

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

**RUIDO AERODINÁMICO TONAL
RADIADO POR UN VENTILADOR
AXIAL EN CAMPO LEJANO:
MECANISMOS DE GENERACIÓN
Y PROPAGACIÓN DEL MISMO**

**Tesis presentada por:
KATIA MARÍA ARGÜELLES DÍAZ**

NOVIEMBRE 2004



Universidad
de Oviedo

Reservados todos los derechos
© El autor

Edita: Universidad de Oviedo
Biblioteca Universitaria, 2007
Colección Tesis Doctoral-TDR nº 20

ISBN: 978-84-690-9134-0
D.L.: AS.04573-2007



Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. INTRODUCCIÓN.

En este último capítulo de la tesis se lleva a cabo una revisión de los trabajos realizados junto con las conclusiones más relevantes que se han alcanzado a lo largo de la misma. Se proponen también una serie de trabajos relacionados con la generación de ruido que podrían acometerse en un futuro con vistas a profundizar en el conocimiento de las características aeroacústicas de las turbomáquinas axiales.

7.2. CONCLUSIONES.

Se ha realizado una revisión teórica de las ecuaciones de gobierno de la Aeroacústica con vistas a establecer el marco de trabajo global en el que se encuadra esta tesis. Para ello, se ha desarrollado la Teoría Aeroacústica Clásica y las características de las fuentes básicas de radiación multipolar (monopolos, dipolos y cuadrupolos) tanto estacionarias como móviles. Se han introducido así los conocimientos básicos que permiten adentrarse en el desarrollo de la analogía aeroacústica de Lighthill con la intención de reformular las ecuaciones de Navier-Stokes



en la forma de una ecuación de ondas con un término fuente cuadrupolar, resoluble mediante la aplicación de la técnica de las funciones de Green. Se ha desarrollado la extensión de la analogía de Lighthill llevada a cabo por Ffowcs Williams y Hawkings para tener en cuenta la presencia de cuerpos sólidos en movimiento arbitrario dentro del campo de flujo. Las soluciones de dicha ecuación obtenidas por Farassat para el ruido rotacional, constituyen la base teórica de todos los cálculos de predicción del ruido generado aerodinámicamente por álabes de turbomáquinas en movimiento rotatorio.

Se ha realizado una revisión teórica de los principales mecanismos de generación de ruido aerodinámico en turbomáquinas, con especial hincapié en el caso particular de configuraciones axiales. Se han analizado los distintos métodos de los que se dispone actualmente para abordar el desarrollo de modelos numéricos que permitan predecir los niveles del ruido aeroacústico generado por turbomáquinas. Tras la revisión de los posibles métodos de análisis numérico, se ha llegado a la conclusión de que en base a los recursos computacionales existentes hoy en día, para preservar los detalles de la geometría tridimensional de la turbomáquina es necesario emplear una aproximación híbrida que desacople el problema aerodinámico del problema aeroacústico.

Por ello, se ha establecido una metodología numérica que permite estudiar por separado el problema de la determinación de las fuentes acústicas mediante técnicas de la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD), y el problema de propagación del ruido al campo lejano mediante un algoritmo que resuelve la formulación integral de Farassat de la ecuación de ondas obtenida por Ffowcs Williams y Hawkings. Se han descrito las distintas fases de la simulación CFD no estacionaria llevada a cabo en orden a obtener los términos fuente de la ecuación de ondas aeroacústica: generación de la geometría y del mallado del modelo bidimensional y del tridimensional, análisis de sensibilidad del mallado, esquemas de turbulencia y modelos del método de los volúmenes finitos que se han implementado. Asimismo, se ha desarrollado la metodología numérica que permite caracterizar la propagación del ruido tonal generado por la turbomáquina al campo lejano – en el dominio temporal y en el dominio de la frecuencia – tomando como datos de partida los resultados de la simulación CFD. Para formular el modelo numérico en el dominio temporal se han considerado las fuentes aeroacústicas responsables del ruido de carga y del ruido de espesor, mientras que para formular el modelo numérico en el dominio de la frecuencia se han considerado únicamente las fuentes aeroacústicas responsables del ruido de carga. La comparación de los resultados obtenidos con ambos modelos ha permitido así conocer la contribución relativa de cada término de ruido al espectro sonoro total.

La metodología numérica desarrollada se ha aplicado al caso particular de un ventilador axial de una única etapa con un estator de trece directrices situado aguas arriba de un rotor de nueve álabes, en orden a reproducir los niveles de ruido – y su distribución espacial en el campo lejano – generados por dicho ventilador como consecuencia del mecanismo de interacción estator-rotor. Las simulaciones se han aplicado a varias configuraciones de funcionamiento del ventilador, en particular, dos gaps axiales o distancias diferentes entre haces, y tres caudales de funcionamiento distintos (nominal, un 15% menos del nominal y un 30% menos del nominal). La comparación de los resultados numéricos obtenidos para cada una de las configuraciones de funcionamiento ha permitido conocer la influencia de dichos parámetros en los efectos aerodinámicos y aeroacústicos de la interacción estator-rotor que tiene lugar en el ventilador axial. Asimismo, para establecer el esquema de



turbulencia más adecuado para modelizar la interacción estator-rotor, tanto desde el punto de vista aerodinámico como desde el punto de vista aeroacústico, se han llevado a cabo simulaciones con el esquema de turbulencia RSM (Reynolds Stress Model) y el esquema de turbulencia LES (Large Eddy Simulation). Paralelamente, con vistas a obtener la contribución estacionaria de dicha interacción estator-rotor al espectro sonoro radiado al campo lejano (ruido de Gutin), se ha desarrollado un modelo del ventilador sin la presencia del estator aguas arriba del rotor, al que se le ha aplicado la metodología numérica basada en la aproximación híbrida.

Con la doble intención de validar los modelos numéricos y obtener patrones de comportamiento del flujo que se desarrolla en el interior del ventilador que las simulaciones no pueden reproducir, se ha diseñado un banco de ensayos y se ha desarrollado una metodología experimental orientada a caracterizar aerodinámica y aeroacústicamente la soplante axial en las distintas configuraciones de funcionamiento a las que se les ha aplicado la metodología numérica. Se ha procedido a caracterizar experimentalmente el funcionamiento global del ventilador mediante la obtención de las curvas características para las dos separaciones o gaps entre haces. Mediante una sonda de presión de cinco orificios se han obtenido distribuciones radiales y circunferenciales de los campos estacionarios de velocidad y de presión en una posición axial entre haces y en una posición axial detrás del rotor. Asimismo, se ha obtenido en las mismas posiciones axiales la distribución radial y circunferencial del campo de velocidad mediante anemometría térmica con una sonda de dos hilos. Mediante transductores piezoeléctricos se han medido las fluctuaciones de presión estática en la carcasa del ventilador sobre el rotor. Finalmente, se han obtenido con un micrófono capacitivo los espectros del nivel de presión sonora (SPL) radiados por el ventilador a distintas posiciones de observación situadas en el campo lejano. Tanto para la sonda de presión de cinco orificios como para la anemometría térmica y el micrófono capacitivo, se han llevado a cabo estimaciones del error experimental introducido por medio del análisis de incertidumbre, que han puesto de manifiesto un grado de precisión aceptable de las medidas realizadas.

Una inspección preliminar de los resultados numéricos obtenidos con el esquema de turbulencia LES y con el esquema de turbulencia RSM ha puesto de manifiesto que las características aerodinámicas no estacionarias de la interacción estator-rotor (definición de las estelas, efecto del paso del rotor, etc.) quedan mucho mejor definidas con el modelo LES a la vista de su comparación con los resultados experimentales de hilo caliente. Además, la comparación de los niveles SPL radiados al campo lejano que se han calculado numéricamente tomando como datos de partida resultados CFD obtenidos con el esquema LES y con el RSM, ha sido concluyente: el modelo LES ha resultado ser muy superior a la hora de caracterizar los fenómenos de propagación aeroacústicos, como es lógico puesto que también ha demostrado ser superior para caracterizar aerodinámicamente la interacción no estacionaria estator-rotor. Como consecuencia de lo anterior, todas las simulaciones numéricas CFD han sido ejecutadas con el esquema de turbulencia LES.

La comparación de los resultados numéricos tridimensionales y los experimentales relativos a las curvas características de la soplante axial, ha puesto de manifiesto la existencia de un excelente acuerdo para el caudal nominal de funcionamiento, mientras que a carga parcial se han observado ligeras discrepancias atribuibles a que con el modelo numérico no se simulan los efectos del huelgo de punta.



Además, las curvas características obtenidas con el modelo numérico bidimensional se apartan aún más del comportamiento experimental real, puesto que con las simulaciones bidimensionales no se tienen en cuenta los efectos de las capas límite en base y punta. Puesto que los resultados numéricos bidimensionales han manifestado que en el campo de flujo desarrollado en el interior del ventilador tienen lugar efectos tridimensionales que no pueden ser ignorados, el resto de los resultados numéricos se han obtenido a través de simulaciones realizadas con el modelo numérico tridimensional. Se ha llevado a cabo también un análisis de las distribuciones radiales del grado de reacción y del incremento de presión generados por el rotor a partir de datos numéricos y de anemometría térmica. Dicho análisis ha puesto de manifiesto un excelente acuerdo entre los resultados experimentales y los numéricos, y también con las premisas teóricas en las que se ha basado el diseño de la soplante. Además, como era de esperar, no se han observado diferencias significativas en el funcionamiento global del ventilador al variar la distancia axial entre coronas. Dentro de las variables globales de funcionamiento se ha realizado también, a modo de primera aproximación al comportamiento del flujo en el interior de la turbomáquina, un análisis de los resultados estacionarios del campo de velocidad y del campo de presión – a la salida del estator y a la salida del rotor – obtenidos con la sonda de presión de cinco orificios para dos separaciones diferentes entre coronas. Dichos resultados han puesto de manifiesto que una mayor proximidad entre haces da lugar a una mayor alteración de la distribución circunferencial y radial del flujo, y han permitido observar la presencia residual de los defectos de velocidad asociados a las estelas de las directrices del estator aguas abajo del rotor. Las distribuciones de presión estática que se han obtenido se encuentran en total acuerdo con la condición de equilibrio radial impuesta en la etapa de diseño del ventilador.

Se ha realizado un análisis de los efectos estacionarios de la interacción estator-rotor que tienen lugar en el interior del ventilador. Para ello se han analizado y comparado entre sí resultados numéricos del modelo tridimensional y resultados experimentales obtenidos con anemometría térmica, que se han promediado a un canal de álabe del rotor. Al igual que con los resultados estacionarios obtenidos con la sonda de presión de cinco orificios, los resultados promediados han puesto de relieve que una mayor proximidad entre haces da lugar a una interacción estator-rotor más fuerte, generando una mayor falta de uniformidad en la distribución radial y circunferencial de las componentes de la velocidad del flujo. Con los resultados promediados también ha sido posible observar las estelas residuales de las directrices aguas abajo del rotor, apareciendo fenómenos de difusión e interacción de las mismas con los álabes. Además, el análisis de los resultados correspondientes al ángulo azimutal promedio ha revelado la existencia de corrientes secundarias en el núcleo y la aparición de dos vórtices contrarrotantes asociados a las caras de succión y de presión de las directrices del estator. Mediante el estudio de los resultados promediados ha sido posible comparar el comportamiento del flujo para distintos caudales de funcionamiento. Así se ha observado que cuando el funcionamiento tiene lugar a carga parcial se produce un aumento considerable de los efectos de capa límite en la base y en la punta de los álabes (separación y desprendimiento) apareciendo en dichas zonas ligeras discrepancias entre los resultados del modelo numérico y los de anemometría térmica. El análisis de los resultados numéricos promediados para el campo de vorticidad ha puesto de manifiesto cómo los mayores valores de vorticidad están asociados a las estelas de las directrices del estator. Se ha realizado también un promedio de las fluctuaciones de presión en la carcasa del ventilador sobre el rotor y se ha obtenido su espectro mediante un algoritmo FFT. Dicho espectro ha revelado que los mayores picos de presión estática promedio se



obtienen a la frecuencia de paso de álabe (BPF) y su primer armónico. De la comparación de los resultados promediados numéricos y experimentales se ha concluido que el modelo tridimensional, a pesar de que a carga parcial no proporciona las mismas prestaciones de funcionamiento que el banco de ensayos, sí es capaz de capturar adecuadamente los fenómenos estacionarios de interacción entre coronas de la soplante.

Se han estudiado los efectos no estacionarios de la interacción estator-rotor que tiene lugar en la soplante axial a partir de resultados numéricos y experimentales. Para ello, se ha llevado a cabo un análisis de los efectos instantáneos de dicha interacción en un canal de paso de álabe para una posición axial situada entre las coronas y una posición axial situada detrás del rotor. Se han analizado también varias configuraciones de funcionamiento del ventilador: dos gaps entre haces y tres caudales de funcionamiento. El análisis de los resultados numéricos obtenidos con el modelo tridimensional para los campos de velocidad y vorticidad ha permitido observar el efecto del paso del rotor sobre las estelas de las directrices del estator, apreciándose fenómenos como el desplazamiento radial de la interacción entre las estelas de las directrices y el bloqueo de los álabes, la fuerte interacción existente en la zona de punta de las estelas de las directrices con el bloqueo del rotor, etc. El análisis de los resultados obtenidos con anemometría térmica ha puesto también de manifiesto la existencia de todos estos fenómenos, confirmándose así que el modelo numérico tridimensional junto a un esquema LES es adecuado para modelizar la interacción no estacionaria entre el estator y el rotor de la soplante. Se han examinado también las fluctuaciones de la presión estática medidas en la carcasa del ventilador sobre el rotor con transductores piezoeléctricos. Así se han podido observar fenómenos del flujo asociados al huelgo radial del ventilador; en particular, la existencia de un vórtice de punta en los álabes del rotor. Puesto que con el modelo numérico tridimensional no se ha tenido en cuenta el huelgo radial, la existencia del vórtice de punta en los álabes del rotor no ha sido reproducida por las simulaciones del campo de flujo, y, por tanto, el modelo aeroacústico no ha podido proporcionar los niveles de ruido radiados al campo lejano consecuencia directa del vórtice de punta en los álabes. Se ha llevado a cabo también un análisis numérico de los esfuerzos ejercidos por el flujo sobre los álabes y las directrices para las dos separaciones consideradas entre haces. Este análisis ha arrojado un resultado concluyente para la generación de ruido: una mayor proximidad entre coronas da lugar a que los esfuerzos soportados por los álabes sean mayores y en consecuencia se genere mayor ruido de carga no estacionario. De la comparación de todos los resultados numéricos y experimentales instantáneos se ha concluido que existe un buen acuerdo entre ambos, quedando así validado el modelo numérico de la región fuente para ser empleado como punto de partida de los cálculos en la región de propagación.

Se ha aplicado la metodología numérica desarrollada – tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia – para caracterizar la propagación al campo lejano del ruido aeroacústico tonal generado por la soplante con las dos separaciones posibles entre coronas, y se han comparado los resultados numéricos con los niveles de presión sonora obtenidos experimentalmente mediante el micrófono capacitivo. Se ha obtenido tanto el nivel de presión sonora total como el correspondiente a la frecuencia de paso de álabe y sus armónicos. En todos los casos, los resultados numéricos obtenidos a partir de la formulación desarrollada en el dominio temporal se han ajustado mucho mejor a los resultados experimentales. Puesto que la diferencia entre la formulación numérica en el dominio temporal y en el de la frecuencia es debida a la contribución del ruido de



espesor, debe concluirse que en el caso particular de la soplante axial considerada, el ruido de espesor debe ser tenido en cuenta, puesto que los álabes del rotor no tienen un espesor lo suficientemente pequeño como para ser despreciable. Comparando los resultados obtenidos para los dos gaps axiales, se ha puesto de relieve que se genera menos ruido cuando la separación entre haces es mayor, y que en dicho caso la contribución del ruido de espesor es más importante, puesto que los esfuerzos aerodinámicos soportados por los álabes son menores y en consecuencia el ruido de carga generado es menor. Se ha llevado a cabo un análisis de la contribución estacionaria de la interacción estator-rotor sobre el ruido radiado al campo lejano. Dicho análisis ha puesto de manifiesto que la mayor parte del ruido radiado al campo lejano por la soplante es consecuencia de los efectos no estacionarios asociados a la interacción estator-rotor. Además, como era de esperar, la contribución estacionaria ha resultado ser más importante cuando la distancia entre haces es mayor. Por tanto, alejar entre sí las coronas de la soplante es un método eficaz para reducir las emisiones sonoras de la misma. El análisis de los resultados experimentales ha puesto de manifiesto la existencia de una parte de ruido en banda ancha que el modelo numérico no puede reproducir. No obstante, el ruido tonal aparece como el mecanismo principal de generación de ruido excepto para posiciones espaciales concretas, en particular, las situadas en el chorro del ventilador. A pesar de que la existencia de una carcasa en el modelo real de la soplante ha afectado a las distribuciones espaciales del nivel de presión sonora en el campo lejano obtenidas con el micrófono capacitivo, la comparación entre los resultados numéricos y los experimentales ha sido satisfactoria. Se dispone así de una herramienta que permite predecir los niveles de ruido tonal generados por una turbomáquina en la etapa de diseño de la misma, y que ayuda a comprender los principales mecanismos de generación de ruido como consecuencia de la interacción estator-rotor – tanto estacionaria como no estacionaria – con vistas a acometer las actuaciones pertinentes para reducir las emisiones sonoras resultantes.

7.3. TRABAJOS FUTUROS.

Finalmente, se proponen aquí una serie de trabajos que pueden abordarse en un futuro para mejorar el conocimiento de los fenómenos de generación de ruido aeroacústico en turbomáquinas.

El modelo numérico basado en técnicas CFD que se ha empleado para caracterizar la aerodinámica del ventilador debería extenderse de forma que tuviese en cuenta el efecto del huelgo radial en la soplante. De esta forma sería posible obtener información sobre el vórtice de punta que se desarrolla en los álabes del rotor y que es responsable de una parte del ruido generado por el ventilador. Además, en la medida que los recursos computacionales lo permitan, el mallado de la geometría tridimensional de la soplante debería refinarse en las proximidades de los álabes y de las directrices, con vistas a conseguir una mayor definición de los efectos de capa límite (separación y desprendimiento) que tienen lugar en torno a ellos.

Sería interesante extender el modelo numérico desarrollado para caracterizar la región de propagación acústica de forma que pueda contemplar la contribución en banda ancha del ruido generado por la soplante y que se propaga al campo lejano. Asimismo, debería introducirse en las simulaciones el efecto de la carcasa del ventilador sobre la propagación de los modos acústicos radiados (fenómenos de dispersión, atenuación, reflexión y refracción de las ondas acústicas).



La metodología experimental desarrollada para caracterizar el ventilador debería completarse con técnicas adicionales. Así, sería interesante emplear galgas extensiométricas para obtener valores experimentales de los esfuerzos sobre los álabes que podrían ser utilizados como punto de partida para las simulaciones de la región de propagación. Por otra parte, emplear sondas de intensimetría permitiría obtener una definición experimental más precisa y completa de la distribución espacial de los niveles de presión sonora generados por la soplante.

La metodología numérica y experimental desarrollada en esta tesis podría ser aplicada al estudio completo de la generación de ruido aeroacústico por interacción rotor-estator, esto es, cuando el rotor se encuentra ubicado aguas arriba del estator. Así se adquiriría un conocimiento adicional de los fenómenos de interacción entre haces que resultan en la generación de ruido por turbomáquinas.

Señalar por último que a medida que se produzca el desarrollo de ordenadores con mayores capacidades de cálculo, el estudio de la generación de ruido aeroacústico por turbomáquinas debe intentar abordarse mediante la aproximación directa, desarrollando para ello los modelos numéricos necesarios.





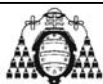
Apéndice I

Método de los volúmenes finitos

I.1. INTRODUCCIÓN.

Por **método de los volúmenes finitos** se designa a la técnica mediante la cual las leyes de conservación en forma integral de la Mecánica de Fluidos se discretizan directamente en el espacio físico, asegurándose de este modo la conservación de las cantidades básicas (masa, momento, energía u otros escalares de interés) a nivel discreto, de forma que puede afirmarse que las *discretizaciones conservativas* son la base del método de los volúmenes finitos (Versteeg, 1995). Dicho método goza además de la enorme ventaja de permitir una división totalmente arbitraria del dominio de interés para el campo de flujo considerado, es decir, puede aplicarse tanto a mallados estructurados como no estructurados, lo cual le dota de una enorme flexibilidad para tratar los problemas de la Mecánica de Fluidos.

La metodología empleada por la técnica de los volúmenes finitos para abordar un problema concreto de Mecánica de Fluidos consta de tres puntos clave fundamentales. En primer lugar el dominio de estudio debe dividirse en volúmenes de control discretos (denominados *celdas*), proceso conocido como *mallado del dominio*. En segundo lugar las ecuaciones de gobierno deben integrarse y linealizarse en cada uno de los volúmenes de control discretos, proceso que conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. En tercer lugar debe resolverse dicho sistema de ecuaciones lineales algebraicas.



El método de los volúmenes finitos puede aplicarse de dos formas distintas al dominio discreto de un fluido, dependiendo de que las variables del campo de flujo se definan en los centroides de las celdas o en los vértices (nodos) de las mismas. En el primer caso se habla de **método de los volúmenes finitos centrado en las celdas**, mientras que en el segundo se habla de **método de los volúmenes finitos centrado en los nodos**, que se ilustran en la *Figura I.1* para un caso unidimensional.

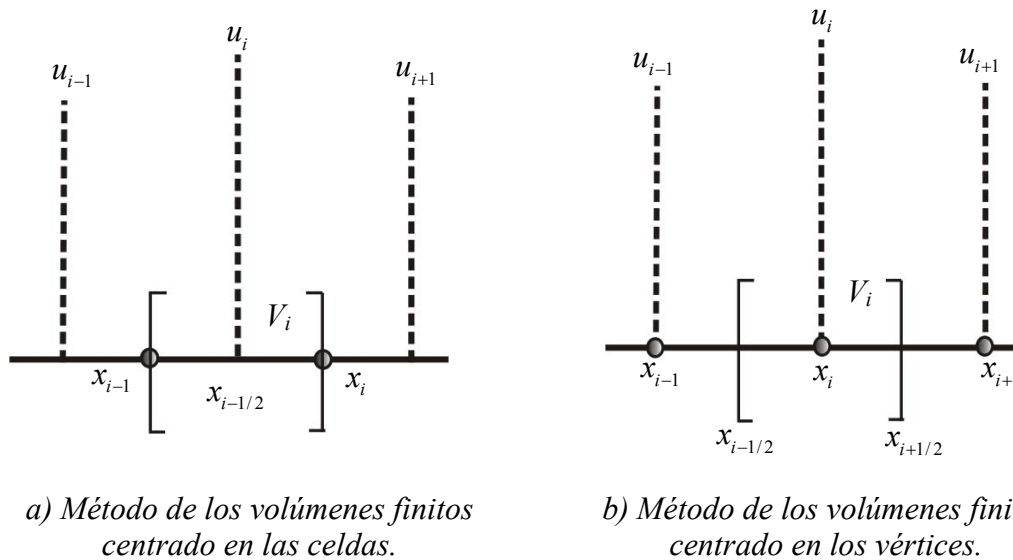


Figura I.1. Representación unidimensional del método de los volúmenes finitos centrado en las celdas y centrado en los vértices.

En el resto del capítulo, los desarrollos del método de los volúmenes finitos se realizan para un método de volúmenes finitos centrado en las celdas (de forma que las variables del flujo serán valores de las mismas promediados en dichas celdas), y para un solver de resolución segregado mediante el cual las ecuaciones de gobierno de los fluidos se resuelven secuencialmente, es decir, segregadas las unas de las otras. El solver segregado utiliza un método implícito de linealización de las ecuaciones, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales con una ecuación para cada celda del dominio computacional, que se resuelve mediante un método iterativo de Gauss-Seidel combinado con un método multigrad algebraico (AMG).

I.2. DISCRETIZACIÓN ESTACIONARIA.

En este apartado se desarrollan las técnicas de discretización que se aplican a las ecuaciones de gobierno estacionarias de la Mecánica de Fluidos para obtener un método de volúmenes finitos centrado en las celdas, dejando la aplicación al caso no estacionario para apartados posteriores. El punto de partida es por tanto la ecuación de transporte estacionaria en forma integral para una variable escalar ϕ genérica (desarrollada en el *Capítulo 2*), dada por:

$$\int_A \rho \vec{\phi} \cdot d\vec{A} = \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\vec{A} + \int_{VC} S_\phi dV \tag{I.1}$$

donde ρ y \vec{v} son, respectivamente, la densidad y la velocidad del fluido, y Γ y S_ϕ son el coeficiente de difusión y el término fuente asociados a la variable escalar ϕ .



La ecuación (I.1) se aplica a cada volumen de control en que se divide el dominio, y la discretización de la misma sobre uno de estos volúmenes proporciona:

$$\sum_{\text{caras}} \rho_f \phi_f \vec{v}_f \vec{A}_f = \sum_{\text{caras}} \Gamma (\nabla \phi)_n \vec{A}_f + S_\phi V \quad (\text{I.2})$$

donde ϕ_f es el valor de ϕ por convección a través de la cara f , $\rho_f \vec{v}_f \vec{A}_f$ es el flujo másico a través de la cara f , \vec{A}_f es el área de la cara f (tal que $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$), $(\nabla \phi)_n$ es el gradiente de la variable escalar perpendicular a la cara f y V es el volumen de la celda. En la ecuación (I.2) el primer término del lado izquierdo corresponde al término convectivo, mientras que el primer término del lado derecho representa el término difusivo y el segundo representa el término fuente. Para utilizar el esquema de discretización (I.2) es necesario conocer los valores de la variable escalar en los centroides de las caras, y a priori, sólo se dispone de los valores de dichas variables en los centros de las celdas, por lo que como veremos más adelante, será necesario emplear algún tipo de esquema de interpolación para calcularlos.

Por lo general la ecuación de transporte discreta (I.2) no es lineal con respecto a las variables desconocidas, que como veremos más adelante son los valores de ϕ en la celda y los valores de ϕ en las celdas vecinas. Una forma lineal de dicha ecuación vendría dada por:

$$a_P \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} \quad (\text{I.3})$$

donde nb hace referencia a las celdas vecinas, y a_P y a_{nb} , son, respectivamente, los coeficientes lineales de ϕ y ϕ_{nb} . Para cada volumen de control discreto se obtienen ecuaciones de la forma (I.3), de modo que el resultado es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Además, el hecho de que la ecuación (I.2) no sea lineal implica controlar el cambio de ϕ mediante una sub-relajación que reduce dicho cambio en cada iteración del esquema numérico (Shaw, 1992):

$$\phi = \phi_{old} + \alpha \Delta \phi \quad (\text{I.4})$$

es decir, el valor actual de ϕ en una celda depende del valor previo de ϕ en la misma celda, ϕ_{old} , del cambio calculado para ϕ , $\Delta \phi$, y del factor de sub-relajación α .

Haciendo uso de la notación representada en la *Figura I.2*, y siendo ϕ_P el valor de la variable escalar en el centro de la celda considerada, la ecuación (I.2) se escribe explícitamente como:

$$\sum_{i=1}^3 (F_{i,h_i+1/2} \phi_{h_i+1/2} - F_{i,h_i-1/2} \phi_{h_i-1/2}) = \sum_{i=1}^3 [D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1})] \quad (\text{I.5})$$

donde $F_i = \rho v_i A_i$ y $D_i = \Gamma A_i / \Delta x_i$, siendo Δx_i la longitud espacial de la celda en las direcciones $i = 1, 2, 3$, respectivamente. En la ecuación (I.5) los valores de la variable ϕ asociados con el término difusivo ya están interpolados a los centros de las caras, puesto



que como la difusión no es afectada por el sentido del flujo en el dominio de estudio todas las celdas adyacentes a la considerada tienen idéntica influencia sobre ella, motivo por el cual en los métodos de volúmenes finitos centrados en las celdas se adopta un esquema de diferenciación central para la discretización numérica del término difusivo, lo que equivale a calcular el gradiente de la variable como sigue (Hirsch, 1990):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)_{h_i+1/2} = \frac{\phi_{h_i+1} - \phi_P}{\Delta x_i}; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)_{h_i-1/2} = \frac{\phi_P - \phi_{h_i-1}}{\Delta x_i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (I.6)$$

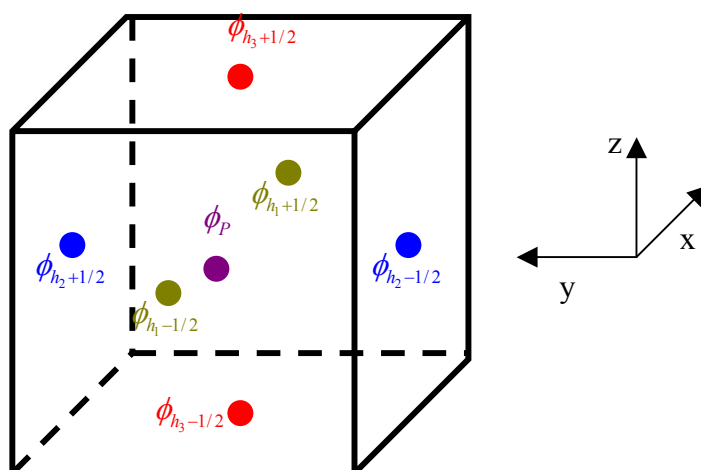


Figura I.2. Nomenclatura del esquema de discretización.

En cambio, el término convectivo sí que es afectado por la dirección del flujo en el dominio de estudio, manifestando una mayor influencia de las celdas situadas aguas arriba a la considerada, por lo que la interpolación de las variables ϕ a los centroides de las caras es más complicada, siendo el tipo de interpolación de este término un condicionante de la convergencia y exactitud del método numérico. La convección de un escalar ϕ depende de la magnitud y dirección del campo de velocidad local. Los **esquemas de interpolación para el término convectivo** se desarrollan suponiendo que dicho campo de velocidad local es conocido (aunque en la práctica esto no es así y el campo de velocidad debe obtenerse como parte de la solución del problema de flujo), y que por supuesto debe satisfacer la ecuación de continuidad.

Las ecuaciones de transporte para las componentes de la velocidad tienen como fuente principal de momento el gradiente del campo de presiones, de forma que si el campo de presiones fuese conocido el proceso de discretización de las ecuaciones de momento sería idéntico al de cualquier otro escalar. Desafortunadamente, el campo de presiones generalmente también tiene que obtenerse como parte de la solución del problema de flujo. Si el flujo es compresible, la ecuación de continuidad puede ser usada como ecuación de transporte para la densidad, y la ecuación de la energía proporciona la ecuación de transporte para la temperatura, de modo que la presión puede obtenerse a partir de la densidad y la temperatura aplicando la correspondiente ecuación de estado. En cambio, si el flujo es incompresible, la densidad es constante, y no está relacionada por definición con la presión. De este modo, el acoplamiento entre la presión y la velocidad introduce una restricción en el campo de flujo: si se aplica un



campo de presiones correcto en las ecuaciones de momento, el campo de velocidad resultante satisfará la continuidad. Este es el objeto de los **métodos de acoplamiento presión-velocidad**, que veremos en apartados subsiguientes.

A continuación se desarrollan los diferentes esquemas de interpolación que pueden emplearse en la discretización del término convectivo, y que pueden agruparse de un modo general en **esquemas de diferenciación central** y **esquemas de diferenciación aguas arriba**. La calidad de los esquemas de interpolación va asociada a la sensibilidad de los mismos a la dirección del flujo.

1.2.1. Esquema de diferenciación central.

Mediante este esquema los valores de la variable ϕ en los centroides de las caras se obtienen a través de una interpolación lineal de sus valores en los centros de las celdas (Versteeg, 1995), es decir:

$$\phi_{h_i+1/2} = \frac{\phi_P + \phi_{h_i+1}}{2}; \quad \phi_{h_i-1/2} = \frac{\phi_{h_i-1} + \phi_P}{2} \quad (I.7)$$

y de esta forma la ecuación de transporte discreta (I.5) se describe como sigue:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left(F_{i,h_i+1/2} \frac{\phi_P + \phi_{h_i+1}}{2} - F_{i,h_i-1/2} \frac{\phi_{h_i-1} + \phi_P}{2} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \end{aligned} \quad (I.8)$$

cuya forma linealizada equivalente a (I.3) viene dada por:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= \sum_{i=1}^3 a_{h_i+1} \phi_{h_i+1} + a_{h_i-1} \phi_{h_i-1}; \quad a_P = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} (F_{i,h_i+1/2} + F_{i,h_i-1/2}) + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} \right] \\ a_{h_i-1} &= D_{i,h_i-1/2} + \frac{1}{2} F_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = D_{i,h_i+1/2} - \frac{1}{2} F_{i,h_i+1/2} \end{aligned} \quad (I.9)$$

Un desarrollo en serie de Taylor de la variable escalar ϕ pone de manifiesto que el esquema (I.9) es exacto a segundo orden. Para garantizar la estabilidad de los esquemas numéricos es importante que se verifique la condición de acotamiento, que establece que en ausencia de fuentes los valores internos en las celdas de la variable ϕ deben estar acotados por sus valores en los contornos de las mismas. El esquema de diferenciación central puede dar lugar a soluciones no acotadas y sin significado físico que conlleven a problemas de estabilidad numérica, y esto, unido a que el esquema no tiene sensibilidad al sentido del flujo, hace que su aplicación sea poco recomendable para discretizar el término convectivo (Pulliam, 1994).

1.2.2. Esquema de diferenciación aguas arriba.

Al contrario que el esquema de diferenciación central, el esquema de diferenciación aguas arriba es sensible a la dirección del flujo cuando interpola los



valores del escalar ϕ a los centroides de las caras. Entre los esquemas de diferenciación aguas arriba los más habituales son: el esquema de diferenciación aguas arriba de primer orden, el esquema de diferenciación aguas arriba de segundo orden, el esquema QUICK y el esquema de la ley de potencia, que se detallan a continuación.

a) Esquema de diferenciación aguas arriba de primer orden.

En este esquema el valor de la variable ϕ en una cara de la celda se toma como el valor de la variable en el centro de la celda adyacente aguas arriba. Por tanto, en el caso de flujo positivo, es decir, de un flujo que transcurre en sentido oeste-este, se tiene que:

$$\phi_{h_i-1/2} = \phi_{h_i-1}; \quad \phi_{h_i+1/2} = \phi_P \tag{I.10}$$

La ecuación de transporte discretizada (I.5) se escribe ahora como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (F_{i,h_i+1/2} \phi_P - F_{i,h_i-1/2} \phi_{h_i-1}) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \end{aligned} \tag{I.11}$$

y en forma linealizada:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= \sum_{i=1}^3 a_{h_i+1} \phi_{h_i+1} + a_{h_i-1} \phi_{h_i-1}; \quad a_P = \sum_{i=1}^3 (F_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2}) \\ a_{h_i-1} &= F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = D_{i,h_i+1/2} \end{aligned} \tag{I.12}$$

En cambio, cuando el sentido de flujo es negativo, es decir, cuando se considera un flujo en el sentido este-oeste, se tiene que:

$$\phi_{h_i-1/2} = \phi_P; \quad \phi_{h_i+1/2} = \phi_{h_i+1} \tag{I.13}$$

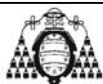
y la ecuación de transporte discretizada se escribe como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (F_{i,h_i+1/2} \phi_{h_i+1} - F_{i,h_i-1/2} \phi_P) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \end{aligned} \tag{I.14}$$

cuya forma linealizada viene dada por:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= \sum_{i=1}^3 a_{h_i+1} \phi_{h_i+1} + a_{h_i-1} \phi_{h_i-1}; \quad a_P = \sum_{i=1}^3 (D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} - F_{i,h_i-1/2}) \\ a_{h_i-1} &= D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = D_{i,h_i+1/2} - F_{i,h_i+1/2} \end{aligned} \tag{I.15}$$

Como su propio nombre indica el esquema de diferenciación aguas arriba de primer orden es exacto a primer orden, con un error de truncamiento similar al del



término del flujo difusivo, y satisface siempre el criterio de acotamiento (Colella, 1994). Para extender a segundo orden la exactitud del esquema de diferenciación aguas arriba se utiliza un esquema de interpolación diferente, conocido como esquema de interpolación aguas arriba de segundo orden.

b) Esquema de diferenciación aguas arriba de segundo orden.

En este esquema se utiliza una interpolación aguas arriba de dos vías con vistas a obtener los valores de la variable escalar en los centroides de las caras. Como su propio nombre indica el esquema de diferenciación aguas arriba de segundo orden es exacto a segundo orden y verifica siempre el criterio de acotamiento (Colella, 1994). Si el sentido de flujo es positivo (oeste-este), se tiene entonces que:

$$\phi_{h_i-1/2} = \frac{3\phi_{h_i-1} - \phi_{h_i-2}}{2}; \quad \phi_{h_i+1/2} = \frac{3\phi_P - \phi_{h_i-1}}{2} \tag{I.16}$$

de modo que la ecuación de transporte discretizada (I.5) se reescribe como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left(F_{i,h_i+1/2} \frac{3\phi_P - \phi_{h_i-1}}{2} - F_{i,h_i-1/2} \frac{3\phi_{h_i-1} - \phi_{h_i-2}}{2} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \end{aligned} \tag{I.17}$$

y en forma algebraica lineal:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= \sum_{i=1}^3 a_{h_i-2} \phi_{h_i-2} + a_{h_i-1} \phi_{h_i-1} + a_{h_i+1} \phi_{h_i+1}; \quad a_P = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{3}{2} F_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} \right) \\ a_{h_i-2} &= -\frac{1}{2} F_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i-1} = \frac{1}{2} F_{i,h_i+1/2} + \frac{3}{2} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = D_{i,h_i+1/2} \end{aligned} \tag{I.18}$$

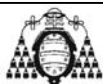
En el caso de que el flujo se desarrolle en sentido negativo (este-oeste) las variables se interpolan como:

$$\phi_{h_i-1/2} = \frac{3\phi_P - \phi_{h_i+1}}{2}; \quad \phi_{h_i+1/2} = \frac{3\phi_{h_i+1} - \phi_{h_i+2}}{2} \tag{I.19}$$

y la ecuación de transporte discretizada se reescribe en este caso como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left(F_{i,h_i+1/2} \frac{3\phi_{h_i+1} - \phi_{h_i+2}}{2} - F_{i,h_i-1/2} \frac{3\phi_P - \phi_{h_i+1}}{2} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \end{aligned} \tag{I.20}$$

cuya forma linealizada proporciona:



$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^3 a_{h_i-1} \phi_{h_i-1} + a_{h_i+1} \phi_{h_i+1} + a_{h_i+2} \phi_{h_i+2}; \quad a_P = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{3}{2} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} \right) \quad (I.21)$$

$$a_{h_i-1} = D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = -\frac{1}{2} F_{i,h_i-1/2} - \frac{3}{2} F_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i+1/2}; \quad a_{h_i+2} = \frac{1}{2} F_{i,h_i+1/2}$$

c) Esquema de diferenciación aguas arriba QUICK.

El esquema QUICK (interpolación cuadrática aguas arriba por cinemática convectiva) emplea una interpolación cuadrática promediada aguas arriba de tres puntos para determinar los valores de las variables en los centroides de las caras de las celdas (Versteeg, 1995), de forma que si el sentido de flujo considerado es positivo:

$$\phi_{h_i-1/2} = \frac{3\phi_P + 6\phi_{h_i-1} - \phi_{h_i-2}}{8}; \quad \phi_{h_i+1/2} = \frac{3\phi_{h_i+1} + 6\phi_P - \phi_{h_i-1}}{8} \quad (I.22)$$

y la ecuación de transporte discreta viene dada por:

$$\sum_{i=1}^3 \left(F_{i,h_i+1/2} \frac{3\phi_{h_i+1} + 6\phi_P - \phi_{h_i-1}}{8} - F_{i,h_i-1/2} \frac{3\phi_P + 6\phi_{h_i-1} - \phi_{h_i-2}}{8} \right) = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \quad (I.23)$$

que en forma lineal se convierte en:

$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^3 a_{h_i-2} \phi_{h_i-2} + a_{h_i-1} \phi_{h_i-1} + a_{h_i+1} \phi_{h_i+1}$$

$$a_P = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{6}{8} F_{i,h_i+1/2} - \frac{3}{8} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} \right) \quad (I.24)$$

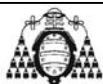
$$a_{h_i-2} = -\frac{1}{8} F_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i-1} = \frac{1}{8} F_{i,h_i+1/2} + \frac{6}{8} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = -\frac{3}{8} F_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i+1/2}$$

Cuando el sentido de flujo es negativo las variables se interpolan como:

$$\phi_{h_i-1/2} = \frac{3\phi_{h_i-1} + 6\phi_P - \phi_{h_i+1}}{8}; \quad \phi_{h_i+1/2} = \frac{3\phi_P + 6\phi_{h_i+1} - \phi_{h_i+2}}{8} \quad (I.25)$$

y la ecuación de transporte discretizada, y su forma linealizada, son en este caso:

$$\sum_{i=1}^3 \left(F_{i,h_i+1/2} \frac{3\phi_P + 6\phi_{h_i+1} - \phi_{h_i+2}}{8} - F_{i,h_i-1/2} \frac{3\phi_{h_i-1} + 6\phi_P - \phi_{h_i+1}}{8} \right) = \sum_{i=1}^3 \left[D_{i,h_i+1/2} (\phi_{h_i+1} - \phi_P) - D_{i,h_i-1/2} (\phi_P - \phi_{h_i-1}) \right] \quad (I.26)$$



$$a_p \phi_p = \sum_{i=1}^3 a_{h_i-1} \phi_{h_i-1} + a_{h_i+1} \phi_{h_i+1} + a_{h_i+2} \phi_{h_i+2}$$

$$a_p = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{3}{8} F_{i,h_i+1/2} - \frac{6}{8} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i+1/2} + D_{i,h_i-1/2} \right) \quad (I.27)$$

$$a_{h_i-1} = \frac{3}{8} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i-1/2}; \quad a_{h_i+1} = -\frac{6}{8} F_{i,h_i+1/2} - \frac{1}{8} F_{i,h_i-1/2} + D_{i,h_i+1/2}; \quad a_{h_i+2} = \frac{1}{8} F_{i,h_i+1/2}$$

El esquema QUICK proporciona exactitud a tercer orden para el flujo resuelto en mallados estructurados alineados con la dirección del flujo. En mallados no estructurados o en mallados mixtos, la exactitud del esquema QUICK se reduce a segundo orden. Bajo ciertas condiciones de flujo este esquema puede dar problemas de estabilidad y soluciones no acotadas (Hirsch, 1990).

d) Esquema de la ley de potencia.

El esquema de discretización de la ley de potencia interpola el valor del escalar ϕ en las caras de las celdas usando una solución exacta de la ecuación de convección-difusión. Por ejemplo, en una dimensión tendríamos la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v_1 \phi) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \quad (I.28)$$

donde Γ y ρv_1 son constantes a lo largo del intervalo Δx . La integración de esta ecuación proporciona una solución que describe como varía la variable escalar ϕ con respecto a la coordenada x :

$$\frac{\phi(x) - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(Pe \frac{x}{L} \right) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (I.29)$$

donde $\phi_0 = \phi|_{x=0}$, $\phi_L = \phi|_{x=L}$ y $Pe = \frac{\rho v_1 L}{\Gamma}$ es el número de Peclet.

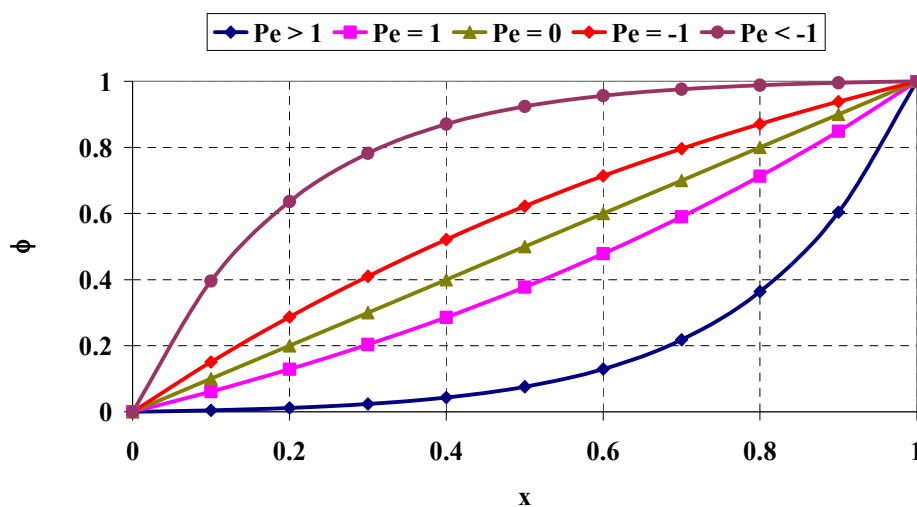


Figura I.3. Variación de la variable escalar en función de x .



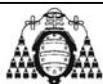
La *Figura 1.3* representa la variación (I.29) de la variable escalar (tomando $\phi_0 = 0$, $\phi_L = 1$ y $L = 1$) para distintos valores del número de Peclet. Como puede observarse en dicha figura, para un número de Peclet alto el valor de ϕ en $x = L/2$ es aproximadamente igual al valor aguas arriba de la variable, lo que implica que cuando el flujo está dominado por la convección la interpolación puede realizarse estableciendo que el valor de ϕ en la cara sea igual al valor de ϕ en el centro de la celda aguas arriba. Cuando $Pe = 0$ (no hay flujo, o se produce difusión pura), el valor de ϕ en las caras puede interpolarse usando un promedio lineal sencillo entre los valores en $x = 0$ y en $x = L$. Cuando el número de Peclet toma un valor intermedio, el valor interpolado de ϕ en $x = L/2$ debe derivarse aplicando una ley de potencia similar a la (I.29). El esquema de la ley de potencia satisface siempre el criterio de acotamiento numérico y es exacto a primer orden en la resolución del flujo.

I.3. ESQUEMAS DE ACOPLAMIENTO PRESIÓN – VELOCIDAD.

En la discretización de las ecuaciones de transporte se ha asumido que el campo de velocidad era conocido, pero como ya se ha indicado, en la realidad dicho campo de velocidad debe obtenerse como parte de la solución del flujo. El término convectivo de las ecuaciones de momento involucra cantidades no lineales, y además las ecuaciones de momento están acopladas y no se dispone de una ecuación de transporte para resolver el campo de presión.

Tanto el problema de la no linealidad como el problema del acoplamiento pueden resolverse aplicando un proceso iterativo para la resolución de las ecuaciones de momento, pero teniendo presentes ciertas características especiales a la hora de discretizar los gradientes de presiones. Para discretizar las ecuaciones de gobierno de la Mecánica de Fluidos mediante el método de los volúmenes finitos se requiere establecer dónde se van a almacenar las variables en cada volumen de control (centros o nodos de las caras). En el método de los volúmenes finitos considerado en esta discusión las variables escalares (presión, densidad, temperatura, etc.) se almacenan en los centros de las celdas, por lo que a priori parece lógico almacenar también en los centros de las celdas las componentes de la velocidad. No obstante, lo anterior puede dar lugar a que un campo de presiones que no es uniforme se comporte como un campo de presiones uniforme, de modo que se generan soluciones sin sentido físico y no se tiene en cuenta apropiadamente la influencia de la presión en las ecuaciones de momento. Este es el motivo por el que en los esquemas de acoplamiento se utiliza un mallado escalonado, es decir, las variables escalares tales como la presión, la densidad, la temperatura, etc., se almacenan en los centros de las celdas, pero las componentes de la velocidad se almacenan en las caras que delimitan dichas celdas (Versteeg, 1995). Obviamente la ventaja del mallado escalonado es que genera las velocidades en las caras de las celdas, justo donde son necesarias para la discretización de los términos de convección, con lo que no es necesario emplear un esquema de interpolación adicional. En la *Figura 1.4* se representa la notación de una celda empleada para discretizar las ecuaciones en un mallado escalonado, siendo (i, j, k) el centro de la celda.

A continuación se detalla la discretización de la ecuación de momento lineal para la componente escalar v_1 de la velocidad, puesto que el proceso de obtención de las correspondientes ecuaciones para las componentes de la velocidad v_2 y v_3 es idéntico, y no se incluye aquí por brevedad.



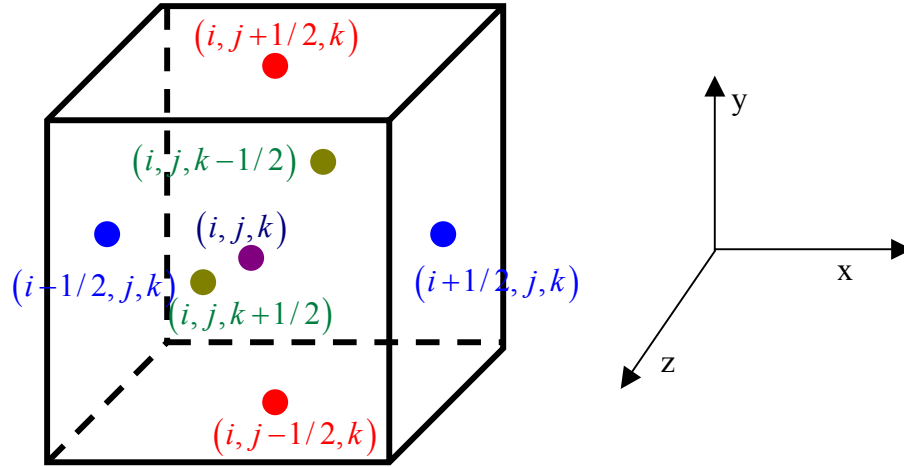


Figura I.4. Nomenclatura del malla escalonada.

La ecuación de momento discreta y lineal para la componente de la velocidad en la dirección x , viene dada por:

$$a_{i-1/2,j,k} v_{1;i-1/2,j,k} = \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb} + (p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}) A_{1;i-1/2,j,k} + s_1 \quad (\text{I.30})$$

donde $A_{1;i-1/2,j,k}$ es el área de la cara en la dirección x cuyo centroide viene dado por $(i-1/2, j, k)$, la presión se calcula en los centros de las celdas y nb indica las celdas vecinas a la considerada, que en este caso son:

$$\begin{aligned} \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb} = & a_{i,j,k} v_{1;i,j,k} + a_{i-1,j,k} v_{1;i-1,j,k} + a_{i-1/2,j+1/2,k} v_{1;i-1/2,j+1/2,k} + \\ & + a_{i-1/2,j-1/2,k} v_{1;i-1/2,j-1/2,k} + a_{i-1/2,j,k+1/2} v_{1;i-1/2,j,k+1/2} + a_{i-1/2,j,k-1/2} v_{1;i-1/2,j,k-1/2} \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

Los coeficientes lineales que aparecen en (I.31) son combinaciones de los flujos convectivos F y de los flujos difusivos D . En particular, para la componente de la velocidad en la dirección x , los flujos, tanto convectivos como difusivos, involucrados en los coeficientes lineales son los siguientes:

$$\begin{aligned} F_{i,j,k} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i+1,j,k} + \rho_{i,j,k}) (v_1 A_1)_{i+1/2,j,k} + (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}) (v_1 A_1)_{i-1/2,j,k} \right] \\ F_{i-1,j,k} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}) (v_1 A_1)_{i-1/2,j,k} + (\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-2,j,k}) (v_1 A_1)_{i-3/2,j,k} \right] \\ F_{i-1/2,j+1/2,k} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i,j+1,k} + \rho_{i,j,k}) (v_2 A_2)_{i,j+1/2,k} + (\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j+1,k}) (v_2 A_2)_{i-1,j+1/2,k} \right] \\ F_{i-1/2,j-1/2,k} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k}) (v_2 A_2)_{i,j-1/2,k} + (\rho_{i-1,j-1,k} + \rho_{i-1,j,k}) (v_2 A_2)_{i-1,j-1/2,k} \right] \\ F_{i-1/2,j,k-1/2} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k-1}) (v_3 A_3)_{i,j,k-1/2} + (\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j,k-1}) (v_3 A_3)_{i-1,j,k-1/2} \right] \\ F_{i-1/2,j,k+1/2} &= \frac{1}{4} \left[(\rho_{i,j,k+1} + \rho_{i,j,k}) (v_3 A_3)_{i,j,k+1/2} + (\rho_{i-1,j,k+1} + \rho_{i-1,j,k}) (v_3 A_3)_{i-1,j,k+1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$



$$\begin{aligned}
 D_{i,j,k} &= \frac{\Gamma_{i,j,k}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}; & D_{i-1,j,k} &= \frac{\Gamma_{i-1,j,k}}{x_{i-1/2} - x_{i-3/2}} \\
 D_{i-1/2,j+1/2,k} &= \frac{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i-1,j,k} + \Gamma_{i,j+1,k} + \Gamma_{i-1,j+1,k}}{4(y_{j+1} - y_j)} \\
 D_{i-1/2,j-1/2,k} &= \frac{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i-1,j,k} + \Gamma_{i,j-1,k} + \Gamma_{i-1,j-1,k}}{4(y_j - y_{j-1})} \\
 D_{i-1/2,j,k+1/2} &= \frac{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i-1,j,k} + \Gamma_{i,j,k+1} + \Gamma_{i-1,j,k+1}}{4(z_{k+1} - z_k)} \\
 D_{i-1/2,j,k-1/2} &= \frac{\Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i-1,j,k} + \Gamma_{i,j,k-1} + \Gamma_{i-1,j,k-1}}{4(z_k - z_{k-1})}
 \end{aligned} \tag{I.33}$$

Las expresiones (I.32) y (I.33) ponen de manifiesto que los valores de las componentes de la velocidad que no están disponibles en algún punto de las caras que delimitan la celda y que son necesarios, se interpolan a partir de los valores disponibles más cercanos, que a pesar de que influyen en los valores de los coeficientes lineales de la ecuación de momento, no deben confundirse con los escalares desconocidos $v_{1;i-1/2,j,k}$ y $v_{1;nb}$, que son los que se pretenden calcular. En cada iteración las componentes de la velocidad se calculan a partir de sus correspondientes valores en la iteración previa.

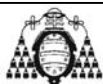
Expresiones similares a las ecuaciones (I.30) a (I.33) se obtienen para las componentes v_2 y v_3 de la velocidad, de modo que dado el campo de presiones p , las ecuaciones de momento discretas y lineales se plantean para cada volumen de control y se resuelven para obtener el campo de velocidades. Si el campo de presiones es correcto el campo de velocidades satisfará la ecuación de continuidad. Como el campo de presiones es desconocido y debe obtenerse como parte de la solución del problema de flujo, se necesitan nuevos algoritmos que permitan calcularlo, entre los que se encuentran los algoritmos SIMPLE, SIMPLEC y PISO, que se detallan a continuación.

I.3.1. Algoritmo SIMPLE.

El algoritmo SIMPLE (método semi-implícito para las ecuaciones acopladas de la presión), comienza suponiendo un campo de presiones, denotado como p^* , que se utiliza para resolver las ecuaciones de momento discretas, obteniéndose así el campo de velocidades supuesto (v_1^*, v_2^*, v_3^*) (Hirsch, 1990):

$$\begin{aligned}
 a_{i-1/2,j,k} v_{1;i-1/2,j,k}^* &= \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb}^* + (p_{i-1,j,k}^* - p_{i,j,k}^*) A_{1;i-1/2,j,k} + S_{1;i-1/2,j,k} \\
 a_{i,j-1/2,k} v_{2;i,j-1/2,k}^* &= \sum_{nb} a_{nb} v_{2;nb}^* + (p_{i,j-1,k}^* - p_{i,j,k}^*) A_{2;i,j-1/2,k} + S_{2;i,j-1/2,k} \\
 a_{i,j,k-1/2} v_{3;i,j,k-1/2}^* &= \sum_{nb} a_{nb} v_{3;nb}^* + (p_{i,j,k-1}^* - p_{i,j,k}^*) A_{3;i,j,k-1/2} + S_{3;i,j,k-1/2}
 \end{aligned} \tag{I.34}$$

Si las correcciones de presión y velocidad, p' y (v_1', v_2', v_3') , se definen como:



$$p = p^* + p'; \quad v_1 = v_1^* + v_1'; \quad v_2 = v_2^* + v_2'; \quad v_3 = v_3^* + v_3' \quad (\text{I.35})$$

la diferencia entre las ecuaciones de momento (I.30) para los campos reales y las ecuaciones de momento (I.34) para los campos supuestos proporciona las ecuaciones de momento para los campos corregidos:

$$\begin{aligned} a_{i-1/2,j,k} v_{1;i-1/2,j,k}' &= \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb}' + (p'_{i-1,j,k} - p'_{i,j,k}) A_{1;i-1/2,j,k} + S_{1;i-1/2,j,k} \\ a_{i,j-1/2,k} v_{2;i,j-1/2,k}' &= \sum_{nb} a_{nb} v_{2;nb}' + (p'_{i,j-1,k} - p'_{i,j,k}) A_{2;i,j-1/2,k} + S_{2;i,j-1/2,k} \\ a_{i,j,k-1/2} v_{3;i,j,k-1/2}' &= \sum_{nb} a_{nb} v_{3;nb}' + (p'_{i,j,k-1} - p'_{i,j,k}) A_{3;i,j,k-1/2} + S_{3;i,j,k-1/2} \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

La principal simplificación aplicada por el algoritmo SIMPLE consiste en eliminar de las ecuaciones anteriores para el campo de velocidades corregido los términos $\sum a_{nb} v_{1;nb}'$, $\sum a_{nb} v_{2;nb}'$ y $\sum a_{nb} v_{3;nb}'$, de modo que finalmente el campo de velocidades real vendrá dado por:

$$\begin{aligned} v_{1;i-1/2,j,k} &= v_{1;i-1/2,j,k}^* + d_{i-1/2,j,k} (p'_{i-1,j,k} - p'_{i,j,k}) \\ v_{2;i,j-1/2,k} &= v_{2;i,j-1/2,k}^* + d_{i,j-1/2,k} (p'_{i,j-1,k} - p'_{i,j,k}) \\ v_{3;i,j,k-1/2} &= v_{3;i,j,k-1/2}^* + d_{i,j,k-1/2} (p'_{i,j,k-1} - p'_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

siendo:

$$d_{i-1/2,j,k} = \frac{A_{1;i-1/2,j,k}}{a_{i-1/2,j,k}}; \quad d_{i,j-1/2,k} = \frac{A_{2;i,j-1/2,k}}{a_{i,j-1/2,k}}; \quad d_{i,j,k-1/2} = \frac{A_{3;i,j,k-1/2}}{a_{i,j,k-1/2}} \quad (\text{I.38})$$

Expresiones similares a (I.37) se obtienen para la componentes $v_{1;i+1/2,j,k}$, $v_{2;i,j+1/2,k}$ y $v_{3;i,j,k+1/2}$. Además, las ecuaciones de momento deben satisfacer la ecuación de continuidad, de forma que sustituyendo en dicha ecuación de continuidad las expresiones (I.37) se obtiene la ecuación de corrección para la presión:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} p'_{i,j,k} &= a_{i+1/2,j,k} p'_{i+1/2,j,k} + a_{i-1/2,j,k} p'_{i-1/2,j,k} + a_{i,j+1/2,k} p'_{i,j+1/2,k} + a_{i,j-1/2,k} p'_{i,j-1/2,k} + \\ &+ a_{i,j,k+1/2} p'_{i,j,k+1/2} + a_{i,j,k-1/2} p'_{i,j,k-1/2} + b'_{i,j,k} \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} &= a_{i+1/2,j,k} + a_{i-1/2,j,k} + a_{i,j+1/2,k} + a_{i,j-1/2,k} + a_{i,j,k+1/2} + a_{i,j,k-1/2} \\ a_{i+1/2,j,k} &= (\rho dA_1)_{i+1/2,j,k}; \quad a_{i-1/2,j,k} = (\rho dA_1)_{i-1/2,j,k}; \quad a_{i,j+1/2,k} = (\rho dA_2)_{i,j+1/2,k} \\ a_{i,j-1/2,k} &= (\rho dA_2)_{i,j-1/2,k}; \quad a_{i,j,k+1/2} = (\rho dA_3)_{i,j,k+1/2}; \quad a_{i,j,k-1/2} = (\rho dA_3)_{i,j,k-1/2} \\ b'_{i,j,k} &= (\rho v_1^* A_1)_{i-1/2,j,k} - (\rho v_1^* A_1)_{i+1/2,j,k} + (\rho v_2^* A_2)_{i,j-1/2,k} - \\ &- (\rho v_2^* A_2)_{i,j+1/2,k} + (\rho v_3^* A_3)_{i,j,k-1/2} - (\rho v_3^* A_3)_{i,j,k+1/2} \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$



Cuando se resuelve la ecuación de corrección de la presión (I.39) se obtiene un campo de presiones corregido p' en todos los puntos del dominio, de forma que es inmediato obtener los campos de velocidades y presiones correctos. No obstante, con el algoritmo SIMPLE, la ecuación de corrección de la presión puede divergir, por lo que es necesario controlar el cambio de la presión en cada iteración mediante sub-relajaciones:

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (I.41)$$

donde α_p es el factor de sub-relajación de la presión que debe tomar valores entre cero y uno, y donde p^{new} es el valor mejorado de la presión. Del mismo modo las velocidades también deben controlarse mediante sub-relajaciones:

$$v_1^{new} = \alpha_{v_1} v_1 + (1 - \alpha_{v_1}) v_1^{n-1}; \quad v_2^{new} = \alpha_{v_2} v_2 + (1 - \alpha_{v_2}) v_2^{n-1}; \quad v_3^{new} = \alpha_{v_3} v_3 + (1 - \alpha_{v_3}) v_3^{n-1} \quad (I.42)$$

donde los superíndices $(n-1)$ indican valores de las velocidades en la iteración previa, y donde los correspondientes factores de sub-relajación también deben tomar valores entre cero y uno. De este modo, las ecuaciones de momento lineales discretas con sub-relajación se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{a_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{v_1}} v_{1;i-1/2,j,k} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb} + (p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}) A_{1;i-1/2,j,k} + \\ &+ S_{1;i-1/2,j,k} + \left[(1 - \alpha_{v_1}) \frac{a_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{v_1}} \right] v_{1;i-1/2,j,k}^{n-1} \end{aligned} \quad (I.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j-1/2,k}}{\alpha_{v_2}} v_{2;i,j-1/2,k} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{2;nb} + (p_{i,j-1,k} - p_{i,j,k}) A_{2;i,j-1/2,k} + \\ &+ S_{2;i,j-1/2,k} + \left[(1 - \alpha_{v_2}) \frac{a_{i,j-1/2,k}}{\alpha_{v_2}} \right] v_{2;i,j-1/2,k}^{n-1} \end{aligned} \quad (I.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j,k-1/2}}{\alpha_{v_3}} v_{3;i,j,k-1/2} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{3;nb} + (p_{i,j,k-1} - p_{i,j,k}) A_{3;i,j,k-1/2} + \\ &+ S_{3;i,j,k-1/2} + \left[(1 - \alpha_{v_3}) \frac{a_{i,j,k-1/2}}{\alpha_{v_3}} \right] v_{3;i,j,k-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (I.45)$$

La ecuación de corrección de la presión se ve afectada también por la sub-relajación de las velocidades a través de los términos:

$$d_{i-1/2,j,k} = \frac{A_{1;i-1/2,j,k} \alpha_{v_1}}{a_{i-1/2,j,k}}; \quad d_{i,j-1/2,k} = \frac{A_{2;i,j-1/2,k} \alpha_{v_2}}{a_{i,j-1/2,k}}; \quad d_{i,j,k-1/2} = \frac{A_{3;i,j,k-1/2} \alpha_{v_3}}{a_{i,j,k-1/2}} \quad (I.46)$$

La correcta elección de los factores de sub-relajación es determinante para el coste computacional asociado con el algoritmo SIMPLE.



I.3.2. Algoritmo SIMPLEC.

El algoritmo SIMPLEC (SIMPLE–Consistente) sigue la misma metodología que el algoritmo SIMPLE, pero utiliza correcciones de la velocidad en las ecuaciones de momento que omiten menos términos (Colella, 1994):

$$\begin{aligned} v'_{1;i-1/2,j,k} &= d_{i-1/2,j,k} (p'_{i-1,j,k} - p'_{i,j,k}) \\ v'_{2;i,j-1/2,k} &= d_{i,j-1/2,k} (p'_{i,j-1,k} - p'_{i,j,k}) \\ v'_{3;i,j,k-1/2} &= d_{i,j,k-1/2} (p'_{i,j,k-1} - p'_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (I.47)$$

siendo en este caso:

$$\begin{aligned} d_{i-1/2,j,k} &= \frac{A_{1;i-1/2,j,k}}{a_{i-1/2,j,k} - \sum a_{nb}}; \quad d_{i,j-1/2,k} = \frac{A_{2;i,j-1/2,k}}{a_{i,j-1/2,k} - \sum a_{nb}}; \\ d_{i,j,k-1/2} &= \frac{A_{3;i,j,k-1/2}}{a_{i,j,k-1/2} - \sum a_{nb}}; \end{aligned} \quad (I.48)$$

Con el algoritmo SIMPLEC la ecuación de corrección de la presión que se obtiene es idéntica a la obtenida con el algoritmo SIMPLE (ecuación (I.39)).

I.3.3. Algoritmo PISO.

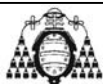
El algoritmo PISO (Presión Implícita con Separación de Operadores) involucra un primer paso de predicción y a continuación dos pasos de corrección, de forma que puede considerarse como un algoritmo del tipo SIMPLE al que se le añade un segundo paso de corrección (Versteeg, 1995).

En el paso de predicción el algoritmo PISO resuelve las ecuaciones de momento discretas para un campo de presiones supuesto, p^* , de forma que se obtiene el correspondiente campo de velocidades supuesto, (v_1^*, v_2^*, v_3^*) , siguiendo un procedimiento idéntico al empleado en el algoritmo SIMPLE.

En el primer paso de corrección el algoritmo PISO introduce un campo de velocidades $(v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$ que satisface la continuidad, y que se relaciona con los campos de presión y velocidad supuestos obtenidos en el paso de predicción a través de las expresiones: $p^{**} = p^* + p'$ y $v_i^{**} = v_i^* + v'_i$ para $i = 1, 2, 3$, de forma que las velocidades corregidas son:

$$\begin{aligned} v_1^{**} &= v_{1;i-1/2,j,k}^* + d_{i-1/2,j,k} (p'_{i-1,j,k} - p'_{i,j,k}) \\ v_2^{**} &= v_{2;i,j-1/2,k}^* + d_{i,j-1/2,k} (p'_{i,j-1,k} - p'_{i,j,k}) \\ v_3^{**} &= v_{3;i,j,k-1/2}^* + d_{i,j,k-1/2} (p'_{i,j,k-1} - p'_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (I.49)$$

Las expresiones (I.49) se sustituyen en la ecuación de la continuidad discreta para



obtener la primera ecuación de corrección de la presión, que coincide con la ecuación de corrección de la presión (I.39) del algoritmo SIMPLE. La resolución de la primera ecuación para la corrección de la presión permite obtener la primera corrección de presión p' , y a partir de ella el campo de velocidades $(v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$.

En el segundo paso de corrección del algoritmo PISO se resuelven las ecuaciones de momento discretas para el campo de velocidades $(v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$, de forma que se obtiene un nuevo campo de velocidades corregido por segunda vez $(v_1^{***}, v_2^{***}, v_3^{***})$:

$$\begin{aligned} a_{i-1/2,j,k} v_{1;i-1/2,j,k}^{***} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb}^{***} + (p_{i-1,j,k}^{***} - p_{i,j,k}^{***}) A_{1;i-1/2,j,k} + S_{1;i-1/2,j,k} \\ a_{i,j-1/2,k} v_{2;i,j-1/2,k}^{***} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{2;nb}^{***} + (p_{i,j-1,k}^{***} - p_{i,j,k}^{***}) A_{2;i,j-1/2,k} + S_{2;i,j-1/2,k} \\ a_{i,j,k-1/2} v_{3;i,j,k-1/2}^{***} &= \sum_{nb} a_{nb} v_{3;nb}^{***} + (p_{i,j,k-1}^{***} - p_{i,j,k}^{***}) A_{3;i,j,k-1/2} + S_{3;i,j,k-1/2} \end{aligned} \quad (I.50)$$

La diferencia entre las ecuaciones (I.50) y las ecuaciones de momento del algoritmo SIMPLE, proporciona:

$$\begin{aligned} v_{1;i-1/2,j,k}^{***} &= v_{1;i-1/2,j,k}^{**} + \frac{\sum a_{nb} (v_{1;nb}^{**} - v_{1;nb}^*)}{a_{i-1/2,j,k}} + d_{i-1/2,j,k} (p_{i-1,j,k}'' - p_{i,j,k}'') \\ v_{2;i,j-1/2,k}^{**} &= v_{2;i,j-1/2,k}^* + \frac{\sum a_{nb} (v_{2;nb}^{**} - v_{2;nb}^*)}{a_{i,j-1/2,k}} + d_{i,j-1/2,k} (p_{i,j-1,k}'' - p_{i,j,k}'') \\ v_{3;i,j,k-1/2}^{**} &= v_{3;i,j,k-1/2}^* + \frac{\sum a_{nb} (v_{3;nb}^{**} - v_{3;nb}^*)}{a_{i,j,k-1/2}} + d_{i,j,k-1/2} (p_{i,j,k-1}'' - p_{i,j,k}'') \end{aligned} \quad (I.51)$$

donde p'' es la segunda corrección de presión, de forma que: $p^{***} = p^{**} + p''$.

Cuando las ecuaciones (I.51) se sustituyen en la ecuación de continuidad discreta, se obtiene la segunda ecuación de corrección de la presión:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} p_{i,j,k}'' &= a_{i+1,j,k} p_{i+1,j,k}'' + a_{i-1,j,k} p_{i-1,j,k}'' + a_{i,j+1,k} p_{i,j+1,k}'' + a_{i,j-1,k} p_{i,j-1,k}'' + \\ &+ a_{i,j,k+1} p_{i,j,k+1}'' + a_{i,j,k-1} p_{i,j,k-1}'' + b_{i,j,k}'' \end{aligned} \quad (I.52)$$

donde el término fuente se anula puesto que las componentes de la velocidad, $(v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$, satisfacen la ecuación de continuidad, y donde:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} &= a_{i+1,j,k} + a_{i-1,j,k} + a_{i,j+1,k} + a_{i,j-1,k} + a_{i,j,k+1} + a_{i,j,k-1} \\ a_{i+1,j,k} &= (\rho d A_1)_{i+1/2,j,k}; \quad a_{i-1,j,k} = (\rho d A_1)_{i-1/2,j,k}; \quad a_{i,j+1,k} = (\rho d A_2)_{i,j+1/2,k} \\ a_{i,j-1,k} &= (\rho d A_2)_{i,j-1/2,k}; \quad a_{i,j,k+1} = (\rho d A_3)_{i,j,k+1/2}; \quad a_{i,j,k-1} = (\rho d A_3)_{i,j,k-1/2} \end{aligned} \quad (I.53)$$



$$\begin{aligned}
 b''_{i,j,k} = & \left[(\rho A_1 / a)_{i-1/2,j,k} - (\rho A_1 / a)_{i+1/2,j,k} \right] \sum a_{nb} (v_{1,nb}^{**} - v_{1,nb}^*) + \left[(\rho A_2 / a)_{i,j-1/2,k} - \right. \\
 & \left. - (\rho A_2 / a)_{i,j+1/2,k} \right] \sum a_{nb} (v_{2,nb}^{**} - v_{2,nb}^*) + \left[(\rho A_3 / a)_{i,j-1/2,k} - (\rho A_3 / a)_{i,j+1/2,k} \right] \\
 & \sum a_{nb} (v_{3,nb}^{**} - v_{3,nb}^*)
 \end{aligned} \quad (I.54)$$

La ecuación (I.52) se resuelve para obtener la segunda corrección de la presión p'' , de forma que el campo de presiones corregido por segunda vez viene dado por:

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p'' \quad (I.55)$$

A partir del campo de presiones (I.55) es inmediato obtener el campo de velocidades corregido por segunda vez.

I.4. DISCRETIZACIÓN TEMPORAL.

En los apartados anteriores el método de los volúmenes finitos se ha aplicado para discretizar las ecuaciones de gobierno estacionarias de la Mecánica de Fluidos. En el presente apartado se generaliza el método de los volúmenes finitos al caso de estado no estacionario, generalización que permite aplicar esta técnica a problemas que se desarrollan en regímenes de flujo transitorios. La ecuación de transporte para una variable escalar ϕ genérica, en estado no estacionario, integrada sobre un volumen de control tridimensional y sobre un intervalo temporal finito Δt , viene dada por:

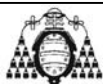
$$\begin{aligned}
 \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dt dV + \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v_1 \phi) dA_1 dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v_2 \phi) dA_2 dt + \\
 + \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho v_3 \phi) dA_3 dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) dA_1 dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) dA_2 dt + \\
 + \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) dA_3 dt + S_\phi
 \end{aligned} \quad (I.56)$$

que en forma discreta se convierte en¹:

$$\begin{aligned}
 \rho_P (\phi_P - \phi_P^0) \Delta V + \sum_{i=1}^3 \int_t^{t+\Delta t} \left[(\rho v_i A_i)_{h_i+1/2} \phi_{h_i+1/2} - (\rho v_i A_i)_{h_i-1/2} \phi_{h_i-1/2} \right] dt = \\
 = \sum_{i=1}^3 \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma A_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{h_i+1/2} - \left(\Gamma A_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{h_i-1/2} \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} S_\phi dV
 \end{aligned} \quad (I.57)$$

En la ecuación (I.57) es necesario integrar temporalmente cada uno de los términos. El método de los volúmenes finitos establece la siguiente aproximación para la evaluación de las integrales temporales (Shaw, 1992):

¹ Las variables con superíndice 0 indican que la variable se evalúa en el paso temporal anterior al actual.



$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [\theta\phi_P + (1-\theta)\phi_P^0] \Delta t \quad (I.58)$$

donde θ es un parámetro que puede tomar valores entre cero y uno. Aplicando la aproximación (I.58) a la ecuación (I.57) y linealizándola, se obtiene:

$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^3 \left\{ a_{h_{i-1}} [\theta\phi_{h_{i-1}} + (1-\theta)\phi_{h_{i-1}}^0] + a_{h_{i+1}} [\theta\phi_{h_{i+1}} + (1-\theta)\phi_{h_{i+1}}^0] \right\} + a_P^0 \phi_P^0 \quad (I.59)$$

donde:

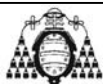
$$a_P = \sum_{i=1}^3 (a_{h_{i+1}} + a_{h_{i-1}}) + a_P^0; \quad a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (I.60)$$

y el resto de coeficientes se obtienen aplicando alguno de los esquemas de interpolación para la discretización espacial por volúmenes finitos de los términos de convección y difusión, desarrollados anteriormente para el caso estacionario.

Cuando en la expresión (I.58) el parámetro θ toma el valor cero, el esquema resultante se dice que es un esquema **explícito**, puesto que en la correspondiente ecuación (I.59) el lado derecho sólo contiene valores de la variable ϕ en el paso temporal anterior y el lado izquierdo se evalúa empleando solamente valores ya existentes de dicha variable. Este esquema se basa en una diferenciación temporal hacia atrás (backward) y un desarrollo en serie de Taylor del mismo demuestra que se trata de un esquema exacto a primer orden con respecto al tiempo. El esquema explícito tiene un límite muy restrictivo del tamaño máximo de paso temporal que es posible emplear, de modo que el coste computacional necesario para lograr una exactitud espacial aceptable es muy elevado. Por este motivo generalmente el esquema explícito no es recomendable para la solución de problemas dependientes del tiempo. Cuando $0 < \theta \leq 1$, el esquema de discretización temporal resultante se dice que es un esquema **implícito**, puesto que en ambos lados de la ecuación (I.59) se emplean valores de la variable ϕ en el paso temporal que se está calculando. En particular, cuando $\theta = 1$, se dice que el esquema es **totalmente implícito**, y cuando $\theta = 1/2$, el esquema se denomina de **Crank–Nicolson** (Ballesteros, 2003).

El esquema de Crank–Nicolson es incondicionalmente estable para todos los valores del paso temporal. Se basa en una diferenciación central, por lo que es exacto a segundo orden con respecto al tiempo. Con pasos temporales lo suficientemente pequeños es posible alcanzar una exactitud considerablemente mayor que con el método explícito. Como la exactitud total del cálculo depende también de la discretización espacial, este esquema suele emplearse junto con el método de diferenciación central. El esquema totalmente implícito también es incondicionalmente estable para cualquier tamaño de paso temporal y su exactitud es de primer orden, por lo que será necesario emplear pasos temporales pequeños para asegurar la exactitud de los resultados. Es un método muy robusto y suele recomendarse para los cálculos de flujos dependientes del tiempo.

En todos los casos es posible aumentar la precisión de los cálculos temporales



empleando esquemas de diferenciación temporal de segundo orden. Consideremos, por ejemplo, que la evolución de la variable ϕ viene dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) \quad (\text{I.61})$$

donde la función F ya incorpora cualesquiera discretizaciones espaciales. Si la derivada temporal se discretiza mediante diferenciación “backward”, el esquema exacto a primer orden es:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = F(\phi) \quad (\text{I.62})$$

y el esquema exacto a segundo orden vendría dado por:

$$\frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{\Delta t} = F(\phi) \quad (\text{I.63})$$

donde ϕ^{n+1} corresponde al valor de la variable en el paso temporal posterior, ϕ^n corresponde al valor de la variable en el paso temporal actual y ϕ^{n-1} corresponde al valor de la variable en el paso temporal anterior.

Los esquemas de acoplamiento de la presión y la velocidad que se han desarrollado para el caso estacionario deben modificarse para ser aplicados al caso no estacionario. A continuación se detallan algunos de dichos esquemas de acoplamiento modificados. Para más información consúltese (Versteeg, 1995).

I.4.1. Algoritmo SIMPLE no estacionario.

En el caso de flujo no estacionario la ecuación de continuidad integrada en el tiempo y discretizada sobre un volumen de control tridimensional viene dada por:

$$\begin{aligned} & (\rho_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + [(\rho v_1 A_1)_{i+1/2,j,k} - (\rho v_1 A_1)_{i-1/2,j,k}] + \\ & + [(\rho v_2 A_2)_{i,j+1/2,k} - (\rho v_2 A_2)_{i,j-1/2,k}] + [(\rho v_3 A_3)_{i,j,k+1/2} - (\rho v_3 A_3)_{i,j,k-1/2}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

de forma que sustituyendo (I.64) en la ecuación de corrección de la presión para el algoritmo SIMPLE (ecuación (I.39)), se obtiene la ecuación de corrección de la presión en el caso no estacionario:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} p'_{i,j,k} = & a_{i+1,j,k} p'_{i+1,j,k} + a_{i-1,j,k} p'_{i-1,j,k} + a_{i,j+1,k} p'_{i,j+1,k} + a_{i,j-1,k} p'_{i,j-1,k} + \\ & + a_{i,j,k+1} p'_{i,j,k+1} + a_{i,j,k-1} p'_{i,j,k-1} + b'_{i,j,k} \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

donde:

$$a_{i,j,k} = a_{i+1,j,k} + a_{i-1,j,k} + a_{i,j+1,k} + a_{i,j-1,k} + a_{i,j,k+1} + a_{i,j,k-1} \quad (\text{I.66})$$



$$b'_{i,j,k} = (\rho v_1^* A_1)_{i-1/2,j,k} - (\rho v_1^* A_1)_{i+1/2,j,k} + (\rho v_2^* A_2)_{i,j-1/2,k} - (\rho v_2^* A_2)_{i,j+1/2,k} + (\rho v_2^* A_2)_{i,j,k-1/2} - (\rho v_2^* A_2)_{i,j,k+1/2} + (\rho_{i,j,k}^0 - \rho_{i,j,k}) \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (I.67)$$

y el resto de coeficientes del algoritmo SIMPLE no estacionario coinciden con los del caso estacionario.

I.4.2. Algoritmo PISO no estacionario.

En el caso de flujo no estacionario todos los términos dependientes del tiempo se retienen en las ecuaciones de momento y continuidad, de modo que en el algoritmo PISO aparecen unas contribuciones adicionales en las ecuaciones de momento corregidas y en la ecuación de corrección de la presión, que pueden resumirse como sigue:

- a) Se añade el término $a_{i,j,k}^0 = \rho_{i,j,k}^0 \Delta V / \Delta t$ a los coeficientes centrales de las ecuaciones de momento discretizadas (I.34) y (I.50).
- b) Se añaden los términos $a_{i,j,k}^0 v_{1,i,j,k}^0$, $a_{i,j,k}^0 v_{2,i,j,k}^0$ y $a_{i,j,k}^0 v_{3,i,j,k}^0$ a los términos fuente de las ecuaciones de momento discretizadas.
- c) Se añade el término $(\rho_{i,j,k}^0 - \rho_{i,j,k}) \Delta V / \Delta t$ al término fuente de la primera y segunda ecuación de corrección de la presión.

Por lo demás el algoritmo PISO es idéntico al desarrollado en el caso de flujo estacionario.

I.4.3. Cálculos de estado estacionario mediante una aproximación pseudo no estacionaria.

Ya se ha mencionado que la sub-relajación en cada iteración es un requisito necesario para estabilizar los procedimientos iterativos en cálculos estacionarios. Consideremos por ejemplo la forma sub-relajada de la ecuación de momento estacionaria para la componente v_l de la velocidad:

$$\frac{a_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{v_l}} v_{1;i-1/2,j,k} = \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb} + (p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}) A_{1;i-1/2,j,k} + S_{1;i-1/2,j,k} + \left[(1 - \alpha_{v_l}) \frac{a_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{v_l}} \right] [v_{1;i-1/2,j,k}]^{n-1} \quad (I.68)$$

y comparémosla con la forma discreta de la ecuación de momento para dicha componente dependiente del tiempo:

$$\left[a_{i-1/2,j,k} + \rho_{i-1/2,j,k}^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} \right] v_{1;i-1/2,j,k} = \sum_{nb} a_{nb} v_{1;nb} + (p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}) A_{1;i-1/2,j,k} + S_{1;i-1/2,j,k} + \rho_{i-1/2,j,k}^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} v_{1;i-1/2,j,k}^0 \quad (I.69)$$



De la comparación de las ecuaciones (I.68) y (I.69) se deduce claramente que:

$$(1 - \alpha_{v1}) \frac{a_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{v1}} = \rho_{i-1/2,j,k}^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (\text{I.70})$$

La ecuación (I.70) pone de manifiesto que es posible alcanzar los efectos de sub-relajación en cálculos estacionarios iterativos partiendo de un campo inicial dado por medio de un cálculo pseudo no estacionario que parta del mismo campo inicial y tomando un paso temporal que satisfaga la condición (I.70). Alternativamente los cálculos estacionarios pueden interpretarse como pseudo no estacionarios con pasos temporales que varían espacialmente.

I.5. CONDICIONES DE CONTORNO Y CONDICIONES INICIALES.

Todos los problemas CFD se definen en términos de condiciones iniciales y condiciones de contorno. Las condiciones iniciales definen el estado del fluido en el instante considerado para la evolución temporal ($t = 0$). De este modo, para definir correctamente un problema es necesario conocer el valor que tienen todas las variables en ese instante, proceso mediante el cual se inicializan las matrices de datos apropiados en el código CFD. En ocasiones en problemas resueltos mediante técnicas numéricas es imposible conocer las condiciones iniciales de las variables, por lo que debe buscarse otra alternativa. La más sencilla y habitual es dar a todas las variables el valor cero, asumiendo que si se avanza lo suficiente en el tiempo se llega a un estado estacionario o periódico independientemente de la solución inicial, según que las condiciones de contorno sean constantes o periódicas. La desventaja de esta aproximación es que si la solución inicial se aparta mucho de la solución real pueden aparecer problemas de convergencia a la hora de resolver las ecuaciones. En función del tipo de evolución temporal, las ecuaciones diferenciales, y por tanto, los problemas de origen, se clasifican en elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

En cuanto a las condiciones de contorno, cuando se construye un mallado escalonado, se establecen nodos adicionales que rodean los contornos físicos, como se muestra por ejemplo en la *Figura I.5*.

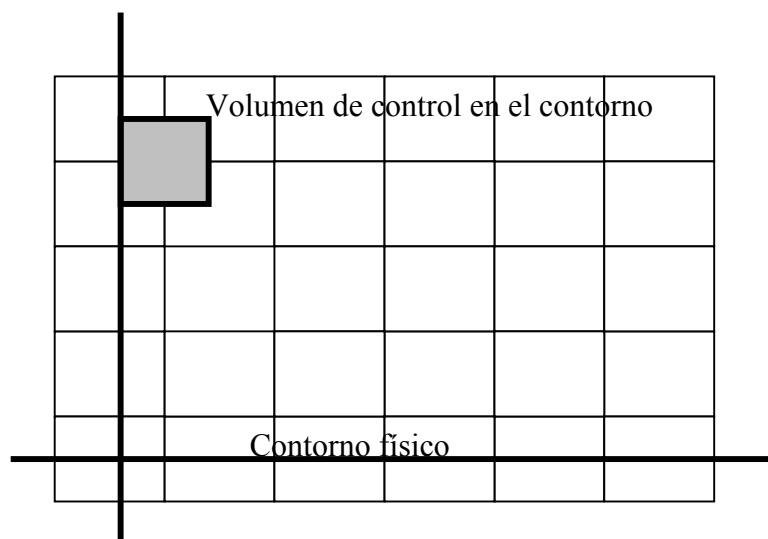
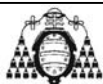


Figura I.5. Volumen de control en el contorno.



Los cálculos se realizan únicamente en los nodos internos, ya que dos características notables del mallado escalonado son: en primer lugar los contornos físicos coinciden con los contornos del volumen de control de los escalares, y en segundo lugar los nodos fuera del dominio están disponibles para almacenar las condiciones de contorno (Colella, 1994). Lo anterior permite que la introducción de condiciones de contorno se realice con pequeñas modificaciones de las ecuaciones discretizadas en los nodos internos cercanos a los contornos físicos.

Las condiciones de contorno pueden ser de varios tipos, siendo los más comunes en la práctica (Ballesteros, 2003):

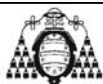
- Condiciones de contorno de **tipo Dirichlet**: la variable dependiente es conocida en la frontera física del problema.
- Condiciones de contorno de **tipo Neumann**: se conoce el valor de los gradientes normales de la variable dependiente en las fronteras del problema.
- Condiciones de contorno de **tipo Robin**: la condición conocida constituye una combinación lineal de los dos tipos de condiciones de contorno anteriores.
- Condiciones de contorno **mixtas**: en unas zonas de la frontera física se tienen condiciones de tipo Dirichlet, y en otras, condiciones de tipo Neumann.

I.6. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DISCRETAS.

La discretización de las ecuaciones de gobierno de la Mecánica de Fluidos sobre un dominio dividido en volúmenes de control genera un sistema de ecuaciones algebraicas (en principio lineales aunque también pueden ser no lineales), que es necesario resolver.

Existen dos familias fundamentales de técnicas de solución para ecuaciones algebraicas discretas: **métodos directos** y **métodos indirectos o iterativos**. El número de operaciones para la solución de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas por medio de un método directo es del orden de N^3 y además, se requiere el almacenamiento simultáneo en memoria de N^2 coeficientes del sistema de ecuaciones, lo que conlleva que los métodos directos tengan un coste computacional muy elevado. En cambio, los métodos iterativos se basan en la aplicación reiterada de un algoritmo relativamente sencillo que proporciona una eventual convergencia después de un cierto número de repeticiones. El número total de operaciones, típicamente del orden de N por cada iteración del ciclo, no puede predecirse de antemano y no es posible garantizar la convergencia a menos que el sistema de ecuaciones satisfaga criterios exactos. La principal ventaja de los métodos iterativos es que sólo los coeficientes de las ecuaciones distintos de cero necesitan ser almacenados en memoria (Arbesmeir, 1991).

Entre los métodos iterativos los más habituales son los métodos de **Jacobi** y **Gauss-Seidel**, que son muy fáciles de implementar, pero cuya convergencia es muy lenta cuando el sistema de ecuaciones a resolver es grande, por lo que en cálculos CFD deben usarse junto con un procedimiento denominado **multigrid**. En 1949 Thomas desarrolló un algoritmo que permite resolver rápidamente sistemas tridiagonales y que se conoce como **algoritmo de la matriz tridiagonal** (TDMA) (Thomas, 1949). Dicho



algoritmo es un método directo para problemas unidimensionales, pero puede ser aplicado iterativamente para resolver problemas multidimensionales. Aunque el algoritmo TDMA es poco costoso computacionalmente y requiere una cantidad mínima de almacenamiento en memoria, características que lo hacen muy atractivo para los códigos CFD, su convergencia para flujos complicados puede ser muy lenta, por lo que en los códigos CFD la técnica de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales discretas más empleada y que mejores resultados proporciona es la *técnica multigrad en conjunción con algún tipo de método iterativo*. A continuación se desarrollan las características generales de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel, del método TDMA y del procedimiento multigrad.

I.6.1. Métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel.

Considérese un sistema lineal de ecuaciones en forma matricial dado por la expresión (Wesseling, 1992):

$$A \cdot \phi = b \quad (I.71)$$

donde A es la matriz de los coeficientes del sistema, ϕ es el vector columna de las variables dependientes y b es el vector columna de las soluciones. La matriz A es una matriz cuadrada de n filas y n columnas, y cuyos elementos de la diagonal son distintos de cero.

Examinando por separado cada una de las ecuaciones del sistema (I.71), si la ecuación i se resuelve únicamente para ϕ_i , suponiendo que el resto de entradas para ϕ son conocidas y se mantienen fijas, el **método de Jacobi** establece que:

$$\phi_i^k = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \phi_j^{k-1}}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n \quad (I.72)$$

y el **método de Gauss–Seidel** establece que:

$$\phi_i^k = \frac{b_i - \sum_{j < i} a_{ij} \phi_j^k - \sum_{j > i} a_{ij} \phi_j^{k-1}}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n \quad (I.73)$$

donde el superíndice k indica la iteración. En forma matricial, si D es la matriz diagonal de A , L es la matriz triangular inferior de A y U es la matriz triangular superior de A , dadas por:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.74)$$

de modo que se cumple que $A = D + L + U$, las expresiones de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel son respectivamente:



$$\phi^k = D^{-1}(L+U)\phi^{k-1} + D^{-1}b \quad (I.75)$$

$$\phi^k = (D-L)^{-1}(U\phi^{k-1} + b) \quad (I.76)$$

I.6.2. Algoritmo de la matriz tridiagonal (TDMA).

Para desarrollar el algoritmo de la matriz tridiagonal vamos a considerar un sistema de ecuaciones con la forma tridiagonal siguiente (Thomas, 1949):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= C_1 \\ -\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 &= C_2 \\ -\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 &= C_3 \\ &\vdots \\ -\beta_n\phi_{n-1} + D_n\phi_n - \alpha_n\phi_{n+1} &= C_n \\ \phi_{n+1} &= C_{n+1} \end{aligned} \quad (I.77)$$

donde ϕ_l y ϕ_{n+1} son valores de contorno conocidos y la forma general de una sola de las ecuaciones viene dada por:

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \quad (I.78)$$

El sistema de ecuaciones (I.77) puede describirse como:

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (I.79)$$

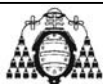
$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (I.80)$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (I.81)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \phi_n &= \frac{\alpha_n}{D_n}\phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n} \end{aligned} \quad (I.82)$$

Las ecuaciones precedentes se resuelven por eliminación hacia delante y sustitución hacia atrás. La eliminación hacia delante comienza eliminando ϕ_2 de la ecuación (I.80) por sustitución de la ecuación (I.79), de forma que se obtiene:

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (I.83)$$



Introduciendo la notación:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \alpha_2 / D_2; & C'_2 &= (\beta_2 / D)_2 \phi_1 + (C_2 / D_2) \\
 \phi_3 &= \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \\
 A_3 &= \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2}; & C'_3 &= \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}
 \end{aligned} \tag{I.84}$$

la ecuación (I.83) puede describirse como:

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \tag{I.85}$$

que puede utilizarse para eliminar ϕ_3 de la ecuación (I.81). Este procedimiento se repite sucesivamente hasta llegar a la última de las ecuaciones. La sustitución hacia atrás emplea la expresión general de la relación de recurrencia (I.85) dada por:

$$\begin{aligned}
 \phi_j &= A_j \phi_{j+1} + C'_j \\
 A_j &= \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} & C'_j &= \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}
 \end{aligned} \tag{I.86}$$

que se hace extensiva a los puntos $j = 1$ y $j = n + 1$, estableciendo los siguientes valores para los coeficientes A y C' :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0 & C'_1 &= \phi_1 \\
 A_{n+1} &= 0 & C'_{n+1} &= \phi_{n+1}
 \end{aligned} \tag{I.87}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones es necesario escribirlo en la forma de la ecuación (I.78), de modo que sea posible identificar los coeficientes α_j , β_j , D_j y C_j . Los valores de A_j y C'_j se obtienen, comenzando en $j = 2$ y terminando en $j = n$, mediante (I.86) y puesto que el valor de ϕ es conocido en el contorno $(n + 1)$, los valores de ϕ_j se obtienen en el orden inverso, es decir, $(\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2)$, también mediante (I.86).

El método TDMA puede aplicarse a la resolución iterativa de problemas multidimensionales. En el caso bidimensional la ecuación de transporte discreta y lineal viene dada por:

$$a_p \phi_p = \sum_{i=1}^2 (a_{h_i-1} \phi_{h_i-1} + a_{h_i+1} \phi_{h_i+1}) + b \tag{I.88}$$

donde se emplea la notación de la *Figura I.2*. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales discretas correspondientes a dos dimensiones, el algoritmo TDMA se aplica, por ejemplo, a una línea norte-sur, de modo que la ecuación (I.88) se describe como:



$$-a_{h_2-1}\phi_{h_2-1} + a_P\phi_P - a_{h_2+1}\phi_{h_2+1} = a_{h_1-1}\phi_{h_1-1} + a_{h_1+1}\phi_{h_1+1} + b \quad (I.89)$$

en la que se asume que el lado derecho es temporalmente conocido y se identifican los coeficientes siguientes:

$$\alpha_j = a_{h_2+1}, \quad \beta_j = a_{h_2-1}, \quad D_j = a_P, \quad C_j = a_{h_1-1}\phi_{h_1-1} + a_{h_1+1}\phi_{h_1+1} + b \quad (I.90)$$

Tras resolver las ecuaciones a lo largo de la línea norte-sur considerada para $j = 2, 3, 4, \dots, n$, se pasa a la siguiente línea norte-sur, y así sucesivamente. La secuencia en que las líneas norte-sur son elegidas se denomina *dirección de barrido*. El procedimiento se repite hasta que se obtiene una solución que converge.

En el caso de problemas tridimensionales el método TDMA se aplica línea por línea sobre un plano seleccionado y después se pasa al siguiente plano (Wesseling, 1992). Por ejemplo, si se toma un plano XY y se resuelve por líneas norte-sur, la ecuación de transporte discreta y lineal será:

$$-a_{h_2-1}\phi_{h_2-1} + a_P\phi_P - a_{h_2+1}\phi_{h_2+1} = a_{h_1-1}\phi_{h_1-1} + a_{h_1+1}\phi_{h_1+1} + a_{h_3-1}\phi_{h_3-1} + a_{h_3+1}\phi_{h_3+1} + b \quad (I.91)$$

donde los valores en $(h_1 + 1)$, $(h_1 - 1)$, $(h_3 + 1)$ y $(h_3 - 1)$ se consideran temporalmente conocidos. Usando el algoritmo TDMA se calcula la línea norte-sur seleccionada y se pasa a la siguiente, y así sucesivamente hasta que se barre todo el plano XY. A continuación se pasa al siguiente plano y se repite el proceso hasta que todos los planos del dominio han sido barridos.

En cálculos bidimensionales y tridimensionales la convergencia puede acelerarse alternando la dirección de barrido, de modo que toda la información disponible en los contornos se emplee en el cálculo de un modo más efectivo.

I.6.3. Método multigrad.

Para problemas en dos y tres dimensiones el método TDMA sólo puede ser aplicado línea a línea y, por tanto, la dispersión de la información disponible en los contornos físicos del dominio de cálculo es lenta. En los cálculos CFD la tasa de convergencia depende de la dirección del flujo, con un barrido desde aguas arriba a aguas abajo la convergencia es mucho más rápida que si el barrido se realiza contra el flujo. Aunque los problemas de convergencia pueden aliviarse alternando la dirección de los barridos, en flujos tridimensionales recirculantes donde la dirección dominante del flujo es desconocida de antemano, la convergencia puede ser demasiado lenta. Cuando la estabilidad total del método requiere el acoplamiento entre todos los valores del flujo sobre todo el dominio de cálculo, el algoritmo TDMA no es una solución eficaz para la resolución de las ecuaciones discretas. Este es el motivo por el que la mayor parte de los códigos CFD actuales emplean un método diferente conocido como método multigrad, que es la técnica iterativa para la resolución de ecuaciones algebraicas discretas más eficiente y general conocida hoy en día. Su origen se basa en las propiedades de los métodos iterativos convencionales (Gauss-Seidel o Jacobi), en particular la lenta convergencia a que dan lugar dichos métodos como consecuencia del ineficaz amortiguamiento que realizan de las componentes del error de frecuencia baja.



De modo general se puede considerar que las componentes del error situadas en el rango de frecuencias bajas del espectro de un operador de discretización espacial, que denotaremos como A , son las que se amortiguan a un ritmo más lento en los procesos iterativos (Wagner, 1998). Por otra parte, las componentes a las frecuencias más altas son las primeras en reducirse, de forma que tras unas pocas iteraciones la mayor parte de las componentes del error a las frecuencias altas se habrán amortiguado. Como consecuencia de estas características un método iterativo actuará como “suavizador” (smoother) del error, de modo que después de una o más iteraciones de los barridos a través del mallado (llamados también barridos de relajación), el comportamiento del error será lo suficientemente suave para que pueda ser representado adecuadamente en un mallado más basto.

La idea básica del método multigrad puede resumirse en tres pasos. En primer lugar aplicar uno o más barridos de un método iterativo con buenas propiedades de suavizado de las componentes del error de frecuencia alta. En segundo lugar transferir el problema a un mallado más basto, donde se obtiene una aproximación a la corrección de la solución con un coste computacional menor puesto que existen menos celdas de mallado. En tercer y último lugar transferir las correcciones obtenidas nuevamente al mallado fino original, con vistas a generar una nueva aproximación de la solución. Por tanto un método multigrad consta de dos procesos básicos: un **método iterativo suavizador** (Jacobi o Gauss–Seidel) y un **método de corrección de mallado basto** (CGC).

Como los métodos iterativos suavizadores se han tratado en secciones anteriores aquí se desarrollan únicamente las características de los métodos de corrección en mallado basto. En particular se desarrolla el **método multigrad algebraico** (AMG) y el **método multigrad del almacenamiento de la aproximación completa** (FAS).

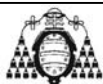
a) Multigrad AMG.

El método multigrad algebraico (AMG) se denomina esquema algebraico como consecuencia de que las ecuaciones en el nivel basto de mallado se generan sin necesidad de emplear ningún tipo de geometría o rediseñación de los niveles de mallado bastos, carácter éste que hace que el método AMG sea particularmente atractivo para usarlo con mallados no estructurados. Los mallados bastos no tienen que ser construidos ni almacenados, y no es necesario evaluar flujos ni términos fuente en ellos. En cambio, como veremos más adelante, se considera que el multigrad FAS capta de un modo más eficiente las no linealidades del flujo, por lo que suele emplearse el método multigrad FAS para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Para desarrollar las características del método multigrad AMG se considera un conjunto de ecuaciones lineales discretas en forma matricial, dado por:

$$A_h \phi_h + f_h = 0 \quad (\text{I.92})$$

donde ϕ_h es el vector columna de la solución exacta del sistema y el subíndice h hace referencia al tamaño del mallado en el nivel fino original. Cuando aún no se dispone de la solución exacta en la resolución de la ecuación (I.92) aparecerá un residuo o defecto debido al error, de forma que se generará un nuevo sistema de ecuaciones de la forma:



$$A_h \varphi_h + f_h = r_h \quad (I.93)$$

donde r_h es el residuo y φ_h es una solución aproximada del sistema, de modo que siendo e el error:

$$\phi_h = \varphi_h + e \quad (I.94)$$

El método de corrección en mallado basto para multigrad AMG realiza las siguientes operaciones (Arbesmeir, 1991):

- Transferencia del residuo, r_h , y de la solución aproximada, φ_h , desde el mallado fino hasta el siguiente mallado basto de tamaño H , empleando un operador de restricción R_h^H , que define el modo en que los valores de mallado en el nivel basto se definen a partir de los valores adyacentes en el nivel fino. El residuo y la solución aproximada en el nivel basto se obtienen entonces como:

$$\begin{aligned} r_H &= R_h^H r_h \\ \varphi_H &= R_h^H \varphi_h \end{aligned} \quad (I.95)$$

- Solución del sistema en el nivel basto para obtener las soluciones aproximadas, φ_H :

$$A_H \varphi_H + f_H = r_H \quad (I.96)$$

- Transferencia de las soluciones en el nivel basto, ϕ_H , nuevamente al nivel fino mediante un operador de prolongación o interpolación P_H^h :

$$\varphi_h = P_H^h \varphi_H \quad (I.97)$$

Una combinación de las tres operaciones anteriores permite obtener el operador de corrección, A_H , en el mallado basto para el método AMG. De la ecuación (I.95) se deduce que:

$$r_H = R_h^H r_h \Rightarrow r_h = (R_h^H)^{-1} r_H \quad (I.98)$$

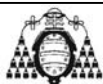
de forma que introduciendo la expresión (I.98) en la ecuación (I.93) se obtiene:

$$A_h \varphi_h + f_h = (R_h^H)^{-1} r_H \Rightarrow R_h^H A_h \varphi_h + R_h^H f_h = r_H \quad (I.99)$$

Teniendo en cuenta que $f_H = R_h^H f_h$, la expresión (I.99) puede describirse como:

$$R_h^H A_h \varphi_h + f_H = r_H \quad (I.100)$$

y si en la ecuación anterior se introduce la expresión (I.97) se obtiene:



$$R_h^H A_h P_H^h \varphi_H + f_H = r_H \tag{I.101}$$

Comparando la ecuación (I.101) con la ecuación (I.96) se obtiene finalmente la expresión para el operador de corrección en el mallado basto:

$$A_H = R_h^H A_h P_H^h \tag{I.102}$$

La principal dificultad a la hora de emplear el método multigrad en mallados no estructurados es la creación y el uso de la jerarquía de los mallados bastos. En un mallado estructurado los mallados bastos pueden crearse simplemente eliminando una de cada dos filas de celdas del mallado fino anterior, de modo que los operadores de prolongación y restricción son fáciles de formular, pero en mallados no estructurados el proceso es algo más complicado. El método multigrad AMG sobre dos mallados de tamaños h y H , queda completamente definido cuando se combina un suavizador con un CGC, por lo que el método de iteración entre los dos mallados se obtiene mediante la siguiente secuencia:

- 1) Se realizan n barridos de relajación con un suavizador sobre la solución del mallado fino φ_h^n .
- 2) Se aplica el método CGC para obtener: $\varphi_h^{n+1} = \varphi_h^n + \varphi_H$.
- 3) Se realizan otra serie de barridos con el suavizador sobre la solución φ_h^{n+1} en el mallado fino.

Un ciclo multigrad se define como un procedimiento recursivo, similar a la secuencia que acabamos de detallar, que se aplica en cada nivel de mallado cuando se mueve a través de la jerarquía de mallados. A continuación se detallan cuatro tipos diferentes de ciclos multigrad: ciclos V y W, ciclo F y ciclo Flexible.

• **Ciclos V y W.**

La *Figura I.6* representa esquemáticamente el ciclo multigrad V y el ciclo multigrad W (Wagner, 1998).

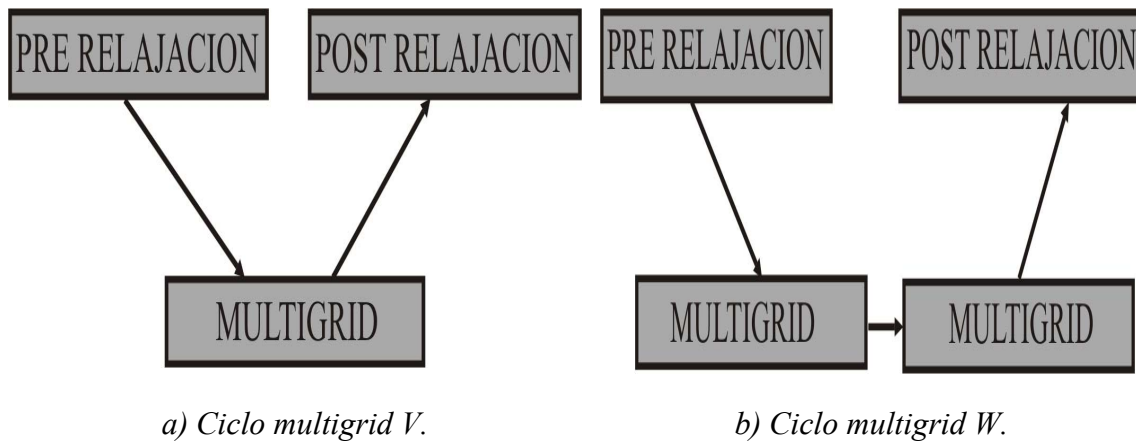
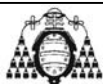


Figura I.6. Representación esquemática de los ciclos multigrad V y W.



Para los ciclos V y W la jerarquía transversal de mallados está gobernada por tres parámetros β_1 , β_2 y β_3 , con la siguiente secuencia:

- 1) En primer lugar se realizan las iteraciones sobre el nivel de mallado actual para reducir las componentes del error de frecuencia alta (errores locales). Para el método AMG una iteración consiste de un barrido de Gauss–Seidel hacia delante y otro hacia atrás. Dichas iteraciones se conocen como pasos de pre relajación, puesto que se realizan antes de moverse al nivel de mallado basto siguiente. El número de barridos de pre relajación viene determinado por el parámetro β_1 . Las componentes de frecuencia alta del error deben reducirse hasta que el error restante se pueda expresar en el nivel de mallado basto siguiente sin un “aliasing” significativo. Si éste fuese el nivel de mallado más basto, el ciclo multigrid estaría completo.
- 2) A continuación el problema se restringe al nivel de mallado basto siguiente, usando la ecuación (I.95).
- 3) El error en el mallado basto se reduce realizando un número específico (β_2) de ciclos multigrid. Normalmente este parámetro toma valor uno para el ciclo V y valor dos para el ciclo W.
- 4) Tras esto, la corrección acumulativa calculada sobre el nivel de mallado basto se interpola al mallado fino mediante la ecuación (I.97) y se suma a la solución del mallado fino. El error de frecuencia alta presente ahora en el nivel de mallado fino se debe al procedimiento de prolongación empleado para transferir la corrección.
- 5) En el paso final se realizan iteraciones sobre el nivel de mallado fino para eliminar el error de frecuencia alta introducido sobre los niveles de mallado bastos por los ciclos multigrid. Estas iteraciones se conocen como barridos de post relajación, puesto que se realizan después de retornar al nivel de mallado fino desde un nivel de mallado más basto. El número de barridos de post relajación se especifica por el parámetro β_3 .

• **Ciclo F.**

El ciclo multigrid F es esencialmente una combinación de los ciclos multigrid V y W, de modo que un ciclo F requiere más cálculos que un ciclo V, pero menos que un ciclo W (Wagner, 1998). Las propiedades de convergencia son mejores que las del ciclo V y rigurosamente iguales a las del ciclo W. Si los ciclos V y W consisten, respectivamente, de:

pre barrido → restricción → ciclo V → prolongación → post barrido

pre barrido → restricción → ciclo W → ciclo W → prolongación → post barrido

entonces un ciclo F estará formado por un ciclo W seguido por un ciclo V:

pre barrido → restricción → ciclo W → ciclo V → prolongación → post barrido



• **Ciclo Flexible.**

En el ciclo Flexible el cálculo y uso de las correcciones en los mallados bastos se controla mediante un ciclo multigrad cuya lógica se representa en la *Figura I.7*. Dicha lógica asegura que los cálculos en el mallado más basto sólo se realizan cuando la tasa de reducción de residuos sobre el nivel de mallado actual es demasiado lenta. Además los controles multigrad dictaminan cuándo la solución iterativa de la corrección en el nivel de mallado basto ha convergido suficientemente y, por tanto, la corrección de la solución podría aplicarse al nivel de mallado fino. Estas dos decisiones se controlan por los parámetros α y β . La lógica del procedimiento multigrad hace que los niveles de mallado sean visitados repetidamente durante una sola iteración global de una ecuación.

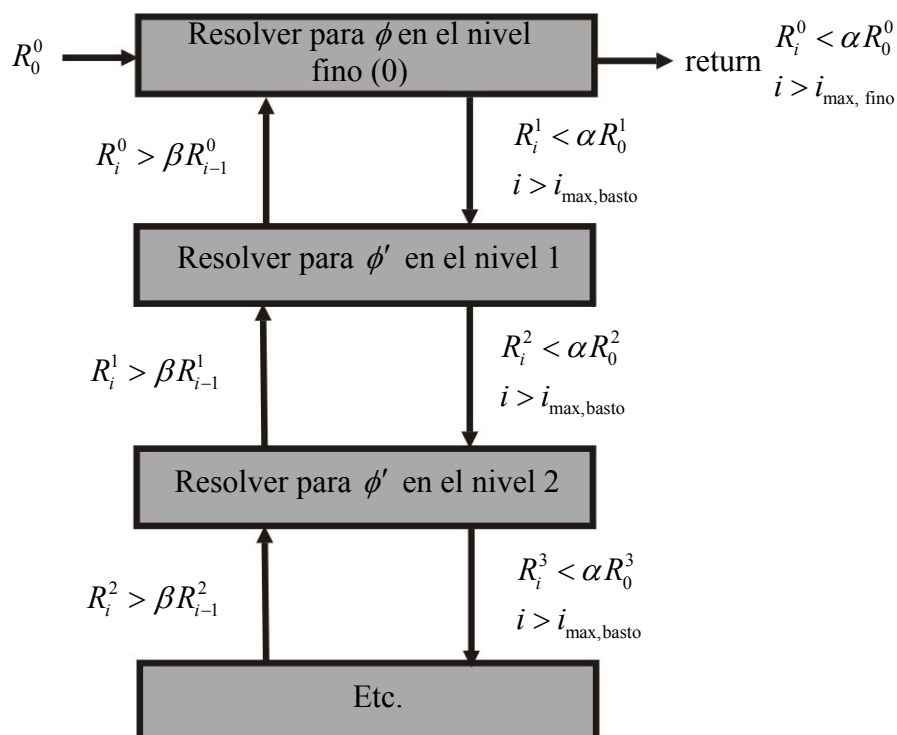


Figura I.7. Ciclo multigrad Flexible.

La principal diferencia entre el ciclo Flexible y los ciclos V y W es que el criterio de satisfacción de la tolerancia de reducción de residuos y el criterio de terminación, determinan cuándo y cómo se visita cada nivel de mallado en el ciclo Flexible, mientras que en los ciclos V y W el patrón transversal se define explícitamente. El procedimiento multigrad invoca los cálculos en el siguiente nivel de mallado basto cuando la tasa de reducción del error en el nivel actual es insuficiente, tal y como se define a través de:

$$R_i > \beta R_{i-1} \tag{I.103}$$

donde R_i es la suma absoluta de los residuos o defectos calculados en el nivel de mallado actual después de la relajación i en ese nivel. La ecuación anterior establece que si el residuo presente en la solución iterativa después de la relajación i , es mayor que cierta fracción β (que debe tomar valores entre cero y uno) del residuo presente



después de la relajación $(i-1)$, el nivel de mallado basto siguiente debería visitarse. El parámetro β se conoce como *tolerancia de reducción de residuos*, y determina la frecuencia con que los niveles de mallado más bastos son visitados, de modo que un valor grande de β resultará en una frecuencia de visitas menor, y un valor pequeño de β resultará en una frecuencia de visitas mayor. A condición de que la tasa de reducción de residuos sea lo suficientemente rápida, las ecuaciones para las correcciones en los niveles de mallado bastos convergerán, y el resultado podrá aplicarse al campo de soluciones en el nivel de mallado fino anterior (Wesseling, 1992).

Se considera que las ecuaciones para las correcciones en el nivel de mallado actual han convergido lo suficiente cuando el error en la solución de la corrección se reduce cierta fracción α (que debe tomar valores entre cero y uno) del error original en dicho nivel de mallado, es decir:

$$R_i < \alpha R_0 \quad (\text{I.104})$$

donde R_i es el residuo en el nivel de mallado actual después de la iteración i en dicho nivel, y R_0 es el residuo que se obtuvo inicialmente en ese nivel de mallado en la iteración actual. El parámetro α se conoce como *criterio de terminación*.

b) Multigrid FAS.

El método multigrid FAS (Almacenamiento de la Aproximación Completa) se denomina en ocasiones multigrid geométrico, puesto que requiere una jerarquía de mallados y las ecuaciones discretas tienen que ser evaluadas en cada nivel. Teóricamente la ventaja de FAS sobre AMG consiste en que FAS debería funcionar mejor para problemas no lineales, puesto que las no linealidades del sistema son transportadas hacia los niveles bastos a través de las discretizaciones, mientras que cuando se emplea AMG una vez que el sistema ha sido linealizado, las no linealidades no son transportadas a los niveles bastos y, por tanto, no son detectadas por el método de resolución hasta que se produce una nueva adaptación de la solución en el mallado fino original. Como consecuencia de estas características el método FAS suele emplearse para resolver sistemas de ecuaciones discretas no lineales (Wesseling, 1992).

Para desarrollar el método multigrid FAS consideramos un sistema no lineal $A(\phi) = f$, sobre el que se quiere aplicar un método multigrid para obtener su solución. Los métodos multigrid se basan en una relación fundamental que es la **ecuación de residuos**, dada para un sistema lineal por:

$$A\phi - A\varphi = f - A\varphi \Rightarrow A e = r \quad (\text{I.105})$$

donde $e = \phi - \varphi$ es el error, ϕ es una solución exacta del sistema, φ es una solución aproximada y r es el residuo. En el caso de sistemas no lineales la expresión (I.105) no se verifica:

$$A(\phi) - A(\varphi) \neq A(e) \quad (\text{I.106})$$

No obstante, el método multigrid para sistemas no lineales continúa desarrollándose en



torno a la ecuación de residuos no lineal, que ahora viene dada por:

$$A(\phi) = f \Rightarrow A(\phi) - A(\varphi) = f - A(\varphi) \Rightarrow A(\phi) - A(\varphi) = r \quad (\text{I.107})$$

El método de Newton es el método mejor conocido y más importante para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Supongamos por ejemplo que se quiere resolver la ecuación $F(x) = 0$. Para ello se desarrolla F en serie de Taylor alrededor del punto x :

$$F(x+s) = F(x) + sF'(x) + s^2F''(\xi) \quad (\text{I.108})$$

Eliminando los términos de orden superior en la ecuación (I.108) y siendo $x+s$ una solución de la ecuación, se obtiene:

$$F(x) + sF'(x) = 0 \Rightarrow s = -\frac{F(x)}{F'(x)} \quad (\text{I.109})$$

De forma que es posible generar la iteración:

$$x \leftarrow x - \frac{F(x)}{F'(x)} \quad (\text{I.110})$$

Supongamos ahora que se quiere resolver el sistema $A(\phi) = 0$, que en forma vectorial se escribe como:

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} f_1(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \\ f_2(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \\ \vdots \\ f_N(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.111})$$

Desarrollando $A(\varphi+e)$ en serie de Taylor alrededor de φ se obtiene:

$$A(\varphi+e) = A(\varphi) + J(\varphi)e + \text{términos de orden superior} \quad (\text{I.112})$$

donde $J(\varphi)$ es el jacobiano del sistema dado por:

$$J(\varphi) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_N}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial \phi_N} \end{array} \right)_{\phi=\varphi} \quad (\text{I.113})$$



Si $\phi = \varphi + e$ es una solución del sistema entonces se cumple que $A(\phi) + J(\varphi)e = 0$, y por tanto:

$$e = -[J(\varphi)]^{-1} A(\varphi) \quad (\text{I.114})$$

que permite desarrollar la iteración siguiente:

$$\varphi \leftarrow \varphi - [J(\varphi)]^{-1} A(\varphi) \quad (\text{I.115})$$

Recordando que la ecuación de residuos para un sistema no lineal venía dada por $A(\varphi + e) - A(\varphi) = r$, es posible desarrollar $A(\varphi + e)$ en serie de Taylor sin términos de orden superior alrededor de φ :

$$A(\varphi) + J(\varphi)e - A(\varphi) = r \Rightarrow J(\varphi)e = r \quad (\text{I.116})$$

El método de Newton establece por tanto en este caso la iteración siguiente:

$$\begin{aligned} r &= f - A(\varphi) \\ \varphi &\leftarrow \varphi + [J(\varphi)]^{-1} r \end{aligned} \quad (\text{I.117})$$

Para ajustar el método multigrad al método de Newton una de las posibilidades consiste en emplear dicho método multigrad para resolver $J(\varphi)e = r$ en cada paso de la iteración, que es el método conocido como multigrad-Newton, y que puede ser muy efectivo (Wesseling, 1992). No obstante, sería deseable poder emplear las ideas del multigrad para tratar directamente las no linealidades del sistema, para lo cual es necesario extender las componentes del multigrad (relajación, transferencias de mallado, embastecimiento) para el caso no lineal.

Muchos de los esquemas comunes de relajación (Jacobi, Gauss-Seidel), tienen contrapartidas no lineales. Por ejemplo, para un sistema $A(\phi) = f$, la iteración de Gauss-Seidel no lineal establece que “para cada $j = 1, 2, \dots, N$ se establece como cero la componente del residuo y se resuelve para ϕ_j , es decir, se resuelve la ecuación: $(A(\phi))_j = f_j$ ”, lo que equivale a afirmar que “para cada $j = 1, 2, \dots, N$, se encuentra un valor real s tal que $(A(\varphi + s\varepsilon_j))_j = f_j$, donde ε_j es el vector unitario j de la base canónica”. Cada componente $(A(\varphi))_j = f_j$ es una ecuación escalar no lineal que se puede resolver aplicando el método de Newton escalar.

En multigrad se obtiene una solución aproximada φ_h sobre el mallado fino y a continuación se resuelve la ecuación de residuos sobre el mallado basto de tamaño H :

$$A_H(\varphi_H + e_H) - A_H(\varphi_H) = r_H \quad (\text{I.118})$$



Dada φ_h , una aproximación en el mallado fino, se restringen los residuos al mallado basto en el caso no lineal a través de:

$$r_H = R_h^H (f_h - A_h(\varphi_h)) \tag{I.119}$$

y la solución aproximada se restringe como:

$$\varphi_H = R_h^H \varphi_h \tag{I.120}$$

De este modo la ecuación (I.118) se describe como:

$$A_H (R_h^H \varphi_h + e_H) = A_H (R_h^H \varphi_h) + R_h^H (f_h - A_h(\varphi_h)) \tag{I.121}$$

que es una ecuación de la forma $A_H \phi_H = f_H$, donde $\phi_H = R_h^H \varphi_h + e_H$ y $f_H = A_H (R_h^H \varphi_h) + R_h^H (f_h - A_h(\varphi_h))$. Si se resuelve la ecuación $A_H \phi_H = f_H$ para la solución $\phi_H = R_h^H \varphi_h + e_H$, se obtiene:

$$e_H = \phi_H - R_h^H \varphi_h \tag{I.122}$$

y se puede aplicar la corrección siguiente:

$$\varphi_h = \varphi_h + P_H^h e_H \tag{I.123}$$

El método multigrad FAS genera las celdas del mallado basto fundiendo entre sí grupos de celdas del mallado fino que rodean un nodo, como se representa en la *Figura I.8*. Dependiendo de la topología del mallado pueden resultar celdas con formas irregulares y un número variable de caras. No obstante, los niveles de mallado son fáciles de generar y están incrustados unos en otros, de modo que los operadores de prolongación y relajación serán sencillos.

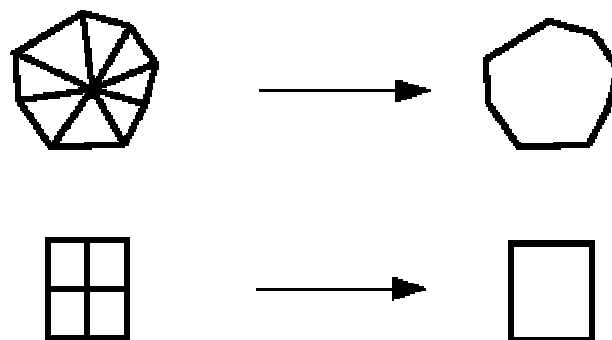


Figura I.8. Aglomeración de los nodos para formar celdas del mallado basto.

Es interesante señalar que aunque las celdas del mallado basto parecen muy irregulares, la discretización no puede detectar los bordes mellados de las caras de las celdas. La discretización emplea solamente proyecciones de las áreas de las caras de las

celdas y, por tanto, cada grupo de caras de celdas melladas que separa dos celdas de forma irregular es equivalente a una línea recta (en 2D) conectando los extremos de los segmentos mellados. En 3D las proyecciones de las áreas forman una geometría irregular pero continua. Esta optimización disminuye los requisitos de memoria y el tiempo de cálculo.

La secuencia de trabajo del esquema multigrad FAS puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) Se realiza una relajación no lineal sobre $A_h(\phi_h) = f_h$ para obtener la aproximación ϕ_h .
- 2) Se restringe la aproximación $\phi_H = R_h^H \phi_h$, y su residuo $r_H = R_h^H (f_h - A_h(\phi_h))$.
- 3) Se resuelve el problema de residuos en el mallado basto: $A_H(\phi_H) = A_H(\phi_H) + r_H$.
- 4) Se extrae el error en el mallado basto: $e_H = \phi_H - \phi_h$.
- 5) Se interpola o prolonga, y se aplica la corrección: $\phi_h = \phi_h + P_h^H e_H$.

El método FAS requiere por tanto la restricción tanto de la solución en el mallado fino ϕ_h , como de su residuo r_h . El operador de restricción R_h^H empleado para transferir la solución al siguiente nivel de mallado basto se forma empleando un esquema de aproximación completa, es decir, la solución para una celda del mallado basto se obtiene tomando el promedio en volumen de los valores de la solución en las celdas del mallado fino incrustado, de forma que los residuos en las celdas del mallado basto se obtienen sumando los residuos de las celdas del mallado fino incrustado. El operador de prolongación, P_h^H , empleado para transferir las correcciones nuevamente al nivel de mallado fino, se construye de un modo sencillo para que la corrección en el mallado fino sea simplemente el valor asociado en el mallado basto.

De la discusión anterior pueden extraerse una serie de observaciones que se detallan a continuación (Wesseling, 1992):

- Si A es un operador lineal, entonces FAS se reduce directamente al esquema de corrección en dos mallados lineal.
- Un punto fijo de FAS es una solución exacta del problema en el mallado fino, y una solución exacta del problema en el mallado fino es un punto fijo de la iteración de FAS.
- La ecuación de mallado basto en FAS puede escribirse como $A_H(\phi_H) = f_H + \tau_h^H$, donde τ_h^H es la llamada corrección tau.
- Puesto que en general $\tau_h^H \neq 0$, la solución ϕ_H de la ecuación en el mallado basto de FAS no es la misma que la solución del problema en el mallado original $A_H(\phi_H) = f_H$.
- La corrección tau puede considerarse como un modo de alterar las ecuaciones en mallado basto para aumentar sus propiedades de aproximación.
- FAS puede considerarse como una iteración interna y otra externa: la externa es la corrección de mallado basto y la interna es el método de relajación.



- Un proceso FAS en multiniveles real es recursivo, de modo que se emplea FAS para resolver el dominio no lineal de tamaño H mediante el dominio de tamaño $2H$ siguiente, y así sucesivamente. Por tanto, generalmente, FAS emplea los ciclos multigrad V o W.
- De modo general los operadores estándar (interpolación lineal, promediado completo) trabajan efectivamente en los esquemas FAS.
- En problemas con una elevada no linealidad el uso de interpolaciones de orden superior (interpolación cúbica por ejemplo) puede ser beneficioso.
- Como en el caso lineal en FAS hay también dos opciones para determinar $A_H(\phi_H)$. Una primera en la que $A_H(\phi_H)$ se determina discretizando el operador no lineal $A(\phi)$ del mismo modo que se empleó para obtener $A_h(\phi_h)$, excepto por el hecho de que se utiliza el espaciado de malla basto H . Y una segunda en la que $A_H(\phi_H)$ se determina a partir de la condición de Galerkin:

$$A_H(\phi_H) = R_h^H A_h(\phi_h) P_H^h.$$

I.7. CONSISTENCIA, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

Se dice que un sistema de ecuaciones algebraicas, generado a partir de la discretización de las ecuaciones de gobierno en derivadas parciales, es **consistente** con el sistema original, si cuando el espaciado del malla tiende a cero el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema en derivadas parciales en cada punto del malla, o lo que es lo mismo, cuando el error de truncamiento del sistema de ecuaciones algebraicas tiende a cero. Para comprobar la consistencia de un sistema es necesario sustituir la solución exacta en las ecuaciones algebraicas resultantes tras la discretización, y desarrollar todos los términos de las mismas en serie de Taylor en torno a un punto. Para obtener consistencia la expresión resultante debe estar formada por la ecuación en derivadas parciales original más un residuo, el cual debe anularse cuando se refina el malla (Ballesteros, 2003).

Se define la **convergencia** como la capacidad que tiene un sistema de ecuaciones algebraicas para representar la solución analítica de un conjunto de ecuaciones diferenciales, si ésta existiese. Las ecuaciones se dice que convergen si la solución numérica tiende a la solución analítica cuando el espaciado del malla tiende a cero. Una solución de un sistema de ecuaciones algebraicas que aproxima un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es convergente si la solución aproximada es igual a la solución exacta para cada valor de la variable independiente cuando el espaciado del malla tiende a cero, es decir, cuando $\Delta\vec{x}, \Delta t \rightarrow 0$.

Un conjunto de ecuaciones resulta **estable** si los valores de las variables implicadas tienden hacia una solución correcta sin que los errores de cálculo en la solución discreta deformen los resultados mientras se realiza el proceso numérico. El concepto de estabilidad está relacionado con el crecimiento o la atenuación de errores introducidos en la fase de cálculo, pues el ordenador introduce un error de redondeo en cada cálculo que realiza. Se emplean distintos métodos numéricos para obtener una valoración de dicha estabilidad. A continuación se detallan algunos:

- **Método de las perturbaciones discretas.** En este método se introduce una perturbación en un punto y se observa su efecto en los puntos vecinos. Si la



perturbación se atenúa a medida que procede la solución, el esquema numérico es estable. Por el contrario, si la perturbación crece con la solución, el esquema es inestable.

- **Método de Von Neumann.** Permite establecer la condición necesaria y suficiente para la estabilidad de problemas lineales. En el resto de casos el método se aplica localmente, congelando los términos no lineales, por lo que sólo proporciona condiciones necesarias de estabilidad, pero no suficientes. En este método la solución de la ecuación se desarrolla en serie de Fourier, y la atenuación o el crecimiento de las amplitudes de los modos indica si el algoritmo numérico es o no estable.
- **Método de la ecuación diferencial equivalente.** La estabilidad de un esquema puede analizarse parcialmente a partir de las propiedades del error de truncamiento. Generalmente este método permite definir condiciones necesarias, pero no suficientes, para que un esquema sea estable.
- **Método de la matriz.** Este método, a diferencia de los anteriores, permite tener en cuenta la influencia de la representación numérica de las condiciones de contorno sobre la estabilidad total del esquema. El método parte de la matriz de representación del esquema considerado como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en el tiempo.

En la práctica se dice que un esquema numérico converge si los valores de las variables en los puntos del dominio tienden hacia unos valores fijos mientras progresa la solución. Esto es así porque en muchos casos no se puede demostrar la convergencia estricta. En la *Figura I.9* se representan esquemáticamente los conceptos anteriores.

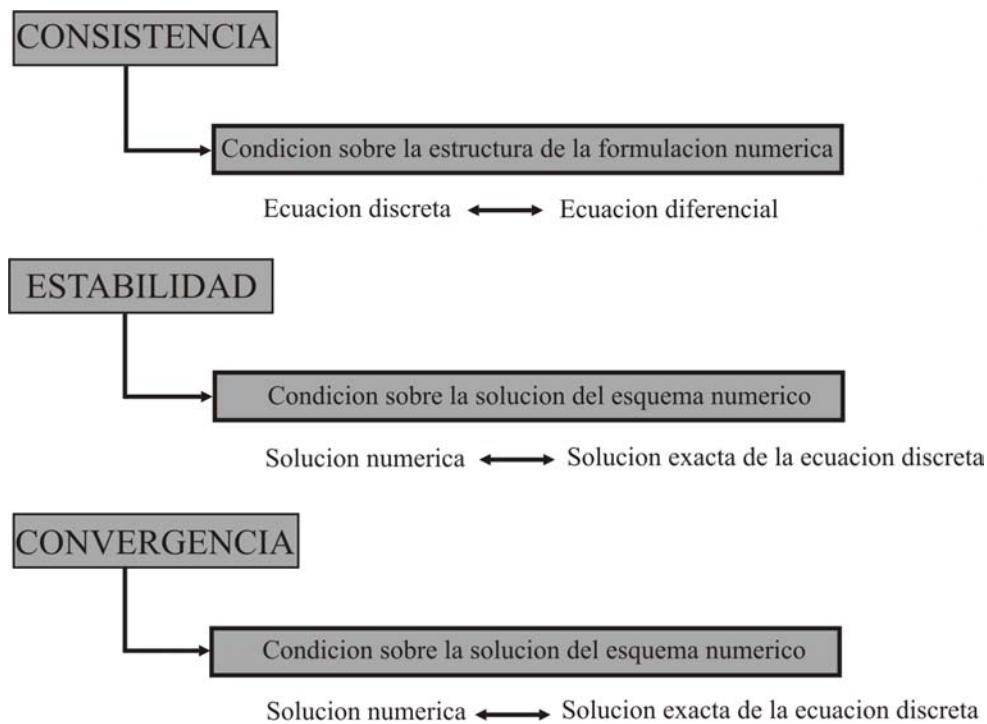


Figura I.9. Representación esquemática de los conceptos de convergencia, consistencia y estabilidad.



Apéndice II

Modelos de turbulencia

II.1. INTRODUCCIÓN.

Con vistas a eliminar en las ecuaciones de Navier-Stokes las fluctuaciones a escala turbulenta pequeña, de modo que no tengan que ser resueltas directamente sino que puedan ser tratadas mediante modelos adecuados, se dispone de dos procedimientos diferentes: el **promediado turbulento** (promedio temporal para flujos incompresibles o promedio de masa para flujos compresibles) de las ecuaciones, o el **filtrado** de dichas ecuaciones. Con ambos procedimientos se introducen términos desconocidos adicionales en las ecuaciones de Navier-Stokes que tienen que ser modelizados para conseguir el cierre de las mismas. Dicha modelización de los términos adicionales es llevada a cabo por los **modelos de turbulencia**.

El promediado turbulento de las ecuaciones de Navier-Stokes proporciona ecuaciones de transporte generales para las cantidades medias del flujo, y todas las escalas de la turbulencia tienen que ser modelizadas. Por el contrario, el filtrado de las ecuaciones consiste en una manipulación de las mismas con el fin de eliminar solamente los remolinos que poseen un tamaño más pequeño que el del filtro previamente establecido. Con el proceso de filtrado la turbulencia a escala pequeña debe ser modelizada, pero la turbulencia a escala grande se resuelve directamente. Dentro de los modelos que aplican el procedimiento del promediado turbulento se encuentran los **modelos $k-\varepsilon$** y el **modelo de tensiones de Reynolds (RSM)**, mientras que entre los



modelos que aplican el proceso de filtrado se encuentra el **modelo LES** (Large Eddy Simulation).

Desafortunadamente no existe un modelo de turbulencia universalmente aceptado, y la elección del modelo de turbulencia dependerá del problema particular que vaya a estudiarse, teniendo en cuenta las características físicas del flujo, la experiencia con la solución de esa determinada clase de problemas, el nivel de precisión de los resultados numéricos que se necesite, los recursos computacionales necesarios y la cantidad de tiempo que se está dispuesto a emplear para obtener una solución numérica del campo de flujo.

En principio, el modelo de turbulencia LES basado en el filtrado de las ecuaciones de Navier-Stokes debería proporcionar resultados más precisos que los modelos de turbulencia basados en el promedio turbulento de dichas ecuaciones, puesto que con LES sólo las escalas turbulentas más pequeñas son modelizadas mientras que con los modelos $k-\varepsilon$ o RSM todas las escalas de la turbulencia se modelizan. Lo anterior hace que el modelo LES requiera costes computacionales más elevados que los modelos basados en el promedio turbulento de las ecuaciones de Navier-Stokes. Además, el modelo LES está aún en una etapa de desarrollo y no ha sido suficientemente validado experimentalmente.

En cuanto a los modelos de turbulencia basados en el promedio turbulento de las ecuaciones de Navier-Stokes, el modelo $k-\varepsilon$ es un modelo de dos ecuaciones que demanda menos costes computacionales que el modelo RSM (que para flujos tridimensionales añade siete ecuaciones de transporte a las ecuaciones del flujo medio). No obstante el modelo RSM es un modelo mucho más general que el modelo $k-\varepsilon$, claramente superior en situaciones en las que la anisotropía de la turbulencia tiene efectos importantes sobre el flujo medio, y se considera que es el modelo más simple con el potencial suficiente para resolver adecuadamente las variables del flujo medio y las variables turbulentas. Cuando la anisotropía de la turbulencia es poco importante y no se desean resultados excesivamente precisos, utilizar un modelo $k-\varepsilon$ puede ser una buena alternativa para disminuir los costes computacionales y el tiempo necesario para obtener una solución del campo de flujo estudiado.

En este anexo se describe el proceso de promediado, temporal y de masa, de las ecuaciones de Navier-Stokes, los modelos de turbulencia $k-\varepsilon$, RSM y LES, y finalmente se describen las consideraciones especiales a tener en cuenta para estudiar flujos turbulentos en las proximidades de paredes.

II.2. PROMEDIO TEMPORAL Y DE MASA DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se aplican tanto a flujos laminares como a flujos turbulentos, pero en este último caso los valores de las variables dependientes tienen que ser sustituidos por sus valores medios. Una aproximación directa al problema de la turbulencia consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes convencionales, con sus correspondientes condiciones de contorno e iniciales, y calcular los valores medios sobre las soluciones, pero incluso para los tipos de flujos más sencillos dicho procedimiento es extremadamente complicado debido a la existencia de términos no lineales, por lo que parece más adecuado promediar directamente las ecuaciones de



Navier-Stokes en lugar de promediar sus soluciones. Éste último es el procedimiento estándar empleado para la obtención de las leyes de gobierno de los flujos turbulentos.

El promedio se introduce en las ecuaciones de Navier-Stokes con vistas a obtener las ecuaciones conservativas de gobierno de las cantidades turbulentas medias (promediadas en el tiempo), y se define de forma que la influencia de las fluctuaciones turbulentas se elimine sin destruir la dependencia temporal asociada con otros fenómenos dependientes del tiempo en el problema (con escalas temporales diferentes a las de la turbulencia), o lo que es lo mismo, se trata de examinar los efectos de la aparición de las fluctuaciones turbulentas en las propiedades medias del flujo. El intervalo temporal, Δt , sobre el que se va a realizar el promedio de las ecuaciones, debe ser lo suficientemente grande con respecto a la escala temporal de las fluctuaciones turbulentas, pero lo suficientemente pequeño respecto a las escalas temporales de los otros fenómenos dependientes del tiempo que aparecen en el problema.

El promedio de las ecuaciones de Navier-Stokes puede llevarse a cabo utilizando los *promedios temporales* convencionales (promedio de Reynolds), o utilizando *promedios de masa*. El promedio temporal suele aplicarse a las ecuaciones de Navier-Stokes cuando el flujo es incompresible y como resultado se obtienen las denominadas **ecuaciones de Reynolds**, mientras que el promedio de masa es más adecuado para tratar flujos compresibles dando como resultado las denominadas **ecuaciones de Favre**. Ambos tipos de ecuaciones se desarrollan en las siguientes secciones.

II.2.1. Flujo incompresible: ecuaciones de Reynolds.

Para obtener las ecuaciones de gobierno de los flujos turbulentos incompresibles es conveniente reemplazar los valores instantáneos de las variables que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes por la suma de su valor medio y su valor fluctuante, de forma que si f denota una propiedad del flujo, entonces (Hinze, 1959):

$$f = \bar{f} + f' \tag{II.1}$$

donde f' es la parte fluctuante de la propiedad, variable en el tiempo, y \bar{f} es el **promedio temporal**¹, o valor medio de la propiedad, definido como:

¹ Algunas de las reglas más importantes que gobiernan los promedios temporales de las propiedades fluctuantes $f = \bar{f} + f'$ y $g = \bar{g} + g'$, son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}; & \int \bar{f} ds &= \int \bar{f} ds; & \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{fg} &= \bar{f} \bar{g} + \overline{f'g'}; & \overline{f \bar{g}} &= \bar{f} \bar{g}; & \overline{f'g_0} &= 0 \end{aligned}$$

que pueden extenderse a una cantidad vectorial $\vec{a} = \bar{\vec{a}} + \vec{a}'$ y sus combinaciones con la cantidad escalar $f = \bar{f} + f'$:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \vec{a}} &= \nabla \bar{\vec{a}} \\ \overline{\nabla (f \cdot \vec{a})} &= \nabla (\bar{f} \cdot \bar{\vec{a}}) + \nabla (\overline{f' \cdot \vec{a}'}) \\ \overline{\nabla (\nabla f)} &= \nabla (\nabla \bar{f}) \end{aligned}$$



$$\bar{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt \quad (\text{II.2})$$

El promedio temporal de las fluctuaciones es cero por definición:

$$\overline{f'(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f'(t) dt = 0 \quad (\text{II.3})$$

Para obtener las ecuaciones de Reynolds se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes particularizadas para el caso de flujo incompresible; que para la masa, el momento y la energía interna, son:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.5})$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (e v_i) = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.6})$$

donde τ_{ij} es el tensor de tensiones viscosas y q_i es el flujo de calor. Introduciendo en las ecuaciones (II.4), (II.5) y (II.6), la siguiente separación de variables:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i; \quad p = \bar{p} + p'; \quad e = \bar{e} + e'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad q_i = \bar{q}_i + q'_i \quad (\text{II.7})$$

y tomando promedios temporales de dichas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho v'_i v'_j}) \quad (\text{II.9})$$

$$\rho \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{e} \bar{v}_i + \overline{e' v'_i}) = -\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} - \bar{p} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} - \overline{p' \frac{\partial v'_i}{\partial x_i}} + \tau_{ij} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.10})$$

que son las llamadas **ecuaciones de Reynolds**. Las ecuaciones de Reynolds contienen términos medios que tienen la misma forma que los correspondientes términos en las ecuaciones de Navier-Stokes originales, pero también contienen términos adicionales que representan los efectos medios de la turbulencia, y que son cantidades desconocidas, como por ejemplo, el término que aparece en la ecuación de momento (II.9) y que corresponde a las denominadas **tensiones de Reynolds**:

$$\tau_{ij}^R = \overline{\rho v'_i v'_j} \quad (\text{II.11})$$



Como consecuencia de la aparición de estos nuevos términos, las ecuaciones de gobierno de Reynolds no forman un conjunto completo de ecuaciones, y son necesarias relaciones adicionales para alcanzar el cierre de las mismas. Dichas relaciones adicionales son los denominados **modelos de turbulencia**, que se obtienen a partir de consideraciones estadísticas, empíricas o de semejanza (Hinze, 1959).

II.2.2. Flujo compresible: ecuaciones de Favre.

En el caso de flujos compresibles, si se realiza un promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes, aparecen, al igual que en las ecuaciones de Reynolds, términos adicionales correspondientes al tensor de tensiones τ_{ij}^R , y además, términos adicionales generados por la densidad, indicativos de que tiene lugar un intercambio de masa media a través de las líneas de corriente medias del flujo, lo cual no es consistente con el concepto usual de líneas de corriente. Por tanto, en el caso de flujos compresibles, la separación de variables (II.1) no es la más apropiada, motivo por el cual el promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes suele reemplazarse por el promedio de masa de las mismas (Foias, 2001).

Para obtener las ecuaciones de gobierno de flujos turbulentos compresibles la velocidad del flujo v_i se considera como la suma de una parte promediada en masa y de una parte fluctuante²:

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'' \quad (\text{II.12})$$

donde v_i'' es la parte fluctuante de la propiedad, variable en el tiempo, y \tilde{v}_i es el promedio de masa de dicha propiedad, definido como:

$$\tilde{v}_i = \frac{\overline{\rho v_i}}{\bar{\rho}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho(\bar{x}, t) v_i(\bar{x}, t) dt \quad (\text{II.13})$$

Tomando como punto de partida las ecuaciones de Navier-Stokes para la masa, el momento y la energía total en el caso de flujo compresible, dadas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho E v_i) = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(p v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} v_j)}{\partial x_i} \quad (\text{II.16})$$

² Algunas propiedades importantes relacionadas con los promedios de masa son las siguientes:

$$\overline{\rho v_i''} = 0; \quad \overline{v_i''} \neq 0; \quad \overline{\rho \phi \phi} = \bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\phi} + \overline{\rho \phi'' \phi''}$$



e introduciendo en ellas la siguiente separación de variables:

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'', \quad p = \bar{p} + p'; \quad E = \tilde{E} + E''; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (\text{II.17})$$

se obtiene, después de realizar un promedio temporal de las mismas, que las nuevas ecuaciones de gobierno, denominadas **ecuaciones de Favre**, son:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho v_i'' v_j''}) \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{v}_i) = -\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\tau_{ij} v_j} - \overline{\rho E'' v_i''}) \quad (\text{II.20})$$

En las ecuaciones de Favre, al igual que en las ecuaciones de Reynolds, aparecen términos medios de las variables que tienen la misma forma que los correspondientes términos en las ecuaciones de Navier-Stokes originales, y también términos adicionales desconocidos, entre ellos el tensor de **tensiones de Reynolds**, dado por la siguiente expresión en el caso de flujo compresible:

$$\tau_{ij}^R = \overline{\rho v_i'' v_j''} \quad (\text{II.21})$$

Como resultado de la introducción en las ecuaciones de Favre de términos adicionales desconocidos, dichas ecuaciones no forman un conjunto completo y es necesario introducir **modelos de turbulencia** para alcanzar el cierre de las mismas.

La **ecuación para la energía cinética media** puede obtenerse tomando el producto escalar de la velocidad \tilde{v}_j con la ecuación de momento media para \tilde{v}_i (ecuación (II.19)):

$$\tilde{v}_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\tau}_{ik} - \overline{\rho v_i'' v_k''}) \right] = 0 \quad (\text{II.22})$$

y el producto escalar de la velocidad \tilde{v}_i con la ecuación de momento media para \tilde{v}_j :

$$\tilde{v}_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) \right] = 0 \quad (\text{II.23})$$

Sumando las ecuaciones (II.22) y (II.23), reagrupando términos, y haciendo $i = j$, se obtiene finalmente la ecuación de la energía cinética media dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \tilde{v}_k \right) = -\tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k} - \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_i'' v_k''}) \quad (\text{II.24})$$



El lado izquierdo de la ecuación (II.24) representa la tasa de cambio de la energía cinética media del flujo, que en ocasiones se denomina ganancia de energía cinética media por advección. El primer término del lado derecho de (II.24) representa el trabajo realizado por las fuerzas de presión que actúan sobre el volumen de control, mientras que el segundo término representa el efecto de la viscosidad y el tercer término corresponde a las tensiones de Reynolds.

Si se suma el producto escalar de la velocidad v_j con la ecuación de momento para v_i (ecuación (II.15)):

$$v_j \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right] = 0 \quad (II.25)$$

y el producto escalar de la velocidad v_i con la ecuación de momento para v_j :

$$v_i \left[\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_j v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right] = 0 \quad (II.26)$$

se introduce la separación de variables:

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i''; \quad \tau_{ik} = \bar{\tau}_{ik} + \tau_{ik}'; \quad \tau_{jk} = \bar{\tau}_{jk} + \tau_{jk}' \quad (II.27)$$

y se realiza un promedio temporal, es posible obtener (restando del resultado la ecuación de la energía cinética media (II.24)) la **ecuación de transporte para las tensiones de Reynolds** dadas por (II.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_i'' v_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = & -v_j'' \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i'' \frac{\partial p}{\partial x_j} + \\ & + v_j'' \frac{\partial \tau_{ik}'}{\partial x_k} + v_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial x_k} - \overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (II.28)$$

En condiciones de flujo estacionario la ecuación (II.28) establece que las tensiones de Reynolds, constantes en el tiempo, se producen por un equilibrio entre la ganancia por advección del flujo medio, la producción por interacción entre la turbulencia y el flujo medio, la ganancia por movimientos convectivos de la turbulencia y la acción de gradientes de presión, y la destrucción debida a las fuerzas viscosas.

Cuando se toma $i = j$ en (II.28) se obtiene la ecuación para la **energía cinética media de las fluctuaciones**, o **energía cinética turbulenta**, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_i''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_k''} \right) = -v_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i'' \frac{\partial \tau_{ik}'}{\partial x_k} - \overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \quad (II.29)$$

A continuación se exponen algunos de los modelos de turbulencia más habituales en las técnicas CFD, en particular, los modelos $k - \varepsilon$, RSM y LES.



II.3. MODELO DE TURBULENCIA $k - \varepsilon$.

La energía cinética instantánea, $k(t)$, de un flujo turbulento puede considerarse como la suma de la energía cinética media, K , y de la energía cinética turbulenta, k :

$$k(t) = K + k \quad (\text{II.30})$$

La ley de Newton de la viscosidad establece que las tensiones viscosas son proporcionales a la tasa de deformación del fluido, e_{ij} , es decir:

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} \quad (\text{II.31})$$

y en flujo turbulento la tasa de deformación del fluido puede descomponerse en una parte media y una parte fluctuante:

$$e_{ij}(t) = E_{ij} + e'_{ij} \quad (\text{II.32})$$

de forma que la tasa de disipación de energía cinética turbulenta por unidad de masa, ε , que aparece en la ecuación equivalente a la ecuación (II.29) para flujo incompresible, puede definirse como:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij}e'_{ij}} \quad (\text{II.33})$$

siendo ν la viscosidad cinemática del fluido. El modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ estándar es un modelo semiempírico de dos ecuaciones (correspondientes a las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta k y su tasa de disipación ε), que se basa en la **hipótesis de Boussinesq** para calcular las tensiones de Reynolds relacionándolas con el gradiente de la velocidad media del flujo (Davidson, 2003):

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \quad (\text{II.34})$$

siendo μ_t la viscosidad turbulenta modelizada como:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.35})$$

donde C_μ es una constante adimensional. El modelo $k - \varepsilon$ asume que el flujo es totalmente turbulento y que los efectos de la viscosidad molecular son despreciables, de forma que las ecuaciones de transporte para la energía cinética turbulenta y su tasa de disipación vienen dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k \bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \quad (\text{II.36})$$



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon\bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (\text{II.37})$$

En las ecuaciones (II.35), (II.36) y (II.37) aparecen una serie de constantes cuyos valores se muestran en la *Tabla II.I*. En dichas ecuaciones, G_k representa la producción de energía cinética turbulenta debida a los gradientes de la velocidad media del flujo, el término G_b representa la producción de energía cinética turbulenta como consecuencia de los efectos de flotación y el término Y_M representa los efectos de la compresibilidad.

| | | | | |
|---------|--------------------|--------------------|------------|----------------------|
| C_μ | $C_{1\varepsilon}$ | $C_{2\varepsilon}$ | σ_k | σ_ε |
| 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |

Tabla II.I. Constantes del modelo $k - \varepsilon$.

El valor exacto de la producción de energía cinética turbulenta resultante de los gradientes de velocidad media en el flujo se obtiene a partir de la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta:

$$G_k = -\overline{\rho v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.38})$$

y en el modelo $k - \varepsilon$ estándar se modeliza como:

$$G_k = 2\mu_t E_{ij} E_{ij} \quad (\text{II.39})$$

Los efectos de flotación aparecen en un flujo cuando en el mismo están presentes simultáneamente un campo gravitatorio no nulo y un gradiente de temperatura (Cebeci, 1974), de forma que el término de producción de energía cinética turbulenta resultante de los efectos de flotación se calcula como:

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{II.40})$$

donde g_i es la componente del vector gravedad en la dirección i , Pr_t es el número de Prandtl turbulento que en el modelo $k - \varepsilon$ estándar toma el valor de 0.85, y β es el coeficiente de expansión térmica dado por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II.41})$$

Los efectos que la flotación produce sobre la tasa de disipación de energía cinética turbulenta no son bien conocidos. En el modelo $k - \varepsilon$ estándar dichos efectos vienen representados mediante la constante $C_{3\varepsilon}$, calculada como:

$$C_{3\varepsilon} = \tanh \left| \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} \right| \quad (\text{II.42})$$



donde \bar{v}_2 es la componente de la velocidad media del flujo paralela al vector de gravedad y \bar{v}_1 es la componente de la velocidad media del flujo perpendicular al vector gravedad.

La compresibilidad del flujo afecta a la turbulencia cuando el número de Mach del flujo es elevado. En las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta y su tasa de disipación se incluye el efecto de la compresibilidad del flujo a través del término Y_M calculado como:

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2 \quad (\text{II.43})$$

siendo M_t el número de Mach turbulento, $M_t = \sqrt{k/c_0^2}$.

II.4. MODELO RSM.

El modelo RSM (Reynolds Stress Model), o modelo de cierre de momento de segundo orden, es el modelo de turbulencia clásico más complejo. Cuando en el flujo turbulento el campo de tensiones es complejo o las fuerzas de volumen son significativas, el modelo $k-\varepsilon$ modeliza muy pobremente las tensiones de Reynolds incluso si la energía cinética turbulenta se calcula con suficiente precisión, mientras que la ecuación de transporte exacta para las tensiones de Reynolds tiene en cuenta los efectos direccionales del campo de tensiones (Hirsch, 1990). Para flujo incompresible dicha ecuación de transporte de las tensiones de Reynolds viene dada por:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{v'_i v'_j})}_{\text{Tasa de cambio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \bar{v}_k \overline{v'_i v'_j})}_{\text{Transporte convectivo } C_{ij}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\rho v'_i v'_j v'_k} + \bar{p}(\delta_{kj} v'_i + \delta_{ik} v'_j) \right]}_{\text{Difusión turbulenta } D_{T,ij}} + \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{v'_i v'_j}) \right]}_{\text{Difusión molecular } D_{L,ij}} - \underbrace{\rho \left(\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right)}_{\text{Producción de tensiones } P_{ij}} - \underbrace{\rho \beta (g_i \overline{v'_j \theta} + g_j \overline{v'_i \theta})}_{\text{Producción por flotación } G_{ij}} + \quad (\text{II.44}) \\ & + \underbrace{p \left(\frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i} \right)}_{\text{Interacción presión-tensiones } \phi_{ij}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k}}_{\text{Disipación de tensiones } \varepsilon_{ij}} - \underbrace{2\rho \Omega_k (\overline{v'_j v'_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{v'_i v'_m} \varepsilon_{jkm})}_{\text{Producción por la rotación del sistema } F_{ij}} + \underbrace{\sum}_{\text{Fuente}} \end{aligned}$$

La ecuación (II.44) representa seis ecuaciones parciales diferenciales, una para el transporte de cada una de las seis tensiones de Reynolds independientes. En el modelo RSM los términos de convección, de difusión molecular, de producción de tensiones y el término de rotación, se calculan de forma exacta, mientras que los términos de difusión turbulenta, de flotación, de interacción presión-tensiones y de disipación, necesitan ser modelizados.

El término de difusión turbulenta, $D_{T,ij}$, puede modelizarse bajo la hipótesis de que la tasa de transporte de las tensiones de Reynolds por difusión es proporcional a los gradientes de las mismas (Davidson, 2003), es decir:



$$D_{T,ij} = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_k v'_l} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_l} \right) \quad (\text{II.45})$$

No obstante, la hipótesis (II.45) puede dar lugar a inestabilidades numéricas en los códigos CFD (Celik, 2001), motivo por el cual en la mayoría de los mismos se emplea una versión simplificada de la hipótesis (II.45) dada por:

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.46})$$

donde la viscosidad turbulenta, μ_t , se calcula como:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.47})$$

y las constantes que aparecen en las expresiones (II.46) y (II.47) toman los valores: $\sigma_k = 0.82$ y $C_\mu = 0.09$.

El término de producción de tensiones de Reynolds como consecuencia de la posible flotación del flujo, G_{ij} , se modeliza como:

$$G_{ij} = \beta \frac{\mu_t}{Pr_t} \left(g_i \frac{\partial T}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.48})$$

donde $Pr_t = 0.85$ es el número de Prandtl turbulento para la energía, β es el coeficiente de expansión térmica dado por la ecuación (II.41) y g_i es el vector de gravedad en la dirección i .

El término de disipación de la ecuación (II.44), ϵ_{ij} , se modeliza suponiendo la isotropía de los vórtices turbulentos disipativos de menor tamaño, es decir:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\rho \varepsilon + Y_M) \quad (\text{II.49})$$

donde ε es la tasa de disipación de energía cinética turbulenta dada por la ecuación (II.33) y el término adicional $Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2$ incluye los posibles efectos de la compresibilidad del flujo turbulento (es equivalente a una disipación por dilatación adicional), siendo $M_t = \sqrt{k/c_0^2}$ el número de Mach turbulento del flujo.

Las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta y su tasa de disipación vienen dadas en este caso por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k \bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{2} (P_{ii} + G_{ii}) - \rho \varepsilon (1 + 2M_t^2) + S_k \quad (\text{II.50})$$



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon\bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{1}{2} (P_{ii} + C_{\varepsilon 3} G_{ii}) \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (\text{II.51})$$

Las constantes que aparecen en las ecuaciones (II.50) y (II.51) son exactamente las mismas que las constantes del modelo de turbulencia $k - \varepsilon$, con la excepción de σ_k que para el modelo RSM toma el valor 0.82. La energía cinética turbulenta puede obtenerse también a partir de su relación con las tensiones de Reynolds:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_j} \quad (\text{II.52})$$

El término de interacción presión-tensiones, ϕ_{ij} , es el término más importante del modelo RSM, y al mismo tiempo, el término más difícil de modelizar. El efecto de este término sobre las tensiones de Reynolds se debe a dos fenómenos físicos diferentes: las fluctuaciones de presión debidas a la interacción mutua de dos remolinos turbulentos y las fluctuaciones de presión debidas a la interacción de un remolino turbulento con una zona del flujo que posee una velocidad media diferente. El efecto total del término ϕ_{ij} consiste en una redistribución de la energía entre las tensiones de Reynolds normales ($i = j$) para hacerlas más isotrópicas, y en una reducción de las tensiones de Reynolds de cizalladura ($i \neq j$). La aproximación clásica para la modelización del término de interacción presión-tensiones realiza la siguiente descomposición del mismo:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \quad (\text{II.53})$$

donde $\phi_{ij,1}$ es el llamado término de interacción presión-tensiones lento, o término de retorno a la isotropía (Celik, 2001), dado por:

$$\phi_{ij,1} = -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \quad (\text{II.54})$$

$\phi_{ij,2}$ es el denominado término de interacción presión-tensiones rápido, dado por:

$$\phi_{ij,2} = -C_2 \left[(P_{ij} + F_{ij} + G_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (P + G - C) \right] \quad (\text{II.55})$$

siendo $P = P_{kk} / 2$, $G = G_{kk} / 2$, $C = C_{kk} / 2$, y $\phi_{ij,w}$ es el término de reflexión en las paredes, responsable de la redistribución de las tensiones normales en las proximidades de una pared (este término tiende a amortiguar las tensiones normales perpendiculares a las paredes y a aumentar las tensiones paralelas a las mismas):

$$\begin{aligned} \phi_{ij,w} = & C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v'_k v'_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{v'_i v'_k n_j n_k} - \frac{3}{2} \overline{v'_j v'_k n_i n_k} \right) \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon d} + \\ & + C'_2 \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon d} \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$



donde n_k es la componente del vector unitario normal a la pared, d es la distancia perpendicular a la pared y $C_l = C_\mu^{3/4} / \kappa$, siendo $\kappa = 0.4187$ la constante de Von Karman. Las constantes que aparecen en las ecuaciones (II.54), (II.55) y (II.56) toman los valores mostrados en la *Tabla II.II*.

| | | | | |
|-------|-------|--------|--------|---------|
| C_1 | C_2 | C'_1 | C'_2 | C_μ |
| 1.8 | 0.60 | 0.5 | 0.3 | 0.09 |

Tabla II.II. Constantes del modelo RSM.

No obstante, cuando el modelo RSM se aplica a flujos en las proximidades de paredes mediante un *modelo de tratamiento avanzado de las paredes*, que se desarrolla en apartados subsiguientes, los valores de las constantes C_1 , C_2 , C'_1 y C'_2 tienen que ser modificados de forma que se calculen en función de las invariantes de las tensiones de Reynolds y del número de Reynolds turbulento (Davidson, 2003):

$$C_1 = 1 + 2.58A\sqrt{A_2} \left\{ 1 - \exp \left[- (0.0067 \text{Re}_t)^2 \right] \right\}; \quad C_2 = 0.75\sqrt{A}$$

$$C'_1 = -\frac{2}{3}C_1 + 1.67; \quad C'_2 = \max \left[\frac{\frac{2}{3}C_2 - \frac{1}{6}}{C_2}, 0 \right]; \quad \text{Re}_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} \quad (\text{II.57})$$

$$A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3); \quad A_2 = a_{ik}a_{ki}; \quad A_3 = a_{ik}a_{ij}a_{ji}; \quad a_{ij} = - \left(\frac{\overline{\rho v'_i v'_j} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}}{\rho k} \right)$$

donde A_2 y A_3 son las invariantes del tensor de tensiones de anisotropía de Reynolds a_{ij} .

En las zonas por las que el flujo penetra en el dominio considerado deben establecerse las condiciones de contorno de las tensiones de Reynolds y de la tasa de disipación de energía cinética turbulenta. En las paredes los valores de las tensiones de Reynolds se obtienen mediante funciones de pared, que analizaremos en apartados subsiguientes. Para obtener dichas funciones de pared se utiliza la hipótesis de equilibrio y una ley logarítmica, despreciando los términos convectivo y difusivo. Mediante un sistema de coordenadas local (τ es la componente tangencial, η es la componente normal y λ es la componente binormal), se obtiene:

$$\frac{\overline{v'^2_\tau}}{k} = 1.098 \quad \frac{\overline{v'^2_\eta}}{k} = 0.247 \quad \frac{\overline{v'^2_\lambda}}{k} = 0.655 \quad -\frac{\overline{v'_\tau v'_\eta}}{k} = 0.255 \quad (\text{II.58})$$

II.5. MODELO LES.

Los flujos turbulentos se caracterizan por la presencia de remolinos con un amplio espectro de escalas espaciales y temporales. Aunque desde el punto de vista teórico es posible resolver directamente todas las escalas, espaciales y temporales, de la turbulencia mediante la aproximación conocida como DNS (Direct Numerical Simulation), en la práctica el coste computacional requerido por dicha aproximación es demasiado elevado en base a los recursos de los que se dispone hoy en día. En el



extremo opuesto, a las ecuaciones de Navier-Stokes puede aplicárseles un proceso de promediado turbulento (promedio de Reynolds) de forma que en las ecuaciones resultantes aparecerán nuevas variables desconocidas (tensiones de Reynolds) que deben modelizarse para alcanzar el cierre de las ecuaciones. Los modelos para calcular las tensiones de Reynolds dan lugar a que todas las escalas de la turbulencia sean modelizadas y ninguna de ellas resuelta directamente. El modelo de turbulencia LES (Large Eddy Simulation) es una aproximación intermedia entre la simulación directa DNS y los modelos de turbulencia basados en los promedios turbulentos (Sagaut, 2001). La masa, el momento, la energía, y otros escalares pasivos, son transportados principalmente por los remolinos de escala grande que son los que tienen una gran dependencia del tiempo, de la geometría y de las condiciones de contorno de cada problema particular, mientras que los remolinos de escala pequeña dependen mucho menos de la geometría del problema y tienden a ser más isotrópicos, y por lo tanto más universales, de modo que la probabilidad de encontrar un modelo de turbulencia universal para los remolinos de escala pequeña es más elevada. Sustentándose en este hecho, el modelo LES aplica un procedimiento de filtrado a las ecuaciones de Navier-Stokes, con vistas a eliminar de las mismas los remolinos con un tamaño más pequeño que el del filtro considerado, pero no los remolinos con un tamaño igual o superior al susodicho filtro. De este modo los remolinos a escala pequeña son modelizados, mientras que los remolinos a escala grande se resuelven directamente. Una variable filtrada puede escribirse como:

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \int_D \phi(\bar{x}') G(\bar{x}, \bar{x}') d\bar{x}' \quad (\text{II.59})$$

donde D es el dominio donde se desarrolla el campo de flujo y G es la función de filtrado. La técnica de los volúmenes finitos para discretizar las ecuaciones de gobierno de la Mecánica de Fluidos ya lleva implícita una operación de filtrado definida como:

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \frac{1}{V} \int_V \phi(x') d\bar{x}'; \quad \bar{x}' \in V \quad (\text{II.60})$$

siendo V el volumen de cada celda discreta del dominio computacional y donde la función de filtrado viene dada por:

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = \begin{cases} 1/V; & \text{si } \bar{x}' \in V \\ 0; & \text{si } \bar{x}' \notin V \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

El modelo LES para el caso de un flujo compresible aún no está lo suficientemente desarrollado y comprobado (para el desarrollo del esquema LES en el caso de flujo compresible, consúltese (Sagaut, 2001)), por lo que nos limitamos a exponer las ecuaciones filtradas correspondientes a un flujo incompresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_i) = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i \bar{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$



En las ecuaciones (II.62) aparece un término desconocido correspondiente al tensor de tensiones a escala de sub-mallado, τ_{ij} , que se define como:

$$\tau_{ij} = \overline{\rho v_i v_j} - \overline{\rho} \overline{v_i v_j} \quad (\text{II.63})$$

Puesto que el tensor de tensiones (II.63) es desconocido, debe modelizarse mediante un modelo de viscosidad turbulenta a escala de sub-mallado para obtener el cierre de las ecuaciones (II.62):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\mu_t \overline{E_{ij}} \quad (\text{II.64})$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta a escala de sub-mallado y $\overline{E_{ij}}$ es el valor filtrado del tensor de deformaciones para la escala resuelta, dado por:

$$\overline{E_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.65})$$

Entre los modelos a escala de sub-mallado, es decir, los modelos de turbulencia empleados para modelizar los remolinos del flujo turbulento de menor tamaño que son los que no se resuelven directamente, destacan cuatro: el modelo Smagorinsky-Lilly, el modelo Smagorinsky-Lilly dinámico, el modelo WALE y el modelo dinámico de sub-mallado para la energía cinética³.

El modelo Smagorinsky-Lilly, que es el modelo de sub-mallado más básico, modeliza la viscosidad turbulenta mediante la siguiente expresión:

$$\mu_t = \rho L_s^2 \left| \overline{E} \right| \quad (\text{II.66})$$

donde $\overline{E} = \sqrt{2\overline{E_{ij}E_{ij}}}$ y L_s es la longitud de mezcla a escala de sub-mallado que se calcula como:

$$L_s = \min(\kappa d, C_s V^{1/3}) \quad (\text{II.67})$$

siendo κ la constante de Von Karman, d la distancia a la pared más próxima y V el volumen de la celda discreta considerada. La constante del modelo que toma el valor $C_s = 0.1$, es la llamada constante de Smagorinsky. Con el modelo de Smagorinsky-Lilly dinámico, la constante de Smagorinsky, C_s , se calcula dinámicamente a partir de la información proporcionada por las escalas del movimiento turbulento que son resueltas, obviando así la necesidad de especificar de antemano un valor para dicha constante. El valor de C_s obtenido con el modelo de Smagorinsky-Lilly dinámico es un valor local, variable en el espacio y en el tiempo, que puede ser tanto positivo como negativo. Un

³ Otros desarrollos de modelos a escala de sub-mallado pueden encontrarse en (Meneveau, 1996), (Meneveau, 1997), (Meneveau, 2000), (Porte, 2000), (Scotti, 1997) o (Mansfield, 1998).



característica deseable en el modelo dinámico es que la constante de Smagorinsky tome un valor negativo, hecho que se interpreta como el flujo de energía desde los remolinos a escala de sub-mallado a los remolinos resueltos. No obstante, si el valor negativo es muy grande, pueden producirse problemas de estabilidad numérica y divergencia de la solución, por lo que en tales casos se asigna el valor cero a la constante de Smagorinsky.

En el modelo WALE (Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity) la viscosidad turbulenta se modeliza mediante la expresión:

$$\mu_t = \rho C_\omega L_s^2 \frac{(E_{ij}^d E_{ij}^d)^{3/2}}{(\overline{E_{ij} E_{ij}})^{5/2} + (E_{ij}^d E_{ij}^d)^{5/4}} \quad (\text{II.68})$$

donde:

$$E_{ij}^d = \frac{1}{2}(\overline{g_{ij}^2} + \overline{g_{ji}^2}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{g_{kk}^2}; \quad \overline{g_{ij}} = \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.69})$$

es un operador espacial mediante el cual el modelo WALE retorna al comportamiento asintótico correcto de pared para flujos confinados.

El modelo de Smagorinsky-Lilly, tanto el original como el dinámico, son modelos algebraicos en los que las tensiones a escala de sub-mallado se parametrizan mediante las escalas resueltas de la velocidad basándose en la hipótesis de equilibrio local entre la energía transferida a través de la escala de mallado filtrada y la energía cinética disipada a las escalas de mallado más pequeñas (Scotti, 1997). Utilizando la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta a escala de sub-mallado es posible representar con más precisión la turbulencia en dicha escala. La energía cinética a escala de sub-mallado se define como:

$$k_{sgs} = \frac{1}{2}(\overline{v_k^2} - \overline{v_k}^2) \quad (\text{II.70})$$

y la correspondiente ecuación de transporte viene dada por:

$$\frac{\partial \overline{k}_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v}_j \overline{k}_{sgs}) = -\tau_{ij} \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} - C_\epsilon \frac{k_{sgs}^{3/2}}{L_s} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.71})$$

donde la viscosidad turbulenta a escala de sub-mallado, y las tensiones a escala de sub-mallado, se definen como:

$$\mu_t = C_k k_{sgs}^{1/2} L_s \quad (\text{II.72})$$

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3} k_{sgs} \delta_{ij} = -2C_k k_{sgs}^{1/2} L_s \overline{E_{ij}} \quad (\text{II.73})$$



En los contornos por los que el flujo penetra en el dominio computacional se especifican las componentes estocásticas de la velocidad mediante la superposición de perturbaciones aleatorias de las componentes de velocidad individuales, es decir:

$$\bar{v}_i = \langle \bar{v}_i \rangle + I\psi \left| \bar{v} \right| \quad (\text{II.74})$$

siendo I la intensidad de la fluctuación y ψ un número aleatorio gaussiano que satisface las condiciones $\bar{\psi} = 0$ y $\sqrt{\overline{\psi^2}} = 1$. Si el mallado es lo suficientemente fino como para resolver la subcapa límite laminar, las tensiones de cizalladura en la pared se pueden calcular mediante la expresión:

$$\frac{\bar{v}}{v_\tau} = \frac{\rho v_\tau y}{\mu} \quad (\text{II.75})$$

y en caso contrario, puede emplearse una ley logarítmica para la pared:

$$\frac{\bar{v}}{v_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln E \left(\frac{\rho v_\tau y}{\mu} \right) \quad (\text{II.76})$$

donde κ es la constante de Von Karman y $E = 9.793$.

II.6. TRATAMIENTO DE FLUJOS TURBULENTOS EN LAS PROXIMIDADES DE PAREDES.

La presencia de paredes afecta de manera significativa a los flujos turbulentos. Evidentemente el campo de velocidad media debe cumplir la condición de no deslizamiento en las paredes, pero además el amortiguamiento viscoso y el bloqueo cinemático en las proximidades de una pared reducen, respectivamente, las fluctuaciones de la velocidad tangencial y de la velocidad normal. Lo anterior hace que en la región próxima a una pared se produzca un aumento de la turbulencia como consecuencia de la presencia de elevados gradientes de velocidad que aumentan la producción de energía cinética turbulenta. La precisión de las soluciones numéricas depende en gran medida de la modelización de las regiones próximas a paredes, por lo que los modelos de turbulencia $k-\varepsilon$, RSM y LES deben ser modificados para tratar flujos que se desarrollan en las proximidades de paredes (Kaltenbach, 1998).

La región próxima a una pared puede subdividirse en tres zonas o capas: la más interna, denominada subcapa viscosa, en la que el flujo es prácticamente laminar y está dominado por la viscosidad molecular; la más externa, denominada subcapa totalmente turbulenta, en la que domina la turbulencia; y una zona intermedia, denominada subcapa amortiguadora, en la que la viscosidad molecular y la turbulencia son de la misma importancia. Pueden distinguirse dos aproximaciones diferentes para modelizar la región cercana a una pared. Una primera aproximación es la que la subcapa viscosa y la subcapa amortiguadora no se resuelven sino que se tratan mediante funciones semi-empíricas denominadas **funciones de pared**, de forma que no es necesario realizar ningún tipo de modificación en los modelos de turbulencia. Y una segunda



aproximación, denominada **modelos de pared**, en la que sí se resuelve la región afectada por la viscosidad, de modo que es necesario modificar los modelos de turbulencia. Para flujos con números de Reynolds elevados las funciones de pared proporcionan soluciones suficientemente precisas con costes computacionales menores, pero son inadecuadas para flujos con números de Reynolds bajos, siendo entonces necesario usar un modelo de pared (Versteeg, 1995). A continuación se describe tanto la aproximación de funciones de pared como la aproximación de modelos de pared.

a) Funciones de pared:

Como se ha comentado, las funciones de pared son una colección de fórmulas semi-empíricas que abarcan tanto leyes de pared para la velocidad media y la temperatura, como fórmulas para las cantidades turbulentas (Kaltenbach, 1998). Puesto que en el problema del ventilador axial que es objeto de estudio en esta tesis, la ecuación de la energía no se resuelve, nos limitamos a exponer aquí las funciones de pared correspondientes a la velocidad media y a las cantidades turbulentas. Puede distinguirse entre dos tipos fundamentales de funciones de pared, las *funciones de pared estándar* y las *funciones de pared de no-equilibrio*. En las aplicaciones de flujos industriales las funciones de pared estándar son las más habituales. Con dichas fórmulas la ley de pared para la velocidad media se calcula como:

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*) \tag{II.77}$$

siendo:

$$U^* = \frac{\rho U_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w}; \quad y^* = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}{\mu} \tag{II.78}$$

donde $\kappa = 0.42$ es la constante de Von Karman, $E = 9.793$ es una constante empírica, U_P es la velocidad media del fluido en el punto P , k_P es la energía cinética turbulenta en P e y_P es la distancia entre el punto P y la pared. La ley (II.77) es válida cuando $y^* > 11.225$, en caso contrario se aplica la aproximación $U^* = y^*$. En los modelos $k - \varepsilon$ y RSM, la ecuación para la energía cinética turbulenta se resuelve en todo el dominio computacional, incluyendo las celdas adyacentes a las paredes, y la condición de contorno que se impone para la energía cinética turbulenta en la pared (siendo n la coordenada local perpendicular a dicha pared) viene dada por:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \tag{II.79}$$

Por el contrario, la producción de energía cinética, G_k , y su tasa de disipación, ε , se calculan en las celdas adyacentes a las paredes mediante la hipótesis de equilibrio local, asumiendo que son iguales a la producción de k y su tasa de disipación en el volumen de control adyacente a la pared:

$$G_k \approx \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \frac{\tau_w}{\kappa \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P} \tag{II.80}$$



$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (\text{II.81})$$

Por tanto, mediante esta aproximación no se resuelve la ecuación de transporte de la tasa de disipación de energía cinética turbulenta, sino que se calcula mediante la ecuación (II.81). Cuando las condiciones del flujo se apartan mucho de la hipótesis de equilibrio local, las funciones de pared estándar proporcionan resultados numéricos poco precisos, que pueden mejorarse empleando las funciones de pared de no-equilibrio (Davidson, 2003). Dichas funciones emplean una ley logarítmica para calcular la velocidad media que es sensible al gradiente de presiones, y utilizan una aproximación basada en el concepto de dos capas para calcular el incremento de energía cinética turbulenta en las celdas adyacentes a las paredes. La ley logarítmica para determinar la velocidad media del campo de flujo viene dada por la expresión:

$$\frac{\tilde{U} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\tau_w / \rho} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y}{\mu} \right) \quad (\text{II.82})$$

donde, si y_v denota el espesor de la subcapa viscosa, entonces:

$$\tilde{U} = U - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y_v}{\rho \kappa \sqrt{k}} \ln \left(\frac{y}{y_v} \right) + \frac{y - y_v}{\rho \kappa \sqrt{k}} + \frac{y_v^2}{\mu} \right] \quad (\text{II.83})$$

$$y_v = \frac{\mu y_v^*}{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}; \quad y_v^* = 11.225$$

El concepto de dos capas permite calcular el incremento de energía cinética turbulenta, G_k , en las celdas adyacentes a las paredes, necesario para resolver la ecuación de transporte de k en dichas celdas, asumiendo que las proximidades de las paredes consisten de una subcapa viscosa y de una subcapa totalmente turbulenta. Se suponen los siguientes perfiles para las cantidades turbulentas:

$$\tau_t = \begin{cases} 0, & y < y_v \\ \tau_w, & y > y_v \end{cases}; \quad k = \begin{cases} (y/y_v)^2, & y < y_v \\ k_p, & y > y_v \end{cases}; \quad \varepsilon = \begin{cases} 2\nu k / y^2, & y < y_v \\ k^{3/2} / C_l y, & y > y_v \end{cases} \quad (\text{II.84})$$

donde $C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}$. Mediante los perfiles (II.84) la producción de energía cinética turbulenta promediada en una celda discreta, $\overline{G_k}$, y la tasa de disipación de energía cinética turbulenta promediada también en una celda discreta, $\overline{\varepsilon}$, se calculan a partir de un promedio de volumen de G_k y ε en las celdas adyacentes. Por ejemplo, en el caso de celdas hexaédricas, en las cuales el promedio de volumen puede aproximarse por un promedio en profundidad, se tiene:

$$\overline{G_k} = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau_t \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{1}{\kappa y_n} \frac{\tau_w^2}{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} \ln \left(\frac{y_n}{y_v} \right) \quad (\text{II.85})$$



$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \varepsilon dy = \frac{1}{y_n} \left[\frac{2\nu}{y_v} + \frac{k_p^{1/2}}{C_l} \ln \left(\frac{y_n}{y_v} \right) \right] k_p \quad (\text{II.86})$$

donde y_n es la altura de la celda ($y_n = 2y_p$).

b) Modelos de pared:

Las funciones de pared estándar dan resultados numéricos razonablemente precisos para la mayor parte de los flujos turbulentos confinados a números de Reynolds altos, y además las funciones de pared de no-equilibrio extienden la validez de la aproximación de funciones de pared a flujos con la presencia de gradientes de presión elevados. En el resto de situaciones la fiabilidad de la solución numérica se pone en entredicho y es necesario emplear un tratamiento diferente: los **modelos de pared**.

El modelo de pared más habitual es un modelo de dos capas que resuelve el campo de flujo turbulento en las proximidades de las paredes a condición de que el mallado sea lo suficientemente fino como para poder resolver la subcapa laminar (Davidson, 2003). Si el mallado se refina hasta tal extremo en todo el dominio del fluido los costes computacionales pueden ser excesivamente grandes, pero si el mallado se refina únicamente en la supuesta región ocupada por la subcapa laminar pueden generarse errores numéricos que disminuyan la precisión de los cálculos. Para evitar este problema puede emplearse lo que se conoce como **tratamiento mejorado de las paredes** (Hirsch, 1990), consistente en la combinación de un modelo de pared de dos capas con funciones de pared mejoradas.

Mediante el modelo de dos capas es posible calcular tanto la tasa de disipación de energía cinética turbulenta como la viscosidad turbulenta en las proximidades de las paredes. El dominio computacional se subdivide en una región afectada por la viscosidad y una región totalmente turbulenta, siendo el número de Reynolds turbulento el criterio de separación entre ambas regiones:

$$Re_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu} \quad (\text{II.87})$$

donde y es la distancia perpendicular a la pared. En la región totalmente turbulenta ($Re_y > Re_y^*$; $Re_y^* = 200$) se emplea un modelo de turbulencia ($k - \varepsilon$, RSM o LES), mientras que en la región afectada por la viscosidad ($Re_y < Re_y^*$) se emplea el modelo de una ecuación de Wolfstein, mediante el cual las ecuaciones de momento y energía cinética turbulenta se calculan como en los modelos turbulentos, pero la viscosidad turbulenta se obtiene como:

$$\mu_{t,2layer} = \rho C_\mu l_\mu \sqrt{k} \quad (\text{II.88})$$

donde $l_\mu = y C_l (1 - e^{-Re_y/A_\mu})$ es una escala de longitud, siendo $A_\mu = 70$ y $C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}$. La formulación de dos capas para la viscosidad turbulenta se emplea como parte del tratamiento de paredes mejorado, que define dicha viscosidad para la capa más externa (con números de Reynolds elevados) como:



$$\mu_{t,enh} = \lambda_\varepsilon \mu_t + (1 - \lambda_\varepsilon) \mu_{t,2layer} \quad (\text{II.89})$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta para números de Reynolds elevados que se calcula del mismo modo que en los modelos de turbulencia $k - \varepsilon$ o RSM, y λ_ε es la función de mezcla definida de modo que sea unitaria en zonas alejadas de las paredes y tenga valor cero en las proximidades de las mismas:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\text{Re}_y - \text{Re}_y^*}{A} \right) \right] \quad (\text{II.90})$$

donde la constante A determina la anchura de la función de mezcla:

$$A = \frac{|\Delta \text{Re}_y|}{\tanh(0.98)} \quad (\text{II.91})$$

siendo típicamente ΔRe_y entre un 5% y un 20% del valor de Re_y . La tasa de disipación de energía cinética turbulenta se calcula como:

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} \quad (\text{II.92})$$

donde $l_\varepsilon = yC_l(1 - e^{-\text{Re}_y/A_\varepsilon})$ es la escala de longitud, siendo $A_\varepsilon = 2C_l$.

Para que el modelo de pared sea aplicable a toda la región próxima a las paredes es necesario formular la ley de pared como una única ley que sea válida en dicha zona:

$$u^+ = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\Gamma} u_{turb}^+ \quad (\text{II.93})$$

donde la función de mezcla viene dada por:

$$\Gamma = -\frac{a(y^+)^4}{1+by^+}; \quad c = \exp\left(\frac{E}{E'} - 1\right); \quad a = 0.01c; \quad b = \frac{5}{c}; \quad E = 9.793; \quad E' = \frac{E}{f_r} \quad (\text{II.94})$$

siendo f_r una función de rugosidad de la pared. La ecuación general para la variación de la velocidad, du^+ / dy^+ , se calcula a partir de (II.93) como:

$$\frac{du^+}{dy^+} = e^\Gamma \frac{du_{lam}^+}{dy^+} + e^{1/\Gamma} \frac{du_{turb}^+}{dy^+} \quad (\text{II.95})$$

de forma que en la expresión (II.95) la parte correspondiente a la subcapa totalmente turbulenta permite incluir los efectos de la presencia de gradientes de presiones.



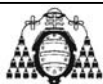


Apéndice III

Resultados de la caracterización del ventilador axial

III.1. INTRODUCCIÓN.

En este apéndice se ofrece un resumen de los resultados obtenidos mediante la realización de esta tesis para la caracterización de la soplante axial. Se presentan tanto resultados del análisis del flujo en la turbomáquina como de la caracterización acústica de la región de propagación. El anexo se ha dividido en dos bloques, uno correspondiente a los resultados del flujo y otro correspondiente a los resultados aeroacústicos. A su vez, el bloque correspondiente a la caracterización de los fenómenos fluidodinámicos que tienen lugar en el ventilador se ha estructurado en cuatro partes: resultados de anemometría térmica, resultados numéricos, resultados de la sonda de presión y resultados de los transductores piezoeléctricos, mostrándose tanto los resultados promediados a un canal de álabe como los instantáneos. Se dispone también de una versión electrónica, que se adjunta a la memoria de la tesis, donde se han incluido las animaciones, numéricas y experimentales, obtenidas para distintas magnitudes del campo de flujo del ventilador.



III.2. CARACTERIZACIÓN DEL FLUJO.

III.2.1. Resultados de anemometría térmica.

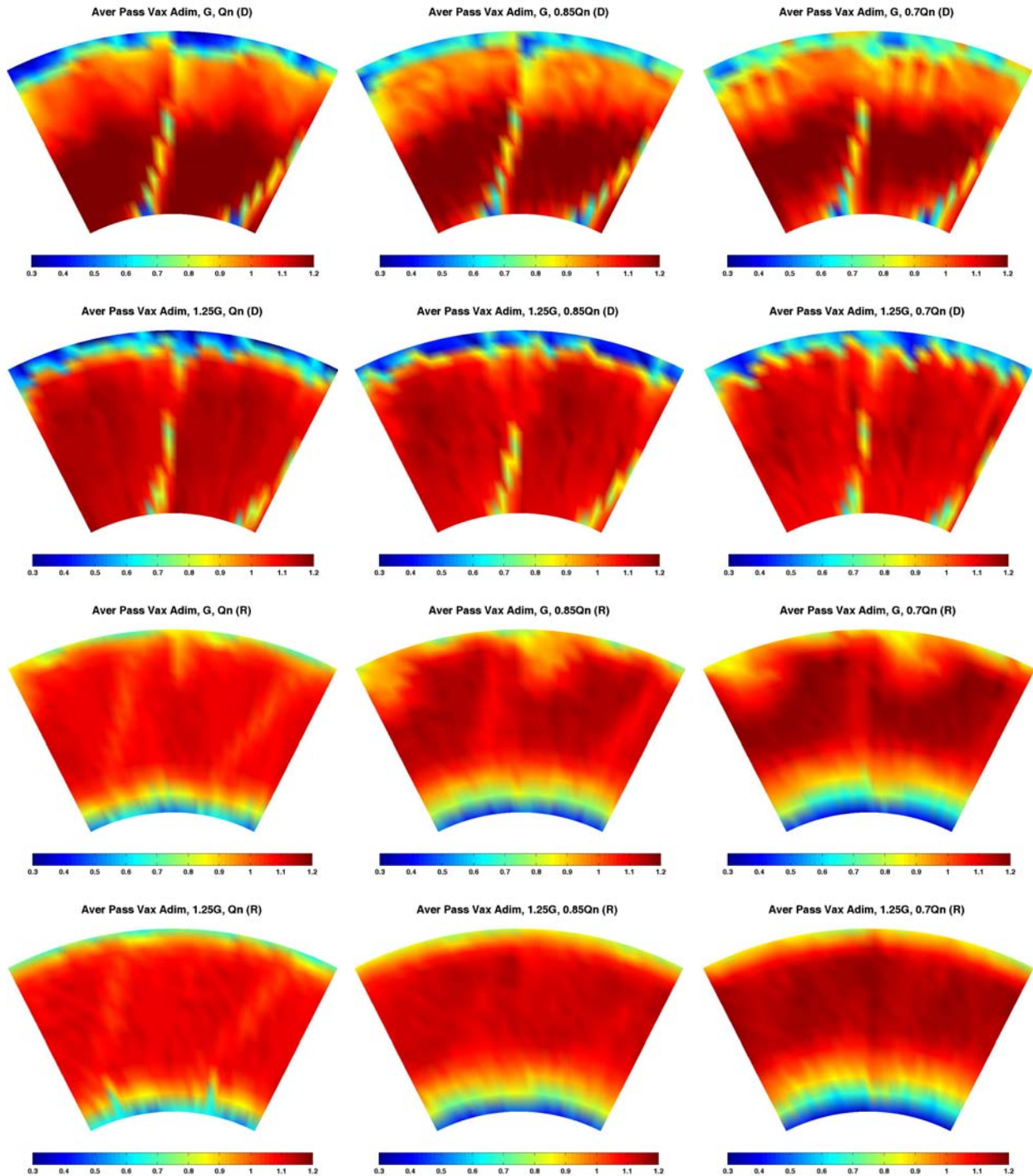


Figura III.1. Componente axial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados experimentales de hilo caliente (DHW).

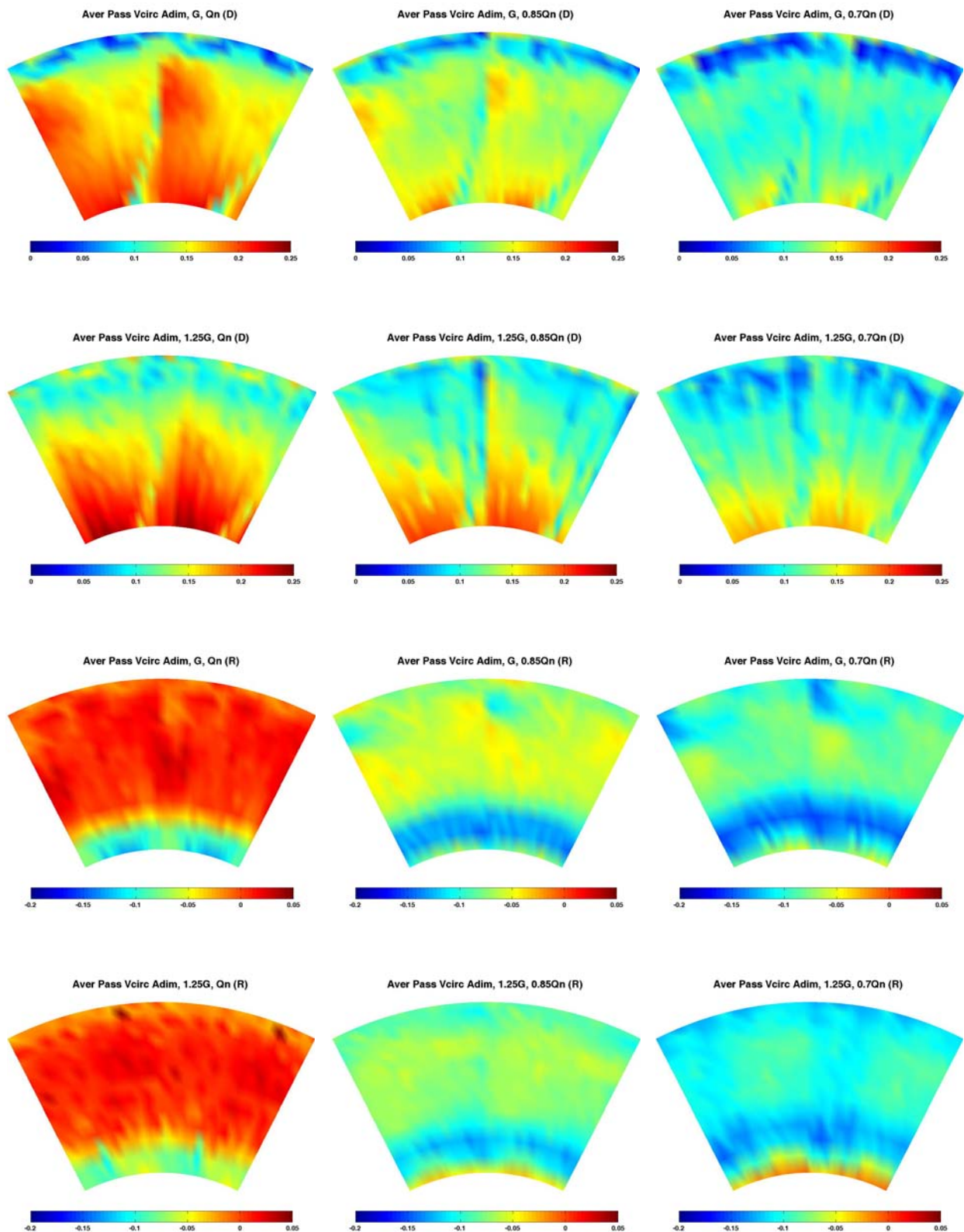


Figura III.2. Componente circunferencial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados experimentales de hilo caliente (DHW).

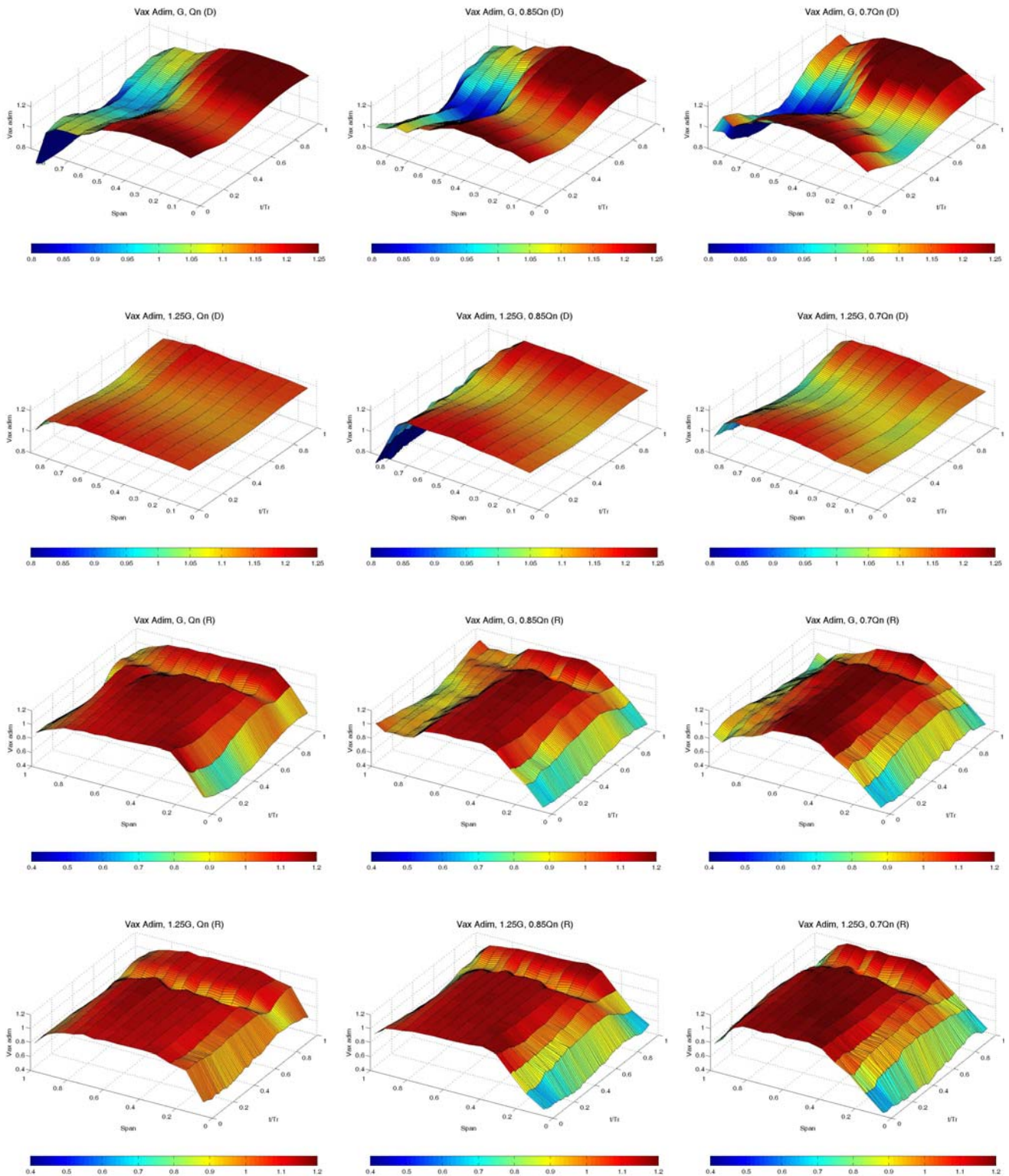


Figura III.3. Mapa radial de la componente axial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados DHW, posición circunferencial 8° .



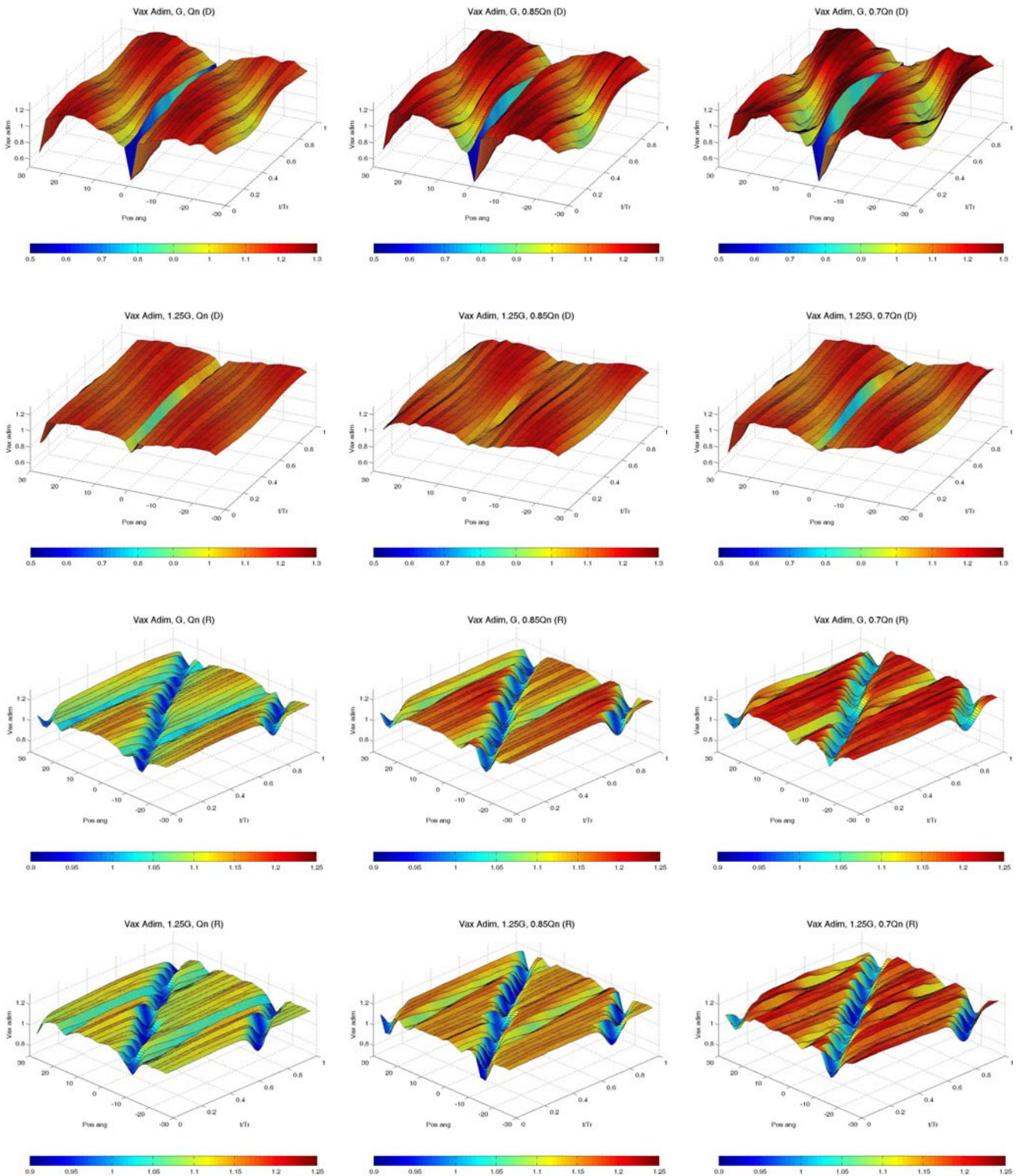


Figura III.4. Mapa angular de la componente axial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y $1.25G$) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados DHW, posición radial 9.



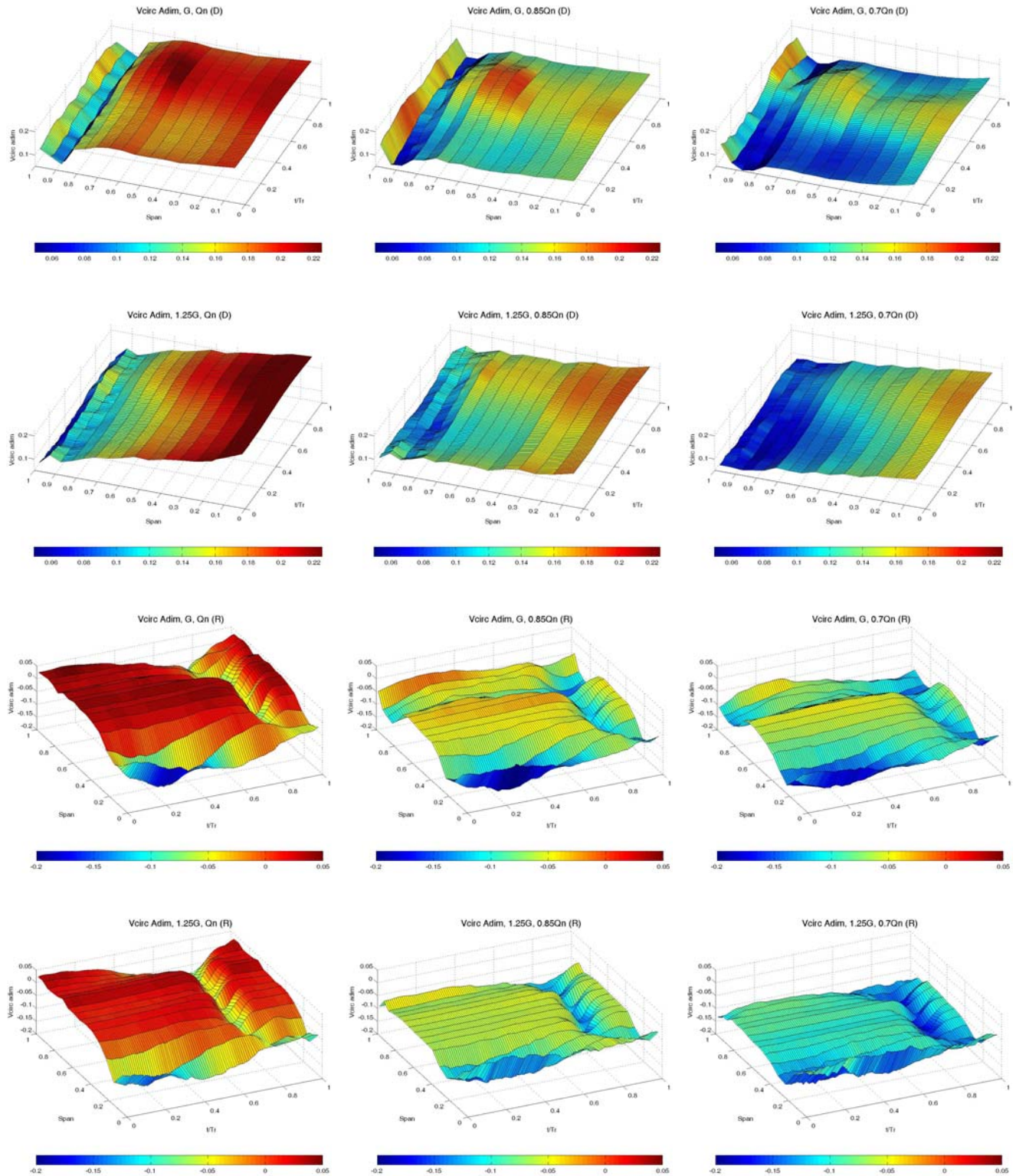


Figura III.5. Mapa radial de la componente circunferencial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados DHW, posición circunferencial 8° .

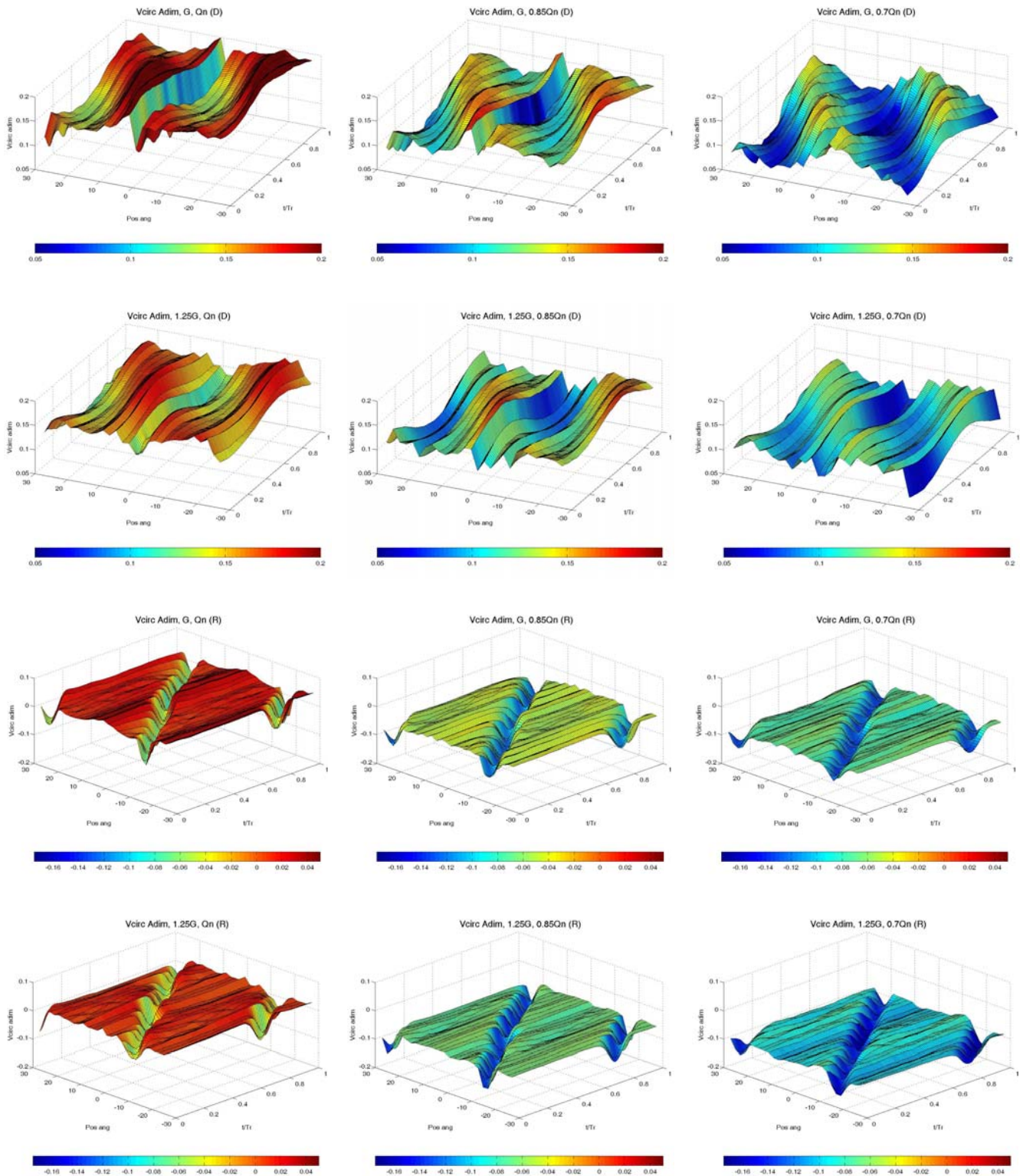
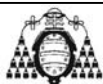


Figura III.6. Mapa angular de la componente circunferencial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados DHW, posición radial 9.



III.2.2. Resultados numéricos.

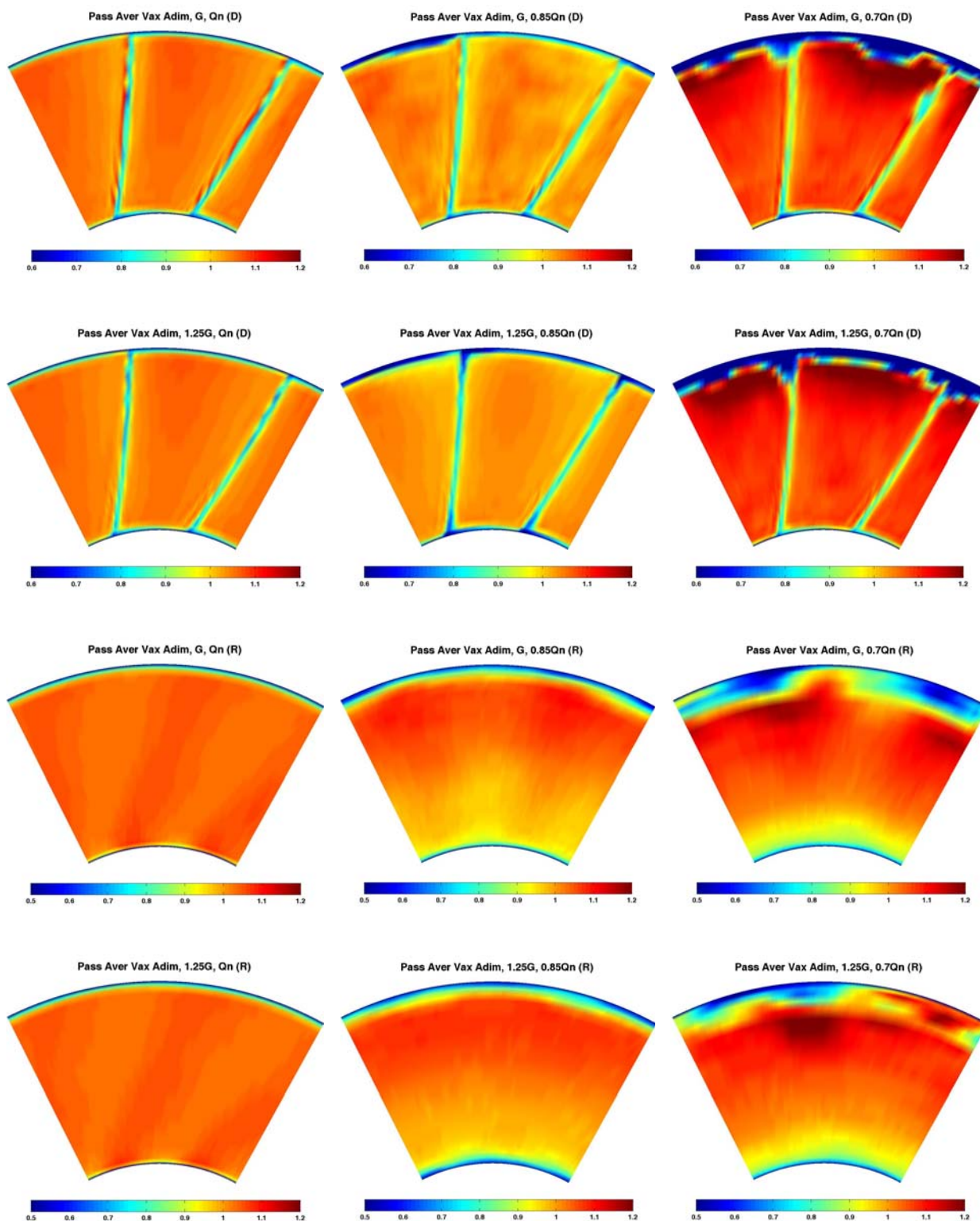
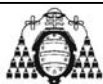


Figura III.7. Componente axial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y $1.25G$) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos del modelo tridimensional.



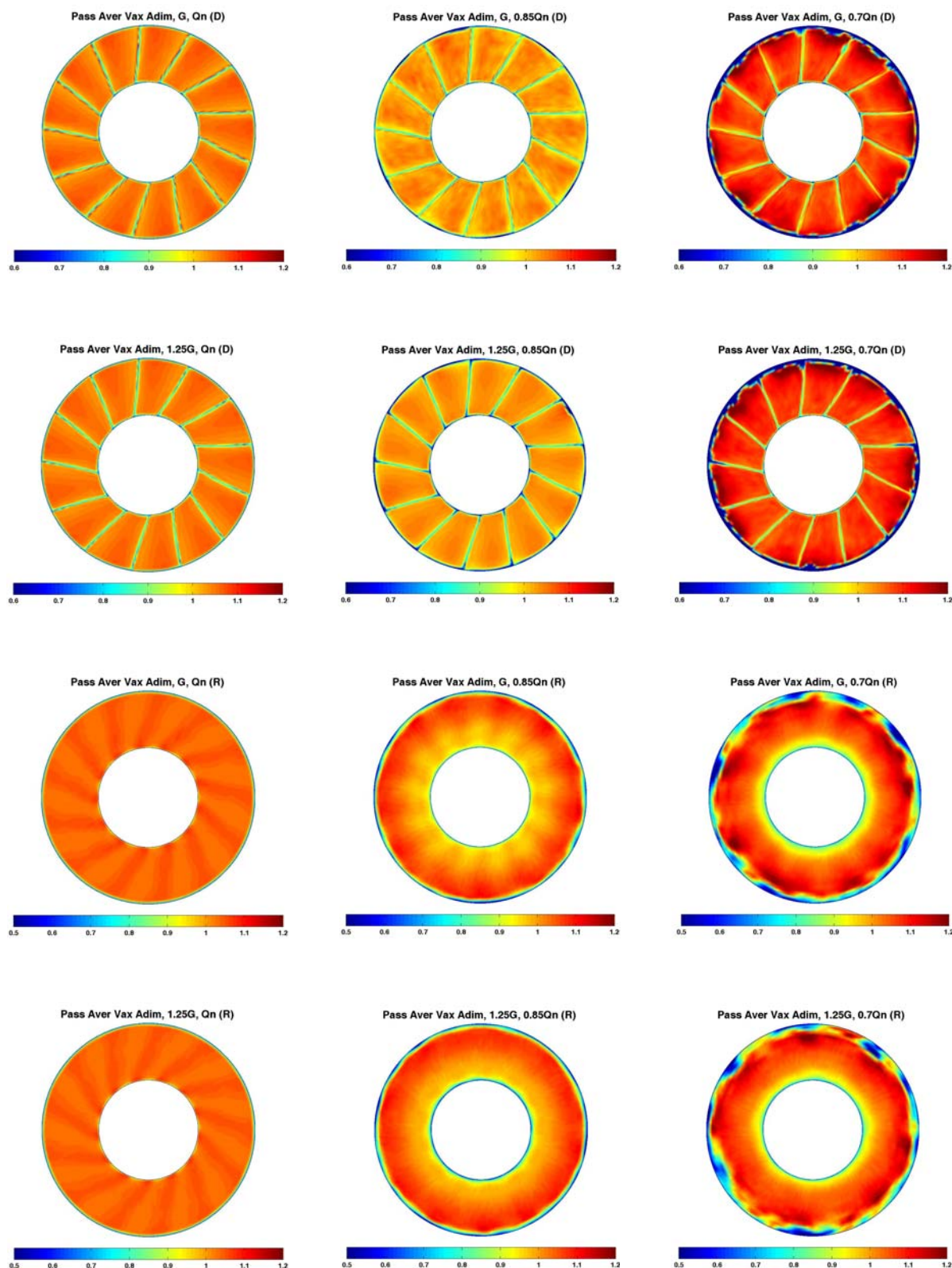
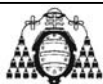


Figura III.8. Componente axial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, perímetro completo.



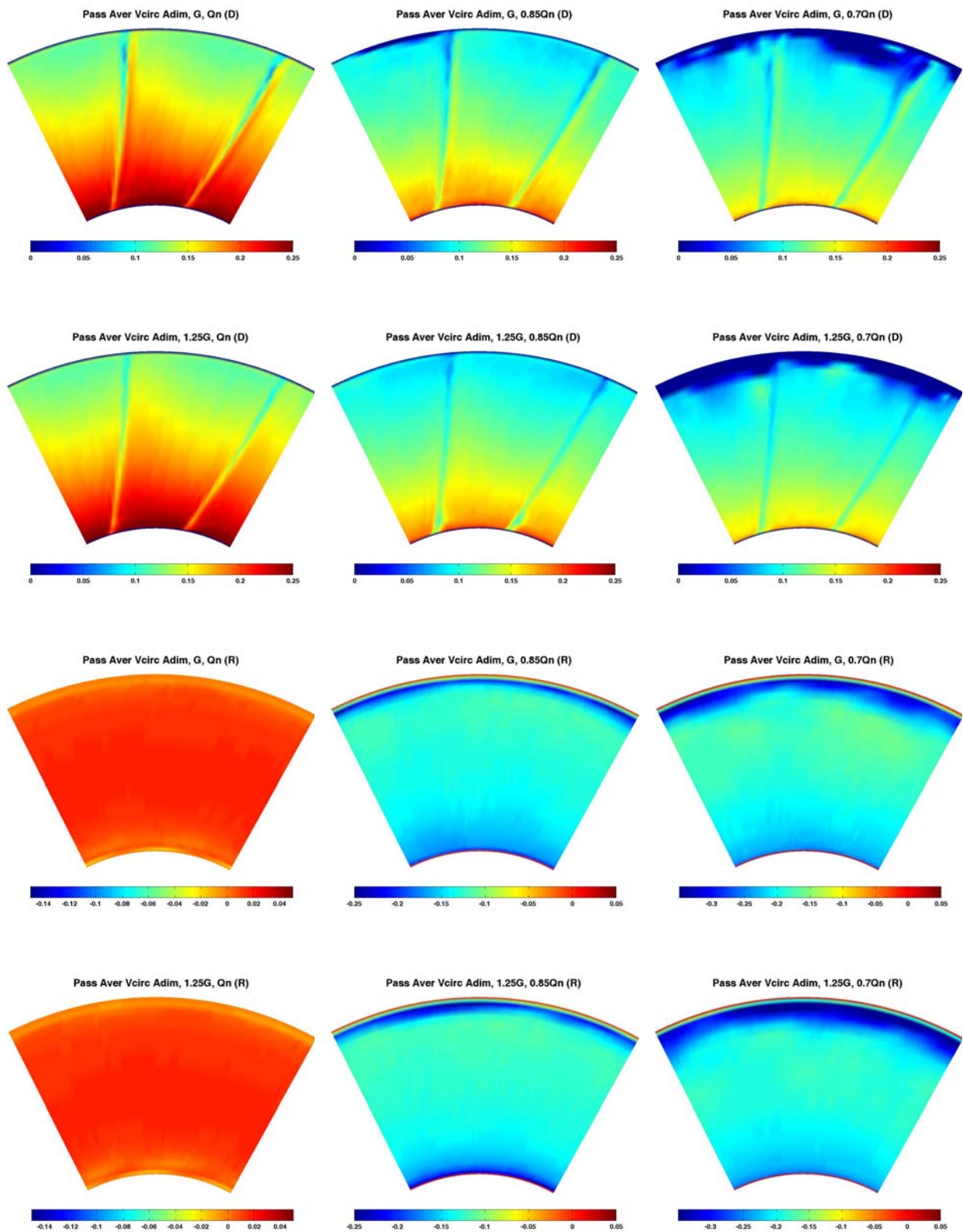


Figura III.9. Componente circunferencial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y $1.25G$) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos del modelo tridimensional.

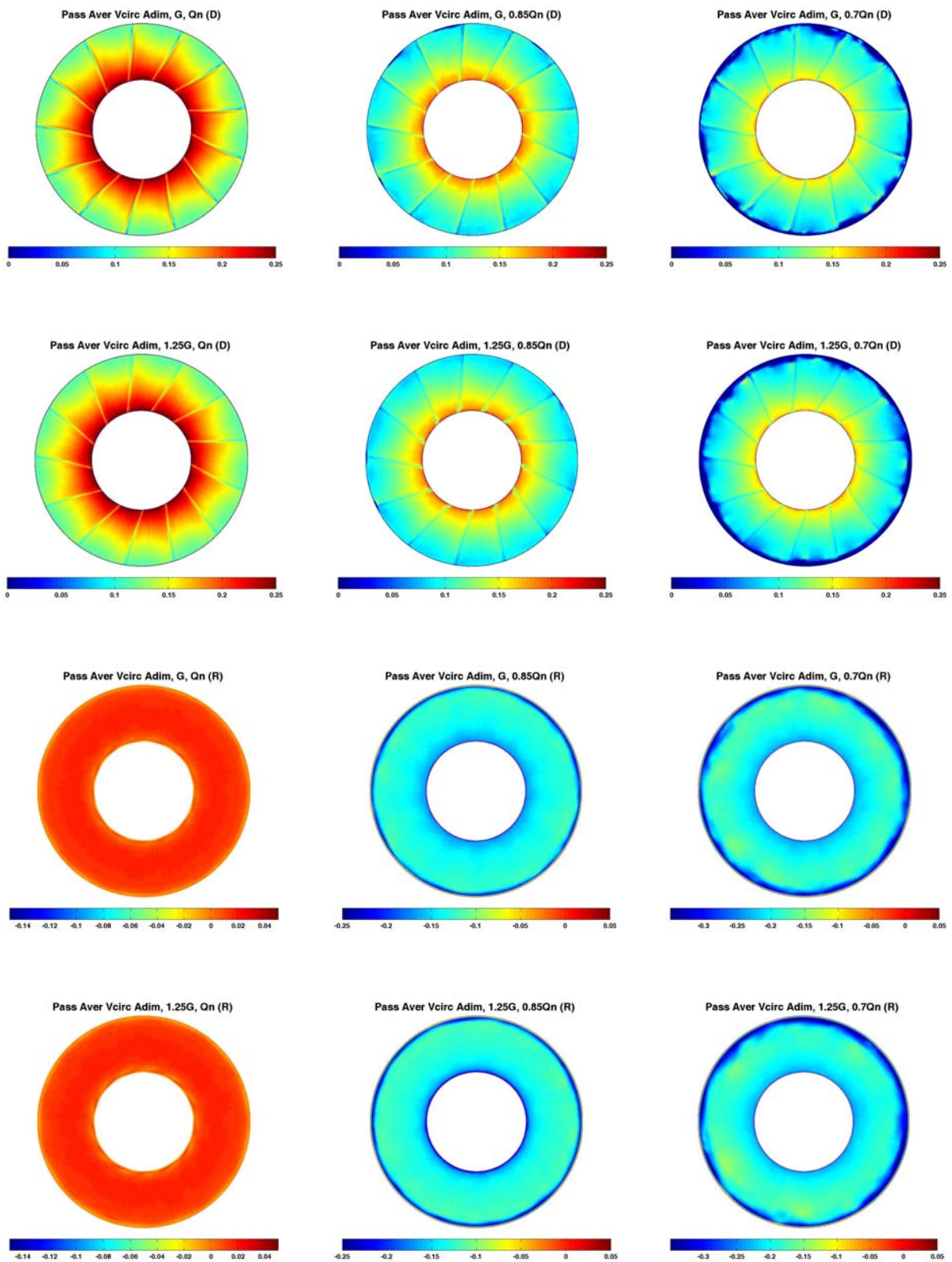


Figura III.10. Componente circunferencial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, perímetro completo.

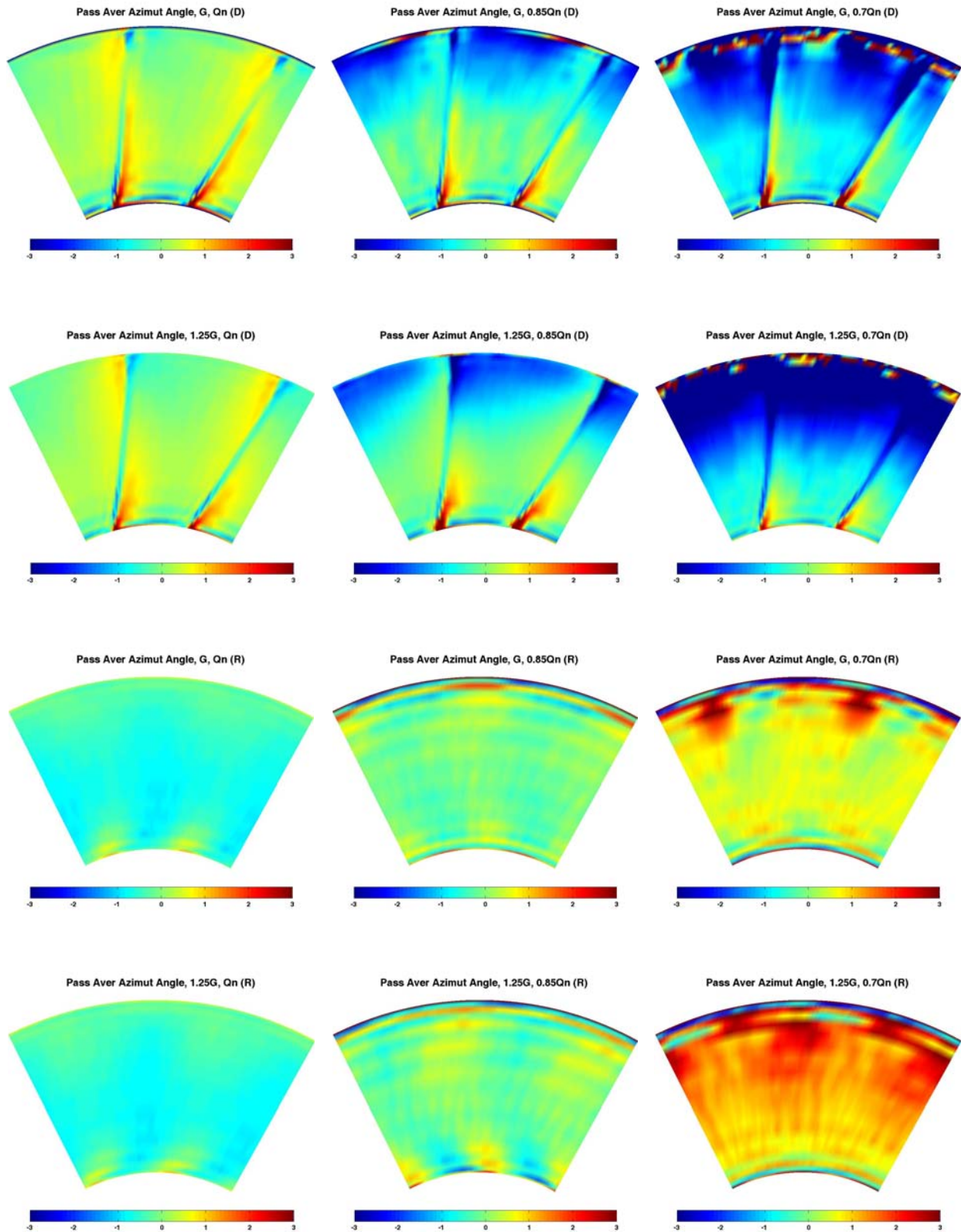


Figura III.11. Ángulo azimutal promedio en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos del modelo tridimensional.

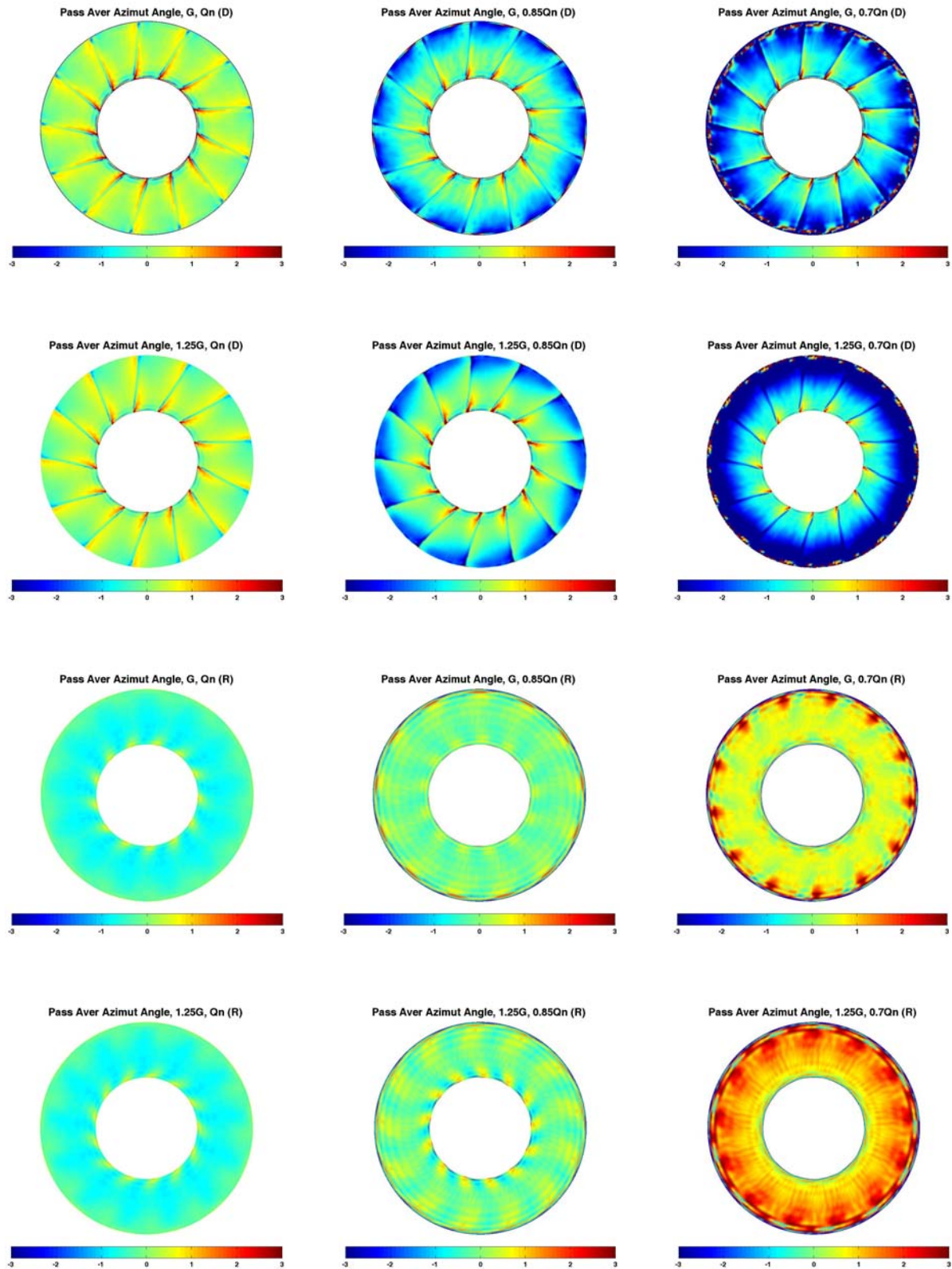


Figura III.12. Ángulo azimutal promedio en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, perímetro completo.

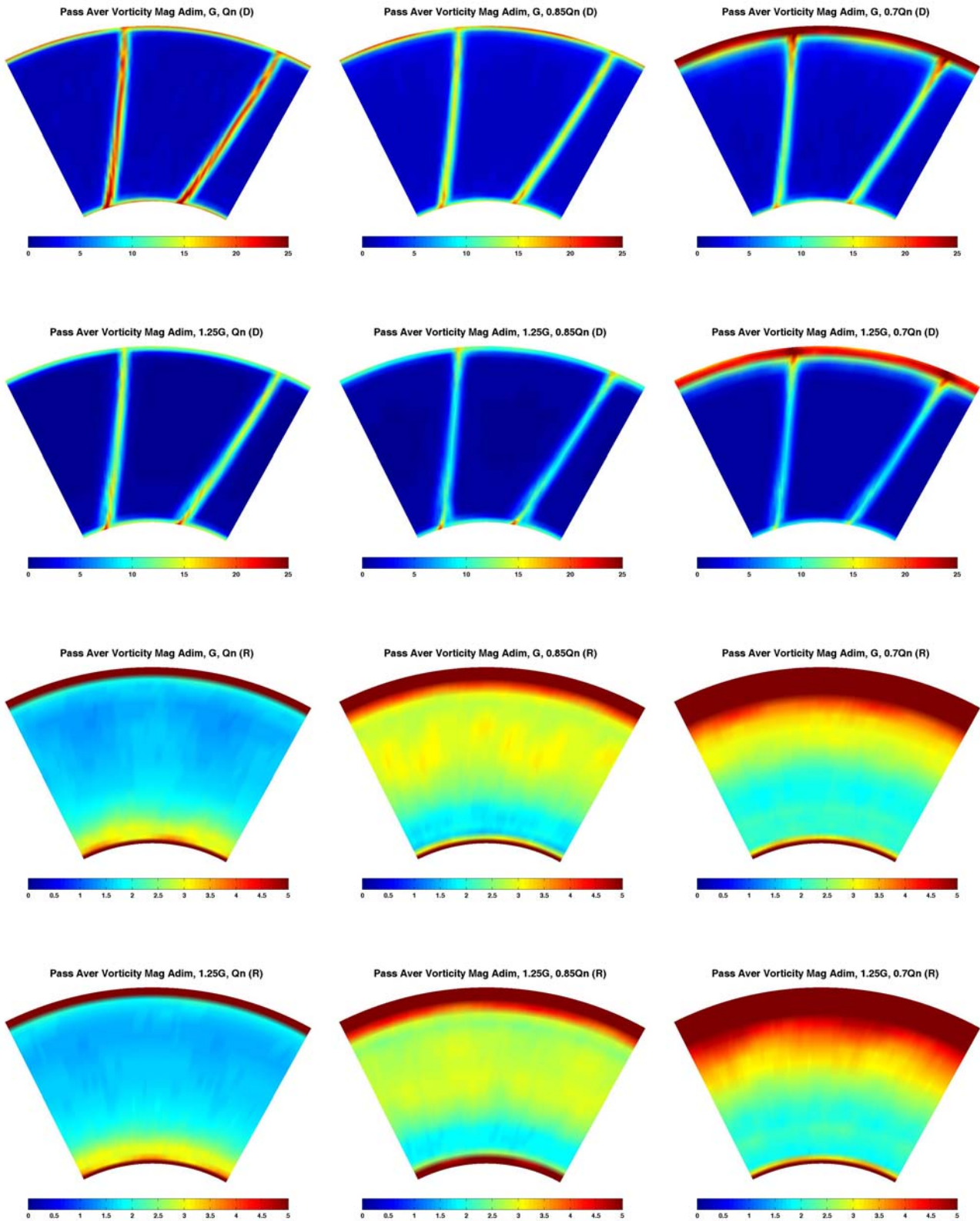


Figura III.13. Magnitud de la vorticidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos del modelo tridimensional.

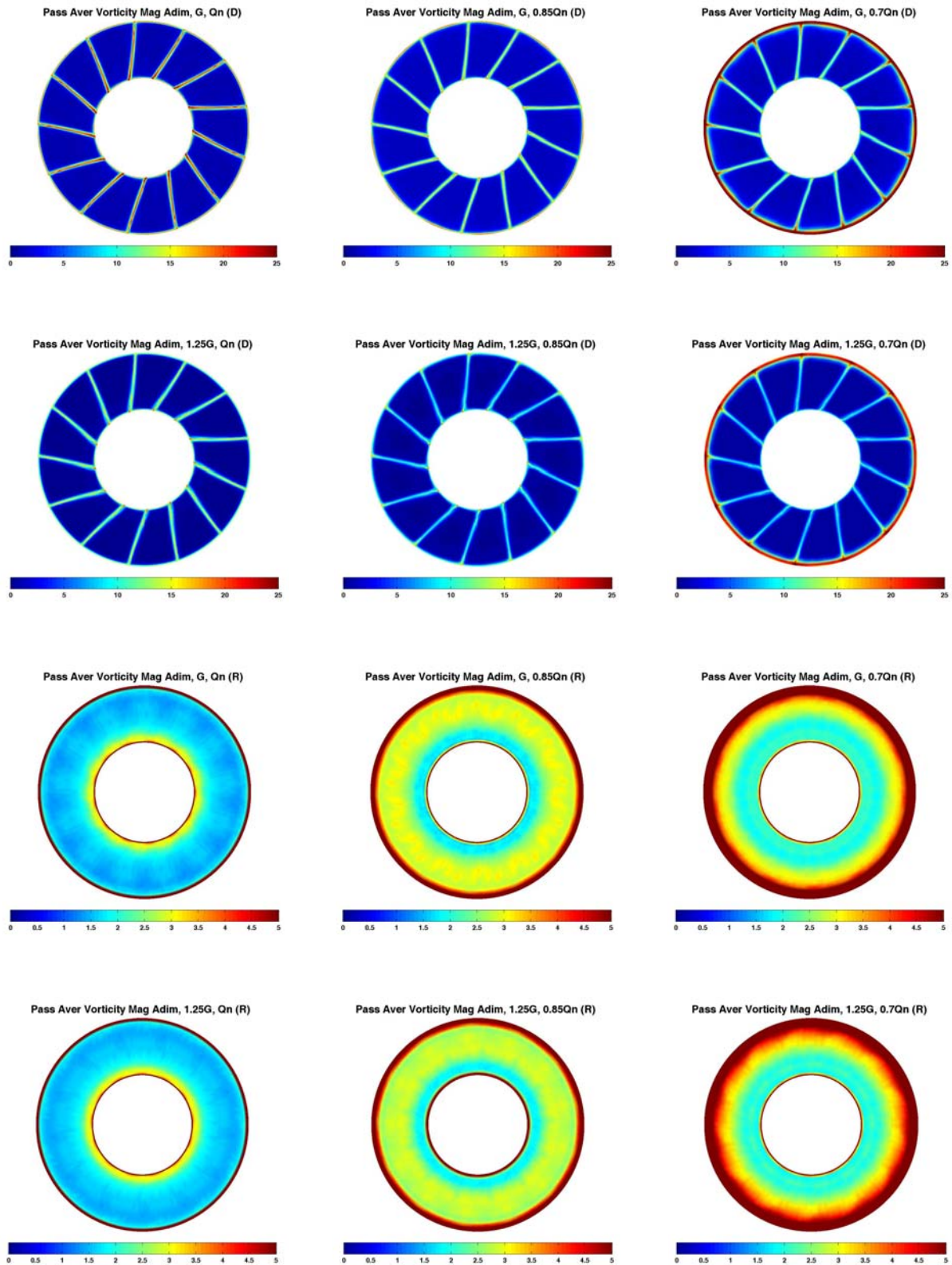


Figura III.14. Magnitud de la vorticidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, perímetro completo.

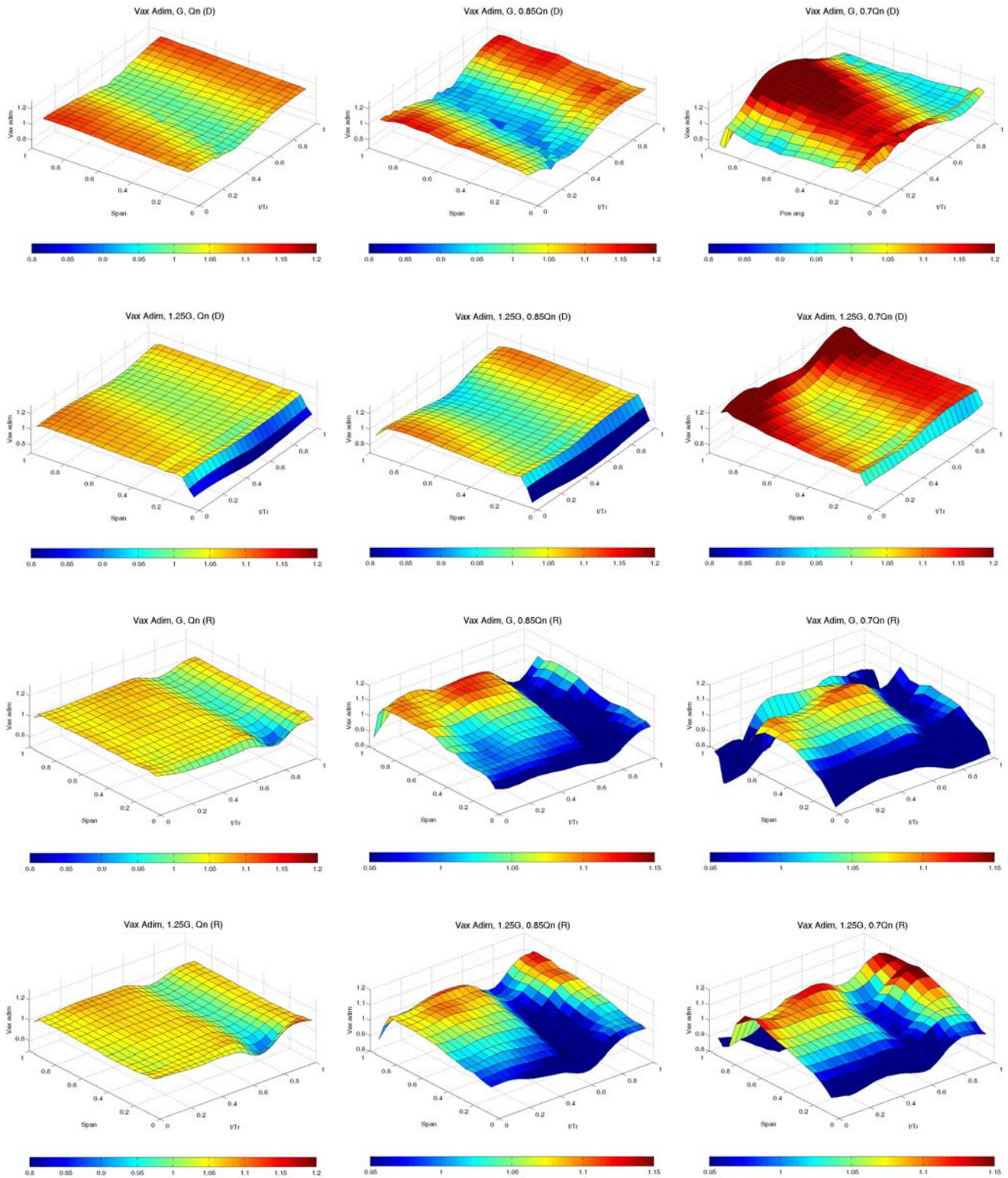


Figura III.15. Mapa radial de la componente axial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición circunferencial 8° .



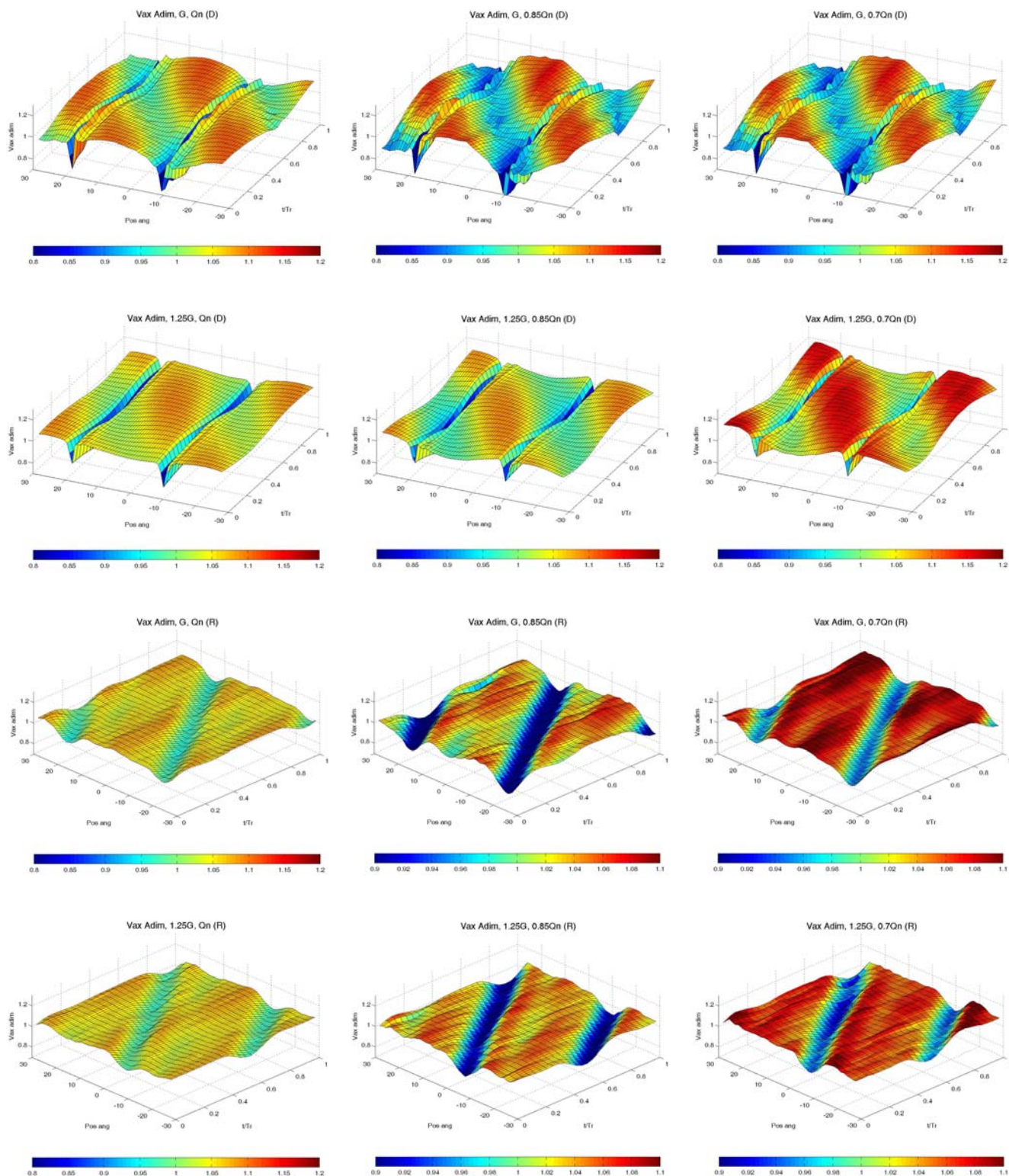
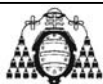


Figura III.16. Mapa angular de la componente axial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición radial 9.



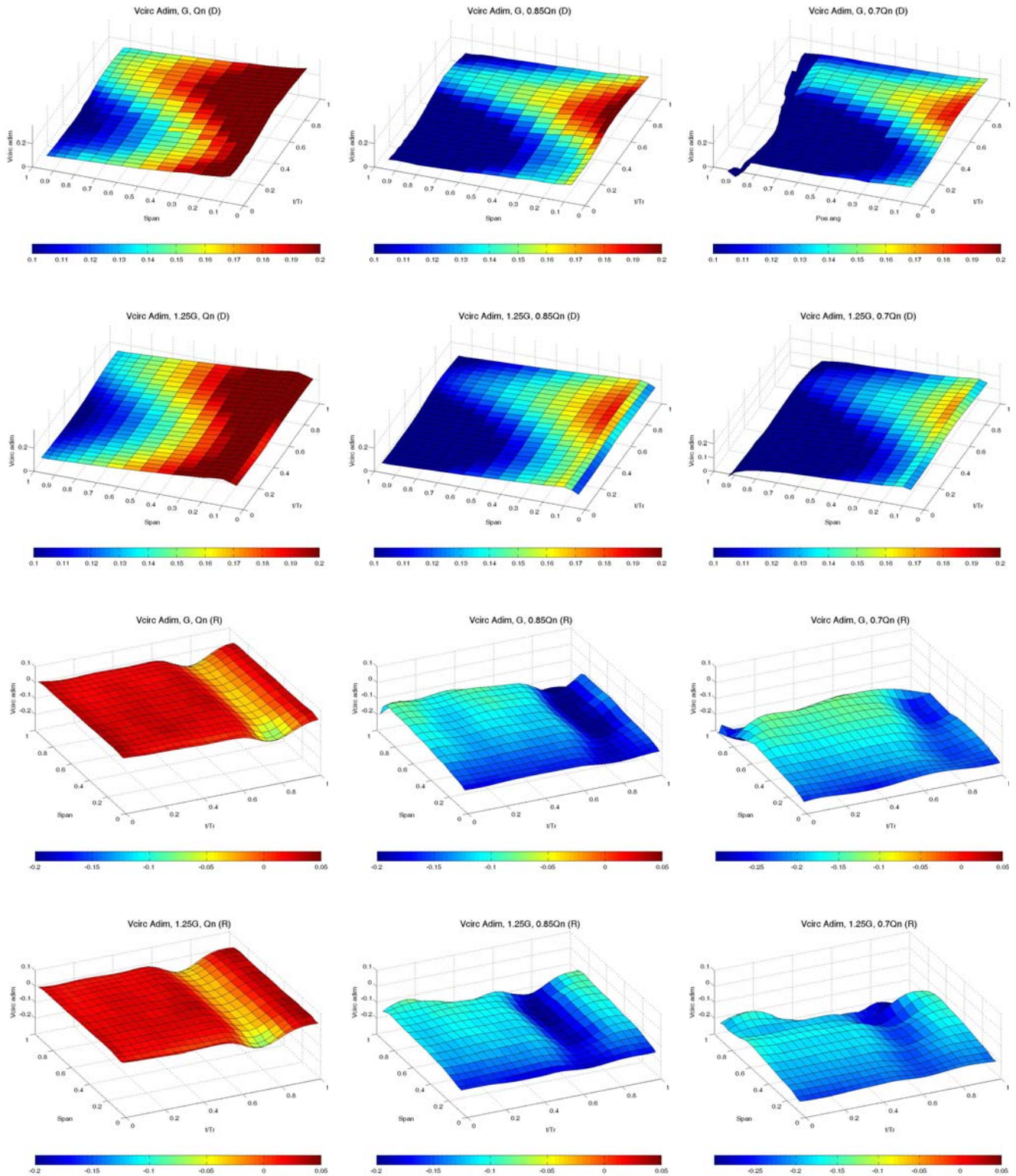


Figura III.17. Mapa radial de componente circunferencial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición circunferencial 8° .



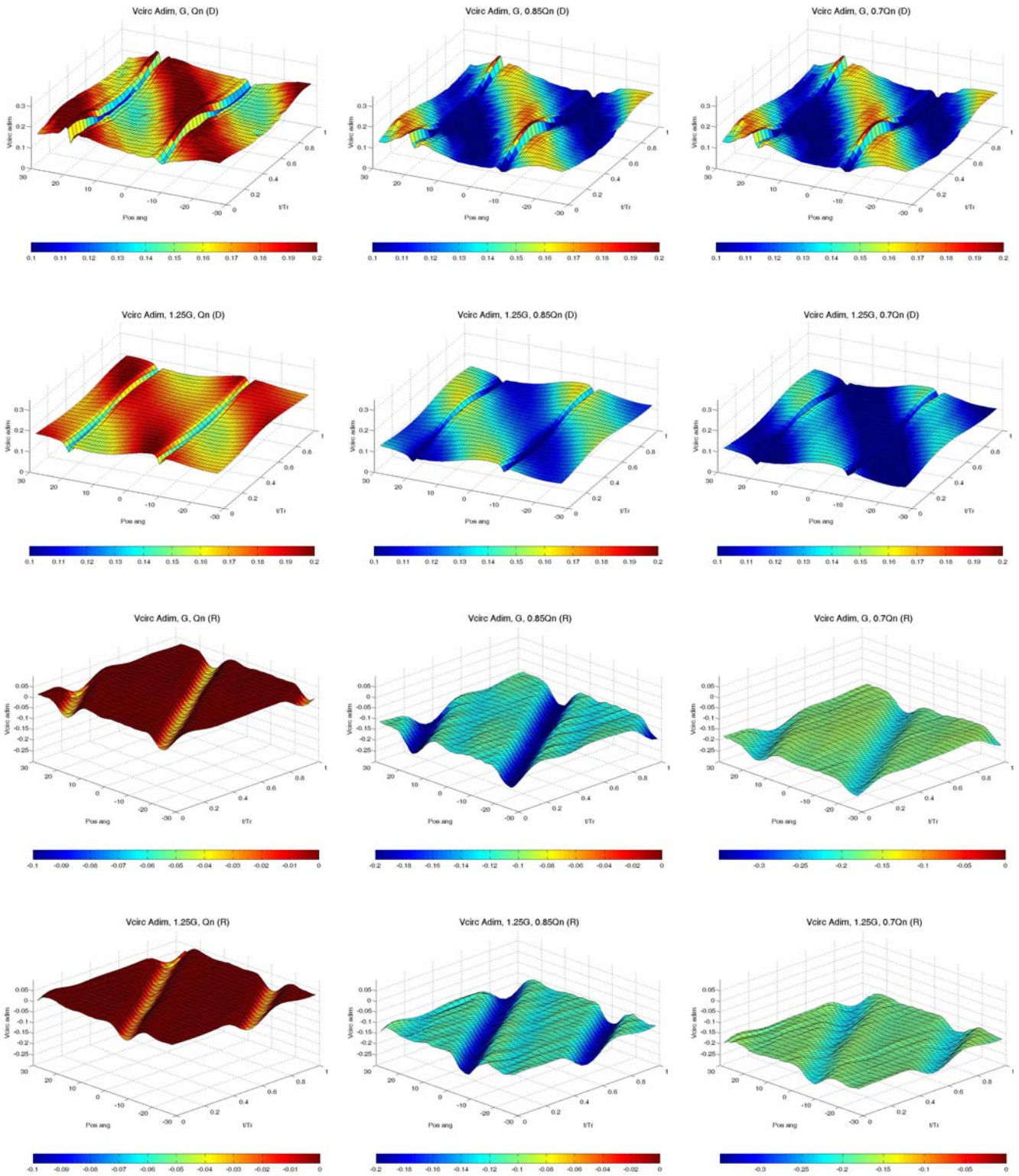


Figura III.18. Mapa angular de la componente circunferencial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición radial 9.



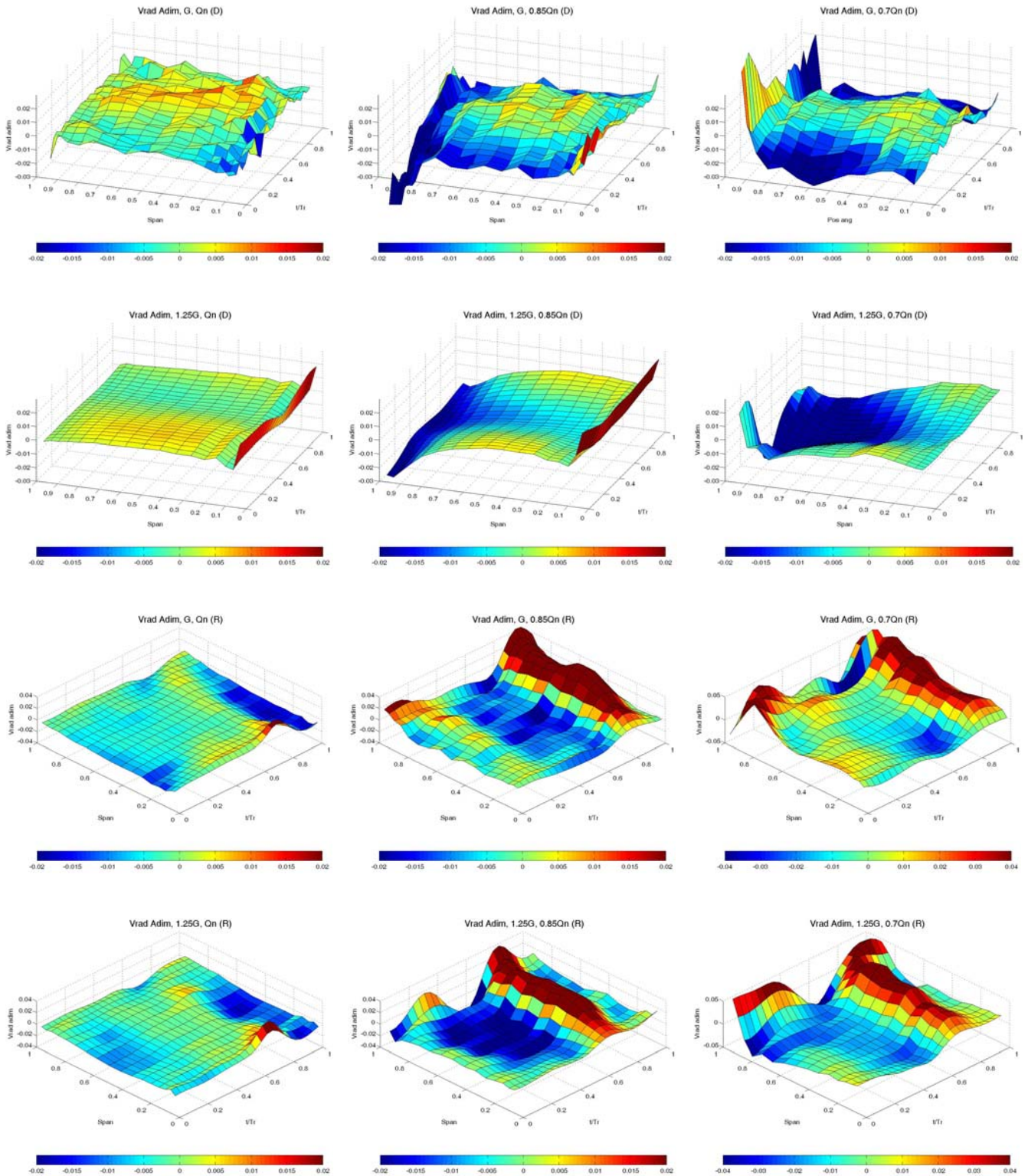


Figura III.19. Mapa radial de la componente radial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales ($Q_n, 0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición circunferencial 8° .



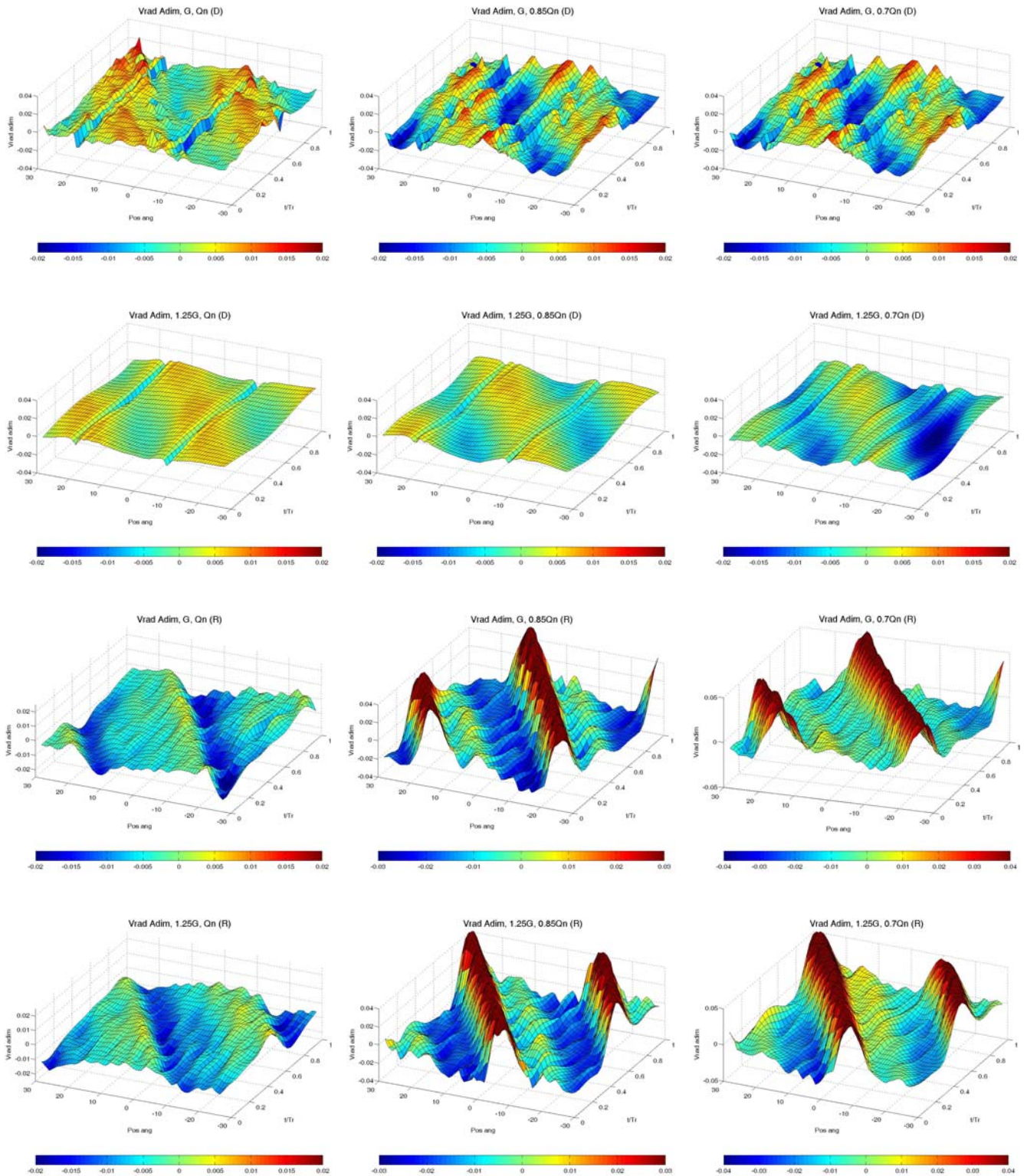


Figura III.20. Mapa angular de la componente radial de la velocidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición radial 9.



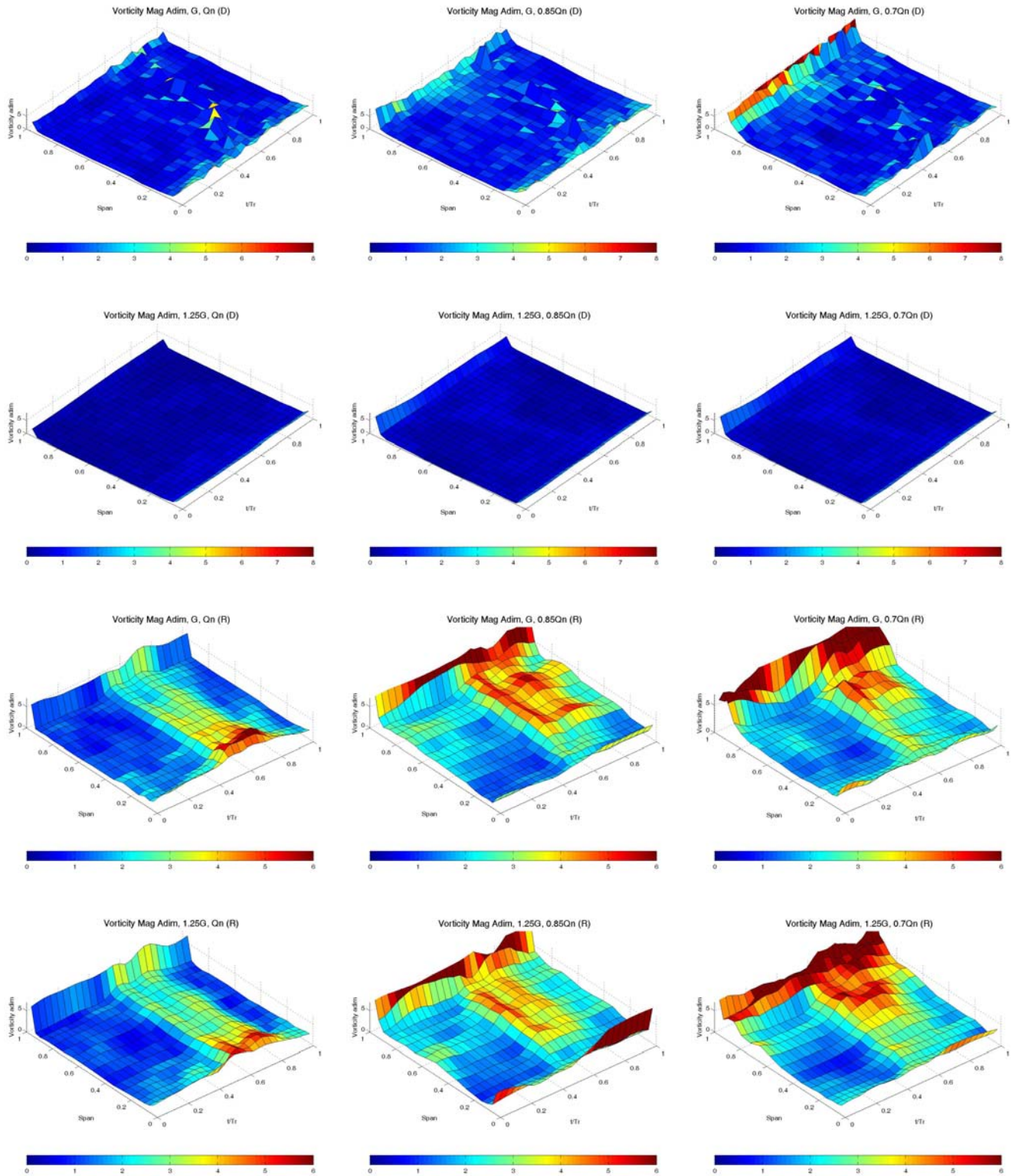


Figura III.21. Mapa radial de la magnitud de la vorticidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición radial 9.



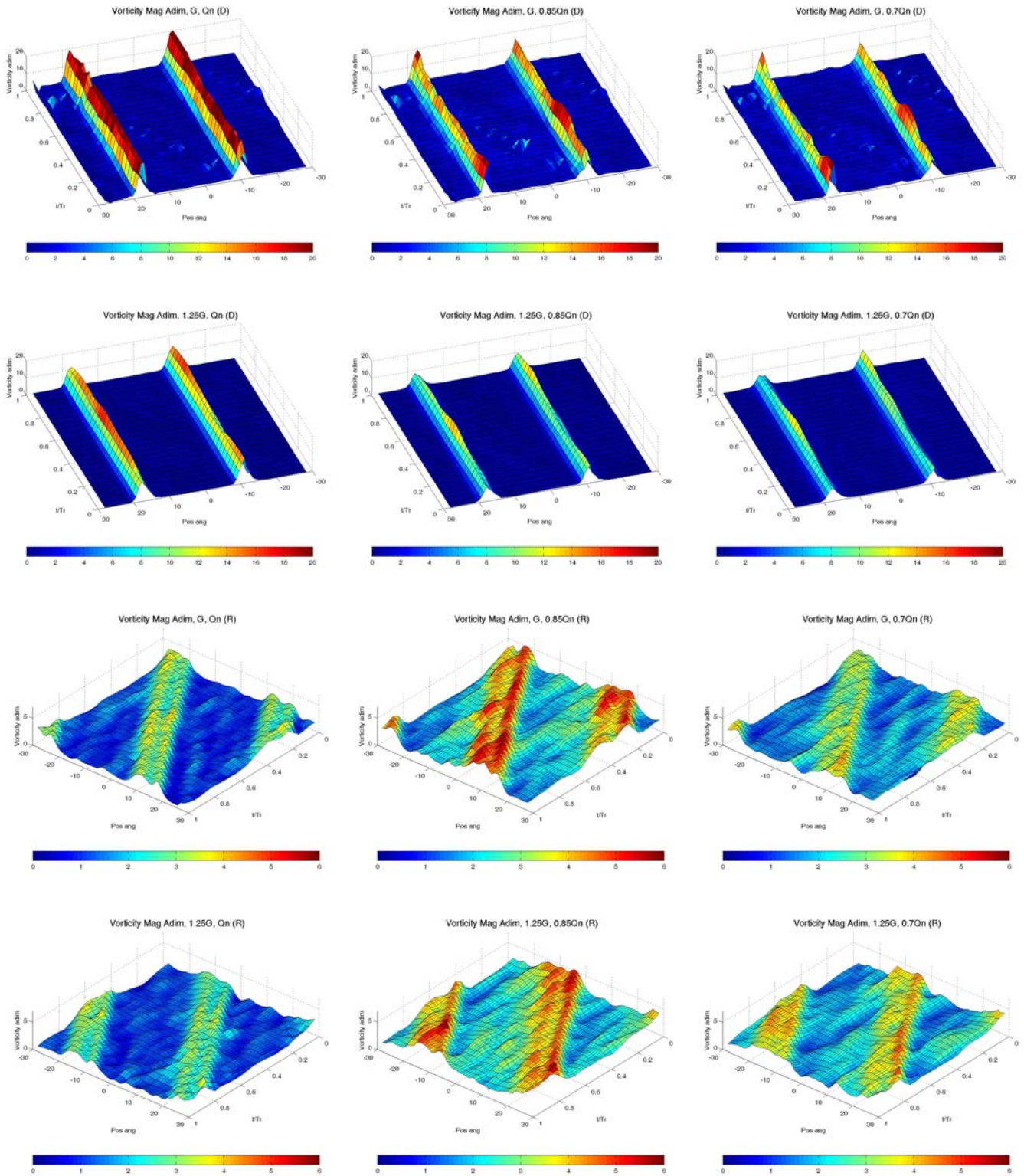
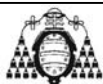


Figura III.22. Mapa angular de la magnitud de la vorticidad instantánea en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$): resultados numéricos, posición radial 9.



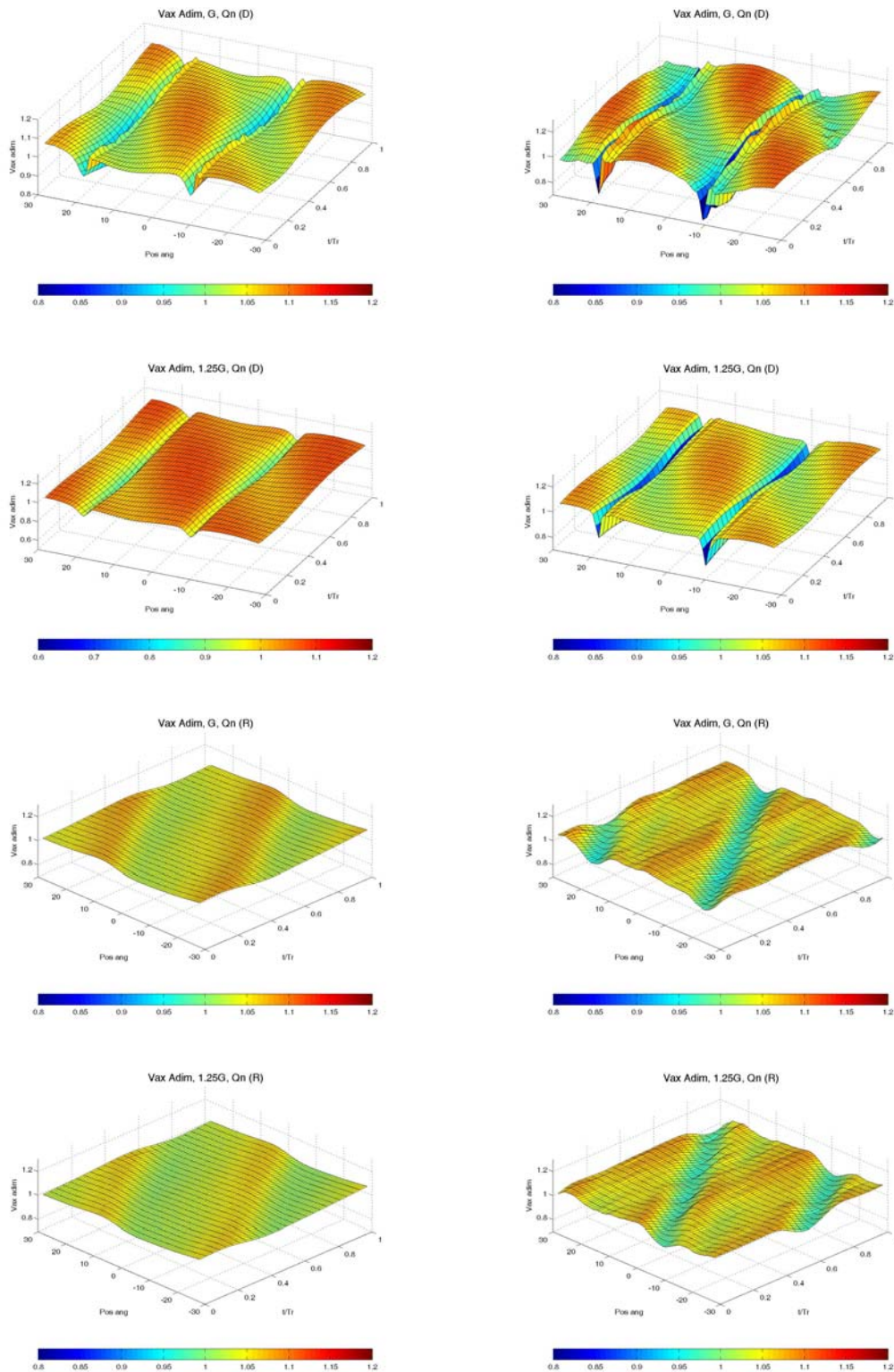


Figura III.23. Mapas angulares de la componente axial de la velocidad instantánea, entre haces (D) y tras el rotor (R), caudal nominal Q_n , dos gaps (G y 1.25G): resultados numéricos con modelos de turbulencia RSM y LES.



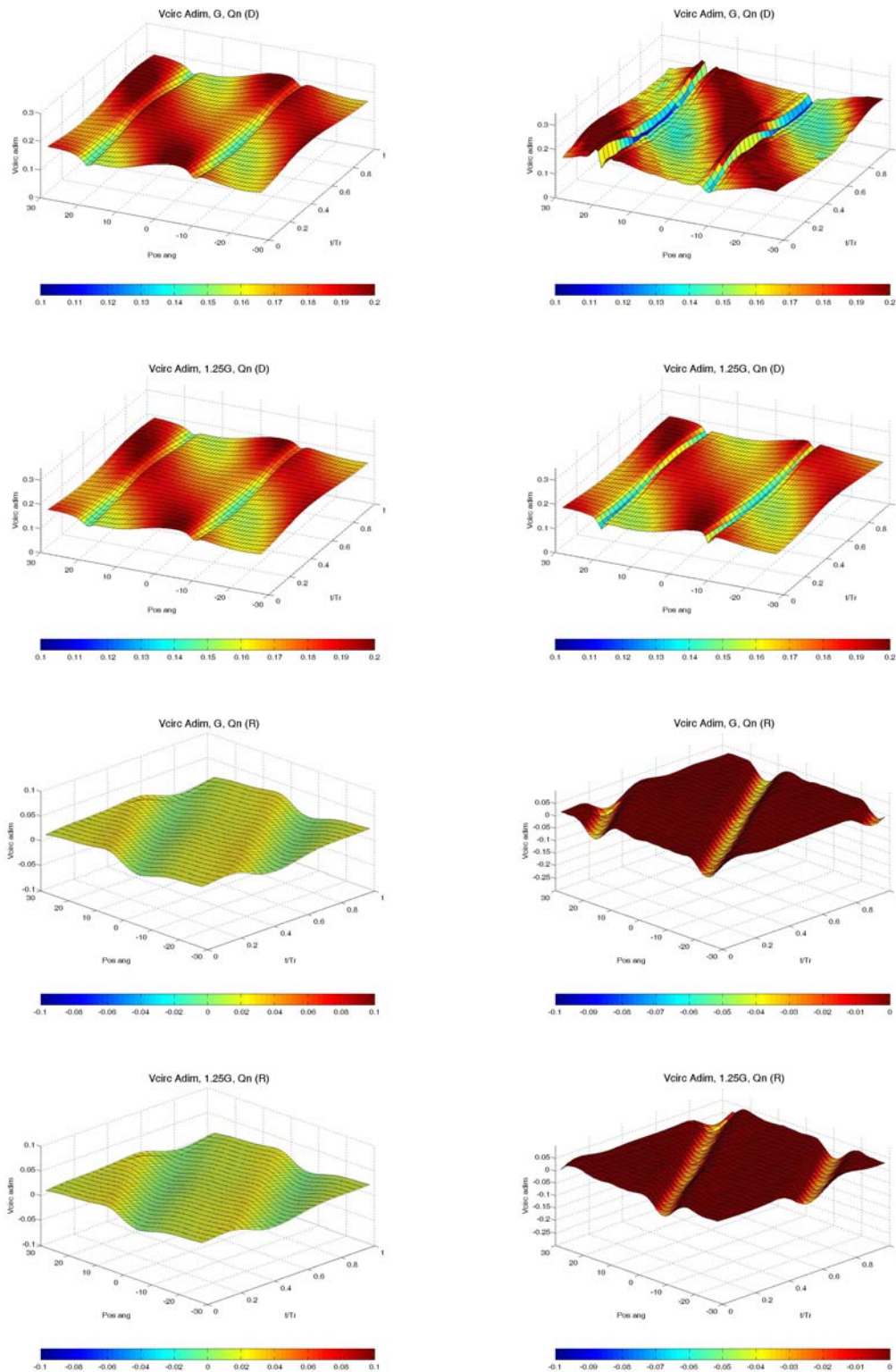


Figura III.24. Mapas angulares de la componente circunferencial de la velocidad instantánea, entre haces (D) y tras el rotor (R), caudal nominal Q_n , dos gaps (G y 1.25G): resultados numéricos con modelos de turbulencia RSM y LES.

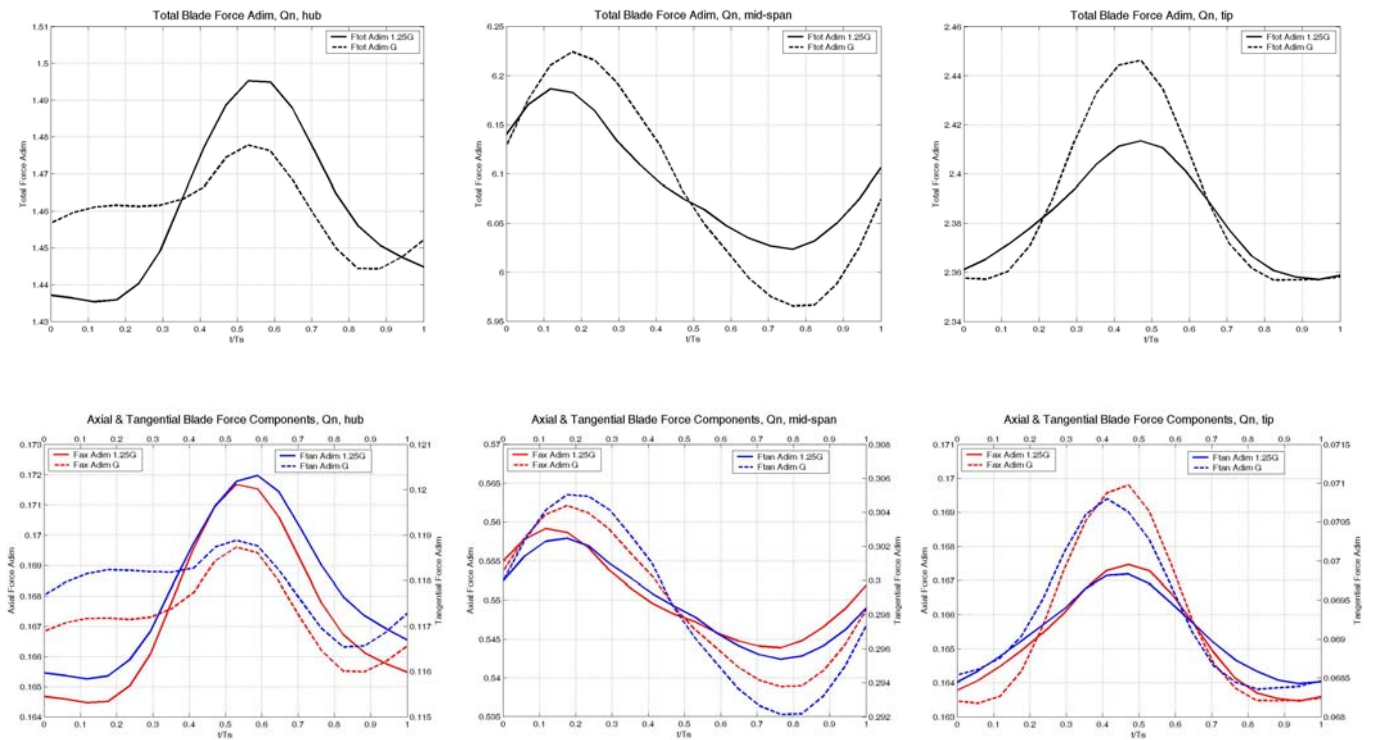


Figura III.25. Fuerza total, componentes axial y tangencial sobre el álabe, para tres secciones (base, media y punta), caudal nominal Q_n y dos gaps (G y $1.25G$).

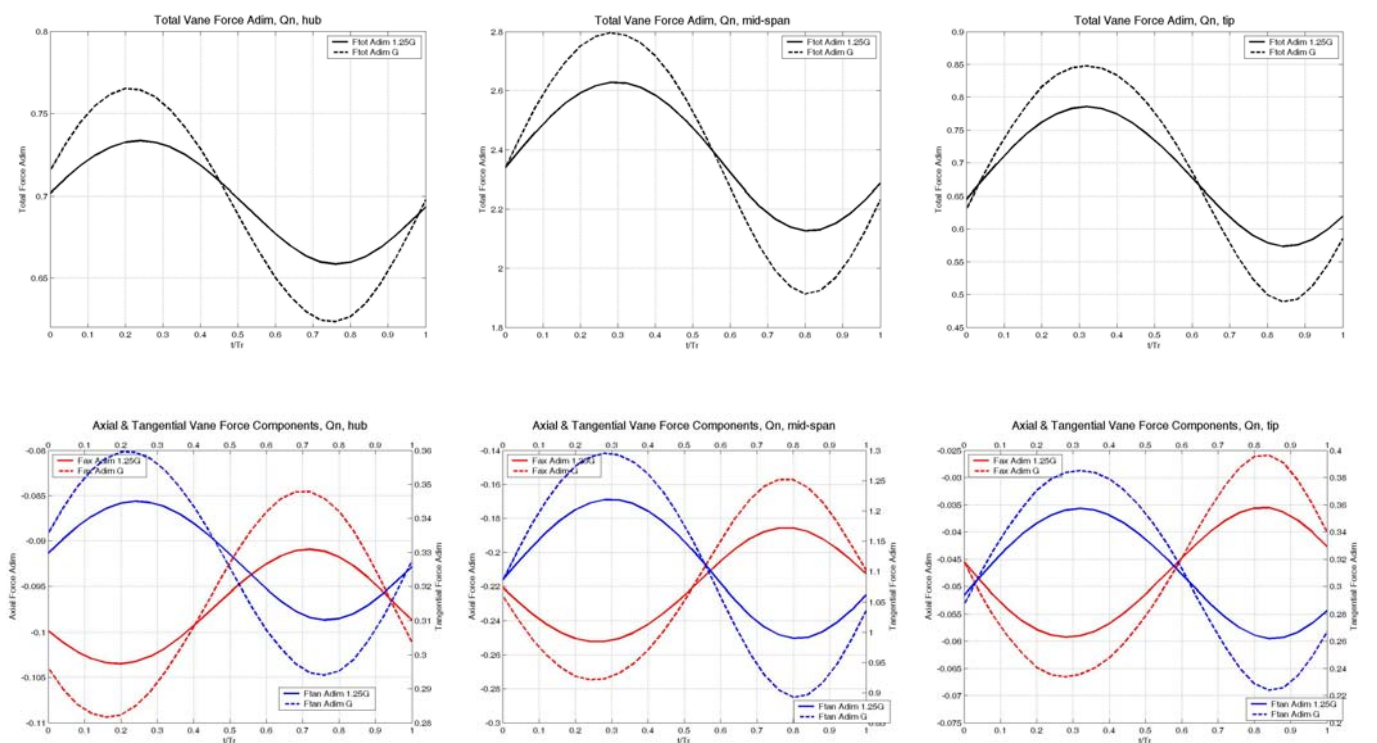


Figura III.26. Fuerza total, componentes axial y tangencial sobre la directriz, para tres secciones (base, media y punta), caudal nominal Q_n y dos gaps (G y $1.25G$).



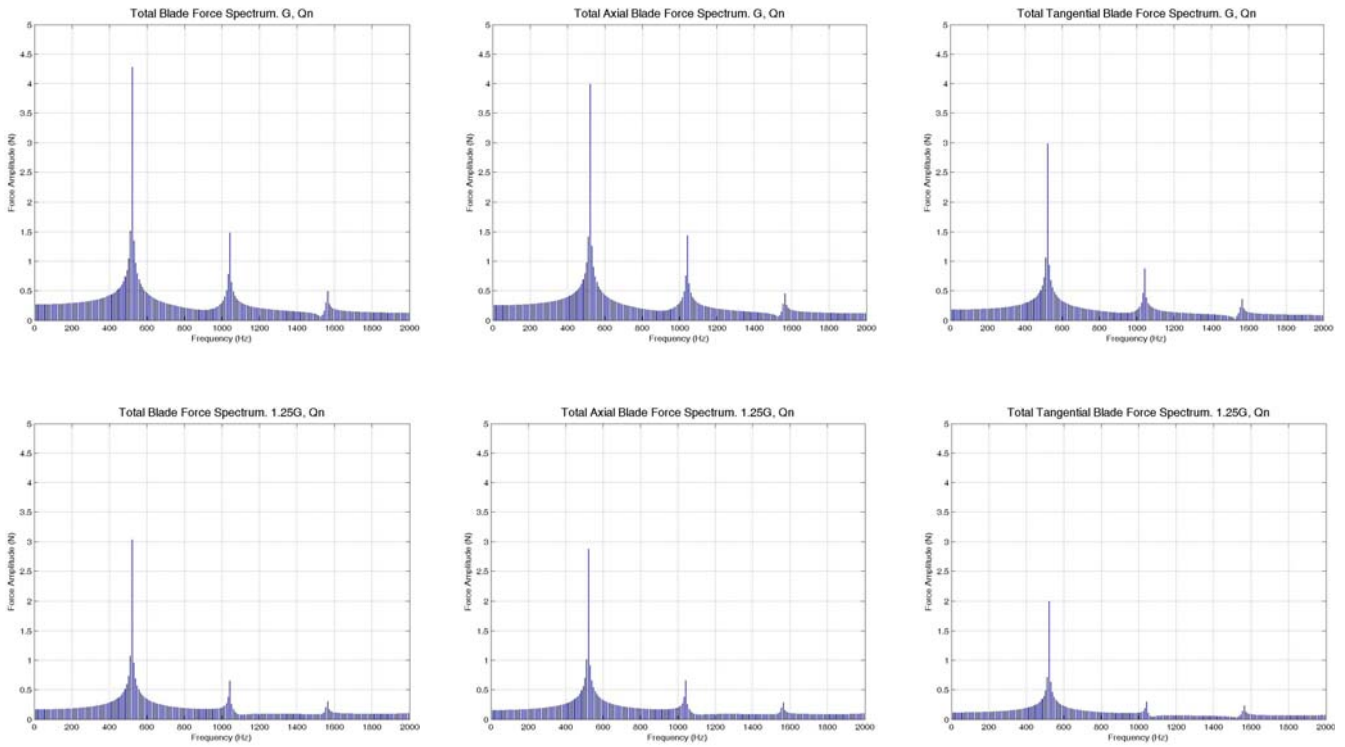


Figura III.27. Espectros de la fuerza y sus componentes axial y tangencial sobre el álabo, caudal nominal Q_n y dos gaps (G y $1.25G$).

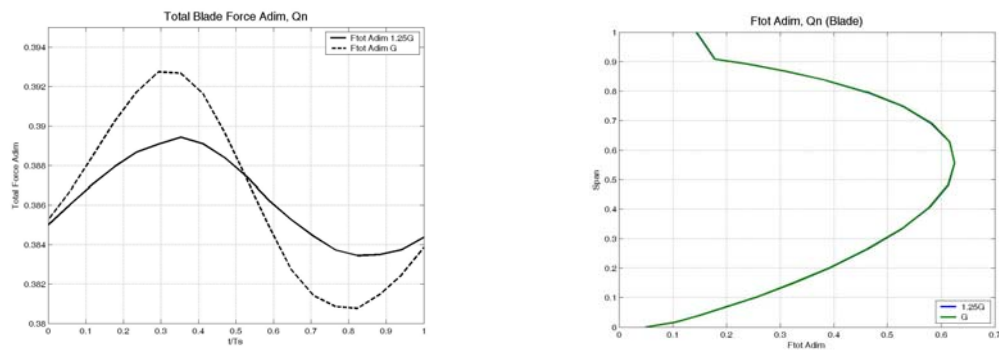
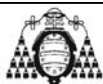


Figura III.28. Fuerza total sobre el álabo y distribución radial promedio de la misma, caudal nominal Q_n y dos gaps axiales (G y $1.25G$).



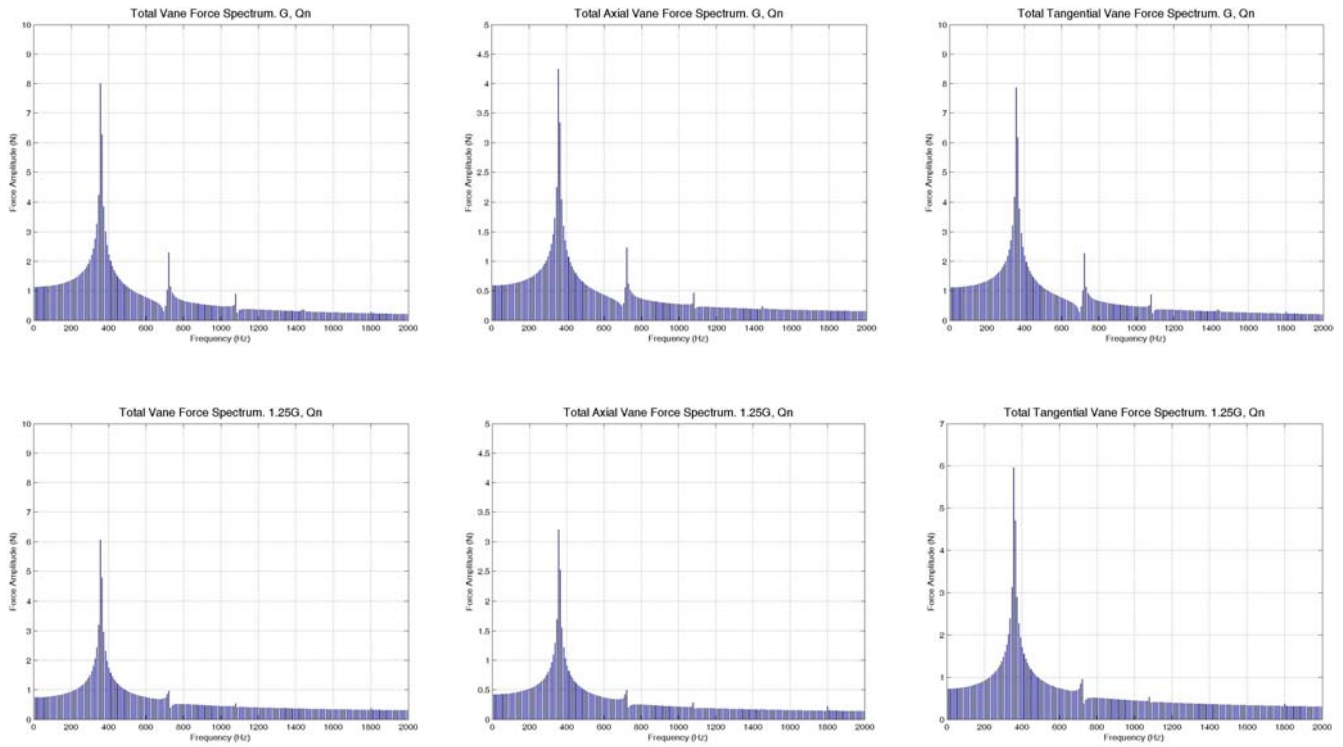


Figura III.29. Espectros de la fuerza total, axial y tangencial sobre la directriz, caudal nominal Q_n y dos gaps (G y $1.25G$).

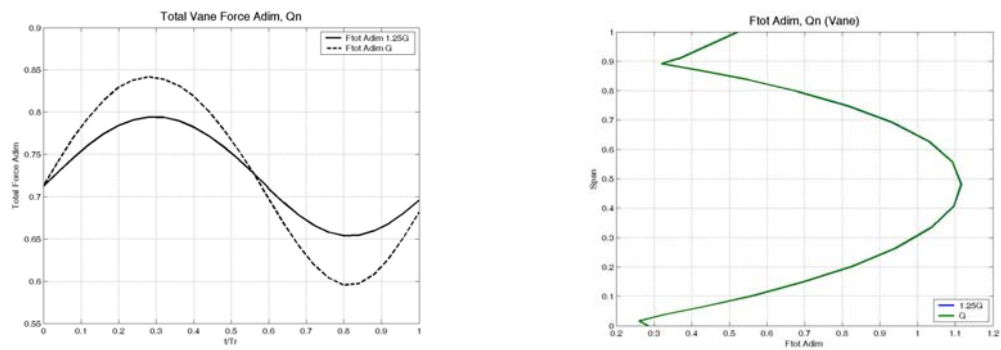
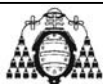


Figura III.30. Fuerza total sobre la directriz y distribución radial promedio de la misma, caudal nominal Q_n y dos gaps axiales (G y $1.25G$).



III.2.3. Resultados de la sonda de presión.

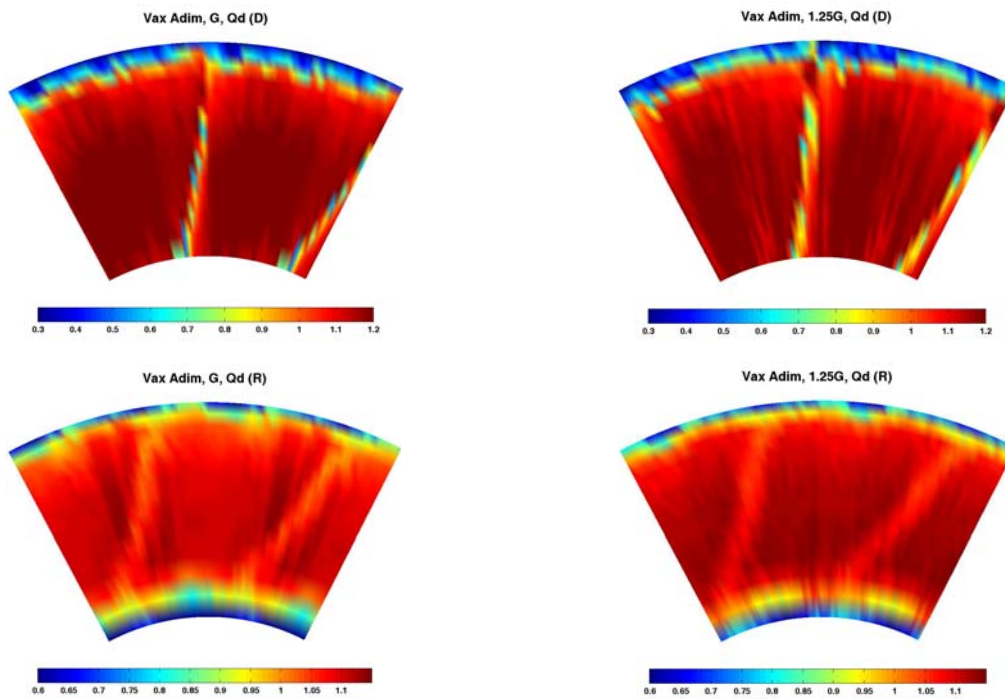


Figura III.31. Componente axial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y caudal nominal Q_d : resultados experimentales de la sonda de presión (FHP).

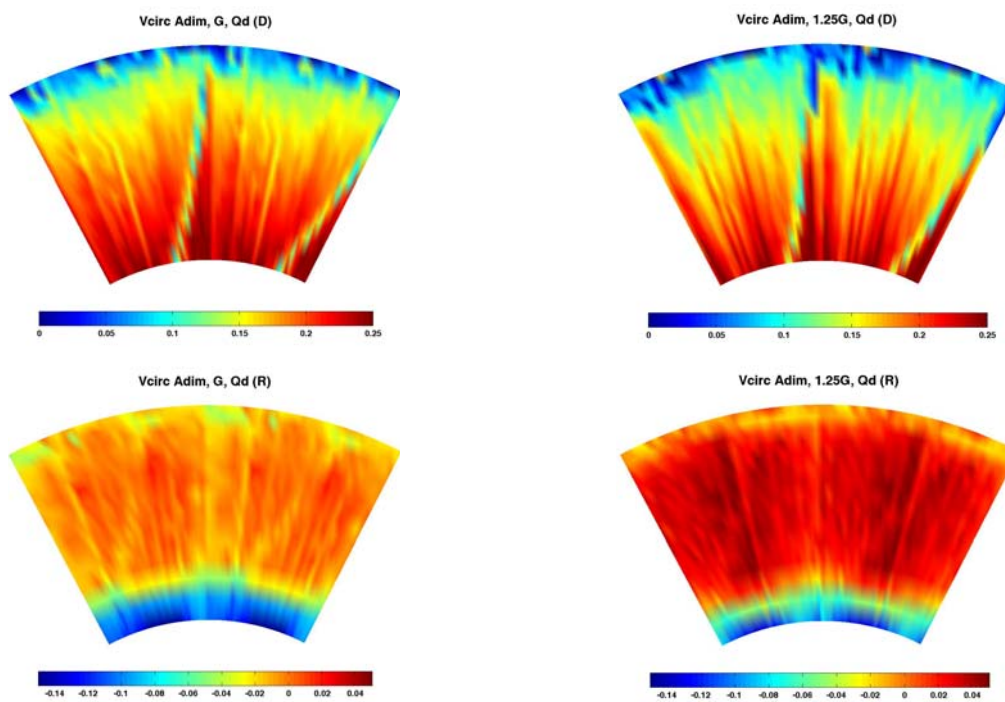


Figura III.32. Componente circunferencial de la velocidad media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y 1.25G) y caudal nominal Q_d : resultados experimentales de la sonda de presión (FHP).

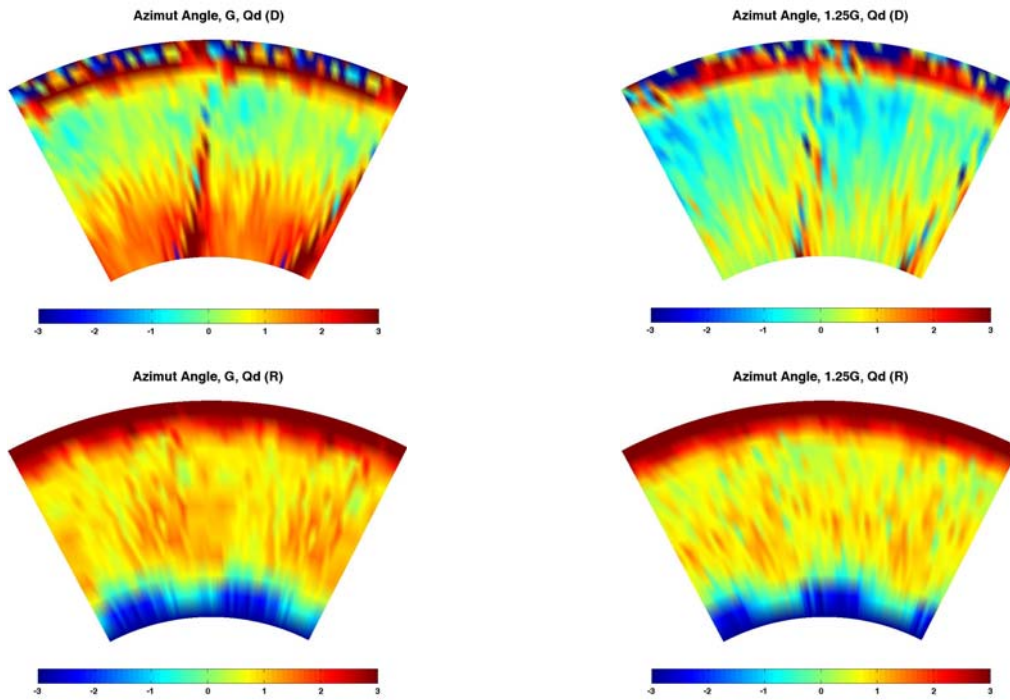


Figura III.33. Ángulo azimutal promedio en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps (G y $1.25G$) y caudal nominal Q_d : resultados experimentales de la sonda de presión (FHP).

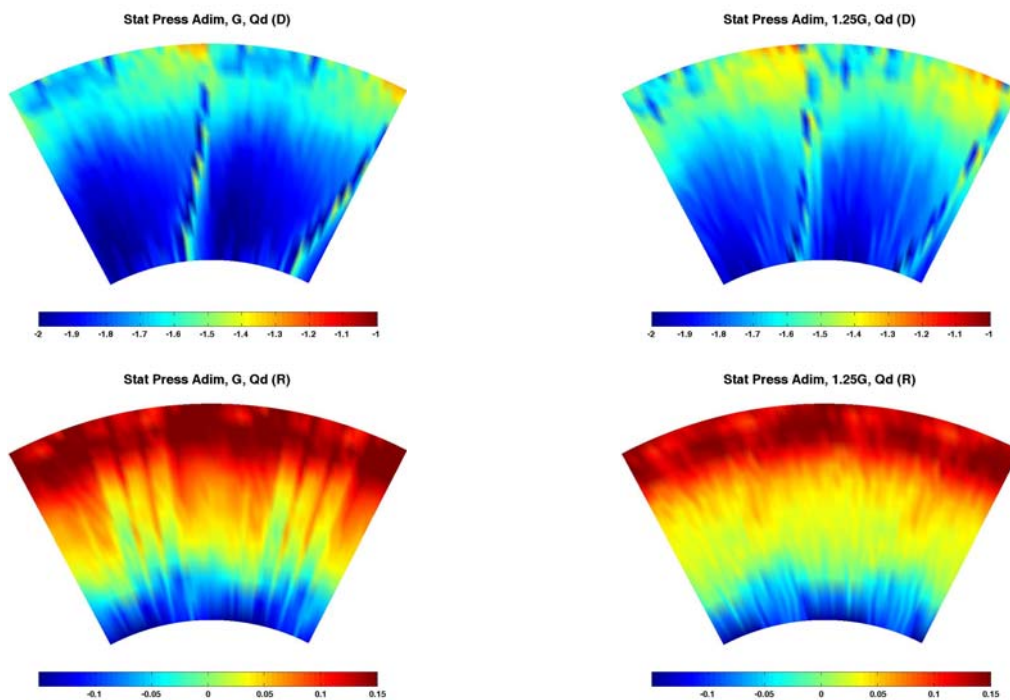


Figura III.34. Presión estática media en los planos entre haces (D) y tras el rotor (R), para dos gaps axiales (G y $1.25G$) y caudal nominal de funcionamiento Q_d : resultados experimentales de la sonda de presión (FHP).

III.2.4. Resultados de los transductores de presión.

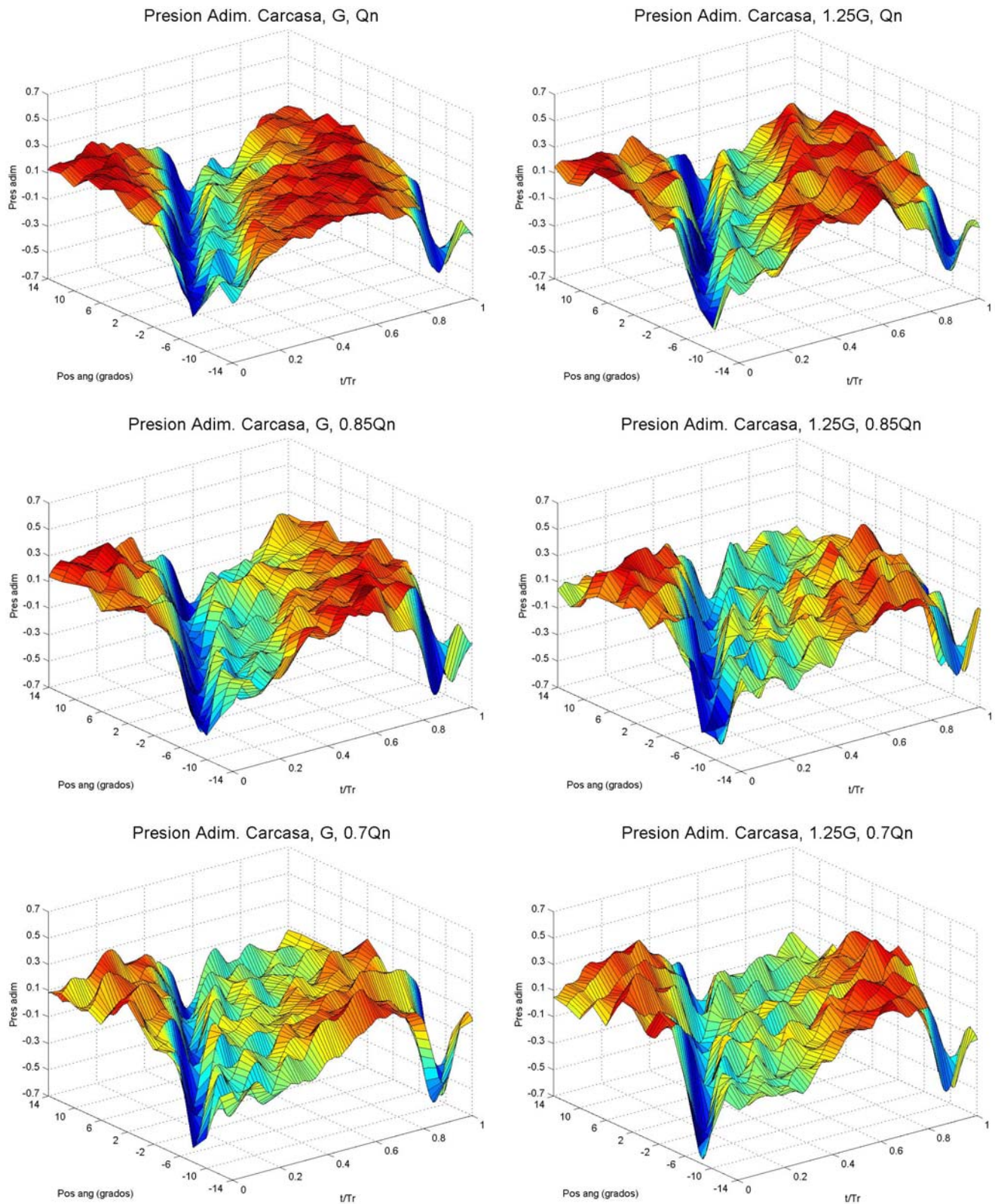


Figura III.35. Fluctuaciones de presión estática sobre la carcasa del rotor: dos gaps (G y 1.25G) y tres caudales (Qn, 0.85Qn y 0.7Qn).

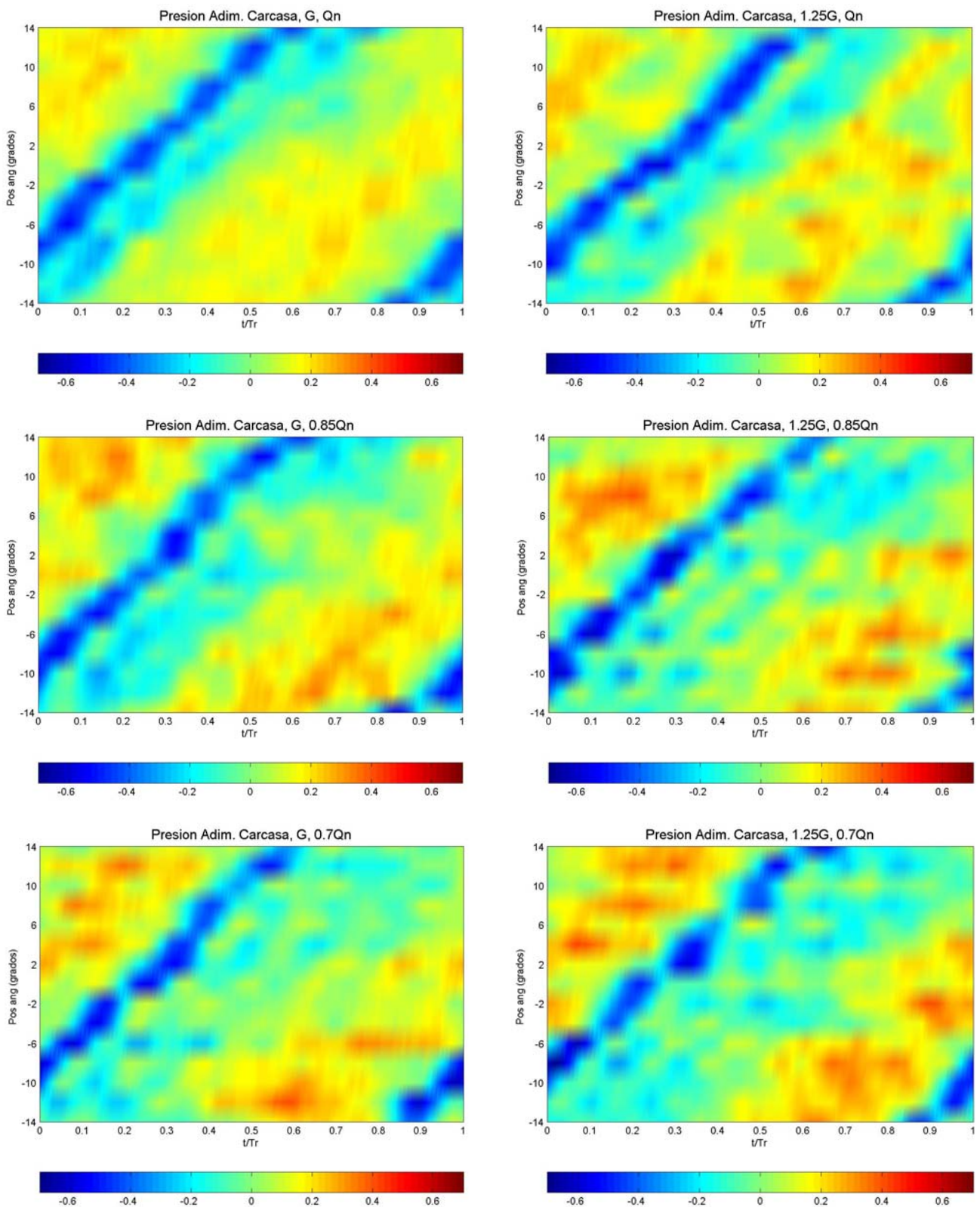


Figura III.36. Fluctuaciones de presión estática sobre la carcasa del rotor: dos gaps (G y $1.25G$) y tres caudales (Q_n , $0.85Q_n$ y $0.7Q_n$).

III.3. CARACTERIZACIÓN AEROACÚSTICA.

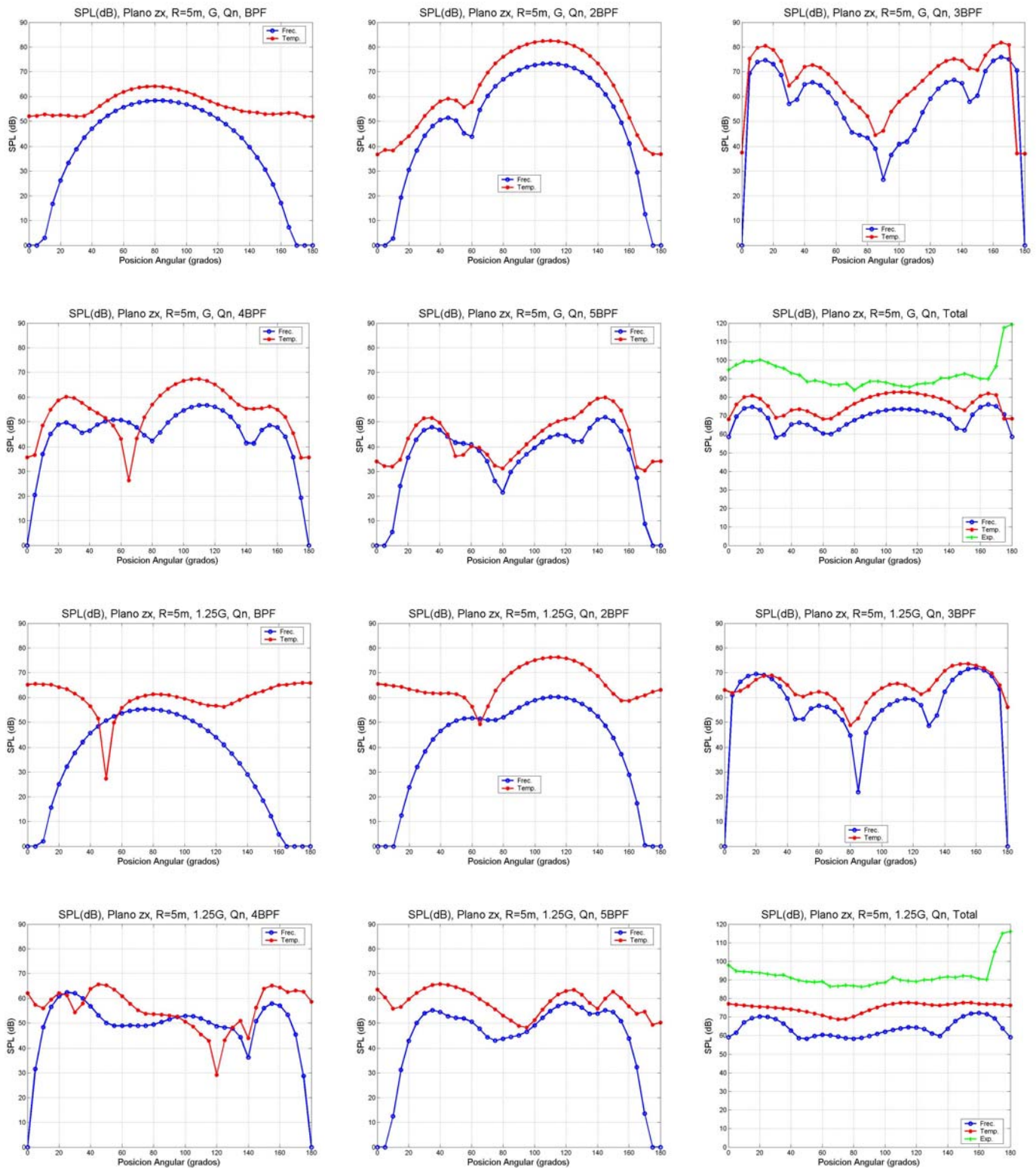
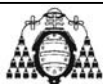


Figura III.37. Resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R5, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



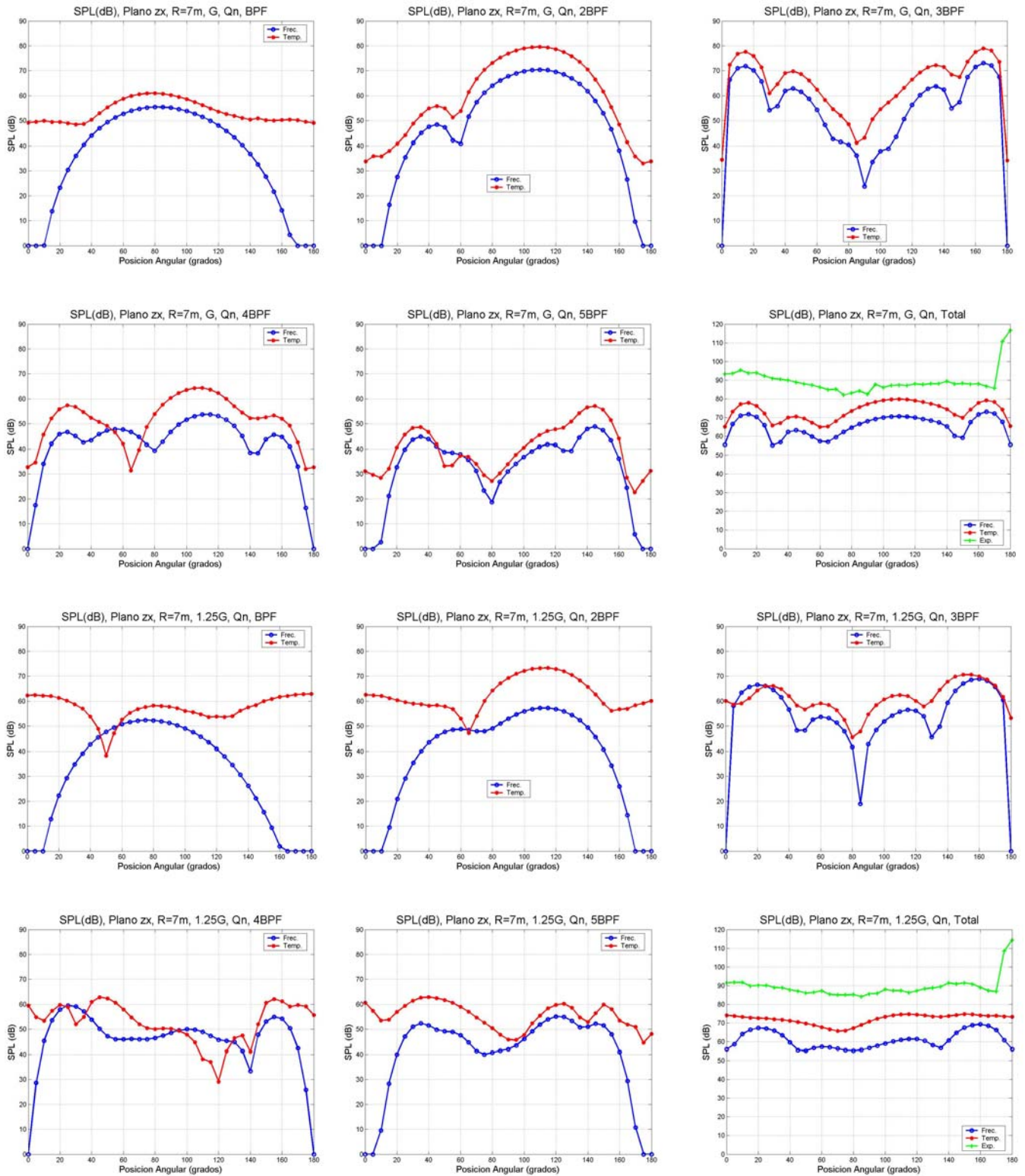


Figura III.38. Resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R7, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Qn: frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



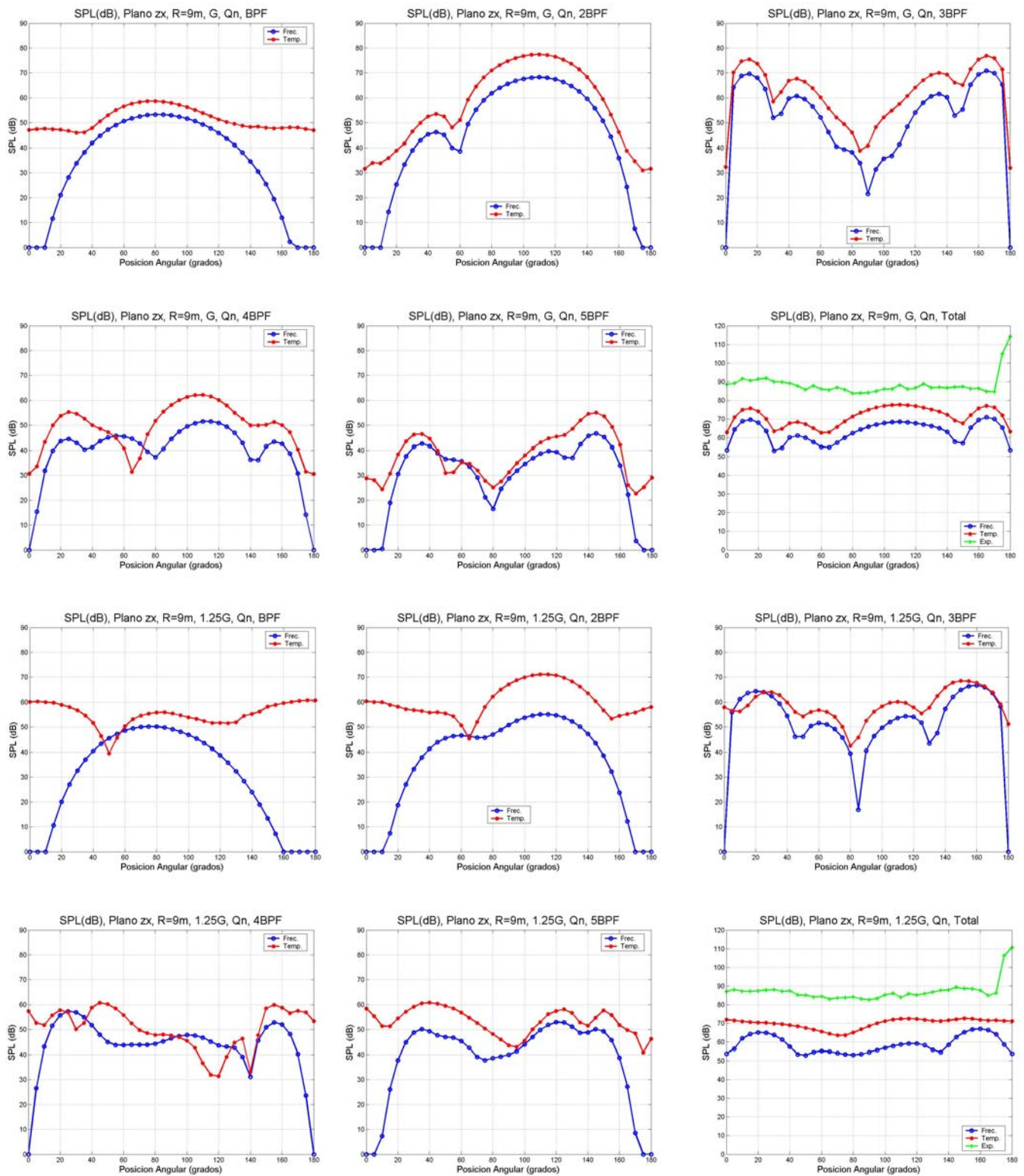
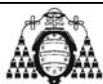


Figura III.39. Resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R9, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Qn: frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



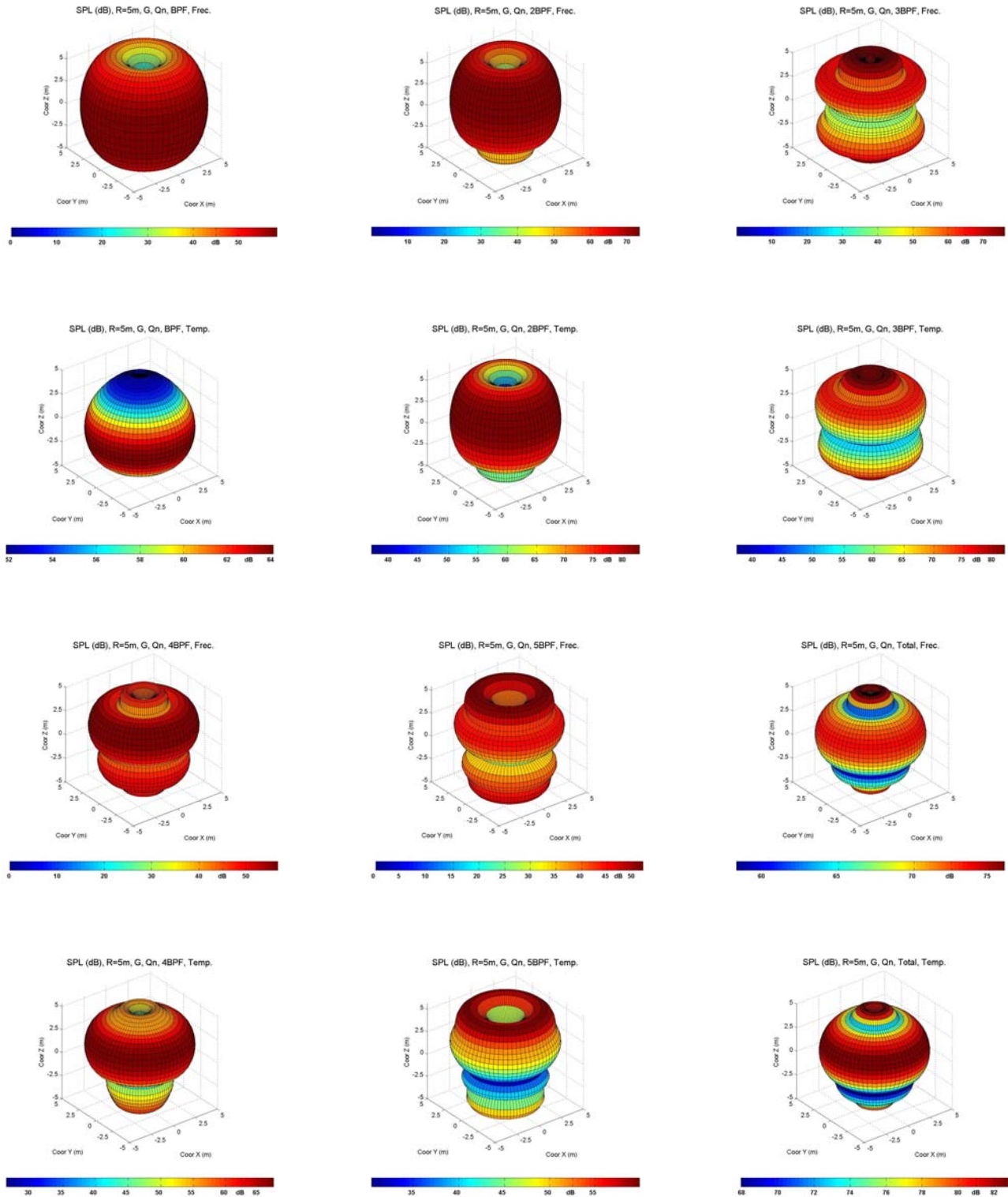


Figura III.40. Resultados numéricos del ruido en el plano R5, dominio de la frecuencia y temporal para el gap inferior (G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



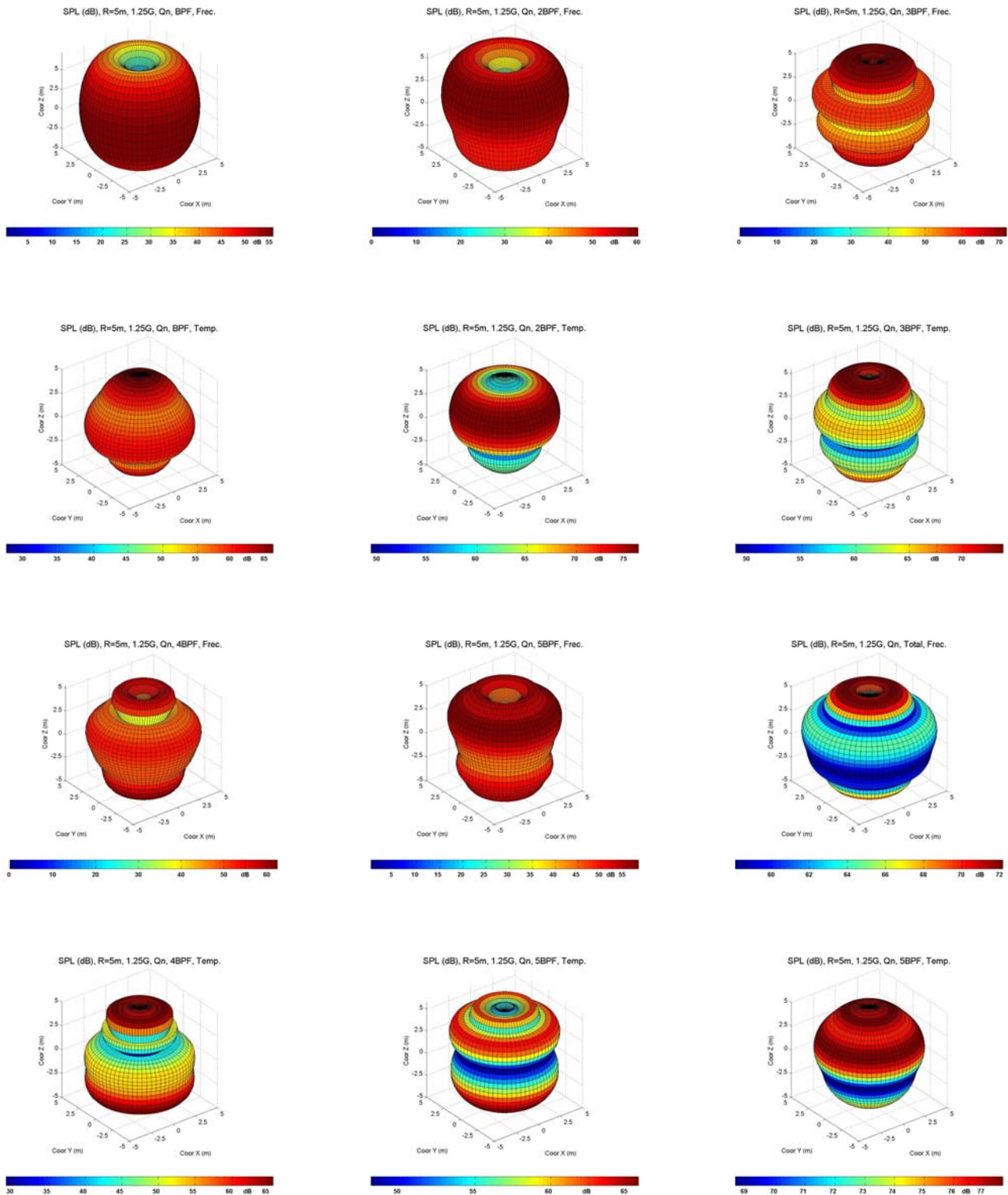


Figura III.41. Resultados numéricos del ruido en el plano R5, dominio de la frecuencia y temporal para el gap superior (1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



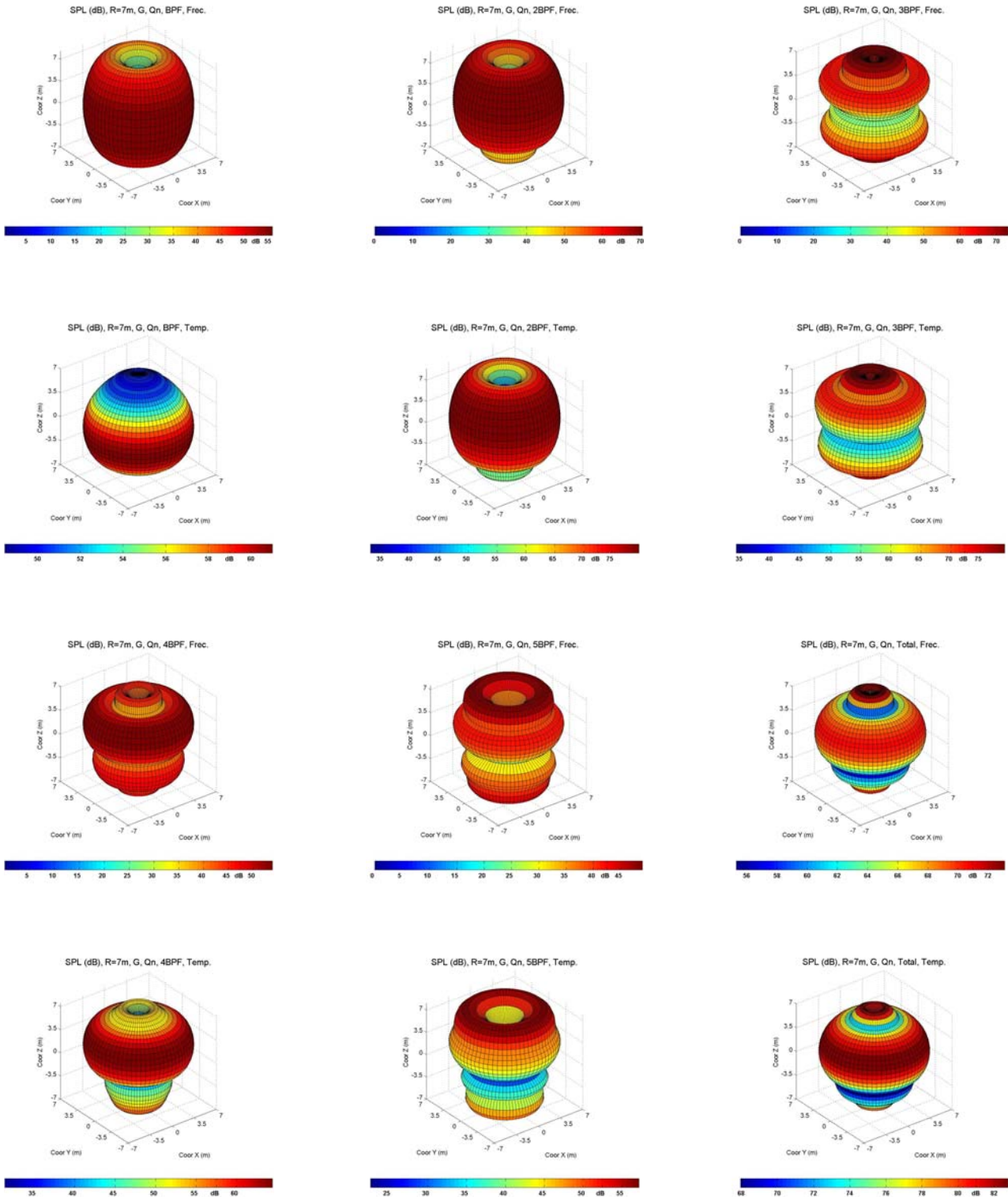


Figura III.42. Resultados numéricos del ruido en el plano R7, dominio de la frecuencia y temporal para el gap inferior (G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



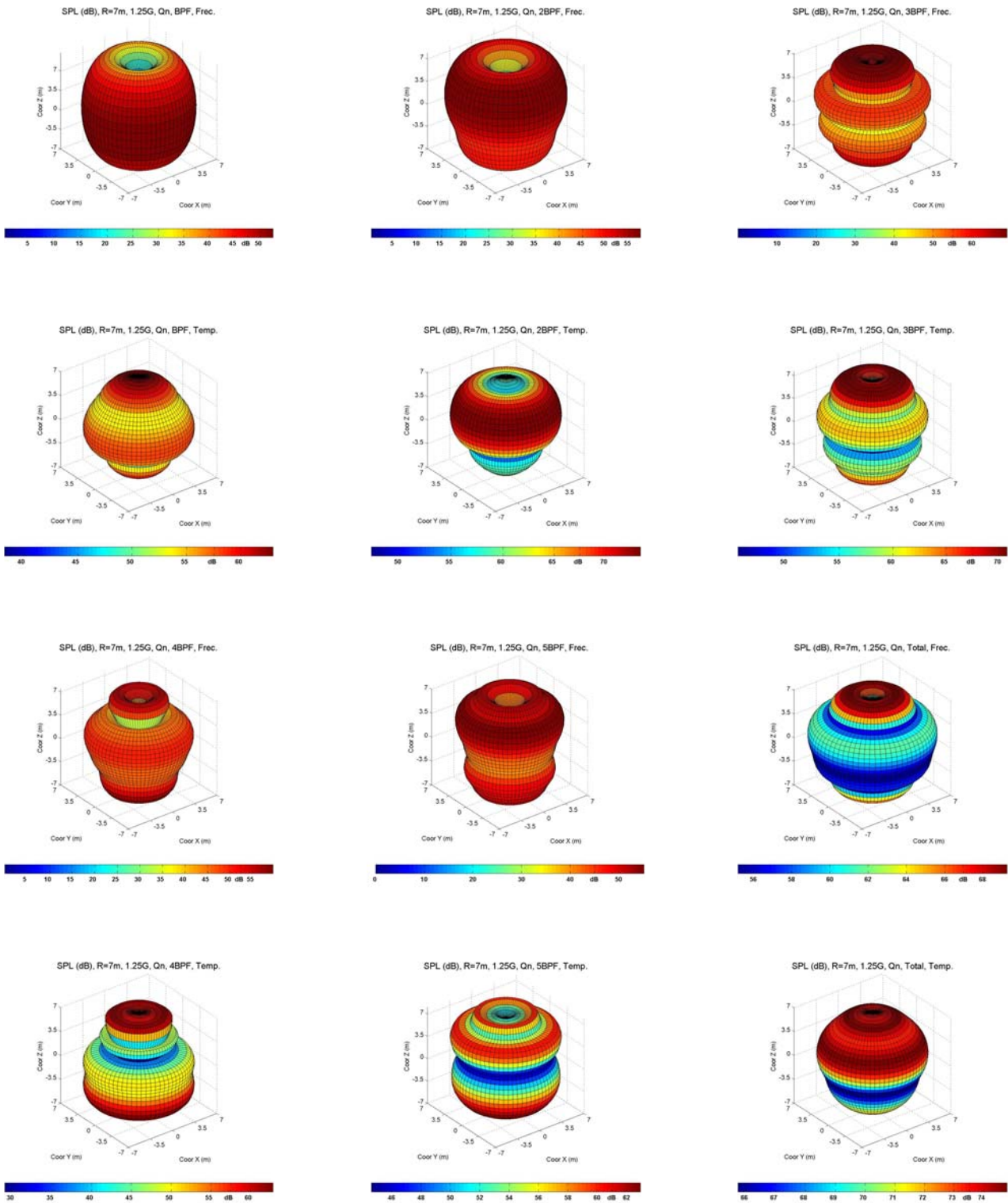
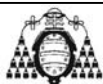


Figura III.43. Resultados numéricos del ruido en el plano R7, dominio de la frecuencia y temporal para el gap superior (1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



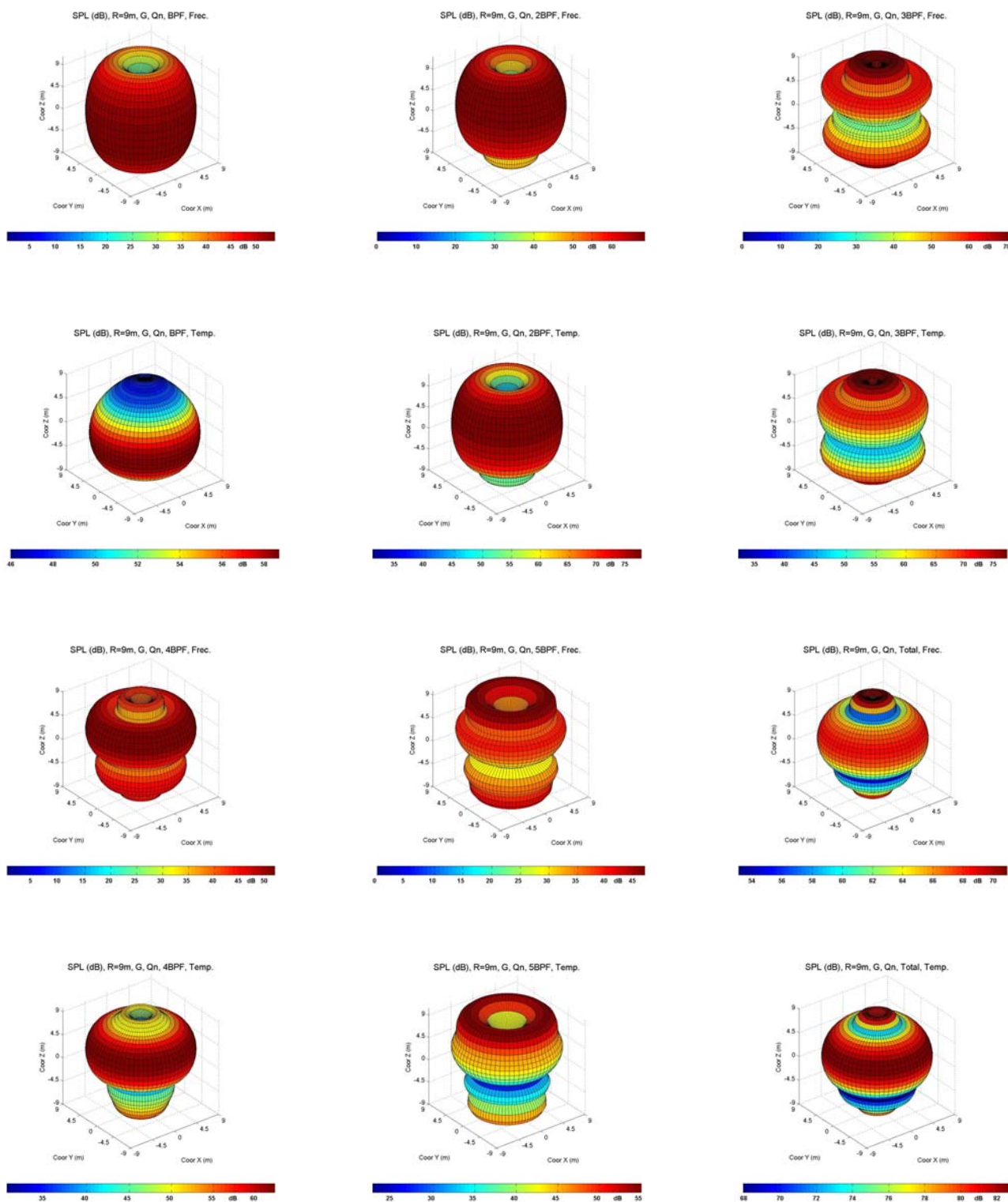


Figura III.44. Resultados numéricos del ruido en el plano R9, dominio de la frecuencia y temporal para el gap inferior (G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



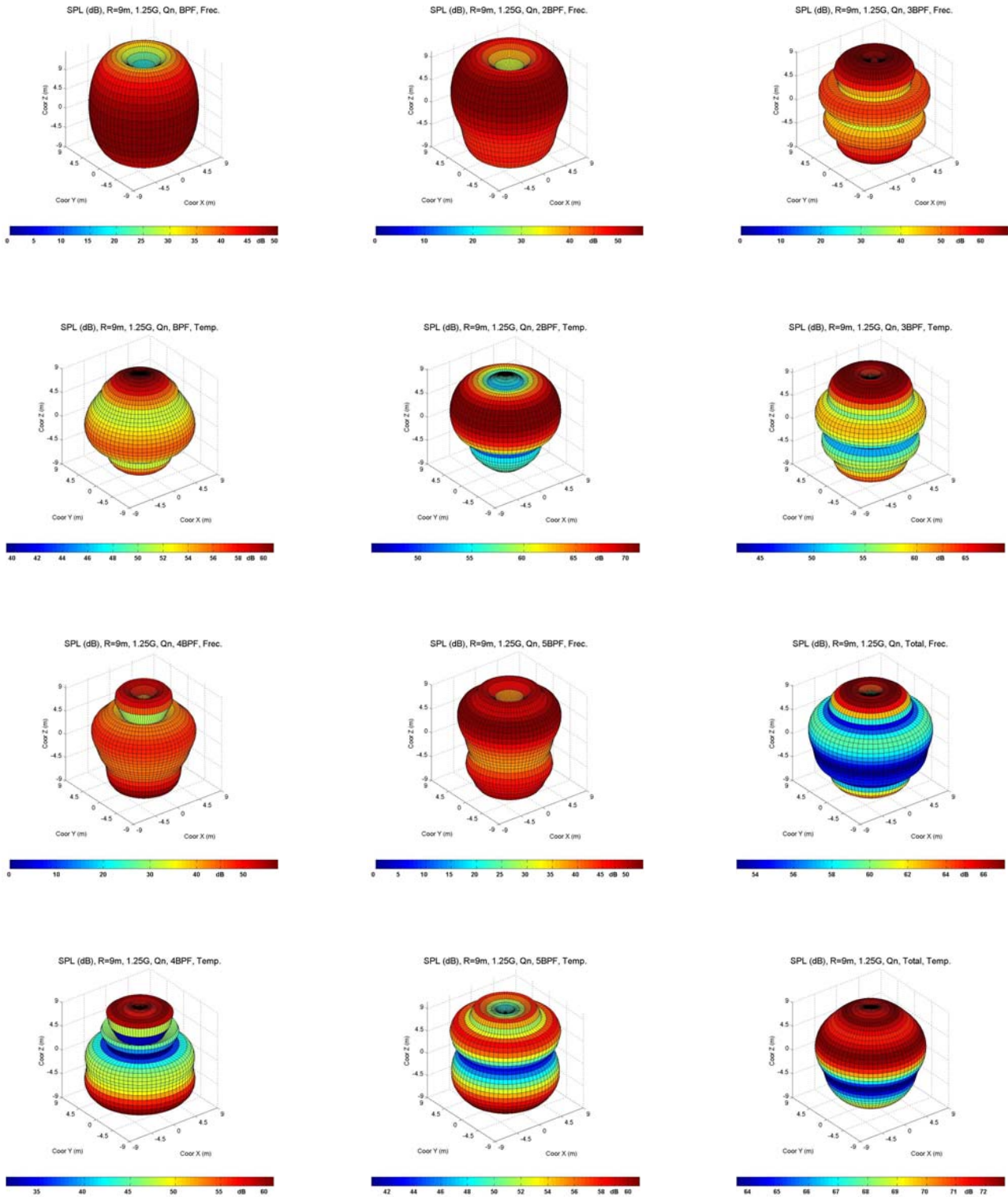
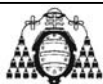


Figura III.45. Resultados numéricos del ruido en el plano R9, dominio de la frecuencia y temporal para el gap superior (1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



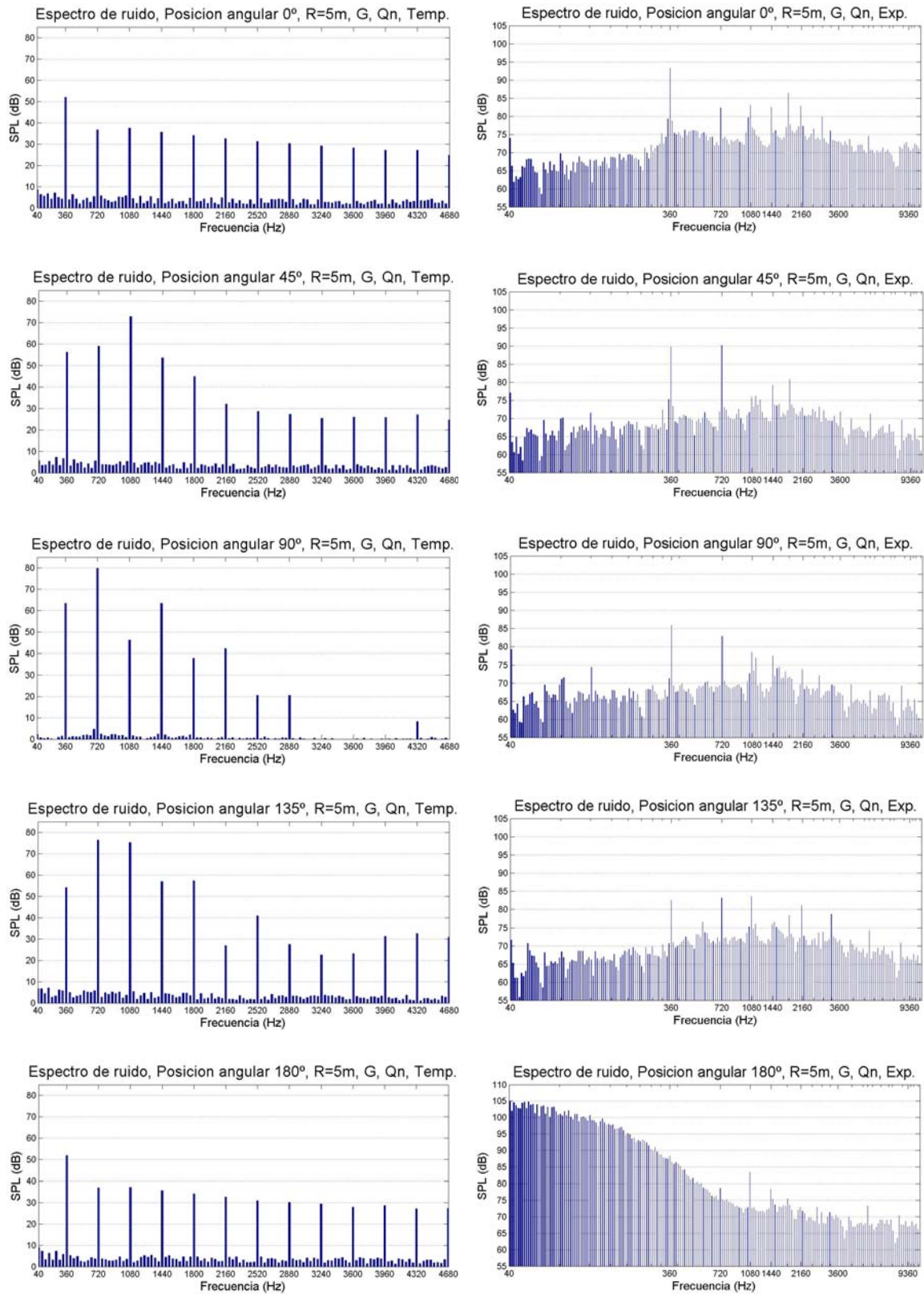


Figura III.46. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R5, gap inferior (G) y caudal nominal (Qn): resultados en el dominio temporal y experimentales.



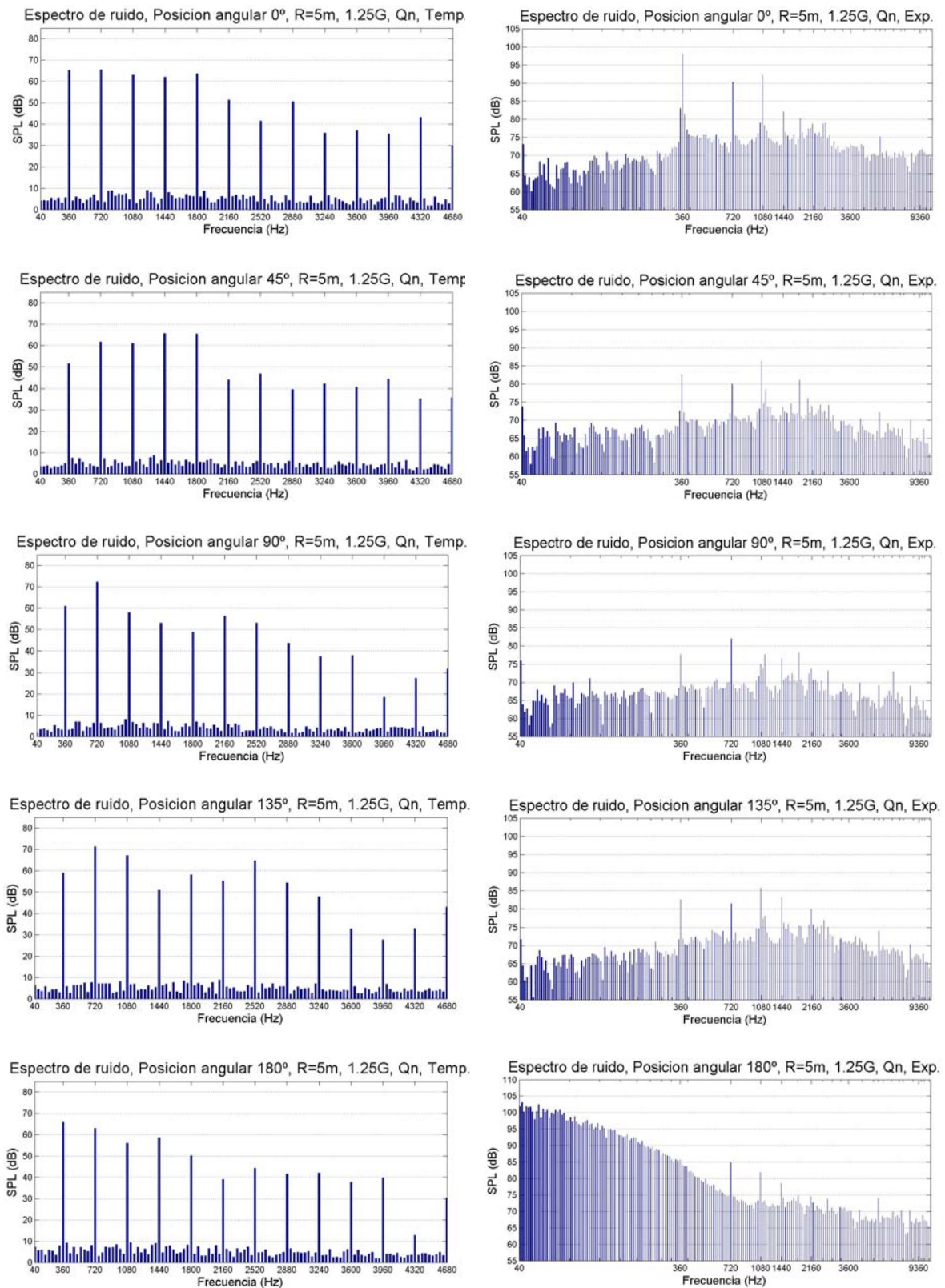
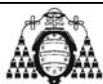


Figura III.47. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R5, gap superior (1.25G) y caudal nominal (Qn): resultados en el dominio temporal y experimentales.



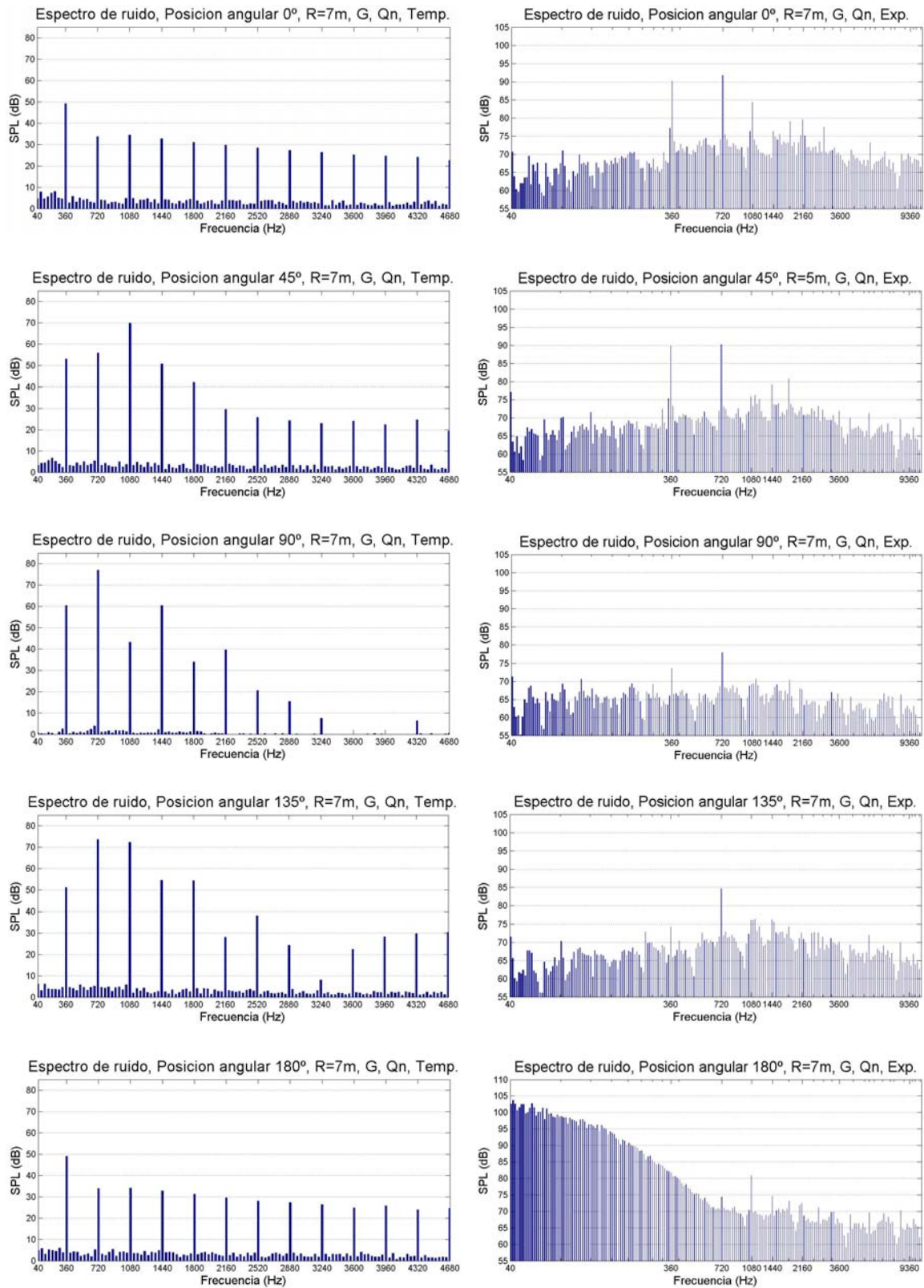


Figura III.48. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R7, gap inferior (G) y caudal nominal (Qn): resultados en el dominio temporal y experimentales.



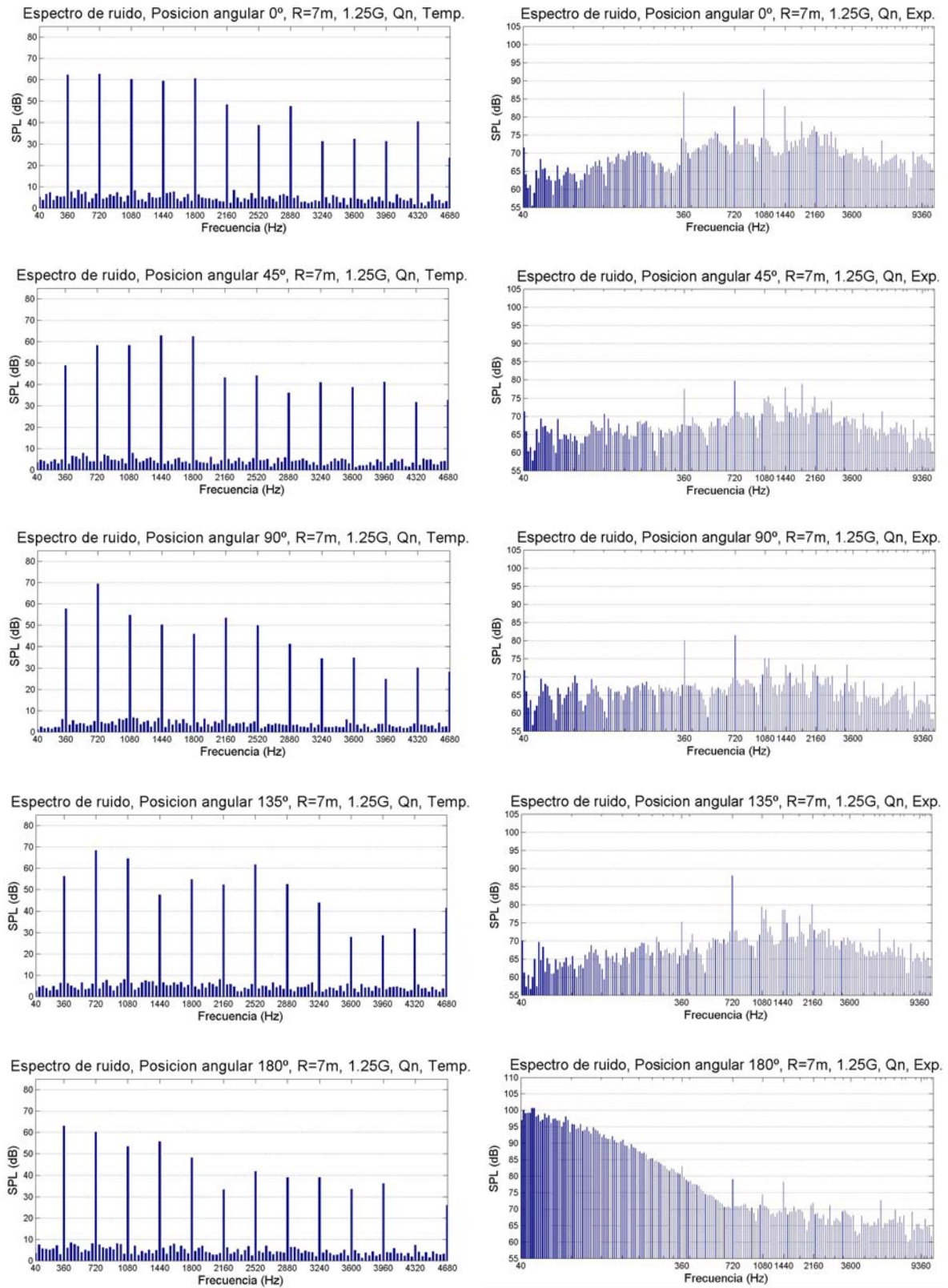


Figura III.49. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R7, gap superior (1.25G) y caudal nominal (Q_n): resultados en el dominio temporal y experimentales.



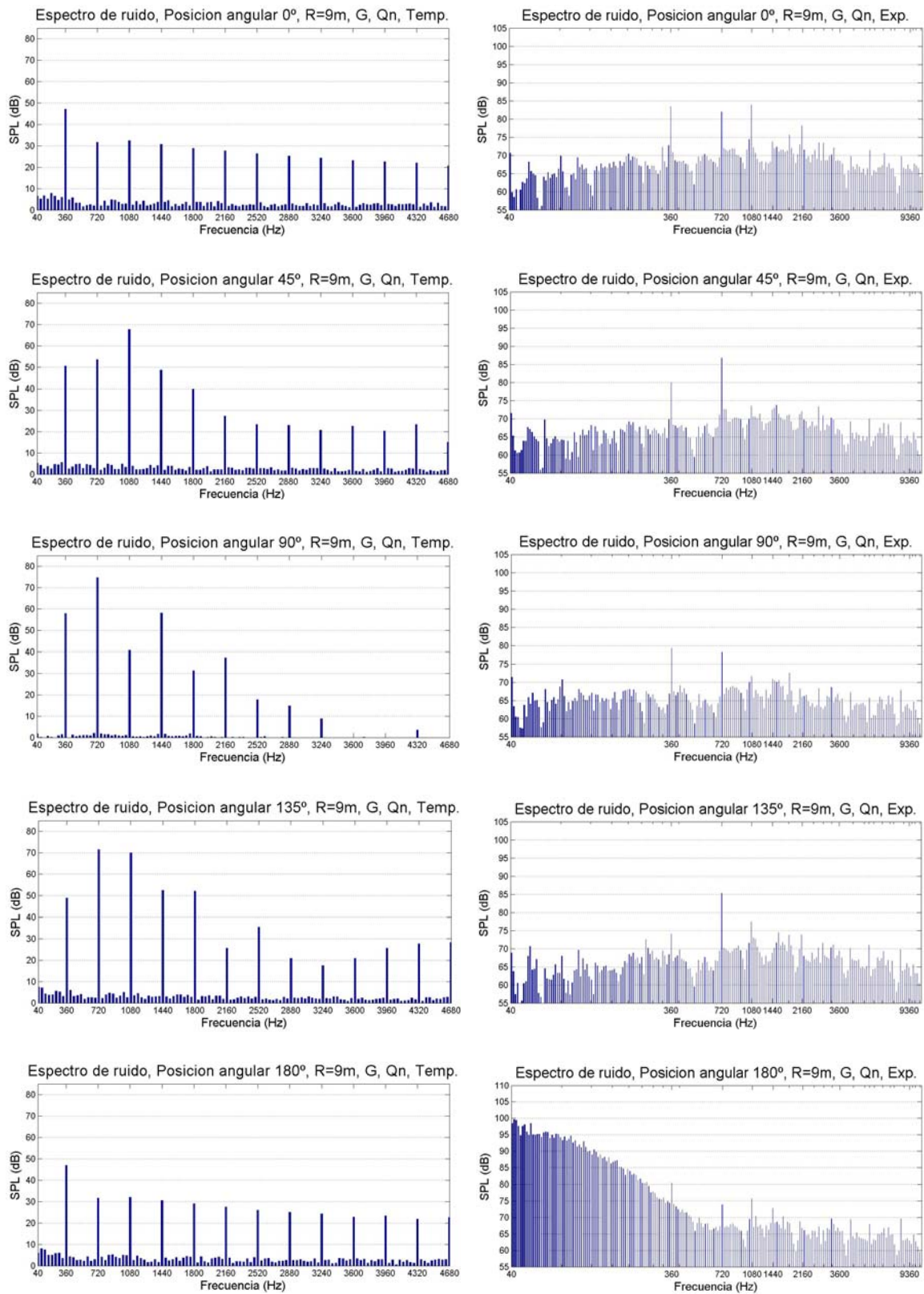


Figura III.50. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R9, gap inferior (G) y caudal nominal (Qn): resultados en el dominio temporal y experimentales.



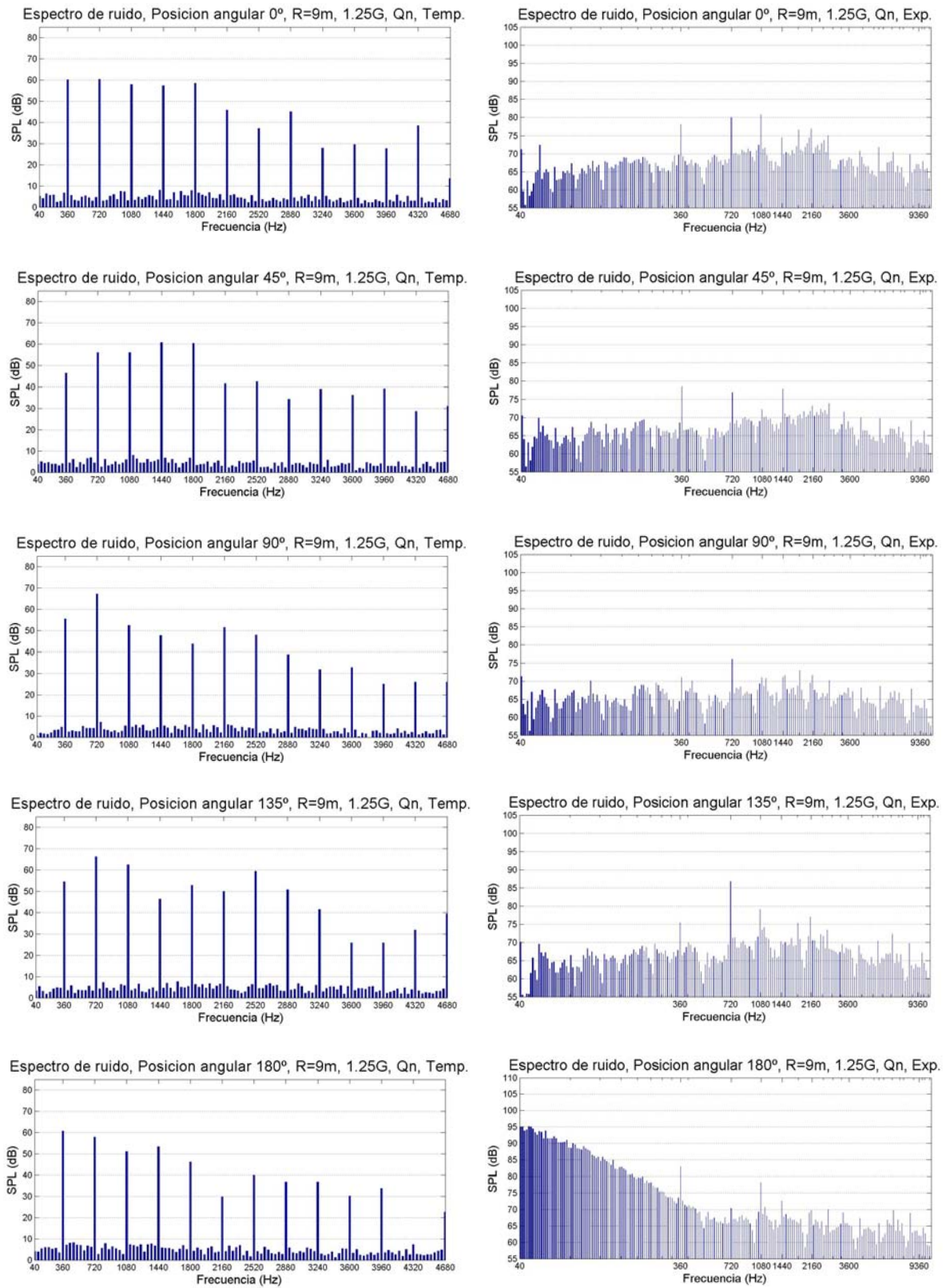
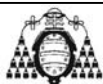


Figura III.51. Espectros de ruido para varias posiciones angulares en el plano R9, gap superior (1.25G) y caudal nominal (Q_n): resultados en el dominio temporal y experimentales.



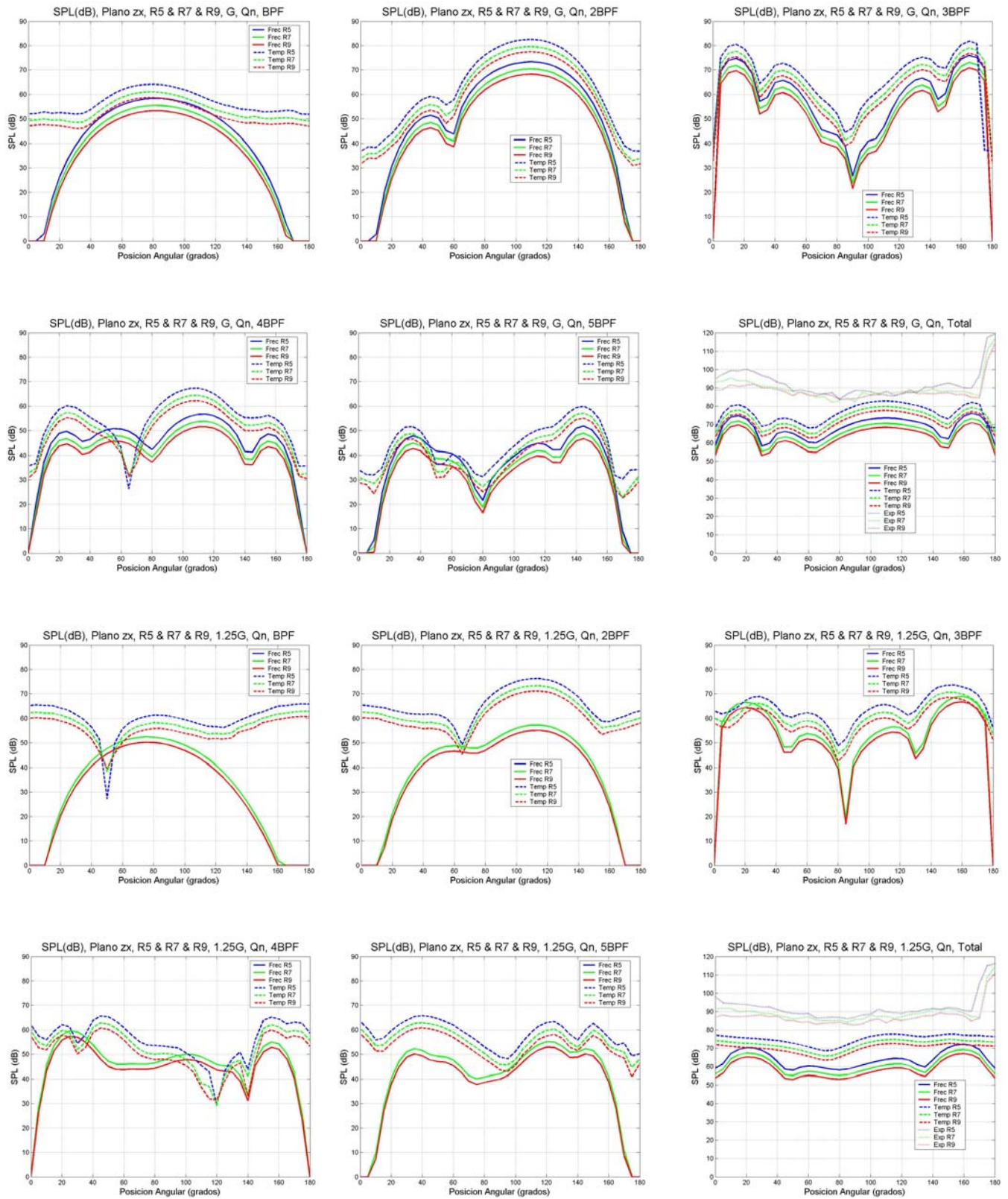


Figura III.52. Comparación de resultados numéricos y experimentales en los planos R5, R7 y R9, para dos gaps axiales (G y $1.25G$) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



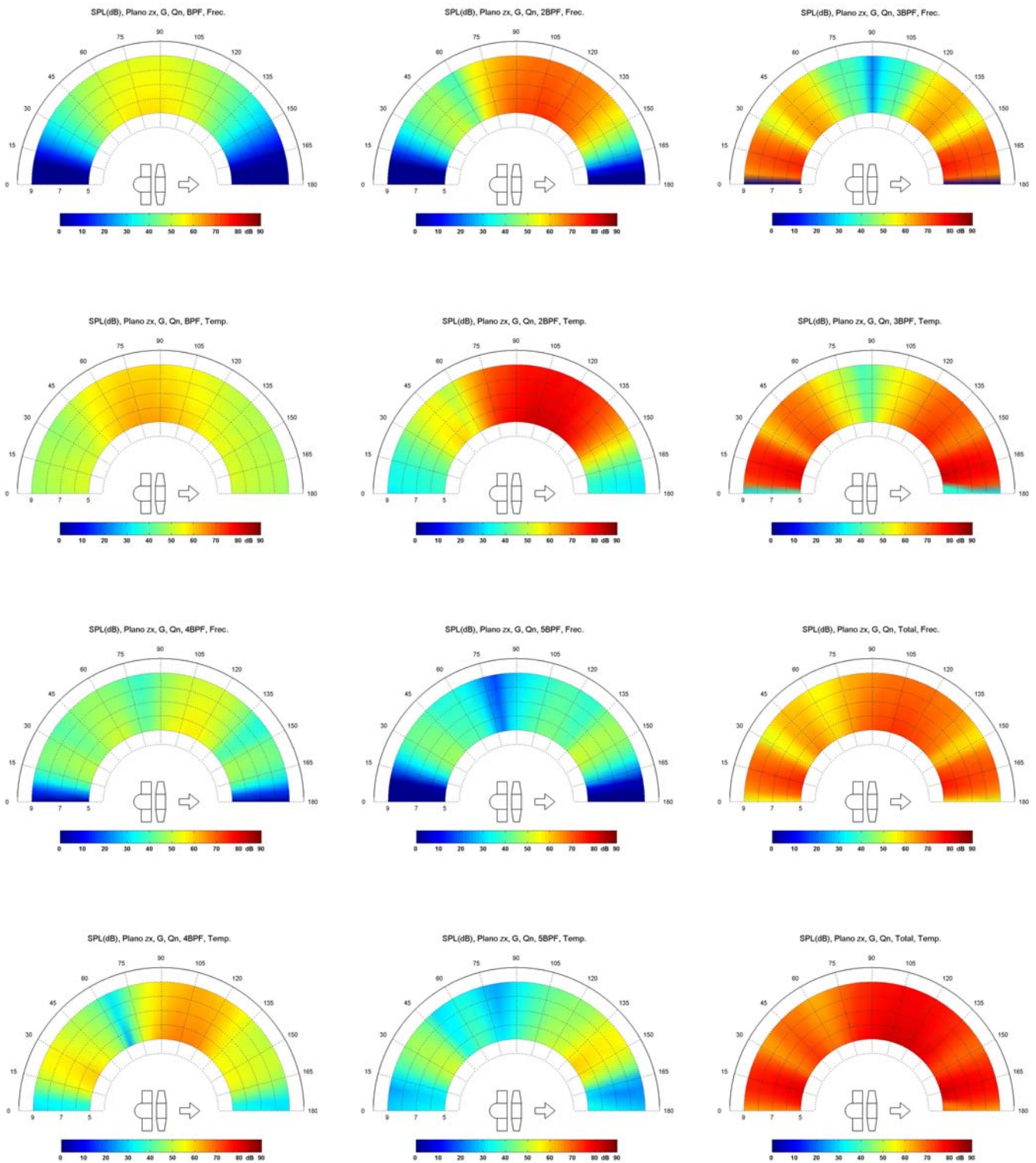


Figura III.53. Distribución circunferencial y radial del SPL entre los planos R5, R7 y R9, resultados en el dominio de la frecuencia y temporal para el gap inferior (G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

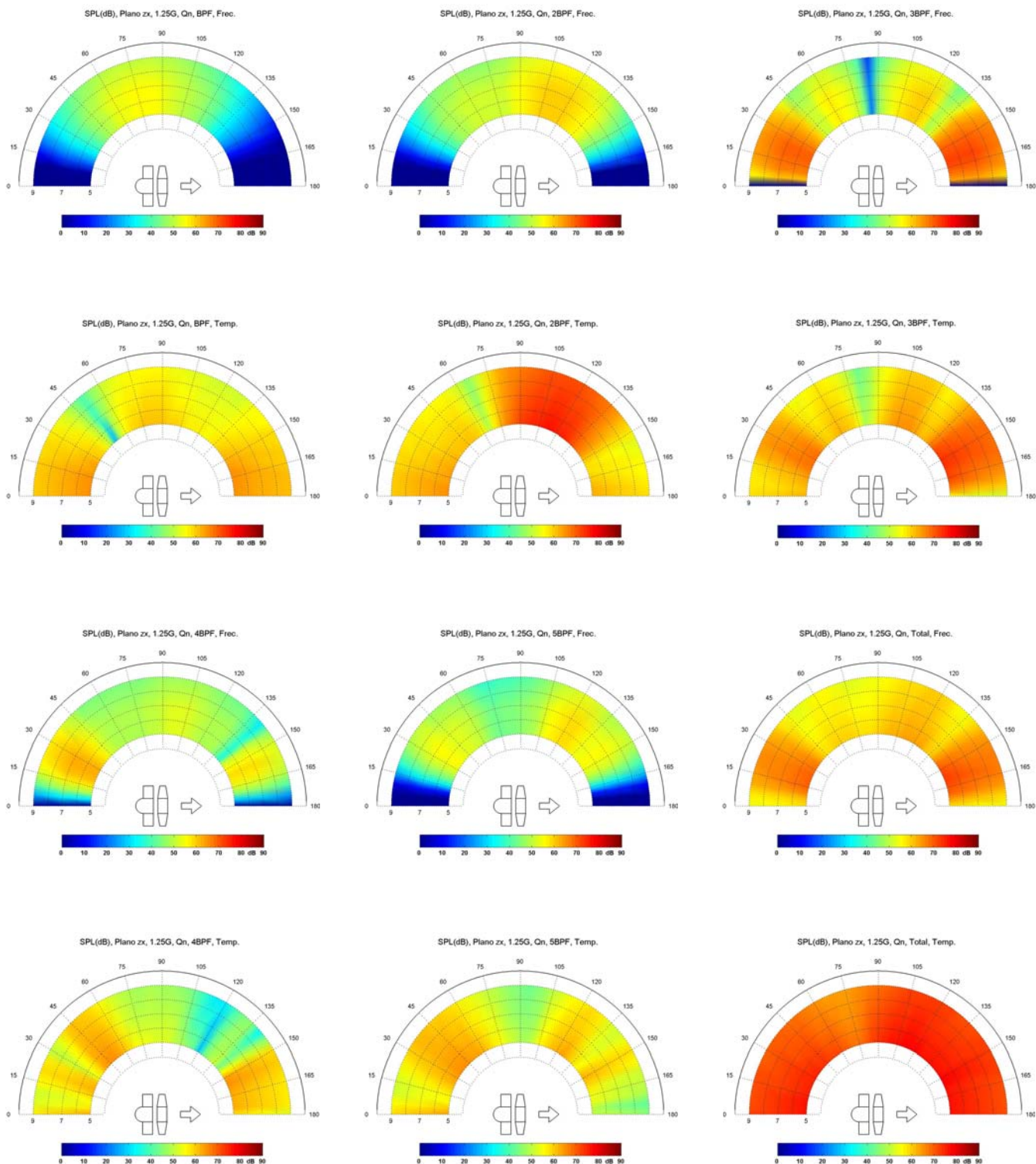


Figura III.54. Distribución circunferencial y radial del SPL entre los planos R5, R7 y R9, resultados en el dominio de la frecuencia y temporal para el gap superior (1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



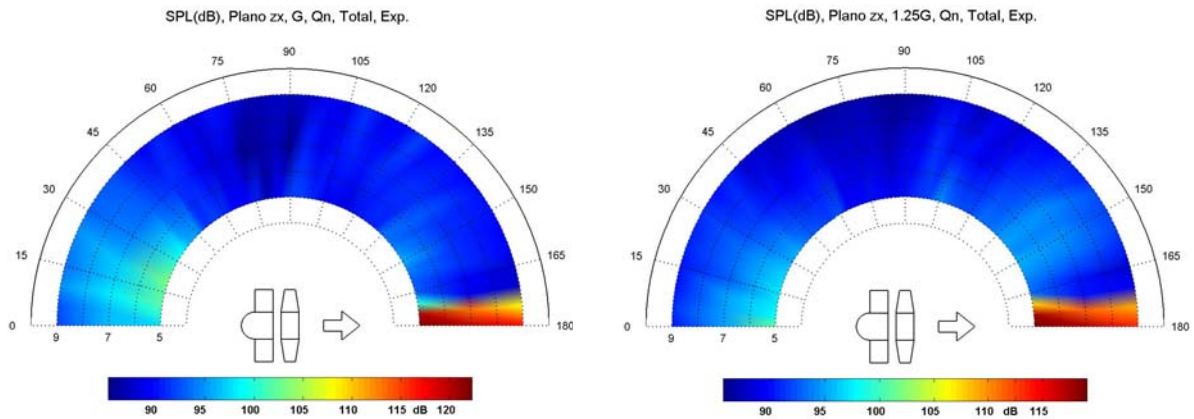


Figura III.55. Distribución circunferencial y radial del SPL entre los planos R5, R7 y R9, resultados experimentales para los dos gaps (G y 1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

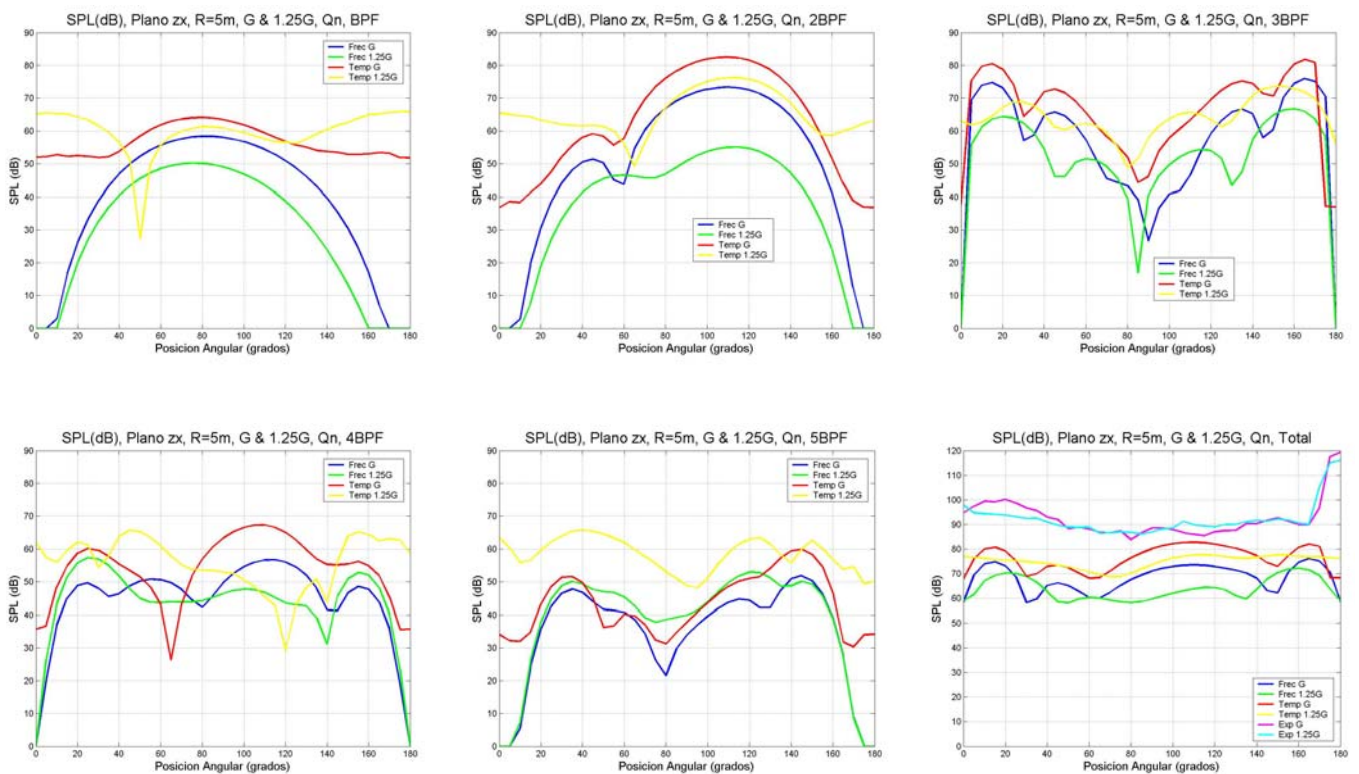
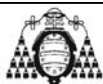


Figura III.56. Comparación de resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R5, para caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



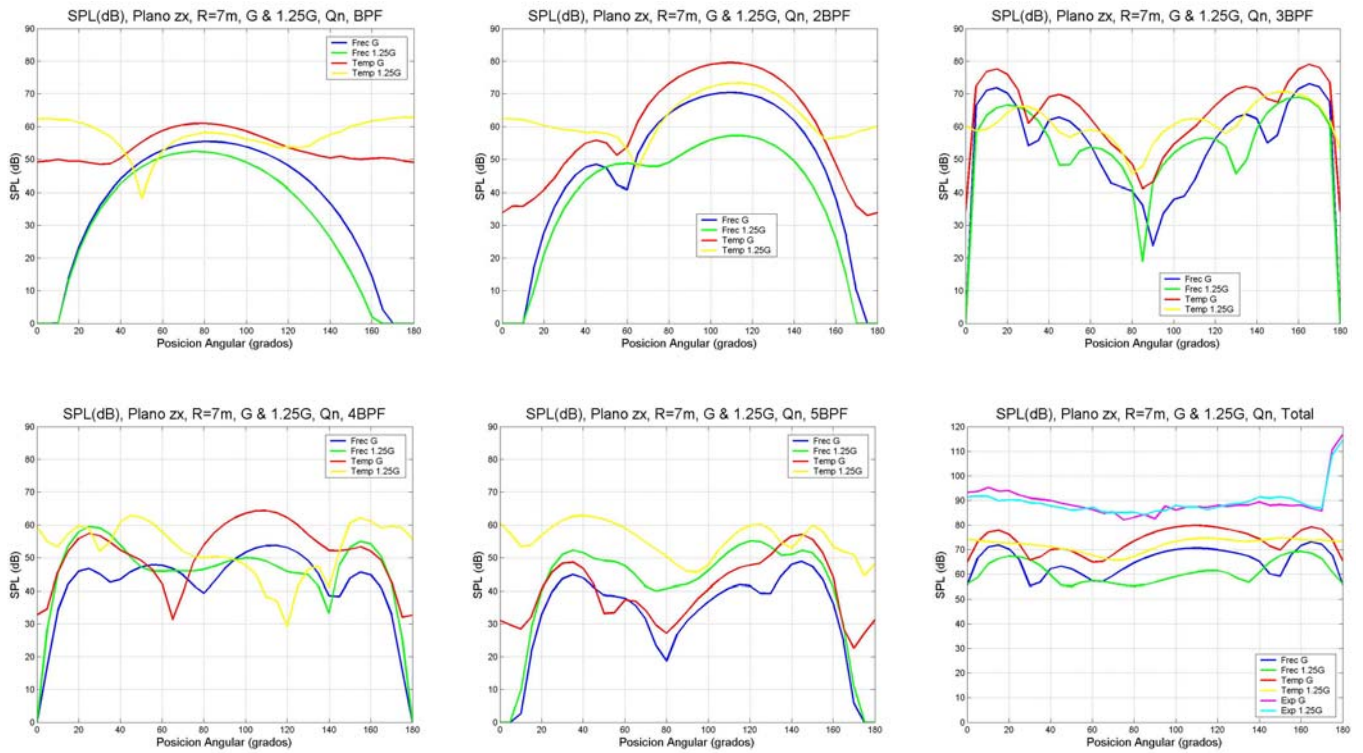


Figura III.57. Comparación de resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R7, para caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

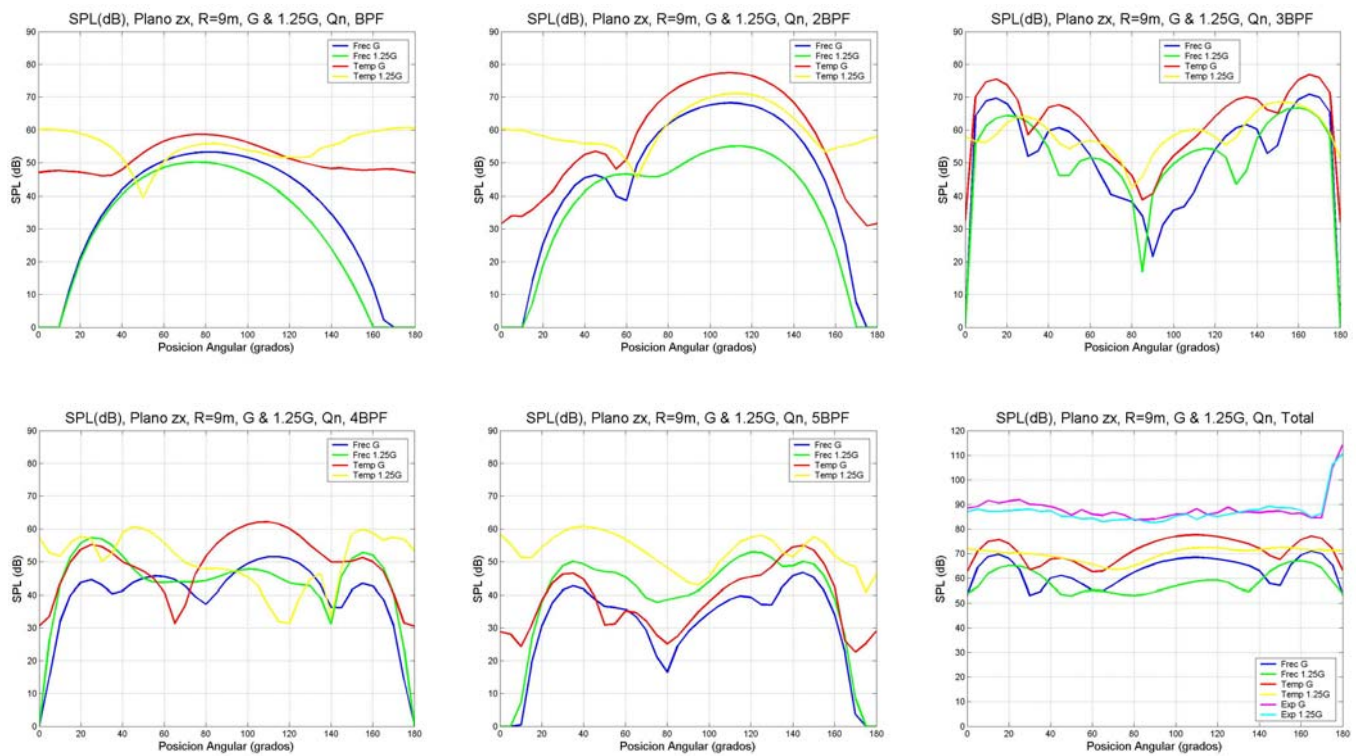
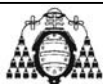


Figura III.58. Comparación de resultados numéricos y experimentales del ruido en el plano R9, para caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



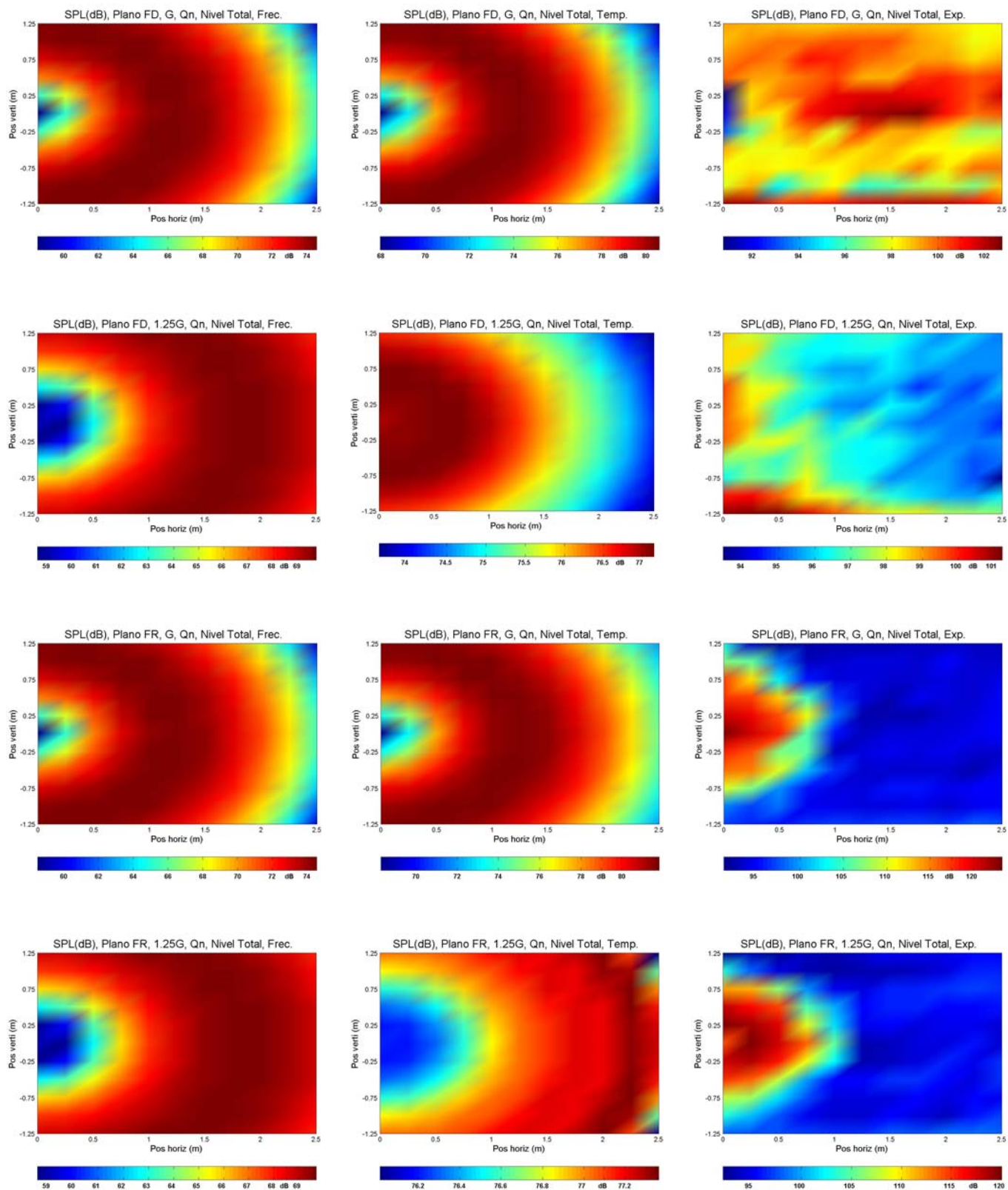


Figura III.59. Nivel SPL total en los planos frontales FD (antes del estator) y FR (tras el rotor), para dos gaps (G y 1.25G) y para caudal nominal Q_n : dominio de la frecuencia, dominio temporal y resultados experimentales.



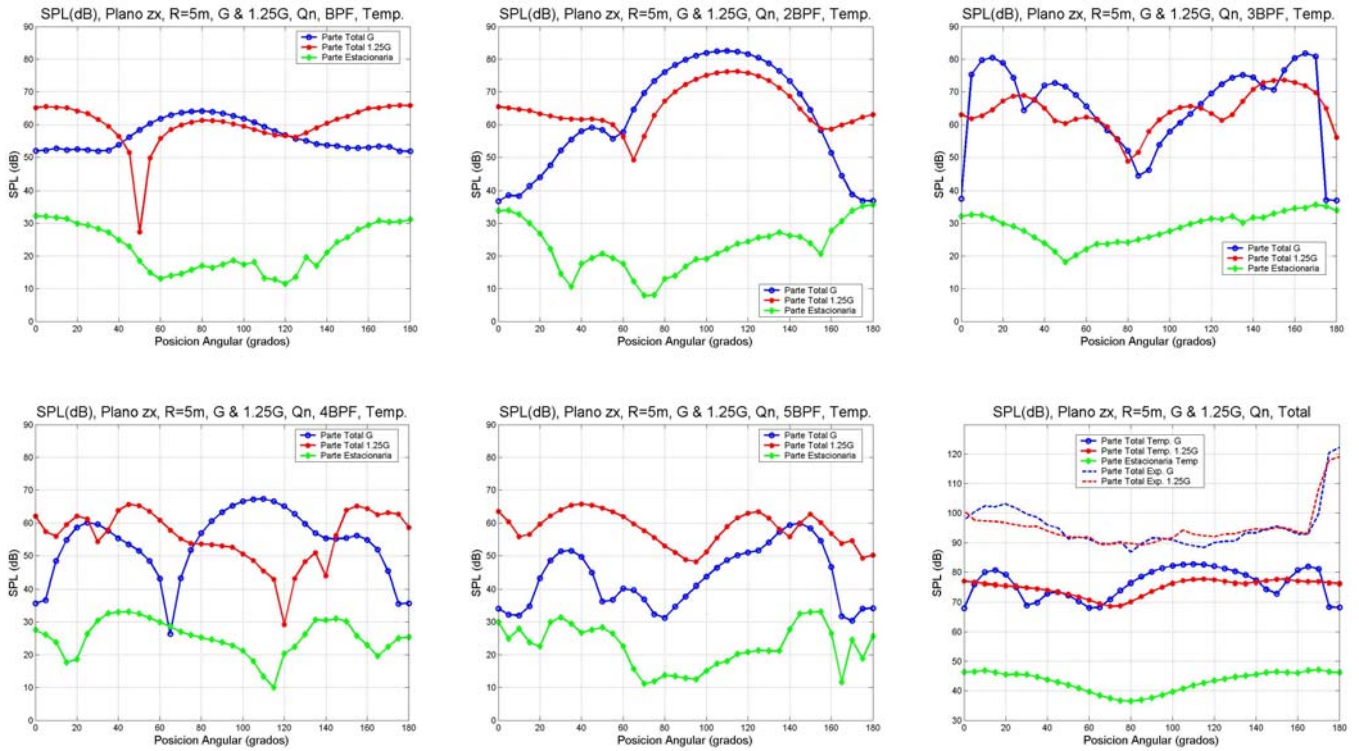


Figura III.60. Resultados numéricos y experimentales de la contribución total (dos gaps axiales) y de la contribución estacionaria del ruido en el plano R5, caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

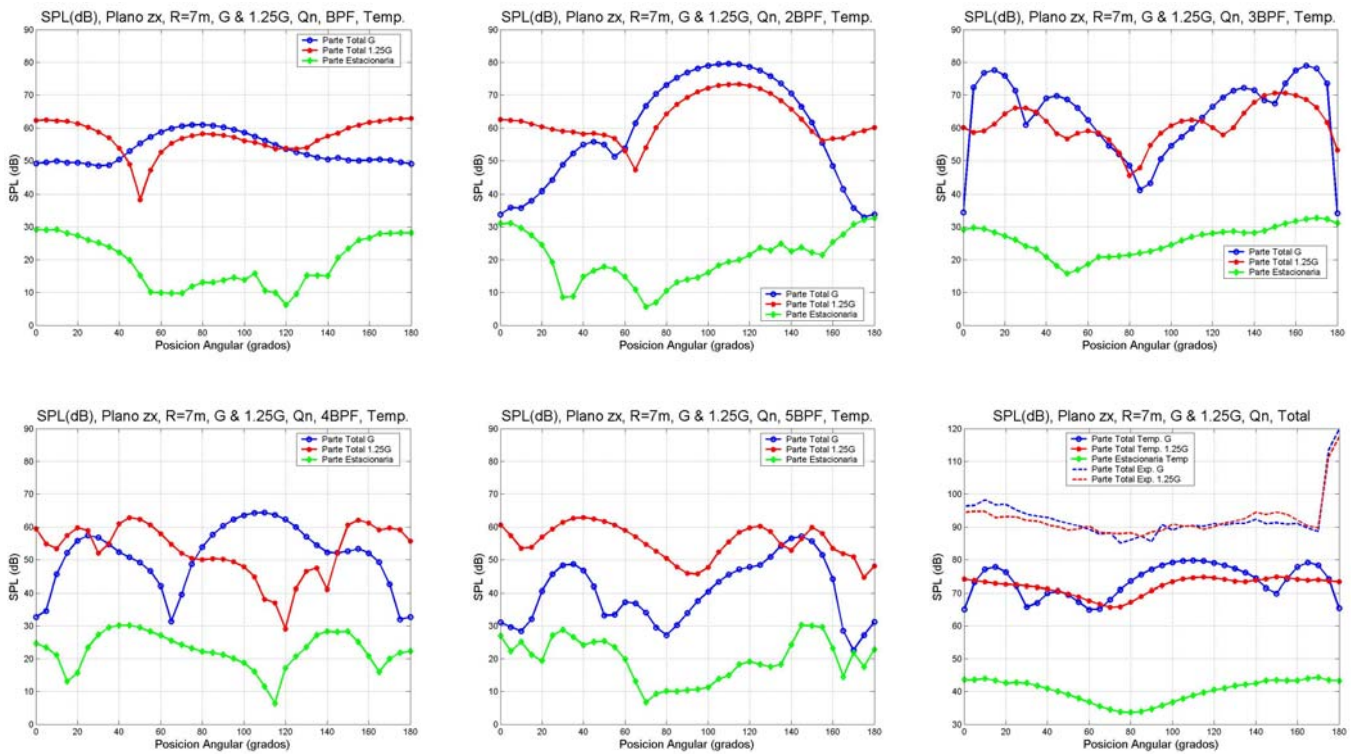
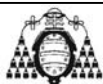


Figura III.61. Resultados numéricos y experimentales de la contribución total (dos gaps axiales) y de la contribución estacionaria del ruido en el plano R7, caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



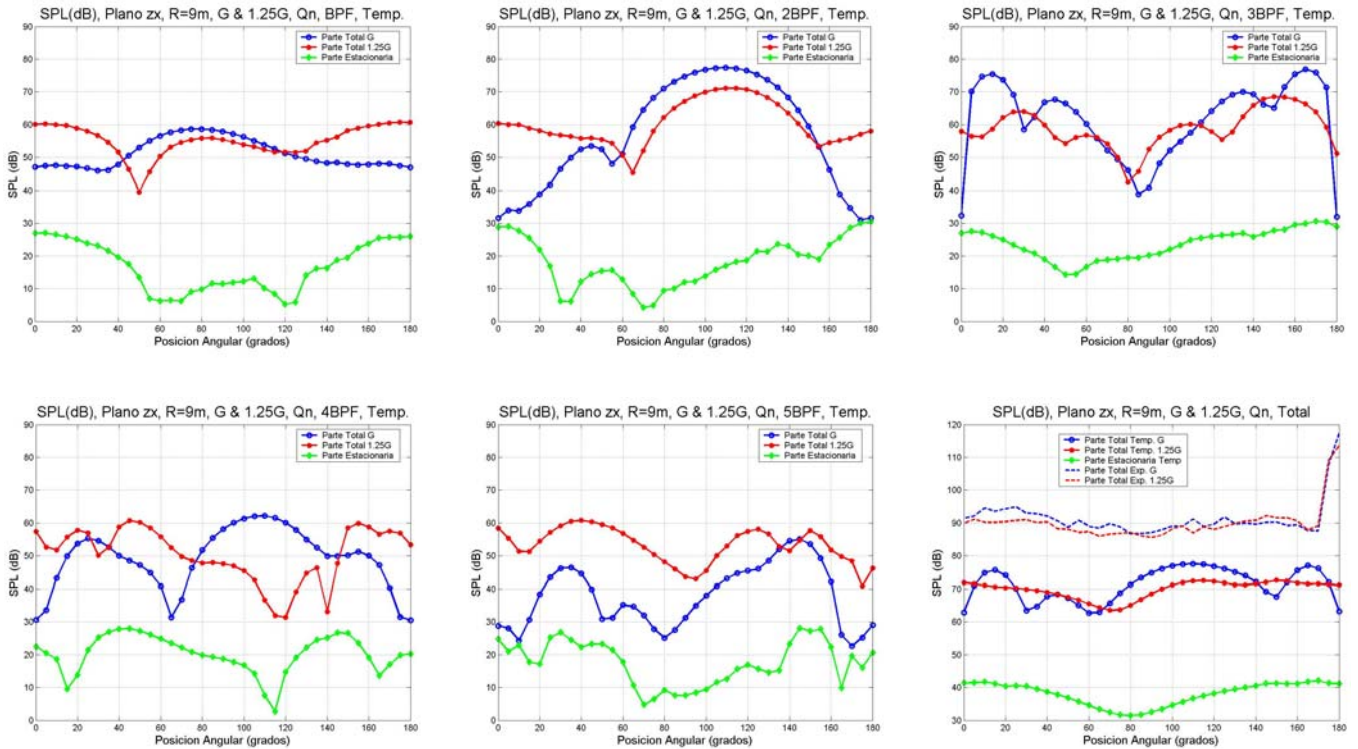


Figura III.62. Resultados numéricos y experimentales de la contribución total (dos gaps axiales) y de la contribución estacionaria del ruido en el plano R9, caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

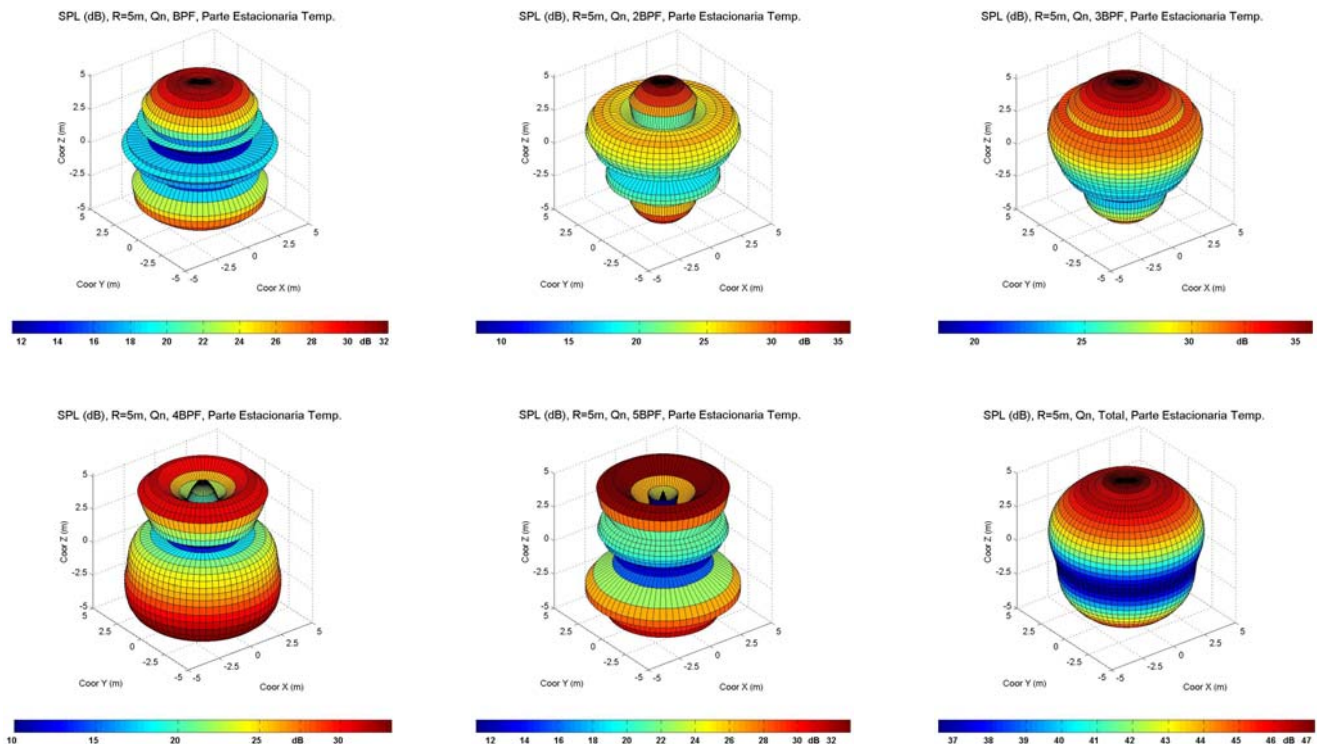
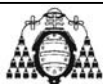


Figura III.63. Resultados numéricos del modelo temporal para la contribución estacionaria del ruido en el plano R5, caudal nominal de funcionamiento Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



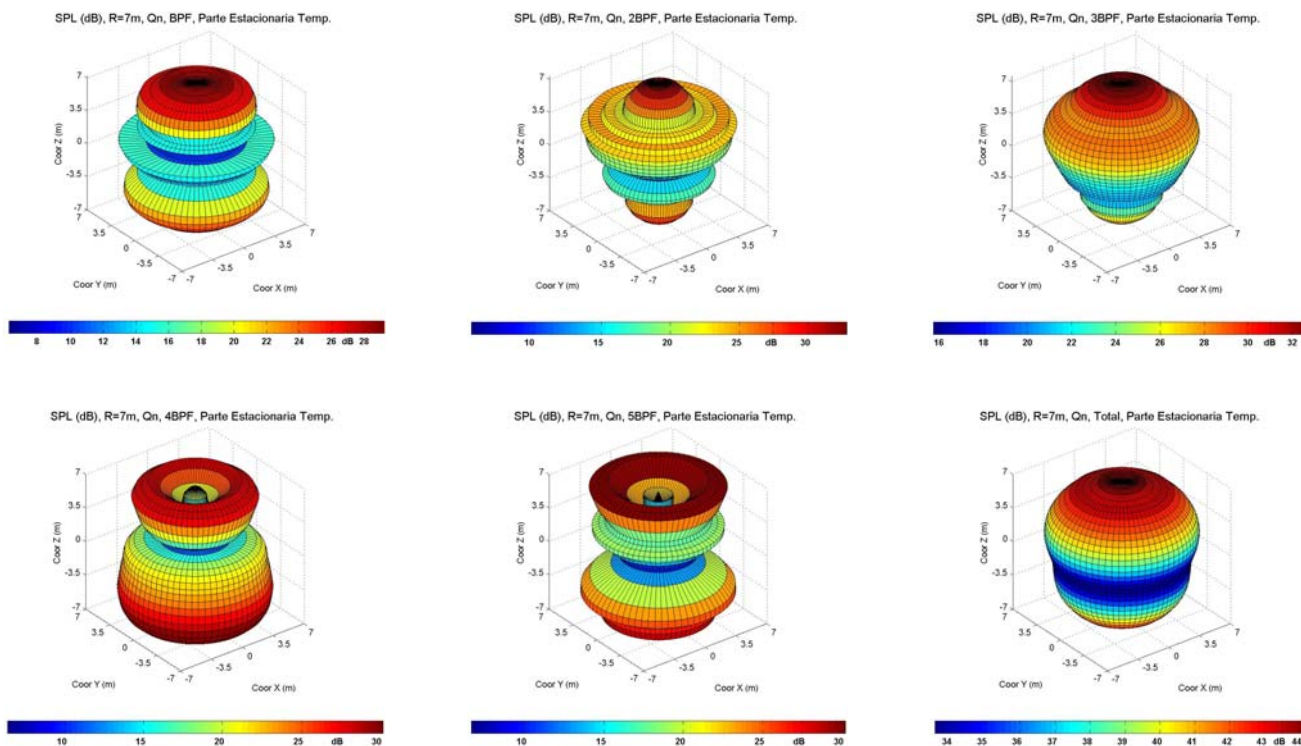


Figura III.64. Resultados numéricos del modelo temporal para la contribución estacionaria del ruido en el plano R7, caudal nominal de funcionamiento Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

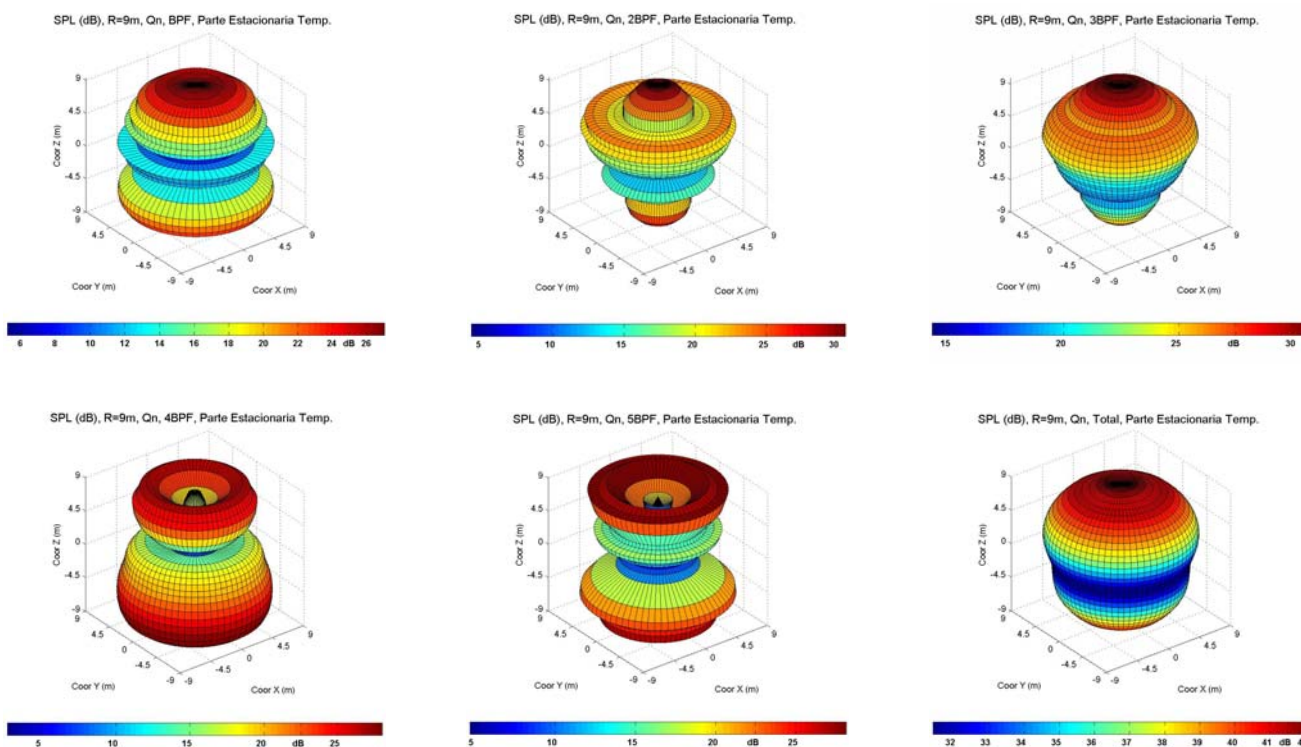
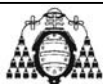


Figura III.65. Resultados numéricos del modelo temporal para la contribución estacionaria del ruido en el plano R9, caudal nominal de funcionamiento Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



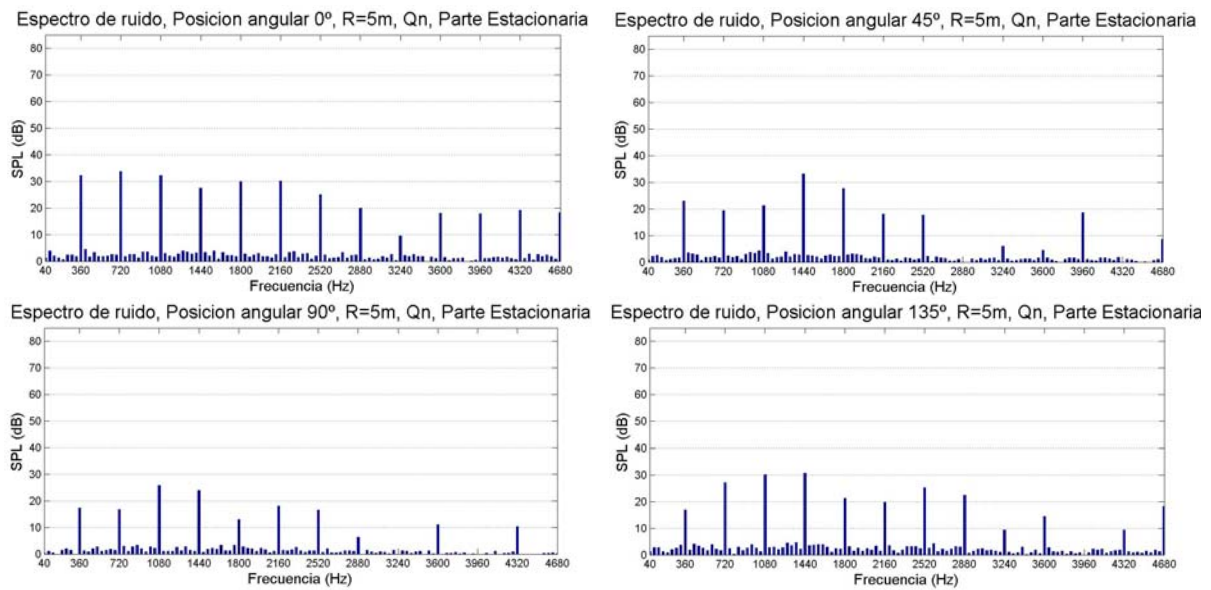


Figura III.66. Espectros de ruido correspondientes a la contribución estacionaria del SPL para varias posiciones angulares en el plano R5: resultados del modelo temporal, caudal nominal Qn.

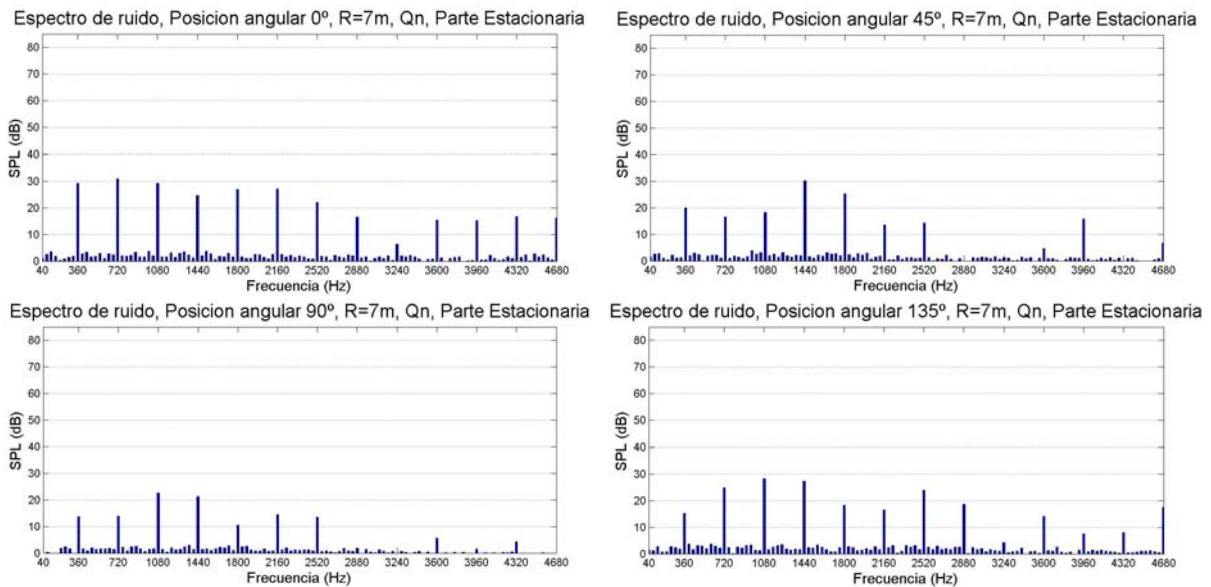
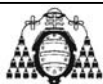


Figura III.67. Espectros de ruido correspondientes a la contribución estacionaria del SPL para varias posiciones angulares en el plano R7: resultados del modelo temporal, caudal nominal Qn.



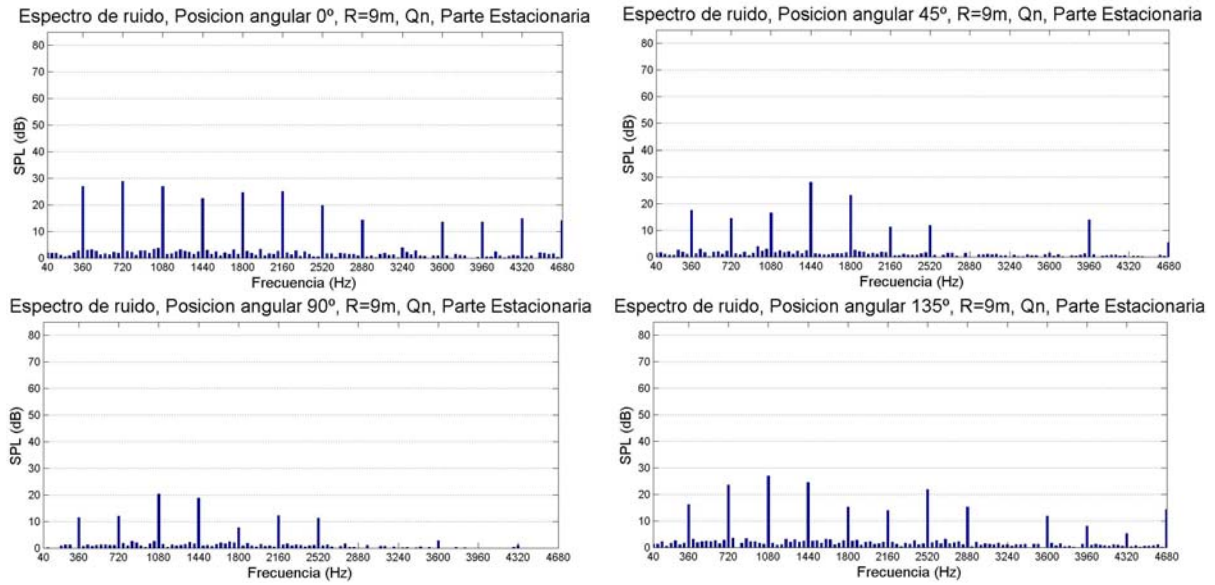


Figura III.68. Espectros de ruido correspondientes a la contribución estacionaria del SPL para varias posiciones angulares en el plano R7: resultados del modelo temporal, caudal nominal Qn.

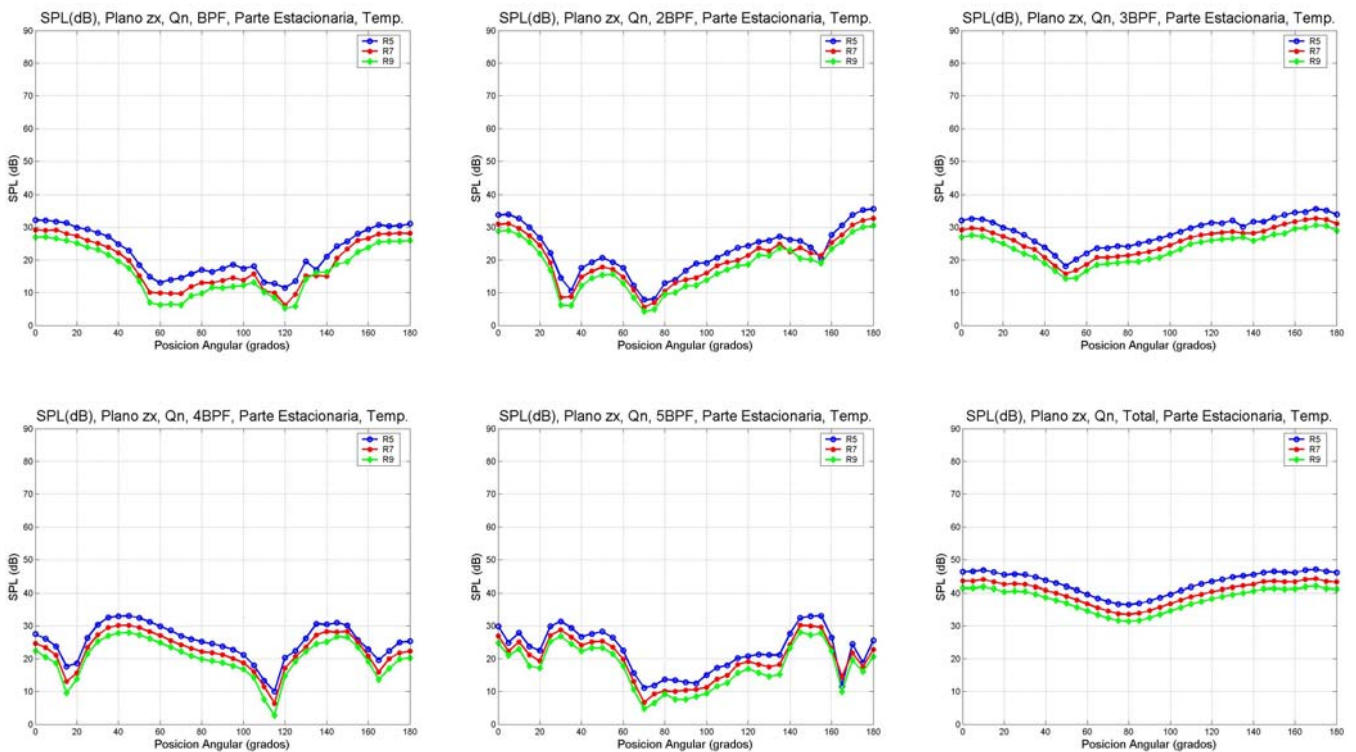
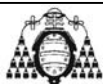


Figura III.69. Comparación de resultados numéricos y experimentales en los planos R5, R7 y R9 para la contribución estacionaria del ruido, caudal nominal Qn: frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



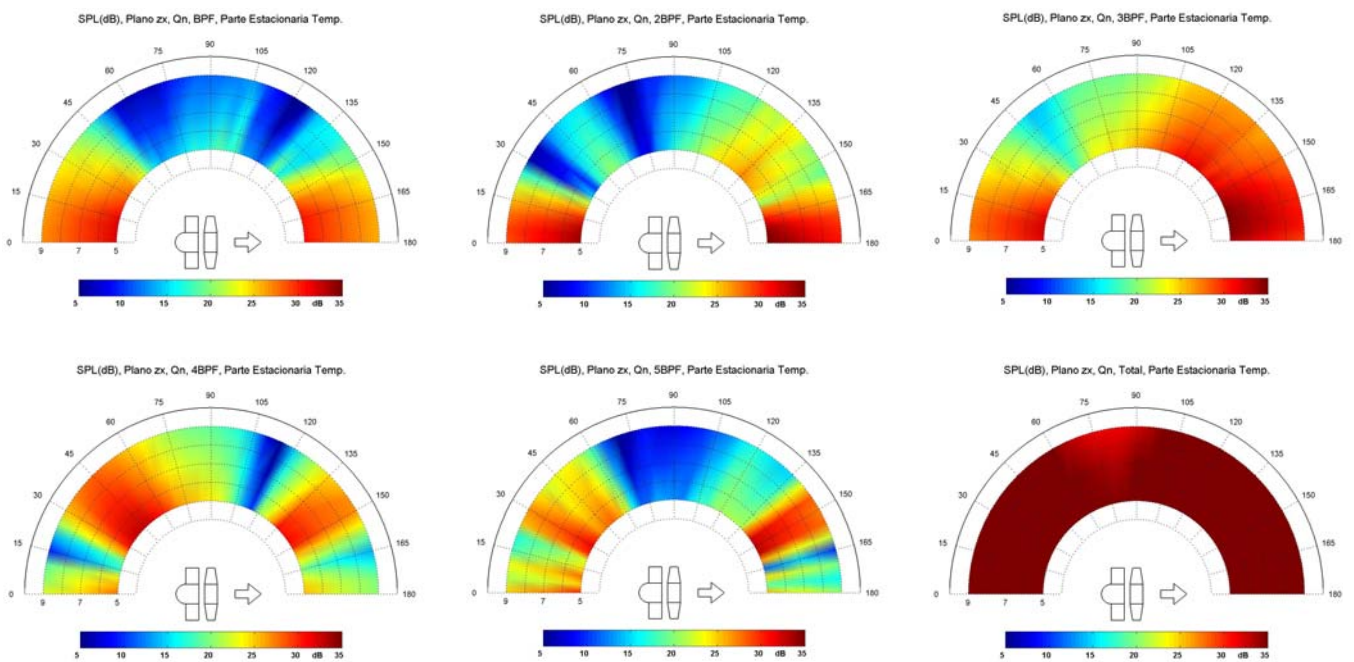


Figura III.70. Distribución circunferencial y radial de la contribución estacionaria del SPL en los planos R5, R7 y R9, caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.

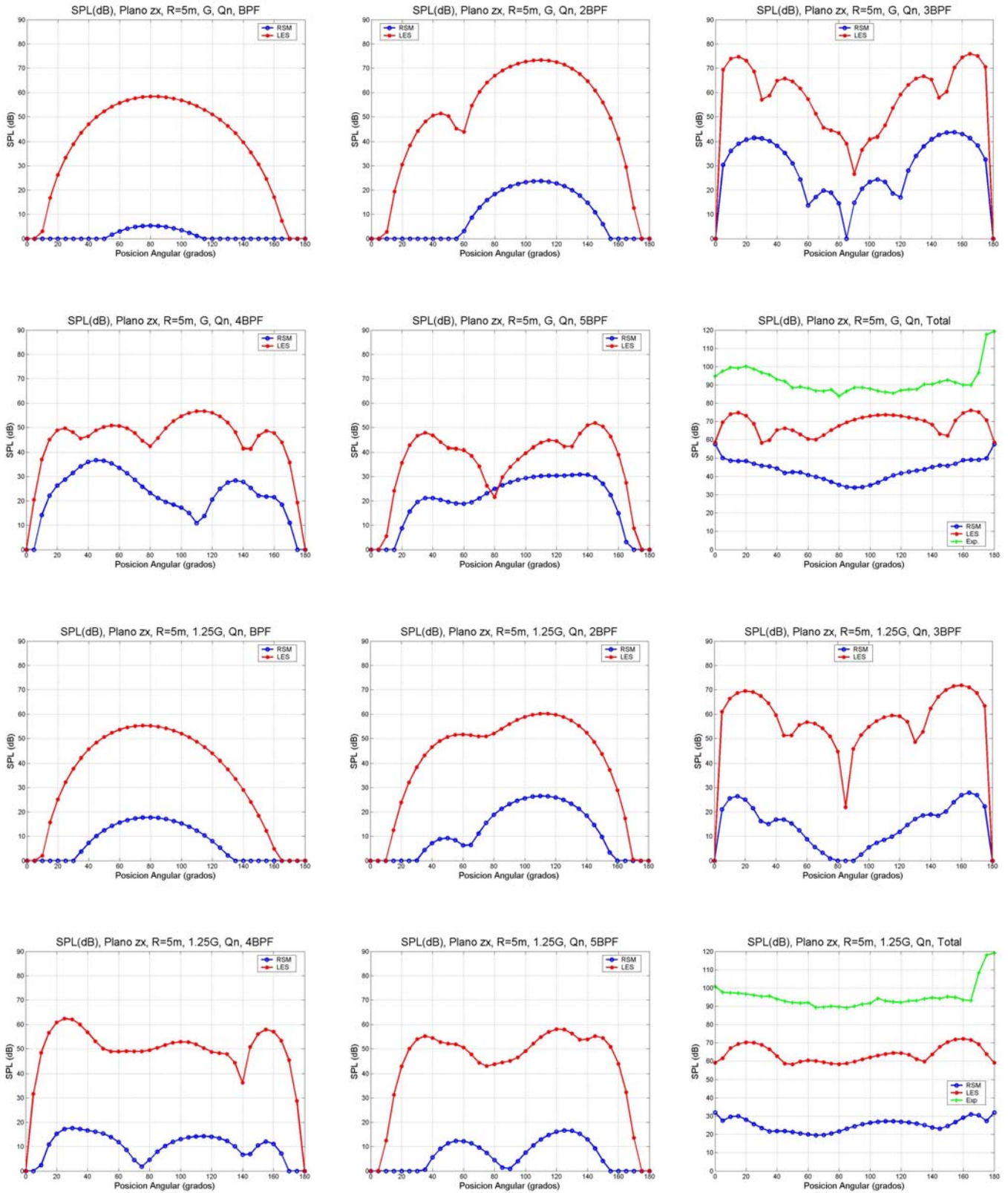


Figura III.71. Comparación entre RSM y LES en el plano R5, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Qn: frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



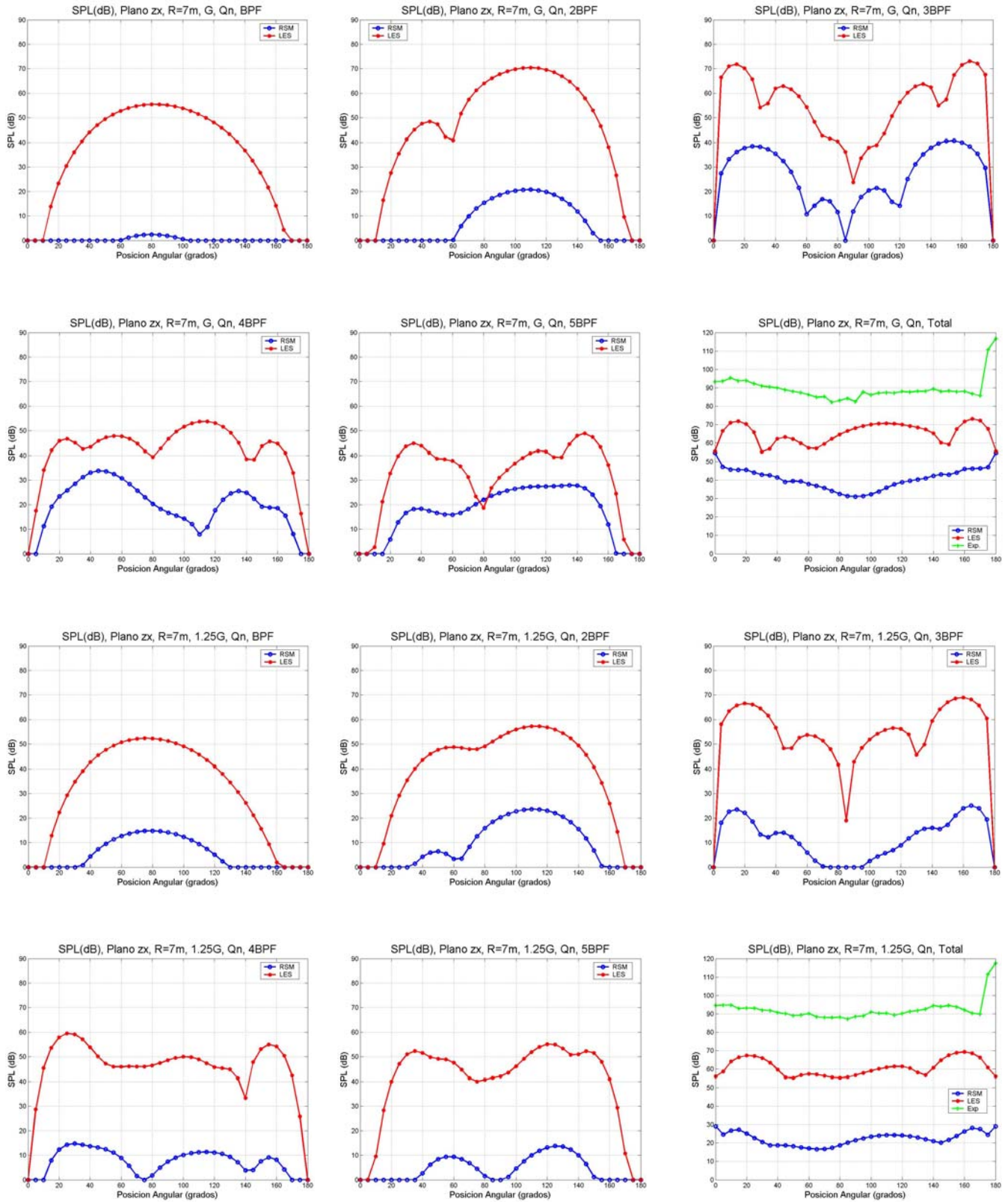


Figura III.72. Comparación entre RSM y LES en el plano R7, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



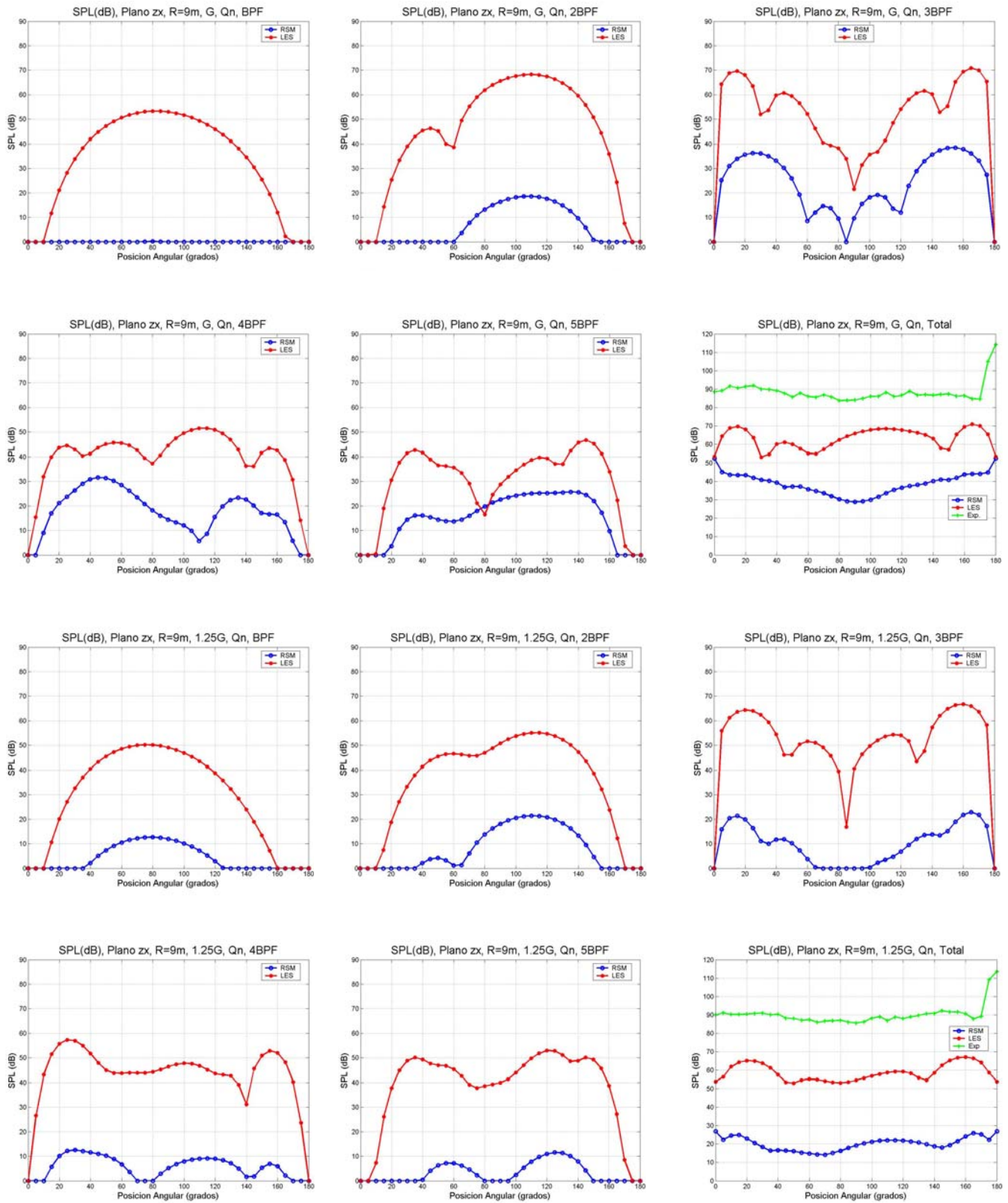


Figura III.73. Comparación entre RSM y LES en el plano R9, para dos gaps axiales (G y 1.25G) y caudal nominal Q_n : frecuencias BPF, 2BPF, 3BPF, 4BPF, 5BPF y nivel SPL total.



Apéndice IV

Algoritmo numérico

IV.1. INTRODUCCIÓN.

En este apéndice se lista el algoritmo numérico que se ha desarrollado para caracterizar la región de propagación del ruido en el dominio de la frecuencia. El algoritmo toma como datos de partida las fuerzas de carga sobre los álabes y sus coordenadas, obtenidos a partir de las simulaciones numéricas de la región fuente realizadas con Fluent (ver *Capítulo 4*). Por tanto, como ya se ha comentado a lo largo de la tesis, el algoritmo considera únicamente la contribución del ruido de carga generado por la turbomáquina axial.

El algoritmo consta básicamente de tres programas. El primer programa (Coordenadas.c) se utiliza para obtener las coordenadas geométricas de los álabes y escribirlas en ficheros – binarios o de texto – en el orden correcto para su posterior utilización. El segundo programa (Armonicos.c) se encarga de leer correctamente las fuerzas de carga sobre los álabes almacenadas mediante las simulaciones de Fluent, y calcula sus transformadas de Fourier, es decir, proporciona los armónicos de carga de las fuerzas. Finalmente, el tercer programa (Ruido.c) utiliza las coordenadas de los álabes y los armónicos de carga para resolver la formulación integral en el dominio de la frecuencia del ruido de carga (ver *Capítulo 4*), proporcionando los niveles de ruido en el campo lejano para una determinada posición del observador, que debe especificarse en coordenadas esféricas como dato en el programa. En este último programa se ha implementado una rutina que permite calcular las funciones Bessel, responsables de la directividad del sonido radiado.



IV.2. PROGRAMA Coordenadas.c.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <io.h>
#include <fcntl.h>

#define NCELDAS1 3600
#define NCELDAS2 8800
#define NCELDAS ( NCELDAS1 + NCELDAS2 )
#define FICH_ENTRADA_1 "Coordenadas_ps.txt"
#define FICH_ENTRADA_2 "Coordenadas_ss.txt"
#define FICH_SALIDA_BIN "salida.bin"
#define FICH_SALIDA_TXT "salida.txt"

int leerFichero(char *name, float datos[NCELDAS][3], int ini, int fin)
{
    FILE *in;
    char buf[1024];
    int celda;

    if((in = fopen(name, "rt")) == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Error abriendo %s. Imposible continuar.\n", name);
        return 1;
    }
    while(fgets(buf, 1024, in) != NULL)
    {
        if(buf[0] == '(' && buf[1] == 'g' && buf[2] == 'a')
            break;
    }
    for(celda = ini; celda < fin; ++celda)
    {
        if(fgets(buf, 1024, in) == NULL)
        {
            fprintf(stderr, "Error leyendo %s. Imposible continuar.\n", name);
            return 1;
        }
        datos[celda][0] = atof(buf);
    }
    while(fgets(buf, 1024, in) != NULL)
    {
        if(buf[0] == '(' && buf[1] == 'a' && buf[2] == 'n')
            break;
    }
    for(celda = ini; celda < fin; ++celda)
    {
        if(fgets(buf, 1024, in) == NULL)
        {
            fprintf(stderr, "Error leyendo %s. Imposible continuar.\n", name);
            return 1;
        }
        datos[celda][1] = atof(buf);
    }
    while(fgets(buf, 1024, in) != NULL)
    {
        if(buf[0] == '(' && buf[1] == 'r' && buf[2] == 'a')
            break;
    }
    for(celda = ini; celda < fin; ++celda)

```



```

    {
        if(fgets(buf, 1024, in) == NULL)
        {
            fprintf(stderr, "Error leyendo %s. Imposible continuar.\n", name);
            return 1;
        }
        datos[celda][2] = atof(buf);
    }
    fclose(in);
    return 0;
}

int main()
{
    float datos[NCELDAS][3];
    int i, j;
    int out;
    FILE *outtxt;

    leerFichero(FICH_ENTRADA_1, datos, 0, NCELDAS1);
    leerFichero(FICH_ENTRADA_2, datos, NCELDAS1, NCELDAS1 + NCELDAS2);

    if( (out = open(FICH_SALIDA_BIN, O_RDWR | O_CREAT | O_TRUNC, 0644)) < 0 )
    {
        fprintf(stderr, "Error grabando salida en %s. Imposible continuar.\n",
            FICH_SALIDA_BIN);
        exit(1);
    }
    write(out, datos, sizeof(float)*NCELDAS*3);
    close(out);
    fprintf(stderr, "\n");
    if( (outtxt = fopen(FICH_SALIDA_TXT, "wt")) == NULL )
    {
        fprintf(stderr, "Error grabando salida en %s. Imposible continuar.\n",
            FICH_SALIDA_TXT);
        exit(1);
    }
    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        for(j = 0; j < 3; ++j)
        {
            fprintf(outtxt, "%f ", datos[i][j]);
        }
        fprintf(outtxt, "\n");
        fprintf(stderr, ".");
    }
    fprintf(stderr, "\n");
    fclose(outtxt);
    return 0;
}

void leerdatos()
{
    float datos[NCELDAS][2];
    int i, j;
    int in;
    FILE *intxt;

    if( (in = open(FICH_SALIDA_BIN, O_RDONLY, 0644)) < 0 )
    {

```



```

        fprintf(stderr, "Error leyendo entrada en %s. Imposible continuar.\n",
        FICH_SALIDA_BIN);
        exit(1);
    }
    read(in, datos, sizeof(float)*NCELDAS*2);
    if( (intxt = fopen(FICH_SALIDA_TXT, "rt")) == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Error leyendo entrada en %s. Imposible continuar.\n",
        FICH_SALIDA_TXT);
        exit(1);
    }
    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        for(j = 0; j < 2; ++j)
        {
            fscanf(intxt, "%f ", &datos[i][j]);
        }
    }
    fclose(intxt);
}

```

IV.3. PROGRAMA Armonicos.c.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <io.h>
#include <fcntl.h>
#include <math.h>
#include "nrutil.h"

#define NCELDAS1 3600
#define NCELDAS2 8800
#define NCELDAS ( NCELDAS1 + NCELDAS2 )
#define NSTEPS 512
#define FICH_SALIDA_BIN "salida.bin"
#define FICH_SALIDA_TXT "salida.txt"
#define SWAP(a,b) tempr=(a);(a)=(b);(b)=tempr

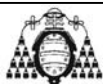
void four1(float data[ ], unsigned long nn, int isign);
void reallt(float data[ ], unsigned long n, int isign);

int main()
{
    float *datos[NCELDAS];
    int i, j;
    int out;
    FILE *outtxt;

    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        datos[i] = (float *) malloc(sizeof(float)*(NSTEPS + 1));
    }
    for (i = 0; i < NSTEPS; ++i)
    {
        char buf[1024];
        FILE *in;
        char name[512];
        int celda;

        sprintf(name, "alabe_ps_%04d.txt", i+1); //i + 1);
    }
}

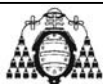
```




```

if((in = fopen(name, "rt")) == NULL)
{
    fprintf(stderr, "Error abriendo %s. Imposible continuar.\n", name);
    exit(1);
}
while(fgets(buf, 1024, in) != NULL)
{
    if(buf[0] == '(' && buf[1] == 'f' && buf[2] == 'u')
        break;
}
for(celda = 0; celda < NCELDAS1; ++celda)
{
    if(fgets(buf, 1024, in) == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Error leyendo %s. Imposible continuar.\n", name);
        exit(1);
    }
    //printf("%s",buf);
    datos[celda][i + 1] = atof(buf);
}
fclose(in);
sprintf(name, "alabe_ss_%04d.txt", i+1); //i + 1);
if((in = fopen(name, "rt")) == NULL)
{
    fprintf(stderr, "Error abriendo %s. Imposible continuar.\n", name);
    exit(1);
}
while(fgets(buf, 1024, in) != NULL)
{
    if(buf[0] == '(' && buf[1] == 'f' && buf[2] == 'u')
        break;
}
for(celda = 0; celda < NCELDAS2; ++celda)
{
    if(fgets(buf, 1024, in) == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Error leyendo %s. Imposible continuar.\n", name);
        exit(1);
    }
    //printf("%s",buf);
    datos[NCELDAS1 + celda][i + 1] = atof(buf);
}
fclose(in);
}
for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
{
    reallt(datos[i], NSTEPS, 1);
}
if( (out = open(FICH_SALIDA_BIN, O_RDWR | O_CREAT | O_TRUNC , 0644)) < 0 )
{
    fprintf(stderr, "Error grabando salida en %s. Imposible continuar.\n",
    FICH_SALIDA_BIN);
    exit(1);
}
for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
{
    write(out, datos[i], sizeof(float)*(NSTEPS+1));
    fprintf(stderr, "o");
}
close(out);

```



```

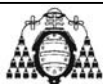
fprintf(stderr, "\n");
if( (outtxt = fopen(FICH_SALIDA_TXT, "wt")) == NULL)
{
    fprintf(stderr, "Error grabando salida en %s. Imposible continuar.\n",
    FICH_SALIDA_TXT);
    exit(1);
}
for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
{
    for(j = 0; j < NSTEPS; ++j)
    {
        fprintf(outtxt, "%f ", datos[i][j + 1]);
    }
    fprintf(outtxt, "\n");
    fprintf(stderr, ".");
}
fprintf(stderr, "\n");
fclose(outtxt);
}

void leerdatos()
{
    float *datos[NCELDAS];
    int i, j;
    int in;
    FILE *intxt;

    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        datos[i] = (float *) malloc(sizeof(float)*(NSTEPS + 1));
    }
    if( (in = open(FICH_SALIDA_BIN, O_RDONLY, 0644)) < 0 )
    {
        fprintf(stderr, "Error leyendo entrada en %s. Imposible continuar.\n",
        FICH_SALIDA_BIN);
        exit(1);
    }
    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        read(in, datos[i], sizeof(float)*(NSTEPS+1));
    }
    if( (intxt = fopen(FICH_SALIDA_TXT, "rt")) == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Error leyendo entrada en %s. Imposible continuar.\n",
        FICH_SALIDA_TXT);
        exit(1);
    }
    for(i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        for(j = 0; j < NSTEPS; ++j)
        {
            fscanf(intxt, "%f ", &datos[i][j + 1]);
        }
    }
    fclose(intxt);
}

void reallft(float data[], unsigned long n, int isign)
{
    void four1(float data[], unsigned long nn, int isign);

```



```

unsigned long i,i1,i2,i3,i4,np3;
float c1=0.5,c2,h1i,h1r,h2i,h2r;
double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
theta=3.141592653589793/(double) (n>>1);
if(isign==1)
{
    c2=-0.5;
    four1(data,n>>1,1);
}
else
{
    c2=0.5;
theta=-theta;
}
wtemp=sin(0.5*theta);
wpr=-2.0*wtemp*wtemp;
wpi=sin(theta);
wr=1.0+wpr;
wi=wpi;
np3=n+3;
for(i=2;i<=(n>>2);i++)
{
    i4=1+(i3=np3-(i2=1+(i1=i+i-1)));
    h1r=c1*(data[i1]+data[i3]);
    h1i=c1*(data[i2]-data[i4]);
    h2r=-c2*(data[i2]+data[i4]);
    h2i=c2*(data[i1]-data[i3]);
    data[i1]=(float)(h1r+wr*h2r-wi*h2i);
    data[i2]=(float)(h1i+wr*h2i+wi*h2r);
    data[i3]=(float)(h1r-wr*h2r+wi*h2i);
    data[i4]=(float)(-h1i+wr*h2i+wi*h2r);
    wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
    wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
}
if(isign==1)
{
    data[1]=(h1r=data[1])+data[2];
    data[2]=h1r-data[2];
}
else
{
    data[1]=c1*((h1r=data[1])+data[2]);
    data[2]=c1*(h1r-data[2]);
    four1(data,n>>1,-1);
}
}

```

```

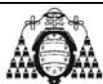
void four1(float data[], unsigned long nn, int isign)
{

```

```

    unsigned long n,mmax,m,j,istep,i;
    double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
    float tempr,tempi;
    n=nn << 1;
    j=1;
    for (i=1;i<n;i+=2)
    {
        if (j > i)
        {
            SWAP(data[j],data[i]);
            SWAP(data[j+1],data[i+1]);

```



```

    }
    m=nn;
    while (m >= 2 && j > m)
    {
        j -=m;
        m >>= 1;
    }
    j +=m;
}
mmax=2;
while (n > mmax)
{
    istep=mmax << 1;
    theta=isign*(6.28318530717959/mmax);
    wtemp=sin(0.5*theta);
    wpr = -2.0*wtemp*wtemp;
    wpi=sin(theta);
    wr=1.0;
    wi=0.0;
    for (m=1;m<mmax;m+=2)
    {
        for (i=m;i<=n;i+=istep)
        {
            j=i+mmax;
            tempr=(float)(wr*data[j]-wi*data[j+1]);
            tempi=(float)(wr*data[j+1]+wi*data[j]);
            data[j]=data[i]-tempr;
            data[j+1]=data[i+1]-tempi;
            data[i] += tempr;
            data[i+1] += tempi;
        }
        wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
        wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
    }
    mmax=istep;
}
}

```

IV.4. PROGRAMA Ruido.c.

```

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "nrutil.h"

#define RAD (3.14159265/180.0)
#define PI 3.14159265
#define VELSON 340.0
#define OMEGA 251.2
#define ACC 40.0
#define BIGNO 1.0e10
#define BIGNI 1.0e-10
#define NCELDAS 12400
#define NCOLUMNAS 512
#define B 9
#define V 13
#define RADIO 5.0
#define ARM 1
#define FILAS 37

```



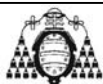
```

float bessj0(float x);
float bessj1(float x);
float bessj(int n, float x);
float componentes(float gamma, float theta, float radioFuente, int w);
float expReal(float phi, float phiFuente, int w);
float explmagnaria(float phi, float phiFuente, int w);

main(int argn, char *argv[])
{
    int i, j, w, orden, k;
    float Constante, A, C, D, E, J, K;
    float mach, radioFuente, gamma, phiFuente;
    float argumento, Componentes, theta, phi;
    float SumaWReal, SumaWImaginaria, SumaCReal, SumaCImaginaria;
    float RealPresion, ImaginariaPresion;
    float *armonicos[NCELDAS];
    float *coordenadas[NCELDAS];
    float *posiciones[FILAS];
    float bessel;
    FILE *fichero, *fichero1, *fichero2, *fichero3;

    fichero = fopen("Fourier.txt", "r");
    fichero1 = fopen("Coordenadas.txt", "r");
    fichero3=fopen("Posiciones_R5.txt","r");
    fichero2 = fopen("Presiones_R5_BPF.txt", "w");
    for (i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        armonicos[i] = (float *) malloc(sizeof(float) * (NCOLUMNAS));
        if (armonicos[i] == NULL)
        {
            printf("Se acabo la memoria\n");
            exit(2);
        }
    }
    for (i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        coordenadas[i] = (float *) malloc(sizeof(float) * (3));
        if (coordenadas[i] == NULL)
        {
            printf("Se acabo la memoria\n");
            exit(2);
        }
    }
    for (i = 0; i < FILAS; ++i)
    {
        posiciones[i] = (float *) malloc(sizeof(float) * (2));
        if (posiciones[i] == NULL)
        {
            printf("Se acabo la memoria\n");
            exit(2);
        }
    }
    for (i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        for (j = 0; j < NCOLUMNAS; ++j)
        {
            fscanf(fichero, "%f", &armonicos[i][j]);
        }
    }
    fclose(fichero);
}

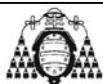
```



```

for (i = 0; i < NCELDAS; ++i)
{
    for (j = 0; j < 3; ++j)
    {
        fscanf(fichero1, "%f", &coordenadas[i][j]);
    }
}
fclose(fichero1);
for (i = 0; i < FILAS; ++i)
{
    for (j = 0; j < 2; ++j)
    {
        fscanf(fichero3, "%f", &posiciones[i][j]);
    }
}
fclose(fichero3);
Constante = (float) ((ARM * B * B * OMEGA) / (4.0 * PI * RADIO * VELSON));
J = (float) (cos(ARM * B * OMEGA * RADIO / VELSON));
K = (float) (sin(ARM * B * OMEGA * RADIO / VELSON));
for (k = 0; k < FILAS; ++k)
{
    theta = (float)(RAD*posiciones[k][1]);
    phi=(float)(RAD*posiciones[k][0]);
    RealPresion = 0.0;
    ImaginariaPresion = 0.0;
    SumaCReal = 0.0;
    SumaCImaginaria = 0.0;
    for (i = 0; i < NCELDAS; ++i)
    {
        radioFuente = coordenadas[i][2];
        phiFuente = coordenadas[i][1];
        gamma = coordenadas[i][0];
        mach = (float) (OMEGA * radioFuente / VELSON);
        argumento = (float) (ARM * B * mach * sin(theta));
        SumaWReal = 0.0;
        SumaWImaginaria = 0.0;
        for (w = -38; w <= 38; ++w)
        {
            if (abs(w) > 19)
            {
                if (w == 0)
                {
                    C = armonicos[i][2 * w * V - 2 * 247];
                    D = 0.0;
                }
                else if (w < 0)
                {
                    C = armonicos[i][2 * abs(w) * V - 2 * 247];
                    D = -armonicos[i][2 * abs(w) * V + 1 - 2 * 247];
                }
                else
                {
                    C = armonicos[i][2 * w * V - 2 * 247];
                    D = armonicos[i][2 * w * V + 1 - 2 * 247];
                }
            }
            else
            {
                if (w == 0)
                {

```



```

        C = armonicos[i][2 * w * V];
        D = 0.0;
    }
    else if (w < 0)
    {
        C = armonicos[i][2 * abs(w) * V];
        D = -armonicos[i][2 * abs(w) * V + 1];
    }
    else
    {
        C = armonicos[i][2 * w * V];
        D = armonicos[i][2 * w * V + 1];
    }
}
orden = ARM * B - w * V;
if (orden < 0)
{
    bessel = (float) (pow(-1.0, abs(orden)) *
    bessj(abs(orden), argumento));
}
else
{
    bessel = bessj(orden, argumento);
}
A = expReal(phi, phiFuente, w);
E = explmaginaria(phi, phiFuente, w);
Componentes = componentes(gamma, theta, radioFuente, w);
SumaWReal += (A * C - E * D) * bessel * Componentes;
SumaWImaginaria += (A * D + E * C) * bessel * Componentes;
}
SumaCReal += SumaWReal;
SumaCImaginaria += SumaWImaginaria;
}
RealPresion = -Constante * (K * SumaCReal + J * SumaCImaginaria);
ImaginariaPresion = Constante * (J * SumaCReal - K * SumaCImaginaria);
fprintf(fichero2, "%.20ft%.20ft%d\n", RealPresion, ImaginariaPresion, k);
printf("k es %d\n", k);
}
fclose(fichero2);
}

float componentes(float gamma, float theta, float radioFuente, int w)
{
    float valor;
    float mach;
    mach = (float) (OMEGA * radioFuente / VELSON);
    valor = (float) (cos(gamma) * cos(theta) - (((ARM * B - w * V) * sin(gamma)) / (ARM * B *
    mach)));
    return valor;
}

float expReal(float phi, float phiFuente, int w)
{
    float valor;
    valor = (float) (cos((ARM * B - w * V) * (phi - phiFuente - (PI / 2.0))));
    return valor;
}

float explmaginaria(float phi, float phiFuente, int w)
{

```



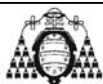
```

float valor;
valor = (float) (sin((ARM * B - w * V) * (phi - phiFuente - (PI / 2.0))));
return valor;
}

float bessj0(float x)
{
float ax, z;
double xx, y, ans, ans1, ans2;
if ((ax = (float) fabs(x)) < 8.0)
{
y = x * x;
ans1 = 57568490574.0 + y * (-13362590354.0 + y * (651619640.7+y *(-
11214424.18 +y *(77392.33017 +y *(-184.9052456))));
ans2 =57568490411.0 + y * (1029532985.0 +y * (9494680.718 + y *
(59272.64853 +y * (267.8532712 + y * 1.0)));
ans = ans1 / ans2;
}
else
{
z = (float) (8.0 / ax);
y = z * z;
xx = ax - 0.785398164;
ans1 = 1.0 + y * (-0.1098628627e-2 + y * (0.2734510407e-4+ y * (-0.2073370639e-5 +y
*0.2093887211e-6));
ans2 = -0.1562499995e-1 + y * (0.1430488765e-3 +y * (-0.6911147651e-5 + y *
(0.7621095161e-6 -y * 0.934945152e-7));
ans =sqrt(0.636619772 / ax) * (cos(xx) * ans1 - z * sin(xx) * ans2);
}
return (float) ans;
}

float bessj1(float x)
{
float ax, z;
double xx, y, ans, ans1, ans2;
if ((ax = (float) fabs(x)) < 8.0)
{
y = x * x;
ans1 = x * (72362614232.0 + y * (-7895059235.0 + y * (242396853.1+y *(-
2972611.439+y *(15704.48260+y *(-30.16036606))));
ans2 =144725228442.0 + y * (2300535178.0 +y * (18583304.74 + y *
(99447.43394 +y * (376.9991397 + y * 1.0)));
ans = ans1 / ans2;
}
else
{
z = (float) (8.0 / ax);
y = z * z;
xx = ax - 2.356194491;
ans1 = 1.0 + y * (0.183105e-2 + y * (-0.3516396496e-4+ y * (0.2457520174e-5
+y *(-0.240337019e-6));
ans2 =0.04687499995 + y * (-0.2002690873e-3 +y * (0.8449199096e-5 +y * (-
0.88228987e-6 +y * 0.105787412e-6));
ans =sqrt(0.636619772 / ax) * (cos(xx) * ans1 - z * sin(xx) * ans2);
if (x < 0.0)
ans = -ans;
}
return (float) ans;
}
}

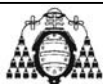
```




```

float bessj(int n, float x)
{
    float bessj0(float x);
    float bessj1(float x);
    int j, jsum, m;
    float ax, bj, bjm, bjp, sum, tox, ans;
    if (n == 0)
        return bessj0(x);
    else if (n == 1)
        return bessj1(x);
    else
    {
        ax = (float) fabs(x);
        if (ax == 0.0)
            return 0.0;
        else if (ax > (float) n)
        {
            tox = (float) (2.0 / ax);
            bjm = bessj0(ax);
            bj = bessj1(ax);
            for (j = 1; j < n; j++)
            {
                bjp = j * tox * bj - bjm;
                bjm = bj;
                bj = bjp;
            }
            ans = bj;
        }
        else
        {
            tox = (float) (2.0 / ax);
            m = 2 * ((n + (int) sqrt(ACC * n)) / 2);
            jsum = 0;
            bjp = ans = sum = 0.0;
            bj = 1.0;
            for (j = m; j > 0; j--)
            {
                bjm = j * tox * bj - bjp;
                bjp = bj;
                bj = bjm;
                if (fabs(bj) > BIGNO)
                {
                    bj *= (float) BIGNI;
                    bjp *= (float) BIGNI;
                    ans *= (float) BIGNI;
                    sum *= (float) BIGNI;
                }
            }
            if (jsum)
                sum += bj;
            jsum = !jsum;
            if (j == n)
                ans = bjp;
        }
        sum = (float) (2.0 * sum - bj);
        ans /= sum;
    }
    return x < 0.0 && (n & 1) ? -ans : ans;
}

```



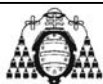


Apéndice V

Copia de publicaciones

Se incluye en este último apéndice una copia de las publicaciones más relevantes relacionadas con el tema tratado en la presente tesis en las que ha participado la autora de la misma. Dichas publicaciones son las siguientes:

- **Fernández, J.M.; Argüelles, K.M.; Ballesteros, R.; Santolaria, C.;** “*Numerical analysis of the rotor-stator interaction in an axial flow fan*”, Proceedings of the Hydraulic Machinery and Systems 21st IAHR Symposium, Lausanne, 2002.
- **Fernández, J.M.; Argüelles, K.M.; Santolaria, C.; Ballesteros, R.;** “*Unsteady flow analysis of the rotor-stator interaction in an axial flow fan*”, Proceedings of FEDSM’03: The 2003 Joint ASME-JSME Fluids Engineering Summer Conference, Honolulu, 2003.
- **Argüelles, K.M.; Fernández, J.M.; Santolaria, C.; Fernández, P.;** “*Numerical study of the discrete frequency noise generation in an axial flow fan*”, Proceedings of 6th Euroturbo, European Conference on Turbomachinery. March, 7-11, 2005. Lille.



NUMERICAL ANALYSIS OF THE ROTOR-STATOR INTERACTION IN AN AXIAL FLOW FAN

*Jesús Manuel FERNANDEZ, Mec. de Fluidos. Universidad de Oviedo,
Gijón, Spain.*

*Katia ARGÜELLES, Mec. de Fluidos. Universidad de Oviedo,
Gijón, Spain.*

*Rafael BALLESTEROS, Mec. de Fluidos. Universidad de Oviedo,
Gijón, Spain.*

*Carlos SANTOLARIA, Mec. de Fluidos. Universidad de Oviedo,
Gijón, Spain.*

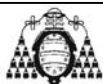
ABSTRACT

The usual configuration of axial flow fans consist on a rotor and a fixed blade row downstream the rotor; but sometimes, because of constructive reasons, a configuration with inlet guide vanes upstream of the rotor must be used, which has lower efficiencies than the traditional one, and upper noise generation. The main goal of this work is the numerical simulation –based upon computational techniques (CFD)- of the unsteady flow characteristics. The major dynamic effects on the interaction due to the relative motion between the static and rotating blade rows in one-stage subsonic axial flow fan with a reaction greater than 1 is analyzed. Once the main flow structure is determined, the dynamic characteristics, the blade vibrations and the acoustic generation are deduced. The influence of the radial position, the operating conditions and the distance of the fixed and the rotating blade rows is also analyzed. The final target is the stablishment of a detailed methodology oriented towards the prediction of the interaction between blade rows in the design process.

RÉSUMÉ

NOMENCLATURE

| Term | Symbol | Definition | Term | Symbol | Definition |
|--------------------------|-------------|------------|----------------------|------------|------------|
| Static pressure | P | | Rotor chord | c | |
| Reaction degree | X | | Simulation time step | Δt | |
| Force over a rotor blade | F_{blade} | | Air density | ρ | |
| Relative velocity | v | | Flow rate | FR | |



INTRODUCTION

In the normal operation of turbomachinery, some unsteady flow phenomena appear due to the non uniformity of the flow inside the rotor, when observed in the fixed reference frame (Mikolajczak, 1977 -Ref. 1- ; Adamczyk, 1996 -Ref. 2-). These phenomena are often related to the unsteady character of the pressure and velocity fields, which produce oscillating forces on the blades, superimposed to the steady force. These oscillating forces are the main mechanism of noise generation, which appear even at a constant rotational speed and at a flow rates where the performance curves are stable.

In axial machines, the interaction is due to relative motion between the static and rotating blade rows. The static blade rows can be placed upstream of the rotor, thus giving a prerotation to the flow, or downstream of the rotor, thus deflecting the flow towards the axial direction. In any case, the result is the interaction between two or more blade rows, moving or fixed ones.

Considering a fixed blade row downstream of the rotor, the blades observe an unsteady flow coming from the rotor due to the rotation of a non uniform flow between the rotor blades. If the fixed blade row (stator) is placed upstream of the rotor, the non uniform flow leaving those blades (usually referred as IGV blades) is observed as an unsteady flow by the rotor blades. The effect of this interaction is the generation of unsteady forces on the rotor blades, which generate vibrations (risk of fatigue failure) and noise, because the non-uniformity and the unsteadiness of the pressure field propagates as an acoustic wave. (Neise, 1992 -Ref. 3- ; Wallis, 1993 -Ref. 4-).

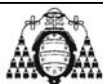
DESCRIPTION OF THE MODEL

The studied axial fan is part of a fumigator for agricultural purposes, and it has a single stage of 13 IGV upstream of a 9-blade rotor. The hub and tip diameter are 380 mm and 820 mm, respectively. The nominal distance between blade rows is 50 mm. The rotation speed is 2400 rpm and the normal mass flow rate of the fan $18 \text{ m}^3/\text{s}$, giving an axial velocity of about 43,4 m/s.

Unsteady numerical simulation.

A 2D numerical model is developed using the commercial code FLUENT, with compatible pre-processor to generate the domain grid. The main features of the grid are the refinement near the blade surfaces and the possibility for relative motion of the rotor.

Using a "sliding-mesh" technique, the unsteady simulation provides a temporal description of the flow variables across the machine. As the relative position between moving and fixed elements is changing every single turn of the rotor, several turns of the machine are needed to obtain a good performance of the single stage (periodic signal). Figure 1 shows a detail of the numerical domain that has been used for the computations, with three different zones: the upper one, that is representing the inlet guide vanes; a central zone, that makes possible to modify the distance between moving and fixed blade rows; and the lower zone, with the rotor blades (which slides along its own perimeter with a velocity that is equal to the tangential velocity in each radial position). An additional periodicity condition is imposed in the tangential direction.



Proceedings of the Hydraulic Machinery and Systems 21st IAHR Symposium
September 9-12, 2002, Lausanne

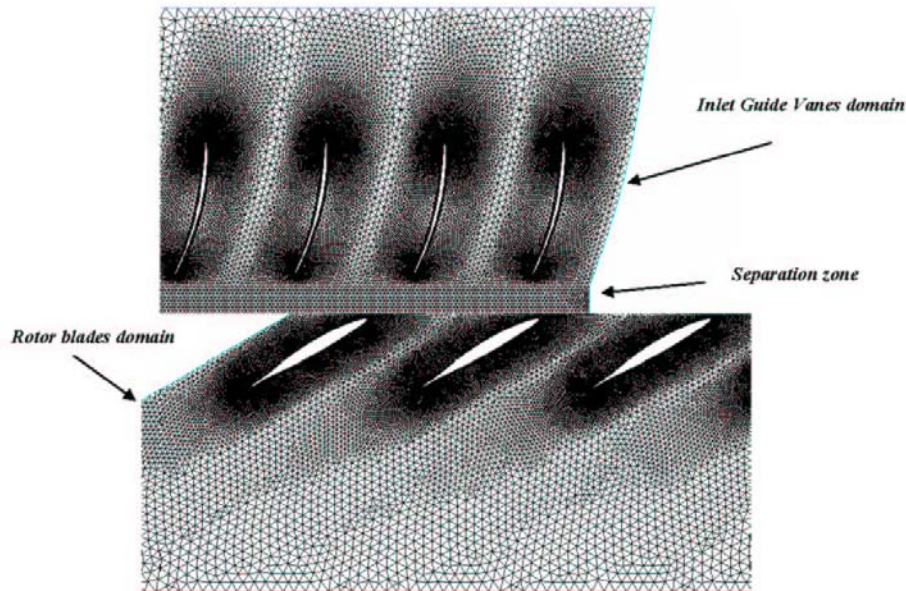


Figure 1. Computational zones

A very important parameter, linked to the unsteady simulation procedure, is the time step value, that is related to the expected resolution by dividing the period of a rotor revolution into a number N of intermediate positions. Increasing N , a better time resolution is achieved, but a greater computational time will be necessary, so a compromise has to be reached. To get an accurate frequency resolution, 270 interval positions per rotor revolution were adopted, so the time step was fixed to $9.25 \cdot 10^{-5}$ s.

A spatial discretization was considered to allow the model accurately describe the flow over the blades suction and pressure sides. In fact, the main features of the adopted grid are the refinement along the blade surfaces and the possibility for relative motion of the rotor.

Starting with a mesh containing structured cells for the blade walls, the distribution of the nodes, the height and number of the cells near the blades were set to obtain a good description of the boundary layer around the airfoils (Figure 2). After some preliminary calculations, the number of cells was 350,000 cells for a radial section on the stage; that is, approximately 15,000 cells for each blade-passage, averaging the total number of cells with the total number of blades in the machine (fixed and rotating ones). With this configuration, a wall y^+ value of 13 was achieved.

The incompressible flow Navier-Stokes equations are solved using a standard $k-\epsilon$ turbulent model. A SIMPLE algorithm is chosen for the pressure and velocity coupling.

Once the model solution is obtained, it is possible to store the flow variables data for each interval, and also the time evolution of the different flow variables in a particular point of interest or integrate them over some surface. With the representation of these variations for

all the domain through the time steps, numerical animations can be released to appreciate in a global way the unsteady performance of the fan.

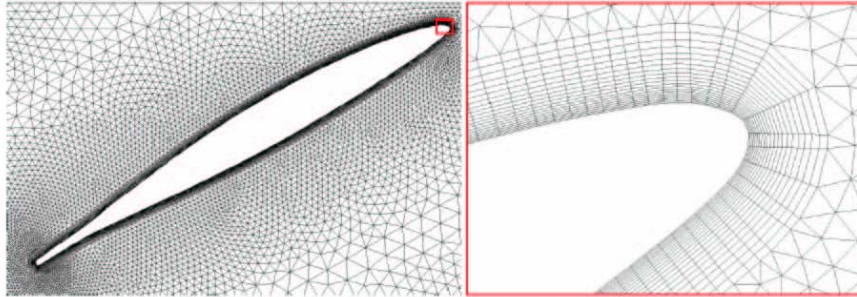


Figure 2. Mesh definition across the airfoils

RESULTS FOR THE UNSTEADY SIMULATION

The developed model was used to analyze the effect of parameters like flow rate, radial position or distance between the blade rows, on the interaction between fixed and rotating blade rows of the fan. As a reference, the mid-section was chosen to characterize the flow variations inside a blade-passage. Pressure variations on the blade surfaces were studied in order to identify the main characteristic frequencies in the stage interaction.

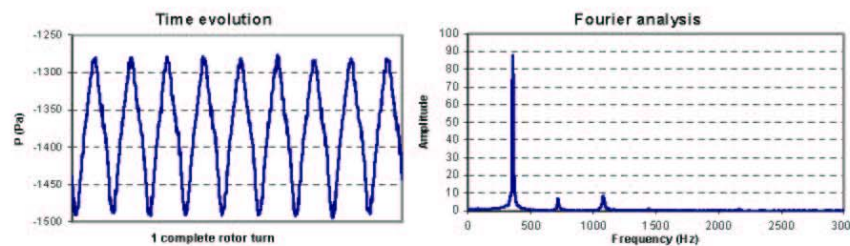


Figure 3. Pressure fluctuations in a mid-passage IGV's point.

Figure 3 shows the time evolution and the derived frequency spectrum of the static pressure of a point located inside an inlet guide vane-passage. As the rotor revolution frequency is 40 Hz, the spectrum of the pressure signal shows the effect of every rotor blade passing in front of the point. As expected, this rotor blades influence appears like a fundamental peak of 360 Hz, that is, the blade passing frequency. Also, harmonic frequencies (two and three times the rotor blade passing frequency) have a considerable contribution, pointing out that the moving rotor provokes important perturbations upstream the own rotor domain zone.

Integrating the pressure variation, it can be obtained the force distribution over the blade surface, which is directly related with the generation of aerodynamic noise in the fan. It is also very significant the analysis of the pressure over one blade of the inlet guide vanes and the pressure oscillations in a rotor blade. Figure 4 shows the spectrum for a rotor blade (left) and for an IGV blade (right). In the first one, there is a basic frequency at 360 Hz, in the same

way as in the blade-passage. For the rotor, the influence of the upstream blade row is more significant, because of the three clear peaks that appear for 520 Hz (40x13), and again for two and three times this fundamental frequency.

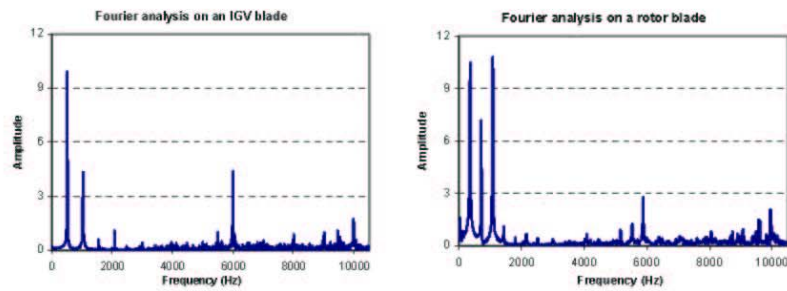


Figure 4. Fourier analysis for a rotor and a stator blade.

INFLUENCE OF THE DISTANCE BETWEEN BLADE ROWS AND THE FLOW RATE

The lesser the distance is, the bigger the rotor-stator interaction is, and a bigger production of acoustic noise is generated. A greater distance between fixed and rotating parts must be considered to reduce the production of noise, but this would affect the accurate flow patterns (secondary flows would appear and a loss of efficiency would be unavoidable). This was considered by simulating 3 different central distances (the nominal one of 50 mm, and two others, one upper and the other, lower) and comparing the amplitudes of the variations (as amplitude peaks in a spectrum analysis). Figure 5 shows the value of the amplitudes for the characteristic frequency of the blade force signal over the rotor blades. Note the tendencies that appear when the distance is changed.

In what refers to the flow rate changes, the results show that for every section of the fan, when the flow rate increases, the variation of the amplitude decreases. In this case, the flow rate changes are not providing a significant change in the forces over the rotor blades. This fact is masked by the global performance curve of the fan, because an increase of the flow rate for the fan is traduced by the machine with a decrease in the total pressure. Thus, and obviously depending of the reaction of the machine -here is expected $X > 1$ -, the pressure increase of every row of the stage will have an important contribution against the total behavior of the fan or not. Here the contribution of the rotor is not so significant because the total tendency of the performance curve masks any local effect of perturbation in the rotor-stator interaction. Figure 5 describes below this changes of the fluctuations for the pressure on a rotor central blade and its decreasing tendency as flow rate increases.

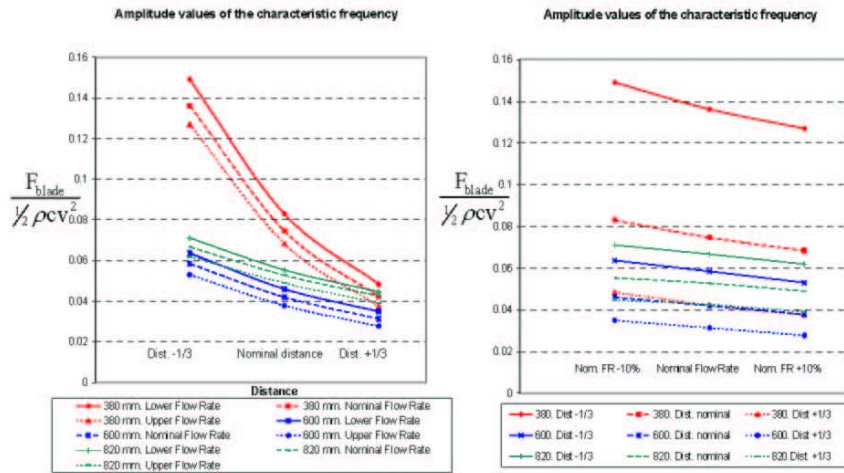


Figure 5. Rotor-stator interaction dependence of stage distance and flow rate

It can be observed that an increase of the flow rate produces a slight decrease of the forces amplitude. For the hub section, the interactions are bigger than for any other section in the machine, because of the maximum solidity presented at that section.

Due to the good definition of the mesh available around the blades, the transport and dissipation of the wake downstream of the rotor, accompanied by diffusion and mixing of the flow, is well-captured by the simulation. Figure 6 shows the wake shed downstream the blades in the dynamic pressure contours.

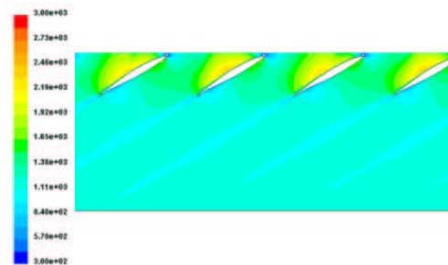


Figure 6. Wake shed downstream the rotor for the dynamic pressure field.

In this case, the flow pattern shows the contribution of the rotor blades, causing the main wake shed generation, but also, there is a secondary contribution because of the downstream-induced pressure fluctuations generated by the IGV. In the relative reference frame, the axial velocity fluctuations due to the effect of the upstream inlet guide vanes and eliminating the effect of the rotor blades in the flow are plotted. In Figure 7, some representations of the relative axial velocity just downstream the trailing edge of the rotor blades are shown. Each fluctuation is due to the presence of the wake of the rotor blades, but the changes in the

amplitude for each peak is generated by the passing of each IGV on the rotor relative reference frame.

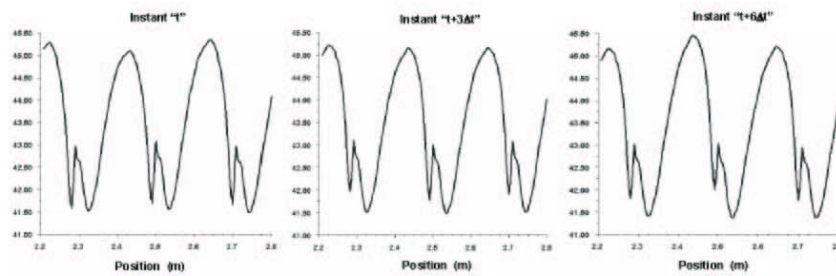


Figure 7. IGV's unsteady interaction with rotor wake at relative reference frame.

CONCLUSIONS

Using an unsteady numerical simulation, pressure and flow rate fluctuations have been analyzed at the fan outlet, obtaining its frequency spectrum. From that frequency, the analysis of the variations of the forces in a rotor blade or over the whole rotor has allowed to study the IGV and rotor blades interaction, when the relative distance between them changes. Different flow rates have been used to determine the effect of that parameter on the global interaction inside the stage.

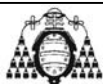
Changing the reference point of view, the isolated interaction of the IGV over the rotor wake can be observed. Also a methodology can be developed using this point of view to observe the unsteady phenomena of rotor-stator interaction downstream the rotor wake trailing edge.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the Research Projects "Modelado del comportamiento del flujo no estacionario subsónico en la interacción entre haces fijos y móviles de turbomáquinas axiales", Ref. DPI2000-0702-C02-01, CICYT, and "Caracterización y reducción de las fuentes aerodinámicas de ruido y vibración en ventiladores centrifugos", Ref. DPI2001-2598, CICYT, Spain.

REFERENCES

- Ref. 1 Mikolajczak A.A., 1977, "The practical importance of unsteady flow, in Unsteady Phenomena in Turbomachinery", AGARD CP-144, NATO, 1977
- Ref. 2 Adamczyk J.J., 1996, "Wake mixing in axial flow compressors", ASME Paper 96-GT-029
- Ref. 3 Neise W., 1992, "Review of fan noise generation mechanism and control methods", Procc. Fan Noise Symposium, Senlis, pp. 45-56
- Ref. 4 Wallis R.A., 1993, "Axial flow fan and ducts", Krieger Publishing Company



Proceedings of FEDSM'03:
The 2003 Joint ASME-JSME Fluids Engineering Summer Conference
July 6-10, 2003, Honolulu

FEDSM2003-45394

**UNSTEADY FLOW ANALYSIS OF THE STATOR-ROTOR INTERACTION IN AN
AXIAL FLOW FAN**

Fernández Oro, J.

Argüelles Díaz, K.

Santolaria Morros, C.

Ballesteros Tajadura, R.

Universidad de Oviedo, Fluid Dynamics Group.
Campus de Viesques, 33271 Gijón (Asturias), Spain.
jesusfo@correo.uniovi.es

ABSTRACT

In the usual operation of turbomachinery, some unsteady flow phenomena appear due to the non uniformity of the flow inside the rotor, when observed in the fixed reference frame. These phenomena are often related to the unsteady character of the pressure and velocity fields, which produce oscillating forces on the blades, superimposed to the steady force. These oscillating forces are the main mechanism of noise generation, which appear even at a constant rotational speed and at flow rates where the performance curves are stable.

In axial turbomachines, the interaction is due to relative motion between the static and rotating blade rows. Considering the case of a fixed blade row (stator) placed upstream of the rotor, the non uniform flow leaving those blades (usually referred as IGV blades) is observed as an unsteady flow by the rotor blades. The effect of this interaction is the generation of unsteady forces on the rotor blades, which generate vibrations (risk of fatigue failure) and noise, and non-uniformity and unsteadiness of the pressure field, that propagates as an acoustic wave.

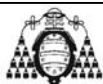
The first part of this work is a brief description of a URANS numerical modeling of the unsteady flow characteristics of a one-stage subsonic axial flow fan with a reaction degree greater than 1. The focus is placed on the stator-rotor interaction performance. Both 2D and 3D models of the fan, with 13 IGV's and 9 rotor blades, were developed and an unsteady simulation was achieved to carry out the main characteristics of the flow inside the turbomachine. Once the actuating forces are determined, the influence of the radial position, the operating conditions and the distance of the fixed and the rotating blade rows is also analyzed.

The final part of the paper is focused over the identification, through the definition of deterministic stresses –related to the characteristic blade-passage frequency of every row– that provoke the interaction between fixed and rotating blade rows and its evolution through time. The object is to obtain, in a stress tensor form, the contribution of the velocity field, that is changing because of the successive relative positions between blade rows, to the pressure distribution over the blade surfaces in the interior of the stage. Finally, a map of deterministic stresses and even, deterministic kinetic energy, can be obtained to show the influence of the blade rows in the interaction, unsteady phenomena.

INTRODUCTION

An important goal for CFD researchers is to obtain an accurate description of the unsteady flow generated inside a turbomachine. Unfortunately, the task involved for this purpose is quite difficult. Due to the relative motion between the static and rotating blade rows in axial turbomachines, the flow is non uniform and the pressure and velocity fields appear unsteady in a fixed reference frame [1]. For multistage turbomachines, the length and time scales associated vary in a large range of values, from shaft revolution to a fraction of blade-passage frequency, needing numerical simulations that consider every flow passage [2]. Obviously, a 3D unsteady simulation with a great number of blade-passages over a Reynolds average form of the Navier Stokes equations is not feasible nowadays.

Traditionally, pressure signals over the different elements in a turbomachinery stage have been studied in order to know how appears the interaction between fixed and moving blade rows and which is the magnitude of this phenomena. In the same way, this methodology is useful to determine which



parameters (axial gap, tip clearance, flow rate variations) have more influence in the propagation and generation of this unsteady phenomena. This allows to know the best way to reduce those phenomena (that derive in acoustic noise and fatigue failure) adjusting that parameters. Nevertheless, this is giving no information about the flow pattern, about the generation mechanism of the flow unsteadiness or about the contributions of every blade row over the establishment of the total stage interaction. To go a step ahead, it's necessary to use a technique that could be able to decouple the effect of every blade row over the flow pattern, identifying the contribution of the different elements of the stage in the turbomachine.

As the aerodynamic analysis of multistage turbomachinery flows is the key to obtain a good description of the performance of new turbine or compressor designs, engineers had to develop models to describe the flow within a multistage with more or less accuracy. From throughflow or axisimetric models to Direct Navier Stokes simulation, there is a wide range of models used for turbomachinery design [3,4]. As models are more complex, the closure requirements decrease. One step behind the set of equations of the Reynolds average of the Navier Stokes equations, Adamczyk [5] proposed an "average-passage" model of the Navier Stokes equations expressed in cylindrical coordinates with an inertial frame of reference. This passage-averaging technique solves the steady, three-dimensional RANS equations separately in each blade row. The effect of neighbouring rows in the flow turning is assumed by the inclusion of body forces placed where the other "ghost" rows of the multistage should be. Taking to account the deterministic part of the flow field (Adamczyk called like this, the part of the flow that is not purely turbulent), several averages are constructed in order to separate the effect of other blade rows over the averaged one. As a consequence, a mixing-stress tensor is generated and additional "deterministic stresses" need to be modeled. Adamczyk proposed as well two different ways to close the problem. Some authors have worked for developing models to guarantee a passage-average solution of the flow in a multistage turbomachine. Rhié et al. and Bardoux et al. have used multigrid domains [6] to calculate a superimposed solution of the flow. Busby et al. [7] and Van de Wall [8] have studied the physical phenomena associated with deterministic stresses transport. Meneveau et al. [9], Sinha et al. [10, 11] and Leboeuf [12] have developed models to compare, with PIV techniques, experimental and numerical results of deterministic stresses fields.

In the present work, a procedure to identify the deterministic stresses of the average-passage model of a single stage axial flow fan from the URANS solution of the flow is outlined. The first part is a brief description of the geometry and the modeling used for the URANS solution of the flow. In a second part, a procedure for the identification of the deterministic stresses field, based over the URANS solution is carried out. The interaction between rotor and stator blade rows will be discussed in terms of deterministic correlations (purely spatial, mixed spatial-temporal and purely temporal

correlations) in order to establish a methodology oriented towards the prediction and analysis of interaction between blade rows in function of stage parameters.

NOMENCLATURE

- F_{blade} = force over a rotor blade.
- c = rotor chord.
- u_x = characteristic axial velocity.
- u = real velocity field in stator reference frame.
- u' = stochastic, non-deterministic component of velocity field.
- u'' = velocity gust encountered by the stator.
- $u^{(AXT)}$ = axisymmetric average of velocity field.
- \tilde{u} = deterministic component of velocity field.
- \tilde{u}^* = unsteady part of velocity deterministic component.
- \tilde{u}^* = steady deterministic component of velocity field.
- $\tilde{u}^{(R)}$ = velocity time-averaged value with respect to the rotor frame of reference.
- T_R = rotor's blade-passage period.
- λ_R = rotor's blockage factor.
- λ_S = stator's blockage factor.
- $\tau_{ij}^{S,det}$ = spatial deterministic correlation.
- $\tau_{ij}^{ST,det}$ = mixed spatial-temporal deterministic correlation.
- $\tau_{ij}^{T,det}$ = temporal deterministic correlation.
- Ω = rotational speed of the rotor.
- T = rotor period.
- H_G = gate function for the evolution of blade-passages.
- N = number of rotor blades.
- $k^{S,det}$ = deterministic kinetic energy.

URANS MODEL DESCRIPTION

The axial flow fan of this work is part of an agriculture spreading machine, and it's composed with a single stage of 13 IGV upstream a 9 blade rotor. The hub and tip diameters are 380 and 820 mm respectively. The nominal distance between blade rows is 50 mm from IGV's trailing edge to blade's leading edge. The rotation speed is 2400 rpm, with a mass flow rate of 18 m³/s.

URANS numeric simulation.

The URANS model was developed using a commercial code, FLUENT, and a compatible preprocessor to generate the domain grid.

A 3-D unsteady model (fig.1) was developed to describe the general tridimensional characteristics of the flow. Reaching up to 25,000 cells per blade-passage, an unsteady simulation of the axial fan was executed over a 4 PC cluster, 500 Mhz. The



main goal was to carry out the performance curve of the machine. The discretization could not allow a tip clearance study, so end walls of the machine were implemented as stream lines for the flow.

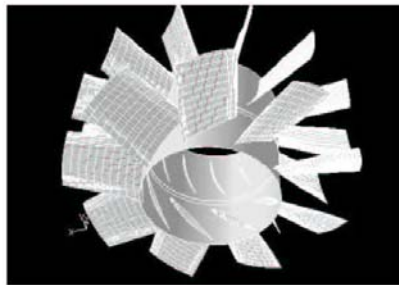


Fig. 1. 3-D Stage model.

Figure 2 shows that, practically, there are no secondary flows, and the radial component of the flow for a meridional plane of the machine is only a 3-5% of the total velocity field magnitude. We conclude that for a first approach, due to the main flow structure, 2D sections can be sufficient for the deterministic analysis of the flow.

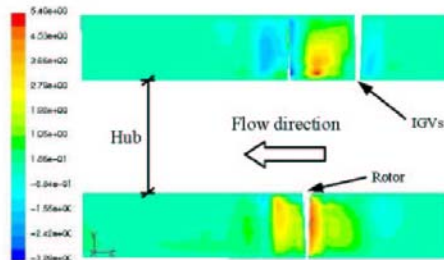


Fig. 2. Percentage of radial flow respect to axial flow in an axisymmetric plane of the fan.

Considering the simulation of hub, tip and mid-span sections of the machine, we feature a 2D grid with refinement near the blade surfaces and the possibility for relative motion of the rotor. Using a "sliding-mesh" technique, the unsteady simulation provides a temporal description of the flow variables across the machine. Figure 3 shows the complete domain that has been used for the computations with three different zones: the upper one, that is representing the inlet guide vanes; a central zone that makes possible to modify the distance between

moving and fixed rows; and the lower zone with the rotor blades that slides along its own perimeter with a velocity that is equal to the tangential velocity in each radial position. Also, a periodicity condition is imposed in the tangential direction to close the problem.

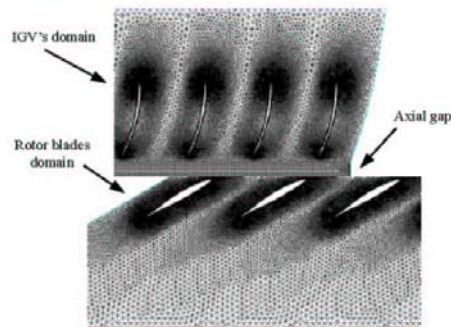


Fig.3. Computational zones.

In order to obtain a good resolution for the velocity fields, and to get an accurate frequency resolution, 585 (13x9x5) interval positions per rotor revolution were adopted, so the time step was fixed over $4,2735 \cdot 10^{-5}$ s. It is possible to store the flow variables for each interval, using them in a forward postprocessing or averaging process. The incompressible flow Navier-Stokes equations are solved using a standard k-ε turbulent model. Also, standard logarithmic laws have been used for the blades surfaces in order to close the URANS requirements for boundary conditions. A SIMPLE algorithm is chosen for the pressure and velocity coupling, and second order, upwind discretizations have been used for convection terms and central difference schemes for diffusion terms. Finally, a first order implicit discretization was used for the time dependent term scheme.

The URANS modeling, used as the start point for the forward passing-averaged analysis, has been previously tested for other works. The complete 3D model of the blower, for example, has presented good results in comparison to the performance curves of the real machine (taking into account that tip clearance has not been considered). In the other hand, the 2D model has been implemented with O-type grids around the blades, with discretization reaching up to 300,000 cells (Fig.3) and even 500,000 cells, predicting a good performance for the bidimensional sections of the single stage of the fan, as expected.

Unsteady simulation results.

The methodology that has been developed in this first part of the work was used to analyze the effect of parameters like mass flow rate or axial gap between blade rows on the



interaction between fixed and rotating blade rows. As a reference, the mid-section was taken to characterize the flow variations inside a blade-passage and also pressure variations on the blade surfaces were studied in order to identify the main proper frequencies in the stage interaction. Integrating the instantaneous numeric pressure field over the blades (fig. 4), the actuating force in the rotor can be obtained at a particular time step. Tracking every value for all the different time steps per rotor revolution, a temporal evolution of the blade forces is carried out. A final FFT analysis of the force can deduce the characteristic frequencies of the rotor-stator interaction.

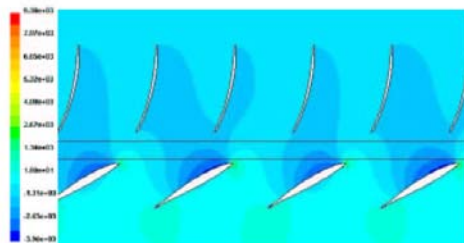


Fig. 4. Instantaneous unsteady pressure field.

Figure 5 shows the frequential analysis of the force over a rotor's blade for the mid-span section, comparing the effects of axial gap changes for the stage and flow rate variations. As the rotor revolution frequency is 40 Hz, the spectrum of the pressure signal shows the effect of every IGV blade passing in front of the blade, for the moving reference frame of the rotor. As expected, this stator influence appears like a fundamental peak of 520 Hz, that is, the number of IGV blades times the rotation speed of the machine. Also, harmonic frequencies (two and three times the stator blade-passage frequency) have a considerable contribution, carrying out that the fixed blade row provokes important perturbations downstream the own stator domain zone.

At a first glance, the lesser the distance is, the rotor-stator interaction is bigger, and upper force values are generated. This was considered by simulating 3 different central distances (the nominal one of 50 mm, and two others, one upper and the other lower) and comparing the amplitudes of the variations.

For mass flow rates changes, the results are carrying out that for every section of the fan, the bigger the flow rate is, the variation of the amplitude is lesser. In this case, the flow rate changes are not providing a significant change in the forces over the rotor blades. It can be concluded that the effect is hidden by the global performance curve of the fan.

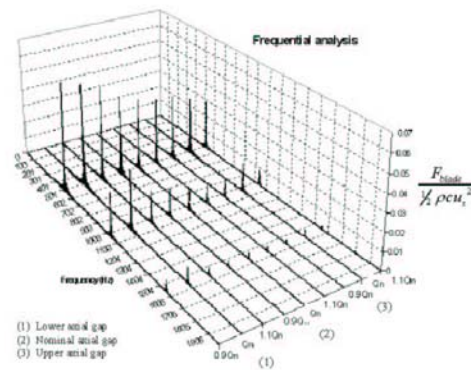


Fig. 5. Fourier analysis of a rotor's blade forces for different axial gaps and mass flow rates at mid-span section.

Figure 6 is representing the flow pattern viewed for the rotor reference frame. The contribution of the own rotor blades is causing the main wake shed generation, but also, there is a secondary contribution because of the downstream-induced pressure fluctuations generated by the stator. Also, upstream the stator is a fluctuation of the mean axial velocity caused by the moving blade row. This shows that the interaction effects are transported by the flow both upstream and downstream the stage. The challenge now is to isolate the contribution of every single blade row in the final flow pattern.

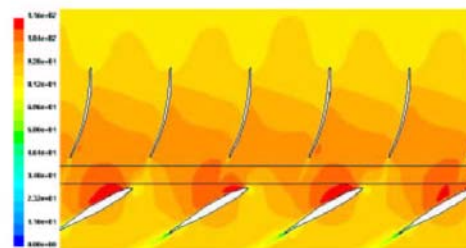


Fig. 6. Instantaneous velocity field for the rotor reference frame.



DETERMINISTIC STRESSES

The passage-average set of equations proposed by Adamczyk introduces a mixing-stress tensor composed by three different terms: the Reynolds stress tensor (because of an ensemble average), the unsteady deterministic tensor (because of a time-average), and an aperiodic deterministic tensor (because of a passage-to-passage average). For a single-stage configuration, the time-averaged flow field associated with each blade row will be spatially periodic over the pitch of that blade row. Hence, the aperiodic part of the tensor can be eliminated of the flow analysis:

$$R_{ij} = \overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j} + \overline{\rho u_i' u_j'}$$

where the subscripts ij take on the values of $r, \theta,$ and z for cylindrical coordinates. The deterministic part of the mixing-stress tensor is composed by a time-average of the crossing-product of the unsteady deterministic part of the velocity field components. The unsteady decomposition of the velocity [7] is shown in figure 7.

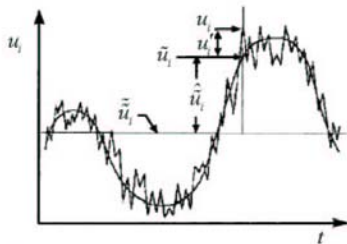


Fig. 7. Unsteady velocity decomposition.

The total velocity field is composed by three terms: a turbulent, non-deterministic variation of the velocity, an unsteady deterministic variation and a steady mean velocity;

$$u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i + u_i'$$

An alternative decomposition of the velocity field can be addressed taking into account an incident velocity gust contribution [7] and a radiated velocity field as follows;

$$u_i = \bar{u}_i^{(z)} + \left[\bar{u}_i^{(R)}(r, \theta - \Omega t, z) - u_i^{(AZT)}(r, z) \right] + \hat{u}_i + u_i'$$

The superscripts $(R), (S)$ are referred to time-averaged value of velocity respect to, either the rotor frame of reference, or the stator frame of reference, through the blade-passing frequency

for each row. The other terms are related with frequencies of higher magnitude than that for the rotor shaft speed (unsteadiness, vortex shedding, turbulent fluctuations). The unsteady deterministic component of the velocity field can be then related between both expressions, obtaining:

$$\hat{u}_i = u_i^* + \hat{u}_i$$

$$\text{where } \hat{u}_i = \left[\bar{u}_i^{(S)}(r, \theta - \Omega t, z) - u_i^{(AZT)}(r, z) \right] + \hat{u}_i$$

The deterministic part of the mixing stress tensor is then composed with four terms, called as “deterministic correlations”, with a purely spatial, a mixed spatial-temporal and a purely temporal characteristic for each component.

$$R_{ij}^{det} = \overline{\rho u_i^* u_j^*} + \overline{\rho u_i^* \hat{u}_j} + \overline{\rho \hat{u}_i u_j^*} + \overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j}$$

The spatial correlation is independent of tangential position, since u_i^* is spatially periodic over the pitch of the rotor blade row. The remaining terms are associated with the rotor-stator interaction flow field.

The unsteady RANS solution of the flow field provides the real velocity field inside the stage. Applying successive averages over the total velocity field, the unsteady deterministic variations and the steady mean velocity can be obtained. The turbulent, non-deterministic component can be filtered applying an ensemble average, through several rotor turns of the URANS simulation.

For the stator reference frame, it's necessary a blade-passing average over rotor blades pitch. Considering the effect of blade solidity, a blockage factor needs to be defined over the single stage blade rows [5]. It has no dependence with θ coordinate, so it is just function of axial coordinate and radial one, if blades are radially curved.

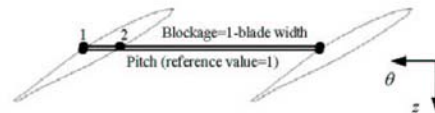
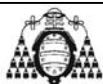


Fig. 8. Blockage factor definition, λ .

This blockage can be related to a gate function whose value is one at any point which is in the flow field at a given instant in time. It will be zero if the point lies within the row blade.

Nevertheless, it is more useful if we consider the geometric sense of this function as viewed in fig. 8.

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T H_G(r, \theta, z, t) \cdot dt = 1 + \frac{(\theta_1 - \theta_2)N}{2\pi}$$



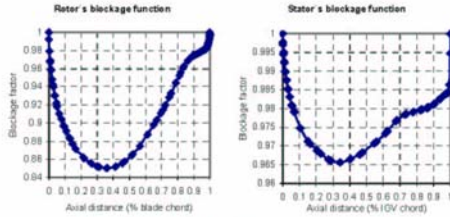


Fig. 9. Stage blockage functions at mid-span section.

Combining algebraic expressions and different time averages for time scales associated with rotor frequency and blade-passing frequency for both stator and rotor reference frames, the deterministic correlations for the fixed reference frame can be stated as follows:

$$\tau_{ij}^{S,det} = \rho \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} [u_i^{(AXI)} - \tilde{u}_i^{(R)}] \cdot [u_j^{(AXI)} - \tilde{u}_j^{(R)}] dt$$

- Purely spatial deterministic correlation -

$$\tau_{ij}^{ST,det} = \rho \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} [u_i^{(AXI)} - \tilde{u}_i^{(R)}] \cdot \left[\tilde{u}_j - \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} H_G \cdot \tilde{u}_j dt + [u_j^{(AXI)} - \tilde{u}_j^{(R)}] \right] dt$$

- Mixed spatial-temporal deterministic correlation -

$$\tau_{ij}^{T,det} = \rho \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} \tilde{u}_i - \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} H_G \cdot \tilde{u}_i dt + [u_i^{(AXI)} - \tilde{u}_i^{(R)}] \cdot \left[\tilde{u}_j - \frac{1}{\lambda_R T_R} \int_0^{T_R} H_G \cdot \tilde{u}_j dt + [u_j^{(AXI)} - \tilde{u}_j^{(R)}] \right] dt$$

- Purely temporal deterministic correlation -

ANALYSIS OF THE SPATIAL DETERMINISTIC CORRELATION

Adamczyk et al. neglect the three parts of the deterministic stress tensor related to temporal characteristic of the correlations, considering that purely unsteady fluctuations are negligible compared to purely spatial ones [3]. We have focused the analysis over the complete structure of spatial deterministic correlation. In general, these calculations should be performed in 3-D but in the present work, 2-D calculations are sufficient as discussed before. Further efforts will be driven for a general 3-D description of the complete deterministic tensor.

We also have considered a model without axial gap for the deterministic analysis. Fixing the distance between blade rows as the nominal value, we have simplified the domain in order to clearly define the rotor and stator reference frame zones. (In fact, the axial gap zone previously defined, as viewed in fig.3, is part of the fixed reference frame).

The axisymmetric flow field is shown in figure 10. Because the sliding characteristic of the rotor domain, we have to eliminate each Δx -product of time step and rotor tangential velocity- in the averaging process in order to obtain a unique rotor field. Both rotor and stator domains are periodic from blade-passage to blade-passage. The major contribution of this aperiodicity is produced in the axial velocity field.

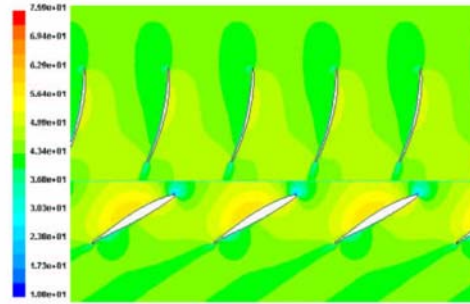


Fig. 10. Axisymmetric flow field.

The construction of the gust encountered by the stator is made over a time-average of velocity field respect to the rotor reference frame. Subtracting the axisymmetric part of this time-averaged flow field, we obtain an evolution of the gust through time. Figure 11 shows the maximum interaction instant of the total gust evolution. The large values are always situated at the interface, corresponding every peak (red values) to the trailing edges of the stator IGV's. Anyway, there is a clear structure of node-antinode for the θ component of the gust velocity. This structure is clearly linked to the rotor blades leading edges. In the same way, the axial component presents maximum values also for the rotor leading edges. Nevertheless, in the total field, the effect of the rotor blades appears as a crossing-stagnation of the gust velocity over the inlet guide vanes.

Because of the filtering process respect to the rotor reference frame, the rotor domain has been cleaned of flow unsteadiness.



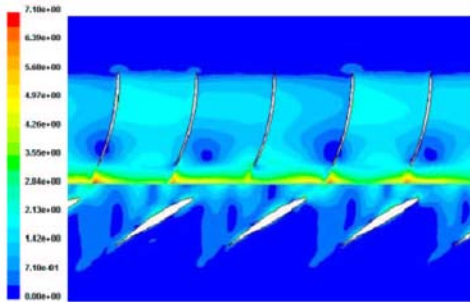


Fig. 11. Gust encountered by the stator.

Now, the spatial deterministic correlations will be analyzed. A common feature is that maximum values of this fields are reached in the axial gap, clearly relating the deterministic flow field with the interaction phenomena placed between fixed and moving rows.

Spatial deterministic stresses.

Figure 12 shows that the $\theta-\theta$ spatial correlation is almost uniform in the circumferential direction. This is a behaviour that the other stresses of the spatial correlations will present. The maximum values are placed in the interface zone of the domain, reaching up to $23 \text{ m}^2/\text{s}^2$, approximately, one order of magnitude behind the turbulence kinetic energy for blade surfaces, according to previous studies that have shown that deterministic stresses can be similar or with higher magnitude than the Reynolds stresses.

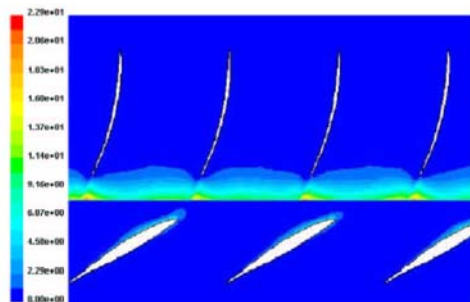


Fig. 12. $\theta-\theta$ spatial deterministic stress.

The same order of magnitude, with maximum values of $27 \text{ m}^2/\text{s}^2$, the $z-z$ spatial stress in figure 13 plays a definitive role over the interaction between the rows. The blockage factor of the rotor blades comes from gust velocity field discussed in

figure 11. Notice the effect over the suction side of the stator blades.

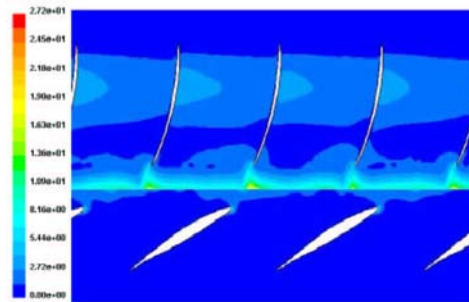


Fig. 13. $z-z$ spatial deterministic stress.

The crossed $\theta-z$ stress shows negative values all over the field (Fig. 14). At the trailing edges of stator blades, the values are positive at the suction side, while they become negative for the pressure side. Obviously, this interaction increases and decreases according to the relative motion between rows. When it gets redder, the negative values decrease dramatically.

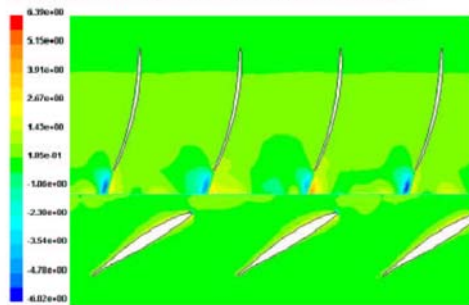


Fig. 14. $\theta-z$ spatial deterministic stress.

Taking the turbulence kinetic energy definition, we can define a deterministic kinetic energy through the simple algebraic expression that follows:

$$k^{S,det} = \frac{1}{2} (r_{\theta\theta}^S + r_{zz}^S)$$

Sinha et al. [11] show for PIV measurements that deterministic stresses are larger in regions close to the interface between blade rows, for a centrifugal 5-blade rotor pump with a downstream diffuser vane of 9 blades. Particularly, at leading edge and convex side of the vanes, the deterministic kinetic energy is higher for the diffuser frame. Figure 15 shows a good agreement with Sinha and Katz observations. In terms of kinetic energy, the maximum values for the deterministic flow field are associated to the trailing edge to appear at the vanes. In this



case, the vane edge close to the interface is the trailing one. On the other hand, the turbulence kinetic energy is maximum over the rotor surface, decaying to valued of $50 \text{ m}^2/\text{s}^2$ for the IGV's.

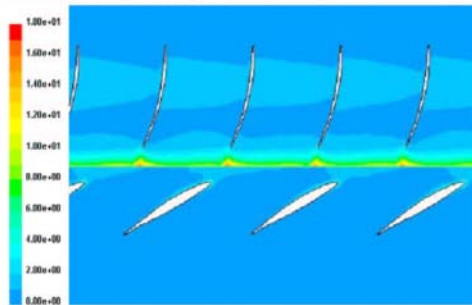


Fig. 15. Deterministic kinetic energy.

SUMMARY AND CONCLUSIONS

A procedure to identify the deterministic stresses of the average-passagge model of a single stage axial flow fan from the unsteady RANS solution of the flow has been outlined. In the present work, deterministic stresses have been presented as a useful tool to observe and study the interaction phenomena related to multistage turbomachine performance.

The results have carried out that the order of magnitude of these stresses are the same than the Reynolds ones. Considering the deterministic field for the stator reference frame, the unsteadiness in the interface zone of the single stage machine was discussed and quantitatively represented. Maximum values for all components of the spatial deterministic correlation are placed in trailing edges of blade rows at the interface; showing that the intensity of the stresses has an important dependence of blade-passing frequency. This effect is considerable for the pure axial component, meanwhile for the circumferential component, the stress map is almost periodic from blade-passage to blade-passage. Negative values of deterministic stresses appear for the crossed component, in the IGV's trailing edges and in the rotor blades leading edges. They appear beside positive values generating a bipole structure of the deterministic field. Finally, the deterministic kinetic energy field has outlined that its pattern and the turbulent kinetic energy one, have different global characteristics.

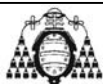
Also, for the rotor frame of reference, the deterministic stresses can be identified to show the unsteadiness associated to blade rows interaction over the rotor blade surfaces. Future work will be focused on the determination of the other deterministic correlations and the analysis of the complete 3-D model. The relationship with global performance behaviour of the fan will be analyzed for different flow rate cases.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Research Project "Modelling of the unsteady subsonic flow behaviour in the interaction between fixed and rotating blade rows in axial turbomachines", ref. DPI2000-0702-C02-01, CICYT.

REFERENCES

- [1] Mikolajczak A.A., "The Practical Importance of Unsteady Flow, in Unsteady Phenomena in Turbomachinery". AGARD paper CP-144, NATO, 1977.
- [2] Adameczyk J.J., "Modeling the Effect of Unsteady Flows on the Time Average Flow Field of a Blade Row Embedded in an Axial Flow Multistage Turbomachine". VKI, Lecture Series 1996-95, March 11-15, 1996.
- [3] Adameczyk J.J., Mulac R.A., Celestina M.L. "A Model for Closing the Inviscid Form of the Average-Passage Equation System". ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pag. 180, 1986.
- [4] Adameczyk J.J., "Aerodynamic Analysis of Multistage Turbomachinery Flows in Support of Aerodynamic Design". ASME Journal of Turbomachinery, vol. 122, pag. 189, 2000.
- [5] Adameczyk J.J. "Model Equation for Simulating Flows in Multistage Turbomachine". ASME paper 85-GT-226, 1985.
- [6] Celestina M.L., Adameczyk J.J., Rubin S.G., "A Solution Strategy Based on Segmented Domain Decomposition Multigrid for Turbomachinery Flows". ASME Journal of Turbomachinery, vol. 124, pag. 341, 2002.
- [7] Busby J., Sondak D., Staubach B., Davis R., "Deterministic Stress Modeling of Hot Gas Segregation in a Turbine". ASME Journal of Turbomachinery, vol. 122, pag. 62, 2000.
- [8] Van de Wall A.G., Kadambi J.R., Adameczyk J.J., "A Transport Model for the Deterministic Stresses Associated With Turbomachinery Blade Row Interactions". ASME Journal of Turbomachinery, vol. 122, pag. 593, 2000.
- [9] Meneveau C., Katz J., "A Deterministic Stress Model for Rotor-Stator Interactions in Simulations of Average-Passage Flow". ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 124, pag. 550, 2002.
- [10] Sinha M., Katz J., "Quantitative Visualization of the Flow in a Centrifugal Pump With Diffuser Vanes -I: On Flow Structures and Turbulence". ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 122, pag. 97, 2000.
- [11] Sinha M., Katz J., "Quantitative Visualization of the Flow in a Centrifugal Pump With Diffuser Vanes -II: Addressing Passage-Averaged and Large-Eddy Simulation Modeling Issues in Turbomachinery Flows". ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 122, pag. 108, 2000.
- [12] Leboeuf F., "Unsteady Flow Analysis in Transonic Turbine and Compressor Stages". VKI, Lecture Series 2002-01, Nov, 5-9, 2001



NUMERICAL STUDY OF THE DISCRETE FREQUENCY NOISE GENERATION IN AN AXIAL FLOW FAN

K.M. Argüelles Díaz – J.M. Fernández Oro – C. Santolaria – P. Fernández Coto

Fluid Dynamics Group, University of Oviedo.
Campus de Viesques, 33271 Gijón (Asturias), Spain.
arguelleskatia@uniovi.es

ABSTRACT

Aeroacoustics was firstly established in order to describe the noise produced by aircrafts. The optimization of propulsion systems in airplane engines lead to an important reduction of jet noise but other acoustic effects, like fan noise, were still an issue to deal with. The knowledge of the sources and the behaviour of noise will allow the development of procedures or actions to reduce sound levels. One possibility is the establishment of a methodology based on numerical simulations to characterize the aerodynamic noise.

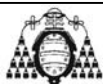
Lighthill's analogy was generalized later by Ffowcs Williams and Hawkings to be applied to turbomachines. Following the analogy, this paper presents a numerical methodology focused on the study of the generation and propagation of the discrete frequency noise in the far field in an axial flow fan. A hybrid approximation was employed to separate the aerodynamic and acoustic problem. Also, experimental results are carried out to validate the numerical methodology.

NOMENCLATURE

| | | | |
|----------|--------------------------------|---------------|-----------------------------------|
| B | number of blades | R_0 | blade radius (m) |
| c_0 | sound velocity (m/s) | V | number of vanes |
| F(t) | lift force (N) | w | blade loading harmonics |
| F_{wV} | blade loading harmonics (N) | x | Bessel argument |
| $J_n(x)$ | Bessel function | γ | Pitch (rad) |
| m | BPF harmonics | θ | observer's angular position (rad) |
| M | source Mach number | ϕ | observer's angular position (rad) |
| n | Bessel order | ϕ_0 | source's angular position (rad) |
| p' | sound pressure (Pa) | Ω | rotational frequency (rad/s) |
| R | observer's radial position (m) | Ω_{wV} | equivalent rotation speed (rad/s) |

INTRODUCTION

Computational Aero-Acoustics (CAA) is a scientific discipline for the study of aerodynamically generated noise. The generation of aerodynamic noise may be characterized numerically by solving the compressible, unsteady Navier-Stokes set of equations. This method is known as the **direct approach** in which numerical results are obtained just from basic physical principles without needing experimental results or additional hypotheses. In this way both broadband and tonal noise may be resolved as well as mean flow patterns and unsteady pressure fields, all at once. This means a complete description of no linearity and all complex features associated with three-dimensional geometries. Recently, different works have studied CAA applications to particular cases. For instance, in the Second Computational Aero-Acoustics Workshop on Benchmark Problems (Tam, 1997) a model problem was related to turbomachinery noise, using a bidimensional gust response model. Four different solutions were discussed, with also significance differences between them. Basically, these discrepancies are due to poor spatial



discretizations and unsteady boundary conditions instabilities. A wide range of computational time is also typical, going from few minutes, if the solution is obtained in the frequency domain, to several hours, if the resolution strategy is based on the temporal one. The fan noise predictions require three-dimensional considerations, including blade rows from hub to tip (both fixed and moving ones), and accurate wake transport predictions. Therefore, in order to maintain a good precision in the calculations, the direct approach needs extremely high computational capacities which are not available today, so alternate methodologies are needed. Anyway, some CAA algorithms have been considerably enhanced, especially those related to parallel computing and CPU time economization (Tam, 1997, Lockard & Morris). Other algorithms have been also developed to reduce CPU times, achieving quite good performance, like the approximation known as Green's Function Discretization (GFD) (Caruthers, 1995). This strategy, recommended for three-dimensional CAA applications, reduces the number of grid points per acoustic wavelength, adjusting it to the Nyquist criterion.

Taking into account the great disparities between spatial and temporal scales, respectively, associated with both flow and acoustic fields, a reasonable option instead of the direct approach is decoupling the computational issue in two problems: a first one designed to resolve the flow field, and second one which will work on the sound field characterization. This methodology, known as **hybrid approach**, has a perfect example in the aero-acoustics analogy, because of the domain decomposition in other two sub-domains, one for the source zone and the other for the propagation. Aero-acoustic analogy theory transforms the Navier-Stokes equations in an inhomogeneous wave equation with source terms related to the acoustic sources. Consequently, the flow field is obtained in an independent fashion from the acoustic field, using traditional CFD methods in order to characterize acoustic sources. Under the free-field conditions, that is, when a reverse influence of the acoustics on the flow is not possible, then sound propagation onto far field may be evaluated through numerical resolution of an integral formulation.

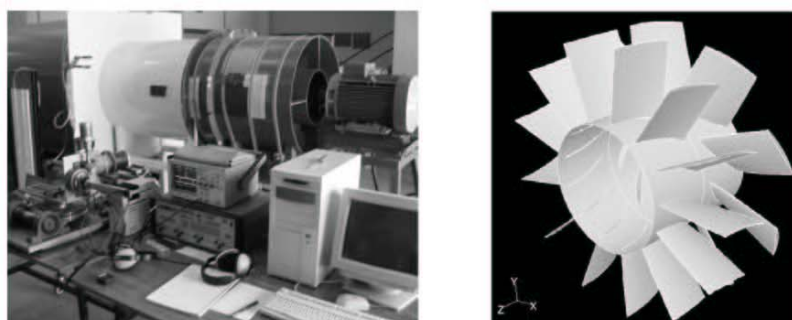


Figure 1. Axial turbomachine facility. Detail of the fan stage.

The main scope of this work is based on the numerical characterization of the noise generation of an axial flow fan, with the help of aero-acoustic analogy. For this purpose, an industrial fan facility, previously developed for farming purposes, is used. The fan is composed of one single stage with an upstream stator of 13 stationary vanes followed by a 9 blade rotor. The design rotational speed is 2400 rpm, the nominal flow rate is about $18 \text{ m}^3/\text{s}$, and tip and hub diameters are, respectively, 820 and 380 mm. Figure 1 shows an image of the experimental facility and a sketch of the fan stage. To obtain the acoustic sources in the numerical procedure, a CFD commercial software (Fluent) has been employed. The numerical characterization of the propagation zone is resolved in the frequency domain, using the integral solution of the Ffowcs Williams and Hawkins

(FFWH) equation. The calculation has been realized in a C++ source, with the acoustic sources, obtained by an unsteady CFD solution, as input data.

Fan tonal noise is generated by the interactions of a rotor, isolated or embedded in a stage, and the flow disturbances. Although three-dimensional configurations are beginning to be taken into account, most of the investigations had been carried out for bidimensional configurations. A typical approach, used to predict interaction tonal noise, is based on a modal analysis of the Tyler and Sofrin theory (Tyler, 1962). This methodology introduces blade wakes as vortical gusts, addressed through empirical correlations obtained from scale models, or even through numerical simulations results. This approach employs a "source" model for the determination of the blades unsteady pressure fields. Generally, the blades are considered as a cascade of bidimensional flat planes. Diverse models and codes have been developed (Ventres, 1982), (Eversman, 1995) and (Meyer, 1996), but all of them need a more accurate aerodynamic input data, improving their grid resolutions for a better description of three-dimensional features of the flow like secondary flows. Also, a reduction in CPU times is desirable.

THEORETICAL FORMULATION

Lighthill aero-acoustic analogy (Lighthill, 1952) is used to study the problem of aerodynamically generated noise, through decoupling the domain of interest in two zones: the source zone and the propagation one. However, there are some restrictions that limit the application range of this theory, so, sometimes, is necessary to enhance the analogy by taking into account collateral effects like compressible fluid mechanics, non-uniform flows, or solid walls in the source zone. The usual version of the Lighthill analogy is the FFWH theory, because of the inclusion of wall effects and all type of motions (Ffowcs Williams and Hawkins, 1969).

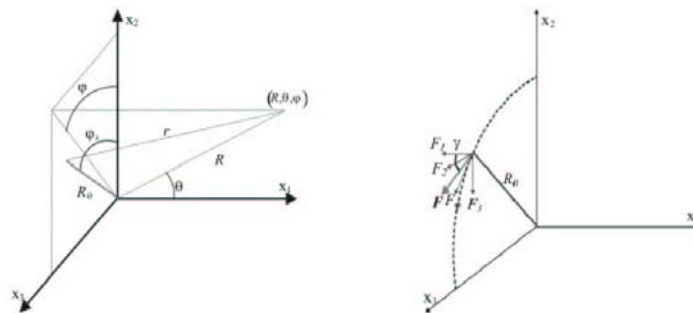


Figure 2. Frame of reference for the radiated noise of a rotating dipole.

The key point of FFWH was based on the definition of an equivalent environment where real bodies are replaced by mathematical surfaces. Also, it is assumed that the inner volume of those surfaces contains quiet surrounding flow (Farassat, 1974). The most usual expression of FFWH equation is obtained when these mathematical control surfaces are matched with the solid surfaces (therefore, the no slip condition establishes that the fluid velocity in contact with the surface is exactly the same as the surface velocity), and also when the next hypotheses are satisfied: the flow Reynolds number is high (inertial terms are predominant over the viscous ones), flow Mach number is low (the flow is practically incompressible) and the flow is isentropic. In this way, the source terms of the FFWH correspond to quadrupolar (volumetric source), monopolar and dipolar (superficial sources) radiation sources, according to its mathematical structure.

The quadrupolar radiation term is not very important – in comparison to the monopole and the dipole – when generated sound sources in motion are traveling at subsonic velocities, so their



effects can be neglected (Brentner, 2000). The monopolar source term is completely defined by surface kinematics and represents what is called as **thickness noise**. In case of low Mach number flows and with thin blades, thickness noise has no relevance and can be obviated. In other hand, when turbomachinery generated noise is studied – i.e. when fluctuating forces come from rotating blades – the dipolar source term is reduced just to the blade loads (lift and drag), and represents the **loading noise**. This kind of noise is precisely the most efficient from an acoustic point of view and is responsible of the noise propagation in the far field (Roger, 1996).

This problem can be dealt with using the FFWH analogy (Ffowcs Williams, 1992). Nevertheless, it is necessary to solve the equation in retarded time when you are using this formulation directly in the temporal domain. Retarded time means that for every observer's time, it is necessary to establish the appropriate emission time of the source and its location. Obviously, this process requires high computational effort. Anyway, when the study of turbomachinery discrete frequency noise in a subsonic rotational regime is attempted, the object is to obtain its acoustic spectrum, so the accurate procedure is to solve the problem in the frequency domain, avoiding the need to resolve the equation in retarded time.

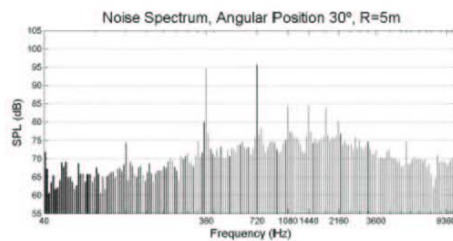


Figure 3. Typical rotor noise spectrum (log scale).

The typical noise spectrum of a rotor (Figure 3) always contains a broadband part and one of discrete frequency, at the **blade passing frequency** (BPF) (number of blades times the rotational frequency) and its harmonics. The Sound Pressure Level (SPL) generated at blade passing frequency, is called **tone**. A portion of the blade at radius R_0 , rotating at constant angular frequency Ω , and under low Mach number conditions, behaves as an acoustic dipole of intensity $\mathbf{F}(t)$, where $\mathbf{F}(t)$ is the blade loading (supposed a low and constant pitch degree γ respect to the rotation axis). It is assumed that $\mathbf{F}(t)$ has only tangential and axial components since this configuration fits typical axial flow turbomachines (Figure 2). Besides, large number of fan designs include an stator of V vanes upstream the rotor with B blades, which leads to a spatial harmonic variation of the incident flow at angular period $2\pi/(V\Omega)$. Under this configuration, the rotor is still the principal noise generating source and the acoustic pressure fluctuations are still produced at blade passing frequency and harmonics, which can be computed in the far field according to (Roger, 1996):

$$p'(\vec{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{imB^2\Omega e^{im2\pi R_0/c_0}}{4\pi c_0 R} e^{i(mB-nV)(\omega - \omega_0 + \gamma_0)} \left[\cos \gamma \cos \theta - \frac{mB - nV}{mB} \frac{c_0}{R_0 \Omega} \sin \gamma \right] J_{mB-nV}(mB M \sin \theta) F_{nV} \quad (1)$$

where M is the Mach number source, and $J_n(x)$ is the Bessel function of type n . The complex coefficients F_{nV} , so called blade loading harmonics, are obtained in the same way as Fourier series coefficients of function $\mathbf{F}(t)$. When the rotor blade can not be considered as compact, the expression (1) is applied to every compact sub-segments that divides the blade.

Expression (1) points out that the periodic blade load working over the rotor blades generates sound at passing blade frequency ($mB\Omega$) and its harmonics. Consequently, the acoustic pressure



fluctuations, noticed by an observer placed in the far field, are composed by an infinitive sum of the characteristic radiation modes of the free-field. The magnitude of every radiation mode is proportional to a blade load harmonic weighted by a Bessel function that is responsible for a modulation in the source frequency. Also, every radiation mode spins at an angular velocity that is given by the expression $\Omega_{wV} = (mB\Omega)/(mB - wV)$. When $wV \neq mB$, the appropriate radiation mode is called **spinning radiation mode**, and does not take part in the propagation of noise to the far field along the fan axis. When $wV = mB$, the radiation mode is called **symmetric mode**, responsible for the radiation along the fan axis. In particular, radiation mode $w = 0$, is associated to the radiated noise by the stationary part of the blade loads over the rotor blades (Gutin noise).

NUMERICAL METHODOLOGY

The acoustic sources of the radiated noise into the far field will be bipolar order sources distributed over the blade surfaces. This assert is due to the fact that just the blade load term is going to be considered in our study, avoiding other terms for the simulation in the frequency domain. Because of the equidistant circumferential distribution of the blades, it is possible to determine the dipolar acoustic sources by focussing on just one blade (this implies that all the blades are identical). The influence of the other blades is included through an interference function of the rotor. This way, the sound pressure spectrum in the far field that fits to the stator-rotor interaction, will be expressed by equation (1) when is applied to every compact sub-segments of every blade division. The source zone has been characterized through an unsteady CFD modelling, using a sliding mesh technique for the rotor. The mesh reaches up to 1.8 million cells, with intensive refinement around the blade surfaces. A grid distribution of [80x60x25] was adopted for every blade channel (13+9 for the complete machine).

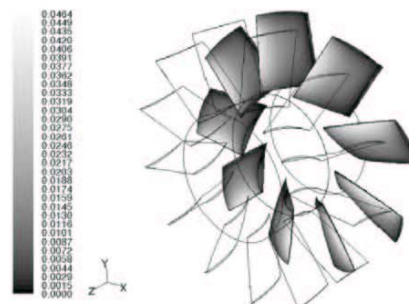


Figure 4. Non dimensional instantaneous blade load over rotor blades.

Load harmonics are calculated with the Fourier transform of the blade load temporal series. Figure 4 shows the blade load distributions over the rotor blades at one instant. If the blade would be compact, then only the total blade load temporal series will be obtained. But if the blade is not compact, then it is necessary to divide it into compact sub-segments and obtain separately the load harmonics related to the temporal series of the blade load over those sub-segments. The total effect of these sub-segments is achieved through a double integration over the blade surfaces in both span and blade chord directions.

In order to simplify the coupling between the Fluent numerical results and the numerical resolution of equation (1), we have matched the compact sub-segments with the spatial discretization of the grid over the blade surfaces. For every cell, Fluent provides a temporal series of the local blade load that are used as input data for the C++ program. Next, the post-processing program computes every blade load harmonic using the FFT algorithm. For ensuring the accurate

response of the FFT algorithm, the numerical simulation in Fluent is fit to such a time step size that 512 intermediate positions per rotor turn are guaranteed.

The geometrical parameters of every discrete cell over the blade surfaces are also provided by the Fluent simulation (the radius and the angular coordinate are supposed to be concentrated in the rotor plane). The observer's position, in which the sound level of the radiated noise by the fan is going to be calculated, is introduced through spherical coordinates that must be kept fixed for every noise calculation. It means that the post-processing of Fluent data must be repeated for all the desired observer's locations.

The directional characteristics of the noise spectrum radiated to the far field are provided by Bessel functions that are included in the equation (1). Consequently, in the post-processing code an algorithm for the Bessel function treatment has been implemented.

In the expression (1) there is an infinite sum of index w over all the blade load harmonics, and another infinite sum of index m over the blade passing frequency harmonics. For a fixed m , it is possible to get the sound pressure of the blade passing frequency $mB\Omega$, allowing to realize an analysis of every harmonic contribution onto the total sound spectrum. Due to the behavior of the Bessel functions and its attenuation characteristics (Figure 5), for a particular blade passing frequency only few blade load harmonics may contribute to the radiated noise to the far field, so the sum over the index w converges quickly. The total sound spectrum will be the sum of the contributions at every blade passing frequency, that is, of the results obtained for every value of index m (m values must be added until sum convergence is achieved). The signal in the temporal domain can be restored using the inverse Fourier transform of the noise spectrum.

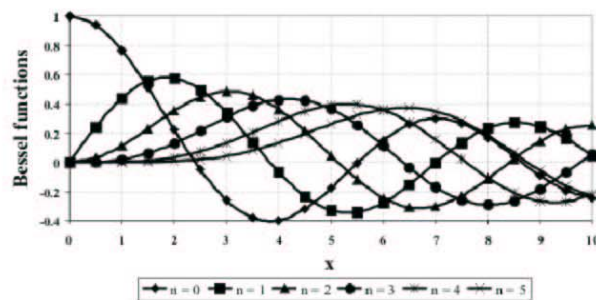


Figure 5. Attenuation of increasing type Bessel functions.

RESULTS

Following the methodology described in the previous part of the paper, a numerical simulation of the aero-acoustic behavior of the axial flow fan was generated, taking the source zone data, obtained via CFD simulation, as the first step. The numerical simulations have been executed for three circular sectors, placed at the horizontal xz plane, at the axis height. The radial distances adopted with respect to the fan rotor are at five, seven and nine meters. These planes will be denoted R5, R7 and R9 respectively. The observer position is established over every of these circular sectors at regular angular intervals of five degrees. This means that 0° degrees indicates the point located right upstream of the stator, and the angle of 180° indicates the point placed just behind the rotor (Figure 9). The fan is supposed to be operating at nominal conditions, that is, at a nominal speed of 2400 rpm (40 Hz) and therefore with a blade passing frequency of 360 Hz. Finally, numerical results will be compared with experimental measurements acquired at analogous points. Experimental uncertainty is placed on ± 2 dB, for a 95% confidence interval.

Turbulence models comparison



Past investigations by CAA seem to demonstrate that Large Eddy Simulation (LES) turbulence modeling captures aero-acoustics scales with more accuracy than the traditional Reynolds Stress Model (RSM). The prediction on fan noise needs a good resolution of the flow vortical structures in a wide range of spatial scales. Traditional turbulent closure strategies for RANS modelling are not so accurate to undertake this kind of problems. So it is necessary the use of more complex turbulence models, in spite of higher computational efforts, like the LES scheme, that is able to resolve directly the bigger vortexes of the flow pattern, which are responsible for the noise generation in turbomachinery (Mendoza and Allen, 2002). In the other way, the small scales use to be weaker, with less energetic contain and a characteristic isotropic, universal character, so they can be modelled in a generic way. Taking into account that noise generation is a clearly unsteady process, the LES scheme seems to be the most powerful tool in the obtaining of fan noise nowadays. To validate the previous assertion, we have realized acoustics simulations using input data computed with LES and RSM turbulence models. Figure 6 shows results of both numerical simulations at R5 plane for the SPL of the blade passing frequency and for the total SPL. Also they are compared with experimental results. The total numeric SPL is obtained through an expression that includes the SPL of the BPF and its harmonics:

$$SPL_{total} = 10 \log \left(10^{SPL_{RSM}/10} + 10^{SPL_{LES}/10} + \dots + 10^{SPL_{BPF}/10} \right) \quad (2)$$

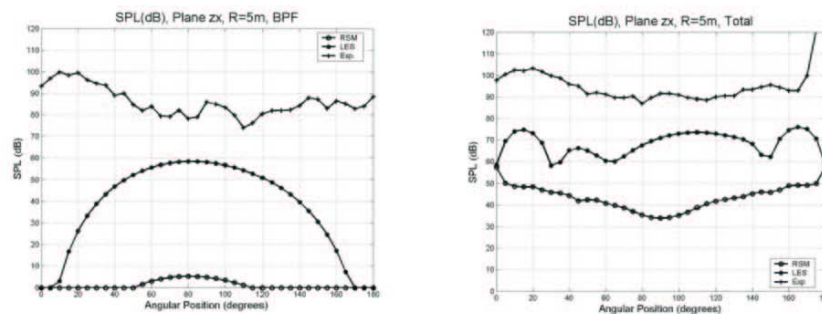


Figure 6. Comparison between turbulence models.

As it can be seen in Figure 6, LES modelization captures in a better fashion the characteristics of the acoustic field radiated into the far field, not only qualitatively but also in the SPL range. Meanwhile, RSM model is under-estimating the SPL by far. At first glance, the differences in the SPL predicted by the LES modelization and the one obtained experimentally is owing to the existence of additional real sources that have not been taken into account in the numerical simulations, like broadband noise, turbomachine driven motor noise, trailing edge noise, etc. Also, operational reasons force the fan to be ducted with a casing; this feature produces a displacement of the aero-acoustics behavior of the turbomachine from the expected theoretical descriptions of free-field conditions at the angular interval between 40° and 140°, approximately. In the rest of angular positions, LES modeling captures with quite good agreement the sound field of the axial flow fan. Differences between numerical and experimental results at BPF are due to the existence of other tone acoustic sources not considered in the modelling, like thickness noise. From now on, for the rest of the simulations, just the LES scheme was employed for the comparison with experimental results.



SPL variation according to source distance

Figure 7 shows the variation of the SPL with the radial distance to the fan axis. The graphic presents numerical and experimental results of SPL at blade passing frequency and total SPL, for the already mentioned R5, R7 and R9 planes. Both numerical and experimentally SPL attenuates as long as the observation point goes far away from the acoustic source, as it was expected to be from the spherical waves features. Notice how the duct of the fan is modifying the experimental results. The attenuation, according to the numerical results is about 2 dB, meanwhile experimentally, for the zones where the fan casing is not affecting the acoustic behavior at free-field, the attenuation is slightly more pronounced, about 5 dB.

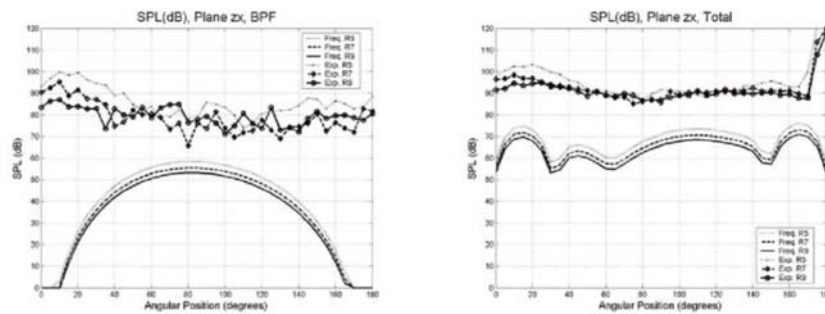


Figure 7. SPL variations with radial distance.

Directional patterns

Figure 8 presents directional patterns, both numerical and experimental, of the SPL at the blade passing frequency for R5 plane.

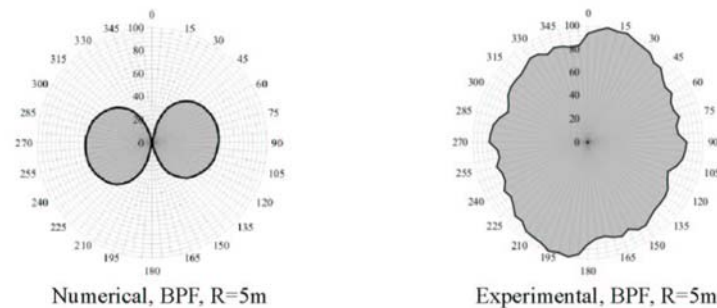


Figure 8. Sound field directivity of the flow fan.

Because of the 13 stator vanes placed upstream the 9 rotor blades, the symmetric mode of radiation, responsible of the radiation on the fan axis, is never generated for this turbomachine. So far, theoretically, because of the Bessel functions behavior of equations (1) (Figure 5), radiation minimum values must be located along the axis. On the other hand, the maximum values will be at 90° from the axis. Besides, if it is kept in mind that the only source term has dipolar order, the directional character of the radiating noise to the far field must be clearly identified with a dipole one. The dipole is clearly present in the plot of the numerical results of the SPL at blade passing frequency, with minimum values along the fan axis. Experimentally, because of the presence of



additional noise sources, the dipole character is much more diffuse. Anyway, at blade passing frequency, it can be guessed the presence of minimum values of radiation on the axis and maximum values at normal direction.

Figure 9 shows directional patterns of total SPL, and its attenuation along the distance for the R5, R7 and R9 planes. In this case, the experimental acoustic behavior is totally masked by the presence of the turbulence associated to the fan jet, so the noise at discrete frequency is dominated by the broadband noise at low frequencies.

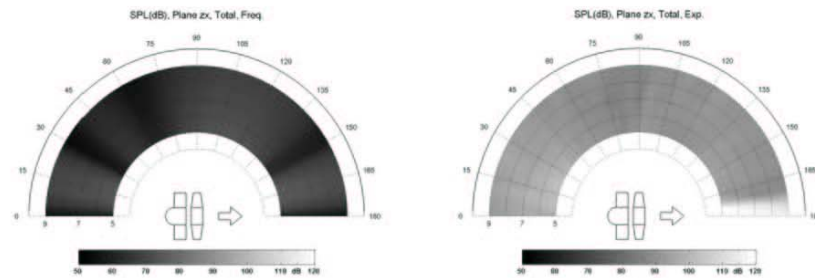


Figure 9. Directivity at plane zx for the axial fan.

This statement is validated with the spectra of Figure 10, representing an angular position of 90° with respect to the fan axis and for a point situated downstream the rotor. In the second of these angular positions, the sound spectrum is clearly dominated by the broadband noise of the jet; meanwhile at 90° of the fan axis, blade passing frequency tones and its harmonics can be noticed.

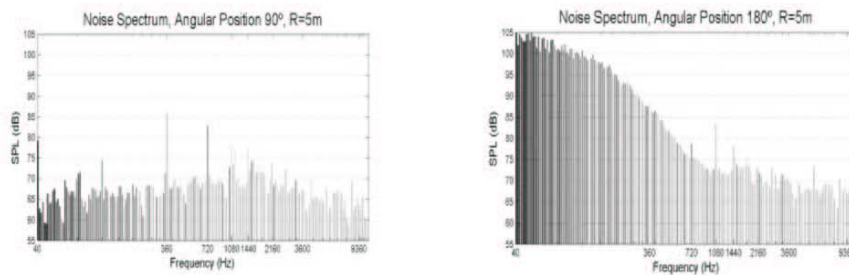
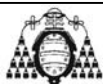


Figure 10. Experimental noise spectrum at 90° and 180° angular positions.

CONCLUSIONS

Aero-acoustic behavior in the far field for a stator-rotor configuration in an axial flow fan has been studied theoretical and numerically, based upon the aero-acoustic analogy solved in the frequency domain. The obtained results have been compared to experimental measurements.

The source zone has been characterized with a numerical CFD simulation of the flow structure inside the fan, that is, resolving the set of incompressible Navier-Stokes equations. LES turbulence model has demonstrated better features compared to the RSM model for the noise predictions in the far field, that had been carried out through the implementation of a post-processing program based on the integral solution of the FFWH equation in the frequency domain. Future work will compare numerical results obtained in the frequency domain with similar calculations realized in the temporal domain.



In general, a reproduction of the real aero-acoustic behavior of the fan has been achieved with the numerical simulation. The numerical model is valid in all zones, except for the jet affected region in which broadband noise is dominant. For the rest zones, discrepancies can be attributed to the presence of other noise generation mechanisms: thickness noise, tip vortex, broadband noise, etc., that will have to be included in the numerical model for next works.

Definitively, a useful tool for noise prediction is available to characterize the acoustic behavior of the turbomachine in the design process, in order to adopt accurate actions to reduce the sound emission levels of the machine.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Research Project “Modeling of deterministic stresses in axial turbomachinery”, ref. DPI2003-09712, CICYT.

REFERENCES

- Brentner, K.S., (2000). *Recent advances in rotor noise predictions*. AIAA-2000-0345.
- Caruthers, J.E., French, J.C. and Raviprakash, G.K., (1995). *Recent Developments Concerning a New Discretization Method for the Helmholtz Equation*. CEAS/AIAA-95-117.
- Farassat, F., (1974). *The acoustics far-field of rigid bodies in arbitrary motion*. J. Sound and Vibration. Vol. 32.
- Ffowcs Williams, J.E. and Hawkings, D.L., (1969). *Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion*. Phil. Trans. Roy. Soc. A 264.
- Ffowcs Williams, J.E., (1992). *Modern methods in analytical acoustics*. Springer Verlag.
- Lighthill, M.J., (1952). *On sound generated aerodynamically I. General Theory*. Proc. Roy. Soc. A 211.
- Lighthill, M.J., (1954). *On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound*. Proc. Roy. Soc. A 211.
- Mendoça, F. and Allen, R., (2002). *Towards understanding LES and DES for industrial aeroacoustics predictions*. International workshop on LES for acoustics, Germany.
- Roger, M., (1996). *Applied aeroacoustics: prediction methods*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1996-04.
- Tam, C.K.W. and Hardin, J.C., (1997). *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*. NASA CP-3352.
- Taylor, J.M. and Sofrin, T.G., (1962). *Axial Flow Compressor Noise Studies*. SAE Trans., Vol. 70, pp. 309-332.
- Ventres, C.S., Theobald, M.A. and Mark, W.D., 1982. *Turbofan Noise Generation*. NASA CR-167952, Vols. 1 and 2.
- Meyer, H.D. and Envia, E., 1996. *Aeroacoustics Analysis of Turbofan Noise Generation*. NASA CR-4715.
- Eversman, W. and Danda, R.L., 1995. *Ducted Fan Acoustic Radiation*. CEAS/AIAA-95-155.



Bibliografía

Abbot, I.H.; *“Theory of Wing Sections”*, Dover Publications Inc., New York, 1958.

Alpert, B.; Greengard, L.; Hagstrom, T.; *“Nonreflecting Boundary Conditions for the Time-Dependent Wave Equation”*, Journal of Computational Physics, vol. 180, 2002.

Amiet, R.K.; *“Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 41, 1975.

Amiet, R.K.; *“Noise due to turbulent flow past a trailing edge”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 47, 1976.

Anderson, R.; Meneveau, C.; *“Effects of the Similarity Model in Finite-Difference LES of Isotropic Turbulence Using a Lagrangian Dynamic Mixed Model”*, Flow, Turbulence and Combustion, vol. 62, 1999.

Arbesmeir, M.; Rude, U.; *“A toolbox for multigrid methods”*, Technische Universität München, 1991.

Arfken, G.; *“Mathematical Methods for Physicist”*, Academic Press, 1985.



Ballesteros, R.; *“Modelización del flujo en ventiladores de paso variable”*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1992.

Ballesteros, R.; González, P; Fernández, J.M.; Argüelles, K.M; *“Técnicas numéricas en Mecánica de Fluidos”*, Monografías de Mecánica de Fluidos, Universidad de Oviedo, 2003.

Batchelor, G.K.; *“An introduction to Fluid Dynamics”*, Cambridge University Press, 1980.

Bauer, F.; Maestrellot, L.; Ting, L.; *“Acoustic Field in Unsteady Moving Media”*, NASA Langley Research Center, 1995.

Blake, W.K.; *“Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration”*, Volúmenes I y II, Academic Press, 1986.

Blanco, E.; *“Desprendimiento rotativo en ventiladores axiales de paso variable”*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1992.

Blanco, E.; Ballesteros, R.; *“Análisis de incertidumbre en Mecánica de Fluidos”*, Monografías de Mecánica de Fluidos, Universidad de Oviedo, 1994.

Blanco, E.; Ballesteros, R.; Santolaria, C.; *“Angular Range and Uncertainty Analysis of Non-Orthogonal Crossed Hot Wire Probes”*, ASME-FED, vol. 167, 1993.

Blanco, E.; Ballesteros, R.; Santolaria, C.; *“Hot Wire Measurements during Rotating Stall in a Variable Pitch Axial Flow Fan”*, ASME 96-GT-441, 1996.

Brentner, K.S.; *“Prediction of Helicopter Rotor Discrete Frequency Noise”*, NASA Technical Memorandum 87721, 1986.

Brentner, K.S.; *“Numerical algorithms for acoustics integrals – The Devil is in Details”*, NASA Langley Research Center, 1996.

Brentner, K.S.; Farassat, F.; *“An Analytical Comparison of the Acoustic Analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces”*, American Helicopter Society 55rd Annual Forum, 1997.

Brentner, K.S.; *“Modelling Aerodynamically Generated Sound: Recent Advances in Rotor Noise Prediction”*, AIAA 2000-0345, 2000.

Brentner, K.S.; Farassat, F.; *“Modelling Aerodynamically Generated Sound”*, Progress in Aerospace Sciences, 2003.

Brooks, T.F.; Burley, C.L.; *“Blade wake interaction noise for a model main rotor”*, Meeting for Rotorcraft Acoustics and Aerodynamics, Virginia, 1997.

Brüel & Kjaer; *“Measurements Microphones”*, Technical Notes, 1994.



Brüel & Kjaer; “*Condenser Michophone Cartridges – Types 4133 to 4181*”, Product Data, 2003.

Brun, E.A.; Lagarde, A.M.; Mathieu, J.; “*Mecánica de los Fluidos*”, Editorial Labor, 1979.

BS 848; “*Fans for General Purposes. Part I: Methods of testing performance*”, British Standard Institution, 1980.

Burdisso, R.A.; Fuller, C.R.; Smith, J.P.; “*Experiments on the active control of a turbofan inlet noise using compact, lightweight inlet control and error transducers*”, 1th CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference, 1995.

Caradonna, F.X.; Yu, Y.H.; Schimtz, F.H.; “*The influence of the transonic flow field on high-speed helicopter impulsive noise*”, Fourth European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, 1978.

Carley, M.; “*Some notes on acoustics*”, 2001.

Casper, J.; Farassat, F.; “*Broadband noise predictions based on a new aeroacoustics formulation*”, AIAA 2002-0802, 2002.

Cebeci, T.; Smith, A.M.O.; “*Analysis of turbulent boundary layers*”, Academic Press, 1974.

Celik, I.B.; “*Overview of Turbulence Models for Industrial Applications*”, West Virginia University, 2001.

Cerutti, S.; Meneveau, C.; “*Intermittency and relative scaling of subgrid-scale energy dissipation in isotropic turbulence*”, Physics of Fluids, vol. 10, 1998.

Chester, S.; Meneveau, C.; “*Dynamic Model for LES Without Test Filtering: Quantifying the Accuracy of Taylor Series Approximations*”, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, vol. 15, 2001.

Chiu, W.S.; Lauchle, C.G.; Thompson, D.E.; “*Subsonic axial flow fan noise and unsteady rotor force*”, Journal of Acoustic Society of America, vol. 85, 1989.

Cho, K.; Lee, S.; “*Aerodynamic noise sources on axial flow fan blades*”, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Colella, P.; Puckett, E.G.; “*Modern Numerical Methods for Fluid Flow*”, 1994.

Crighton, D.G.; Dowling, A.P.; Ffowcs Williams, J.E.; Heckl, M.; Leppington, F.G.; “*Modern Methods in Analytical Acoustics*”, Springer-Verlag, 1992.

Cruz, J.; Vieira, N.; “*Técnicas de Medição de Velocidade*”, Instituto Superior Técnico, Portugal, 2003.



Curle, N.; *“The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound”*, Proc. Roy. Soc. A 231, 1955.

Davidson, L.; *“An Introduction to Turbulence Models”*, Chalmers University of Technology, 2003.

Deming, A.F.; *“Noise from propellers with symmetrical sections at zero blade angle”*, NACA TM 679, 1938.

Dixon, S.L.; *“Termodinámica de las turbomáquinas”*, Editorial Dossat S.A., Madrid, 1981.

Djambazov, G.S.; *“Computational Aeroacoustics: Initial Review of Study”*, University of Greenwich, 1995.

Djambazov, G.S.; Lai, C.H.; Pericleous, K.A.; *“Domain decomposition methods for some aerodynamic noise problems”*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1997.

Djambazov, G.S.; Lai, C.H.; Pericleous, K.A.; *“Development of a Domain Decomposition Method for Computational Aeroacoustics”*, Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods, 1998a.

Djambazov, G.S.; Lai, C.H.; Pericleous, K.A.; *“Staggered-mesh computation for aerodynamic sound”*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998b.

Djambazov, G.S.; Lai, C.H.; Pericleous, K.A.; *“Efficient Computation of Aerodynamic Noise”*, Contemporary Mathematics, vol. 218, 1998c.

Enghardt, L.; Tapken, U.; Neise, W.; Schimming, P.; Maier, R.; Zillmann, J.; *“Active control of fan noise from high-bypass ratio engines”*, 7th International Congress in Sound and Vibration, 2000.

Envia, E.; *“Fan noise reduction: an overview”*, NASA/CR 44135, 2002.

Ernsthausen, W.; *“The source of propeller noise”*, NACA TM 821, 1937.

Farassat, F.; *“Theory of Noise Generation from Moving Bodies with an Application to Helicopter Rotors”*, NASA Technical Report, 1975.

Farassat, F.; *“Linear acoustic formulas for calculation of rotating blade noise”*, AIAA Journal, vol. 19, 1981.

Farassat, F.; Brentner, K.S.; *“The uses and abuses of the acoustic analogy in helicopter rotor noise prediction”*, Journal of the American Helicopter Society, vol. 33, 1988.

Farassat, F.; *“Introduction to Generalized Functions with Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics”*, NASA Technical Paper 3428, 1996a.



Farassat, F.; *“The Kirchhoff Formulas for Moving Surfaces in Aeroacoustics – The Subsonic and Supersonic Cases”*, NASA Technical Memorandum, 1996b.

Farassat, F.; *“Generalized Functions and Kirchhoff Formulas”*, AIAA 96-1705, 1996c.

Farassat, F.; Brentner, K.S.; *“A Study of Supersonic Surface Sources- The Ffowcs Williams Hawkings Equation and the Kirchhoff Formula”*, AIAA 98-2375, 1998.

Farassat, F.; *“The Integration of $\delta'(f)$ in a Multidimensional Space”*, NASA Langley Research Center, 1999.

Farassat, F.; *“Acoustic Radiation from Rotating Blades – The Kirchhoff Method in Aeroacoustics”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 239, 2001a.

Farassat, F.; Nark, D.M; Thomas, R.H.; *“The detection of radiated modes from ducted fan engines”*, 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2001b.

Farris, M.; Farassat, F.; *“The Mean Curvature of the Influence Surface of Wave Equation with Sources on a Moving Surface”*, Journal Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 22, 1999.

Feng, J.; *“Active flow control for reduction of unsteady stator-rotor interaction in a turbofan simulator”*, Tesis Doctoral, Universidad de Virginia, 2000.

Fernández, J.M.; Argüelles, K.M.; Ballesteros, R.; Santolaria, C.; *“Numerical analysis of the rotor-stator interaction in an axial flow fan”*, XXI IAHR Symposium Hydraulic Machinery and Systems, Lausana (Suiza), 2002a.

Fernández, J.M.; Argüelles, K.M.; Santolaria, C.; Ballesteros, R.; *“Interacción fluidodinámica entre el rotor y el estator en una soplante axial”*, XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Cádiz, 2002b.

Fernández, J.M.; Argüelles, K.M.; Santolaria, C.; Ballesteros, R.; *“Unsteady flow analysis of the rotor-stator interaction in an axial flow fan”*, 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conference, Vol. I643CD, Honolulu, 2003.

Fernández, R.A.; *“Metodología de calibración, adquisición y reducción de datos con sondas de presión de 5 orificios”*, Proyecto fin de carrera nº 1031159, E.P.S.I.G, Universidad de Oviedo, 2004.

Ffowcs Williams, J.E.; Hawkings, D.L.; *“Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion”*, Phil. Trans. Roy. Soc. A264, 1969.

Fitzgerald, J.M.; Lauchle, G.C.; *“Reduction of discrete frequency noise in a small, subsonic axial-flow fans”*, Journal of Acoustic Society of America, vol. 76, 1984.

Florence, V.H.; *“Advanced modelling of active control of fan noise for ultra high bypass turbofan engines”*, Tesis Doctoral, Universidad de Virginia, 1999.



Foias, C.; *“Navier-Stokes Equations and Turbulence”*, Cambridge University Press, 2001.

Fox, R.W.; McDonald, A.T.; *“Introducción a la Mecánica de Fluidos”*, Mc Graw Hill, 1995.

Freund, J.B.; *“Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 438, 2001.

Fukano, T.; Kodama, Y.; Takamatsu, Y.; *“The effect of the tip clearance on the noise of a low pressure axial and mixed-flow fans”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 105, 1986.

Garrick, I.E.; Watkins, C.E.; *“A theoretical study of the effect of forward speed on the free-space sound-pressure field around propellers”*, NACA Report 1198, 1954.

Gerard, A.; Berry, A.; Masson, P.; *“Active control of automotive fan noise”*, Fan Noise 2003.

Gjelstrup, P.; *“Laser Doppler Anemometry. Introduction to principles and applications”*, LDA Course Notes, Dantec Dynamics, 2003.

Glegg, S.A.L.; *“Airfoil self noise generated in a cascade”*, AIAA Journal, vol. 36, 1998.

Goldstein, M.E.; *“Aeroacoustics”*, McGraw-Hill, 1976.

Goldstein, M.E.; *“Some recent developments in jet noise modelling”*, 6th International Congress on Sound and Vibration, Copenague, 1999.

Goldstein, M.E.; *“An exact form of Lilley’s equation with a velocity quadrupole/temperature dipole source term”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 443, 2001.

Gonsalez, J.C.; Arrington, E.A.; *“Five-Hole angle probe calibration for the NASA Glenn Icing Research Tunnel”*, NASA/CR-1999-202330, 1999.

Grace, S.M.; *“Fundamentals of Aeroacoustics”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series, 2004.

Guedel, A.; *“Prediction of the noise installation effect induced by a bend at the inlet of an axial flow fan”*, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Guo, Y.P.; *“Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems”*, Journal Fluid Mechanics, vol. 403, 2000.

Gutin, L.; *“On the sound field of a rotating propeller”*, NASA Technical Memorandum, 1948.



Hanson, D.B.; Fink, M.R.; *“The importance of quadrupole sources in prediction of transonic tip speed propeller noise”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 62, 1979.

Hanson, D.B.; *“Coupled two-dimensional cascade theory for noise and unsteady aerodynamics of blade row interactions in turbofans”*, NASA CR-4506, 2002.

Hawkings, D.L.; Lowson, M.V.; *“Theory of supersonic rotor noise”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 36, 1974.

Hinze, J.O.; *“Turbulence”*, Mc Graw Hill, 1959.

Hirsch, C.; *“Numerical Computation of Internal and External Flows”*, Wiley, 1990.

Hirschberg, A.; Rienstra, S.W.; *“An introduction to Acoustics”*, Eindhoven University of Technology, 2004.

Homicz, G.F.; *“Broadband and discrete frequency radiation from subsonic rotors”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 36, 1974.

Howe, M.S.; *“Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 71, 1975.

Howe, M.S.; *“A review of the theory of trailing edge noise”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 61, 1978.

Huang, L.; *“Rotor-strut interaction force in an axial flow fan”*, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Ianniello, S.; *“Quadrupole noise predictions through the FW-H equation”*, AIAA Journal, vol. 37, 1999.

Ianniello, S.; *“Aeroacoustic analysis of high tip-speed rotating blades”*, Aerospace Science and Technology, 2001.

Jagoda, J.; Komerath, N.; Seitzman, J.; *“Unsteady velocity measurements in a jet using a hot wire anemometer”*, Georgia College of Tech Engineering, 1999.

Jeon, W.H.; Chung, K.H.; Lee, D.H.; *“An analysis of sound field of a centrifugal fan with volute casing”*, 6th AIAA Aeroacoustics Conference, 2000.

Jorgensen, F.E.; *“How to measure turbulence with hot-wire anemometers”*, Publication n° 9040U6151, Dantec Dynamics, 2002.

Kaltenbach, H.J.; *“Towards a near-wall model for LES of a separated difuser flow”*, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 1998.

Katz, J.; Plotkin, A.; *“Low-Speed Aerodynamics”*, McGraw Hill, 1991.

Kline, S.J.; McClintock, F.A.; *“Describing uncertainties in single sample experiments”*, Mechanical Engineering, 1953.



Kline, S.J.; *“The purposes of uncertainty analysis”*, ASME Journal of Fluids Engineering, 1985.

Lamb, H.; *“Hydrodynamics”*, Dover Publications Inc., 1934.

Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.; *“Fluid Mechanics”*, Pergamon Press, 1959.

Lee, D.J.; Chung, K.H.; Choi, H.L.; Jeon, W.; *“Prediction of noise radiation from a fan system: connection between generation and propagation”*, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Lighthill, M.J.; *“On sound generated aerodynamically I – General Theory”*, Proc. Royal Society, 1952.

Lighthill, M.J.; *“On sound generated aerodynamically II – Turbulence as a source of sound”*, Proc. Royal Society, 1954.

Lighthill, J.; *“Waves in Fluids”*, Cambridge University Press, 1990.

Lilley, G.M.; *“On the noise from jets, noise mechanisms”*, AGARD, 1974.

Lomax, H.; Pulliam, T.H.; *“Fundamentals of Computational Fluid Dynamics”*, NASA Ames Research Center, 1999.

Lowson, M.V.; *“The sound field for singularities in motion”*, Proc. Roy. Soc. A 286, 1965.

Lowson, M.V.; Ollerhead, J.B.; *“A theoretical study of helicopter rotor noise”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 9, 1969.

Lowson, M.V.; *“Progress towards quieter civil helicopters”*, Aeronautical Journal, 1992.

Lyrantzis, A.S.; *“Integral Methods in Computational Aeroacoustics”*, CEAS Workshop, Grecia, 2002.

Majjigi, R.K.; Gliebe, P.R.; *“Development of a rotor/wake vortex model”*, NASA CR-174849, 1984.

Majumdar, S.J.; Peake, N.; *“Noise generation by the interaction between ingested turbulence and a rotating fan”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 359, 1998.

Mansfield, J.R.; Knio, O.M.; Meneveau, C.; *“A Dynamic LES Scheme for the Vorticity Transport Equation: Formulation and a Priori Tests”*, Journal of Computational Physics, vol. 145, 1998.

Meadows, K.R.; *“A Study of Fundamental Shock Noise Mechanism”*, NASA Langley Research Center, 1997.



Mendoça, F.; Allen, R.; Charentenay, J.; Lewis, M.; “*Towards Understanding LES and DES for Industrial Aeroacoustics Predictions*”, International workshop on LES for Acoustics, Germany, 2002.

Meneveau, C.; Lund, T.S.; Cabot, W.H.; “*A Lagrangian Dynamic subgrid-scale Model of Turbulence*”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 319, 1996.

Meneveau, C.; Lund, T.S.; “*The dynamic Smagorinsky model and scale-dependent coefficients in the viscous range of turbulence*”, Physics Fluids, vol. 9, 1997.

Meneveau, C.; Katz, J.; “*Scale-Invariance and Turbulence Models for Large-Eddy Simulation*”, Annual Review of Fluid Mechanics, 2000.

Milanovic, I.M.; Kalkhoran, I.M.; “*Numerical calibration of a conical five-hole probe for supersonic measurements*”, Meas. Sci. Technol., vol. 11, 2000.

Möhring, W.; “*On vortex sound at low Mach number*”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 85, 1978.

Montavon, C.; Jones, I.; Bosch, D.; Szepessy, S.; Henriksson, R.; Moberg, H.; Tregnago, R.; El Hachemi, Z.; Piccirillo, M.; Tournour, M.; Dequand, S.; Tremblay, F.; Friedrich, R.; “*Application of Large Eddy Simulation to the solution of industrial problems*”, Validation Report, AEA Technology Engineering Software, 2002.

Morfey, C.L.; “*Sound generation in subsonic turbomachinery*”, Trans ASME, 1970.

Morris, J.P.; “*The Acoustic Analogy and Alternative Theories for Jet Noise Prediction*”, NASA Langley Research Center.

Neise, W.; “*Review of fan noise generations mechanisms and control methods*”, Proc. Fan Noise Symp., 1992.

Nelson, P.A.; Elliot, S.J.; “*Active Control of Sound*”, Academic Press, 1992.

Neumann, A.L.; Nogueira, J.I.; “*Turbomáquinas*”, Editorial Ariel S.A., Barcelona, 2000.

Owens, R.E.; “*Energy Efficient Engine Performance System – Aircraft Integration Evaluation*”, NASA/CR 159488, 1979.

Parret, A.V.; Eversman, W.; “*Wave envelope and finite element approximations for turbofan noise radiation in flight*”, AIAA Journal, vol. 24, 1986.

Parrondo, J.L.; Velarde, S.; “*Ruido ambiental: normativa, evaluación y control*”, E.P.S. de Ingeniería de Gijón, 2003.

Philbrick, D.A.; Topol, D.A.; “*Development of a fan noise design system*”, AIAA Paper 93-4415, 1993.



Phillips, J.R.; *“Piezoelectric Technology Primer”*, CTS Wireless Components, Albuquerque, 2001.

Phillips, O.M.; *“On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 9, 1960.

Polacsek, C.; *“Reduction of fan rotor-stator interacting modes using trailing edge blowing”*, 6th International Congress in Sound and Vibration, 1999.

Polifke, W.; *“Combustion Inestabilities”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series, 2004.

Porte, F.; Meneveau, C.; Parlange, M.B.; *“A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer”*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 415, 2000.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C.; *“Mecánica de Fluidos”*, Thomson, 2002.

Powell, A.; *“Theory of vortex sound”*, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 16, 1964.

Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P.; *“Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing”*, Cambridge University Press, 2002.

Pulliam, T.H.; *“Solution Methods in Computational Fluid Dynamics”*, NASA Ames Research Center, 1994.

Ristircelli, J.R.; *“A closure for the compressibility of the source terms in Lighthill’s acoustic analogy”*, NASA Langley Research Center.

Roger, M.; *“Applied Aeroacoustics: prediction methods”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series, 1996.

Roger, M.; Molin, N.; *“The use of Amiets’ methods in predicting the noise from 2D high-lift devices”*, 6th AIAA Aeroacoustics Conference, 2000.

Roger, M.; Moreau, S.; *“An analytical model for predicting airfoil self noise using wall pressures statistics”*, Center for Turbulence Research Ann. Res. Briefs, 2002.

Roger, M.; Casalino, D.; Jacob, M.; *“Prediction of sound propagation in ducted potential flows using Green’s function discretization”*, 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2003.

Roger, M.; *“Noise from moving surfaces”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2004a.

Roger, M.; *“On the noise from open rotors”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2004b.

Roger, M.; *“Duct acoustics and turbomachinery noise”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2004c.



Roy, I.D.; Eversman, W.; Meyer, H.D.; *“Improved finite element modelling of the turbofan engine inlet radiation problem”*, NASA-25925, 1993.

Rubinstein, R.; Zhou, Y.; *“Characterization of sound radiation by unresolved scales of motion in computational aeroacoustics”*, ICASE Langley Research Center, 1999.

Sagaut, P.; *“Recent Developments in Numerical Methods for Turbomachinery Flows”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2001.

Santolaria, C.; *“Estudio del diseño de ventiladores de grandes dimensiones para centrals térmicas”*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1986.

Schmitz, F.H.; Yu, Y.H.; *“Theoretical modelling of high-speed helicopter impulsive noise”*, Proc. of the Third European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, 1977.

Schmitz, F.H.; *“Aeroacoustics of Flight Vehicles”*, Hubbard Ed., 1991.

Schram, C.; *“Aeroacoustics of Subsonic Jets”*, Technische Universiteit Eindhoven, 2003.

Schröder, W.; Ewert, R.; *“Computational Aeroacoustics using the hybrid approach”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2004.

Schulz, J.; Neise, W.; Möser, M.; *“Active control of the blade passage frequency noise level of an axial fan with aeroacoustics sound sources”*, Fan Noise 2003.

Schwartz, L.; *“Theories des Distributions”*, Volumen I y II, Actualities Scientiques et Industrielles, Hermann and Cie, 1957.

Scotti, A.; Meneveau, C.; *“Dynamic Smagorinsky model on anisotropic grids”*, Physics Fluids, vol. 9, 1997.

Shaw, C.T.; *“Using Computational Fluid Dynamics”*, Prentice Hall, 1992.

Shin, H.K.; Sun, H.S.; Lee, S.; *“The discrete noise prediction in due consideration of the blade-guide vane interaction”*, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Sijtsma, P.; *“Experimental techniques for identification and characterisation of noise sources”*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2004.

Smith, J.P.; Burdisso, R.A.; Fuller, C.R.; *“Experiments on the active control of inlet noise from a turbofan jet engine using multiple circumferential control arrays”*, 2th CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference, 1996.

Smith, S.N.; *“Discrete frequency sound generation in axial flow turbomachines”*, British Ministry of Defence Report, 1973.

Spence, P.L.; *“Ducted fan noise prediction using wave envelope analysis and the Kirchhoff formula”*, AIAA Paper 97-1651, 1997.



Stainback, P.C.; Nagabushana, K.A.; “*Review of Hot-Wire Anemometry Techniques and the Range of Their Applicability for Various flows*”, Electronic ASME Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME.

Streeter, V.L.; Wylie, E.B.; “*Mecánica de los Fluidos*”, Mc Graw Hill, 1987.

Thomas, L.H.; “*Elliptic problems in linear differential equations over a network*”, Watson Sci. Comp. Lab., Columbia University, 1949.

Topol, D.A.; “*Rotor wake/stator interaction noise – prediction versus data*”, AIAA Paper 90-3951, 1990.

Topol, D.A.; Philbrick, D.A.; “*Fan noise prediction system development: wake model improvements and code evaluations*”, NASA-25952, 1993.

Tournour, M.; El Hachemi, Z.; Read, A.; Mendoca, F.; Barone, F.; Durello, P.; “*Investigation of the tonal noise radiated by subsonic fans using the aero-acoustics analogy*”, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Tremblay, F.; “*Direct and Large-Eddy Simulation of flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers*”, Doctoral Thesis, Technische Universität München, 2000.

Tyler, J.M.; Sofrin, T.G.; “*Axial flow compressor noise studies*”, SAE Transactions, vol. 70, 1962.

Vázquez, J.L.; “*Fundamentos matemáticos de la Mecánica de Fluidos*”, Universidad Autónoma de Madrid, 1998.

Velarde, S.; “*Comportamiento aeroacústico de ventiladores inestables*”, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1997.

Ventres, C.S.; Theobald, M.A.; Mark, W.D.; “*Turbofan noise generation*”, NASA CR-167952, 1982.

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W.; “*An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*”, Longman Scientific & Technical, 1995.

Wagner, C.; “*Introduction to Algebraic Multigrid*”, Course notes of an algebraic multigrid course, University of Heidelberg, 1998.

Wallis, R.A.; “*Axial Flow Fans and Ducts*”, Krieger Publishing Company, Florida, 1993.

Wang, M.; “*Progress in large-eddy simulation of trailing-edge turbulence and aeroacoustics*”, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 1997.

Wesseling, P.; “*An Introduction to Multigrid Methods*”, Wiley & Sons, 1992.

White, F.M.; “*Mecánica de Fluidos*”, Mc Graw Hill, 2004.



White, R.G.; Walker, J.G.; *“Noise and Vibration”*, John Wiley & Sons, 1982.

Wong, J.; Huang, L.; *“Identification and control of noise sources in a small axial-flow fan ”*, Fan Noise 2003 International Symposium, 2003.

Yu, Y.H.; *“Rotor blade-vortex interaction noise”*, Progress in Aerospace Sciencies, vol. 36, 2000.

Zante, D.E.; *“Study of a wake recovery mechanism in a high-speed axial compressor stage”*, Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, 1998.



