'} - e^{-jm\xi_0 x'} \right) & m \neq 0 \\ K & m = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{X_0} \frac{1}{-jm\xi_0} \left(e^{-jm\xi_0 x'} - e^{-jm\xi_0 x'} \right) & m \neq 0 \\ K & m = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ K & m = 0 \end{cases} = \\
 &= K\delta(m). \quad (\text{D.68})
 \end{aligned}$$

D.11. DSF a partir de la TF en variable continua

Sean

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx, \quad (\text{D.69})$$

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (\text{D.70})$$

El desarrollo en serie de Fourier $a(m)$ se puede encontrar a partir de la transformada de Fourier $F(\xi)$ según la ecuación del cambio de base (4.127) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) S(x; m) dx, \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

siendo

$$\begin{aligned} S(x; m) &= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right) e^{-j\xi x} d\xi = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \xi - m\xi_0, \\ d\xi' = d\xi, \end{array} \right\} = \\ &= \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{X_0}{2}\xi'\right)}{\frac{X_0}{2}\xi'} e^{-j(\xi'+m\xi_0)x} d\xi' = \\ &= e^{-jm\xi_0 x} \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{X_0}{2}\xi'\right)}{\frac{X_0}{2}\xi'} e^{-jx\xi'} d\xi' = \\ &= e^{-jm\xi_0 x} I(x), \end{aligned} \quad (\text{D.72})$$

donde

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{X_0}{2}\xi'\right)}{\frac{X_0}{2}\xi'} e^{-jx\xi'} d\xi' = \\ &= \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\frac{X_0}{2}\xi'} - e^{-j\frac{X_0}{2}\xi'}}{2j\frac{X_0}{2}\xi'} e^{-jx\xi'} d\xi' = \\ &= \frac{1}{jX_0} \left(\int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi' - \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi' \right) = \\ &= \frac{1}{jX_0} (I_1(x) - I_2(x)), \end{aligned} \quad (\text{D.73})$$

de donde

$$I_1(x) = \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi', \quad (\text{D.74})$$

$$I_2(x) = \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi'; \quad (\text{D.75})$$

así

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi' = \\
&= \left(\frac{X_0}{2}-x\right) \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi'}}{\left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi'} d\xi' = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \left(\frac{X_0}{2}-x\right)\xi', \quad \xi' = -\infty \Rightarrow \zeta = -\infty \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) \\ d\zeta = \left(\frac{X_0}{2}-x\right)d\xi', \quad \xi' = \infty \Rightarrow \zeta = \infty \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) \end{array} \right\} = \\
&= \left(\frac{X_0}{2}-x\right) \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\left(\frac{X_0}{2}-x\right)} d\zeta \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) = \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\zeta}}{\zeta} d\zeta = \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) \left(\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\zeta)}{\zeta} d\zeta + j \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) = \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right) j \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \\
&= j\pi \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}-x\right), \tag{D.76}
\end{aligned}$$

de la misma manera

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi'}}{\xi'} d\xi' = \\
&= \left(\frac{X_0}{2}+x\right) \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi'}}{\left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi'} d\xi' = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \left(\frac{X_0}{2}+x\right)\xi', \quad \xi' = -\infty \Rightarrow \zeta = -\infty \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) \\ d\zeta = \left(\frac{X_0}{2}+x\right)d\xi', \quad \xi' = \infty \Rightarrow \zeta = \infty \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) \end{array} \right\} = \\
&= \left(\frac{X_0}{2}+x\right) \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\left(\frac{X_0}{2}+x\right)} d\zeta \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) = \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\zeta}}{\zeta} d\zeta = \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) \left(\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\zeta)}{\zeta} d\zeta - j \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) = \\
&= -\operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right) j \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \\
&= -j\pi \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2}+x\right), \tag{D.77}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta tanto en (D.76) como en (D.77) que

$$\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0 \tag{D.78}$$

por ser una función impar integrada a lo largo de un intervalo par. Así pues,

$$\begin{aligned}
 S(x; m) &= e^{-jm\xi_0 x} I(x) = \\
 &= e^{-jm\xi_0 x} \frac{1}{jX_0} (I_1(x) - I_2(x)) = \\
 &= e^{-jm\xi_0 x} \frac{1}{jX_0} \left(j\pi \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2} - x\right) + j\pi \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2} + x\right) \right) = \\
 &= \frac{\pi}{X_0} \left(\operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2} - x\right) + \operatorname{sign}\left(\frac{X_0}{2} + x\right) \right) e^{-jm\xi_0 x} = \\
 &= \frac{2\pi}{X_0} P_{X_0}(x) e^{-jm\xi_0 x}, \tag{D.79}
 \end{aligned}$$

y, finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
 a(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) S(x; m) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2\pi}{X_0} P_{X_0}(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \\
 &= \frac{1}{X_0} \int_{x=-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f(x) e^{-jm\xi_0 x} dx. \tag{D.80}
 \end{aligned}$$

D.12. TF a partir del DSF en variable continua

Sean

$$a(m) = \mathbf{DSF}[f_0(x)] = \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx, \quad (\text{D.81})$$

$$F(\xi) = \mathbf{TF}[f(x)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (\text{D.82})$$

La transformada de Fourier $F(\xi)$ se puede encontrar a partir del desarrollo en serie de Fourier $a(m)$ según la ecuación del cambio de base (4.128) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0) = \\ &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \delta(\xi - m\xi_0) = \\ &= \frac{2\pi}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\xi_0 x} \delta(\xi - m\xi_0) dx = \\ &= \frac{2\pi}{X_0} \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \delta(\xi - m\xi_0) dx = \\ &= \frac{2\pi}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - m\xi_0) \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-j\xi x} dx = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx' \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-j\xi x} dx, \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

puesto que

$$\frac{2\pi}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - m\xi_0) = \mathbf{TF} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) \right] = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx', \quad (\text{D.84})$$

así,

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx' \int_{x=\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-j\xi x} dx = \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx' \int_{x=-\infty}^{\infty} f_c(x) e^{-j\xi x} dx, \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

donde $f_c(x)$ es una señal igual que $f_0(x)$ en un periodo y 0 para el resto de valores de $x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) e^{-j\xi x'} dx' \int_{x=-\infty}^{\infty} f_c(x) e^{-j\xi x} dx = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) f_c(x) e^{-j\xi(x+x')} dx dx' = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = x + x', \\ du = dx, \end{array} \right\} = \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) f_c(u - x') e^{-j\xi u} du dx' = \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x' - kX_0) f_c(u - x') e^{-j\xi u} dx' du = \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_c(u - kX_0) e^{-j\xi u} du = \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} f_0(u) e^{-j\xi u} du = F(\xi), \tag{D.86}
\end{aligned}$$

ya que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_c(u - kX_0) = f_0(u) \tag{D.87}$$

por tener $f_c(x)$ un soporte de longitud X_0 , por lo que no se produce solapamiento, dando lugar a la señal periódica $f_0(x)$.

D.13. $\varepsilon(k; m\Omega_0)$

El conjunto de funciones $\varepsilon(k; \Omega)$ para el cambio de base entre la transformada de Fourier y el desarrollo en serie de Fourier para funciones periódicas de variable discreta, que aparece en (4.162) es

$$\varepsilon(k; \Omega) = \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}. \quad (\text{D.88})$$

Se pretende obtener una expresión para la particularización de $\Omega = m\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}m$, así,

$$\begin{aligned} \varepsilon(k; m\Omega_0) &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m\Omega_0-k\Omega_0)\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m-k)\Omega_0} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m-k)\Omega_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m-k)\Omega_0\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0-1}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{j\frac{N_0}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0} - j\frac{1}{2}(m-k)\frac{2\pi}{N_0}} \frac{\sin((m-k)\pi)}{\sin\left((m-k)\frac{\pi}{N_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0} e^{j(m-k)\pi} e^{-j(m-k)\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin((m-k)\pi)}{\sin\left((m-k)\frac{\pi}{N_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{N_0} (-1)^r e^{-jr\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin(r\pi)}{\sin\left(r\frac{\pi}{N_0}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

pero

$$\sin(r\pi) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{Z}, \quad (\text{D.90})$$

$$\sin\left(r\frac{\pi}{N_0}\right) = 0, \quad \forall r \in N_0\mathbb{Z}, \quad (\text{D.91})$$

por lo que la función valdrá 0 para todos los valores de $r = m - k$, salvo aquéllos que sean múltiplos de N_0 , en los cuales se producirá una indeterminación, así, para $r = pN_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0} (-1)^{pN_0} e^{-jpN_0\frac{\pi}{N_0}} \frac{\sin(pN_0\pi)}{\sin\left(pN_0\frac{\pi}{N_0}\right)} &= \frac{1}{N_0} (-1)^{pN_0} e^{-jp\pi} \frac{\sin(pN_0\pi)}{\sin(p\pi)} = \\ &= \frac{1}{N_0} (-1)^{pN_0} (-1)^p \frac{\sin(pN_0\pi)}{\sin(p\pi)}, \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

conociendo, además, la aproximación del seno para argumentos que lo hacen muy pequeño

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \sin(x) \approx (-1)^k (x - k\pi), \quad (\text{D.93})$$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \sin(N_0x) \approx (-1)^{kN_0} N_0 (x - k\pi) \quad (\text{D.94})$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0} (-1)^{pN_0} (-1)^p \frac{\sin(pN_0\pi)}{\sin(p\pi)} &= \lim_{x \rightarrow p\pi} \frac{1}{N_0} (-1)^{p(N_0+1)} \frac{\sin(N_0x)}{\sin(x)} \approx \\
&\approx \frac{1}{N_0} (-1)^{p(N_0+1)} \frac{(-1)^{pN_0} N_0 (x - p\pi)}{(-1)^p (x - p\pi)} = \\
&= (-1)^{p(N_0+1)} (-1)^{pN_0} (-1)^{-p} = \\
&= (-1)^{pN_0+p+pN_0-p} = \\
&= (-1)^{2pN_0} = \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{D.95}$$

es decir,

$$\varepsilon(k; m\Omega_0) = \delta_0(k - m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - m - pN_0). \tag{D.96}$$

D.14. DSF a partir de la TF en variable discreta

Sean

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \quad (\text{D.97})$$

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x_0(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-j\Omega n}. \quad (\text{D.98})$$

El desarrollo en serie de Fourier $a(k)$ se puede encontrar a partir de la transformada de Fourier $X(\Omega)$ según la ecuación del cambio de base (4.174) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-j\Omega n} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \int_{\Omega=\langle 2\pi \rangle} e^{j\frac{N_0-1}{2}(\Omega-k\Omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\Omega-k\Omega_0)\right)} e^{-j\Omega n} d\Omega = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \Theta = -(\Omega - k\Omega_0) \\ d\Theta = -d\Omega \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \int_{\Theta=\langle 2\pi \rangle} e^{-j\frac{N_0-1}{2}\Theta} \frac{\sin\left(-\frac{N_0}{2}\Theta\right)}{\sin\left(-\frac{1}{2}\Theta\right)} e^{j(\Theta-k\Omega_0)n} d\Theta = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \int_{\Theta=\langle 2\pi \rangle} e^{-j\frac{N_0-1}{2}\Theta} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}\Theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Theta\right)} e^{j\Theta n} d\Theta = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} 2\pi \mathbf{TF}^{-1} \left[e^{-j\frac{N_0-1}{2}\Theta} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}\Theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Theta\right)} \right] = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \bar{P}_{N_0}(n) = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \\ &= \mathbf{DSF}[x_0(n)], \end{aligned} \quad (\text{D.99})$$

donde

$$\bar{P}_{N_0}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N_0 \\ 0 & n < 0, n \geq N_0 \end{cases}, \quad (\text{D.100})$$

ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{TF} [\bar{P}_{N_0}(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_{N_0}(n) e^{-j\Omega n} = \\
&= \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-j\Omega n} = \\
&= \frac{1 - e^{-j\Omega N_0}}{1 - e^{-j\Omega}} = \\
&= \frac{e^{-j\Omega \frac{N_0}{2}} \left(e^{j\Omega \frac{N_0}{2}} - e^{-j\Omega \frac{N_0}{2}} \right)}{e^{-j\Omega \frac{1}{2}} \left(e^{j\Omega \frac{1}{2}} - e^{-j\Omega \frac{1}{2}} \right)} = \\
&= e^{-j\frac{N_0-1}{2}\Omega} \frac{\sin\left(\frac{N_0}{2}\Omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}. \tag{D.101}
\end{aligned}$$

D.15. TF a partir del DSF en variable discreta

Sean

$$a(k) = \mathbf{DSF}[x_0(n)] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \quad (\text{D.102})$$

$$X(\Omega) = \mathbf{TF}[x_0(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) e^{-j\Omega n}. \quad (\text{D.103})$$

La transformada de Fourier $X(\Omega)$ se puede encontrar a partir del desarrollo en serie de Fourier $a(k)$ según la ecuación del cambio de base (4.175) a partir de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jk\Omega_0 n} \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} \delta_0(\Omega - k\Omega_0) = \\ &= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} \frac{1}{2\pi} \mathbf{TF}[e^{jk\Omega_0 m}] = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 m} e^{-j\Omega m} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega m} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 m} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega m} N_0 \mathbf{DSF}[e^{jm\Omega_0 k}] = \\ &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega m} \delta_0(n - m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) \delta_0(n - m) e^{-j\Omega m} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_0(m) e^{-j\Omega m} = \\ &= \mathbf{TF}[x_0(n)], \end{aligned} \quad (\text{D.104})$$

siendo

$$\begin{aligned}
N_0 \mathbf{DSF} \left[e^{jm\Omega_0 k} \right] &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{jm\Omega_0 k} e^{-jn\Omega_0 k} = \\
&= \sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j(m-n)\Omega_0 k} = \\
&= \begin{cases} \frac{1-e^{j(m-n)\Omega_0 N_0}}{1-e^{j(m-n)\Omega_0}} & m \neq n + pN_0 \\ \sum_{k=0}^{N_0-1} 1 & m = n + pN_0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1-e^{j(m-n)\frac{2\pi}{N_0} N_0}}{1-e^{j(m-n)\Omega_0}} & m \neq n + pN_0 \\ N_0 & m = n + pN_0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1-e^{j2\pi(m-n)}}{1-e^{j(m-n)\Omega_0}} & m \neq n + pN_0 \\ N_0 & m = n + pN_0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1-1}{1-e^{j(m-n)\Omega_0}} & m \neq n + pN_0 \\ N_0 & m = n + pN_0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & m \neq n + pN_0 \\ N_0 & m = n + pN_0 \end{cases} = \\
&= N_0 \delta_0(n-m). \tag{D.105}
\end{aligned}$$

D.16. $\mathbf{T}_\delta [\delta_0(n)]$ a partir de $\mathbf{DSF} [\delta_0(n)]$

Sea

$$a(k) = \mathbf{DSF} [\delta_0(n)] = \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-m). \quad (\text{D.106})$$

Los coeficientes $p(n') = \mathbf{T}_\delta [\delta_0(n)]$ se pueden encontrar a partir del desarrollo en serie de Fourier $a(k) = \mathbf{DSF} [\delta_0(n)]$ según la ecuación del cambio de base (4.197) a partir de la siguiente demostración²:

$$\begin{aligned} p(n') &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k-m) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \delta(k-m) e^{jk\Omega_0 n'} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{jm\Omega_0 n'} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N_0} \frac{e^{jt\Omega_0 n'} - e^{j(t+N_0)\Omega_0 n'}}{1 - e^{j\Omega_0 n'}} & n' \neq pN_0, \quad p \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{jm\Omega_0 pN_0} & n' = pN_0, \quad p \in \mathbb{Z} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N_0} \frac{e^{jt\Omega_0 n'} (1 - e^{jN_0\Omega_0 n'})}{1 - e^{j\Omega_0 n'}} & n' \neq pN_0 \\ \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{jm\frac{2\pi}{N_0} pN_0} & n' = pN_0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{e^{jt\Omega_0 n'}}{N_0} \frac{(1 - e^{jN_0\frac{2\pi}{N_0} n'})}{1 - e^{j\Omega_0 n'}} & n' \neq pN_0 \\ \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} e^{jm2\pi p} & n' = pN_0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{e^{jt\Omega_0 n'}}{N_0} \frac{(1 - e^{j2\pi n'})}{1 - e^{j\Omega_0 n'}} & n' \neq pN_0 \\ \frac{1}{N_0} \sum_{m=\langle N_0 \rangle} 1 & n' = pN_0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0 & n' \neq pN_0 \\ 1 & n' = pN_0 \end{cases} = \\ &= \delta_0(n'). \end{aligned} \quad (\text{D.107})$$

²Al desarrollar el sumatorio $\sum_{m=\langle N_0 \rangle}$ como una suma geométrica, se toma como término inicial el valor $m = t$, siendo este $t \in \mathbb{Z}$ arbitrario, observando que el resultado es independiente del valor de t , y por tanto, del intervalo de longitud N_0 en el que se realice el sumatorio.

D.17. $\mathbf{TH}[T_{T_0}(t)]$

El siguiente desarrollo demuestra cuál es la transformada de Hilbert de una función triangular de ancho T_0 .

$$\begin{aligned}
I(t') &= \mathbf{TH}[T_{T_0}(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{T_{T_0}(t)}{\pi(t-t')} dt = \\
&= \int_{t=-T_0}^0 \frac{\frac{1}{T_0}t + 1}{\pi(t-t')} dt + \int_{t=0}^{T_0} \frac{-\frac{1}{T_0}t + 1}{\pi(t-t')} dt = \\
&= \int_{t=-T_0}^0 \frac{1}{T_0\pi} \left(1 + \frac{t'}{t-t'}\right) dt + \int_{t=-T_0}^0 \frac{1}{\pi(t-t')} dt + \\
&\quad + \int_{t=0}^{T_0} -\frac{1}{T_0\pi} \left(1 + \frac{t'}{t-t'}\right) dt + \int_{t=0}^{T_0} \frac{1}{\pi(t-t')} dt = \\
&= \frac{1}{T_0\pi} (t + t' \operatorname{Ln}|t-t'|) \Big|_{-T_0}^0 + \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t-t'| \Big|_{-T_0}^0 + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{T_0\pi}\right) (t + t' \operatorname{Ln}|t-t'|) \Big|_0^{T_0} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t-t'| \Big|_0^{T_0} = \\
&= \frac{1}{T_0\pi} (t' \operatorname{Ln}|t'| + T_0 - t' \operatorname{Ln}|t' + T_0|) + \frac{1}{\pi} (\operatorname{Ln}|t'| - \operatorname{Ln}|t' + T_0|) + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{T_0\pi}\right) (t' \operatorname{Ln}|t' - T_0| + T_0 - t' \operatorname{Ln}|t'|) + \frac{1}{\pi} (\operatorname{Ln}|t' - T_0| - \operatorname{Ln}|t'|) = \\
&\quad = \frac{1}{T_0\pi} \left(T_0 + t' \operatorname{Ln}\left|\frac{t'}{t' + T_0}\right|\right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t' + T_0| + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{T_0\pi}\right) \left(T_0 + t' \operatorname{Ln}\left|\frac{t' - T_0}{t'}\right|\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t' - T_0| = \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{t'}{T_0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}\left|\frac{t'}{t' + T_0}\right| - \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t' + T_0| - \frac{1}{\pi} - \frac{t'}{T_0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}\left|\frac{t' - T_0}{t'}\right| + \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}|t' - T_0| = \\
&= \frac{t'}{T_0} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Ln}\left|\frac{t'}{t' + T_0}\right| - \operatorname{Ln}\left|\frac{t' - T_0}{t'}\right|\right) + \frac{1}{\pi} (\operatorname{Ln}|t' - T_0| - \operatorname{Ln}|t' + T_0|) = \\
&\quad = \frac{t'}{T_0\pi} \operatorname{Ln}\left|\frac{t'^2}{t'^2 - T_0^2}\right| + \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln}\left|\frac{t' - T_0}{t' + T_0}\right|. \tag{D.108}
\end{aligned}$$

D.18. $\mathbf{TH}[\Gamma(t)]$

El siguiente desarrollo demuestra cuál es la transformada de Hilbert de la función escalón.

$$I(t') = \mathbf{TH}[\Gamma(t)] \quad (\text{D.109})$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\Gamma(t) \quad (\text{D.110})$$

$$\mathbf{TH}[\delta(t)] = \mathbf{TH}\left[\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right] = \frac{d}{dt}\mathbf{TH}[\Gamma(t)] \quad (\text{D.111})$$

$$-\frac{1}{\pi t'} = \frac{d}{dt}\mathbf{TH}[\Gamma(t)] \quad (\text{D.112})$$

$$\mathbf{TH}[\Gamma(t)] = \int -\frac{1}{\pi t'} dt' = -\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'| + C \quad (\text{D.113})$$

pero como la transformada de Hilbert³ no distingue constantes y

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \mathbf{TH}^{-1}[\mathbf{TH}[\Gamma(t)]] = -\mathbf{TH}[\mathbf{TH}[\Gamma(t)]] = \\ &= -\mathbf{TH}\left[-\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'| + C\right] = \mathbf{TH}\left[\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'|\right], \end{aligned} \quad (\text{D.114})$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{TH}[\Gamma(t)] &= \mathbf{TH}\left[\mathbf{TH}\left[\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'|\right]\right] = \\ &= -\mathbf{TH}^{-1}\left[\mathbf{TH}\left[\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'|\right]\right] = -\frac{1}{\pi} \text{Ln}|t'|. \end{aligned} \quad (\text{D.115})$$

³En la segunda igualdad de (D.111) se ha utilizado la propiedad de que la derivada de la transformada de Hilbert de una señal es igual que la transformada de Hilbert de la derivada de la señal. A continuación se utiliza la propiedad de que la transformada de Hilbert inversa de una señal es igual que la transformada de Hilbert de esa señal con signo negativo. Ver [1] y [61].

D.19. Relación de equivalencia en \mathcal{L}^p

Sea \mathcal{L}^p el conjunto de funciones de variable continua $f(x)$ con $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ y con p -norma finita, es decir $\|f(x)\|_p < \infty, \forall f(x)$. Se quiere probar que la relación entre dos funciones definida como

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0, \quad (\text{D.116})$$

donde $\mu(B)$ es la medida de Lebesgue del conjunto B , es decir, *dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes si y sólo si difieren en un conjunto de medida nula*, es una relación de equivalencia.

A partir de la definición del Ap. B.19, para que sea una relación de equivalencia tiene que cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- Reflexiva:

$$f(x) \sim f(x). \quad (\text{D.117})$$

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq f(x)\}) = 0, \quad (\text{D.118})$$

- Simétrica:

$$\text{si } f(x) \sim g(x) \Rightarrow g(x) \sim f(x). \quad (\text{D.119})$$

Sea $u(x) = f(x) - g(x)$,

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) &= \mu(\{x \in \Omega : f(x) - g(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : -u(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : g(x) \neq f(x)\}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.120})$$

- Transitiva:

$$\text{si } f(x) \sim g(x) \text{ y } g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x).$$

Sean $u(x) = f(x) - g(x)$ y $v(x) = g(x) - h(x)$. Por un lado se tiene que

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}) = 0, \quad (\text{D.121})$$

$$\mu(\{x \in \Omega : g(x) \neq h(x)\}) = \mu(\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}) = 0. \quad (\text{D.122})$$

Sea $w(x) = u(x) + v(x) = f(x) - h(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \Omega : f(x) - h(x) \neq 0\}) &= \mu(\{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : u(x) + v(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\} \cup \{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}) = \\ &= \mu(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}) + \mu(\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}) - \\ &\quad - \mu(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\} \cap \{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}) = \\ &= 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.123})$$

Por tanto se demuestra que es una relación de equivalencia.

D.20. L^2 y l^2 son espacios de Hilbert

Se quiere comprobar si las p -normas definidas en la Secc. 8.2.1, es decir,

$$\|x_0(n)\|_p = \left(\sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x_0(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.124})$$

$$\|x(n)\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.125})$$

$$\|f_0(x)\|_p = \left(\int_{x=\langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.126})$$

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.127})$$

cumplen la ley del paralelogramo y, por tanto, los espacios l^p y L^p puedan ser a su vez espacios de Hilbert.

Dado que las cuatro definiciones de norma (D.124)-(D.127) para los cuatro espacios de señal son formalmente iguales, se hará la demostración para la norma del espacio de señal de variable continua, teniendo en cuenta que para el resto de espacios la demostración es equivalente.

Sea la p -norma para $1 \leq p < \infty$ definida como

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.128})$$

por la ley del paralelogramo se tiene que cumplir que

$$\|f(x) + g(x)\|_p^2 + \|f(x) - g(x)\|_p^2 = 2 \left(\|f(x)\|_p^2 + \|g(x)\|_p^2 \right). \quad (\text{D.129})$$

Se tienen las cuatro expresiones

$$\|f(x) + g(x)\|_p^2 = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}, \quad (\text{D.130})$$

$$\|f(x) - g(x)\|_p^2 = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}, \quad (\text{D.131})$$

$$\|f(x)\|_p^2 = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}, \quad (\text{D.132})$$

$$\|g(x)\|_p^2 = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}. \quad (\text{D.133})$$

Por un lado, a partir del **teorema del binomio**⁴, la potencia p de una suma es

$$|f(x) + g(x)|^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} |f(x)|^{p-i} |g(x)|^i, \quad (\text{D.134})$$

y la de una resta es

$$|f(x) - g(x)|^p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} |f(x)|^{p-i} |g(x)|^i, \quad (\text{D.135})$$

⁴Ver Teorema del Binomio en el Ap. C.1.

así

$$\begin{aligned}
& \|f(x) + g(x)\|_p^2 + \|f(x) - g(x)\|_p^2 = \\
& = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} = \\
& = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} |f(x)|^{p-i} |g(x)|^i dx \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} |f(x)|^{p-i} |g(x)|^i dx \right)^{\frac{2}{p}} = \\
& = 2 \left(\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \right). \tag{D.136}
\end{aligned}$$

En primer lugar, para poder desarrollar la suma de términos de la penúltima igualdad, el valor de p tendría que ser 2. Por otro lado, en caso de que se pudiera realizar esa suma, el resultado no puede tener componentes de la forma $|f(x)|^{p-i} |g(x)|^i$ con $i \neq 0$ ó p . De aquí se deduce en primer lugar que p tiene que ser entero, ya que i es un contador entero y tiene que alcanzar p . Dado que para cada valor de i los términos $|f(x)|^{p-i} |g(x)|^i$ y $|f(x)|^{p-i} |g(x)|^i (-1)^i$ son iguales para i par y opuestos para i impar, su suma se anularía para los valores de i impares, pero se tendría que anular para todo valor de $i \neq 0$ y p , es decir, para $i = 1, 2, 3, \dots, p-1$. Por tanto i sólo puede tomar un valor entre 1 y $p-1$, por lo que $1 = p-1$ y, así, $p = 2$, como era de esperar. Se puede comprobar fácilmente que para $p = 2$ sí se cumple la identidad de paralelogramo, puesto que

$$\begin{aligned}
\|f(x) + g(x)\|_2^2 + \|f(x) - g(x)\|_2^2 &= \int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx + \int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx = \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2 \operatorname{Re} \{f(x) g^*(x)\} \right) dx + \\
&+ \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 - 2 \operatorname{Re} \{f(x) g^*(x)\} \right) dx = \\
&= 2 \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right) dx = \\
&= 2 \int_{x=-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \int_{x=-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \\
&= 2 \left(\|f(x)\|_2^2 + \|g(x)\|_2^2 \right). \tag{D.137}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $p = \infty$ se comprueba también que no cumple la identidad del paralelogramo, ya que

$$\|f(x) + g(x)\|_{\infty}^2 + \|f(x) - g(x)\|_{\infty}^2 = \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \right)^2 + \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \right)^2. \tag{D.138}$$

Tomando, por ejemplo $f(x) = P_1(x)$ y $g(x) = P_1(x-1)$, se tiene que

$$\|f(x) + g(x)\|_{\infty}^2 + \|f(x) - g(x)\|_{\infty}^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \tag{D.139}$$

pero, por otro lado,

$$2 \left(\|f(x)\|_{\infty}^2 + \|g(x)\|_{\infty}^2 \right) = 2(1^2 + 1^2) = 4, \tag{D.140}$$

por lo que

$$\|f(x) + g(x)\|_{\infty}^2 + \|f(x) - g(x)\|_{\infty}^2 \neq 2 \left(\|f(x)\|_{\infty}^2 + \|g(x)\|_{\infty}^2 \right), \tag{D.141}$$

no se cumple la ley del paralelogramo y, por tanto, la norma infinito no proviene de un producto escalar.

Bibliografía

- [1] J. Heredia Juesas. *Análisis General de la Teoría de Señales y Sistemas para su Aplicación al Modelado de Problemas Físicos*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón, Diciembre 2009.
- [2] J. Heredia Juesas, *Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para el Análisis de Problemas Lineales No Invariantes*. Tesis de Máster en Tecnologías de la Información y Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM), EPSIG, 2010.
- [3] E. Gago-Ribas, L. Carin, L. B. Felsen, *Analysis of conducting strips by using MM and asymptotic techniques*. Research Report (123 pages) at Weber Research Institute, Polytechnic University of Brooklyn, Farmingdale, NY. USA, 1992.
- [4] E. Gago-Ribas, L. B. Felsen, *Analytical study of finite strips (asymptotic analysis)*. Research Report (68 pages) at Weber Research Institute, Polytechnic University of Brooklyn, Farmingdale, NY. USA, 1992.
- [5] E. Gago-Ribas, L. B. Felsen, *Analytical study of infinite periodic arrays (asymptotic analysis)*. Research Report (88 pages) at Weber Research Institute, Polytechnic University of Brooklyn, Farmingdale, NY. USA, 1992.
- [6] E. Gago-Ribas, L. B. Felsen, *Analytical study of infinite periodic arrays (asymptotic analysis). Second part: Arrays of strips. Line source illumination summary. Comparison with GTD analysis*. Research Report (32 pages) at Weber Research Institute, Polytechnic University of Brooklyn, Farmingdale, NY. USA, 1993.
- [7] E. Gago-Ribas, L. B. Felsen, *Ray theory for scattering by two-dimensional quasiperiodic Plane finite arrays*. Research Report at Departament of Aerospace & Mechanical Engineering, Boston University, Boston, USA, 1994. Ref. AM-94-011.
- [8] L. B. Felsen, E. Gago-Ribas, “Ray Theory for Scattering by Two-Dimensional Quasiperiodic Plane Finite Arrays”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 44, No. 3, pp. 375-382, Marzo 1996.
- [9] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, *Complex Beams*, Informe de investigación (81 pags.) dentro del proyecto “Análisis y parametrización de problemas de dispersión electromagnética mediante técnicas asintóticas e híbridas y su aplicación al desarrollo de modelos de predicción radioeléctrica en banda ancha (TIC95-0320)”, Dept. de Teoría de la Señal y Comunicaciones e I. T. (Universidad de Valladolid), España, 1996.
- [10] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “High-frequency analytical study of scattering by infinite periodic arrays of strips under Gaussian beam incidence”, *20th ESTEC Antenna Workshop on Millimetre Wave Antenna Technology and Antenna Measurement*. ESA. ESTEC, Actas del workshop pp. 163-170, Noordwijk. The Netherlands, Junio 1997.
- [11] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “Asymptotic solution of the radiation integral for an infinite periodic array of strips under Gaussian beam solution”, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '97)*, Actas del congreso pp. 57-60, Torino, Italia, Septiembre 1997.

- [12] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, “2D complex spaces in electromagnetics”, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA'97)*, Actas del congreso pp. 191-194, Torino, Italia, Septiembre 1997.
- [13] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, “Analytical parametrization of a 2D real propagation space in terms of complex electromagnetic beams”, *Transactions on Electronics. Special Issue on Electromagnetic Theory - Scattering and Diffraction (IE-ICE)*, Vol. E80C, No. 11, pp. 1434-1439, Japan, Nov. 1997.
- [14] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, *Espacios complejos en electromagnetismo*, Informe de investigación (351 pags.) dentro del proyecto “Espacios complejos en electromagnetismo y su aplicación a problemas de radiación, dispersión y guiado de haces (PB97-0487)”, Dept. de Teoría de la Señal y Comunicaciones e I. T. (Universidad de Valladolid), España, 1998.
- [15] E. Heyman, L. B. Felsen, “Gaussian beam and pulsed-beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, No. 7, pp. 1588-1611, 2001.
- [16] G. Kaiser, “Complex-distance potential theory, wave equations, and physical wavelets: real physics in complex spacetime”, *Mathematical Methods on Applied Sciences*, Vol. 25, pp. 1577–1588, 2002.
- [17] G. Kaiser, “Physical wavelets and their sources: Real physics in complex space-time”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 36, No. 30, R291-R338, 2003.
- [18] G. Kaiser, “Electromagnetic wavelets and their applications to communication”, Short Course at University of Oviedo, Telecommunication School, Gijón, Spain, 2008. <http://www.wavelets.com/pages/kodak.html#oldcourses>
- [19] G. Kaiser, “Generalized Huygens principle with pulsed-beam wavelets”, Short Course at University of Oviedo, Telecommunication School, Gijón, Spain, 2009. <http://www.wavelets.com/pages/kodak.html#oldcourses>
- [20] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “Inhomogeneous cylindrical waves: an approach to complex beams”, *IEEE AP-S International Symposium*, University of Central Florida, Actas del congreso pp. 1396-1399, Orlando, Florida, USA, Julio 1999.
- [21] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, “Complex distances and complex angles in beam propagation and scattering”, *4th Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory and Applications*, Actas del congreso pp. 103-110, Universidad de Vigo, Vigo, España, Septiembre 1999.
- [22] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “High frequency-far field conditions for complex source fields”, *Millenium Conference on Antennas and Propagation (AP 2000)*, Actas del congreso, pp. 25, Davos, Suiza, Abril 2000.
- [23] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “On the application of the analytical continuation from real to complex spaces to some EM field solutions”, *The Fifth International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory*, Chinese Institute of Electronics (ISAPE 2000), Actas del congreso, pp. 61-64, Beijing, China, Agosto 2000.
- [24] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “Complex space beam analysis of scattering problems: a first example”, *URSI 2001 International Symposium on Electromagnetic Theory*, University of Victoria, Actas del congreso, pp. 135-137, Victoria, Canadá, Mayo 2001.

- [25] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, “2D complex point source radiation problem. I. Complex distances and complex angles”, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences (Elektrik)*. Special Issue on Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Techniques (Rev&Ed. L.B.Felsen), Vol. 10, No. 2, pp. 317-343, Turkey, 2002.
- [26] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “2D complex point source radiation problem. II. Complex beams”, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences (Elektrik)*. Special Issue on Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Techniques (Rev&Ed. L.B.Felsen), Vol. 10, No. 2, pp. 345-369, Turkey, 2002.
- [27] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, “Challenges and perspectives of complex spaces and complex signal theory analysis in electromagnetics: a first approach”, *Workshop/Mini-Symposium on Electromagnetics in a Complex World: Challenges and Perspectives*. Celebrado conjuntamente con la Investidura Dr. Honoris Causa del Profesor Leopold B. Felsen (ponencia invitada), Benevento, Italia, Febrero 2003.
- [28] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, “Challenges and perspectives of complex spaces and complex signal theory analysis in electromagnetics: first steps”, en *Electromagnetics in a Complex World. Challenges and Perspectives*, Springer Verlag (Springer Proceedings in Physics), Vol. 96, pp. 175-188, ISBN 3-540-20235-8, USA, 2003.
- [29] C. Dehesa Martínez, M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, *Sobre la extensión compleja de soluciones de la ecuación de onda – About complex extensions to the solution of the wave equation in electromagnetics*, Informe de investigación (34 págs.) dentro del proyecto “Espacios complejos en electromagnetismo y su aplicación a problemas de radiación, dispersión y guiado de haces (TIC2002-03121)”, Dept. de Teoría de la Señal y Comunicaciones e I. T. (Universidad de Valladolid) y Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones (Dept. IEECS, Universidad de Oviedo), España, 2005.
- [30] M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, E. Gago-Ribas, “About complex extensions and their application in electromagnetics”, *International Symposium on Complex Computing-Networks: A Link Between Brain-Like and Wave-Oriented Electrodynamical Algorithms*. Celebrado conjuntamente a la concesión de los Drs. Honoris Causa de los Profesores Leon O. Chua y Leopold B. Felsen (ponencia invitada), Dogus University, Istanbul, Turkey, Junio 2005.
- [31] M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, E. Gago-Ribas, “About complex extensions and their application in electromagnetic”, in *Complex Computing-Networks: A Link Between Brain-Like and Wave-Oriented Electrodynamical Algorithms*, Springer Verlag (Springer Proceedings in Physics), Vol. 104, pp. 81-86, ISBN 3-540-30635-8, USA, 2006.
- [32] M. J. González Morales, E. Gago Ribas, C. Dehesa Martínez, “Complex analysis of the induced currents on a perfectly conducting plane under complex beam incidence”, *Progress in Electromagnetic Research (PIER)*, Vol. 76, pp. 299-326, USA, 2007.
- [33] M. J. González Morales, E. Gago Ribas, “Scattering by a finite strip under complex beam incidence - Asymptotic evaluation in the complex space domain”, *PIERS Online*, Vol. 3, No. 5, pp. 675-679, USA, 2007 (<http://piers.org/piersonline/piers.php?volume=3&number=5&year=2007>)
- [34] E. Gago-Ribas, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, R. Mahillo Isla, F. Varona de Miguel, “Complex signal theory in electromagnetics: first analysis, some results and future challenges”, *Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2007)* Ponencia invitada (Sesión: Direct and Inverse Scattering Problems for Rough Surfaces), Actas del congreso, pp. 1150-1151, Beijing, China, Marzo 2007.

- [35] M. J. González Morales, E. Gago-Ribas, “Scattering by a finite strip under complex beam incidence - Asymptotic evaluation in the complex space domain”, *Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2007)*, Actas del congreso, pp. 1456-1460, Beijing, China, Marzo 2007.
- [36] R. Mahillo-Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa-Martínez, “Diffraction of 2D complex beams by a perfect conductor half-plane: a spectral approach”, *Days on Diffraction 2007*, pp. 67-72, Saint Petersburg, Rusia, Mayo-Junio 2007.
- [37] R. Mahillo-Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa-Martínez, “2D complex beam representations in terms of cylindrical harmonics”, *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2007)*, Prague, Czech Republic, Agosto 2007.
- [38] M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, E. Gago-Ribas, R. Mahillo Isla, F. Varona de Miguel, “About complex extensions and their application in electromagnetics”, *Days on Diffraction 2008* (Ponencia invitada V. E. Grikurov Memorial session), Actas del congreso, pp. 12, ISSN/ISBN: 1559-9450 / 978-1-934142-01-1, San Petersburg, Rusia, Junio 2008.
- [39] R. Mahillo-Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa-Martínez, “Regularization of complex beams”, *12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory 2008*, Conference Proceedings, IEEE: CF08761-PRT, pp. 242-244, ISBN: 978-1-4244-2284-5, Odesa, Ukraine, Junio-Julio 2008.
- [40] R. Mahillo Isla, *Haces complejos: Espectro, regularización y aplicación a problemas de dispersión*, Tesis Doctoral, Dpto. de Teoría de la Señal y Comunicaciones e Ingeniería Telemática, Universidad de Valladolid, Mayo 2009.
- [41] R. Mahillo Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, “Directive single lobe radiation pattern proposal based on the complex source point method”, *Global Symposium on Millimeter Waves GSMM 2009* (Actas del congreso- IEEE Xplore), Sendai, Japón 2009.
- [42] R. Mahillo Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa-Martínez, “Scattering by a perfect conductor half-plane under 2D complex beams incidence: progress on the geometrical and diffraction contribution”, *Days on Diffraction 2009*, Saint Petersburg, Rusia 2009.
- [43] R. Mahillo Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa-Martínez, “Spectral characterization of 2D complex beams and its relation to Gaussian beams”, *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2009)*, Moscú, Rusia 2009.
- [44] R. Mahillo Isla, M. J. González Morales, C. Dehesa Martínez, “Plane wave spectrum of 2D complex beams”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA)*, Vol. 23, pp. 1123-1131, 2009.
- [45] M. J. González Morales, R. Mahillo Isla, E. Gago-Ribas, C. Dehesa Martínez, “3D complex beams in the spatial and the spectral domains”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA)*, Vol. 24, pp. 1103-1112, USA 2010.
- [46] M. J. González Morales, R. Mahillo Isla, E. Gago-Ribas, C. Dehesa Martínez, “Complex polar coordinates in electromagnetics”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA)*, Vol. 25, pp. 389-398, USA 2011.
- [47] M. J. González Morales, R. Mahillo Isla, C. Dehesa Martínez, E. Gago-Ribas, “Complex point source for the 3D Laplace operator”, *Progress in Electromagnetic Research (PIER)*, Vol. 127, pp. 445-459, USA, 2012.
- [48] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, I.T. Young. *Signals and Systems* 2nd. Ed. Prentice-Hall International, 1997.

- [49] D. K. Lindner, *Introduction to Signals and Systems*. Ed. McGraw-Hill, 1999.
- [50] M. J. Roberts, *Señales y Sistemas (Análisis Mediante Métodos de Transformadas y MATLAB)*. McGraw-Hill, 2004.
- [51] Alexander D. Poularikas. *The Transforms and Applications Handbook. Signals and Systems*. 2nd Ed., Ed. Alexander D. Poularikas Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
- [52] R. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, 1965.
- [53] L. Schwartz. *Métodos Matemáticos para las Ciencias Físicas*. Selecciones Científicas, 1969.
- [54] L. Schwartz. *Théory de Distributions*. Hermann, Paris, 1950.
- [55] J. Ian Richards, Heekyung K. Youn. *Theory of Distributions: A non-technical introduction*. Cambridge University Press, 1990. (ISBN: 0-521-37149-X).
- [56] I. M. Gelfand, G. E. Shilov. *Generalized Functions*. 2nd Ed. Vols. I, II, III. Academic Press, New York, 1964.
- [57] K. Maurin. *Generalized Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups*. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968.
- [58] H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*. Addison-Wesley, 1965.
- [59] V. S. Vladimirov. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Ed. Mir., 1979.
- [60] R. Skinner, J. A. Weil, “An introduction to generalizad functions and their application to static electromagnetic point dipoles, including hyperfine interactions”, *Am. J. Phys.* 57 (9), September 1989.
- [61] A. I. Zayed. *Function and Generalized Function Transformations*. Ed. CRC Press, Inc., 1996. (ISBN 0-8493-7851-6).
- [62] A. Friedman. *Foundations of Modern Analysis*. Northwestern University. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York. 1970 (ISBN: 03-081291-7).
- [63] P. J. Zufiria, Miguel A. Hernández. *Teoría de distribuciones. Funciones de Green*. Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información. E.T.S.I. de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid, 2000. (ISBN: 84-7402-284-3).
- [64] R. de la Madrid. *Quantum Mechanics in Rigged Hilbert Space Language*. Ph.D. Thesis, Universidad de Valladolid, 2001.
- [65] R. de la Madrid. “The role of the rigged Hilbert space in Quantum Mechanics”. arXiv:quant-ph/0502053v1. *European Journal of Physics*, Vol 26, N. 2, pp. 287-312, Febrero 2005.
- [66] R. de la Madrid, “The rigged Hilbert space of the algebra of the one-dimensional rectangular barrier potential”, arXiv:quant-ph/0407195v1, *Journal of Physics A*37, pp. 8129-8157, Julio 2004.
- [67] R. de la Madrid, “The rigged Hilbert space approach to the Gamow states” arXiv:1210.3570v1, *Journal of Mathematics and Physics* 53, 102113, Octubre 2012.
- [68] C. G. Bollini, O. Civitarese, A. L. De Paoli, M. C. Rocca, “Physical representations of Gamow states in a rigged Hilbert space”, *Phys. Lett. B* 382, pp. 205–208, 1996.
- [69] C. G. Bollini, O. Civitarese, A. L. De Paoli, M. C. Rocca, “Gamow states as continuous linear functionals over analytical test functions”, *J. Math. Phys.* 37, pp. 4235–4242, 1996.

- [70] C. G. Bollini, M. C. Rocca, “Convolution of Lorentz Invariant Ultradistributions and Field Theory”, arXiv:hep-th/0312214v1, *Int. J. Theor. Phys.* 43, pp. 1019–1051, 2004.
- [71] A. L. De Paoli, M. A. Estevez, M. C. Rocca, H. Vucetich, “Study of Gamow States in the Rigged Hilbert Space with Tempered Ultradistributions”, arXiv:math-ph/9903029, *Mathematical Physics (math-ph)*, 1999.
- [72] P. A. M. Dirac. *The principles of Quantum Mechanics*. 3rd ed., Clarendon Press, Oxford, 1947.
- [73] J. E. Roberts, “The Dirac bra and ket formalism”, *J. Math. Phys.* 7, pp. 1097–1104, 1966.
- [74] J. E. Roberts, “Rigged Hilbert spaces in quantum mechanics”, *Commun. Math. Phys.* 3, pp. 98–119, 1966.
- [75] J. P. Antoine, “Dirac Formalism and symmetry problems in quantum mechanics I: general Dirac formalism”, *J. Math. Phys.* 10, pp. 53–69, 1969.
- [76] J. P. Antoine, “Dirac Formalism and symmetry problems in quantum mechanics II: symmetry problems”, *J. Math. Phys.* 10, pp. 2276–2290, 1969.
- [77] A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space in Quantum Mechanics*. Boulder Lectures in Theoretical Physics, Vol. 9A, Gordon and Breach, New York, 1967.
- [78] I. Antoniou, S. Tasaki. “Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems”, *Int. J. Quant. Chem.* 44, pp. 425–474, 1993.
- [79] Z. Suchanecki, I. Antoniou, S. Tasaki, O. F. Brandtlow, “Rigged Hilbert spaces for chaotic dynamical systems”, *J. Math. Phys.* 37, pp. 5837–5847, 1996.
- [80] E. Gago-Ribas. *Señales y Sistemas Escalares Unidimensionales de Variable Real: Introducción y Análisis General de Señales y Sistemas de Variable Continua*, Vol. ST-I de la serie *Electromagnetics & Signal Theory Notebooks*. GR Editores, S.L., España, 2002. (fuera de edición) www.greditores.com
- [81] Emilio Gago-Ribas. *Teoría Avanzada de Señales y Sistemas*. Apuntes de la asignatura “Teoría Avanzada de Señales y Sistemas (S6)” del Máster Interuniversitario TICRM con Mención de Calidad, España, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013.
- [82] Emilio Gago-Ribas. *Señales y Sistemas Escalares Unidimensionales de Variable Real. Ejercicios Resueltos*, Vol. ST-II de la serie *Electromagnetics & Signal Theory Notebooks*. GR Editores, S.L., España, 2009 (ISBN 978-84-612-8929-2).
www.greditores.com
- [83] E. Gago-Ribas. *A General Approach to Signals & Systems Theory*. Apuntes a mano (docencia de postgrado).
- [84] F. Varona de Miguel, E. Gago-Ribas, “Another approach to signal theory: a kind of generalization to describe physical problems in engineering”, *International Conference on Engineering and Mathematics (ENMA 2006)*, Actas del congreso pp. 143–150, Bilbao, España, 2006.
- [85] E. Gago-Ribas, F. Varona de Miguel, “Some General Results on Real and Spectral Domains Characterization of Linear Non Invariant Systems”, artículo sin publicar (disponible en versión definitiva).

- [86] F. Varona de Miguel, E. Gago-Ribas. "About Real and Fourier-Spectral Characterization of General Linear Systems", *International Conference on Engineering and Mathematics, (ENMA 2008)* Proceedings, pp. 269-276, Bilbao, España, 7-9 Julio, 2008 (ISBN 978-84-612-5331-9).
- [87] E. Gago-Ribas, A. Serroukh. "A Generalized Signals and Systems Theory Scheme and Its Applications in the Description of Electromagnetic Problems", *Progress in Electromagnetic Research Symposium, PIERS 2009 Proceedings*, pp. 370-374, Moscow, Russia, August 18-21, 2009 (ISSN 1559-9450).
<http://piers.mit.edu/piersproceedings/piers2k9MoscowProc.php?searchname=090220112158>
- [88] E. Gago-Ribas. "A Scheme to Generalize Signal Theory and Its Application to Electromagnetics", *IEEE International Symposium on Antennas & Propagation & US-NC/URSI National Radio Science Meeting, IEEE TAP/URSI 2009*, Ref. 978-1-4244-3647-7/09/\$25.00. Proceedings, Session 232.4 (CD), pp. 1-4, Charleston, SC, USA, June 1-5, 2009 (ISSN 152-3965).
- [89] C. Baladrón Zorita. *Signals & Systems Theory v1.0*. Proyecto Fin de Carrera *Desarrollo de una Herramienta Software para la Docencia de la Teoría de Señales y Sistemas*, E.T.S.I. Telecomunicación de Valladolid, 2006.
- [90] S. Menéndez García. *Signals & Systems Theory v2.0*. Proyecto Fin de Carrera *Desarrollo de una Herramienta Software para el Estudio de la Teoría de Señales y Sistemas*, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Informática de Gijón, 2008.
- [91] E. Gago-Ribas, S. Menéndez García, J. Heredia Juesas. "Software Tool Based on a Generalized Signals & Systems Scheme", *International Journal for Knowledge, Science and Technology (IJKST)*, Vol. 1, No.2, pp. 7-14, Bilbao, Abril 2010.
- [92] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas y Sara Menéndez, "Software Tool Focused on Algebraic Concepts of a Generalized Signals & Systems Theory", *40th IGIP International Symposium on Engineering Education (IGIP)*, pp. 171-175, Santos, Brasil, 27-30 Marzo 2011.
- [93] S. Menéndez García, *Desarrollo de la Herramienta Software "Signals & Systems Theory 4.0" para el Análisis Real y Espectral de Sistemas Lineales No Invariantes*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón, 2011.
- [94] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas y S. Menéndez, "Software Tool for a Generalized Signal Theory", *International Conference on Advanced Electrical Engineering (ICAEE)*, Hong Kong (China), 4-5 Septiembre 2012.
- [95] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas y S. Menéndez, "Software Tool for a Generalized Signal Theory", *Advanced Science Letters*, Vol. 19, No.5, pp. 1362-1366, Mayo 2013.
- [96] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, "A new view of Spectral Analysis of Linear Systems". *31st Progress In Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2012)*, Kuala Lumpur (Malasia), 27-30 Marzo 2012.
- [97] Sara Menéndez García, *Desarrollo de la Herramienta Software "Signals & Systems Theory 5.0" para el Análisis Real y Espectral de Sistemas Lineales No Invariantes*. Tesis de Máster en Tecnologías de la Información y Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM), EPIG, 2012.
- [98] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, "Educational Software Tool for Signals and Systems Theory", *Frontiers in Education (FIE)*, Seattle (EE.UU.), 3-6 Octubre 2012.

- [99] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Software Tool for Implementing the Mathematical Foundations of a Generalized Signals and Systems Theory”, *Meeting on Applied Scientific Computing and Tools (MASCOT13)*, San Lorenzo de El Escorial (España), 26-30 Agosto 2013.
- [100] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, “Summary of a Generalized Signals & Systems Theory for Its Applications to the Description of Electromagnetic Problems”, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 2013)*, Turín (Italia), 9-13 Septiembre 2013.
- [101] S. Segura de León, *Representación integral de operadores no lineales: Operadores de Uryson*. Tesis Doctoral en Ciencias Matemáticas, Universidad de Valencia, 1988.
- [102] K. Hrbacek, T. Jech. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc. New York, 1999 (ISBN: 0-8247-7915-0)
- [103] C. Ivorra Castillo. *Lógica y Teoría de Conjuntos*. Autoedición, 2011.
- [104] G. Cantor. *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos*. 1882.
- [105] E. Linés Escardó. *Análisis Matemático II*. 2^a Ed. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), 1991.
- [106] B. Hernández Boto. *Problemas sobre espacios métricos, normados y de Hilbert*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), 1999.
- [107] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications, Inc. 1993. (ISBN: 0-486-67748-6).
- [108] R. Payá Albert. *Análisis Funcional*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada (UGR), 2012.
- [109] L. M. Navas Vicente. *Análisis Funcional: Espacios normados y espacios de Banach*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Salamanca, 2009.
- [110] R. A. Sáenz Casas. *Análisis Real*. Facultad de Ciencias, Universidad de Colima, México, 2009.
- [111] N. Fava, F. Zó. *Medida e Integral de Lebesgue*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, 2013 (ISSN: 1851-1317).
- [112] S. Grillo, S. Ibáñez, F. Colavecchia. *Matemática II: Integral de Lebesgue*. Área de Matemáticas. Instituto Balseiro, Bariloche, 2011.
- [113] A. de la Villa. *Problemas de Álgebra (3^a Ed.)*. CLAGSA, 1998.
- [114] J. Duoandikoetxea. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN), 2003.
- [115] Y. Zhang. *Functions of a Real Variable*. Department of Mathematics, Purdue University, 2010.
- [116] A. Martínez, L. O. Manuel. *Espacios de Banach*. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario (UNR), 2013.
- [117] H. González Serrano. *Matemática General*. Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile, 2002.
- [118] K. Bryan. *Introduction to Functional Analysis, MA 466*. Department of Mathematics. Rose-Hulman Institute of Technology, 2011.

- [119] M. López Rodríguez. *Teoría de los operadores lineales en espacios de Hilbert*. Ediciones de la Universidad de Murcia, Vol. XXXIII, pp. 3-110, 1979.
- [120] I. Marrero, V. Almeida. *Métodos Matemáticos V: Espacios de Hilbert*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna, 2004.
- [121] Course Hero. *Notes on Hilbert Spaces: Separability and Existence of Bases*. ECE 580, Math. 587, University of Illinois, 2012.
- [122] D. Sundararajan. *The Discrete Fourier Transform. Theory, Algorithms and Applications*. World Scientific Publishing Co, London, 2001 (ISBN: 981-02-4521-1).
- [123] C. Warren Campbell. *Geometric Interpretations of the Discrete Fourier Transform*. National Aeronautics and Space Administration (NASA), Scientific and Technical Information Branch, Washington D.C., 1984.
- [124] <http://www.wolframalpha.com>

Actividades en el Entorno de la Tesis

1. Publicaciones

a) Realizadas:

i. De naturaleza científica:

- [1] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Software Tool for a Generalized Signal Theory”, *Advanced Science Letters*, Vol. 19, No.5, pp. 1362-1366, 2013. (Artículo de Revista), [95].
- [2] E. Gago-Ribas, J. Heredia Juesas, S. Menéndez, “Software Tool Based on a Generalized Signals & Systems Scheme”, *International Journal for Knowledge, Science and Technology (IJKST)*, Vol. 1, No.2, pp. 7-14, Bilbao, 2010. (Artículo de Revista), [91].

ii. De naturaleza docente:

- [1] E. Gago-Ribas, J. Heredia Juesas, “Cuaderno de prácticas de Señales y Sistemas. Bloque 1: Análisis de Señales”, Grado en Ingeniería en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Departamento de Ingeniería Eléctrica. Universidad de Oviedo. 2011-2012, 2012-2013, 2013-2014.
- [2] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, “Cuaderno de prácticas de Señales y Sistemas. Bloque 2: Análisis de Algunos Sistemas de Interés Práctico”, Grado en Ingeniería en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Departamento de Ingeniería Eléctrica. Universidad de Oviedo. 2011-2012, 2012-2013, 2013-2014.

b) En preparación:

i. De naturaleza científica:

- [1] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, “A Scheme to Generalize the Analysis of Linear Systems and Physical Problems in Arbitrary Signal Spaces”. (Artículo de Revista). Borrador disponible.
- [2] E. Gago-Ribas, J. Heredia Juesas, “Some General Results on Real and Spectral Domains Characterization of Linear Non Invariant Systems”. (Artículo de Revista). Borrador disponible.
- [3] E. Gago-Ribas, J. Heredia Juesas, “A general approach to Signals & Systems theory”, *Electromagnetics & Signal Theory Notebooks*. GR Editores SL. (www.greditores.com). (Libro). Borrador disponible.

2. Participación en congresos

- [1] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, “Summary of a Generalized Signals & Systems Theory for Its Applications to the Description of Electromagnetic Problems”. *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, Turín (Italia), 9-13 Septiembre 2013, [100].

- [2] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Software Tool for Implementing the Mathematical Foundations of a Generalized Signals and Systems Theory”. *Meeting on Applied Scientific Computing and Tools (MASCOT13)*, San Lorenzo de El Escorial (España), 26-30 Agosto 2013, [99].
- [3] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Educational Software Tool for Signals and Systems Theory”. *Frontiers in Education (FIE)*, Seattle, WA (EE.UU.), 3-6 Octubre 2012, [98].
- [4] J. Heredia, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Software Tool for a Generalized Signal Theory”. *International Conference on Advanced Electrical Engineering (ICAEE)*, Hong Kong (China), 4-5 Septiembre 2012, [94].
- [5] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, “A new view of Spectral Analysis of Linear Systems”. *31st Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, Kuala Lumpur (Malasia), 27-30 Marzo 2012, [96].
- [6] E. Gago-Ribas, M. Carril Campa, “Complex Parameterization of the Lossy Transmission Line Theory”. *31st Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, Kuala Lumpur (Malasia), 27-30 Marzo 2012. (Ponente de la presentación).
- [7] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, S. Menéndez, “Software Tool Focused on Algebraic Concepts of a Generalized Signals & Systems Theory”. *40th IGIP International Symposium on Engineering Education*, Santos (Brasil), 27-30 Marzo, 2011, [92].

3. Estancias en el extranjero

- a) Universidad Nacional de Rosario (UNR).
 - i. Lugar: Rosario (Argentina).
 - ii. Fechas: Del 16/04/2013 al 18/06/2013.
 - iii. Semanas de duración: 9.1
 - iv. Motivo: Tratamiento de algunos aspectos matemáticos que permitan un posterior desarrollo de la GSST.
- b) Istanbul Technical University (ITÜ).
 - i. Lugar: Estambul (Turquía).
 - ii. Fechas: Del 21/08/2012 al 29/09/2012.
 - iii. Semanas de duración: 5.7
 - iv. Motivo: Estudio de algunas técnicas para el análisis del problema inverso en electromagnetismo y su posible descripción y uso en el marco de la GSST.
- c) Lamar University (LU).
 - i. Lugar: Beaumont, TX (EE.UU.).
 - ii. Fechas: Del 01/06/2011 al 03/07/2011.
 - iii. Semanas de duración: 4.7
 - iv. Motivo: Estudio de los espacios de Hilbert equipados (RHS) y su aplicación al electromagnetismo.

Estas estancias han sido realizadas como condición requerida para la obtención de la Mención Internacional de la presente Tesis Doctoral.

4. Experiencia Docente

a) 2013:

- i. 20 horas de clases de prácticas y posterior evaluación de la asignatura Tratamiento Digital de Señales. Asignatura de cuarto curso de la Ingeniería en Telecomunicación. Universidad de Oviedo.

b) 2012:

- i. 40 horas de clases de prácticas de la asignatura Señales y Sistemas así como tutorías y evaluaciones. Asignatura de segundo curso del grado en Ingeniería en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Universidad de Oviedo.
- ii. Cotutor de la Tesis de Máster en Tecnologías de la Información y Comunicaciones en Redes Móviles *Desarrollo de la Herramienta Software 'Signals & Systems Theory 5.0' para el Análisis Real y Espectral de Sistemas Lineales No Invariantes*, de Sara Menéndez García, EPIG, Universidad de Oviedo, [97].

c) 2011:

- i. 60 horas de clases de prácticas de la asignatura Señales y Sistemas así como tutorías y evaluaciones. Asignatura de segundo curso del grado en Ingeniería en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Universidad de Oviedo.
- ii. Cotutor del Proyecto Final de Carrera en Ingeniería de Telecomunicación *Desarrollo de la Herramienta Software 'Signals & Systems Theory 4.0' para el Análisis Real y Espectral de Sistemas Lineales No Invariantes*, de Sara Menéndez García, EPIG, Universidad de Oviedo, [93].

