



EVALUACIÓN DE DISTINTOS MODELOS DE TURBULENCIA EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA PARA EL PROBLEMA DE CAMBIO DE SECCIÓN DE UN CONDUCTO CILÍNDRICO

Autor: Iván Vallejo Pérez

Tutor: José González Pérez

Departamento de Energía. Universidad de Oviedo.

RESUMEN

Las variaciones de sección constituyen un problema clásico en el estudio del flujo en conductos cilíndricos. Para su análisis existen varios modelos de trabajos previos, entre los que destacan algunos autores (Bullen, Cheeseman, Hussain, 1987 y 1996), que sirven para obtener resultados fiables para la resolución de cambios de sección a lo largo de una tubería, ya sea debido a aumentos o reducciones de área (Benedict et al., 1966). También se conoce que los resultados obtenidos por simulación numérica (CFD) muestran un resultado coherente en comparación con los datos teóricos.

En este Trabajo Fin de Máster (de aquí en adelante, TFM) se presentan los resultados de las simulaciones numéricas realizadas sobre el problema que afecta al flujo de agua en un cambio de sección abrupta, tanto contracción como expansión. En ambos casos, se han analizado los resultados con distintos mallados (discretizaciones) y modelos de turbulencia. Como conclusión, se comparan los resultados obtenidos con los de la bibliografía técnica.

Palabras clave: simulación numérica, CFD análisis, modelos de turbulencia, contracción abrupta, expansión abrupta, relaciones de área, comportamiento del flujo.

INTRODUCCIÓN

Explicación del fenómeno de contracción

El proceso de contracción puede ramificarse en distintos casos en función del diseño definido en el cambio de sección, tal y como es analizado por parte de algunos autores (Rennels, Hudson, 2012). Dentro de esta clasificación se pueden contemplar, entre otras: contracción abrupta, contracción redondeada, contracción cónica, o contracción en chaflán. En este TFM, se centrará el análisis en la contracción abrupta, cuyo modelo se muestra en la figura 1.

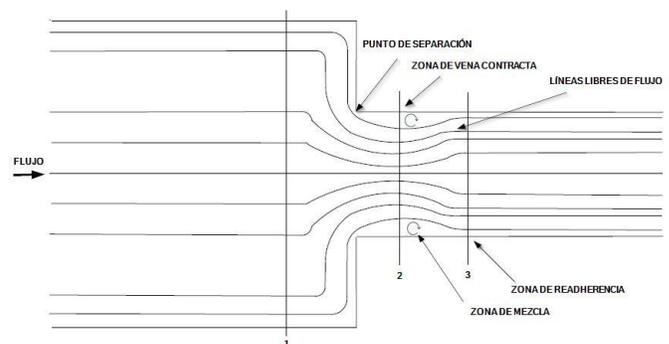
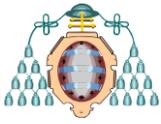


Figura 1. Líneas de flujo a través de una contracción abrupta en la tubería (Benedict et al., 1966)

El principal problema de la solución para la contracción abrupta, tal como se muestra en todos los artículos y libros al respecto, es el hecho de que este cambio de sección supone la suma de dos efectos: una



primera contracción del flujo que produce una aceleración, seguido de una expansión que produce una deceleración. El punto donde se produce el cambio de aceleración a deceleración, es la zona donde el flujo alcanza su sección más pequeña, conocido como vena contracta (o vena contraída). (Rennels, Hudson, 2012)

Este fenómeno, mostrado en la figura 1, produce que la pérdida de carga total sea la suma de las pérdidas debidas a la contracción entre el último punto de adherencia (punto 1) y la vena contracta (punto 2), más las pérdidas de la expansión desde la zona de vena contracta (punto 2) y la salida del flujo o zona de readherencia (punto 3).

Explicación del fenómeno de expansión

El proceso de expansión puede, al igual que el de contracción, ser dividido en base al tipo de cambio de sección (Rennels, Hudson, 2012). En esta clasificación se dispone de los siguientes casos: expansión abrupta, expansión directa con difusor cónico, expansión en varias etapas con difusores cónicos, expansión con difusor de pared curva, reductor de tubería, entre otros. En este TFM, se basará el análisis en el fenómeno de la expansión abrupta, cuyo modelo puede verse en la figura 2.

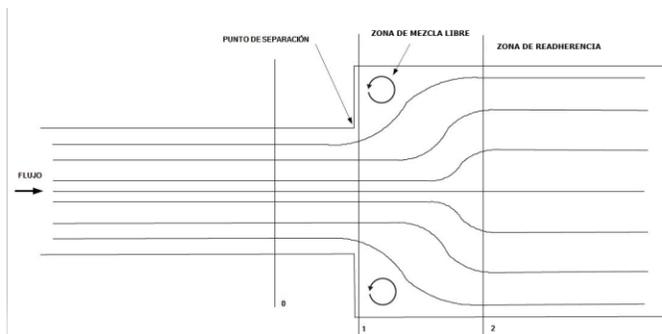


Figura 2. Líneas de flujo a través de una expansión abrupta en la tubería (Benedict et al., 1966)

El principal problema de la solución para la expansión abrupta, es la separación de partículas del flujo a partir del punto de separación que se sitúa justo al llegar a la zona de expansión (punto 1). Estas separaciones producen remolinos en una región de recirculación, también llamada zona de mezcla libre.

Al separarse de esta zona de recirculación, el flujo vuelve a su comportamiento habitual a partir de la zona de readherencia (punto 2).

Explicación del fenómeno de la turbulencia

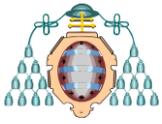
La turbulencia constituye un movimiento irregular, no estacionario y aperiódico de un fluido por medio del cual todas las magnitudes transportadas en el flujo fluctúan tanto en el tiempo como en el espacio.

El fenómeno de la turbulencia es complejo debido a su naturaleza tridimensional, rotacional y dependiente del tiempo. Las características físicas que permiten identificar un flujo turbulento son definidos por Pope (2001), Tennekes y Lumley (1972) y son las siguientes: irregularidad, alta difusividad, altos valores de número de Reynolds, alta disipación y continuidad.

Tipos de aproximaciones numéricas de turbulencia

La elección del tipo de aproximación numérica depende del número de Reynolds registrado en el flujo. Los métodos de aproximación numérica más comunes son:

- Simulación numérica directa (DNS) → para su resolución no se necesitan modelos, pero el coste computacional es prohibitivo y no es aplicable
- Reynolds-Averaged Navier Stokes (RANS) → método utilizado habitualmente que resuelve las ecuaciones Navier Stokes promediadas temporalmente. Las escalas de turbulencia se aproximan a partir de distintos modelos:
 - Modelos de ecuación cero
Prandtl Mixing Length, Baldwin-Lomax, entre otros.
 - Modelos de una ecuación
Spalart-Allmaras, k-model, Baldwin-Barth, entre otros.
 - Modelos de dos ecuaciones
k-ε, k-ω, **k-ω (SST)**, k-τ, k-L, entre otros.
 - Modelos de tres ecuaciones
k-ε-A
 - Modelos de cuatro ecuaciones
Modelo v²-f



Los modelos de turbulencia utilizados para comparar los resultados de este trabajo serán: **k-ε y k-ω (SST) y Spalart-Allmaras**.

Las ecuaciones incluyen estas constantes:

$$C_\mu = 0.09 \quad C_1 = 1.44 \quad C_2 = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

Modelo de turbulencia k-ε

El modelo **k-ε** está implementado a partir de dos variables:

- $k \rightarrow$ energía cinética turbulenta [m^2/s^2]
- $\epsilon \rightarrow$ ratio de disipación específica [$1/s$]

El modelo de k-ε es un modelo de dos ecuaciones, el cual es el más utilizado en las simulaciones, debido a que es un método muy robusto, relativamente fácil de implementar, realiza cálculos estables que convergen fácilmente y realiza predicciones razonablemente precisas para muchos flujos.

Las desventajas de este modelo son las siguientes: realiza predicciones pobres para flujos complejos (como flujos rotativos o con remolinos, flujos con gran separación, algunos flujos libres o flujos desarrollados en conductos no circulares), solamente es válido para flujos turbulentos completamente desarrollados, requiere funciones de pared y necesita modificaciones para flujos con líneas de corriente muy curvadas.

Este modelo puede refinarse aún más modificando algunas de las ecuaciones del mismo, así pueden obtenerse: la modificación de bajo número de Reynolds (Jones y Launder), modelos de capa límite en las paredes (Chiang y Launder, Amano, Iacovides y Launder) y las correcciones de curvatura de las líneas de flujo.

Las ecuaciones que definen este modelo de turbulencia, sin refinamiento, son las siguientes:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\mu_t}{\rho} S^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\epsilon}{k} \left(C_1 \frac{\mu_t}{\rho} S^2 - C_2 \epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2)$$

Modelo de turbulencia k-ω (SST)

El modelo k-ω está implementado a partir de dos variables:

- $k \rightarrow$ energía cinética turbulenta [m^2/s^2]
- $\omega \rightarrow$ tasa específica de disipación viscosa [s/m^2]

El modelo k-ω fue creado de forma independiente por Kolgomorov (1942), y posteriormente Saffman y Wilcox (1974) de forma conjunta, y Wilcox (1988) de forma independiente han mejorado y refinado el modelo de forma continua durante los últimos años, demostrando su precisión para una gran cantidad de flujos turbulentos.

El modelo k-ω (SST) desarrollado por Menter (1993) combina el modelo k-ω de Wilcox para su análisis más robusto de los flujos en las zonas más cercanas a las paredes, con el modelo k-ε para emplear su análisis en las zonas más lejanas de la pared.

Las ecuaciones de gobierno que rigen este modelo de turbulencia, según las últimas publicaciones de Menter (2003) y Wilcox (2008), son las siguientes:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \sigma_k \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\gamma \omega}{k} P - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \sigma_\omega \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (4)$$

Modelo de turbulencia Spalart-Allmaras

El modelo ha sido desarrollado por **Spalart y Allmaras** (1994) para dedicarlo a un uso centrado principalmente en la industria aeroespacial.



El desarrollo de este modelo, tiene su origen en las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de transporte de los modelos de turbulencia. El modelo de Spalart y Allmaras puede emplearse con distintas versiones, partiendo de una versión aplicable solamente para flujos sin tensiones, hasta alcanzar la más completa, la cual es aplicable a flujos viscosos y regiones laminares. A medida que son considerados más efectos físicos, nuevos términos y factores son incluidos y calibrados, siendo estos términos anulados cuando no son necesarios.

A través de comparaciones de resultados con algunos modelos existentes (como el modelo de $k-\epsilon$) se ha demostrado que el modelo aparenta ser lo suficientemente robusto para considerar sus soluciones como correctas en numerosas situaciones.

Trabajos previos sobre cambios de sección

Los flujos a través de variaciones de sección han sido examinados por numerosos autores previamente, y una gran cantidad de estudios han sido realizados para analizar la cuestión que se trata en este TFM. Con el objetivo de ver la evolución en esta materia a lo largo de los años, se revisa de forma cronológica la aportación de algunos de los autores más importantes en este campo.

Weisbach (1855) fue un pionero en el estudio de los flujos a lo largo de un conducto cilíndrico, llegando a estudiar tanto las pérdidas de carga a lo largo de la tubería, como las generadas debidas a contracciones y expansiones en la misma.

Polkowski (1912) publicó en la tesis final de sus estudios un experimento acerca de cambios de sección abruptos en un flujo de agua a través de una tubería. A partir de sus resultados, se concluye que las pérdidas debidas a la expansión son aproximadamente tres veces las producidas durante la contracción. Para sus resultados, se apoyó en los estudios previos de Gibson (1910, 1912) y Weisbach (1855). Además, consiguió determinar dos fórmulas exponenciales para la estimación de las pérdidas de carga debido al cambio repentino de sección:

$$\text{Expansión} \quad H_{Loss} = 0.00932R^{0.413}V^{1.885} \quad (5)$$

$$\text{Contracción} \quad H_{Loss} = 0.00187R^{0.88}V^{1.84} \quad (6)$$

donde:

$$R = \frac{\text{Sección de mayor diámetro}}{\text{Sección de menor diámetro}} = \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

$$V = \text{velocidad en pies / s en la tubería de menor sección} = V_1$$

tomando en ambos casos como referencia la figura 1.

Archer (1913) proporcionó una ecuación para el cálculo de las pérdidas de energía debidas a una expansión abrupta. Esta relación tiene la particularidad de depender de la velocidad del flujo en ambas secciones:

$$H_{Loss} = \frac{(V_2 - V_1)^{1.919}}{2g} \quad (7)$$

Kays (1950) aportó resultados experimentales acerca de las pérdidas de carga y la influencia del número de Reynolds en las mismas. Para analizar la influencia del número de Reynolds, se examinaron los cambios en los perfiles de velocidad.

Streeter et al. (1961) y posteriormente apoyado por Sotelo (1977) determinan que el coeficiente de pérdidas de carga debidas a una expansión abrupta se determina mediante la siguiente ecuación:

$$K_{Cont} = C_a \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \quad (8)$$

donde, C_a es un factor de accesorio (adimensional) que se determina mediante una gráfica.

Benedict et al. (1966) parte de la siguiente ecuación previa de la bibliografía:



$$H_{Loss} = 0.5 \frac{v_2^2}{2g} \quad (9)$$

tomando como referencia la figura 1.

Su objetivo será definir un coeficiente para determinar las pérdidas a lo largo de la contracción. Así acaba obteniendo la siguiente relación a partir de datos obtenidos mediante experimentación, usando como fluidos agua y aire, y la extrapolación de los mismos.

$$H_{Loss-Cont-experimental} = 0.57806 + 0.39543\beta - 4.53854\beta^2 + 14.24265\beta^3 - 19.22214\beta^4 + 8.54038\beta^5 \quad (10)$$

donde: $\beta = D_2/D_1$, tomando como referencia la figura 1.

Idel'chik (1969) publicó su conocido "Memento des pertes de charge" (en inglés: "Handbook of hydraulic resistance"), en el cual se trata en uno de sus capítulos acerca del flujo en las tuberías y canales. En este capítulo, Idel'chik propone un valor para el coeficiente de pérdidas de carga en diversos tipos de contracciones, entre los que se incluye el caso de una contracción abrupta. Esta misma ecuación es posteriormente propuesta por Reza (1985) y toma la siguiente formulación:

$$H_{Loss} = \frac{\gamma V_{D_2}^2}{2g} \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \quad (11)$$

siempre que $Re > 10^4$ (flujo turbulento)

Martin, J.J. (1972) desarrolló su trabajo partiendo de los resultados y datos aportados por Kays (1950), basándose en sus conclusiones, propuso dos acercamientos distintos al problema incluyendo la consideración de la vena contracta.

Weisbach (1972) realizó un resumen de los trabajos previos en esta materia, publicando de esta manera un libro que contenía los resultados de todos los autores previos. Además aportó nuevos experimentos

realizados por su equipo, los cuales fueron ajustados por Rennels et al. (2012).

Bullen y Cheeseman. (1983) estudiaron las diferencias en la definición del coeficiente de pérdidas a partir de un análisis unidimensional para un flujo incompresible, destacando algunas dificultades con la geometría de la contracción y del flujo para los conductos y fluidos reales. La definición seleccionada para el coeficiente de pérdidas de presión en la contracción es el siguiente:

$$K_{Cont} = \frac{2g A_2^2 h_A}{Q^2} - \left[1 - \left(\frac{A_{2C}}{A_{1C}} \right)^2 \right] \quad (12)$$

Bullen et al. (1987, 1996) publicaron dos artículos en los que aparecen los mayores avances en esta materia. Su estudio de 1987 parte de la fórmula anteriormente mencionada y obtenida por Bullen y Chessemann (1983), para obtener de forma experimental y teórica coeficientes de carga empleando distintos ratios de áreas y un rango de Reynolds que oscila entre 4×10^4 y 2×10^5 .

Este estudio concluye que los valores de coeficientes de pérdidas de presión a partir de la distribución de presión estática de pared es directamente proporcional al número de Reynolds (en un rango de estudio de $4 \times 10^4 < Re < 2 \times 10^5$). Además determina que la pérdida de presión está afectada por cuan abrupta es la contracción. También se asegura que los resultados son válidos con una precisión de entre un $\pm 5\%$ y un $\pm 10\%$ a altos números de Reynolds. Con bajos números de Reynolds debe usarse con precaución.

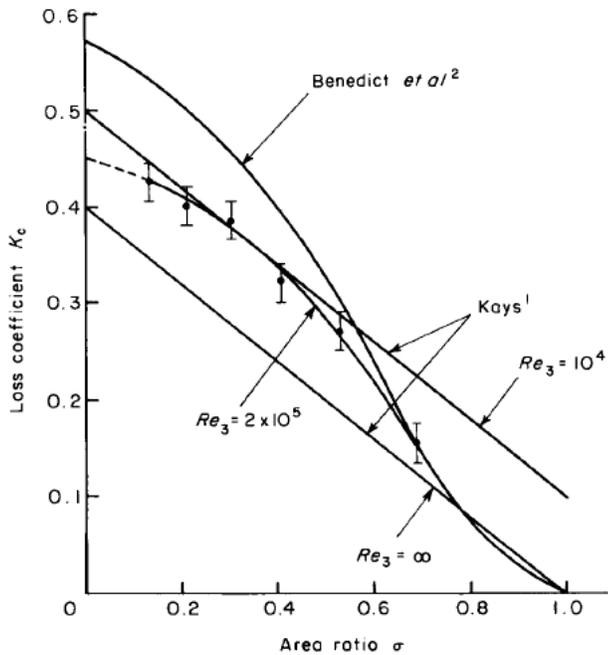
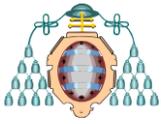


Figura 3. Comparación de coeficientes de pérdidas obtenidos de forma experimental en una contracción abrupta (Bullen et al, 1987)

En su estudio de 1996, completan su análisis realizado en 1987 utilizando mediciones de velocidad a partir de la técnica de LDV (Laser Doppler velocimetry). Esta técnica sirve para medir la velocidad de un flujo basada en las mediciones de la dispersión de la luz causada por las partículas dentro del flujo. Este nuevo método de medición, ha servido para obtener resultados con numerosos diámetros de contracción finales, y un amplio valor de números de Reynolds.

En los últimos años, numerosos estudios y trabajos han sido presentados, con el objetivo de realizar nuevas aportaciones en este campo, así como de recopilar la información de trabajos anteriores, algunos de estos trabajos son los siguientes:

1) Brater et al., (1996) y Trueba (1986) utilizan la ecuación procedente de los trabajos de Archer (1913) para calcular las pérdidas de energía originadas por una expansión abrupta.

2) Munson et al. (1998) y Fox et al. (2006) establecen que el coeficiente de pérdidas de carga por una

expansión abrupta, se determine a través de un gráfico, a partir de la relación de áreas entre ambos conductos.

3) Barrero et al. (2005) realizan una recopilación de los valores anteriores y aporta como nuevo dato un valor del coeficiente de pérdidas de presión para la entrada desde una tubería hacia un tanque de gran tamaño, en donde se cumpla la siguiente condición: $D_2 \gg D_1$ (por lo que $D_1/D_2 \approx 0$)

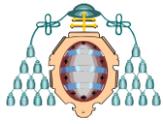
4) White (2006) partiendo de documentos previos y apoyándose en los resultados también obtenidos por Gerhart et al (1995) propone la siguiente ecuación para el coeficiente de pérdidas de carga en una contracción abrupta:

$$K_{Cont} \left(\frac{v_2^2}{2g} \right) \approx 0.42 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right] \left(\frac{v_1^2}{2g} \right) \quad (13)$$

5) Crespo (2006) aporta una nueva recopilación de información, estudios y resultados en un campo más general como es la mecánica de fluidos, realizando un texto destinado a estudiantes universitarios de ingeniería. En este documento incluye una ecuación para el coeficiente de pérdidas de carga de contracción y una tabla que relaciona las pérdidas de carga de contracción y la relación de diámetros.

6) Potter (2009) hace una reunión de estudios previos acabando por obtener un coeficiente de pérdidas de carga de contracción basándose en un documento datado de "The Crane Company" (1957)

7) Rennels y Hudson (2012) realizaron un estudio que ajusta los datos obtenidos por Weisbach (1972). A partir de su estudio desarrollan una gran cantidad de ecuaciones y tablas para obtener las pérdidas de carga en distintos tipos de contracción y expansión (variando en función del modelo de cambio de sección). De esta manera propone la siguiente ecuación para las pérdidas de carga en una contracción abrupta:



$$H_{Loss} = K_{acc} (1 - \beta^5) \lambda^2 + (\lambda - 1)^2 \quad (14)$$

donde, K_{acc} representa al coeficiente de pérdidas debidas a la aceleración del flujo y se toma como valor 0.0696. Además, $\beta = D_2/D_1$, y el ratio de velocidad del flujo λ :

$$\lambda = 1 + 0.622(1 - 0.215\beta^2 - 0.785\beta^5) \quad (15)$$

Rennels y Hudson (2012) aportan también un valor para las pérdidas de carga en una expansión abrupta basándose en la ecuación de Borda-Carnot:

$$H_{Loss} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad (16)$$

METODOLOGÍA

Modelo numérico

La simulación y las soluciones computacionales, han sido obtenidas a partir de la geometría mostrada en la figura 4.

Esta geometría ha sido creada a partir del software Gambit 2.4.6 (2007), y consiste en dos tubos: un primer tubo de diámetro (D_1) 0.025 m y un segundo tubo cuyo diámetro (D_2) va variando en función del caso de la simulación, tal y como se muestra en la tabla 1. La longitud total del dominio de computación es de 3.5 m, asegurando la longitud axial necesaria para conseguir un flujo completamente desarrollado en la salida, y situándose el cambio de sección en el punto medio de la longitud total del conducto.

Para los casos de tubería sin escalón y escalón con una relación de áreas de 0.5 ($D_2=0.5D_1$), se han generado tres mallados distintos, aumentando el número de celdas de cada uno y empleando estos casos para poder asegurar que los resultados obtenidos son independientes del mallado.

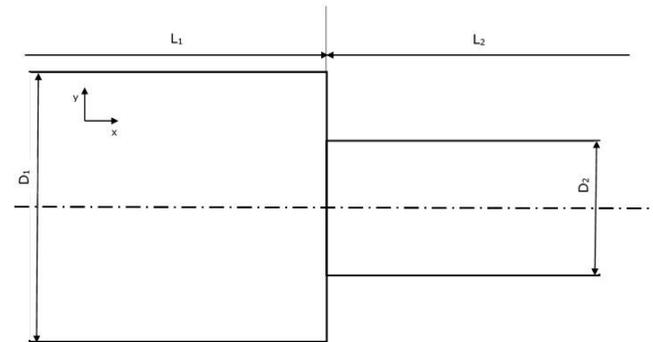


Figura 4. Esquema del modelo geométrico

FLUENT 6.3.26 (2005) ha sido el programa utilizado para la simulación. El modelo axisimétrico y estacionario ha sido seleccionado para analizar el flujo en el estudio de contracción y expansión.

Casos	Mallado	Número celdas
Caso con $D_2 = 0.9D_1$	Único	322050
Caso con $D_2 = 0.7D_1$	Único	410250
Caso $D_2=0.5D_1$	Grueso	245850
	Medio	420679
	Fino	694028
Caso con $D_2 = 0.3D_1$	Único	395000
Caso con $D_2 = 0.1D_1$	Único	356250
Caso sin escalón	Grueso	70000
	Medio	115000
	Fino	210000

Tabla 1. Tabla resumen de los mallados generados

Finalmente, en cuanto a las condiciones del fluido, se han tomado los datos del programa para agua líquida (water-liquid), que son entre otras, las siguientes:

Propiedades agua líquida Fluent	
Densidad (ρ)	998.2 [kg/m ³]
Coficiente de presión (C_p)	4182 [J/(kg-K)]
Conductividad térmica	0.6 [W/m-K]
Viscosidad	0.001003 [Kg/m-s]
Peso molecular	18.052 [Kg/Kg-Mol]
Entalpía estándar	-2.858412x10 ⁸ [J/Kg-Mol]
Entropía estándar	69902.21 [J/Kg-Mol-K]

Tabla 2. Tabla resumen condiciones del fluido en Fluent



Modelos de turbulencia utilizados

Debido a que el objetivo del problema es estudiar los resultados de varios modelos de turbulencia, se utilizan varios modelos de turbulencia para realizar las simulaciones:

- **k-ε**, RNG con mejora de tratamiento de pared
- **k-Ω (SST)**
- **Spalart Allmaras**

Ecuaciones de gobierno del cambio de sección

El análisis a partir de las ecuaciones de gobierno requiere la necesidad de definir un volumen de control sobre el modelo que se utiliza para este trabajo.

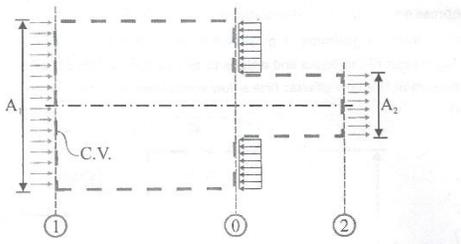


Figura 5. Volumen de control de la contracción (González et al., 2018)

Este volumen de control ha sido analizado considerando el equilibrio de fuerzas:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 - P_0 (A_1 - A_2) = \rho Q (V_2 - V_1) \quad (17)$$

En este punto, pueden considerarse distintas hipótesis para solucionar esta situación:

- Las pérdidas lineales tras la contracción son despreciadas ($P_0 \approx P_2$)

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \frac{A_2}{A_1} \right]^2 \quad (18)$$

- La presión estática en 0 es igual a la presión de estancamiento de 1 ($P_0 \approx P_1 + 0.5 \rho v_1^2$)

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \frac{A_2}{A_1} \right]^2 \quad (19)$$

- Considerando distintas hipótesis para la velocidad de la sección 0:

$$\text{iii.1. } V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (20)$$

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_1} \right]^2 \quad (21)$$

$$\text{iii.2. } V_0 = V_1 + \frac{V_2}{2} \quad (22)$$

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[\frac{1}{2} - \frac{A_2}{A_1} \right]^2 \quad (23)$$

$$\text{iii.3. } V_0 = \frac{V_1 (A_1 - A_2) + V_2 A_2}{A_1} \quad (24)$$

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \frac{A_2}{A_1} \right]^4 \quad (25)$$

$$\text{iii.4. } V_0 = V_2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \quad (26)$$

$$H_{Loss} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \frac{A_2}{A_1} \right]^2 \quad (27)$$



Todas las posibles expresiones obtenidas, tienden a valores de 1 o 0.5, cuando $\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \rightarrow 0$. Estos valores de 1 ó 0.5 representan el caso práctico de la salida hacia una tubería a partir de un gran tanque (donde la sección del tanque es muy superior a la tubería)

Simulación numérica

Mallado del modelo

Los mallados de los distintos modelos han sido realizados utilizando el software GAMBIT. El tamaño de las mallas en la zona cercana a la pared es más pequeño, para adaptarse a la fina capa que se espera ahí.

Con el objetivo estudiar la independencia de la malla, se analizarán los gradientes de presión y las pérdidas de carga a lo largo del dominio de análisis de la tubería, tanto para el fenómeno de la contracción como para el de la expansión, empleando distintos mallados del caso de $0.5D_1$ (mallados grueso, medio y fino) y siempre considerando el modelo de turbulencia de $k-\epsilon$. Este procedimiento de estudio de la independencia de la malla, se utiliza también en algunos archivos de la documentación existente, como en el trabajo de Kaushik, Ghosh, Das y Kumar Das (2012)

Independencia del mallado

El estudio de la independencia del mallado se ha realizado a través de los tres mallados para el caso de $0.5D_1$, simulados a partir del modelo de turbulencia de $k-\epsilon$. Los resultados de pérdida de presión y pérdida de carga son analizados a partir de los datos obtenidos de las simulaciones con las distintas mallas, y se corroborará que los resultados son independientes de la malla que es utilizada para las simulaciones.

Las pérdidas de carga en una tubería, dependen, de forma teórica, de las siguientes variables: secciones de tubería, longitud, caudal, material de la tubería y fluido utilizado. Debido a que todas las variables son idénticas en todas las simulaciones del mismo fenómeno (contracción o expansión), los valores de pérdida de carga deberían ser similares en todos los mallados de cara a demostrar la independencia de la malla.

Fenómeno	Malla	Pérdida presión ($\Delta P/m$)	Pérdida carga ($\Delta H/m$)
Contracción	Gruesa	36395,11	27850,95
	Media	36422,75	27879,91
	Fina	36286,85	27682,11
Expansión	Gruesa	20304,47	28851,93
	Media	20295,86	28840,63
	Fina	20501,45	29105,19

Tabla 3. Estudio de independencia de la malla (para el caso de $0.5D_1$)

Como puede observarse en la tabla 2, los valores de pérdidas de carga y diferencias de presión entre entrada y salida, son similares en todos los mallados utilizados para cada fenómeno. Por lo tanto, se puede concluir que las simulaciones son correctas y que los resultados obtenidos tanto con estos como con el resto de modelos son representativos de la solución del problema planteado.

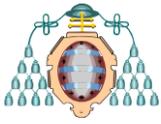
Criterio de convergencia

El criterio de convergencia general utilizado, cuando se están realizando análisis de simulación numérica de flujos (CFD), es variable a lo largo de la literatura en esta materia, ya que los trabajos previos emplean distintos métodos de cara a validar los resultados.

Por un lado, algunos autores comparan los resultados de sus simulaciones con resultados experimentales, considerando las discretizaciones válidas si sus resultados son similares a los experimentales.

Por otro lado, otros autores consideran que la validez de las soluciones de las simulaciones depende del estudio de la convergencia numérica. Este procedimiento decide la convergencia en base a los valores de los residuos de las variables calculadas: componentes de velocidad, variables $k-\epsilon$ del modelo y la ecuación de continuidad.

En este TFM, las computaciones numéricas se considera que han convergido cuando los residuos de las diferentes variables son menores a seis órdenes de



magnitud en todos los casos, llegando a once órdenes de magnitud en algunas simulaciones.

Para la realización de las simulaciones es necesario establecer las condiciones de contorno (entrada y salida):

- Salida: se establecen condiciones de presión atmosférica.
- Entrada: es necesario distinguir los casos de contracción y expansión.
 - Contracción: previo a la simulación, se obtiene el perfil de velocidad a la salida del mallado más fino de tubería recta. Este perfil de velocidad se impone como velocidad de entrada de la simulación de la contracción.
 - Expansión: previo a la simulación, se obtiene el perfil de velocidad a la salida del mallado más fino de tubería en la contracción. Este perfil de velocidad se impone como velocidad de entrada de la simulación de la expansión.

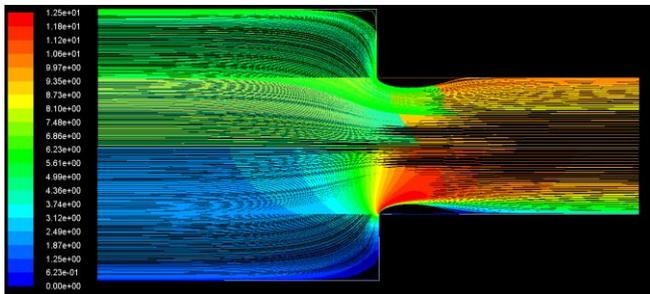


Figura 6. Líneas de flujo (arriba) y perfil de velocidad a lo largo del plano axial (abajo) en caso de contracción $0.5D_1$ fino con modelo $k-\varepsilon$

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El objetivo principal del trabajo, es la comparación entre los modelos de turbulencia empleados para realizar las simulaciones numéricas ($k-\varepsilon$, $k-\Omega$ y Spalart-Allmaras).

En este TFM, se han desarrollado seis casos con distintas relaciones de diámetros, disponiendo en los casos de tubería recta y tubería con $0.5D_1$ de tres mallados cada uno (todos los casos y mallados que aparecen en la tabla 1)

Sin embargo, los resultados empleados para la comparación de los distintos modelos de turbulencia serán los relacionados con el **caso de $0.5D_1$ en su mallado más fino**, considerando ambos fenómenos (contracción y expansión).

Estas simulaciones permiten obtener las propiedades y el comportamiento del flujo, y analizar sus valores en puntos previos y posteriores al cambio de sección.

A partir de los resultados de las simulaciones, se utilizarán los siguientes procedimientos para comparar los modelos de turbulencia:

1. Visualizar perfiles de velocidad y de presiones a lo largo del plano axial
2. Comparar gráficas velocidad \rightarrow para distintos puntos del mallado (variando horizontalmente la posición a lo largo del plano axial). Los puntos seleccionados son los siguientes:
 - $x = 1$ [m]
 - $x = 1.7$ [m]
 - $x = 3.5$ [m]

Es necesario tener en cuenta, que el flujo de la contracción circula de izquierda a derecha, y el relativo a la expansión de derecha a izquierda, tomando como referencia las figuras 1, 4 ó 7. Por ello las gráficas de velocidad para el fenómeno de la expansión disponen de resultados negativos.

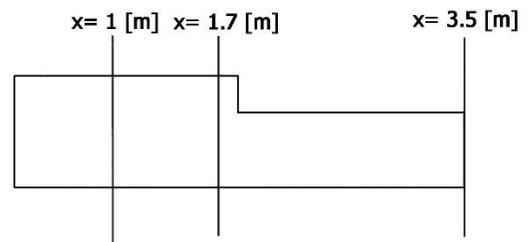
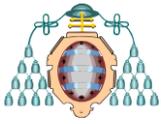


Figura 7. Secciones seleccionadas para el análisis de resultados

3. Coeficientes de pérdidas carga \rightarrow se analizarán los valores de coeficientes de pérdidas según dos comparaciones: por un lado, para distintas relaciones de diámetro,



empleando el modelo de turbulencia de $k-\epsilon$ y por otro lado, fijando la relación de diámetros a $0.5D_1$ y variando los modelos de turbulencia empleados para el análisis.

Contracción abrupta

Perfiles de presión y velocidad

El análisis de resultados del proceso de contracción, comienza revisando los perfiles de velocidad y presión para cada uno de los modelos de turbulencia. Considerando, tal y como se ha indicado anteriormente, que se compararán los resultados del caso de contracción y $0.5D_1$ con su mallado más fino.

Modelo $k-\epsilon$

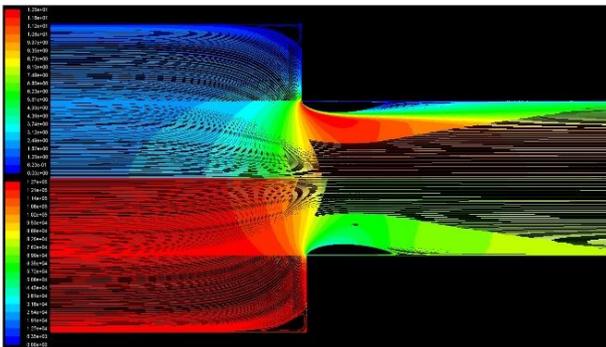


Figura 8. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de contracción $0.5D_1$ fino con modelo $k-\epsilon$

Modelo $k-\Omega$

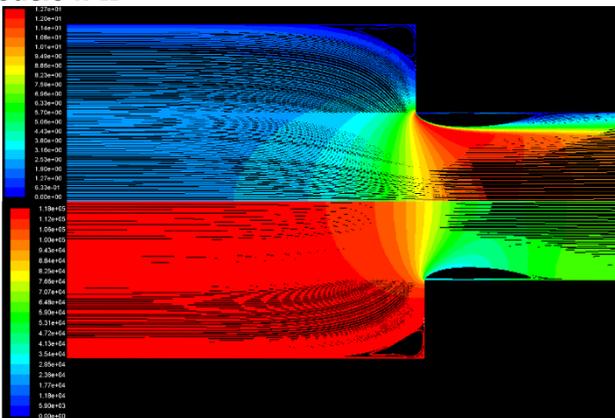


Figura 9. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de contracción $0.5D_1$ fino con modelo $k-\Omega$

Modelo Spalart-Allmaras

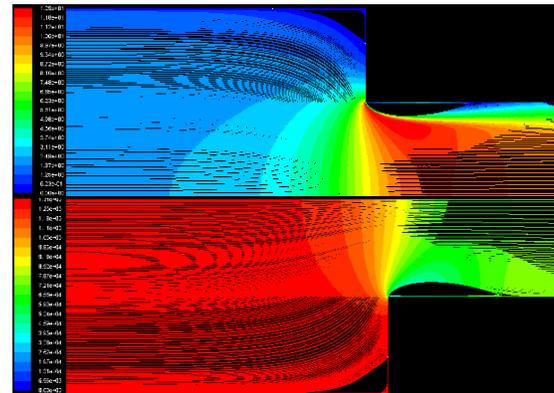


Figura 10. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de contracción $0.5D_1$ fino con modelo Spalart-Allmaras

A partir de los resultados mostrados en las gráficas, puede verse que los perfiles tanto de velocidad como de presión son similares en los tres modelos de turbulencia.

Realizando una comparación sobre los perfiles obtenidos, podemos ver que las líneas de flujo se superponen en los tres modelos simulados. Además, las cotas máxima y mínima mostradas en las leyendas de la gráfica son idénticas en los tres modelos, siendo las cotas:

- Presión \rightarrow máxima alrededor de 1.25×10^5 [Pa] y mínima alrededor de 0 [Pa]
- Velocidad \rightarrow máxima alrededor de 1.25×10^1 [m/s] y mínima alrededor de 0 [m/s]

Los resultados demuestran su homogeneidad independientemente del modelo de turbulencia empleado en la simulación.

Gráficas de velocidad a "x" fijas

Para continuar con el análisis, se obtienen las gráficas de velocidad respecto a los puntos del eje "x" seleccionados, para cada uno de los modelos de turbulencia, siempre con el caso de contracción de $0.5D_1$ en su mallado más fino.

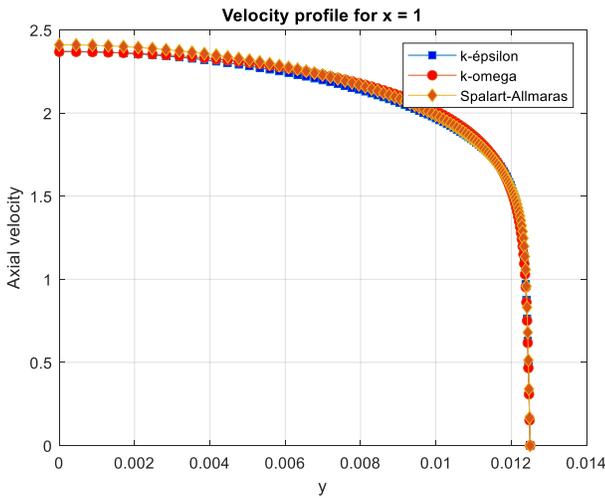
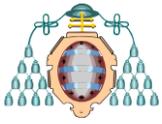


Figura 11. Perfil de velocidades para $x = 1$ [m] según el caso de contracción $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

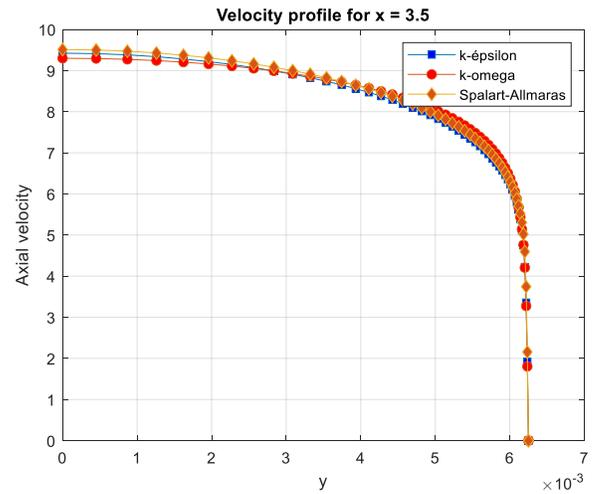


Figura 13. Perfil de velocidades para $x = 3.5$ [m] según el caso de contracción $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

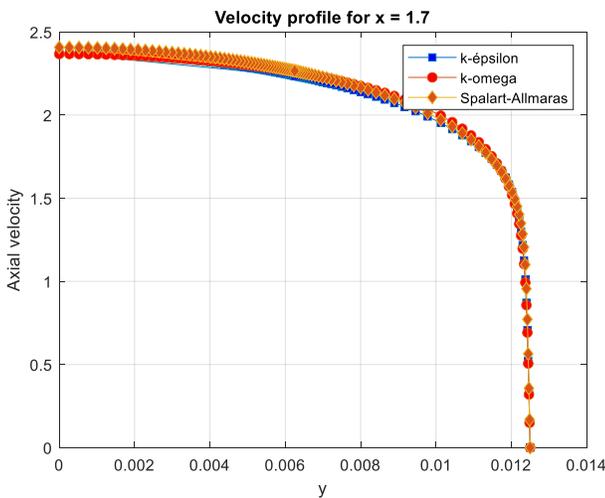


Figura 12. Perfil de velocidades para $x = 1.7$ [m] según el caso de contracción $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

Las gráficas de velocidad obtenidas sobre los tres puntos muestran la superposición de sus resultados para los distintos modelos de turbulencia, garantizando de esta manera la homogeneidad de las soluciones otorgadas por los mismos y, por tanto, reforzando la independencia entre los modelos de turbulencia y los resultados obtenidos.

Coefficientes de pérdidas de carga

Utilizando las ecuaciones de energía de fluidodinámica, y la formulación existente acerca de los coeficientes de pérdidas de carga, empleadas en los trabajos desarrollados anteriormente sobre este tema, se obtiene el coeficiente de pérdidas de carga debido al escalón.

En un primer apartado, se compararán los resultados de los coeficientes de pérdidas de carga con los resultados de autores que han realizado estudios previos sobre este tema.

Estas soluciones se han obtenido para distintas relaciones de área, empleando el mallado fino y el modelo de turbulencia de $k-\epsilon$.

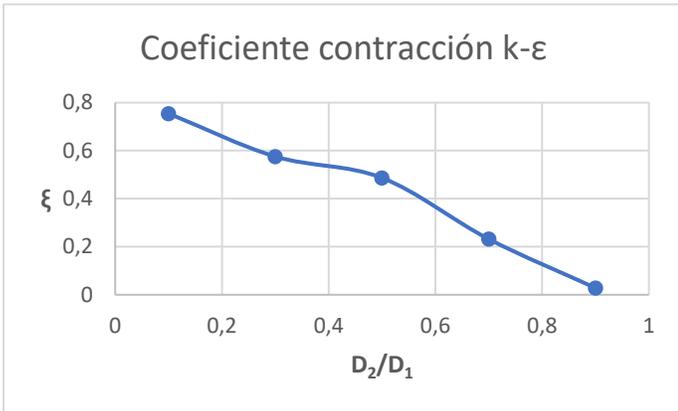
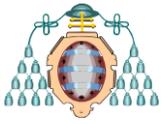


Figura 14. Coeficiente pérdidas de carga contracción, modelo k-ε, mallado fino distintas relaciones de área

Para poder asegurar los correctos resultados de este estudio, es necesario realizar la comparación entre nuestros resultados y los resultados de autores previos:

A partir de los valores mostrados en la figura 15, puede verse que el coeficiente de pérdidas de carga de contracción es coherente con los resultados de autores anteriores y puede, por tanto, considerarse correcto

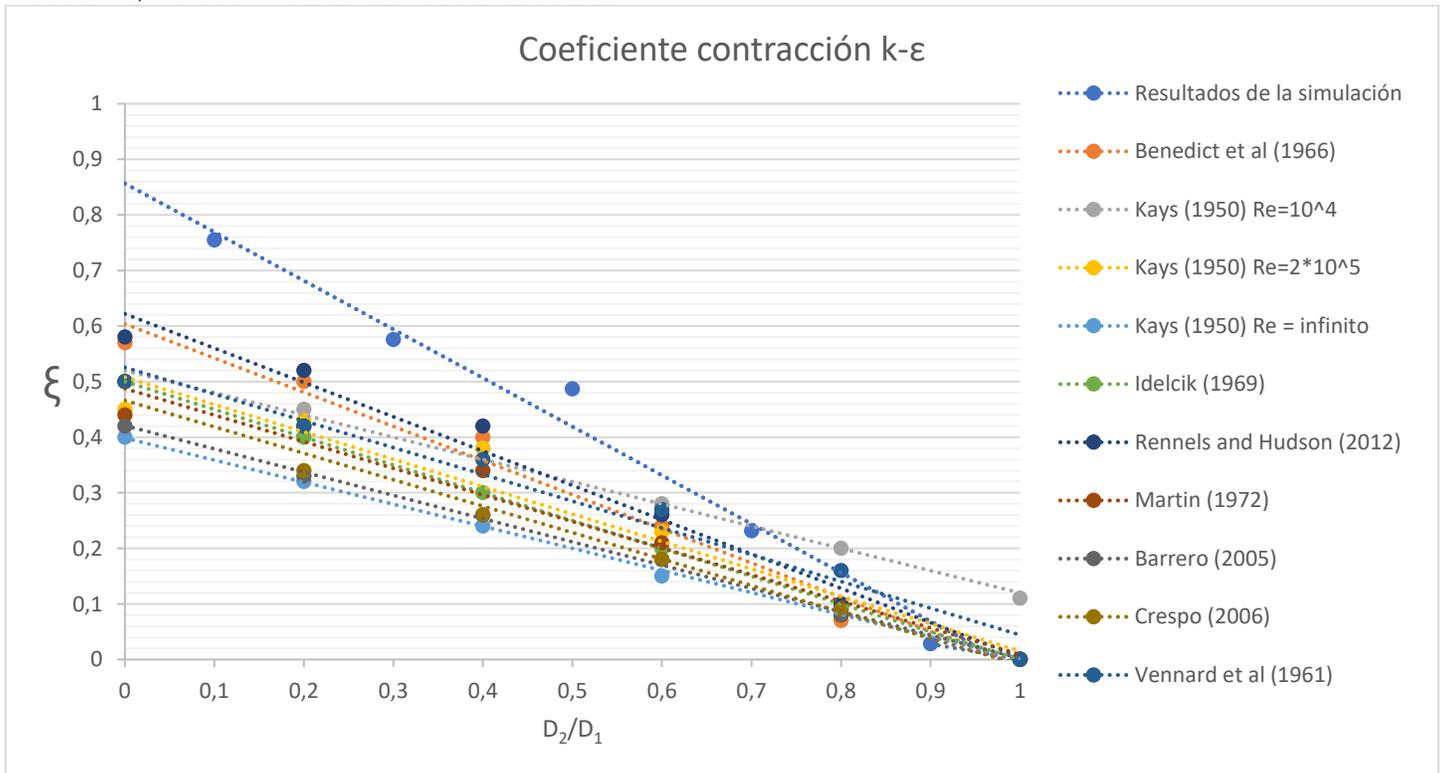
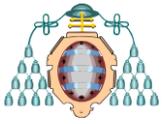


Figura 15. Comparación coeficientes de carga de contracción de distintos trabajos

Por otro lado, para la comparación de modelos de turbulencia, se ha optado por comparar los resultados del coeficiente de pérdidas de carga para el caso de la relación de áreas de $0.5D_1$ con mallado fino, empleando los tres modelos de turbulencia analizados en este estudio:

Modelo de turbulencia	ξ
k-ε	0.487
k-Ω	0.496
Spalart-Allmaras	0.492

Tabla 4. Estudio de independencia del modelo de turbulencia (coeficiente de pérdidas de carga para el caso de $0.5D_1$ y mallado fino)



Con los resultados mostrados en la tabla 4, se confirma la independencia entre los mismos y el modelo de turbulencia empleado en la simulación.

Expansión abrupta

Perfiles de presión y velocidad

En este apartado se muestran los resultados de las simulaciones relativas al proceso de expansión. Así, se mostrarán los perfiles de velocidad y presión para cada uno de los modelos de turbulencia, siempre para el caso de $0.5D_1$ con el mallado más fino.

Modelo k-ε

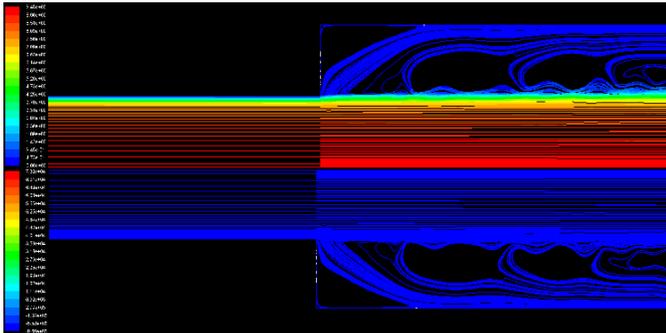


Figura 16. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de expansión $0.5D_1$ fino con modelo k-ε

Modelo k-Ω

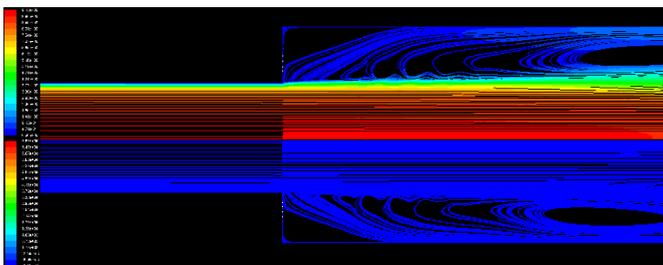


Figura 17. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de expansión $0.5D_1$ fino con modelo k-Ω

Modelo Spalart-Allmaras

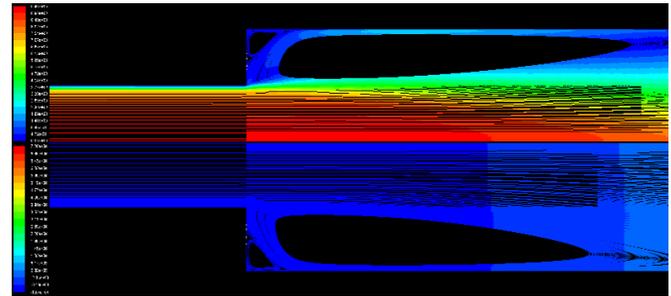


Figura 18. Perfil de velocidades (arriba) y perfil de presiones (abajo), ambos a lo largo del plano axial en el caso de expansión $0.5D_1$ fino con modelo Spalart-Allmaras

Con las gráficas obtenidas, puede saberse que tanto los perfiles de velocidad como los de presión son similares en los tres modelos de turbulencia.

Realizando una comparación sobre los perfiles obtenidos, podemos ver que las líneas de flujo tienden a superponerse en los tres modelos simulados. Además, las cotas máximas y mínimas mostradas en las leyendas de la gráfica son idénticas en los tres modelos, siendo las cotas:

- Presión → máxima alrededor de 7.35×10^4 [Pa] y mínima alrededor de -9.7×10^3 [Pa]
- Velocidad → máxima alrededor de 9.45×10^1 [m/s] y mínima 0 [m/s]

Los resultados obtenidos apoyan la defensa de la independencia del modelo de turbulencia empleado en la simulación

Gráficas de velocidad a "x" fijas

Las gráficas de velocidad respecto a los puntos del eje "x" seleccionados, para cada uno de los modelos de turbulencia, son obtenidas siempre con el mallado más fino y el caso de $0.5D_1$, según los puntos definidos en la figura 7.

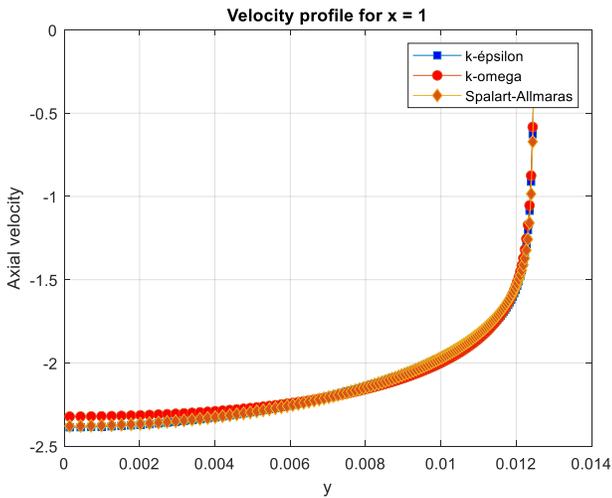
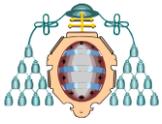


Figura 19. Perfil de velocidades para $x = 1$ [m] para el caso de expansión $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

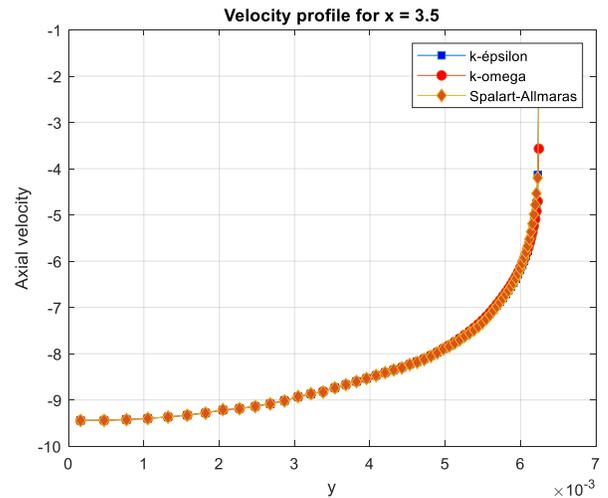


Figura 21. Perfil de velocidades para $x = 3.5$ [m] según el caso de expansión $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

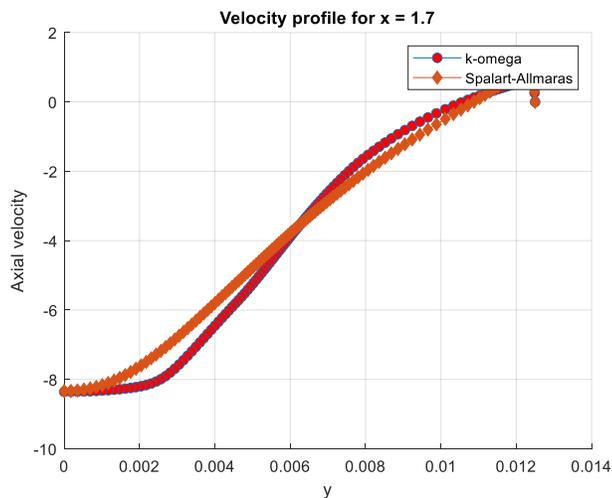


Figura 20. Perfil de velocidades para $x = 1.7$ [m] para el caso de expansión $0.5D_1$ fino con los distintos modelos de turbulencia

Los perfiles de velocidad obtenidos para los distintos puntos de la tubería, muestran la superposición de sus resultados para los distintos modelos de turbulencia evaluados. Este hecho garantiza la homogeneidad de las soluciones y, por tanto, apoya la independencia entre los modelos de turbulencia y los resultados obtenidos.

Gráficas de pérdidas de carga

La comparación de este apartado será idéntica a la empleada en los modelos de contracción.

La verificación de los coeficientes de pérdidas de carga según distintas relaciones de áreas, ha sido realizada a partir de los coeficientes según el modelo de turbulencia de $k-\epsilon$ con su mallado más fino.

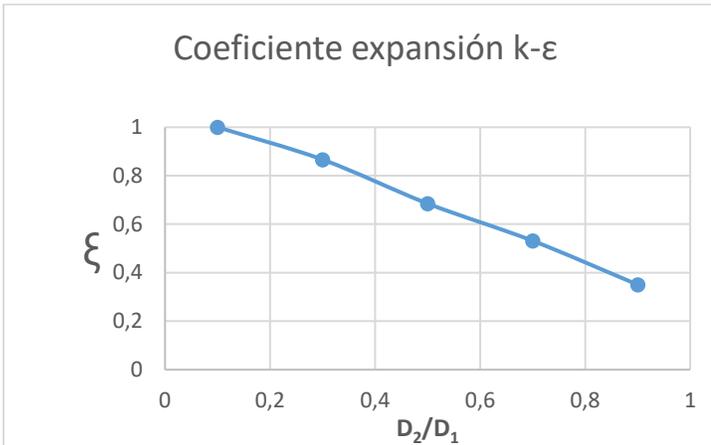


Figura 22. Coeficiente pérdidas de carga expansión, modelo k-ε, mallado fino distintas relaciones de área

Con el objetivo de asegurar que los resultados de este estudio son razonables, es necesario realizar la comparación entre los mismos y los resultados de autores previos:

A partir de los resultados, puede verse que los coeficientes de pérdidas de carga en la expansión abrupta, si bien se encuentran dentro de la escala esperada de valores, estos difieren en parte de los resultados de autores anteriores.

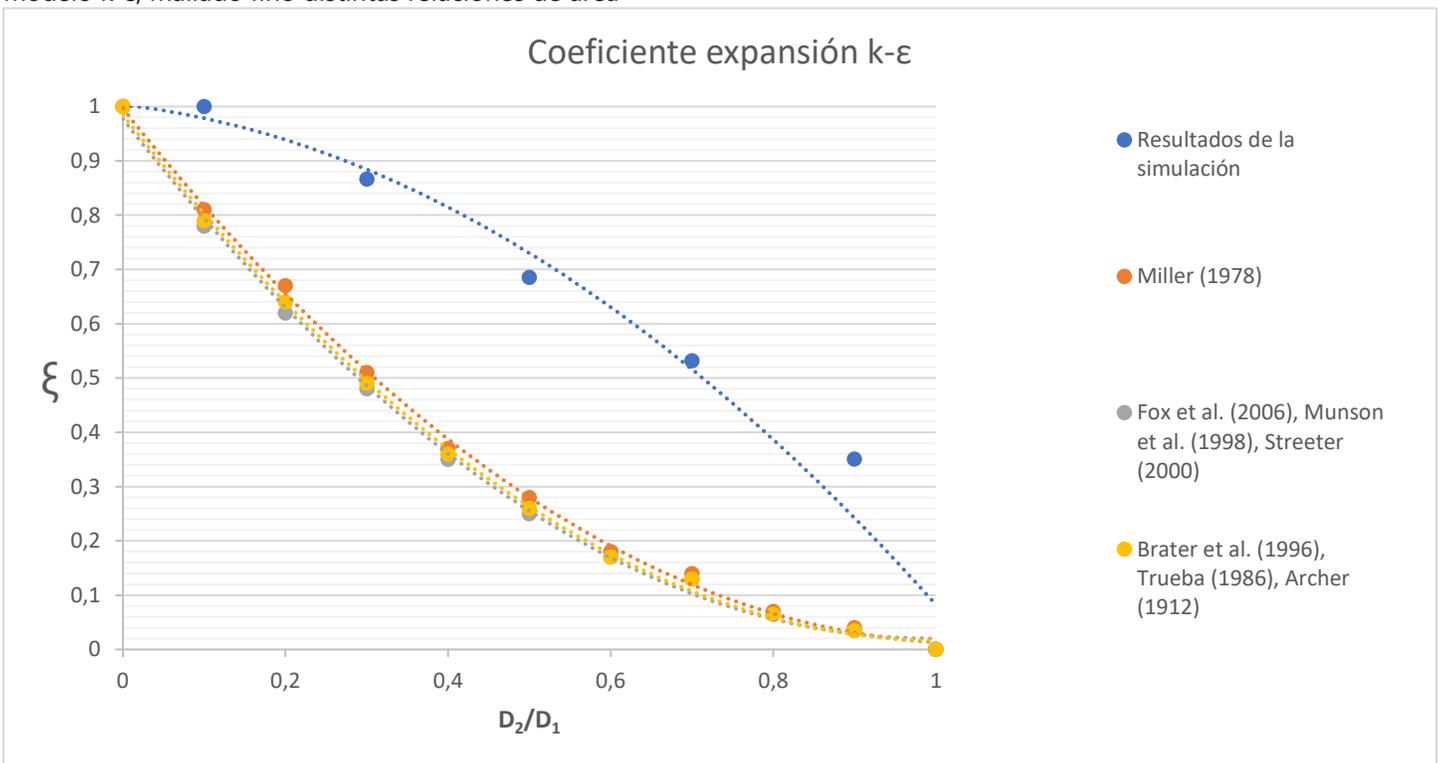
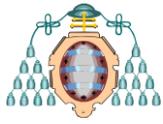


Figura 23. Comparación coeficientes de carga de expansión de distintos trabajos

Por otro lado, para la comparación de modelos de turbulencia, se ha optado por comparar los resultados del coeficiente de pérdidas de carga para la relación de áreas de $0.5D_1$ con los tres modelos de turbulencia analizados en este estudio:

Modelo de turbulencia	ξ
k-ε	0.685
k-Ω	0.689
Spalart-Allmaras	0.691

Tabla 5. Estudio de independencia del modelo de turbulencia (coeficiente de pérdidas de carga para el caso de $0.5D_1$ y mallado fino)



Con los resultados de coeficiente de pérdidas de carga de expansión, para los distintos modelos de turbulencia (tabla 5), se asegura la independencia el modelo de turbulencia empleado en la simulación y los datos obtenidos de la misma.

CONCLUSIONES

El flujo con cambio de sección (contracción y expansión) a lo largo de conducto cilíndrico ha sido simulado en este estudio, presentando distintos casos y mallados, y analizando distintos modelos de turbulencia.

Todos los casos han sido generados con el software Gambit en su versión 2.4.6, y las simulaciones han sido realizadas a través del software de CFD Fluent en su versión 6.3.26.

A partir de los resultados de este estudio, pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos en las simulaciones demuestran la independencia de los métodos de mallado (tabla 3). Es decir, con un mallado más simple y con menor número de celdas, también puede asegurarse una solución aproximada a la solución analítica del modelo.
- Los perfiles de velocidad y presión obtenidos, junto con las gráficas de velocidad, tanto en la contracción como en la expansión, muestran resultados similares para todos los modelos de turbulencia. Este hecho permite, no solo aceptar como válidas las simulaciones realizadas, sino que garantizan la independencia entre el modelo de turbulencia empleado en la simulación y los resultados obtenidos.
- El estudio de los cambios de sección, ha permitido obtener resultados fiables para todos los modelos de turbulencia para el fenómeno de contracción. Los valores de coeficientes de carga obtenidos para los distintos modelos de turbulencia (tabla 4), son idénticos para los tres modelos, y además

existe una gran similitud entre los resultados de estos coeficientes y los valores otorgados por autores previos (figura 15).

- El estudio del cambio de sección para el fenómeno de la expansión, ha permitido obtener resultados que demuestran la independencia del modelo de turbulencia, debido a que los valores de coeficientes de carga obtenidos son similares para los distintos modelos de turbulencia (tabla 5). Sin embargo, la comparación entre estos y los valores otorgados por autores previos (figura 23), no presenta tantas garantías como en el caso de la contracción.
- A partir del estudio realizado, se ha conseguido modelizar los fenómenos de interacción del flujo con un cambio de sección brusco y las pérdidas singulares asociadas a este fenómeno.
- Los datos obtenidos demuestran que los métodos de simulación numérica utilizados en este análisis del flujo permiten una gran flexibilidad y aplicabilidad para un diseño práctico.

NOMENCLATURA

- L_1 = Longitud entrada contracción/salida expansión [m]
- L_2 = Longitud salida contracción /entrada expansión [m]
- D_1 = Diámetro entrada contracción /salida expansión [m]
- D_2 = Diámetro salida contracción /entrada expansión [m]
- A_1 = Sección entrada contracción /salida expansión [m²]
- A_2 = Sección salida contracción /entrada expansión [m²]
- v_1 = Velocidad entrada contracción /salida expansión [m/s]
- v_2 = Velocidad salida contracción /entrada expansión [m/s]
- P_1 = Presión entrada contracción /salida expansión [Pa]
- P_2 = Presión salida contracción /entrada expansión [Pa]
- ΔP = Pérdida de presión en el cambio de sección [Pa]
- $\Delta H, H_{Loss}$ = Pérdida de carga en el cambio de sección [m]
- K, ξ = Coeficiente de pérdidas de carga [adimensional]
- K_{acc} = Coeficiente de pérdidas debidas a la aceleración del flujo [adimensional] = 0.0696
- Q = Caudal [m³/s]
- x = Posición a lo largo del plano axial [m]



t = Tiempo [s]

g = Constante de la aceleración de la gravedad (9.81 [m/s²])

ρ = Densidad del fluido (según Fluent = 998.2 [kg/m³])

β = Relación de diámetros [adimensional] = D_2/D_1

λ = Ratio de velocidad del flujo

k = Energía cinética turbulenta [J/Kg]

ϵ = Ratio de disipación específica [1/s]

Ω = Tasa específica de disipación viscosa

ξ = Coeficiente de pérdidas de cargas [adimensional] = K

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, José González Pérez, la oportunidad de realizar este proyecto, su ayuda, su paciencia y atención a lo largo de todos estos más de 18 meses.

También quiero dar las gracias de forma personal a Andrés Meana Fernández, por su ayuda incalculable en la preparación y simulación de modelos.

Por último, agradecer a mi familia y amigos el apoyo y la ayuda recibida, sobre todo ante el suceso de la pérdida de archivos.

REFERENCIAS

A continuación, se detallan las referencias bibliográficas más importantes consultadas durante la realización del texto. Estas se han ordenado alfabéticamente usando como referencia el apellido del primero de los autores de cada publicación (y posteriormente, para el mismo autor por orden cronológico).

Amano, R.S., 1984, "Development of a turbulence near-wall model and its application to separated and reattached flows". Num. Heat Transfer Vol:7, p:59-75

Ansyes Inc., 2017, "Ansyes Fluent tutorial guide". Ansyes Inc.

Archer, W.H., 1913. "Loss of head due to enlargements in pipes". Transactions ASCE, 76, 999-1026

Barrero Ripoll, A., Pérez-Saborid, M., 2005, "Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos". Mc. Graw-Hill Iberoamericana. Madrid (España)

Benedict, R.P., Carlucci, N.A., Swetz, S.D., 1966, "Flow losses in abrupt enlargements and contractions". Trans. ASME, J. Eng. For Power, 88, 73-81

Brater, E.F., King, H.W., Lindell, J.E., Wei, C.Y., 1996. "Handbook of hydraulics". McGraw-Hill, New York

Bullen, P.R., Cheeseman, D.J., 1983, "The definition of pipe contraction pressure loss coefficient for incompressible flow". Kingston Polytechnic, Internal Paper

Bullen, P.R., Cheeseman, D.J., Hussain, L.A., 1987, "The determination of pipe contraction pressure loss coefficients for incompressible turbulent flow". Butterworth & Co (Publishers) Ltd

Bullen, P.R., Cheeseman, D.J., Hussain, L.A., 1996, "A study of turbulent flow in pipe contractions". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol: 210

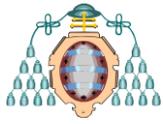
Chieng, C.C., Launder, B.E., 1980, "On the calculation of turbulent transport downstream from an abrupt pipe expansion". Num. Heat Transfer Vol:3, p:189-207

Crespo, A., 2006, "Mecánica de fluidos". Ed.Thomson. Madrid (España)

Fernández Oro, J.M., 2017, "Modelización de la turbulencia". Técnicas numéricas en ingeniería de fluidos. Universidad de Oviedo (Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón)

Fox, R.W., Pritchard, P.J., McDonald, A.T., 2006. "Introduction to fluid mechanics". John Wiley & Son.

Gerhart, P.M., Gross, R.J., Hochstein, J.I., 1995, "Fundamentos de Mecánica de Fluidos (Traducción de Del Valle, V.H.)" Addison-Wesley Iberoamericana S.A. Wilmington (Delaware, USA)



Gibson, A.H., 1910, "On the flow of water through pipes having converging or diverging boundaries". Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol.83, p:366

Gibson, A.H., 1912, "Conversion of kinetic to potential energy in the flow of water through passage having diverging boundaries". Engineering, Vol.93,p:205

González, J., Fernández Oro, J., 2018, "Fluid Mechanics: minor losses in sudden enlargements and contractions". Universidad de Oviedo (Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón)

González, J., 2017, "Turbomáquinas". Universidad de Oviedo (Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón)

Iacovides, H., Launder, B.E., 1984, "PSL – An economical approach to the numerical analysis of near-wall elliptic flows". J.Fluids Engng Vol:106, p:241-242

Idel'Chick, I.E., 1966, "Handbook of hydraulic resistance". US Atomic Energy Comm, AEC-tr-6636

Jones, W.P., Launder, B.E., 1976, "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence". International Journal Heat Mass Transfer Vol:6, p:301-314

Kaushik, V.V.R., Ghosh, S., Das, G., Kumar Das, P., 2012, "CFD simulation of core anular flow through sudden contraction and expansion". Journal of Petroleum Science and Engineering Vol: 86-87, p: 153-164

Kays, W. M., 1950, "Loss coefficients for abrupt changes in flow cross-section with low Reynolds number flow in single and multiple tube systems". Trans. ASME, 72, p:1067-1074

Kolgomorov, A.N., 1942, "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid". Izvestiya Akademii Nauk USSR: Physics, Vol.6, Nos. 1-2, p:56-58

Lahiouel, Y., Haddad, A., 2002, "Evaluation of energy losses in pipes". The 6th Saudi Engineering Conference, KFUPM, Dhahran.

Martin, J.J., 1972, "Expansion and contraction losses in fluid flow: An example of engineering analysis". Chemical Engineering Education, pp:138-140

Menter, F.R., 1993, "Zonal Two Equation k- ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows". 24th Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper N°93-2906

Menter, F.R., 1994, "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications". AIAA Journal, Vol.32 N°8, pp:1598-1605

Menter, F.R., Kuntzm M., Langtry, R.B., 2003, "Ten years of industrial experience with the SST turbulence model". Heat and Mass Transfer, N°4, pp: 625-632

Miller, D.S., 1978, "Internal flow systems". UK: BHRA information services

Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H., 1998. "Fundamentals of fluid mechanics". John Wiley & Son, New York

Polkowski, H., 1912, "Effect of sudden expansion or contraction in a pipe upon the flow of water". University of Illinois, Bachelor of Science Degree on Civil Engineering final report

Pope, S.B., 2001, "Turbulent flow". Cambridge University Press, Cambridge, UK

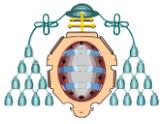
Potter, M.C., 2009, "Fluid Mechanics demystified". Mc. Graw-Hill, New York

Rennels, Donald C., Hudson, Hobart M., 2012, "Pipe Flow: A Practical and Comprehensive Guide". Jonh Wiley & Sons, Inc

Reza, C., 1985, "Flow in valves, fittings and pipes". Coord. Engineering Division of CRANE

Saffman, P.G., Wilcox D.C., 1974, "Turbulence-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers". AIAA Journal Vol.12, N°4

Sotelo, G., 1977, "Hidráulica general". Volumen 1, Limusa



Spalart, P.R., Allmaras S.R., 1994, "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows". La Recherche Aérospatiale, N°1, p:5-21.

Streeter, V.L., 1961, "Handbook of fluid dynamics". McGraw-Hill, New York

Steeter, V.L., Wylie, E.B., Bedford, K.B., 2000. "Mecánica de fluidos. McGraw-Hill Internacional SA"

Tennekes, H., Lumley, J.L., 1973, "A First Course in Turbulence". The MIT Press, Cambridge, Massachusetts

The Crane Company, 1957, "Technical Paper 410". The Crane Company

Trueba, C.S., 1986, "Hidráulica". Cia. Editorial Continental

Von Mises, R., 1917, "Berechnung von Ausfluss-und Überfallzahlen". Zeits

Weisbach, J., 1855, "Die experimental Hydraulik"

Weisbach, J., 1972, "Mechanics of Engineering (Trans. Core, E.B.)". Van Nostrand Book co., New York

White, F.M., 2006, "Fluid Mechanics". Mc Graw-Hill, New York

Wilcox, D.C., 1988, "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models". AIAA Journal, Vol.26, N°11, pp:1299-1310

Wilcox, D.C., 2008, "Formulation of the k- ω Turbulence Model Revisited". AIAA Journal, Vol.46, N°11